

Херцшпрунг-Раселов дијаграм

Лука Марковић

Математички факултет Универзитета у Београду

Септембар 2025.

- **Класификација звезда према површинској температури**
- **Привидни сјај и магнитуда звезде**
- **Апсолутна магнитуда и луминозност звезде**
- **Мерење звезданих растојања**
- **Херцшпрунг-Раселов дијаграм**
- **Закључак**

Део 1

Класификација звезда према површинској температури

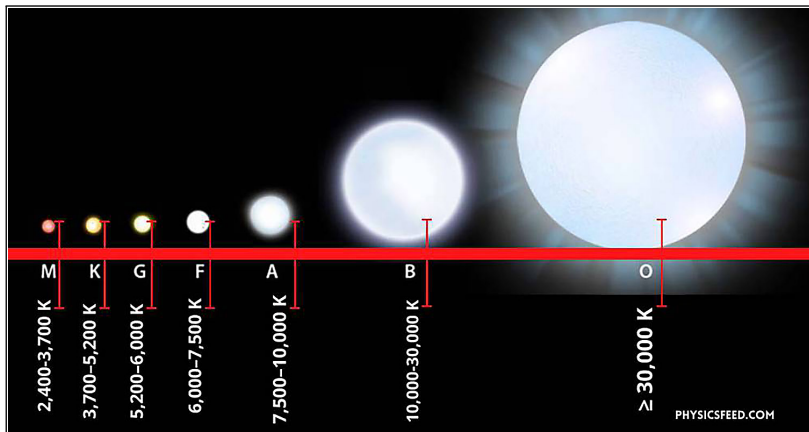
Какве све звезде постоје?

- Не постоје две идентичне звезде.
- Звезде се разликују по маси, величини, површинској температури, боји, сјају и количини енергије коју емитују у јединици времена.
- Да ли је свака комбинација ових параметара могућа?
- Нека ограничења сигурно постоје: не постоје зелене или љубичасте звезде.
- Везе између наведених величина морају бити ”апсолутне”, независне од места посматрача.
- Нека својства звезда могуће је лако утврдити: типичан пример је боја звезде.
- Нека друга својства је много теже измерити.
- Тако, на пример, количина енергије коју звезда емитује зависи од њене величине и апсолутног сјаја.
- Са Земље, међутим, лако можемо да утврдимо само привидни сјај звезде.
- Привидни сјај звезде зависи од апсолутног сјаја али и од растојања на коме се звезда налази.

Класе звезда

- Све звезде деле се на класе према тзв. Морган-Кинановом (МК) систему разрађеном на Харварду почетком XX века.[1]
- Класа звезде одређује се мерењем ширине карактеристичних Фраунхоферових линија водоника, хелијума, калцијума и титанијум-оксида у апсорпционом спектру звезде.
- Што је звезда топлија, ширина Фраунхоферових линија је већа.
- Прво су дефинисане класе **O**, **B**, **A**, **F**, **G**, **K** и **M**.
- Површинска температура звезде опада од класе **O** (најтоплије звезде) до **M** (најхладније).
- Свака класа има десет поткласа (0-9) у зависности од температуре. Сунце се налази у класи **G2**.
- Касније су додате класе **D** (бели патуљци), **L** и **T** (смеђи патуљци), **S** и **C** (угљеничне звезде).
- Овај систем користи се и даље али постоје и други, прецизнији, квантитативни системи.

Графички приказ звезданих класа



Слика: Главне спектралне класе са одговарајућим температурама, апроксимативним бојама и релативним величинама звезде

Индекс температуре звезде $B - V$

- $B - V$ индекс одређује се посматрањем сјаја звезде кроз два филтера.
- B -индекс одређује се посматрањем сјаја звезде кроз UB -филтер осетљив на ултраљубичасту и плаву боју.
- V -индекс одређује се посматрањем сјаја звезде кроз VB -филтер осетљив на већи део видљивог спектра (плаву, жуту и зелену боју).
- $B - V$ индекс представља разлику ова два индекса. Систем је тако баждарен да звезда Вега има $B - V$ индекс једнак нули.
- Мање вредности индекса одговарају топлијим звездама, веће вредности хладнијим.
- $B - V$ индекс за Сунце износи 0,656, а за плавичасти Ригел -0,03.
- Из овог индекса може се директно израчунати температура површине звезде:

$$T = 4600\text{K} \cdot \left[\frac{1}{0,92(B - V) + 1,7} + \frac{1}{0,92(B - V) + 0,62} \right]$$

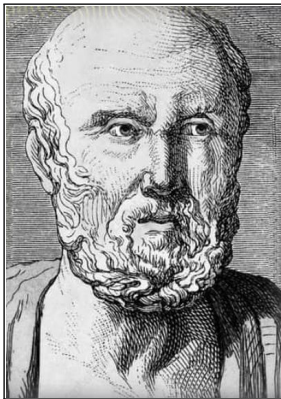
Детаљи спектралне класификације

- Класа звезде, њена температура и индекс боје су три еквивалентне величине.

Класа	Температура (К)	Боја	Маса (M_{\odot})	Водоничне линије спектра	Друге линије спектра	Процент звезда
O	> 33.000	плава	> 16	слабе	вишеструко јонизовани атоми	0,0003%
B	10.000 - 33.000	плава/бела	2,1 - 16	средње	неутрални хелијум	0,1%
A	7.500 - 10.000	бела/плава	1,4 - 2,1	јаке	јонизовани калцијум, неутрални хелијум	0,6%
F	6.000 - 7.500	бела	1,0 - 1,4	средње	јонизовани калцијум, метали	3%
G	5.200 - 6.000	жута	0,8 - 1,0	слабе	јаке линије метала	7,5%
K	3.700 - 5.200	жута/оранж	0,45 - 0,8	врло слабе	неутрални калцијум, титан-оксид	12%
M	< 3.700	оранж/црвена	< 0,45	врло слабе	јаке линије калцијума и титан-оксида, неутрални метали	76%

Део 2

Привидни сјај и магнитуда звезде



Слика: Хипарх, највећи антички астроном

- Довољан је један поглед на ноћно небо па да утврдимо да звезде сјаје различитим интензитетом.
- Хипарх је 135. године п.н.е направио каталог са 850 звезда у коме је свакој звезди доделио број од 1 до 6, у зависности од сјаја (магнитуде).
- Најсјајније звезде имале су ознаку 1 док су оне једва видљиве имале ознаку 6.
- Развој телескопа и фотометрије омогућио је да се сјај звезда објективно измери.
- У исто време утврђено је да људско око детектује промене у интензитету светлости по логартиамској скали.
- Такође је утврђено да звезде са ознаком 1 имају 100 пута већи сјај од звезде са ознаком 6.

Савремена скала звезданих магнитуда

- Хипархов систем, уз незнатне измене, користи се и данас!
- Суштински, користи се чињеница да, према Хипарховој логаритамској скали, разлика у магнитуди величине 5 одговара 100 пута јачем или слабијем интензитету светлости.
- То значи да је звезда која има магнитуду за један број мању од друге сјајнија од ње $\sqrt[5]{100} \approx 2,5$ пута.
- Хипархов систем у међувремену је рекалибрисан:
 - Звезда Вега има магнитуду 0.
 - Задржано је старо емпиријско правило да 100 пута сјајнија (тамнија) звезда има магнитуду мању (већу) за 5.
- С обзиром да на небу постоје објекти сјајнији од Веге (Сунце, Месец, Венера, Сиријус...), њихова магнитуда је негативна!
- Овако измерене магнитуде називају се **привидним** јер зависе од растојања посматраног објекта од нас.

Сјај неких небеских тела

- Сунце: -26,5
- Пун Месец: -12,5
- Венера: -4,3
- Марс и Јупитер: -3
- Меркур: -2
- Сиријус: -1,44
- Вега, Сатурн: 0
- Антарес: 1
- Северњача: 2
- Уран: 5
- Лимит голог ока: 6,5
- Церес: 7
- Нептун: 8
- Лимит двогледа: 10
- Проксима кентаури: 11,1
- Плутон: 14
- Лимит телескопа (8m): 28
- Лимит телескопа "Хабл": 32

Део 3

Апсолутна магнитуда и луминозност звезде

Апсолутна магнитуда (сјај) звезде

- Привидна магнитуда не говори много о количини енергије коју звезда емитује[2]. Неке звезде изгледају сјајније јер су нам ближе а не зато што емитују велику количину енергије.
- Зато је неопходно увести апсолутну магнитуду (сјај) која зависи само од снаге звезданог извора енергије.
- Апсолутна магнитуда дефинисана је као привидна магнитуда измерена са растојања од 10 парсека (1 парсек ≈ 3.26 светлосних година).
- Означимо апсолутну магнитуду са M , привидну магнитуду са m а наше растојање до звезде мерено у парсецима са d_{pc} .
- Када се узме у обзир да енергетски флукс звезде опада са квадратом растојања и да 100 пута сјајнији светлосни извор има магнитуду мању за 5, добија се следећа једначина:

$$M = m - 5(\log_{10} d_{pc} - 1)$$

- Одређивање апсолутне магнитуде своди се на мерење растојања до светлосног извора d_{pc} .

Луминозност

- По дефиницији, луминозност звезде L представља количину енергије коју звезда емитује у јединици времена.
- Уместо апсолутне вредности, луминозност се најчешће исказује релативно у односу на луминозност Сунца L_{\odot} .
- Ако апсолутну магнитуду звезде означимо са M а апсолутну магнитуду Сунца са M_{\odot} , онда се релативна луминозност звезде може срачунати формулом:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 100^{\frac{M_{\odot} - M}{5}}$$

- Референтне вредности за Сунце су: $L_{\odot} = 3,84 \times 10^{26} \text{W}$, $M_{\odot} = 4,75$. Нижим апсолутним магнитудама одговара већа луминозност (снага) звезде.
- Многе звезде имају много нижу апсолутну магнитуду од Сунца, самим тим и много већу луминозност: Бетелгез (-5,6), Наос (-6,0), Ригел (-7,0), Денеб (-7,2), Сиријус (1,4)...

Израчунавање радијуса звезде

- Приметимо да се на основу познате површинске температуре звезде (њене класе) и луминозности (апсолутне магнитуде), лако може одредити и величина звезде.
- Према Штефан-Болцмановом закону, емисиона моћ апсолутно црног тела, дефинисана као количина енергије j^* коју емитује јединица површине тела температуре T у јединици времена дата је једначином:

$$j^* = \sigma T^4$$

- Симбол σ означава Штефан-Болцманову константу која износи $5.6704 \cdot 10^{-8} \text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$.
- Пошто луминозност L представља укупну снагу звезде чија ја површина A следи да је њен порлупречник R :

$$L = j^* A = \sigma T^4 \cdot 4R^2 \pi \implies R = \sqrt{\frac{L}{4\sigma T^4 \pi}} = \frac{1}{2T^2} \sqrt{\frac{L}{\sigma \pi}}$$

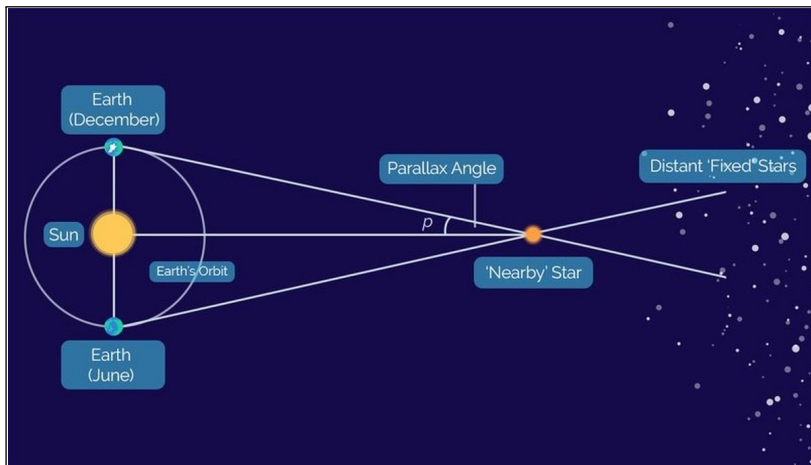
Део 4

Мерење звезданих растојања

Зашто је мерење растојања битно

- На претходним слајдовима показано је како се на основу привидне магнитуде звезде и растојања до ње може израчунати апсолутна магнитуда звезде.
- Такође је показано како се из апсолутне магнитуде може израчунати луминозност звезде.
- Сходно томе, за одређивање луминозности звезде потребна су само два улазна податка: привидна магнитуда звезде и растојање до ње.
- Привидна магнитуда звезде мери се врло лако.
- Међутим, мерење растојања до звезда и галаксија далеко је компликованије.
- Данас се користи више различитих метода за мерење растојања у космичком простору.
- Не постоји универзална метода која би се могла употребити у свим случајевима.

Метода паралаксе, концепт



Слика: Угао паралаксе приказан на слици у стварности је знатно мањи

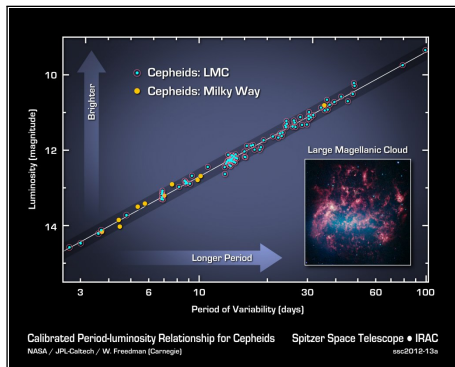
Метода паралаксе, коришћење и примена

- Звезде које се налазе врло далеко од нас изгледају потпуно непомично, без обзира на кретање Земље око Сунца.
- За релативно блиску звезду, промена тачке посматрања доводи до привидног померања звезде у односу на непомичну звездану позадину[3].
- Осмотрено померање је највеће ако се посматрања врше у размаку од 6 месеци, са два супротна краја Земљине путање.
- Измерено померање представља двоструки угао паралаксе p из кога се може израчунати растојање d_{pc} до звезде:

$$d_{pc} = \frac{1}{p}$$

- Када је угао паралаксе у степенима, растојање до звезде изражено је у парсецима.
- Са Земље се може измерити паралакса не мања од 0.01 лучне секунде, помоћу телескопа "Хабл" граница се спушта до 0.001. Зато се метода паралаксе користи само за блиске звезде на растојању 100-1000 парсека, што је свега неколико процената пречника Млечног пута.

Цефеиде, променљиве звезде



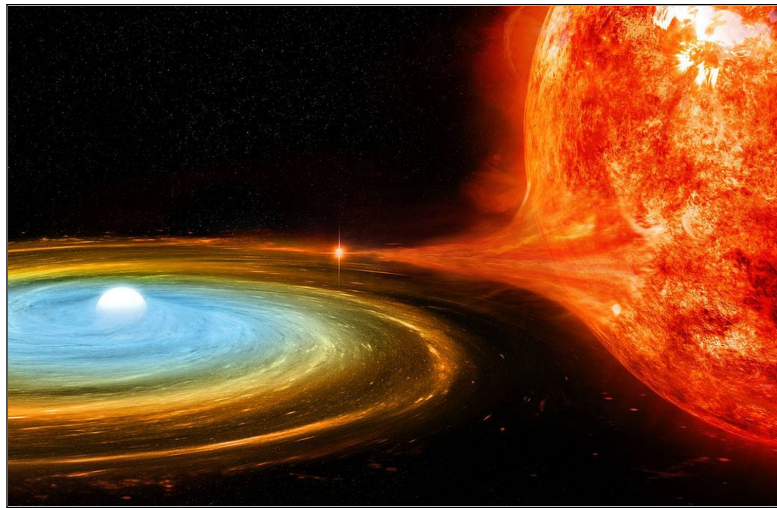
Слика: Линеарна веза између периода промене сјаја и луминозности за цефеиде унутар Млечног пута и Великог Магелановог облака

- Звезде које током времена мењају свој сјај називају се променљивим звездама.
- У ту групу спадају и цефеиде чији се сјај мења врло правилно, са периодом који износи од једног до 100 дана.
- Током једног циклуса цефеиде мењају луминозност (апсолутну магнитуду), полупречник и температуру.
- Оно што цефеиде чини тако специјалним је чињеница да постоји линеарна веза између њихове луминозности (којој одговара апсолутна магнитуда) и периода.

Зашто су цефеиде важне?

- Постоји линеарна веза између луминозности цефеида (којој одговара апсолутна магнитуда) и периода промене сјаја.
- Период и привидни сјај цефеиде су лако мерљиве величине. Из периода се може израчунати луминозност а на основу ње и апсолутна магнитуда.
- На основу релативне и апсолутне магнитуде лако се може израчунати растојање до звезде.
- Рачуницу компликује чињеница да постоје две фамилије цефида са различитим нагибима линије период-луминозност. Пажљивим посматрањем могуће је утврдити којој фамилији припада посматрана цефеида.
- Многе цефеиде су велике, веома светле звезде, могуће их је идентификовати не само у Млечном путу него и у суседним галаксијама.
- Земаљски телескопи могу да уоче цефеиде све до удаљености од 13 милиона светлосних година. Космички телескоп ”Хабл” успешно је идентификовао цефеиде на растојању од 56 милиона светлосних година.

Бели патуљци и супернове типа Ia



Бинарни систем у коме бели патуљак преузима материју од суседне звезде. Када маса белог патуљка пређе границу од $1.44M_{\odot}$, могућа је експлозија супернове типа Ia.

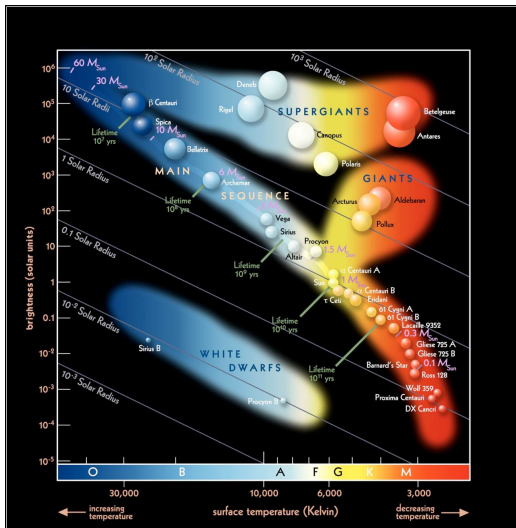
Специфичности супернове типа Ia

- Мале и средње звезде завршавају свој живот као бели патуљци.
- Реч је о топлотном језгру звезде која је потрошила нуклеарно гориво и одбацила спољне слојеве.
- Бели патуљак има екстремну густину. Претежно је сачињен од угљеника и кисеоника.
- Иако су бели патуљци релативно мали, гравитационо поље у њиховој близини екстремно је јако.
- Ако је бели патуљак део двојног звезданог система, бели патуљак може да почне да ”краде” материју од суседне звезде. Када маса белог патуљка пређе границу од $1.44M_{\odot}$, притисак у средишту постаје толико велики да отпочиње нуклеарна реакција.
- У свега пар секунди бели патуљак ће фузионисати скоро сав угљеник и кисеоник у теже елементе. Притом се генерише енергија упоредива са енергијом читаве галаксије.
- Настаје супернова типа Ia чија ће експлозија потпуно уништити бинарни систем.
- Све супернове типа Ia имају исту апсолутну магнитуду: **-19.3**. На основу привидног сјаја и апсолутне магнитуде може се израчунати даљина белог патуљка.
- Овом методом могу се мерити растојања од више милијарди светлосних година.

Део 5

Херцшпрунг-Раселов дијаграм

Најважнији дијаграм савремене астрономије

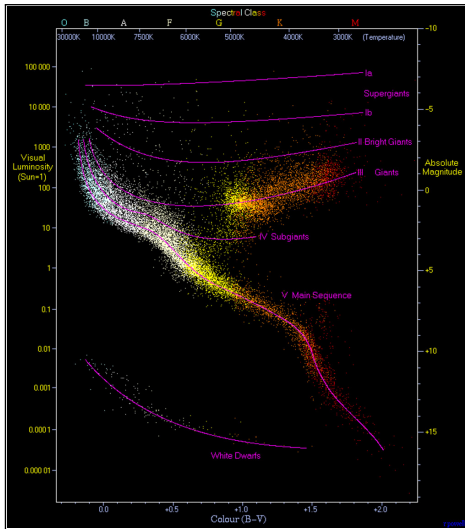


- Херцшпрунг-Раселов (H-R) дијаграм представља, по много чему, најважнији дијаграм у астрономији због улоге коју има у проучавању еволуције звезда.
- Дијаграм су, независно један од другог, креирали Ејнар Херцшпрунг и Хенри Норис Расел почетком XX века[4].
- Постоји неколико форми овог дијаграма али су у суштини све оне међусобно еквивалентне.
- У својој изворној верзији, H-R дијаграм представља зависност луминозности звезде од њене површинске температуре.
- Дијаграм лево илуструје положај различитих типова звезда на H-R дијаграму.

Еквивалентни облици H-R дијаграма

- На претходним слајдовима утврдили смо да постоји корелација између класе звезде, индекса B-V и површинске температуре звезде.
- Свака од ове три величине може да представља апсцису H-R дијаграма.
- Такође смо утврдили да постоји директна веза између луминозности и апсолутне магнитуде звезде.
- Било која од ове две величине може да представља ординату H-R дијаграма.
- Површинске температуре крећу се између 3.000 и 50.000 келвина. Иако распон температура обухвата само два реда величине, за апсцису се најчешће се користи логаритамска скала.
- Разлика у луминозности звезда много је већа (најмање десет редова величине) тако да је ордината увек логаритамска.
- Из чисто историјских разлога, апсциса је ”обрунта”: површинска температура звезде опада са десна у лево.

Како је настао H-R дијаграм?



- Звезде током времена мењају своју температуру и луминозност, самим тим и положај на H-R дијаграму.
- Због спорости промена, дијаграм није настао праћењем појединачних звезда током времена већ учртавањем звезда мерењем њиховог тренутног стања.
- Дијаграм је касније допуњен подацима из два велика звездана каталога: "Hiparcos" и "Gliese".
- Тако је настао дијаграм на левој страни који садржи податке за око 20.000 звезда.
- Дијаграм приказује звезде у разним фазама њихове еволуције.

Елементи H-R дијаграма

- Најуочљивији део дијаграма, тзв. "Главни низ" простире се дијагонално, од горњег левог до доњег десног угла.
- Бројност звезда драстично расте како се спуштамо низ главни низ, од плавих, екстремно топлих и великих звезда до релативно хладних и тамних.
- Када млада звезда започне да фузионише водоник у хелијум, она заузме почетно место негде у главном низу. У том низу, звезда проведе око 90% свог живота.
- Када звезда потроши своје водонично гориво, површинска температура опада али запремина драстично расте: звезда прелази у горњи део дијаграма у коме се налазе плави и црвени џинови и супер-џинови, звезде у задњим стадијумима еволуције.
- Звезде мале величине завршавају свој живот као бели патуљци (на дијаграму се налазе испод главног низа), оне веће као супернове иза којих остају неутронске звезде или црне рупе.

Неке особине H-R дијаграма

- Дијаграм показује да природа не уме да створи звезде произвољне температуре и луминозности. Највећи део дијаграма је празан.
- Утврђено је да за звезде у главном низу постоји директна веза између луминозности L и масе звезде M :

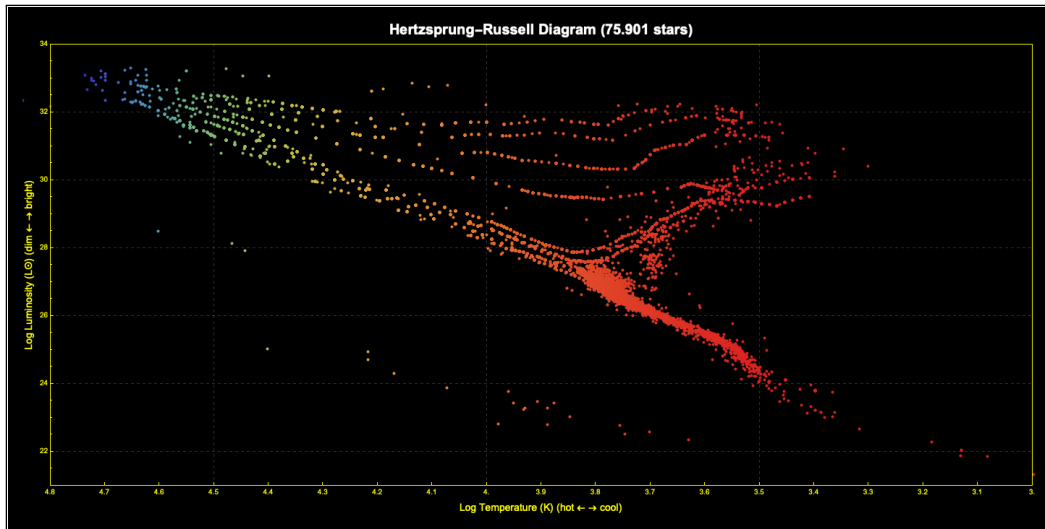
$$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{\alpha}, \quad \alpha \approx 3,5$$

- Из положаја звезде на дијаграму може се закључити у којој фази свог животног циклуса се звезда налази.
- H-R дијаграм се користи и као универзални ”даљинар”: анализом спектра можемо да утврдимо да се звезда налази у главном низу и да има одређену класу. Из класе се може одредити температура а на основу ње се са H-R дијаграма очита њена луминозност, тј. апсолутна магнитуда. Из привидне и апсолутне магнитуде лако се срачуна растојање до звезде.
- Сличан поступак може се спровести и за звезде изван главног низа али је рачуница компликованија.

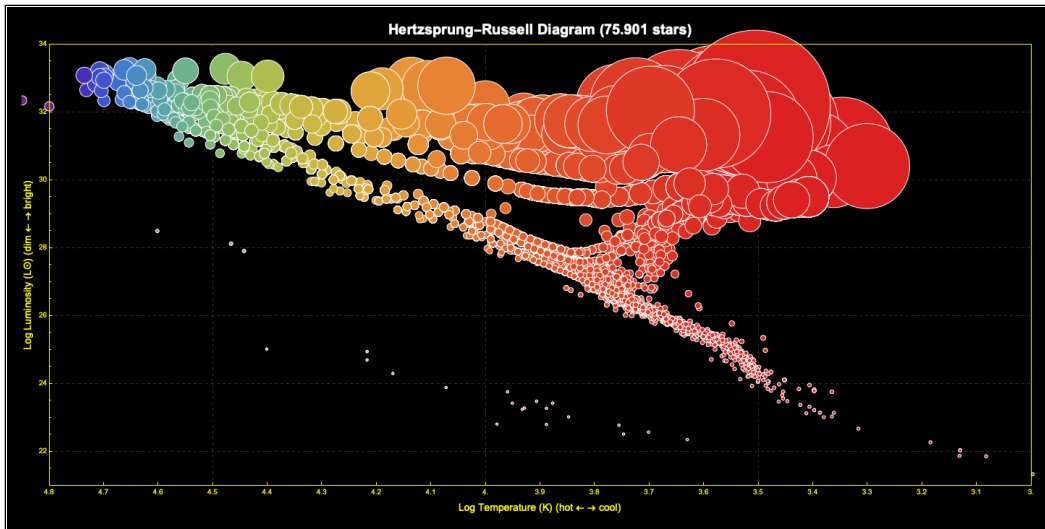
Конструкција H-R дијаграма коришћењем програма "Mathematica"

- "Mathematica" од верзије 10 има могућност да са "Mathematica" сервера преузме податке за преко 400.000 звезда. То омогућава функција **StarData[]**.
- Количина расположивих података варира од звезде до звезде.
- Пажљивим филтрирањем података могуће је пронаћи око 75.000 звезда за које је дефинисана и површинска температура и луминозност.
- На основу ових података могуће је нацртати H-R дијаграм чији се финални облик у потпуности слаже са дијаграмима који су начињени коришћењем неупоредиво већег узорка.
- Дијаграм не изгледа као да садржи 75.000 тачака али то је последица чињенице да су подаци о звездама врло грубо заокружени тако да се вредности врло често поклапају.
- Дијаграм се може учинити "интересантнијим" тако што се температура и луминозност звезде пре цртања помноже неким бројем из сегмента $[1 - x, 1 + x]$, где је x нека мала вредност.
- Оригинални "Mathematica Notebook" фајл са изворним кодом може се преузети са линка који је уцртан на сам дијаграм на следећем слајду.

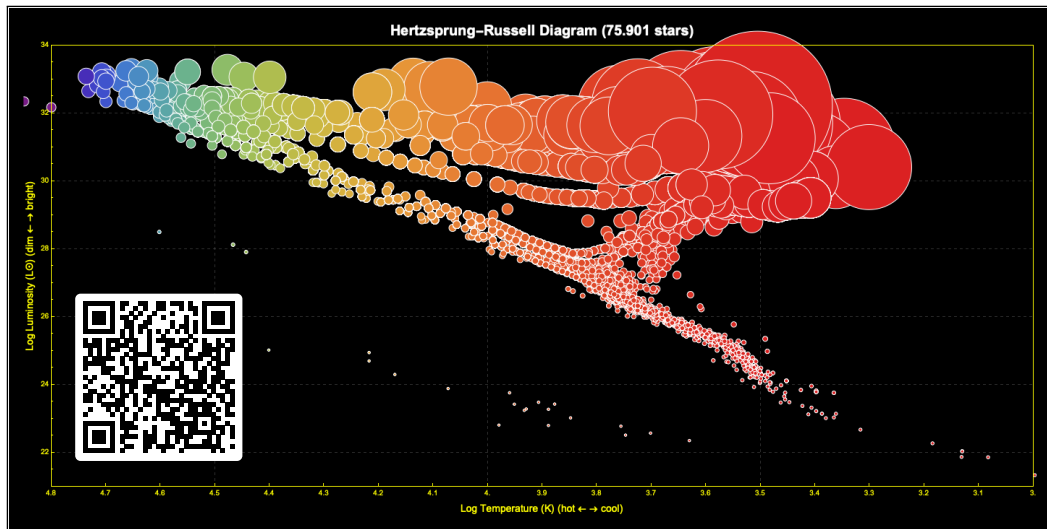
H-R дијаграм нацртан коришћењем програма "Mathematica"



H-R дијаграм нацртан коришћењем програма "Mathematica"



H-R дијаграм нацртан коришћењем програма "Mathematica"



Део 6

Закључак

Значај Херцшпрунг–Раселовог дијаграма

- Приказује однос између луминозности (апсолутне магнитуде) и температуре (спектралне класе звезда).
- Доказује да главна својства звезда нису потпуно произвољна, напротив: постоји јака корелација између њих.
- Омогућава класификацију звезда у неколико главних група: главни низ, џинови, суперџинови и бели патуљци.
- Служи као алат за разумевање еволуције звезда – положај звезде на дијаграму одређује у којој фази живота се звезда налази.
- Омогућава процену старости и начин развоја звезданих јата и галаксија.
- Представља један од најважнијих инструмената у астрофизици јер повезује спољашња опажања са теоријом унутрашње грађе звезда.
- Омогућава мерење растојања до звезда где други методи нису на располагању.

- [1] Britannica, *Stellar Classification*, <https://www.britannica.com/science/stellar-classification>
- [2] Wikipedia, *Magnitude (astronomy)*, [https://en.wikipedia.org/wiki/Magnitude_\(astronomy\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Magnitude_(astronomy))
- [3] Dina Prialink, *An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution*, Cambridge University Press, 2009, p. 3
- [4] Mathias Scholz, *The Physics of Stars: Structure, Evolution and Properties*, Springer, 2025, pp. 28-29