华东师范大学期中试卷 A 卷
2023-2024 学年第一学期
参考答案及评分标准

课程名称：概率论与数理统计

学生姓名：______ 学　　号：______

专　　业：软件工程　年级/班级：2023 级

课程性质：公共必修、公共选修、专业必修、专业选修

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分	阅卷人签名

一、选择题 (每小题 2 分，共 20 分)

1. 设 A, B 为两个相互独立的随机事件，且 A, B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$, A 发生 B 不发生的概率与 A 不发生 B 发生的概率相等。求 A 发生的概率是 (　　)

   A. $\dfrac{2}{3}$　　B. $\dfrac{2}{9}$　　C. $\dfrac{2}{5}$　　D. $\dfrac{1}{9}$

2. 甲乙两人约定上午 9 点到 10 点之间约会，两人到达时间差不超过 10 分钟则约会成功，两人到达时间差超过 10 分钟则约会失败。求两者约会成功的概率是(　　)

   A. $\dfrac{1}{36}$　　**B.** $\dfrac{11}{36}$　　C. $\dfrac{1}{26}$　　D. $\dfrac{11}{26}$

3. 设 X, Y 为随机变量，且 $P\{X \geq 0\} = 1/2, P\{Y \geq 0\} = 3/5, P\{X \geq 0, Y \geq 0\} = 1/4$。求 $P\{\min(X, Y) < 0\}$ 和 $P\{\max(X, Y) \geq 0\}$ 分别为 (　　)

   A. $\dfrac{1}{4}; \dfrac{7}{10}$　　B. $\dfrac{1}{12}; \dfrac{5}{9}$　　C. $\dfrac{7}{15}; \dfrac{3}{8}$　　**D.** $\dfrac{3}{4}; \dfrac{17}{20}$

4. 已知甲口袋中有 2 个白球和 4 个黑球，乙口袋中有 3 个白球和 3 个黑球，从甲口袋中取两个球放入乙口袋，再从乙口袋中任取一个球。计算 ①：取出的球为黑球

的概率；②: 若已知乙口袋取出的球为黑球，则甲口袋取出的 2 个球是白球的概率, 则以下选项正确的是 (　　)

A. ① : $\frac{7}{24}$;　② : $\frac{3}{65}$　　**B.** ① : $\frac{13}{24}$**;**　② : $\frac{3}{65}$

C. ① : $\frac{1}{24}$;　② : $\frac{7}{65}$　　D. ① : $\frac{11}{24}$;　② : $\frac{7}{65}$

5. 设随机变量 ξ 密度函数为 $p(x)$ ，则 $\eta = 3\xi - 1$ 的密度函数 $p_\eta(y)$ 为 (　　)

A. $\frac{1}{3}p(\frac{y+1}{3})$**;**　B. $3p(\frac{y+1}{3})$;　C. $\frac{1}{3}p(3(y+1))$;　D. $3p(\frac{y-1}{3})$.

6. 离散随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，且 $x_{k-1} < x_k < x_{k+1}$, 则 $P\{X = x_k\} =$ (　　)

A. $P\{x_{k-1} \le X \le x_k\}$;　B. $F(x_{k+1}) - F(x_{k-1})$;

C. $P\{x_{k-1} < X < x_{k+1}\}$;　**D.** $F(x_k) - F(x_{k-1})$**.**

7. 设 $f(x)$ 为某分布的概率密度函数，$f(1+x) = f(1-x)$, $\int_0^2 f(x)dx = 0.6$，则 $P\{X < 0\} =$ (　　)

A. 0.2**;**　B. 0.3;　C. 0.4;　D. 0.6.

8. 设两个随机变量的分布函数和密度函数分别是 $F_1(x), F_2(x)$ 和 $f_1(x), f_2(x)$。则 (　　)

A. $F_1(x) + F_2(x)$ 是分布函数　**B.** $F_1(x) \cdot F_2(x)$ 是分布函数**;**

C. $f_1(x) + f_2(x)$ 是密度函数　D. $f_1(x) \cdot f_2(x)$ 是密度函数.

9. 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 则随机变量 $U = X + Y, V = X - Y$ 不相关的充分必要条件为 (　　)

A. $EX = EY$　**B.** $E(X^2) - (EX)^2 = E(Y^2) - (EY)^2$**;**

C. $E(X^2) = E(Y^2)$　D. $E(X^2) + (EX)^2 = E(Y^2) + (EY)^2$

10. 将一枚骰子重复掷 n 次, 则当 $n \to \infty$ 时, n 次掷出点数的算数平均值 $\overline{X}_n$ 依概率收敛于 (　　)

A. $\dfrac{n}{6}$　　B. $\dfrac{1}{6}$　　**C.** $\dfrac{7}{2}$　　D. $\dfrac{7n}{2}$

二、填空题 (每小题 4 分，共 20 分)

11. 设 A,B,C 是三个事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=1/4$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=1/8$。则 A,B,C 至少有一个发生的概率是 $\underline{\ \frac{5}{8}\ }$。

12. 甲、乙两人向同一个目标射击，命中率分别为 0.5 和 0.6 。若甲、乙两人同时向目标射击，命中的概率记为 $P(A)$；若甲、乙两人同时向目标射击，已知目标被命中，该目标是甲命中的概率记为 $P(B)$。则 $P(A)-P(B)=\underline{\ \frac{7}{40}\ }$。

13. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率等于 0.5, 则 $\mu=\underline{\ \mathbf{4}\ }$。

14. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$, $F(x)$ 为 X 的分布函数，$E(X)$ 为 X 的数学期望，则 $P\{F(X)>E(X)-1\}=\underline{\ \frac{2}{3}\ }$。

15. 设 X,Y 为随机变量，数学期望都是 2, 方差分别为 1 和 4, 相关系数为 0.5, 则由切比雪夫不等式, $P\{|X-Y|\geq 6\}\leq\underline{\ \frac{1}{12}\ }$.

三、计算题 (每小题 10 分，共 60 分)

附表:

x	1.20	1.34	1.50	1.645	2.00	2.50	2.60
$\Phi(x)$	0.855	0.9099	0.933	0.95	0.977	0.994	0.995

16. 设第一只盒子中装有 4 只蓝色球、3 只绿色球、2 只白色球，第二只盒子中装有 3 只蓝色球、5 只绿色球、4 只白色球. 独立地分别在两只盒子中各取一只球。

(1). 求至少有 1 只蓝色球的概率。

(2). 求有 1 只蓝色球、1 只白色球的概率。

(3). 已知至少有 1 只蓝色球，求有 1 只蓝色球、1 只白色球的概率。

解：B_i 记事件“从第 i 只盒子中取得一只蓝色球”，以 W_i 记事件“从第 i 只盒子中取得一只白色球”, $i=1,2$．由题设在不同盒子中取球是相互独立的。

(1) 即需求 $P(B_1 \cup B_2)$．利用对立事件来求较方便，即有

$$P(B_1 \cup B_2) = 1 - P(\overline{B_1 \cup B_2}) = 1 - P(\overline{B_1 B_2}) \tag{1}$$

$$= 1 - P(\overline{B_1})P(\overline{B_2}) = 1 - \frac{5}{9} \times \frac{9}{12} \tag{2}$$

$$= \frac{7}{12} \tag{3}$$

(2) 即需求事件 $B_1W_2 \cup B_2W_1$ 的概率，注意到 B_1，W_1 是互不相容的，即 B_1W_1□，因而 $(B_1W_2)(B_2W_1)$□，故有

$$P(B_1W_2 \cup B_2W_1) = P(B_1W_2) + P(B_2W_1) \tag{4}$$

$$= P(B_1)P(W_2) + P(B_2)P(W_1) \tag{5}$$

$$= \frac{11}{54} \tag{6}$$

(3) 即需要条件概率 $p = P(B_1W_2 \cup B_2W_1 | B_1 \cup B_2)$. 因 $(B_1W2 \cup B_2W_1) \subset B_1 \cup B_2$，故有

$$p = P[(B_1W_2 \cup B_2W_1)(B_1 \cup B_2)]/P(B_1 \cup B_2) \tag{7}$$

$$= P(B_1W_2 \cup B_2W_1)/P(B_1 \cup B_2) \tag{8}$$

$$= \frac{22}{63} \tag{9}$$

17. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0<x<1, 0<y<\infty \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试求 (1) 试确定常数 b; (3 分)

(2) 求边缘概率密度 $f_X(x)$ 与 $f_Y(y)$. (4 分)

(3) 求函数 $U=\max\{X,Y\}$ 的分布函数. (3 分)

(1)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1 \\ \int_0^{\infty}\int_0^{1} be^{-(x+y)}\,dx\,dy=1 \\ b[\int_0^{\infty} e^{-y}\,dy][\int_0^{1} e^{-x}\,dx]=1 \\ b(1-e^{-1})=1 \end{aligned}$$

得 $b=\dfrac{1}{1-e^{-1}}=\dfrac{e}{e-1}$

(2)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy=\begin{cases} \frac{1}{1-e^{-1}}\int_0^{\infty} e^{-x}e^{-y}\,dy=\frac{e^{-x}}{1-e^{-1}}, & 0<x<1, \\ 0, & else. \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx=\begin{cases} \frac{1}{1-e^{-1}}\int_0^{1} e^{-x}e^{-y}\,dx=e^{-y}, & y>0, \\ 0, & else. \end{cases}$$

(3)

由 (2) 知 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$, 故 X，Y 相互独立，分别记 $U=max\{X,Y\}$,X 和 Y 的分布函数为 $F_U(u), F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 则有

$$F_U(u)=F_X(u)F_Y(u) \tag{A}$$

由 (2) 知

$$F_X(u)=\int_{-\infty}^{u} f_X(x)\,dx=\begin{cases}0, & u<0,\\ \int_0^u \frac{e^{-x}}{1-e^{-1}}\,dx, & 0\le u<1,\\ 1, & u\ge 1.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & u<0,\\ \frac{1-e^{-u}}{1-e^{-1}}, & 0\le u<1,\\ 1, & u\ge 1.\end{cases}$$

$$F_Y(u)=\int_{-\infty}^{u} f_Y(y)\,dy=\begin{cases}0, & u<0,\\ \int_0^u e^{-y}\,dy, & u\ge 0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & u<0,\\ 1-e^{-u}, & u\ge 0.\end{cases}$$

将 $F_X(u), F_Y(u)$ 的表达式代入 (A) 式，得到 $U=max\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$F_U(u)=\begin{cases}0, & u<0,\\ \frac{(1-e^{-u})^2}{1-e^{-1}}, & 0\le u<1,\\ 1-e^{-u}, & u\ge 1.\end{cases}$$

18. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

已知 $EX=\dfrac{3}{5}$, 求 DX.

解: 由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1(a+bx^2)dx=a+\dfrac{1}{3}b$, 得

$$3a+b=3. \tag{10}$$

再由 $\dfrac{3}{5}=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1(ax+bx^3)dx=\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{4}b$, 得

$$2a+b=\frac{12}{5}. \tag{11}$$

联立 (1)(2) 两式, 解得 $a=\dfrac{3}{5}, b=\dfrac{6}{5}$, 代入 $f(x)$ 表达式中, 即得

$$\begin{aligned} DX=EX^2-(EX)^2&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-\left(\frac{3}{5}\right)^2\\ &=\frac{3}{5}\int_0^1 x^2(1+2x^2)dx-\frac{9}{25}\\ &=\frac{11}{25}-\frac{9}{25}=\frac{2}{25}. \end{aligned}$$

19. 设 A,B 为两个随机事件, 且 $P(A)=\dfrac{1}{4}, P(B|A)=\dfrac{1}{3}, P(A|B)=\dfrac{1}{2}$. 令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & A\text{不发生},\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & B\text{不发生},\end{cases}$$

求: (1) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布; (2) X,Y 的相关系数 ρ_{XY}.

解: (1) (X,Y) 的所有取值为 $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$, 并有 $P\{X=0,Y=0\}=P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A)-P(B)+P(AB)$, 其中, $P(AB)=$

$P(A)P(B|A)=\dfrac{1}{12}, P(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A|B)}=\dfrac{1}{6}$, 因此

$$P\{X=0,Y=0\}=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{2}{3},$$
$$P\{X=0,Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12},$$
$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6},$$
$$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12}$$

从而 (X,Y) 的概率分布为:

$X\backslash Y$	0	1	$P_{i\cdot}$
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
$P_{\cdot j}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

(2) 由 X 和 Y 的联合分布律, 得 X 与 Y 的边缘分布律分别为

$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}, Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}, \text{从而}$$

$$\begin{aligned}
EX=&\frac{1}{4}, E(X^2)=\frac{1}{4}, DX=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{16},\\
EY=&\frac{1}{6}, E(Y^2)=\frac{1}{6}, DY=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{5}{36},\\
E(XY)=&\frac{2}{3}\times0\times0+\frac{1}{12}\times0\times1+\frac{1}{6}\times1\times0+\frac{1}{12}\times1\times1=\frac{1}{12},\\
\mathrm{Cov}(X,Y)=&E(XY)-EXEY=\frac{1}{24},
\end{aligned}$$

$$\text{因此}, \rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{1}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

20. 设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布，令

$$U=\begin{cases}1, & X\le Y\\ 0, & X>Y\end{cases}$$

试求 (1) 写出 (X,Y) 的概率密度;(3 分)

(2) 问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由; (3 分)

(3) 求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.(4 分)

解: (1) 区域 D 的面积为 $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\dfrac{1}{3}$，因此 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}3, & (x,y)\in D,\\ 0, & else.\end{cases}$$

(2) 对于 $0<t<1, P\{U\le 0,X\le t\}=P\{X>Y,X\le t\}=\int_0^t dx\int_{x^2}^{x} 3dy=\frac{3}{2}t^2-t^3$,

$P\{U\le 0\}=P\{X>Y\}=\dfrac{1}{2}$,

$P\{X\le t\}=\int_0^t dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 3dy=2t^{\frac{3}{2}}-t^3$.

由于 $P\{U\le 0,X\le t\}\ne P\{U\le 0\}P\{X\le t\}$，所以 U 与 X 不相互独立。

(3) 当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$;

当 $0\le z<1$ 时，$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{U+X\le z\}=P\{U=0,X\le z\}=P\{X>Y,X\le z\}=\frac{3}{2}z^2-z^3$;

当 $1\le z<2$ 时，$F_Z(z)=P\{U+X\le z\}=P\{U=0,X\le z\}+P\{U=1,X\le z-1\}=\frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2$;

当 $z\ge 2$ 时，$F_Z(z)=P\{U+X\le z\}=1$.

所以,

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{3}{2}z^2-z^3, & 0\le z<1,\\ \frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2, & 1\le z<2,\\ 1, & z\ge 2.\end{cases}$$

21. 计算器在进行加法时, 将每个加数舍入最靠近它的整数, 设所有舍入误差是独立的且在 $(-0.5,0.5)$ 上服从均匀分布.

(1) 若将 1500 个数相加, 问误差总和的绝对值超过 15 的概率是多少?

(2) 最多可有几个数相加使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.90?

解: 设每个加数的舍入误差为 $X_i(i=1,2,\cdots,1500)$, 由题设知 X_i 独立同分布, 且在 $(-0.5,0.5)$ 上服从均匀分布, 从而 $E(X_i)=\dfrac{-0.5+0.5}{2}=0, D(X_i)=\dfrac{(0.5+0.5)^2}{12}=\dfrac{1}{12}$. (1) 设 $X=\sum_{i=1}^{1500}X_i$, 由独立同分布的中心极限定理, 随机变量 $\dfrac{X-1500\times 0}{\sqrt{1500}\times\sqrt{\frac{1}{12}}}$ 近似服从 $N(0,1)$, 从而

$$\begin{aligned}P\{|X|>15\}&=1-P\{|X|\le 15\}\\&=1-P\left\{-\frac{15}{\sqrt{125}}\le\frac{X}{\sqrt{125}}\le\frac{15}{\sqrt{125}}\right\}\\&\approx 2-2\Phi(1.34)=0.1802,\end{aligned}$$

即误差总和的绝对值超过 15 的概率约为 0.1802.

(2) 记 $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$, 要使 $P\{|Y|<10\}\ge 0.90$. 由独立同分布的中心极限定理, 近似地有

$$
\begin{aligned}
P\{|Y|<10\} &= P\{-10<Y<10\} \\
&= P\left\{\frac{-10}{\sqrt{n/12}} < \frac{Y}{\sqrt{n/12}} < \frac{10}{\sqrt{n/12}}\right\} \\
&\approx 2\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) - 1 \geq 0.90,
\end{aligned}
$$

即 $\Phi\left(\frac{10}{\sqrt{n/12}}\right) \geq 0.95$, 查表得 $\frac{10}{\sqrt{n/12}} \geq 1.645$, 故 $n \leq 443$. 即最多有 443 个数相加使得误差总和的绝对值小于 10 的概率不小于 0.90.