Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН

Дипломная работа бакалавра

# «Магнетокондактанс $p$–$n$ перехода в вейлевском полуметалле»

Выполнил:
студент 322 группы — Сайкин Давид Рустамович

Научный руководитель:
к.ф.–м.н. — Тихонов Константин Сергеевич

г. Москва, 30 июня 2017 г.

## Аннотация

Дорогой читатель, я приветствую тебя на страницах моей дипломной работы и хочу предупредить тебя, что данная рукопись писалась с надеждой быть прочитанной, и поэтому не подходит под общий шаблон дипломных работ. Я полагаю, что единственным заинтересованным читателем, кроме, разве что, рецензента, может быть лишь студент–физик, только изучающий теоретическую физику, но никак не матёрый учёный–теоретик, по долгу службы проглатывающий десяток научных статей ещё до завтрака. Поэтому я стараюсь построить изложение последовательным и понятным образом. В итоге, текст первой главы и приложений носит скорее педагогический, чем научный характер.

Прежде чем преступить к изложению основного материала, я знакомлю читателя с относительно новым классом топологических материалов — вейлевским полуметаллом — в главе 1 я рассказываю о способах теоретического описания подобных материалов и их экспериментальном обнаружении.

Читатель, интересующийся только результатами, претендующими на научную новизну, должен сразу обратиться к главе 2, в которой я приступаю к описанию решения основной задачи данной работы — изучению кондактанса баллистического $p$–$n$ перехода в $T$–симметричном полуметалле Вейля (типа TaAs) как функции магнитного поля.

Рассмотрение задачи отталкивается от работы [1], в которой был вычислен магнетокондактанс $G$ в модели с Гамильтонианом

$$\hat{H} = v\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}.$$

Основные результаты статьи [1] разобраны в приложении B. Я же рассматриваю гамильтониан, описывающий пару вейлевских узлов [2],

$$\hat{H} = \frac{\sigma_x}{2m}(p_x^2 - p_0^2) + v\sigma_y p_y + v\sigma_z p_z,$$

и нахожу смену знака дифференциального кондактанса $dG/dB$ при полях величиной порядка $B_0 \sim \Phi_0 k_0^2$, где $k_0$ — расстояние между вейлевскими узлами, а $\Phi_0$ — квант магнитного потока.

# Оглавление

# Глава 1

# Вейлевский полуметалл

## 1.1 Дирак или Вейль?

### Уравнения Дирака и Вейля

В 1928 году Поль Дирак написал квантовое уравнение движения для релятивистских электронов, т. е. частиц со спином $s = \frac{1}{2}$.

$$i\partial_t \Psi = \left[c\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{p}} + \beta mc^2\right]\Psi, \quad \varepsilon(\mathbf{p}) = \pm\sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}. \tag{1.1}$$

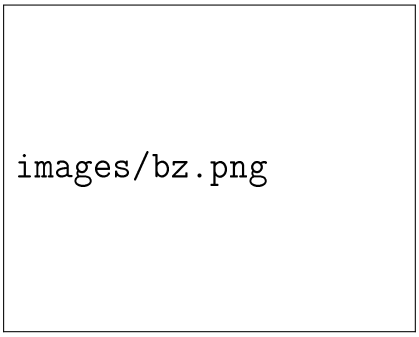
где эрмитовы матрицы $\alpha^i$, $\beta$ определяются антикоммутационными соотношениями

$$\{\alpha^i, \alpha^j\} = 2\delta^{ij}, \quad \{\alpha^i, \beta\} = 0, \quad \beta^2 = 1. \tag{1.2}$$

Вскоре после, в 1929 году, Герман Вейль, рассмотрел случай $m = 0$, и заметил, что в представлении $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\sigma} \otimes \sigma^z$ матрица $\hat{\chi} = \hat{\mathbb{1}} \otimes \sigma^z$ коммутирует с гамильтонианом.[1] Он предложил искать решения (1.1) в её собственных подпространствах. Данное квантовое число принято называть киральностью $\chi = \pm$, а соответствующие собственные функций — правым и левым спинором.

$$\begin{aligned} i\partial_t\psi &= +c\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}}\psi \\ i\partial_t\phi &= -c\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}}\phi \end{aligned} \qquad \Psi = \begin{pmatrix}\psi \\ \phi\end{pmatrix} \qquad \varepsilon(\mathbf{p}) = \pm c|\mathbf{p}|. \tag{1.3}$$

Система (1.3) описывает *безмассовый дираковский фермион* $\Psi$, когда каждое из уравнений (1.3) по отдельности называется уравнением Вейля (определённой киральности оно описывает *вейлевские фермионы* $\psi$, $\phi$.



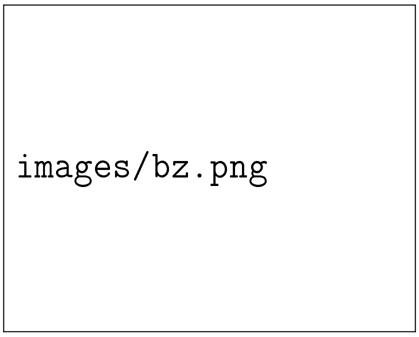




Рис. 1.1: Спектр $\varepsilon_n(p_\parallel)$ безмассовых дираковских и вейлевских частиц в присутствии орбитального магнитного поля. Подробнее — смотри (1.1).

[1] Такую матрицу можно соорудить в любом пространстве нечётной размерности как $\gamma^5 = -i\alpha^1\alpha^2\alpha^3$.

Вейлевские спиноры использовались для описания нейтрино [3, §30], пока не стало известно, что они имеют конечную массу. На сегодняшний день физике не известны примеры вейлевских частиц, однако электроны в твёрдом теле могут иметь дисперсию, которая описывается уравнениями Дирака и Вейля.

Самым простым примером носителя дираковского электрона является графен — двумерный монослой графита, экспериментально обнаруженный в 2005 году. Низкоэнергетические возбуждения в графене описываются гамильтонианом

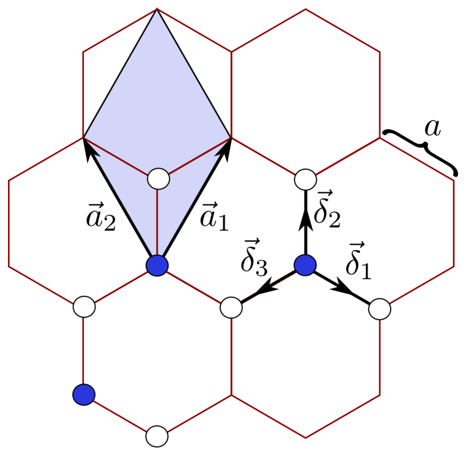
$$\mathcal{H}(\mathbf{p}) = v\sigma_x p_x + v\sigma_y p_y, \quad \varepsilon(\mathbf{p}) = \pm v|\mathbf{p}|, \tag{1.4}$$

который принято называть (безмассовым) дираковским, а не вейлевским когда речь идёт о двумерной системе. В размерности $2+1$ алгебра Клиффорда (1.2) имеет простое представление в виде матриц Паули $\alpha_1 = \sigma_1$, $\alpha_2 = \sigma_2$, $\beta = \sigma_3$, так что уравнение (1.1) может быть переписано как

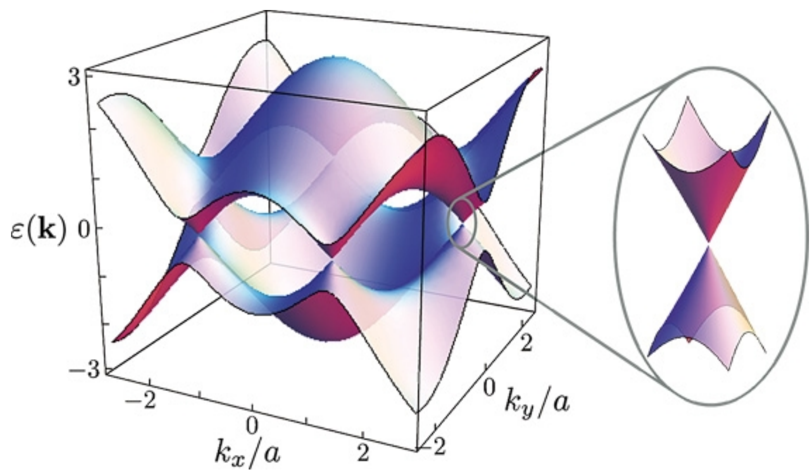
$$i\partial_t \Psi = \left[c\sigma_x \hat{p}_x + c\sigma_y \hat{p}_y + \sigma_z mc^2\right] \Psi, \tag{1.5}$$

а дираковский фермион описан с помощью двухкомпонентного спинора $\Psi$. Увидеть как подобные квазичастицы появляются в графене можно рассмотрев модель сильной связи.

Таким образом трёхмерные вейлевские фермионы являются аналогами двухмерных дираковский безмассовых частиц в графене. Однако, вейлевские квазичастицы имеют ряд свойств отличных от электронов в графене. Например, наличие ферми–арок — поверхностных состояний, приводящих к необычным осцилляциям плотности состояний с магнитным полем [4].




(a) Решётка графена, элементарные вектора трансляции $\mathbf{a}_i$, вектора ближайших соседей $\boldsymbol{\delta}_j$.




(b) Спектр графена в приближении сильной связи (уровень Ферми при $\varepsilon = 0$). Вблизи точек $\mathbf{k} = (\pm\frac{4\pi}{3\sqrt{3}a}, 0)$ возбуждения имеют вид вейлевского конуса.

Рис. 1.2: Кристаллическая решётка графена и спектр электронных возбуждений.

## Графен в приближении сильной связи

В простейшем приближении, учитывающим только прыжки на ближайших соседей, гамильтониан электронов в графене суть

$$\hat{H} = t\sum_{\langle i,j\rangle} \hat{c}^{+}(\mathbf{r}_i)\hat{c}(\mathbf{r}_j) = t\sum_{\mathbf{r}}^{\text{SL}}\sum_{j=1}^{3} \hat{c}_A^{+}(\mathbf{r})\hat{c}_B(\mathbf{r}+\boldsymbol{\delta}_j) + \text{h.c.}, \tag{1.6}$$

где суммирование ведётся по ближайшим соседям. Кристаллическая решётка (см. рис. 1.2a) графена представляет из себя две треугольные подрешётки, с векторами трансляции $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, смещённые друг относительно друга на вектор $\frac{1}{3}(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)$. Ввиду наличия трансляционной симметрии, гамильтониан диагонализуется преобразованием Фурье.

$$\hat{c}_a(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}}^{\text{BZ}} \hat{c}_a(\mathbf{k})\frac{e^{i\mathbf{kr}}}{\sqrt{N}}, \qquad \hat{c}_a(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}}^{\text{SL}} \hat{c}_a(\mathbf{r})\frac{e^{-i\mathbf{kr}}}{\sqrt{N}}, \tag{1.7}$$

где суммирование по квазиимпульсам ведётся по зоне Бриллюэна (BZ), определяемой векторами дуальными к $\mathbf{a}_i$, а суммирование в прямом пространстве идёт по треугольной подрешётке (SL). Здесь $N$ — число элементарных ячеек.

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}}^{\text{BZ}}\sum_{a,b} \hat{c}_a^{+}(\mathbf{k})\mathcal{H}_{ab}(\mathbf{k})\hat{c}_b(\mathbf{k}), \qquad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & t\sum_{j=1}^{3} e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\delta}_j} \\ t\sum_{j=1}^{3} e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\delta}_j} & 0 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

После преобразования Фурье гамильтониан остаётся диагонализовать по подрешёточному индексу. Таким образом, элементарные возбуждения в графене — это плоские волны, в которые состояния с разным подрешёток входят с равными весами. Спектр возбуждений представлен на рис. 1.2b.

$$\varepsilon(\mathbf{k}) = \pm\sqrt{t\left|\sum_{j=1}^{3} e^{i\mathbf{k}\boldsymbol{\delta}_j}\right|} \tag{1.9}$$

Число атомов углерода равно $2N$, каждый атом находится в состоянии sp$^3$–гибридизации и имеет один валентный электрон. Таким образом, электронов в два раза больше, чем состояний в зоне Бриллюэна. Учитывая двукратное вырождение по спину, это означает, что нижняя ветвь спектра полностью заполнена, а верхняя – пуста, уровень Ферми лежит при $\varepsilon = 0$. Поэтому физика электронов в графене определяется состояниями близкими к точкам зануления спектра $\mathbf{K}, \mathbf{K}' = (\pm\frac{4\pi}{3\sqrt{3}a}, 0)$. В их окрестности гамильтониан принимает вид уравнений (1.5).

$$\mathcal{H}(\mathbf{K}+\mathbf{k}) \approx -\frac{3}{2}ta(\sigma_x k_x + \sigma_y k_y), \quad \mathcal{H}(\mathbf{K}'+\mathbf{k}) \approx \frac{3}{2}ta(\sigma_x k_x - \sigma_y k_y). \tag{1.10}$$

Известно также, что учёт спин–орбитального взаимодействия приводит к появлению массового члена (открытию щели) порядка 10 $\mu$eV [5].

## 1.2 Вейлевские электроны в твёрдом теле

Рассмотрю электроны в периодическом потенциале кристаллической решётки, не учитывая межэлектронного взаимодействия.[2]

$$\hat{H} = \sum_i \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + U(\mathbf{r_i} - \mathbf{a}), \qquad U(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{a}} U_0(\mathbf{r} - \mathbf{a}) = U(\mathbf{r} + \mathbf{a}). \tag{1.11}$$

Как известно [6, §55], его диагонализуют блоховские волновые функции $\psi_{\mathbf{k},n} = e^{i\mathbf{kr}} u_{\mathbf{k},n}(\mathbf{r})$, где $u_{\mathbf{k},n}(\mathbf{r}+\mathbf{a}) = u_{\mathbf{k},n}(\mathbf{r})$ периодична на решётке. Поэтому гамильтониан диагонален по индексу $\mathbf{k}$, но может быть недиагонален по номеру зоны $n$.

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{n,n'} \hat{c}^+_{\mathbf{k},n} \langle \psi_{\mathbf{k},n} | \hat{H} | \psi_{\mathbf{k},n'} \rangle \hat{c}_{\mathbf{k},n'}. \tag{1.12}$$

Физика электронов в твёрдых телах определяется зонами, лежащими вблизи химического потенциала $\mu$, и бывает достаточно ограничиться только двумя зонами — валентной и зоной проводимости. Эффективно такой электрон описывается гамильтонианом $2 \times 2$, который удобно разложить по базису матриц Паули.

$$\mathcal{H}(\mathbf{k}) = \Big( \langle \psi_{\mathbf{k},n} | \hat{H} | \psi_{\mathbf{k},n'} \rangle \Big)_{nn'} = \sum_{\mu=0}^{3} f_\mu(\mathbf{k}) \sigma^\mu. \tag{1.13}$$

Каждая из функций $f_\mu$ предполагается аналитичной и может быть разложена близи некоторой точки $k$–пространства согласно $f_\mu(\mathbf{k}) = f_\mu(\mathbf{k}_0) + \hbar \mathbf{v}_\mu \cdot \delta\mathbf{k}$. Если случится так, что при некотором $\mathbf{k}_0$ три функции $f_i$, $i = 1..3$ обнулятся, то это будет как раз вейлевская точка. Можно ожидать, что в трёхмерном случае такое случайное вырождений произойдёт без каких-либо дополнительных симметрийных условий, поскольку имеется три параметра $\mathbf{k}$, которые можно варьировать [7].

Матрица $v_\mu^\nu$ преобразуется и привести гамильтониан к виду

$$\hat{H} = \hbar \mathbf{w} \mathbf{k} + \sum_i \hbar v_i k_i \sigma^i. \tag{1.14}$$

Первый член приводит к наклону дираковского конуса, что не приводит к изменениям результатов данной работы, поэтому далее он будет опущен. [3] Для простоты также буду предполагать, что узловые скорости изотропны, тогда

$$\hat{H} = \chi \hbar v \boldsymbol{\sigma} \mathbf{k}, \tag{1.15}$$

где $\chi = \operatorname{sgn} \det(v^\alpha_\beta) = \pm 1$ — киральность узла, и я полагаю $v > 0$.

[2]Приведённые здесь рассуждения, вообще говоря, нельзя обобщить на гамильтониан с взаимодействием, и вопрос, как определить сохранится ли структура зон при включении взаимодействия является открытым.

[3]Данный член играет роль при вычислении фотогальванических эффектов в присутствии магнитного поля, при его учёте говорят о вейлевских полуметаллах II типа [8].

## Магнитные монополи

Инструментом обнаружения вейлевских точек является связность Берри [9], которая, при выборе квазиимпульса $\mathbf{k}$ в качестве параметра, определяется согласно

$$\mathbf{A}_n = i \langle n(\mathbf{k})| \nabla_{\mathbf{k}} |n(\mathbf{k})\rangle, \qquad A_n = \mathbf{A}_n \cdot d\mathbf{k}, \tag{1.16}$$

где $|n\rangle$ — одно из собственных состояний гамильтониана (1.14). Определю также индукцию поля $\mathbf{B}$ и плотность источников поля $\rho$ согласно

$$\mathbf{B}_n = \nabla_{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}, \quad \rho_n(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \nabla_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B}, \tag{1.17}$$

Оказывается, для вейлевского гамильтониана вектор кривизны Берри $\mathbf{B}$, отвечающий основному состоянию, представляет напряжённость точечного заряда величины $\frac{\chi}{2}$. Пусть $\hat{H} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{k}})$, а состояния $|\pm\rangle$ обозначают верхний и нижний уровни.

$$B_\mu^\pm = -\epsilon_{\mu\nu\rho} \operatorname{Im} \langle \partial_\nu \pm | \partial_\rho \pm\rangle = -\epsilon_{\mu\nu\rho} \operatorname{Im} \frac{\langle \pm | (\partial_\nu \hat{H}) | \mp\rangle \langle \mp | (\partial_\rho \hat{H}) | \pm \rangle}{|E_+ - E_-|^2} =$$
$$= -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \frac{\langle \pm | \epsilon_{\mu\nu\rho} [\hat{\sigma}_\nu, \hat{\sigma}_\rho] | \pm\rangle}{|E_+ - E_-|^2} = -\operatorname{Im} \frac{2i \langle \pm | \hat{\sigma}_\mu | \pm \rangle}{|E_+ - E_-|^2} = \mp \frac{k_\mu}{2|\mathbf{k}|^3}. \tag{1.18}$$

Поскольку $\chi = -1$ меняет уровни местами, $\rho = \chi\delta(\mathbf{k})$. Поэтому на жаргоне вейлевские точки называют «магнитными монополями».

Отсюда можно сделать выводы о положении вейлевских точек в зоне Бриллюэна. Согласно определениям (1.16), (1.17), плотность монополей является чётной функцией $\mathbf{k}$, если имеется $T$–симметрия и нечётной при наличии $P$–симметрии.

$$T: \quad \mathbf{A}_n(\mathbf{k}) = \mathbf{A}_{\overline{n}}(-\mathbf{k}) \qquad \mathbf{B}_n(\mathbf{k}) = -\mathbf{B}_{\overline{n}}(-\mathbf{k}) \qquad \rho_n(\mathbf{k}) = \rho_{\overline{n}}(-\mathbf{k}) \tag{1.19}$$
$$P: \quad \mathbf{A}_n(\mathbf{k}) = -\mathbf{A}_{\overline{n}}(-\mathbf{k}) \qquad \mathbf{B}_n(\mathbf{k}) = \mathbf{B}_{\overline{n}}(-\mathbf{k}) \qquad \rho_n(\mathbf{k}) = -\rho_{\overline{n}}(-\mathbf{k}), \tag{1.20}$$

где $\overline{n}$ означает сопряжённое состояние: $|\overline{n}\rangle = T|n\rangle$, либо $|\overline{n}\rangle = P|n\rangle$. Таким образом, в $TP$–инвариантной системе вейлевских точек быть не может, а искать физическую реализацию вейлевского полуметалла следует среди материалов без симметрии чётности.

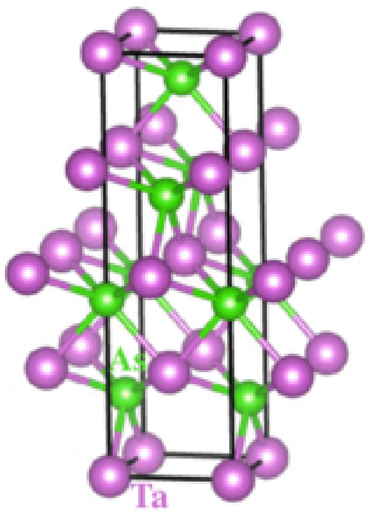


Рис. 1.3: Решётка TaAs.

## Экспериментальное обнаружение

Поиски вейлевских полуметаллов в природе увенчались успехом в 2015 году, когда было обнаружено, что таким свойством обладают вещества типа TaAs, TaP, NbAs, NbP. В работе [10] рассмотрен арсенид тантала TaAs, и из первых принципов найдено 12 пар вейлевских точек в зоне Бриллюэна, как точек сингулярности поля Берри.

Спустя примерно год, был опубликован эксперимент [11], в котором методом фотоэлектронной спектроскопии с угловым разрешением, были измерены поверхности Ферми в TaP и обнаружена пара вейлевских узлов.

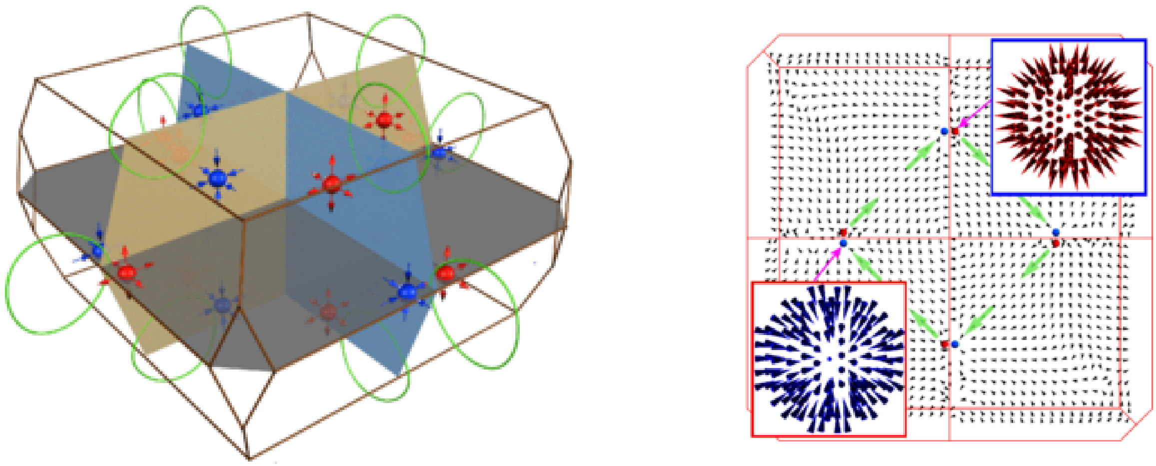


Рис. 1.4: Зона Бриллюэна TaAs и 12 пар вейлевских монополей. [10]
Справа изображен векторный поток поля Берри $\mathbf{B}$ в сечении $k_z = \mathrm{const}$.

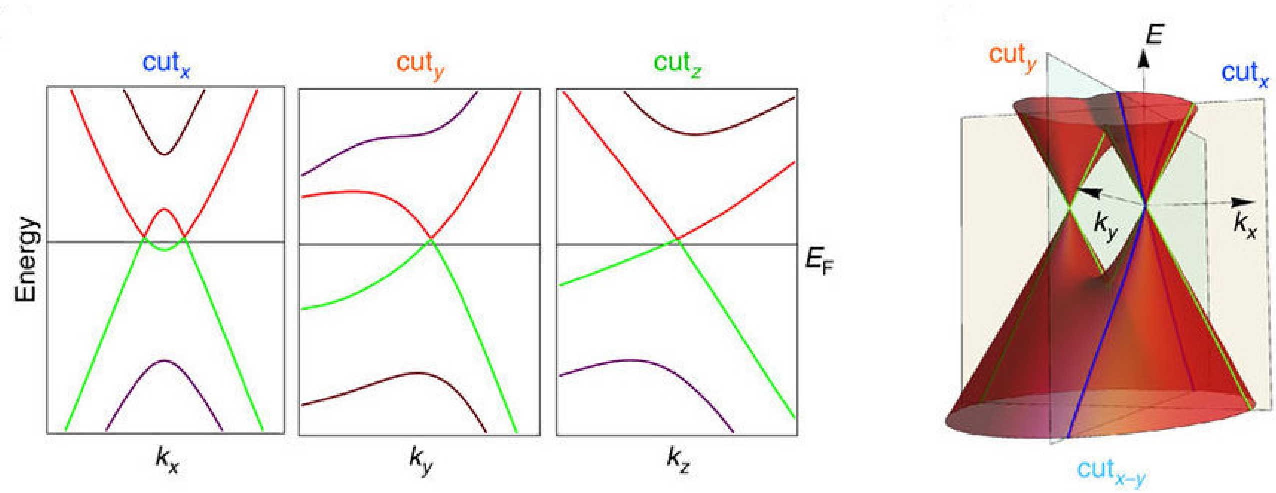



Рис. 1.5: Численной расчёт зонной структуры TaP в окрестности вейлевской пары, подтверждённый экспериментальным исследованием. [11]

## Топологическая защита

Согласно теореме Нильсона–Ниномии [12], вне зависимости от наличия симметрий, в любой прыжковой модели с невзаимодействующими электронами суммарная киральность, всех вейлевских точек равна нулю. Другими словами, для каждого «монополя», где-то в зоне Бриллюэна найдётся «антимонополь». Это означает, что вейлевские точки рождаются и аннигилируют парами противоположной киральности. Поскольку они могут находится произвольно далеко друг от друга, от сюда следует, что слабые изменения гамильтониана не приводят к исчезновению или появлению вейлевских монополей.

Другим следствием теоремы является то, что в $T$–симметричном полуметалле Вейля минимально возможное количество монополей равно четырём, когда в $P$–симметричном случае их может быть только два, поскольку пара может родится в точке $\mathbf{k} = 0$, в присутствии $T$ это запрещено свойством (1.19). Минимальные модели, где данные случаи реализованы рассмотрены ниже.

## 1.3 Игрушечные модели

### Модель Delplace

Самая простая микроскопическая модель, описывающая вейлевские полуметаллы, извествная мне, описана в работе [13].

Рассмотрю прыжковую модель на кубической решётке (сторона куба $a = 1$) с центрированными основаниями — две кубические подрешётки (состоящие из атомов типа $A$ и типа $B$), одна смщённая относительно другой на вектор $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. Учёт прыжков на ближайших (NN) соседей, следущих ближайших (NNN) соседей, а также разных внутриатомных энергий $\varepsilon_{A,B} = \pm\Delta$ приводит к гамильтониану

$$\begin{aligned} H = &\sum_{\mathbf{r}} \Delta(c_A^+(\mathbf{r})c_A(\mathbf{r}) - c_B^+(\mathbf{r})c_B(\mathbf{r})) + h.c. \\ &+ \sum_{\mathbf{r}} \sum_{n=0}^{3} t_n c_A^+(\mathbf{r}) c_B(\mathbf{r} + \boldsymbol{\delta}_\mathbf{n}) + h.c. \\ &+ \sum_{\mathbf{r}} \sum_{n=0}^{3} t'_n c_A^+(\mathbf{r}) c_A(\mathbf{r} + \boldsymbol{\epsilon}_\mathbf{n}) + h.c. \\ &+ \sum_{\mathbf{r}} \sum_{n=0}^{3} t_\perp (c_A^+(\mathbf{r}) c_A(\mathbf{r} + \mathbf{e_z}) - c_B^+(\mathbf{r}) c_B(\mathbf{r} + \mathbf{e_z})) + h.c., \end{aligned} \tag{1.21}$$

где $t_n = e^{in\pi/2}t$, $t'_n = e^{in\pi/2}t'$, $n = 0...3$, а $t$, $t'$, $t_\perp$, $\Delta$ предполагаются вещественными. Такие фазы можно получить, если вообразить себе магнитное поле, которое обладает симметрией решётки (и поэтому магнитная зона Бриллюэна совпадает с обычной) и пронизывает ячейку образом, показанным на 1.6.

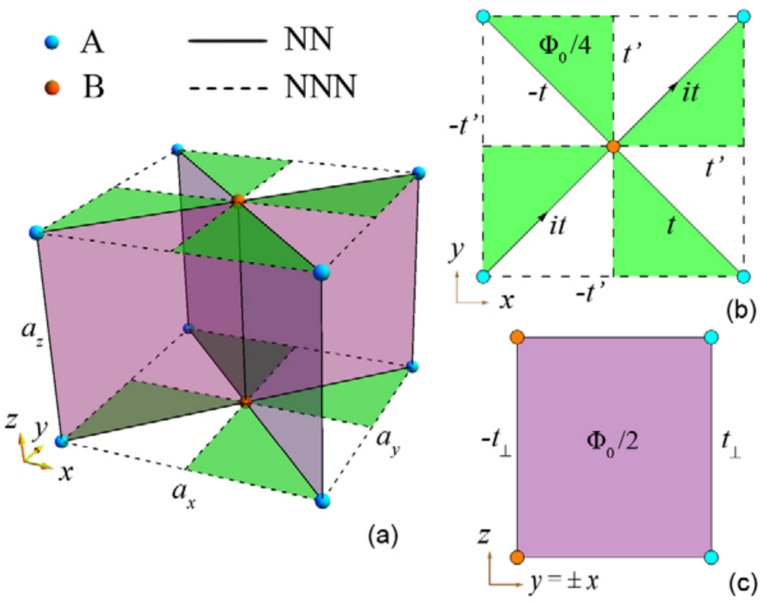



Рис. 1.6: Кристаллическая структура и определение прыжковых коэффициентов.

Вектора $\boldsymbol{\delta}_n$ направлены из центра в вершины квадрата, лежащего в плоскости $xy$, а смотрят $\boldsymbol{\epsilon}_n$ по его сторонам.

$$\boldsymbol{\delta}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\delta}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\delta}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\delta}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{1.22}$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\epsilon}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\epsilon}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\epsilon}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

Фурье–преобразование $c_{A,B}(\mathbf{r})$ диагоналиует гамильтониан $H = \sum_{\mathbf{k}} c_a^+(\mathbf{k}) H_{ab}(\mathbf{k}) c_b(\mathbf{k})$.

$$H(\mathbf{k}) = 2t \sin k_+ \sigma_x + 2t \sin k_- \sigma_y + [\Delta - 2t'(\cos k_x + \cos k_y) + 2t_\perp \cos k_z]\, \sigma_z, \tag{1.24}$$

где обозначено $k_\pm \equiv \frac{1}{2}(k_x \pm k_y)$. Введу также параметры $m_1 = \Delta/2t_\perp$, $m_2 = 2t'/t_\perp$. Спектр имеет точки касания в координатах $(k_x, k_y) = (0,0)$ или $(\pi,\pi)$ и $\cos k_z = -(m_1 - m_2 \cos k_+ \cos k_-)$. Вблизи данных точек гамильтониан имеет длинноволновое разложение

$$H(\mathbf{k}) = 2tk_+\sigma_x + 2tk_-\sigma_y + 2t_\perp[m_1 - m_2 + 1 - k_z^2], \tag{1.25}$$

которое я буду использовать в дальнейшем с своей работе.

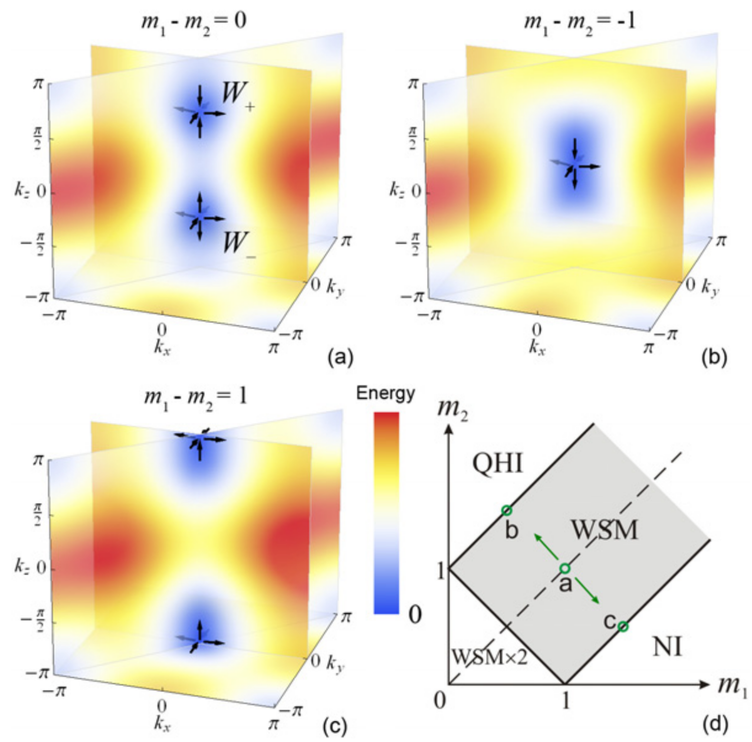



Рис. 1.7: Положение вейлевских точек при значениях $m_1 - m_2 = 0, \pm 1$ и фазовая диаграмма в координатах $(m_1, m_2)$.

## Модель Fu, Kane, Mele, Murakami

## 1.4 Уровни Ландау и Ферми–арки

# Глава 2

# Магнетокондактанс

## 2.1 Постановка задачи

Задача заключается в определении кондактанса $G = dI/dV|_{V\to 0}$ в баллистическом $p$–$n$ переходе на основе вейлевского полуметалла при наличии магнитного поля.

### Гетеропереход

Гетеропереход представляет из себя соединение полуметаллов легированных примесями донорного $n$ и акцепторного $p$ типа. Влияние примесей заключается в повышении/пониже химического потенциала, за счёт увеличения/уменьшения концентрации электронов. При соединении полуметаллов разного типа происходит перераспределение заряда — электроны бегут из $n$ в $p$ зону, что создаёт электропотенциал $\varphi(z)$, который может быть самосогласованно найден из уравнения Пуассона

$$\frac{d^2}{dz^2} e\varphi(z) = 4\pi e^2 \left[ N(e\varphi(z)) + n_d(z) \right], \tag{2.1}$$

где $n_d(z) = \mathrm{sgn}(z)$ — концентрация допантов, аппроксимированная ступенчатой функцией, а $N(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \nu(\epsilon) d\epsilon$ — количество электронов в недопированном вейлевском полуметалле с энергией меньше $\varepsilon$ (распределение заряда рассчитывается на фоне нелегированного полуметалла). Данная задача решена в [1] и найдено, что потенциал $\varphi(z)$ меняется на масштабе $\kappa^{-1} = \sqrt{\pi/4}(\hbar v)^{3/2}/|e|\Delta$, где $\Delta$ — смещение узла относительно химического потенциала. На этом масштабе можно приблизить функцию $e\varphi(z) = -eEz$ линейной с коэффициентом $E \sim \Delta\kappa/|e| \sim \Delta^2/(\hbar v)^{3/2}$.

### Баллистический режим

При решении я буду полагать, что транспорт электрона на размере потенциала $p$–$n$–перехода $\kappa^{-1}$ происходит без столкновений с примесями, т. е. $\kappa^{-1} \ll l_{imp}$ — для выполнения данного условия концентрация примесей должна быть достаточно мала. Также концентрация примесей предполагается достаточно малой, чтобы не учитывать появление примесных зон проводимости.

В процессе решения предполагается, что температура $T = 0$. Фактически это означает, что должны быть выполнены условия применимости формулы Ландауэра: длина сбоя фазы $L_\varphi \propto 1/\sqrt{T}$ должна быть больше масштаба на котором происходит рассеяние $\kappa^{-1}$. Также следует потребовать, чтобы неупругие процессы рассеяния вносили пренебрежимо малый вклад в проводимость, электрон–электронное и электрон–фононное взаимодействие должны быть малы $l_{\text{e–e}}$, $l_{\text{e–ph}} \ll \kappa^{-1}$.

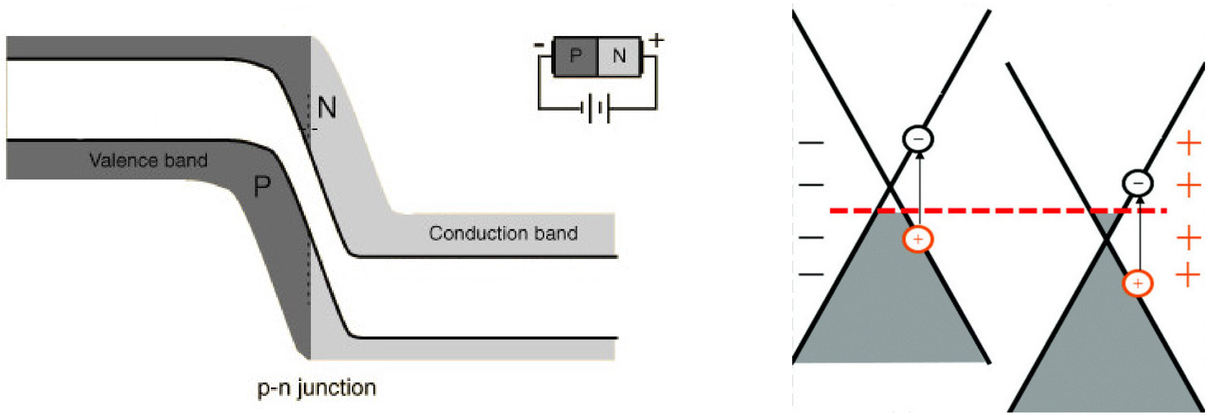



Рис. 2.1: Гетеропереход в полупроводнике и дираковском металле. По вертикальной оси отложена «полная» энергия $\varepsilon_{\mathbf{k}}+e\varphi$ — электрохимический потенциал постоянен в пространстве.

Чтобы учесть конечную температуру следует также модифицировать формулу Ландауэра (A.14)

$$\frac{e^2}{h}\sum_n T_n(\varepsilon=\mu) \quad \mapsto \quad \frac{e^2}{h}\sum_n \int d\varepsilon \left(-\frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon}(\varepsilon)\right) T_n(\varepsilon). \tag{2.2}$$

и рассмотреть $p$—$n$ переход конечной ширины, поскольку в приближении линейного потенциала коэффициенты прохождения не зависят от энергии $T \neq T(\varepsilon)$.

## План решения

Ниже я буду вычислять кондактанс $p$—$n$ перехода для разных гамильтонианов. Согласно формализму Ландауэра, описание которого приведено в приложении A, я буду следовать стандартному плану.

0. Разделить переменные в уравнении Шрёдингера $\psi(\mathbf{r}) = \chi(x,y)\phi(z)$.

1. Решить стационарную задачу Шрёдингера $\hat{H}_\perp \chi_n = \varepsilon_n^\perp \chi_n$.

2. Решить задачу рассеяния $\hat{H}_\parallel(\varepsilon_n^\perp)\phi(z) = \varepsilon\phi(z)$.

3. Просуммировать коэффициенты прохождения $T_n$ по поперечным каналам.

Задача рассеяния всегда будет решаться на нулевой энергии $\varepsilon = 0$, поскольку в линейном потенциале $V(z) = -eEz$, добавка энергии отвечает сдвигу начала координат $V(z) - \varepsilon = -eE(z - z_0)$ и не влияет на ответ.

На протяжении этой главы будут интенсивно использованы обозначения электрическо и магнитной длины (заряд электрона $e < 0$).

$$l_E \equiv \sqrt{\frac{\hbar v}{|e|E}}, \qquad l_B \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{|e|B}}. \tag{2.3}$$

## 2.2 Кондактанс в отсутствии поля

Эффективный гамильтониан, описывающий пару вейлевских узлов, находящихся в точках $k_x = \pm k_0$ вместе с наведённым электрическим полем $p{-}n$ перехода, выглядит следующим образом.

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\hat{k}_x^2 - k_0^2\right)\sigma_x + \hbar v\left(\hat{k}_y\sigma_y + \hat{k}_z\sigma_z\right) - eEz, \tag{2.4}$$

Удобно ввести безразмерный параметр $\zeta \equiv \frac{\hbar k_0}{mv}$, характеризующий анизотропию скоростей в вейлевском узле. Тогда при $k_0 \to \infty$, $\zeta \to 1$ гамильтониан факторизуется на два одноконусных.

$$(\hbar v)^{-1}\hat{H} = \frac{\zeta}{2k_0}\left(\hat{k}_x^2 - k_0^2\right)\sigma_x + \hat{k}_y\sigma_y + \hat{k}_z\sigma_z + \frac{z}{l_E^2}, \qquad l_E^2 \equiv \frac{\hbar v}{|e|E}. \tag{2.5}$$

### Задача рассеяния

Чтобы вычислить конданктанс при помощи формулы Ландауэра (A.14), необходимо решить задачу рассеяния, т. е. найти решение $\psi = e^{ik_x x + ik_y y}\phi(z l_E^{-1})$ уравнения

$$\left[\frac{\hbar l_E}{2mv}\left(k_x^2 - k_0^2\right)\sigma_x + k_y l_E \sigma_y + (-i\partial_z)\sigma_z + z\right]\phi(z) = \frac{\varepsilon}{\hbar v / l_E}\phi(z), \tag{2.6}$$

имеющее при $z \to +\infty$ только распространяющуюся вперёд волну. От члена с энергией $\varepsilon$ можно избавится сдвигом $z$–координаты, тогда уравнение примет вид

$$\begin{pmatrix} -i\partial_z + z & \Delta^* \\ \Delta & i\partial_z + z \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1(z) \\ \phi_2(z)\end{pmatrix} = 0, \tag{2.7}$$

где $\Delta \equiv \frac{\hbar l_E}{2mv}\left(k_x^2 - k_0^2\right) + ik_y l_E$. Для определения коэффициента прохождения найду квазиклассическую волновую функцию. Подстановка

$$\phi_\pm^{1,2}(z) = \exp\left[\pm i\int k(z)dz\right]\varphi_\pm^{1,2}(z), \qquad k(z) \equiv \pm\sqrt{z^2 - |\Delta|^2} \tag{2.8}$$

и разложение по коэффициенту при производной ($\frac{d}{dz}\frac{1}{k(z)} \ll 1$) приводит к

$$\varphi_\pm^{1,2}(z) = \frac{1}{\sqrt{k(z)}}\begin{pmatrix} c_\pm^1 \exp \mp \int \frac{dz}{2k(z)} \\ c_\pm^2 \exp \pm \int \frac{dz}{2k(z)}\end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Следует оставить при $z \to +\infty$ только решение с положительным током вероятности $j_\pm = \phi_\pm^+ \hat{\sigma}_z \phi_\pm$, или, эквивалентно, групповой скорстью $v_\pm(z) = \pm\partial k(z)/\partial z > 0$. Подходящее решение имеет следущие асимптотики при $|z| \gg |\Delta|$.

$$\phi(z) = t\cdot\phi_-(z) \sim t\cdot\exp\left[-\frac{iz^2}{2} + \frac{i}{2}|\Delta|^2\ln\frac{2\sqrt{e}z}{|\Delta|}\right]\begin{pmatrix}1 \\ -\frac{\Delta}{2z}\end{pmatrix}, \qquad z \to +\infty, \tag{2.10}$$

$$\phi(z) = \phi_+(z) + r\cdot\phi_-(z) \sim \exp\left[-\frac{iz^2}{2} + \frac{i}{2}|\Delta|^2 \ln\frac{2\sqrt{e}|z|}{|\Delta|}\right]\begin{pmatrix}1\\ -\frac{\Delta}{2z}\end{pmatrix} + \\ + r\cdot\exp\left[\frac{iz^2}{2} - \frac{i}{2}|\Delta|^2 \ln\frac{2\sqrt{e}|z|}{|\Delta|}\right]\begin{pmatrix}-\frac{\Delta^*}{2z}\\ 1\end{pmatrix}, \qquad z\to-\infty. \quad (2.11)$$

Сравнивая асимптотические разложения (2.10) с (2.11), и используя, что $\phi(z)$ — целая функция [14, §50], нахожу $t = \exp[-\frac{\pi}{2}|\Delta|^2]$. Поскольку ток вероятности даётся выражением $j^z = v\phi^+\hat{\sigma}_z\phi$, коэффициент прохождения, ожидаемо, $T = |t|^2$.

## Формула Ландауэра

Подстановка в формулу Ландауэра даёт

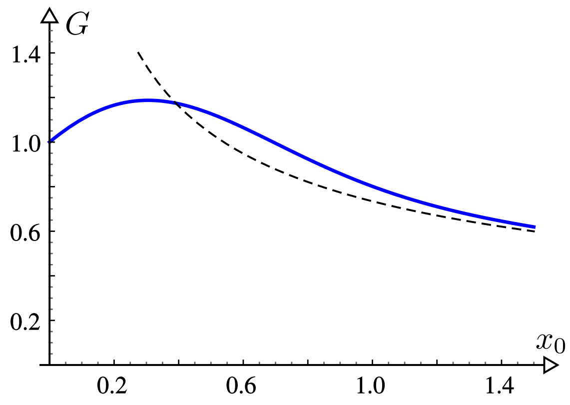
$$G(0) = \frac{e^2}{h}\int\frac{Sd^2k}{(2\pi)^2}\exp\left[-\pi\left(\frac{\hbar l_E}{2mv}\right)^2(k_x^2-k_0^2)^2 - \pi(k_yl_E)^2\right] \quad (2.12)$$

$$= \frac{2}{\zeta}\frac{e^2}{h}\frac{S}{(2\pi l_E)^2}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\exp\left[-\pi\frac{(x^2-x_0^2)^2}{x_0^2}\right] \quad (2.13)$$

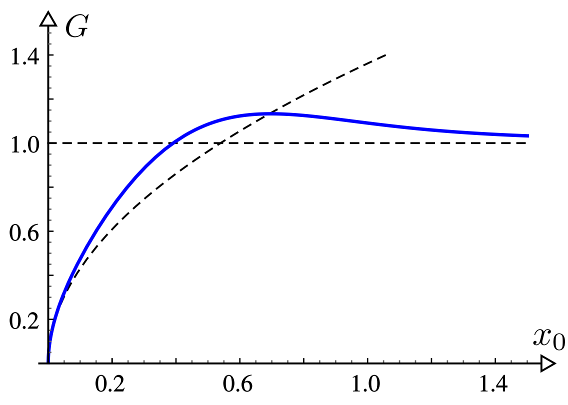
где обозначено $x_0 \equiv \frac{\zeta}{2}k_0l_E = \frac{\hbar k_0^2 l_E}{2mv}$, и использован параметр $\zeta \equiv \frac{\hbar k_0}{mv}$.

$$G \simeq \frac{e^2}{h}\frac{S}{(2\pi l_E)^2}\cdot\begin{cases}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\sqrt{2}\pi^{\frac{1}{4}}}\left[\frac{mv}{\hbar/l_E}\right]^{\frac{1}{2}}, & \zeta k_0 l_E \ll 1\\ 2\zeta^{-1}, & \zeta k_0 l_E \gg 1\end{cases} \quad (2.14)$$

Численные оценки ниже показывают, что всегда выполненяется $\zeta k_0 l_E \gg 1$, однако интересно отметить найденое влияние зацепления конусов на зависимость кондактанса от встроенного электрического поля $p$–$n$ перехода — $G \propto E^{\frac{3}{4}}$, при $\zeta k_0 l_E \ll 1$.




(a) $G(x_0)/G(k_0=0)$, $\zeta \equiv \frac{\hbar k_0}{mv}$.




(b) $G(x_0)/G(k_0=\infty)$, $\zeta = 1$.

Рис. 2.2: Зависимость $G(x_0)$, $x_0 = \frac{\zeta}{2}k_0l_E$ в сравнении с асимптотиками.
На графике (a) отображена фактическая зависимоть $G(k_0^2)$ при постоянных прочих параметрах. На графике (b) положено $\zeta = 1$, для сравнения с одноконусной меоделью, в действительности $G \to \text{const} \neq 0$ при $k_0 \to 0$.

## 2.3 Магнетокондактанс

Теперь найду кондактанс в присутвии магнитного поля $\mathbf{B}$, $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$, направленного вдоль $p$–$n$ перехода $B > 0$.

$$(\hbar v)^{-1}\hat{H} = \frac{\zeta}{2k_0}\left(\left(k_x - \frac{y}{l_B^2}\right)^2 - k_0^2\right)\sigma_x + \sigma_y\hat{k}_y + \sigma_z\hat{k}_z + \frac{z}{l_E^2}. \tag{2.15}$$

Здесь $l_E^2 \equiv \frac{\hbar v}{eE}$, $l_B^2 \equiv \frac{\hbar c}{eB}$ — электрическая и магнитная длины. Перемасштабирую переменные $y \mapsto l_B y$, $z \mapsto l_E z$, сдвину аргумент $y \mapsto y + k_x l_B$, и разделю переменные, другими словами, подставлю анзац $\psi^{1,2}(x,y,z) = e^{ik_x x}\chi^{1,2}(y l_B^{-1} - k_x l_B)\phi^{1,2}(z l_E^{-1})$.

$$\left[\frac{\zeta}{2k_0 l_B}\left(y^2 - k_0^2 l_B^2\right)\sigma_x + \sigma_y\hat{k}_y + \frac{l_B}{l_E}\sigma_z\hat{k}_z + \frac{l_B}{l_E}z\right]\begin{pmatrix}\chi^1(y)\phi^1(z)\\ \chi^2(y)\phi^2(z)\end{pmatrix} = 0. \tag{2.16}$$

Обозначу $y_0 \equiv k_0 l_B$, тогда трансверсальные уравнения гласят

$$\left[\frac{\zeta}{2y_0}\left(y^2 - y_0^2\right)\sigma_x + (-i\partial_y)\sigma_y\right]\chi_n(y) = \varepsilon_n\chi_n(y). \tag{2.17}$$

а продольные уравнения имеют такой же вид как и прежде

$$\left[(-i\partial_z)\sigma_z + (l_E/l_B)\varepsilon_n\sigma_x + z\right]\phi(z) = 0, \tag{2.18}$$

поэтому коэффициент прохождения равен $|t|^2 = \exp\left[-\pi\frac{l_E^2}{l_B^2}\varepsilon_n^2\right]$.

### Трансверсальное движение

Итак, основной проблемой является нахождение собственных значений $\varepsilon_n^2$.

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\zeta}{2y_0}\left(y^2 - y_0^2\right) - \partial_y \\ \frac{\zeta}{2y_0}\left(y^2 - y_0^2\right) + \partial_y & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi^1\\ \chi^2\end{pmatrix} = \varepsilon\begin{pmatrix}\chi^1\\ \chi^2\end{pmatrix} \tag{2.19}$$

На первый взгляд, данный гамильтониан является суперсимметричным [15], а значит задача решается точно. Увы, решение при $\varepsilon = 0$, которое так легко интегрируется, $\chi^{1,2}_{\varepsilon=0} = \exp\mp\frac{\zeta}{6y_0}(y^3 - 3y_0^2 y)$ является ненормируемым, и потому нельзя построить решение с помощью лесничных операторов $a^\pm = \frac{\zeta}{2y_0}(y^2 - y_0^2) \mp \partial_y$. Придётся ограничется нахождением поправок. Перемасштабирую $y \mapsto y/\sqrt{\zeta}$ и введу $g \equiv (4\zeta y_0^2)^{-1}$, чтобы оставить в задаче один параметр. Потенциал примет вид

$$\left[-\partial_y^2 + g\left(y^2 - \frac{1}{4g}\right)^2 - 2\sqrt{g}y\right]\chi = \frac{\varepsilon^2}{\zeta}\chi. \tag{2.20}$$

Ясно, что следует строить теорию возмущений по $\sqrt{g} \ll 1$, при $g = 0$ потенциал распадается на два гармонических осциллятора. По опыту изучения одноточечной модели B, мне известно, что основной вклад в кондактанс даёт нулевой уровень Ландау. Однако, из существования квазирешения $\chi^{1,2}_{\varepsilon=0}$ следует, что основное состояние $\varepsilon_0 > 0$, а также следует, что все поправки к нему равны отсутсвуют в любом порядке по $\sqrt{g}$. Продемонстрирую это.

Перемещю начало координат в глубокий минимум $y_+ = y - \frac{1}{2\sqrt{g}}$, $\chi = \chi^1$.

$$\left[-\partial^2 + y_+^2(1+\sqrt{g}y_+)^2 - 1 - 2\sqrt{g}y_+\right]\chi = (\varepsilon^2/\zeta)\chi. \tag{2.21}$$

С одной стороны, при $\varepsilon = 0$ уравнению формально удовлетворяет

$$\chi_{\varepsilon=0}(y) = e^{-\frac{y^2}{2}-\sqrt{g}\frac{y^3}{3}} = e^{-\frac{y^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n y^{3n}}{2^n n!}\sqrt{g}^n = \sum_{n=0}^{\infty}\chi^{(n)}_{\varepsilon=0}(y)\sqrt{g}^n. \tag{2.22}$$

С другой стороны, по теории возмущений, первая поправка находится из уравнения

$$\hat{H}^{(0)}\chi^{(1)} + \hat{H}^{(1)}\chi^{(0)} = \varepsilon^{(0)}\chi^{(1)} + \varepsilon^{(1)}\chi^{(0)}, \qquad \varepsilon^{(0)} = 0,\ \ \chi^{(0)} = e^{-\frac{y^2}{2}}. \tag{2.23}$$

Очевидно его решают (нормируемые) функции $\chi^{(n)}_{\varepsilon=0}$, поскольку $\hat{H}\chi_{\varepsilon=0} = 0$ верно во всех порядках по константе взаимодействия $\sqrt{g}^n$.

Оказывается, поправка к $\varepsilon_0$ экспонециально мала по $g$ и может быть найдена с помощью инстантонной техники [16, (17)] или квазиклассики, последний способ подробно описан в приложении C. Ответ суть

$$\varepsilon_0^2 = \frac{\zeta}{\pi}\exp\left(-\frac{1}{3g}\right), \quad \frac{1}{g} = 4\zeta k_0^2 l_B^2. \tag{2.24}$$

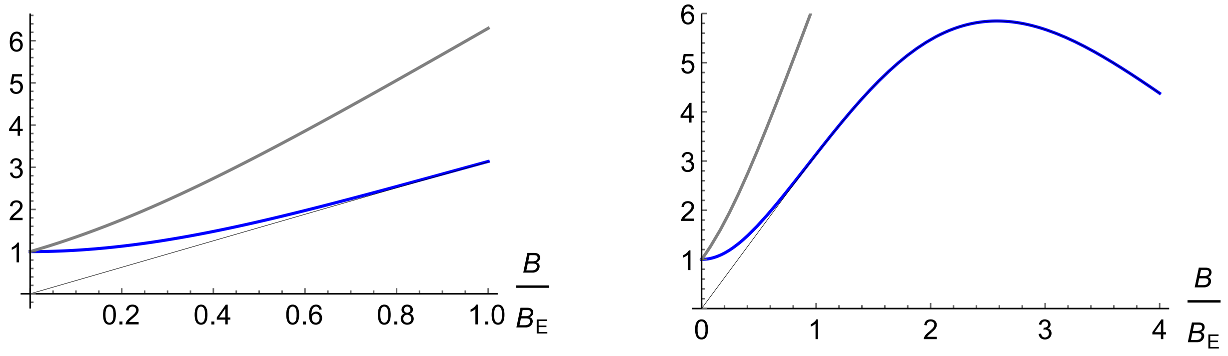
## Зависимость кондактанс от поля

Используя (2.24) и пренебрегая смещениями остальных уровней, просуммирую коэффициенты прохождения в пределе $\zeta k_0^2 l_B^2 \gg 1$. Обозначу $B_0 \equiv \zeta\frac{\hbar c}{e}k_0^2$, $B_E \equiv \frac{cE}{v\zeta}$.

$$\begin{aligned}
G(B) &= \frac{e^2}{h}\frac{S}{2\pi l_B^2}\sum_{\varepsilon_n}\exp\left[-\pi\frac{l_E^2}{l_B^2}\varepsilon_n^2\right] \\
&\approx \frac{e^2}{h}\frac{S}{2\pi l_B^2}\left\{\exp\left[-\zeta\frac{l_E^2}{l_B^2}\exp\left(-\frac{4}{3}\zeta k_0^2 l_B^2\right)\right] + 2\sum_{n=1}^{n_{max}}\exp\left[-2\pi\zeta\frac{l_E^2}{l_B^2}(n+\delta n^{\pm})\right]\right\} \\
&\approx \pi G(0)\frac{B}{B_E}\left\{\exp\left[-\frac{B}{B_E}\exp\left(-\frac{4}{3}\frac{B_0}{B}\right)\right] - 2 + \frac{2}{1-\exp\left(-2\pi\frac{B}{B_E}\right)}\right\}.
\end{aligned}$$

Функция $G(B)$ имеет максиму при $B = B_c$ который полностью определяется первым членом, и поэтому может быть оценён как

$$B_c \approx \frac{4}{3}\frac{B_0}{\ln\frac{4}{3}\frac{B_0}{B_E}}, \qquad \frac{B_0}{B_E} = (\zeta k_0 l_E)^2. \tag{2.25}$$




(a) $G(B)$ up to values $B < B_E \approx 4$ T.



(b) $G(B)$ up to values $B < B_0 \approx 16$ T.

Рис. 2.3: Магнетокондактанс в двухконусной модели в сравнении с одноконусной моделью (серый) и первым членом суммы (чёрный). При $B > B_0$ изложенные результаты неприменимы.

### Численные оценки

Для понимания области применимости полученных результатов, нужно оценить численные значения следующих параметров

$$\zeta \equiv \frac{\hbar k_0}{mv}, \quad l_E^2 \equiv \frac{\hbar v}{eE}, \quad l_B^2 \equiv \frac{\hbar c}{eB}, \qquad B_0 \equiv \zeta \frac{\hbar c}{e} k_0^2, \quad B_E \equiv \frac{c}{\zeta v} E. \tag{2.26}$$

Величина $k_0 \simeq .02$ Å$^{-1}$ для форсфорида тантала (TaP) согласно эксперименту [11], что также по порядку согласуется с численными расчётами [10]. В терминах магнитного поля это $B_0 = \frac{\zeta}{\pi} \Phi_0 k_0^2 \simeq 26$ T.

По данным [11] можно оценить $\zeta \simeq 1$, $v \simeq \alpha c$. Согласно расчётам [1] честной оценкой поля $p$–$n$ перехода будет $E \simeq \Delta^2/(\hbar v)^{3/2}$, где $\Delta$ — растояние от хим потенциала до Вейлевского узла. Согласно [17] у TaP $\Delta \simeq 40$ meV, что соотвествует «встроенному» электрическому полю $E \simeq 40$ В/м и электрической длине $l_E \simeq 12$ Å, а значит параметр $(\zeta k_0 l_E)^2 \simeq 4$.

Данные оценки показывают, что $B_c < B_0$ и предсказанный экстремемум действительно может наблюдаться в TaAs, TaP в полях порядка нескольких гаусс.

## 2.4 Заключение

В данной работе мной была обощена и частично решена задача о магнетокондактансе в $p$–$n$ –перехода в вейлевском полуметлле, разобранная в статье [1]. Я показал актуальность описания данных полуметаллов в физически естесвенной модели [2], описывающей спаренный вейлевский узел, определив качественно новое поведение зависимости кондактанса $G(B)$ от магнитного поля. А именно, я нашёл, что в отличие от результатов одноконусной модели [1], в которой дифференциальный кондактанс имеет аномальный положительный знак при любых полях, двухконусная модель указывает на смену знака диффереициального кондактанса при полях величиной порядка $\Phi_0 k_0^2$, что для известных полуметаллов типа TaAs, TaP означает единицы Тесла.

# Приложение А

# Формализм Ландауэра

### Что такое кондактанс?

Формула Ландауэра позволяет вычислить кондактанс $G = dI/dV|_{V\to 0}$ систем, в которых электрический транспорт определяется квантовыми эффектами [18].

Так, согласно формуле Ландауэра, в самом простом случае, кондактанс идеально прозрачного металла $T_n = 1$, при нулевой температуре $T = 0$, равен[1]

$$G = \frac{e^2}{h} N_\perp, \qquad N_\perp = \left\lfloor \frac{S k_F^2}{4\pi} \right\rfloor. \tag{A.1}$$

Здесь $N_\perp$ — число открытых, т. е. участвующих в транспорте, каналов (уровней) поперечного движения. Получается, что зависимость $G(S)$ при малых $S$ имеет ступенчатый характер, а при больших выходит на знакомый режим $G \propto S$. Действительнс привычно считать, что $G = \sigma \frac{S}{L}$, где $\sigma$ — удельная проводимость. Но согласно формуле Ландауэра, кондактанс от длины не зависит. Причина такого поведения, заключается в предположении о том, что электроны движутся в металле не взаимодейству друг с другом или с дефектами в металле. Отсюда проистекает ограничение применимости формулы Ландауэра — считать движение электронов «баллистическим», т. е. бесстолкнов можно только для образцов длиной $L < L_\varphi$, где так называемая длина сбоя фазы $L_\phi \to \infty$, при $T \to 0$ [19, §5.5].

## А.1 Описание задачи

Пусть к образцу подведены металлические провода с разностью напряжений $V$. С точки зрения электрона, это означает слева и справа от обазца имеются «резервуары» с заданными химическими потенциалами $\mu_1$, $\mu_2 = \mu_1 - eV$. Важно заметить, что речь идёт не о химических потенциалах на левом и правом краях образца, а именно о потенциалах подведённых проводов, поскольку сам контакт «провод–образец» также имеет сопротивление. Подробнее — смотри в книге [20, §5.2].

### Коэффициенты прохождения и отражения

В образце, электрон живёт согласно законам квантовой механики, его движение характеризуется вероятностями прохождения $T$ и отражения $R$ волновых пакетов через «рассеиватель», которые определяются через отношение плотностей потока

[1] Здесь и далее формулы приведены в расчёте на одну проекцию спина.

вероятности. Для гамильтониана свободной частицы, вейлевского гамильтониана и двухузельного гамильтониана ток выржается согласно

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{-i\hbar}{2m}\left(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*\right), \tag{A.2}$$

$$\hat{H} = v(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{p}}) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{j}(\mathbf{r}) = v\psi^+\boldsymbol{\sigma}\psi, \tag{A.3}$$

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m}(\hat{k}_z^2 - k_0^2)\sigma^z \qquad \Rightarrow \qquad j^z(\mathbf{r}) = \frac{-i\hbar}{2m}\left(\psi^+\sigma^z\partial_z\psi - (\partial_z\psi^+)\sigma^z\psi\right), \tag{A.4}$$

что следует непосредственно из эволюционного уравнения Шрёдингера в координатном представлении. Однако, удобнее находить плотность потока как плотность среднего значения скорости

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \operatorname{Re}\psi^+(\mathbf{r})\hat{\mathbf{v}}\psi(\mathbf{r}) = \operatorname{Re}\psi^+\frac{i}{\hbar}[\hat{H},\mathbf{r}]\psi = \operatorname{Re}\psi^+\frac{\partial\hat{H}}{\partial\mathbf{p}}\psi. \tag{A.5}$$

Вообще говоря, коэфициенты прохождения $T_{mn}(\varepsilon)$ зависят от начального $n$ и конечного $m$ канала и энергии электрона $\varepsilon$.

В случае когда продольная переменная $z$ и поперечные переменные $x$, $y$ разделяются, волновая функция электрона факторизуется $\psi(\mathbf{r}) = \chi(x,y)\phi(z)$. Поскольку трансверсальн движение финитно, волновой пакет проходит через барьер, находясь на некотором уровне квантования поперечного квантования $\varepsilon_n$ — канале распространения. При этом коэфициент прохождения из канала $n$ в канал $m$ диагонален $T_{mn} \propto \delta_{mn}$. Когда переменные не разделяются, понятие канала сохраняется, поскольку на краях образца, где потенциал барьера меняется слабо, уместно адиабатическое приближение.

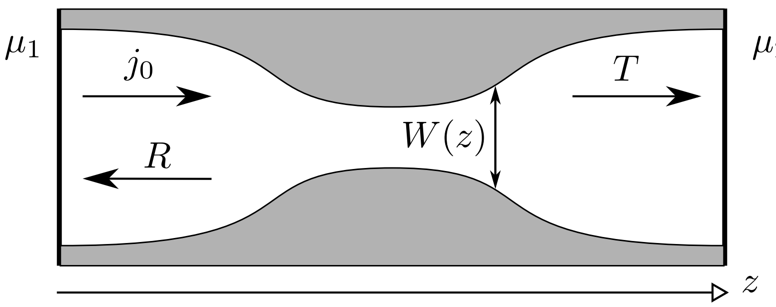



Рис. A.1: Пример квантового точечного контакта.

### Пример

Пусть, например, я имею дело со свободной частицей массы $m$, а барьер представляет из себя сужающиеся цилиндрически–симметричное горлышко радиуса $W(z)$, на рис. A.1 изображено продольное сечение контакта. Пусть скраю $W(\mp\infty) = W_{1,2}$. Тогда поперечная волновая функция и энергии слева и справа суть

$$\chi(\boldsymbol{\rho}) = J_m\left(z_n^{(m)}\frac{\rho}{W_{1,2}}\right)e^{im\varphi}, \qquad \varepsilon_{m,n}^{\perp} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{z_n^{(m)}}{W_{1,2}}\right)^2. \tag{A.6}$$

Индексы $m$, $n$, нумерующие $n$–ый нуль $m$–ой функции Бесселя, и определяют каналы поперечного квантования. Если радиус сужения меняется плавно по сравнению с масштабом продольного движения $W'(z)/W(z) \ll k_z$, т. е. для низко энергетических каналов $\varepsilon^{\perp} \ll \varepsilon^{\|}$, можно приближённо разделить переменные, и свести задачу рассеяния к одномерной в эффективном потенциале

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m}\partial_z^2 + \varepsilon - \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{z_n^{(m)}}{W(z)}\right)^2\right]\phi(z) = 0. \tag{A.7}$$

Однако, в данном приближении отсутствуют недиагональные коэффициенты $T_{nm}$.

### Свойства коэффициентов рассеяния

Итого, с точки зрения транспорта, рассеиватель $S$ полностью характеризуется коэффициентами прохождения и отражения $T_{mn}$, $R_{mn}$ при падении слева, и при падении справа $T'_{mn}$, $R'_{mn}$.

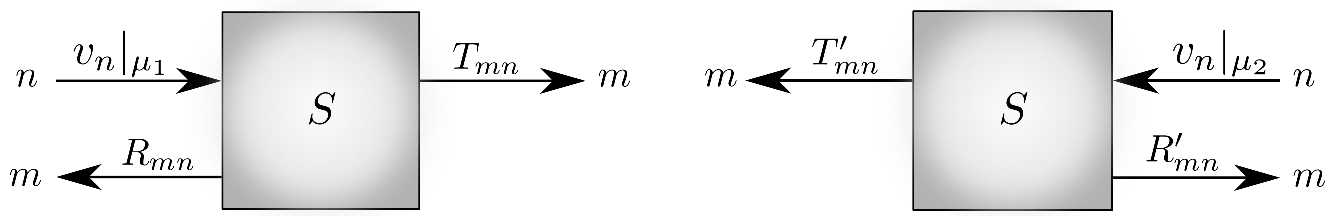



Рис. A.2: Схематическое представление транспортных свойств образца.

Причём выполнено соотношение

$$T_m + R'_m = T'_m + R_m = 1, \qquad \text{где} \qquad T_n \equiv \sum_n T_{mn} \tag{A.8}$$

которое означает, что весь поток, который приходит в канал $m$ либо протуннеллировал через рассеятель, либо пришёл с той же стороны, отразившись от барьера. В рассматриваемых случаях потенциал симметричен и $T = T'$, $R = R'$.

## A.2 Вывод формулы Ландауэра

### Энергия и скорость электронов

Рассмотрю электрон, имеющий заданную энергию $\varepsilon = \varepsilon_F + \xi$. Данная энергия распределяется между поперечным и продольным движением. Так, например,

$$\xi_{\mathbf{k}_\perp, k_z} = \frac{\hbar^2}{2m}(k_\perp^2 + k_z^2 - k_F^2), \qquad \xi_{\mathbf{k}_\perp, k_z} = \pm\hbar v\sqrt{\mathbf{k}_\perp^2 + k_z^2} \tag{A.9}$$

в случае свободной массивной и вейлевской частицы соответственно (энергия отсчитывает от уровня Ферми). Получается, что значение волнового вектора $k_z$ определяется номером канала $n$, и открыты только те каналы, для которых $\varepsilon_{n,k} < \varepsilon$. Таковых существует $N_\perp = \lfloor S k_F^2 / 4\pi \rfloor$ штук, причём для каждого существует два значения волнового вектора $k_z > 0$ и $k_z < 0$, отвечающего заданной энергии, — при вычислении тока нужно выбирать те состояния, которые имеют правильный знак групповой скорости $v_{n,k} = \partial \xi_{n,k}/\partial k$.

В рассматриваемых случаях количество электронов, движущихся вправо и влево одинаково, но это не так, например, для одного вейлевского узла в присутсвии магнитного поля, благодаря существованию хирального (нулевого) уровня Ландау. Поскольку узлы существуют парами противоположной хиральности, ток будет ненулевой, только если узлы будут сдвинуты по энергии на $\Delta\mu$. Плотность хирального тока, в таком случае согласно формуле Ландауэра (B.8).

$$\Delta j = \frac{\Delta I}{S} = \frac{e^2}{h} \frac{\Delta \mu}{2\pi l_B^2} = \frac{e^3 B}{h^2 c} \Delta\mu. \tag{A.10}$$

Подробнее — читай статью [21] или смотри лекцию [22].

## Вычисление тока

При вычислении тока, буду также предполагать, что электрон, прошедший через барьер, скажем, из левого резервуара всегда найдёт место в правом резервуаре, т. е. не буду учитывать принцип запрета Паули при определении конечного состояния. Подробнее — смотри в книге [20, §5.2].

Ток через поперечное сечение, скажем, слева (справа – такой же) от рассеивателя состоит из трёх вкладов (см. рис. A.2)

$$I = \int_0^\infty \frac{dk_z}{2\pi} \sum_{mn} e v_m(\varepsilon) \left[ f_1(\varepsilon)\delta_{mn} - f_1(\varepsilon) R_{mn}(\varepsilon) - f_2(\varepsilon) T'_{mn}(\varepsilon) \right] \tag{A.11}$$

$$= /\varepsilon = \mu_1 + \xi/ = e \sum_{mn} \int \frac{d\xi}{h v_m(\xi)} v_m(\xi) T'_{mn}(\xi) \left[ f_1(\xi) - f_2(\xi) \right] \tag{A.12}$$

$$= (\mu_1 - \mu_2) \cdot \frac{e^2}{h} \int d\xi \left( -\frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \sum_{mn} T'_{mn}(\xi). \tag{A.13}$$

Отмечу, что результат не зависит от размерности, т. к. суммирование по $k_z$ эффективно одномерное и плотность состояний $\nu(\xi) = (2\pi\hbar(\partial\xi_{n,k}/\partial k))^{-1}$ сокращается со скоростью $v_{n,k}$. Окончательно, кондактанс

$$G = \frac{e^2}{h} \int \frac{d\xi}{4T \operatorname{ch}^2 \frac{\xi}{T}} \sum_{mn} T_{mn}(\xi) \sim \frac{e^2}{h} \sum_{mn} T_{mn}(\varepsilon = \mu), \quad T \to 0. \tag{A.14}$$

Последнюю формулу можно переписстав как $G = \frac{e^2}{h} \operatorname{tr}(t^+ t)$, если вспомнить, что $T_{mn} = |t_{mn}|^2$ и считать $t_{mn}$ симметричной, что верно не всегда — в общем случае, согласно соотношениям Онсагера $t_{mn}(\mathbf{B}) = t_{nm}(-\mathbf{B})$.

# Приложение B

# Одноконусная модель

В данной секции я кратко воспроизведу основные результаты статьи [1], при этом я также буду следовать плану решения, описанном в Главе 2.1.

## B.1 Магнитное поле вдоль гетероперехода

Рассмотрю $p{-}n$ переход в вейлевском полуметалле в присутствии магнитного поля $\mathbf{B}$, сонаправленного с «встроенным» электрическим полем $p{-}n$ перехода $\mathbf{E}$.

$$\hat{H} = \hbar v \boldsymbol{\sigma} \cdot \left( \hat{\mathbf{k}} - \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) - eEz, \tag{B.1}$$

В калибровке $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$ импульс $k_x$ коммутирует с Гамильтонианом.

$$(\hbar v)^{-1} \hat{H} = \sigma_x \left( k_x - \frac{y}{l_B^2} \right) + \sigma_y \hat{k}_y + \sigma_z \hat{k}_z + \frac{z}{l_E^2}, \qquad l_B^2 \equiv \frac{\hbar c}{|e|B}, \quad l_E^2 \equiv \frac{\hbar v}{|e|E}. \tag{B.2}$$

Подстановка $\psi^{1,2}(\mathbf{r}) = e^{ik_x x} \chi^{1,2}(y l_B^{-1} - k_x l_B) \phi^{1,2}(z l_E^{-1})$ разделяет переменные.

$$[y\sigma_x + i\partial_y \sigma_y]\, \chi_n(y) = \varepsilon_n \chi_n(y), \tag{B.3}$$

$$[(l_E/l_B)\varepsilon_n \sigma_x + i\partial_z \sigma_z - z]\, \phi(z) = 0, \tag{B.4}$$

причём в последнем уравнении я положил энергию равной нулю, поскольку коэффициент прохождения в линейном потенциале от нее не зависит.

### Трансверсальное движение

Поперечные уравнения (B.3) легко решаются и дают уровни Ландау [14, §112].

$$(y \mp \partial_y)\chi^{1,2}(y) = \varepsilon \chi^{2,1}(y) \qquad \Rightarrow \qquad (-\partial_y^2 + y^2 - \varepsilon^2 \pm 1)\chi^{1,2}(y) = 0. \tag{B.5}$$

$$\chi_n = \begin{pmatrix} \psi_n^{\mathrm{osc}} \\ \psi_{n+1}^{\mathrm{osc}} \end{pmatrix} \quad \chi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_0^{\mathrm{osc}} \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_n = \sqrt{2n}, \;\; n \in \mathbb{N}_0. \tag{B.6}$$

Здесь $\psi_n^{\mathrm{osc}}(y) \propto e^{-\frac{y^2}{2}} H_n(y)$ — собственные функции гармонического осциллятора.

### Задача рассеяния

Продольные уравнения в импульсном представлении имеют вид

$$i\partial_k \begin{pmatrix}\phi^1\\ \phi^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-k & \Delta_n\\ \Delta_n & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi^1\\ \phi^2\end{pmatrix} \qquad \Delta_n \equiv \frac{l_E}{l_B}\varepsilon_n, \tag{B.7}$$

что совпадает с уравнениями Ландау–Зенера, с импульсом $k$ роли времени. Вероятность перехода на другой уровень в задаче Ландау–Зенера хорошо известна и равна $P = \phi^+\phi|_{k\to+\infty} = \exp(-\pi|\Delta_n|^2)$. Формально эта вероятность совпадает с коэффициентом прохождения в задаче рассеяния $T = \phi^+\hat{\sigma}_z\phi$ — в обоих случаях начальные волновые функции равнялись $\phi^1 = 1$, $\phi^2 = 0$.

### Формула Ландауэра

Суммирование коэффициентов прохождения $T_n = \exp(-2\pi\frac{l_E^2}{l_B^2}n)$ по осцилляторным модам $n \in \mathbb{N}_0$ с учётом того, что каждая мода вырождена $BS/2\Phi_0 = S/2\pi l_B^2$ раз даёт выражение для кондактанса

$$G = \frac{e^2}{h}\frac{S}{2\pi l_B^2}\sum_{n=0}^{\infty} T_n = \frac{e^3BS/h^2c}{1-\exp(2\pi\frac{vB}{cE})}. \tag{B.8}$$

В пределе $B \to 0$, нахожу

$$G(0) = \frac{e^2}{h}\frac{S}{2\pi l_E^2} = \frac{e^3ES}{h^2v}. \tag{B.9}$$

Здесь важно отметить, что основной вклад в кондактанс вносит нулевой уровень Ландау, для которого $T_0 = 1$, вклады высших уровней экспоненциально меньше.

## B.2 Наклонённое магнитное поле

to be continued...

# Приложение C

# Однородная квазиклассика

## C.1 Наклонённый двухъямный потенциал

Решу стационарную задачу Шрёдингера (потенциал изображён на рис. C.1)

$$\left[-\partial^2 + g\left(y^2 - \frac{1}{4g}\right)^2 - 2\sqrt{g}y\right]\chi(y) = 2\nu\chi(y). \tag{C.1}$$

в первом неисчезающем порядке по параметру $g \ll 1$ с помощью метода однородной квазиклассики. В терминах переменных $y_\pm = y \mp \frac{1}{2\sqrt{g}}$ потенциал имеет вид

$$\left[-\partial^2 + y_\pm^2(1 \pm \sqrt{g}y_\pm)^2 \mp 1 - 2\sqrt{g}y_\pm\right]\chi(y_\pm) = 2\nu\chi(y_\pm). \tag{C.2}$$

При $g = 0$ задача разбивается на два гармонических осциллятора.

$$\left[-\partial^2 + y_\pm^2 - (2\nu_\pm + 1)\right]\chi(y_\pm) \approx 0, \qquad |y_\pm| \ll 1/\sqrt{g}, \tag{C.3}$$

где обозначено $\nu_+ = \nu$, $\nu_- = \nu - 1$. Каждое из уравнений имеет собственные значения $\nu_\pm = 0,\ 1,\ 2, \ldots$, а исходное уравнение тогда имеет спектр $\nu = 0,\ 1^{(2)},\ 2^{(2)}, \ldots$ Взаимодействие $g \neq 0$, как известно [14, §50], приводит к экспоненциально малым

$$\delta\nu_n \sim \mathrm{const} \cdot \exp\left(-S_{\mathrm{tunnel}}\right) = \mathrm{const} \cdot g^{-n} \exp\left(-1/6g\right) \tag{C.4}$$

расщеплениям вырожденных уровней, за счёт туннельного перекрытия невозмущённых волновых функций, вычисление которых на фоне одинаковых степенных смещений обычно и представляет интерес (в рассматриваемом потенциале степенные поправки отсутствуют, как следствие нарушенной суперсимметрии).

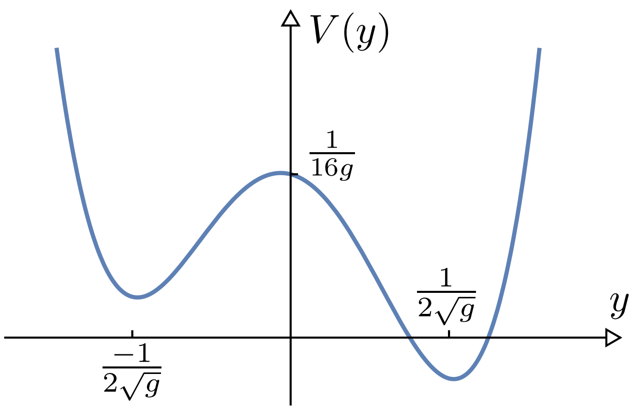



Рис. C.1: Наклонённый суперсимметричный двухъямный потенциал ($g = 2^{-6}$).

Однако, метод [14, §50] даёт неверный предэкспоненциальный множитель и, самое главное, неспособен определить смещение основного уровня $\nu_0$, который играет основную роль в определении кондактанса. Оказывается, правильный первый член асимптотического разложения можно получить, если вблизи минимумов точно решить (C.3) и сшить решения с глобальным квазиклассическим решением

$$\chi(y) = C_+ \frac{\exp \int_0^y |k(z)| dz}{\sqrt{|k(y)|}} + C_- \frac{\exp - \int_0^y |k(z)| dz}{\sqrt{|k(y)|}}. \tag{C.5}$$

под барьером $|y| < \frac{\text{const}}{\sqrt{g}}$, где квазиклассический импульс равен

$$|k(y)| = \sqrt{g\left(y^2 - \frac{1}{4g}\right)^2 - 2\sqrt{g}y - 2\nu}. \tag{C.6}$$

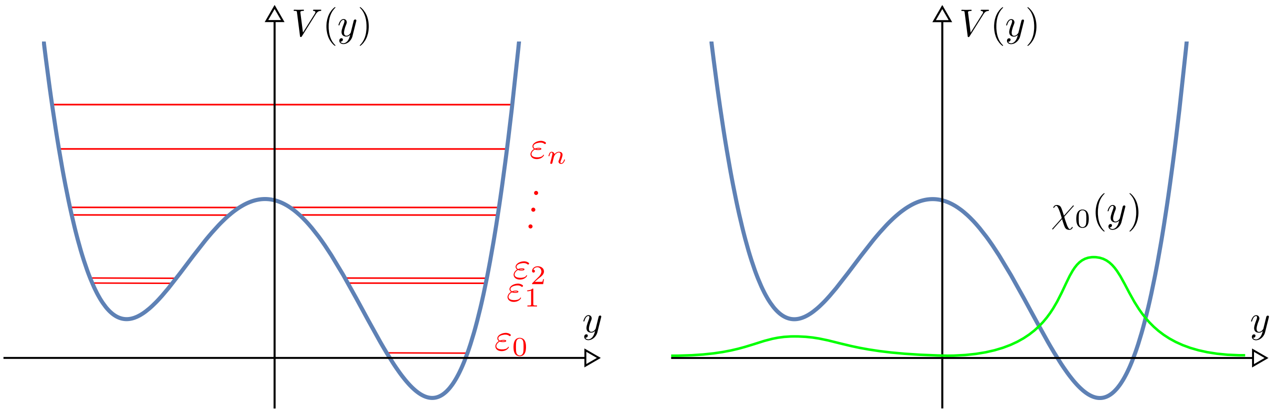



Рис. C.2: Уровни энергии $\varepsilon_n = 2\nu_n$ и волновая функция основного состояния $\chi_0(y)$.

## Сшивка квазиклассических решений

Решение, затухающее на $y \to +\infty$, называется функцией Эрмита $\psi_\nu^{\text{osc}}(y)$ и имеет асимптотическое поведение (подробности описаны в следующей секции)

$$\psi_\nu^{\text{osc}}(y) \sim \begin{cases} (2y)^\nu e^{-\frac{y^2}{2}}, & y \to +\infty \\ \cos \pi\nu(-2y)^\nu e^{-\frac{y^2}{2}} + \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)}(-y)^{-\nu-1} e^{\frac{y^2}{2}}, & y \to -\infty \end{cases} \tag{C.7}$$

Казалось бы, сохранение сублидирующего члена асимптотики незаконно на фоне ошибки лидирующего вклада, но это не так по следующим причинам. Во-первых, меня интересуют значения аргумента $|y_\pm| \ll \frac{1}{\sqrt{g}}$, поскольку сшивка должна происходить в области, где ещё верно (C.3). Во-вторых, я сшиваю не значения в точке, а функциональные зависимости — выражение (C.5) содержит две экспоненты с разными знаками, значит такой же вид должна иметь асимптотика. В-третьих, лидирующий член содержит множитель $\frac{1}{\Gamma(-\nu)} \to 0$, при $g \to 0$.

Квазиклассическое действие вблизи точек поворота $|y| \sim \frac{\mathrm{const}}{\sqrt{g}}$, т. е. при $|y_\pm| \ll \frac{1}{\sqrt{g}}$

$$S(y) = \frac{1}{8g}\int_0^{2\sqrt{g}y} \sqrt{(1-z^2)^2 - 16g(z+2\nu)}\,dz = \tag{C.8}$$
$$= \left[\frac{1}{8g}\left(z - \frac{z^3}{3}\right) + \frac{1}{2}\ln\left|1-z^2\right| + \nu\ln\left|\frac{1-z}{1+z}\right| + \mathcal{O}(g)\right]\Bigg|_0^{2gx} \tag{C.9}$$
$$= \frac{1}{12g} - \frac{y_+^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left[-4\sqrt{g}y_+\right] + \nu\ln\left[-\sqrt{g}y_+\right] + \mathcal{O}\left(y_+^3\right), \tag{C.10}$$
$$= -\frac{1}{12g} + \frac{y_-^2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left[4\sqrt{g}y_+\right] - \nu\ln\left[\sqrt{g}y_-\right] + \mathcal{O}\left(y_-^3\right). \tag{C.11}$$

Сравнение (C.10) и (C.11) с выражением (C.7) определяет условие квантования.

$$\frac{C_+}{C_-} = \frac{2^{\nu_+}\cos\pi\nu_+}{\sqrt{\pi}/\Gamma(-\nu_+)}\frac{e^{-\frac{1}{12g}-\nu\ln\left[\sqrt{g}\right]}}{e^{\frac{1}{12g}+\nu\ln\left[\sqrt{g}\right]}} = \frac{\sqrt{\pi}/\Gamma(-\nu_-)}{2^{\nu_-}\cos\pi\nu_-}\frac{e^{\frac{1}{12g}+\nu\ln\left[\sqrt{g}\right]}}{e^{-\frac{1}{12g}-\nu\ln\left[\sqrt{g}\right]}}. \tag{C.12}$$

Прихожу к уравнению на энергию на энергию ($\varepsilon = 2\nu$).

$$\left(\frac{g}{2}\right)^{2\nu}\Gamma(\nu)\Gamma(1+\nu)\,\mathrm{tg}^2\,\pi\nu = \frac{\pi}{2}e^{-\frac{1}{3g}}. \tag{C.13}$$

В пределе $g \ll 1$ когда $\nu$ близко к целому, так что $\nu_n = \lceil\frac{n}{2}\rceil + (-)^n\delta\nu_n$,

$$\delta\nu_0 = \frac{e^{-\frac{1}{3g}}}{2\pi}, \qquad \delta\nu_n = \sqrt{\frac{\lceil\frac{n}{2}\rceil}{2\pi}}\left(\frac{2}{g}\right)^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}\frac{e^{-\frac{1}{6g}}}{\lceil\frac{n}{2}\rceil!}. \tag{C.14}$$

Так описываются низколежащие уровни в суперсимметричном наклонённом двухъямном потенциале, причём для $n > 0$ указанная формула даёт расщепления, а не сдвиги уровней. Формула имеет смысл для $\lceil\frac{n}{2}\rceil < n_{\max} \approx \lfloor 1/32g \rfloor$. Численное решение уравнения Шрёдингера показывает, что результат $\delta\nu_0$ даёт ответ с ошибкой меньше 3% вплоть до $g < \frac{1}{4}$, что эквивалентно $B < B_0$.

## C.2 Функции Эрмита

Отдельного обсуждения заслуживает определение асимптотик функций Эрмита $\psi_\nu(y)$ при $y \to -\infty$. Подходящее решение (C.3) легко найти с помощью меотда Лапласа.

$$\psi_\nu^{\mathrm{osc}}(y) = e^{-y^2/2}\frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0)}\frac{dt}{t^{\nu+1}}e^{2yt-t^2} \tag{C.15}$$

Функция нормирована таким образом, что когда $\nu \in \mathbb{N}_0$, она переходит в волновую функцию гармонического осциллятора $\psi_n^{\mathrm{osc}} = e^{-\frac{y^2}{2}}H_n(y)$. В литературе также встречается функция параболического цилиндра, через которые функция Эрмита выражается как $\psi_\nu^{\rm osc}(y) = \sqrt{2}^\nu D_\nu(\sqrt{2}y)$.

$$\psi_\nu^{\rm osc}(y \pm i0) \sim \begin{cases} (2y)^\nu e^{-\frac{y^2}{2}}, & y > 1 \\ e^{\mp i\pi\nu}(-2y)^\nu e^{-\frac{y^2}{2}} + \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)}(-y)^{-\nu-1} e^{\frac{y^2}{2}}, & y < -1 \end{cases} \tag{C.16}$$

to be continued...

# Список литературы и ссылок


[1] S. Li, A.V. Andreev, and B.Z. Spivak. Klein tunneling and magnetoresistance of $p{-}n$ junctions in Weyl semimetals. *Phys. Rev. B*, 94:081408, Aug 2016. arXiv:1605.02799.

[2] R. Okugawa and S. Murakami. Dispersion of Fermi arcs in Weyl semimetals and their evolutions to Dirac cones. *Phys. Rev. B*, 89:235315, Jun 2014. arXiv:1402.7145.

[3] В.Б. Берестецкий и Е.М. Лифшиц и Л.П. Питаевский. *Теоретическая физика. Том 4. Квантовая электродинамика.* ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2006.

[4] A. Potter, I. Kimchi, and A. Vishwanath. Quantum oscillations from surface fermi arcs in weyl and dirac semimetals. *Nature Communications*, 5(5161), 2014. arXiv:1402.6342.

[5] S. Konschuh, M. Gmitra, and J. Fabian. Tight-binding theory of the spin-orbit coupling in graphene. *Phys. Rev. B*, 82:245412, Dec 2010. arXiv:1409.0388.

[6] Е.М. Лифшиц и Л.П. Питаевский. *Теоретическая физика. Том 9. Статистическая физика. Часть 2.* ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2006.

[7] O. Vafek and A. Vishwanath. Dirac fermions in solids: from high-$T_c$ cuprates and Graphene to topological insulators and Weyl semimetals. *Annual Reviews*, 5(83-112), 2014. arXiv:306.2272.

[8] S. Tchoumakov, M. Civelli, and M. Goerbig. Magnetic-field-induced relativistic properties in Type-I and Type-II Weyl semimetals. *Phys. Rev. Lett.*, 117:086402, Aug 2016. arXiv:1605.00994.

[9] Berry M.V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 392(1802), 1984. Michael's webpage.

[10] H. Weng, C. Fang, Z. Fang, A. Bernevig, and Xi Dai. Weyl semimetal phase in noncentrosymmetric transition-metal monophosphides. *Phys. Rev. X*, 5:011029, Mar 2015. arXiv:1501.00060.

[11] N. Xu et.al. Observation of Weyl nodes and Fermi arcs in tantalum phosphide. *Nature Communications*, 2016. arXiv:1507.03983.

[12] H.B. Nielsen and M. Ninomiya. The Adler-Bell-Jackiw anomaly and Weyl fermions in a crystal. *Physics Letters B*, 130(6):389 – 396, 1983.

[13] D. Delplace, J. Li, and D. Carpentier. Topological Weyl semi-metal from a lattice model. *ALJEFP*, 2012. arXiv:1202.3459.

[14] Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц. *Теоретическая физика. Том 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория.* ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2008.

[15] И.В. Криве и Л.Э. Генденштейн. Суперсимметрия в квантовой механике. *УФН*, 146(8):553–590, 8 1985.

[16] U.D. Jentschura and J. Zinn-Justin. Instantons in quantum mechanics and resurgent expansions. *Physics Letters B*, 596(1):138 – 144, 2004. arXiv:hep-ph/0405279.

[17] Su-Yang Xu et.al. Experimental discovery of a topological Weyl semimetal state in TaP. *Science Advances*.

[18] Г.Б. Лесовик и И.А. Садовский. Описание квантового электронного транспорта с помощью матриц рассеяния. *УФН*, 181(10):1041–1096, 2011. arXiv:1408.1966.

[19] В.Ф. Гантмахер. *Электроны в неупорядоченных средах.* ФИЗМАТЛИТ, 2013.

[20] Y. Imry. *Introduction to mesoscopic physics.* Oxford University Press, 1997.

[21] P. Baireuther, J.A. Hutasoit, J. Tworzydło, and C.W.J. Beenakker. Scattering theory of the chiral magnetic effect in a Weyl semimetal: interplay of bulk Weyl cones and surface Fermi arcs. *New Journal of Physics*, 18(4):045009, 2016. arXiv:1512.02144.

[22] C.W.J. Beenakker. Topological surface Fermi arcs in a Weyl semimetal and the chiral magnetic effect without Landau levels. *Tel Aviv University*.