ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Доцент каф. АСУ: Суханов А.Я.

Нелинейная оптимизация с ограничениями

<u>Необходимые условия оптимальности</u>:

Будем рассматривать задачу

где функции f и g_i $(i \in I)$ непрерывно дифференцируемы.

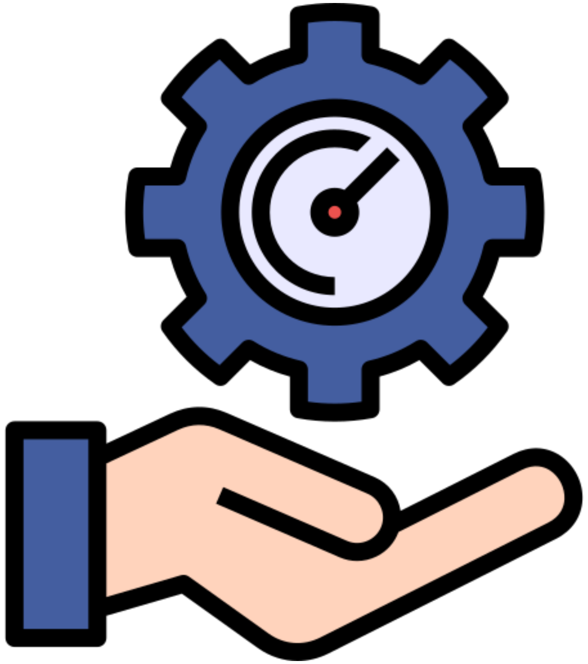
X множество решений задачи

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \ g_i(x) \leq 0, \ i \in I\}.$$

где функции f и g_i $(i \in I)$ непрерывно дифференцируемы.

X множество решений задачи

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \ g_i(x) \leq 0, \ i \in I\}.$$



Точка $x^0 \in X$ есть *локальный оптимум (минимум)* задачи

$$\begin{aligned} f(x) &\to \min, \\ g_i(x) &\leq 0, \quad i \in I = \{1, \ldots, m\}, \\ x &\in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

если для некоторого числа $\epsilon > 0$ выполняется условие

$$f(x^0) \leq f(x) \quad \forall\, x \in X,\ \|x - x^0\| \leq \epsilon.$$

Необходимые условия Куна – Таккера

Теорема 2.1 (Куна — Таккера). *Предположим, что все функции f и g_i $(i = 1, \dots, m)$ непрерывно дифференцируемы и в точке $x^0 \in X$ выполняется условие выделения ограничений. Если x^0 есть точка локального минимума, то существуют такие числа $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, \dots, m)$, что*

$$\begin{aligned} \nabla f(x^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^0) &= 0, \\ \lambda_i g_i(x^0) &= 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

(*Числа λ_i называются множителями Куна-Таккера.*)

Условия Куна — Таккера допускают также следующую физическую интерпретацию. *Материальная точка* движется внутри множества X под действием переменной силы, вектор которой в точке x равен $-\nabla f(x)$. Грани (границы) множества X являются абсолютно упругими и, когда материальная точка досгагает грани $g_i(x) = 0$ в точке x^0, на материальную точку дествует сила реакции $\lambda_i \nabla g_1(x^0)$, где множитель $\lambda_i \geq 0$ выбирается из условия, что сила $\lambda_i \nabla g_i(x^0)$ должна уравновешивать силу, с которой материальная точка давит на данную грань. Нужно найти *точку покоя* x^0, в которой движение материальной точки прекратиться. В такой интерпретации условия Куна — Таккера выражают тот факт, что в точке покоя силы реакции $\lambda_i \nabla g_i(x^0)$ граней уравновешивают силу

$-\nabla f(x^0)$, действующую на материальную точку.

Числовой пример:

Записывая и решая системы уравнений и неравенств, выражающих условия Куна — Таккера, мы можем решать небольшие примеры оптимизационных задач. При этом следует заметить, что в компьютерных программах, способных решать задачи реалистичных для практики размеров, реализованы совершенно иные (численные) методы решения гладких оптимизационных задач с ограничениями, а теорема Куна — Таккера — это важный теоретический результат, который применяется при доказательтве многих теорем.

Решим задачу:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \min,$$

$$g_1(x) = 2x_1 - x_2 + x_3 - 5 \le 0,$$

$$g_2(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0.$$

Учитывая, что

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_1(x) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \nabla g_2(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

запишем условия Куна — Таккера:

$$\begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0,$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 - 5 \leq 0,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0,$$

$$\lambda_1(2x_1 - x_2 + x_3 - 5) = 0,$$

$$\lambda_2(x_1 + x_2 + x_3 - 3) = 0,$$

$$\lambda_1 \geq 0.$$

или

$$2x_1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$

$$2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$

$$2x_3 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 - 5 \leq 0,$$

$$\lambda_1(2x_1 - x_2 + x_3 - 5) = 0,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3,$$

$$\lambda_1 \geq 0.$$

Рассмотрим два случая.

$\lambda_1 = 0$. Тогда из первых трех уравнений получаем, что $x_1 = -\frac{\lambda_2}{2}$, $x_2 = -\frac{\lambda_2}{2}$ и $x_3 = -\frac{\lambda_2}{2}$. Подставляя эти значения в поледнее уравнение, найдем λ_2:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{3}{2}\lambda_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = -2.$$

Откуда $x^1 = (1,1,1)^T$ — стационарная точка. Причем, поскольку $f(x)$ — выпуклая функция, то x^1 точка глобального минимума[5].

$\lambda_1 > 0$. Теперь в силу условия дополняющей нежесткости

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 5.$$

Из первых трех уравнение найдем:

$$x_1 = -\frac{1}{2}(2\lambda_1 + \lambda_2),$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}(-\lambda_1 + \lambda_2),$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Подставляя эти значение в уравнения:

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 5,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3,$$

Получим: $-2\lambda_1 - \lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 = 5,$ или $-3\lambda_1 - \lambda_2 = 5,$

$$-\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 - \frac{1}{2}\lambda_1 - \frac{1}{2}\lambda_2 = 3, \qquad -\lambda_1 - \frac{3}{2}\lambda_2 = 3.$$

Умножив первое уравнение на $-\frac{3}{2}$ и сложив со вторым, получим:

$$\left(\frac{9}{2} - 1\right)\lambda_1 + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)\lambda_2 = -\frac{3}{2}5 + 3, \quad \text{или} \quad \frac{7}{2}\lambda_1 = -\frac{9}{2}.$$

Отсюда $\lambda_1 = -\frac{9}{7}$, что противоречит требованию неотрицательности λ_1.

Следовательно, $x^1 = (1, 1, 1)$ — единственная точка глобального минимума. □

Экономическая интерпретация множителя Куна – Таккера

Фирма использует n производственных процесса для производства n продуктов. Процес j $(j = 1, \ldots, n)$ описывается производственной функцией f_j:

$$x_j = f_j(x_1^j, \ldots, x_m^j),$$

где переменная x_j обозначает количество единиц продукта j, производимого j-м процессом, а переменная x_i^j обозначает количество единиц ресурса i $(i = 1, \ldots, m)$, используемого в j-м процессе. В наличии имеется a_i единиц ресурса i, $i = 1, \ldots, m$. Задан вектор цен $p = (p_1, \ldots, p_n)^T$ выпускаемых продуктов. Нужно найти производственный план $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)^T$, стоимость которого $p^T x^*$ максимальна.

Данная задача формулируется следующим образом:

$$p^T x \to \max,$$

$$\lambda_j: \quad x_j - f_j(x_1^j, \ldots, x_m^j) = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\mu_i: \quad \sum_{j=1}^{n} x_i^j - a_i \le 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\nu_j: \quad x_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$\rho_i^j: \quad x_i^j \ge 0, \quad i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

Здесь в самом левом столбце записаны множители Куна – Таккера для соответствующих ограничений.

Условия Куна – Таккера для задачи:

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

$$-p_j + \lambda_j + \nu_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad \text{a}$$

$$\mu_i - \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \ldots, x_m^j) + \rho_i^j = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n, \qquad \text{b}$$

$$x_j - f_j(x_1^j, \ldots, x_m^j) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad \text{c}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_i^j \le a_i\,, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad \text{d}$$

$$\mu_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_i^j - a_i \right) = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \qquad \text{e}$$

$$\nu_j x_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad \text{f}$$

$$\rho_i^j x_i^j = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n, \qquad \text{g}$$

$$\nu_j \le 0, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad \text{h}$$

$$\rho_i^j \le 0, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n. \qquad \text{i}$$

TУСУР
TUSUR UNIVERSITY

$$\nu_j x_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad \text{f}$$

$$-p_j + \lambda_j + \nu_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad \text{a}$$

Если продукт j производится ($x_j > 0$), то из условия дополняющей нежесткости (f) имеем, что $\nu_j = 0$, и тогда из (a) следует, что $\lambda_j = p_j$, т. е. множители, соответствующие технологическим процессам производимых продуктов, равны ценам этих продуктов.

TУСУР
TUSUR UNIVERSITY

$$\mu_i - \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \ldots, x_m^j) + \rho_i^j = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n, \tag{b}$$

$$\rho_i^j x_i^j = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n, \tag{g}$$

Если ресурс i используется в j-м процессе ($x_i^j > 0$), то из (2.9g) вытекает, что $\rho_i^j = 0$, и тогда для проиводимого продукта j ($x_j > 0$) из (2.9b) имеем:

$$\mu_i = p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \ldots, x_m^j).$$

Если ресурс i не используется полностью $\left(\sum_{j=1}^{n} x_i^j < a_i\right)$, то из (2.9e) имеем, что $\mu_i = 0$. Но, если ресурс i используются в производственном процессе для какого-либо производимого продукта j, и поскольку $p_j > 0$ и $\frac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \ldots, x_m^j) > 0$, то и $\mu_i > 0$, т. е. такой ресурс i должен использоваться полностью.

$$\mu_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_i^j - a_i \right) = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

Суммируя сказанное выше, мы формулируем свойства множителей ресурсных ограничений следующим образом:

множитель ресурса, который не используется ни в одном технологическом процессе, производящем продукт, равен нулю; если ресурс i используется в технологическом процессе, производящем некоторый продукт j, то соответствующий этому ресурсу множитель μ_i равен стоимости предельного продукта j относительно ресурса i.

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

г. Томск, ул. Вершинина, 47, офис 434

e-mail: aleksandr.i.sukhanov@tusur.ru

тел.: (3822) 70-15-36