Исследование операций

Доцент каф. АСУ: Суханов А.Я.

Определение

- *Опр.:* Если в матрице   игры все элементы строки(столбца) равны соответствующим элементам другой строки(столбца), то соответствующие строкам(столбцам) стратегии называются ***дублирующими.***
- *Опр.:* Если в матрице   игры все элементы некоторой строки определяют стратегию xi игрока I не больше соответствующих элементов другой строки, то стратегия xi называется ***заведомо невыгодной.***
- *Опр.:* Если в матрице   игры все элементы некоторого столбца, определяющие стратегию yj игрока II не меньше соответствующих элементов другого столбца, то стратегия yj называется заведомо невыгодной.

Упрощение игр

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

- Основная задача состоит в том, чтобы найти оптимальные (или хотя бы рациональные) стратегии, наилучшим образом приводящие систему к цели при заданных внешних условиях. Для выбора стратегий в условиях неопределенности можно применять любые критерии, в условиях риска действеннее критерий Байеса. Однако выбор между самими критериями основывается обычно на интуиции, зависит от характера принимающего решение (в частности, его склонности к риску). Если решение принимается в условиях неопределенности, то лучше использовать несколько критериев. В том случае, если рекомендации совпадают, можно с уверенностью выбирать наилучшее решение. Если рекомендации противоречивы, решение надо принимать более взвешенно, с учетом сильных и слабых сторон.

Пример упрощения

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \end{array}$$

Стратегия x3 дублирует стратегию x1 , поэтому любую из них можно вычеркнуть.

Если сравнить x1 и x2 , то можно заметить, что все элементы x2 не превышают соответствующих элементов x1 . Значит стратегия x2 для нас, желающих выиграть заведомо невыгодна. Вычеркивая x3 и x2 приведем матрицу к более простому виду.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Для второго игрока стратегия y3 заведомо невыгодна. Вычеркивая ее получим:

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Смешанные стратегии

- Иногда удается упростить игру искусственным введением вместо чистых стратегий смешанных. Из матрицы видна “симметрия” элементов стратегий y1 и y2, y3и y4, а также x1 и x2.
- Если эти стратегии входят в решение, то только с одинаковыми вероятностями q1=q2,q3=q4 и p1=p2. Возникает желание заранее объединить y1 и y2 в одну смешанную стратегию y12 состоящую наполовину из y1и на половину из y2. Аналогично можно попытаться поступить со стратегиями y3 иy4 объединив их в y34 куда они войдут с одинаковыми вероятностями 0.5 .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{array}{cc} y_{12} & y_{34} \\ \left(\begin{array}{cc} 2.5 & 3.5 \\ 2.5 & 3.5 \\ 5 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \end{array} \longrightarrow \boxed{A'' = \begin{pmatrix} 2.5 & 3.5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}}$$

Решение и геометрическая интерпретация игр 2 на 2

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

- Рассмотрим случай, когда игра не имеет седловой точки, т.е.
- Требуется найти оптимальные стратегии игроков S1 иS2 и цену игры γ
- В основной теореме теории игр утверждается, что любая конечная игра двух лиц с нулевой суммой имеет по крайней мере одно решение в смешанных стратегиях, которые обозначим

$$S_1 = (p_1, p_2, \dots, p_m)$$
$$S_2 = (q_1, q_2, \dots, q_n)$$

- Величина ожидаемого выигрыша игрока I при применении смешанных стратегий равна математическому ожиданию $<V>= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j = S_1 A S_2^T$
- *Теорема:* Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры γ, независимо от того, что делает другой игрок, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий.

Решение и геометрическая интерпретация игр 2 на 2

- Т.к. в игре нет седловой точки, то обе стратегии игроков являются активными. В соответствии с теоремой об активных стратегиях, если 1 игрок будет применять свою оптимальную стратегию, то, независимо о действий второго игрока, его выигрыш будет цены игры γ, пусть

$$S_1 = (p_1, p_2)$$

$$\begin{array}{ccc} & & \\ A = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \\ & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} & \end{array}$$

Если 2-ой игрок применяет стратегию В1 то выигрыш первого игрока определяется из уравнения

$$a_{11} p_1 + a_{21} p_2 = \gamma$$

Если 2-ой игрок применяет стратегию В2 то

$$a_{12} p_1 + a_{22} p_2 = \gamma$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

то получим систему из трех неизвестных.
Ее решение S = (p1*,p2*), γ

Оптимальная стратегия второго игрока

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Система

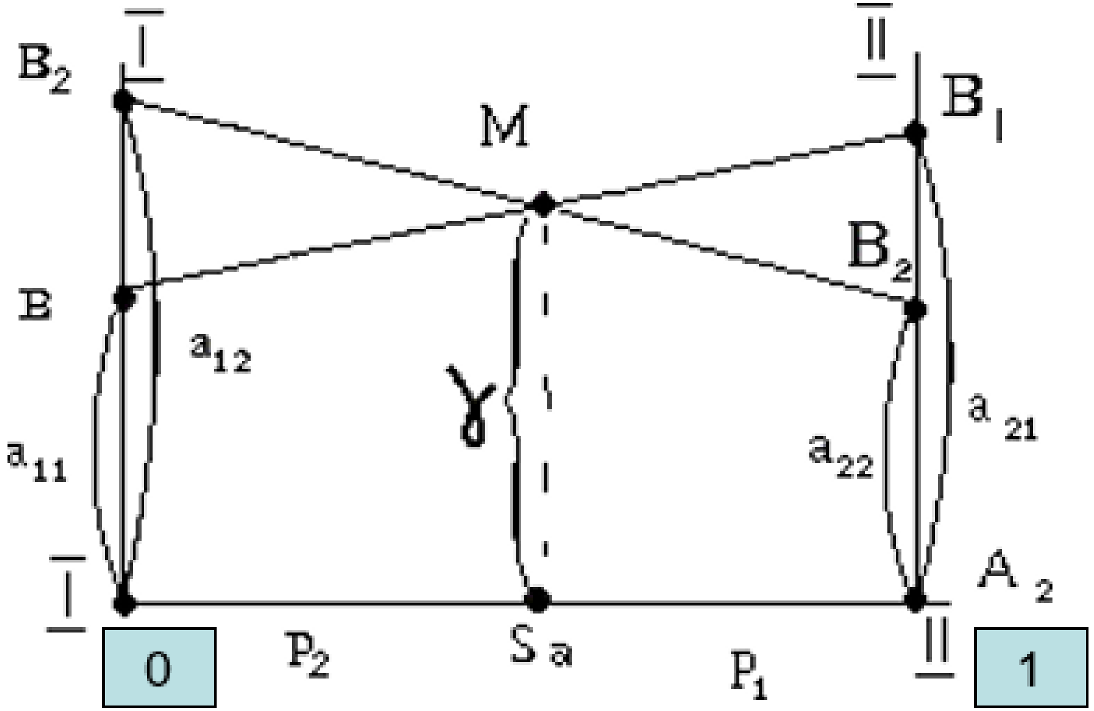
$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = \gamma \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = \gamma \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} & \end{array}$$

Решение

$$S_2^* = (q_1^*, q_2^*)$$

Геометрическая интерпретация игры 2 на 2



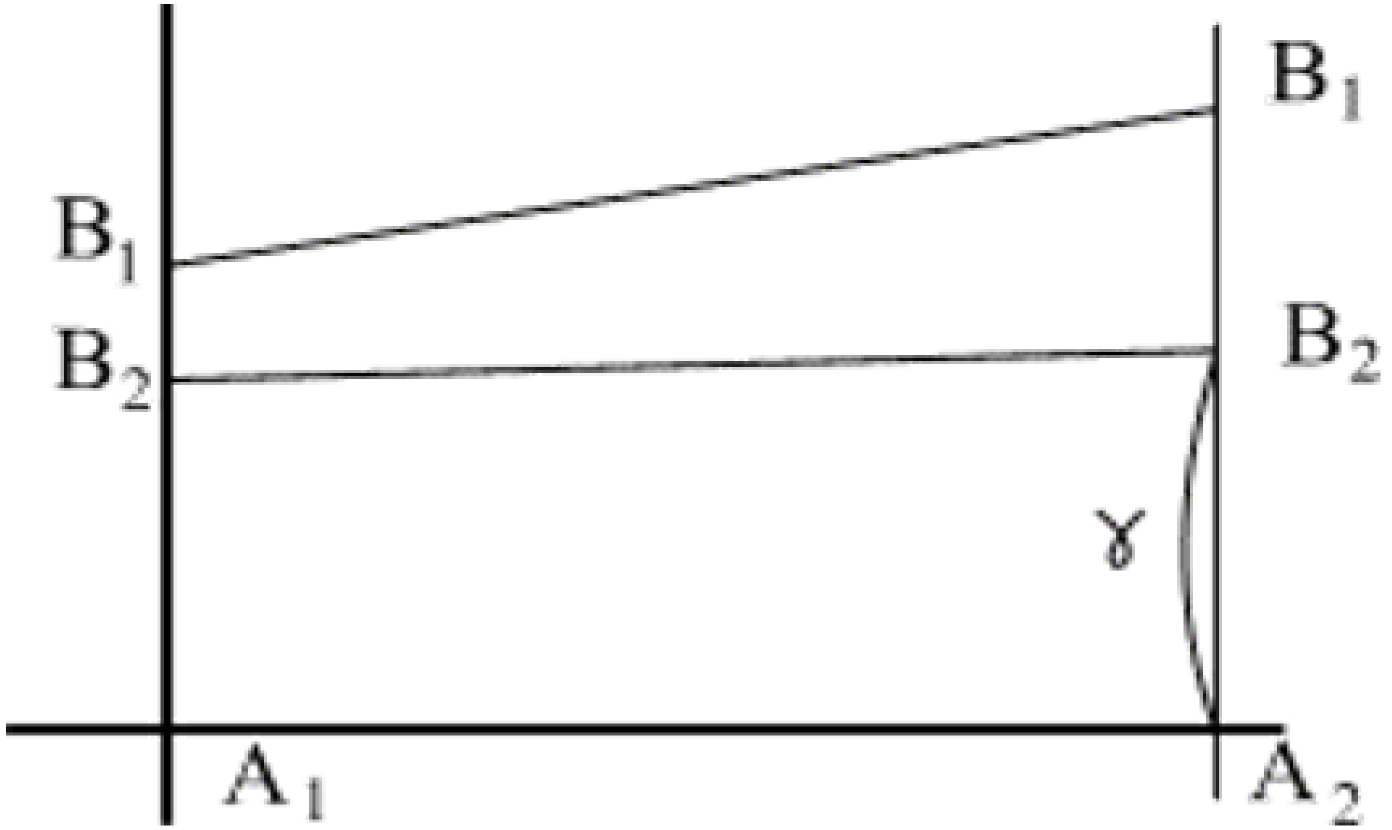
$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} & \end{array}$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

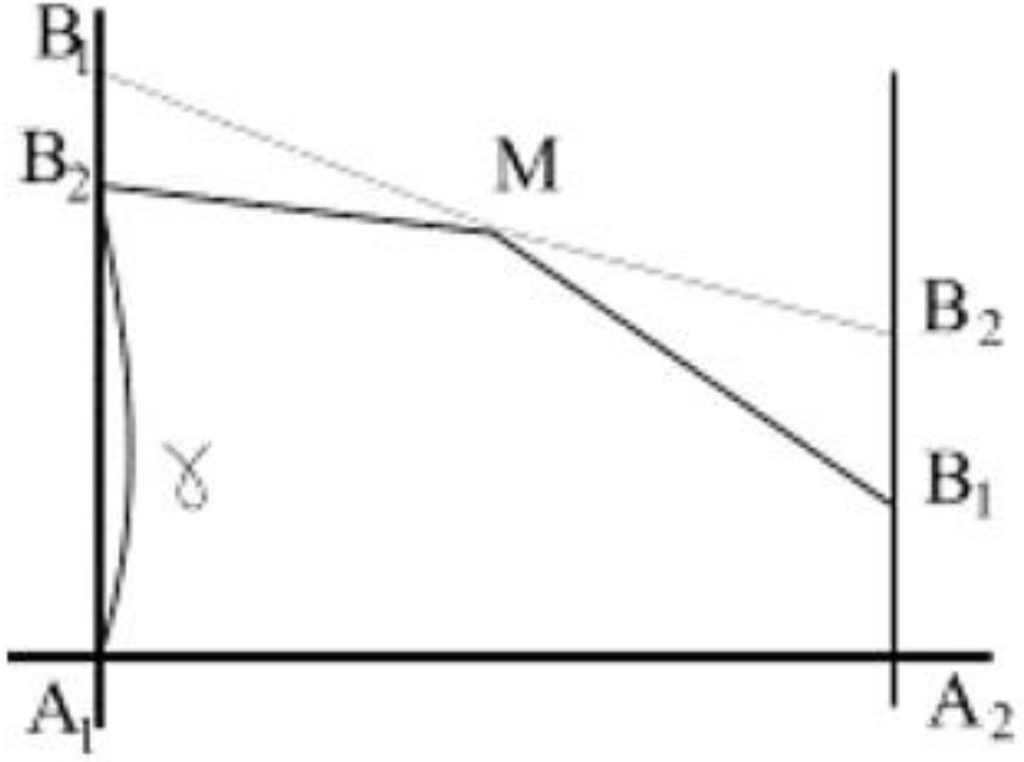
$$a_{11} p_1 + a_{21} p_2 = \gamma$$

$$a_{12} p_1 + a_{22} p_2 = \gamma$$

Случай когда игра имеет седловую точку



Еще одна специфическая ситуфция



Пример

Имеется игра

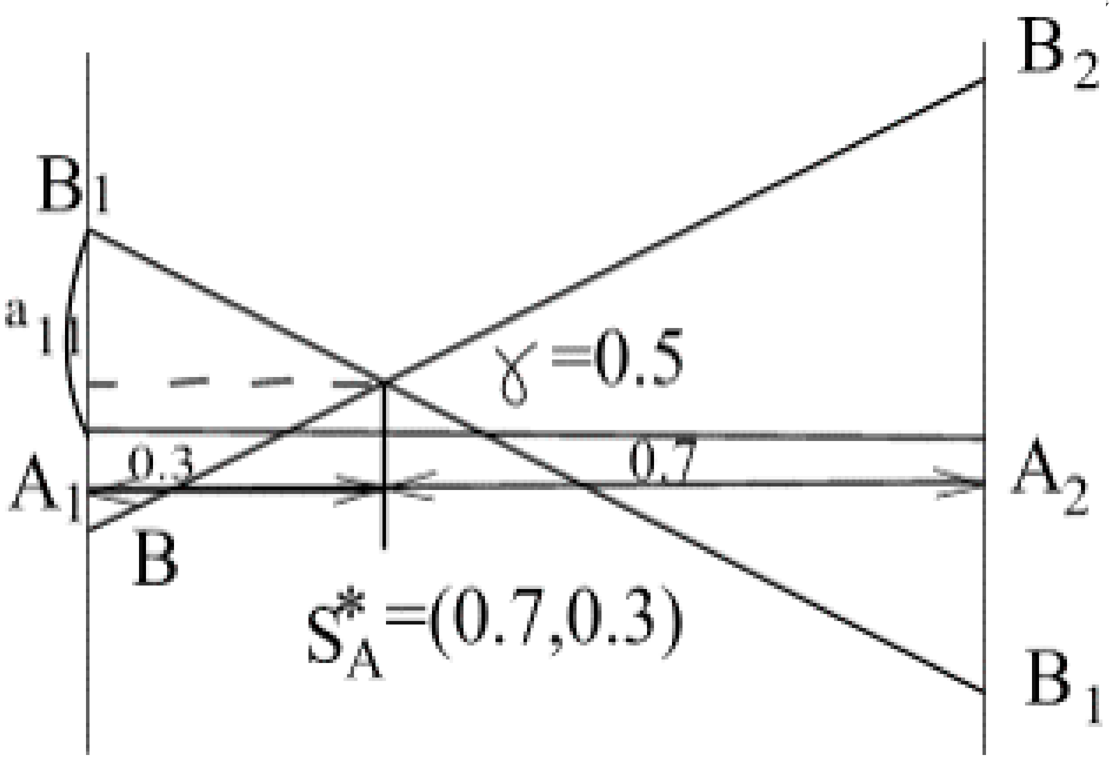
$$A = \begin{array}{cc|c} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} B_1 & \quad B_2 \end{matrix} & \end{array}$$

$\underline{V} = -1$

$\overline{V} = 2$

$\underline{V} < \overline{V}$

игра не имеет седловых точек



$$\begin{cases} 2p_1 - 3p_2 = \gamma \\ -p_1 + 4p_2 = \gamma \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \quad S_A = (0.7, 0.3)$$

$$\begin{cases} 2q_1 - q_2 = \gamma \\ -3q_1 + 4q_2 = \gamma \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \quad S_B = (0.5, 0.5)$$

Решение игр 2 x m и n x 2

В играх порядка 2*m первый игрок имеет две стратегии, а второй – m стратегий.

Платежная матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \end{pmatrix}$$

Необходимо найти такие смешанные стратегии $x = S_1 = (p_1, p_2)$

$S_2 = q_1, \dots, q_m$

и цену игры, которые удовлетворяют соотношениям

$$a_j p_1 + a_{ij} p_2 \geq \gamma, \quad j = \overline{1, m}$$

$$a_{l1} q_1 + a_{l2} q_2 + \cdots + a_{lm} q_m \leq \gamma \quad l = 1,2$$

$$p_2 = 1 - p_1, \quad q_1 + q_2 + \cdots + q_m = 1$$

$$p_i \geq 0, \quad q_j \geq 0$$

Решение игр 2 х m и n х 2

Отметим, что любая конечная игра m*n имеет решение, в котором число активных стратегий каждого игрока не превосходит min(m,n).Следовательно, у игры 2*n   или m*2 всегда имеется решение, содержащее не более двух активных стратегий у каждого из игроков. Если найти эти активные стратегии игроков, то игра 2*n   или m*2 превращается в игру 2*2. Решение таких игр мы рассматривали.

Введем обозначение для левой части неравенств

$$M_j(p_1) = a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 = a_{1j}p_1 + a_{2j}(1 - p1) = (a_{1j} - a_{2j})p_1 + a_{2j} \qquad j = \overline{1,m}$$

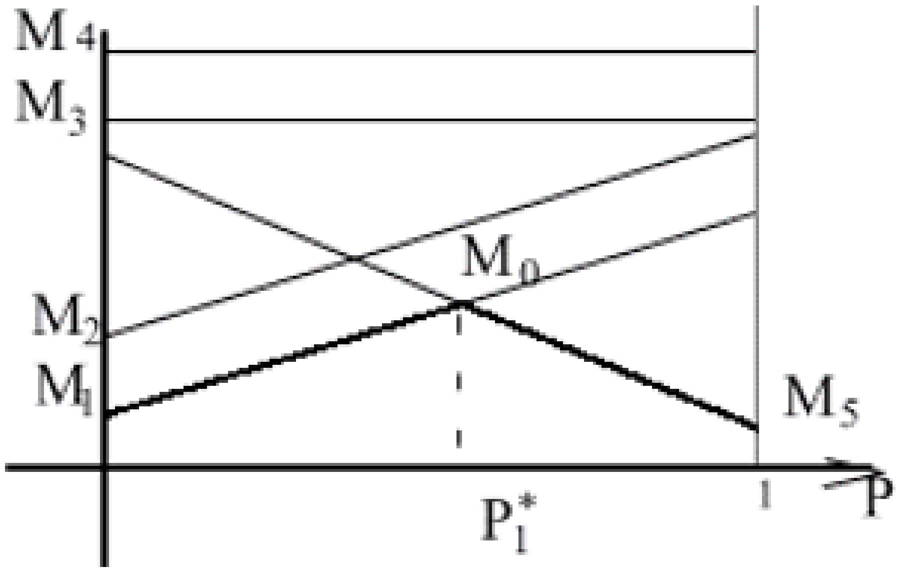
$M_j(p_1)$ – средний выигрыш первого игрока при условии, что он применяет свою смешанную стратегию, а второй – свою j чистую стратегию.

Решение игр 2 x m и n x 2

Цель второго игрока минимизировать выигрыш первого за счет своих альтернатив. Поэтому 2 игрок должен определить такие j, которые обеспечивают

$$\min_{j} M_{j}(p_1) = M(p_1)$$

$M(p_i)$ – нижняя граница множества ограничений (показана жирной линий).



y1, y5

Решение игр 2 x m и n x 2

Цель первого игрока максимизировать свой выигрыш за счет выбора p1, т.е. вычислить

В результате мы свели задачу размерности 2*m , к задаче 2*2 с платежной матрицей

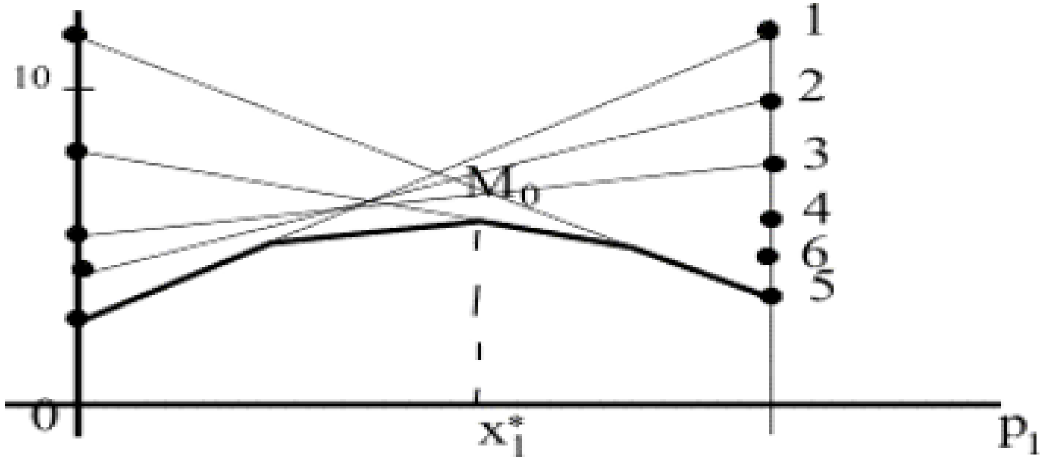
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{15} \\ a_{21} & a_{25} \end{pmatrix}$$

Решение игр 2 x m и n x 2

$M_1(p_1) = 9p_1 + 1$ $\quad M_4(p_1) = p_1 + 3$

$M_2(p_1) = 6p_1 + 2$ $\quad M_5(p_1) = -10p_1 + 12$

$M_3(p_1) = 2p_1 + 4$ $\quad M_6(p_1) = -3p_1 + 6$



$$\begin{cases} 4p_1 + 3p_2 = \gamma \\ 3p_1 + 6p_2 = \gamma \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

Активными стратегиями “погоды” является 4-ая и 6-ая.

Найдите «стратегии для погоды»

$p_1 = 3/4$

$p_2 = 1/4$

Решение игр m x n

$A = \| a_{ij} \|$ $\longrightarrow$ Платежная матрица

Пусть 1-ый задался целью выиграть не менее V1 при любо стратегии противника. Причем V1 должно быть максимальным. Тогда его задача состоит в определении оптимального решения в смешанных стратегиях

$S_1^* = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ для которого выполнялось бы

$$\sum p_i = 1$$

$$\sum_{i=1} a_{ij} p_i \geq V_1 \to \max, \quad j = \overline{1,n} \text{ (стратегии 2 - го игрока)}$$

$$p_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}$$

Решение игр m x n

Все a_{ij} можно считать положительными, в противном случае можно добиться этого, прибавив ко всем элементам матрицы положительную константу. Такая прибавка никак не влияет на стратегию игроков. Установите игроков с положительной платежной матрицей нижняя цена игры положительна. Мы можем перейти к новым переменным

$$U_i = p_i / V_1$$

Решение игр m x n

- Задача сводится к отыскиванию вектора U:

$$\sum_{i=1}^{m} U_i = \frac{1}{V_1} \to \min$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} U_i \geq 1, \quad j = \overline{1,n}$$

$$U_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}$$

Решение игр m x n

Можно показать, что задача поиска стратегии игрока 2

сводится к нахождению вектора $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$

$(\omega_j = q_j / V_2)$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_j = \frac{1}{V_2} \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \omega_j \geq 1, \quad j = \overline{1, n}$$

$$\omega_i \geq 0$$

Если сопоставить задачи первого и второго игрока, то можно увидеть, что они образуют двойственную пару задач линейного программирования. Из свойств решения двойственных задач следует

V1=V2 = γ – цена игры

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

г. Томск, ул. Вершинина, 47, офис 434

e-mail: aleksandr.i.sukhanov@tusur.ru

тел.: (3822) 70-15-36