ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Смешанное-целочисленное программирование

Доцент каф. АСУ: Суханов А.Я.

Смешанно-целочисленное программирование

Задача смешанно-целочисленного программирования (СЦП) есть следующая оптимизационная задача:

$$max\{c^{\mathrm{T}}x : b^1 \le Ax \le b^2, d^1 \le x \le d^2, x_j \in \mathbb{Z} \text{ для } j \in S\} \qquad (5.1)$$

где $b^1, b^2 \in \mathbb{R}^m, c, d^1, d^2 \in \mathbb{R}^n, A$ - действительная m n-матрица, x $- n$-вектор переменных (неизвестных), а $S \subseteq \{1, \dots n\}$ есть множество целочисленных переменных. В задаче *целочисленного программирования*((ЦП) все переменные целочисленные ($|S| = n$).

Задача СЦП отличается от задачи линейного программирования (ЛП) тем, что некоторые переменные могут принимать значения из дискретного множества. Это отличие делает задачу СЦП существенно сложнее с алгоритмической точки зрения.

Можно сказать, что **задача СЦП** - это одна из самых трудных задач математического программирования. И это неудивительно, поскольку многие комбинаторные задачи, включая те, которые считаются самыми трудными, очень просто формулируются как задачи СЦП.

Одно из самых распространенных применений СЦП в повседневной жизни касается эффективного использования ограниченных ресурсов.

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Целочисленность и нелинейность

Через условие «x - целое» можно выразить многие нелинейные ограничения. Но сначала мы покажем, что само это ограничение можно записать в непрерывных переменных при гладких ограничениях. Условие, что x есть бинарная переменная(принимает только два значения: 0 и 1),записывается одним квадратичным равенством:

$$x^2 - x = 0$$

Такое представление бинарных переменных позволяет записывать многие задачи комбинаторной оптимизации как задачи квадратичного программирования. Для примера, трудная комбинаторная *задача о разбиении множества*

$$max\{c^T x: Ax = e, x \in \{0,1\}^n\},$$

где c $\in$ $\mathbb{R}^n$, а A есть m $\times$ n-матрица с элементами 0 и 1, переписывается как задача квадратичного программирования следующим образом:

$$c^T x \to max,$$
$$Ax = e,$$
$$x_i^2 = x_i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Здесь и далее e обозначает вектор подходящего размера, все компонентыкоторого равны 1.

Предположим теперь, что целочисленная переменная x неотрицательна и ограничена сверху, т. е. $0 \leq x \leq d,$ где d - положительное целое. Для записи числа d в двоичной системе счисления требуется $k = [\log d] + 1$ позиций. Поэтому мы можем представить условие $x \in \{0,1,\dots,d\}$следующей системой уравнений:

$$x = \sum_{i=0}^{k-1} 2^i s_i$$

$$s_i^2 = s_{i,} \; i = 0,\dots,k-1.$$

Итак, мы можем заключить, что задача СЦП сводится к задаче квадратичного программирования и, следовательно, не труднее последней. Но отличительная особенность целочисленного программирования состоит в том, что здесь целочисленность переменных учитывается совершенно особым образом на алгоритмическом уровне посредством ветвления по целочисленным переменным и генерации отсечений.

С практической точки зрения важным является, то что многие нелинейности моделируются введением целочисленных переменных

Фиксированные доплаты

Функция стоимости с фиксированными доплатами имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x > 0, \\ c_0 + cx, & \text{если} \quad x > 0, \end{cases}$$

где c_0 - некоторая фиксированная величина. Например, стоимость перевозки товара может состоять из двух частей: первая фиксирована и не зависит от объема перевозимого товара, а вторая - зависит. Предположим, что на переменные наложено требование неотрицательности x $\geq$ 0 и известна верхняя оценка $x \leq \hat{x}$ на величину неизвестных. Тогда путем введения новой целочисленной переменной такую задачу можно свести к ЗЦЛП.

Действительно, пусть переменная y удовлетворяет условиям:

$$y \in \{0,1\},$$

$$y = 1 \Leftrightarrow x > 0.$$

Получаем

$$f(x) = c_0 y + cx.$$

$$y \in \{0,1\},$$

$$x \leq y\hat{x}.$$

TУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Дискретные переменные

Дискретная переменная x может принимать только конечное число значений $v_1, \ldots, v_k$. Например, в задаче проектирования автомобиля объем двигателя x может принимать, скажем, одно из четырех значений: 1.4, 1.6, 1.9 и 2.0 литра.

Дискретную переменную x можно представить как обычную непрерывную переменную, вводя бинарные переменные $y_1, \ldots, y_k$ и записывая ограничения

$$x - v_1 y_1 - v_2 y_2 - \cdots v_k y_k = 0,$$

$$y_1 + y_2 \ldots + y_k = 1,$$

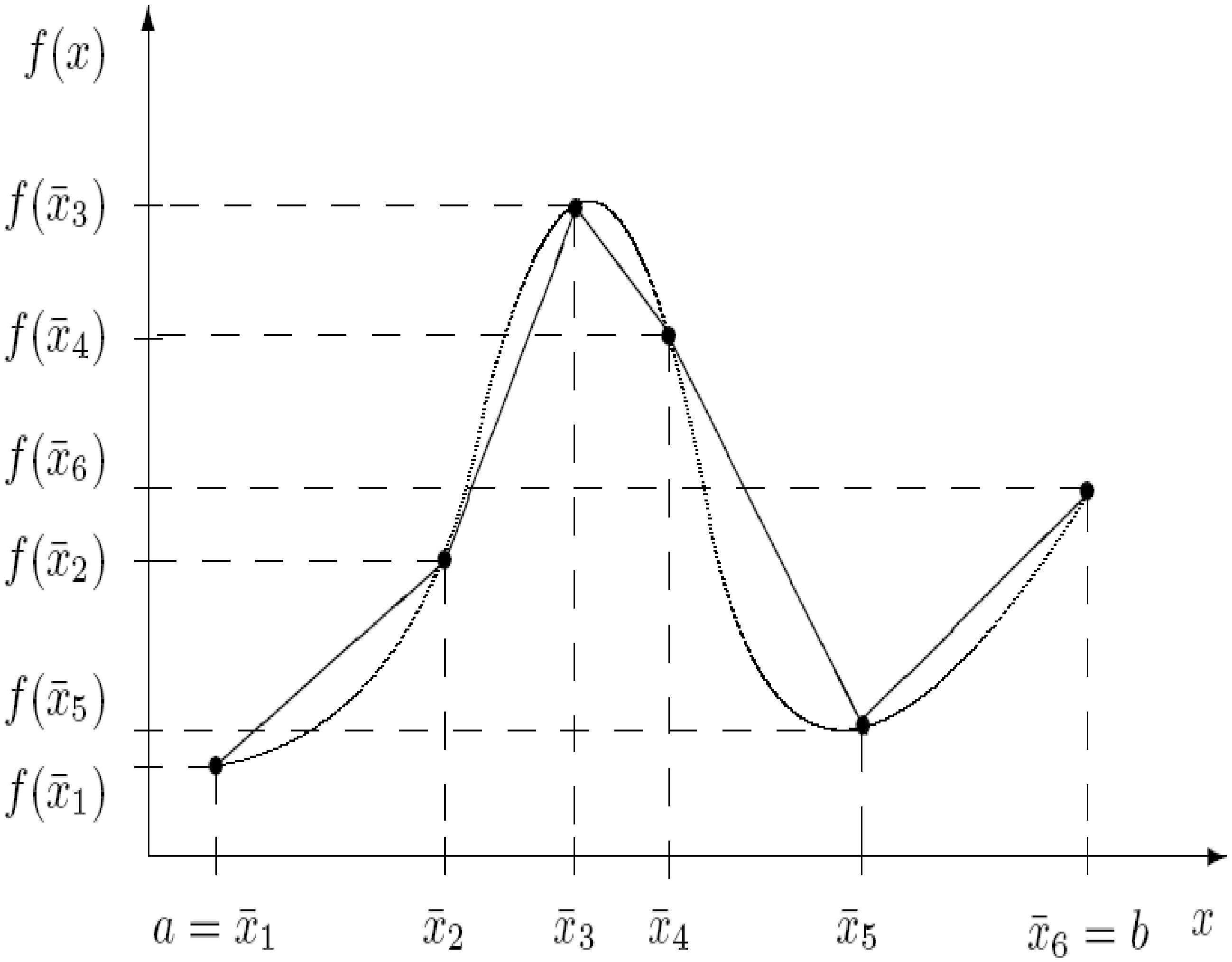
$$y_i \epsilon \mathbb{Z}_+, i = 1, \ldots, k.$$

Не более одной переменной принимает ненулевое значение

Аппроксимация нелинейной функции

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Кусочно-линейная аппроксимация нелинейной функции.



Пусть нелинейная функция $y = f(x)$ задача на отрезке $[a, b]$. Выберем некоторое разбиение

$$a = \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \bar{x}_r = b$$

Отрезка $[a, b]$. Соединяя точки $(\overline{x_k}, \bar{y}_k = f(\overline{x_k}))$ и $(\overline{x_{k+1}}, \bar{y}_{k+1} = f(\overline{x_{k+1}}))$ отрезками прямых, мы получим кусочно-линейную аппроксимацию $f(x)$ которая представляется следующей системой

$$x = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \bar{x}_k,$$

$$y = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \bar{y}_k,$$

$$1 = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k$$

$$\lambda_k \le \delta_k, \qquad k = 1, \dots, r,$$

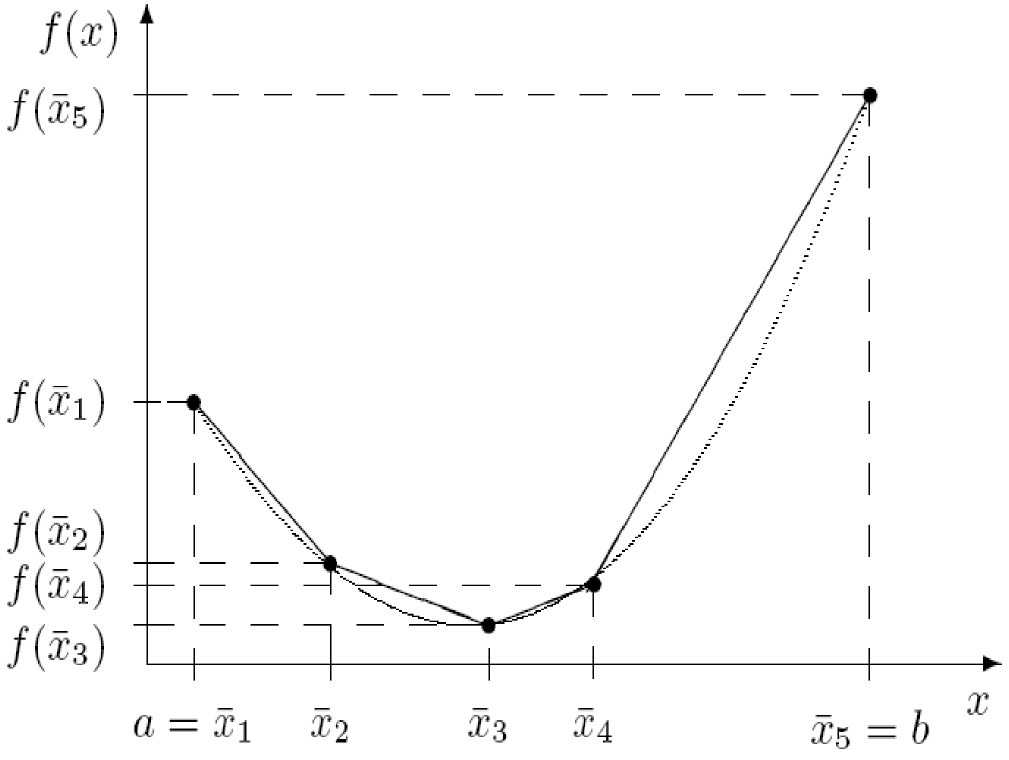
$$1 \ge \delta_i + \delta_j, \qquad j = 3, \dots, r; \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{j} - 2,$$

$$\lambda_k \ge 0, \delta_k \in \{0,1\}, \qquad k = 1, \dots, r.$$

не более двух переменных λ_kпринимают нулевые значения

Аппроксимация выпуклой функции

Если функция $f(x)$ выпуклая, то во многих случаях мы можем представить зависимость $y = f(x)$ без введения целочисленных переменных. Как и ранее, аппроксимируем функцию она интервале определения $[a, b]$ кусочно-линейной функцией f с точками перегиба $a = \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \cdots < \bar{x}_r = b$



Для $k = 1, \dots r - 1$ определим числа

$$d_k = \bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k$$

$$q_k = \frac{f(\bar{x}_{k+1}) - f(\bar{x}_k)}{d_k}$$

В силу выпуклости функции f имеем $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_{r-1}$. Введем дополнительные действительные переменные $x_k (k = 1, \dots, r - 1)$ и представим

$$x = \sum_{k=1}^{r} x_k \,,$$

$$y = f(a) + \sum_{k=1}^{r-1} q_k x_k,$$

$$0 \leq x_k \leq d_k, k = 1, \dots, r - 1.$$

Логические условия

Формально мы записываем логические условия с помощью булевых переменных и формул. *Булева переменная* может принимать только два значения: истина и ложь. Из булевых переменных с помощью бинарных логических операций $\vee$ (или), $\wedge$(и) и унарной операции $\neg$ ($\neg\, x$означает *не x*) можно образовывать *булевы формулы* почти так же, как из действительных переменных с помощью арифметических операций можно образовывать алгебраические выражения. Например,

$$(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_3)$$

Любую булеву формулу n булевых переменных можно представить в виде конъюнктивной нормальной формы (КНФ):

$$\sum_{j\in S_i^1} x_j + \sum_{j\in S_i^0} (1 - x_j) \geq 1, \qquad i = 1, \dots, m,$$

Например, КНФ

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_3 \vee \neg x_1)$$

Принимает значение истина на наборах, которые являются решениями системы

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1,$$

$$x_1 + (1 - x_2) \geq 1,$$

$$x_2 + (1 - x_3) \geq 1,$$

$$x_3 + (1 - x_1) \geq 1,$$

$$x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}.$$

Множественные альтернативы и дизъюнкции

Требуется, чтобы из *m* неравенств

$$A_i x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

выполнялись не менее q любых неравенств (не важно каких).
Например, если два задания i и j должны выполняться на одной машине, то мы должны потребовать выполнения следующей дизъюнкции:

$$e_i - s_j \leq 0 \text{ или } e_j - s_i \leq 0,$$

где e_i и s_i есть соответственно время начала и завершения задания *i*.

Вводя бинарные переменные

$$y_i = \begin{cases} 1, \text{если ограничение} A_i x \le b_i \text{ выполняется,} \\ 0, \text{в противном случае,} \end{cases}$$

мы можем учесть требуемое условие следующим образом:

$$A_i x \le b_i + \text{M}(1 - y_i), \qquad i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \ge q$$

$$y_i \in \{0,1\}, i = 1, \dots k.$$

Здесь M - достаточно большое число, такое, что неравенство $A_i x \le b_i + M$ выполняются автоматически для всех допустимых векторов x решаемой задачи.

В заключение рассмотрим случай, когда из двух условий должно выполняться хотя бы одно:

$$x_1 \geq a \text{ или } x_2 \geq b.$$

Например, мы хотим иметь рабочую станцию с $x_1 \geq a$ процессорами или однопроцессорную систему с частотой процессора $x_2 \geq b$.

Если обе переменные x_1 и x_2 неотрицательны, то, вводя бинарную переменную y, требуемую дизъюнкцию можно записать в виде

$$x_1 \geq ay, \qquad x_2 \geq b(1-y).$$

Далее мы продемонстрируем использование множественных альтернатив и дизъюнкций на трех примерах.

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

г. Томск, ул. Вершинина, 47, офис 434

e-mail: aleksandr.i.sukhanov@tusur.ru

тел.: (3822) 70-15-36