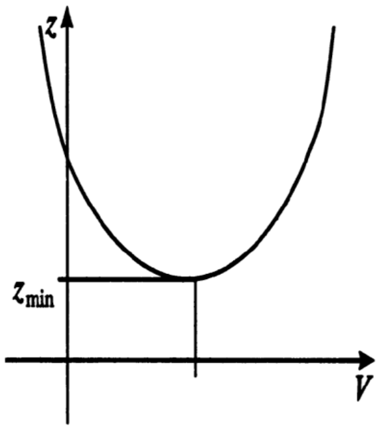
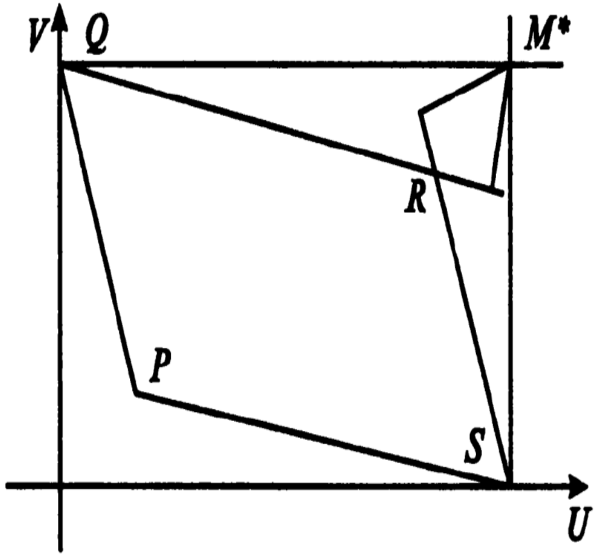
Исследование операций
Векторные операции

Доцент каф. АСУ: Суханов А.Я.

Теория

$$\frac{dz}{dV} = 0$$





Для прямой RQ

$$z = 26V^2 - 296V + 848$$

$$V = 5\frac{9}{13}$$

$$U = 11\frac{7}{13}$$

Для прямой RS

$$3U+V=36$$

$$V=36-3U$$

$$z = (U-12)^2 - (28-3U)^2$$

$$z = 10U^2 - 192U + 928$$

$$U = 9\frac{3}{5}$$

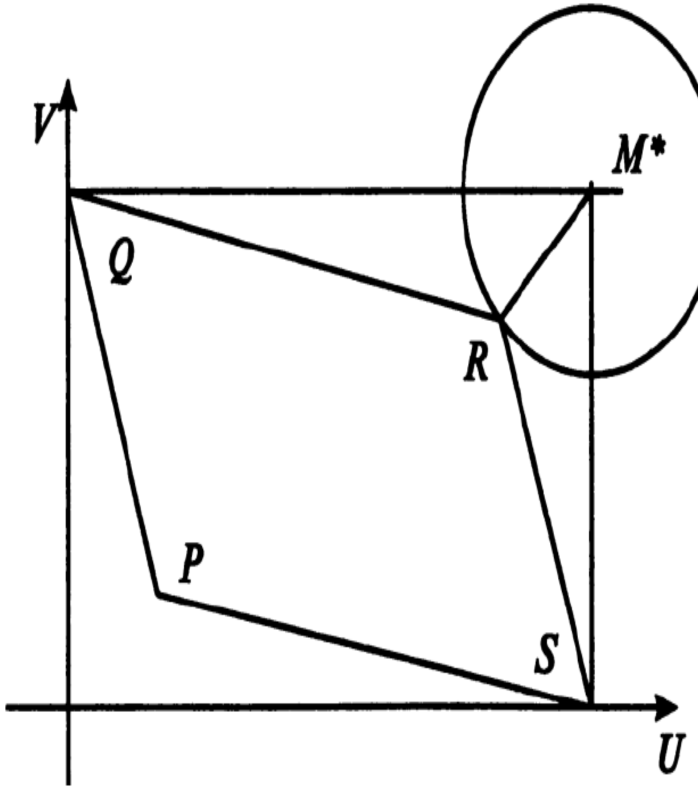
Откуда

$$V = 7\frac{1}{5}$$

Очевидно что ближайшая точка для обоих прямых лежит за пределами области допустимых значений

Теория

Строим окружность в точке утопии, очевидно ближайшая точка в R на пересечении RS и RQ



Расстояние от M до R

$$2\sqrt{2}$$

$$U = 5x - y + 2$$
$$V = -x + 3y + 2$$

Решаем систему для точки R(10,6)

$$\begin{cases} 5x - y + 2 = 10 \\ -x + 3y + 2 = 6 \end{cases}$$

Находим

$x^*=2$ и $y^*=2$.

Нормализация критериев

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Нормализация на основе введения вектора идеального качества операции

$$\vec{W}^{W} = (W_1^S, W_2^H, \dots, W_n^H)$$

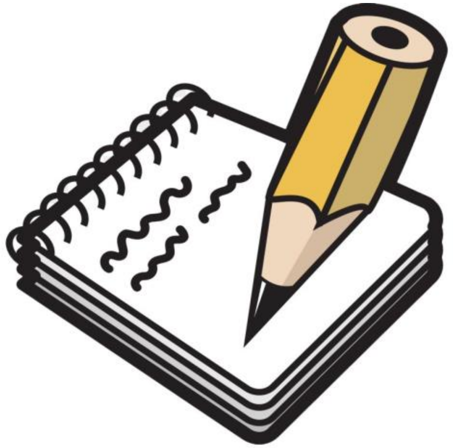
$$W_i^h > 0, i = \overline{1, n}$$

$$\vec{W}^{H} = (\frac{W_1}{W_1^H}, \frac{W_2}{W_2^H}, \dots, \frac{W_n}{W_n^H})$$

Случай когда идеальный вектор качества задается заранее

$$\vec{W}^{W} = \vec{W}^{3} = (W_1^3, W_2^3, \dots, W_n^3)$$

В качестве идеального вектора может приниматься такой, компонентами которого являются максимумы локальных критериев



$$\vec{W}^{u} = (\max_{W_1 \in \Omega_W^K} W_1, \ \max_{W_2 \in \Omega_W^K} W_2, \dots, \max_{W_n \in \Omega_W^K} W_n)$$

Задание приоритетов критериев два способа

1) Вектор приоритета I=(i1, i2, ..., in), оптимизация по порядку начиная с наиболее важного критерия

2) Вектор весовых коэффициентов

$$\vec{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

Обычно

$$\left.\begin{array}{l} 0 \le \alpha_i \le 1,\ i = \overline{1,\ n}, \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \end{array}\right\}$$

оптимизируется

$$\vec{W}' = (\alpha_1 W_1, \alpha_2 W_2, \ldots, \alpha_n W_n)$$

Свертка критериев векторной операции (тоже один из способов поиска компромиссов)

Поиск обобщения критериев векторной операции в один обобщенный называется сверткой, обобщенный критерий выражается в виде функции от частных критериев

$$W_{\Sigma} = F(W_1, W_2, \ldots, W_n)$$

Частные критерии могут быть как количественными, так и качественными, обычно качественные критерии выражаются как 0 или 1, например, 0 – цель не достигнута, 1 – достигнута.

Пример: Победа в соревновании

1 – победил

0 – проиграл

Количественные выражают оценку критерия выраженную числом:

Примеры: Доход фирмы в рублях, Скорость ракеты в км в секунду, Время работы механизма в часах

Теорема о свертке

Теорема. Пусть каждый из критериев $g^1,\ldots,g^m$ принимает лишь два значения 0 и 1, а $F{:}\{0,1\}^m\to\{0,1\}$ – произвольная функция. Тогда критерий g, определенный условием $g(u)=F(g^1(u),\ldots,g^m(u))$, может быть выражен через следующие элементарные операции:

1. конъюнкция: $g^1,\ldots,g^m \to \prod_{i=1}^{m} g^i$;
2. дизъюнкция: $g^1,\ldots,g^m \to 1-\prod_{i=1}^{m}(1-g^i)$;
3. отрицание: $g^i \to 1-g^i$.

Пример. На референдуме о сохранении Союза советских социалистических республик гражданам предлагалось ответить на четыре вопроса. Власти предлагали своим сторонникам ответить «да,да,нет,да». Таким образом, есть, четыре вспомогательных качественных критерия g^i (ответ на i-ый вопрос). Если общая цель g состоит в лояльности власти, то она выражается через частные с помощью свертки $g=g^1g^2(1-g^3)g^4$.

Теорема о свертке

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Теорема. Пусть каждый из критериев $g^1,\ldots,g^m$ принимает лишь конечное число значений, а F: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ – произвольная функция. Тогда критерий g, определенный условием $g(u)=F(g^1(u),\ldots,g^m(u))$, может быть выражен через следующие элементарные операции:

1. экономическая свертка: $g^1,\ldots,g^m \to \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g^i$;
2. разбиение на удовлетворительные и неудовлетворительные:
$$g^i \to \begin{cases} 1, \text{ если } g^i \ge \gamma^i, \\ 0 \text{ в противном случае;} \end{cases}$$
3. конъюнкция: $g^1,\ldots,g^m \to \prod_{i=1}^{m} g^i$;
4. дизъюнкция: $g^1,\ldots,g^m \to 1-\prod_{i=1}^{m}(1-g^i)$;
5. отрицание: $g^i \to 1-g^i$.

Теорема о свертке

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Экономический способ свертки. Свертка частных критериев $g^1,\ldots,g^m$ представляет собой взвешенную сумму $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g^i$.

В экономических моделях данный способ свертки часто используется при агрегировании абсолютно взаимозаменяемых продуктов.

- «Слон больше серый, чем ушастый, потому, что ушастый он только местами, а серый – везде»

Пример. Предприятие выпускает m видов продукции. Критерии $g^1,\ldots,g^m$ выражают количества продукции каждого из видов, выпущенных предприятием. Доходы предприятия от реализации продукции выражаются сверткой $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g^i$. Коэффициенты свертки в этом случае имеют смысл цен.

Теорема о свертке

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

λ_i могут иметь различный смысл: определяют относительную важность каждого из частных критериев; могут быть нормирующими множителями, если частные критерии имеют различный масштаб измерения. Обычно применяется, если все частные критерии количественные. Если же некоторые критерии являются качественными и необходимо, чтобы соответствующие им цели обязательно достигались, то достаточно положить соответствующий критерий минус бесконечности в случае неуспеха и 1 в случае успеха. При данном способе свертки критериев могут возникать трудности, связанные с обоснованным выбором параметров λi. Необходимо отметить, что данному способу свертки соответствует принцип компромисса, который называется принципом справедливой абсолютной уступки.

Теорема о свертке

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Пример. Рассмотрим деятельность фирмы за m лет. Критерии $g^1,\ldots,g^m$ выражают прибыль фирмы в соответствующие годы. Свертка $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g^i$ оценивает суммарную прибыль за весь период. Числа $\lambda_1,\ldots\lambda_m$ в этом случае имеют смысл коэффициентов дисконтирования.

Пример. В классической биатлонной гонке имеется два критерия: количество промахов g^1 и время прохождения дистанции g^2. Результат спортсмена оценивается по линейной свертке $60\frac{\text{секунд}}{\text{промах}}g^1+1\cdot g^2$ (если время измерять в секундах).

<u>Производственное объединение</u> состоит из n однотипных предприятии.
Деятельность каждого предприятия характеризуется величиной прибыли g_i
Деятельность объединения характеризуется величиной суммарной прибыли

здесь обобщенный критерий получен при $\lambda_i=1$

$$\sum_{i=1}^{n} g_i$$

Теорема о свертке

Разбиение на удовлетворительные и неудовлетворительные. Пусть имеется количественный критерий g и число γ Свертка задает качественный критерий

$$h = \begin{cases} 1, \text{ если } g \geq \gamma, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пример. Знания студента на экзамене оценивается количественным критерием g, принимающим значения от двух до пяти. Качественная цель сдать экзамен описывается критерием

$$h = \begin{cases} 1, \text{ если } g \geq 3, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пример. При выборе работы люди часто ориентируются на два критерия: размер заработной платы и удовлетворение от работы. Во многих случаях нет стремления к максимизации заработной платы, гораздо важнее, чтобы она обеспечивала приемлемый уровень жизни. Например, не секрет, что в пред перестроечные годы уровень реальных доходов работников торговли заметно превышал аналогичный показатель у врачей, учителей и инженеров, однако заметного перетока кадров в торговлю не наблюдалось. Когда в годы реформ уровень жизни бюджетников заметно упал, многие из них занялись розничной торговлей, чтобы обеспечить себе приемлемый уровень жизни. Пример. В одной из телевизионных программ 28.11.07 был сформулирован следующий тезис: «Женщина должна стремиться к тому, чтобы объем талии не превышал объем бедер». Здесь налицо подмена двух количественных критериев (объем талии и объем бедер) одним качественным.

Теорема о свертке

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

<u>Деятельность промышленного предприятия</u> оценивается векторным критерием эффективности, компоненты которого определяют следующее:
W1 - количество выпускаемой продукции;
W2 - уровень реализации продукции;
W3 - уровень производительности труда.

$$g = \begin{cases} 1, g_1 > W^{1*} \\ g_2 > W^{2*} \\ g_3 > W^{3*} \\ 0, \textit{иначе} \end{cases}$$

Теорема о свертке

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Лексикографическая свертка. Пусть даны критерии $g^1,\ldots,g^m$, ранжированные в порядке возрастания номеров. Сначала находятся все точки максимума критерия g^1, из них выбираются те, которые доставляют максимум критерию g^2 и так далее. Наконец, из уже отобранных выбираются те, которые обеспечивают максимум критерия g^m. Выбранные на последнем этапе стратегии называются точками лексикографического максимума. — С. Г. Слободяник. Дискретные положительные гармонические функции. Математическое просвещение, сер. 3. Вып. 11. С. 145-148. Пример. При формировании структуры государственных расходов наиболее важными являются расходы на государственных служащих, затем идут затраты на оборону, содержание силовых структур и так далее. В конце списка обычно оказываются сельское хозяйство и культура. Примерно так на практике формируется расходная часть государственного бюджета.

Обычно применяется когда частный критерий при максимизации(минимизации) дает при нескольких стратегиях одно и то же значение максимума или минимума

Теорема о свертке

Дизъюнкция. Пусть есть m качественных критериев $g^1,\dots,g^m$. Цель, состоящая в достижении, по крайней мере, одной из частных целей описывается критерием

$$g = 1 - \prod_{i=1}^{m}(1 - g^i).$$

Пример. Каждый правоверный мусульманин должен хотя бы раз в жизни совершить хадж. Если годы его жизни пронумерованы числами от 1 до m и критерии

$g^1,\dots,g^m$ описывают совершение хаджа в конкретном году, то их свертка $g = 1 - \prod_{i=1}^{m}(1 - g^i)$

описывает выполнения этого обязательства перед Богом.

Теорема о свертке

Конъюнкция. Пусть есть m качественных критериев $g^1,\ldots,g^m$. Цель, состоящая в достижении, сразу всех частных целей описывается критерием $g=\prod_{i=1}^{m} g^i$.

Пример. Если за сессию студенту предстоит сдать m экзаменов и каждый из критериев $g^1,\ldots,g^m$ описывает сдачу одного из них, то цель, состоящая в успешной сдаче сессии, описывается критерием $g=\prod_{i=1}^{m} g^i$.

Теорема о свертке

Отрицание. Пусть имеется качественный критерий g. Критерий $1–g$ описывает цель, состоящую в не достижении исходной.

Пример. Если исходная цель g состоит в том, чтобы избежать скандала, то цель, состоящая в попадании в скандальную хронику, описывается критерием $1–g$.

Обобщенная дизъюнкция. Часто используется следующий способ свертки. Пусть есть m количественных критериев $g^1,\ldots,g^m$. Результирующий критерий образуется по правилу $g(u) = \max\limits_{1 \le i \le m} \lambda_i g^i(u)$.

Пример. Пусть в шоссейной велогонке принимают участие m спортсменов из одной команды и критерии $g^1,\ldots,g^m$ задают места, занятые ее членами. Очень часто все члены команды работают на одного лидера, то есть критерий команды есть $g(u) = \max\limits_{1 \le i \le m} g^i(u)$.

Теорема о свертке

ТУСУР TUSUR UNIVERSITY

Обобщенная конъюнкция. Это свертка, при которой количественные критерии $g^1,\ldots,g^m$ заменяются общим критерием $g(u)=\min\limits_{1\le i\le m}\lambda_i g^i(u)$.

В экономических моделях такой способ свертки применяется при агрегировании абсолютно не взаимозаменяемых продуктов.

Пример. Пусть для производства изделия требуются комплектующие m видов и количества произведенных деталей описываются числами $g^1,\ldots,g^m$. Критерий $g(u)=\min\limits_{1\le i\le m}\lambda_i g^i(u)$ описывает количество готовых изделий, которое из них можно собрать.

Числа $\dfrac{1}{\lambda_i}$ имеют при этом смысл количества деталей i-го вида, необходимых для сборки одного готового изделия.

Пример. По понятным физическим причинам, скорость каравана судов определяется скоростью самого тихоходного судна. Это обстоятельство нашло свое отражение даже в морском уставе.

Способ свертки, основанный на последовательном достижении частных целей

При этом способе свертки каждая последующая операция учитывается лишь тогда, когда достигнуты абсолютные максимумы критериев предыдущих операций. Если все $W_i>0$ то обобщенный критерий эффективности может быть записан следующим образом

$$W_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{j} \max W_i$$

Деятельность промышленного предприятия в промежутке времени [О, Т] может характеризоваться объемом выпускаемой продукции в некоторые дискретные моменты времени   t1<t2<t3<<tn (*эти моменты могут обозначать декаду, месяц и т. д.*).
Объем выпускаемой продукции к моменту tj обозначим через W(tj)=Wj   Тогда деятельность предприятия за период времени [0, Т] характеризуется вектором (W1,W2..WN)   Планирование деятельности предприятия на каждый последующий период, как правило, проводится с учетом достигнутого значения уровня производства, а также с учетом изменений в обстановке функционирования предприятия (*изменение номенклатуры выпускаемой продукции, технического оснащения, сырьевой базы и т. д.*)
А это значит, что сначала оптимизируется W1 затем W2 с учетом достигнутого значения W1 и т. д.

Способ свертки, основанный на последовательном достижении частных целей

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Случайная свертка. В литературе встречается и такой способ свертки критериев. На множестве критериев задается вероятностная мера, и критерий операции выбирается случайным образом в соответствии с этой мерой. Понятно, что если при этом оперирующая сторона ориентируется на математическое ожидание, то получается способ свертки, формально совпадающий с экономическим.

Приведенные выше примеры являются наиболее простыми, и потому наиболее часто встречающимися. Но, разумеется, бывают и более экзотические способы.

Принцип наименьшего сожаления. Это свертка, при которой количественные критерии $g^1,\ldots,g^m$ заменяются общим критерием $g(u)=\max\limits_{1\le i\le m}\left[\max\limits_{v\in U} g^i(v)-g^i(u)\right]$, который нужно минимизировать.

Принцип принятия решений в ЕЭС. По новым законам решение принимается по правилу двойного большинства: решение считается принятым, если за него проголосовало 55% стран население которых составляет 65%. В этом случае можно считать, что имеется

Способ свертки, основанный на последовательном достижении частных целей

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Старый способ судейства в фигурном катании. Каждый из девяти судей выставлял две оценки от 0 до 6.0 (с шагом 0.1). Затем все участники ранжировались в соответствии с суммой этих оценок (в случае равенства сумм выше ставился участник, у которого выше оценка за артистизм). Затем вычислялась сумма мест за выполнение данной программы (короткой или произвольной). Потом участники ранжировались в соответствии с взвешенной суммой показателей за короткую и произвольную программу, что и давало результирующее место участника.

Способ судейства в прыжках в длину. Сравнение результатов двух участников производится по самому дальнему прыжку каждого из них. Если эти прыжки одинаковы, то во внимание принимается следующий по дальности и так далее.

Лексимин. Во многих социальных моделях и в теоретической математике полезен следующий способ свертки. При сравнении двух решений многокритериальной задачи прежде всего сравниваются самые маленькие значения критериев (возможно, свои у каждого варианта). Если они одинаковы, то во внимание принимаются следующие по величине и так далее.

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

г. Томск, ул. Вершинина, 47, офис 434

e-mail: aleksandr.i.sukhanov@tusur.ru

тел.: (3822) 70-15-36