Метод максимального правдоподобия

Доцент каф. АСУ: Суханов А.Я.

Метод максимального правдоподобия

- Пусть X < R" и для каждого хєх задано распределение вероятностей на RTM с плотностью P: RM → [0,1]. Для фиксированного y ∈ Rm Мы можем рассматривать P. (y) как функцию аргумента x ∈ X, которую называют функцией правдоподобия. На практике удобнее использовать логарифмическую функцию правдоподобия: 1(x) = lnpx(y).
- Рассмотрим задачу оценивания вектора параметров x по одному наблюдению случайного вектора y. Один из наиболее часто используемых методов, называемый методом максимального правдоподобия, в качестве оценки вектора x вычисляет вектор.

$$x^{ML} \in \arg \underset{x \in X}{max} l(x).$$

Правдоподобие позволяет сравнить несколько вероятностных распределений с разными параметрами и оценить в контексте какого из них наблюдаемые события наиболее вероятны.

Линейные измерения с одинаково распределениями независимыми шумами

Рассмотрим модель линейных измерений $Ax + v$, где A есть $m \times n -$ матрица, $y \in \mathbb{R}^m$ — наблюдаемый вектор, $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ - вектор оцениваемых параметров, $v \in \mathbb{R}^m$ - вектор ошибок измерений(или шум). Мы предполагаем, что все шумы v_i есть независимые одинаково распределённые случайные величины с плотностью $p: \mathbb{R} \to [0,1]$. Тогда функция правдоподобия имеет вид:

$$p_x(y) = \prod_{i=1}^{m} p(y_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j)$$

Логарифмическая функция правдоподобия записывается следующим образом:

$$l(x) = \ln p_x(y) = \sum_{i=1}^{m} \ln p\,(y_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j)$$

Чтобы оценить вектор параметров x по методу максимального правдоподобия, нужно решить следующую оптимизационную задачу:

$$max\left\{\sum_{i=1}^{m} \ln p\,(y_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) : x \in X\right\}$$

Теперь приведем примеры оценивания по методу максимального правдоподобия для некоторых часто используемых распределений.

- *Гаусовый шум.* Когда случайные величины v_i распределены по нормальному закону с матожиданием 0 и дисперсией σ^2, то плотность задается формулой:

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$$

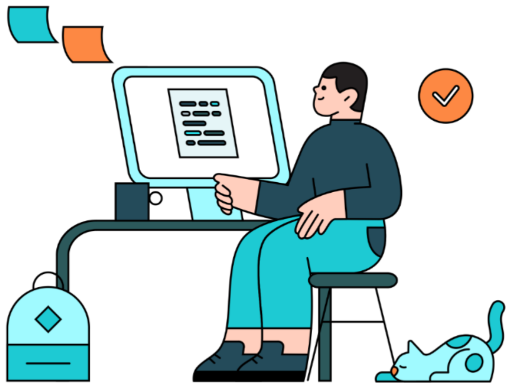
Логарифмическая функция правдоподобия, определенная на $X = \mathbb{R}^n$, имеет вид:

$$l(x) = -(m/2)\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{m} (y_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)^2 =$$

$$= -(m/2)\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2}\|Ax - y\|_2^2$$

Поэтому оценкой x по методу максимального правдоподобия будет

$$x^{ML} \in \arg min\|Ax - y\|_2.$$



- *Лапласовый шум.* Когда случайные величины v_i *распределены по экспоненциальному закону с плотностью*

$$p(z) = \frac{1}{2a} e^{-|z|/a}$$

Где a > 0, то логарифмическая функция правдоподобия, определённая на X = $\mathbb{R}^n$, имеет вид:

$$l(x) = -m \ \ln(2a) - \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{m} \left| y_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| = -m \ln(2a) - \frac{1}{a} \|Ax - y\|_1$$

Поэтому оценкой x по методу максимального правдоподобия будет вектор:

$$\mathrm{x}^{ML} = \arg min \, \|A_{\mathrm{x}} - y\|_1$$

- *Однородный шум.* Когда случайные величины v_i равномерно распределены на отрезке [-a, a], то плотность распределения вероятностей

$$p(z) = \frac{1}{2a} \text{ для } z \in [-a, a]$$

Логарифмическая функция

$$l(x) = -m \ln(2a)$$

постоянна для всех x∈ X = [-a, a]". Поэтому оценкой и x по методу максимального правдоподобия будет любой вектор x, который удовлетворяет неравенствам:

$$\left| y_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \le a, \qquad i = 1, \dots, m.$$

Логистическая регрессия

- Рассмотрим случайную величину y ∈ {0,1} с

  P(y = 1) = p, P(y = 0) =1-p (0 <p≤ 1). = P(y=0)=1-p (0≤p<1).

- Предполагается, что вероятность p зависит от объясняющих переменных и ∈ R". Например, y = 1 может означать, что индивидуум в некоторой популяции страдает некоторым заболеванием. Вероятность p обнаружения болезни есть функция некоторых объясняющих переменных и, которые могут представлять возраст, вес, рост, кровяное давление и другие медицинские показатели.

Логистическая модель имеет вид

$$p = \frac{\exp(a^T u + b}{1 + \exp(a^T u + b}$$

где а ∈ R" и в ∈ R есть параметры модели, которые нужно определить.

Исходными данными для определения параметров a и b являются пары (u^i, y_i) (i = 1, ..., m), где $y_i \in \{0,1\}$ - это значение величины y, когда вектор u объясняющих переменные принял значение $u^i \in \mathbb{R}^n$.
Параметры a и b определим по методу маскимального правдоподобия.
В таком случае логистическую модель также называют **логистической регрессией.**

Предположим, что исходные данные упорядочены таким образом, что $y_1 = \cdots = y_k = 1$, а $y_{k+1} = \cdots = y_m = 0$. Тогда функция максимального правдоподобия записывается следующим образом:

$$P_{a,b}(y_1, \dots, y_m) = \left(\prod_{i=1}^{k} p_i\right) * \left(\prod_{i=k+1}^{m}(1 - p_i)\right),$$

где

$$p_i = \frac{\exp(a^T u^i + b)}{1 + \exp(a^T u^i + b}, \text{ i = 1, ..., m.}$$

Логарифмическая функция максимального правдоподобия имеет вид:

$$l(a,b) = \sum_{i=1}^{k} \ln p_i + \sum_{i=k+1}^{m} \ln(1 - p_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \ln \frac{\exp(a^T u^i + b)}{1 + \exp(a^T u^i + b)} + \sum_{i=k+1}^{m} \ln \frac{1}{1 + \exp(a^T u^i + b)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (a^T u^i + b) - \sum_{i=1}^{m} \ln(1 + \exp(a^T u^i + b))$$

Поскольку функция $l(a,b)$ вогнута по переменным a и b, то задача построения логистической регрессии есть задача максимизации вогнутой функции, для решения которой существую эффективные алгоритмы. Отметим также, что на практике в каждом конкретном случае возможны дополнительные ограничения на параметры a и b. Например, в задаче оценивания вероятности обнаружения болезни, если u_i есть возраст пациента, то логично потребовать, чтобы коэффицент a_i был неотрицательным, поскольку с возрастом вероятность заболевания увеличивается.

Геометрическое программирование

Рассмотрим класс оптимизационных задач, которые не являются выпуклыми, но которые могут быть преобразованы в задачи выпуклого программирования заменой переменных и преобразованием целевой функции и функций в ограничениях.

Мономы и позиномы

Функция f: $\mathbb{R}^n{}_{++} \to \mathbb{R}$, определённая по правилу $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} c x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$,

называется **мономом.**

В дальнейшем мы будем предполагать, что коэффиценты a_i (i = 1, …, n) могут быть любыми действительными числами, но коэффицент c должен быть положительным. Отметим, что такое допущение не совсем согласуется с определением монома в алгебре, где предполагается, что коэффиценты a_i должны быть положительными.

Сумма мономов

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{K} c_k x_1^{a_{k1}} x_2^{a_{k2}} \dots x_n^{a_{kn}}$$

называется **позиномом**. Класс позиномов замкнут относительно сложения, умножения и деления на мономы.

Задача геометрического программирования

Оптимизационная задача вида:

$$f(x) \to min,$$
$$g_i(x) \leq 1, \quad i = 1, \dots, p,$$
$$h_i(x) = 1, \quad i = 1, \dots, q,$$
$$x_j > 0 \quad j = 1, \dots, n,$$

(*)

где $f, g_1, \dots, g_p$ есть позиномы, а $h_1, \dots, h_q$ — мономы, называется **задачей геометрического программирования.**

Можно сказать, что задача вида (*) есть стандартная форма для задачи геометрического программирования.

В общем случае допускаются:

a) ограничения $v_i \leq u_i(x)$, где $v_i(x)$ – позином, $u_i(x)$ – моном, которые можно записать в стандартной форме $g_i(x) \leq 1$, следующим образом: $g_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v_i(x)}{u_i(x)} \leq 1$;

b) ограничения $v_i \leq u_i(x)$, где $v_i(x)$ и $u_i(x)$ – мономы, которые можно записать в стандартной форме $h_i(x) = 1$, следующим образом: $h_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v_i(x)}{u_i(x)} = 1$;

c) Максимизация мономиальной целевой функции $\bar{f}(x)$, поскольку такая задача эквивалентна минимизации обратной целевой функции:

$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\bar{f}(x)}$, которая является мономом.

Для примера, *задача:*

$$\frac{y^2}{x} \to max,$$
$$x^2 + \frac{2y^2}{\sqrt{z}} \leq y,$$
$$\frac{x^3}{y} = z^2,$$
$$2 \leq \mathrm{y} \leq 5,$$
$$x > 0, z > 0$$

переписывается в стандартной форме:

$$xy^{-2} \to min,$$
$$x^2y^{-1} + 2yz^{-1/2} \leq 1,$$
$$x^3y^{-1}z^{-2} = 1$$
$$2y^{-1} \leq 1, (1/5)y \leq 1,$$
$$x > 0, z > 0.$$

Сведение к задаче выпуклого программирования

Рассмотрим задачу: (*)

$$f(x) \to min,$$

$$g_i(x) \le 1, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$h_i(x) = 1, \quad i = 1, \dots, q,$$

$$x_j > 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{k_0} c_k^0 x_1^{\alpha_{k1}^0} x_2^{\alpha_{k2}^0} \dots x_n^{\alpha_{kn}^0},$$

$$g_i(x) = \sum_{k=1}^{k_i} c_k^i x_1^{\alpha_{k1}^i} x_2^{\alpha_{k2}^i} \dots x_n^{\alpha_{kn}^i}, \quad i = 1, \dots, p,$$

$$h_i(x) = \overline{c}_i x_1^{\overline{\alpha}_1^i} x_2^{\overline{\alpha}_2^i} \dots x_n^{\overline{\alpha}_n^i}, \quad i = 1, \dots, q$$

$$b_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} log\ c_k^i, \qquad k = 1, \dots, k_i;\ i = 0, \dots, p,$$

$$a_{ik} \stackrel{\text{def}}{=} (log\ a_{k1}^i, \dots, \log a_{kn}^i)^{\mathrm{T}}, \ k = 1, \dots, k_i;\ i = 0, \dots, p,$$

$$\overline{b_i} \stackrel{\text{def}}{=} log \overline{c_i}, \quad i = 1, \dots, q,$$

$$\overline{a_i} \stackrel{\text{def}}{=} (\log a_1^{-i}, \dots, \log a_n^{-i})^{\mathrm{T}}, \quad i = 1, \dots, q.$$

Сделаем замену переменных $y_i = \log x_i$, тогда $x_i = e^{y_i}$, $i = 1, \dots, n$.

<u>В новых переменных y задача переписывается следующим образом:</u>

$$\sum_{k=1}^{k_0} e^{a_{0k}^T y + b_{0k}} \to min,$$

$$\sum_{k=1}^{k_i} e^{a_{ik}^T y + b_{ik}} \le 1,\ i = 1, \dots, p,$$

$$e^{\bar{a}_i^T y + \overline{b_i}} = 1, \qquad i = 1, \dots, q.$$

Логарифмируя целевую функцию и правые и левые части ограничений, в результате получим *задачу:*

$$\tilde{f}(x) \overset{\text{def}}{=} log\left(\sum_{k=1}^{k_0} e^{a_{0k}^T y + b_{0k}}\right) \to min,$$

$$\tilde{g}_i(x) \overset{\text{def}}{=} log\left(\sum_{k=1}^{k_i} e^{a_{ik}^T y + b_{ik}}\right) \leq 0, \qquad i = 1, \dots, p,$$

$$\tilde{h}_i(x) \overset{\text{def}}{=} \bar{a}_i^T y + \bar{b}_i = 0, \qquad i = 1, \dots, q.$$

Поскольку функция f˜ и все функции g˜i являются выпуклыми, то задача является **задачей выпуклого программирования**.

Линейное программирование

<u>Задача линейного программирования</u> (ЛП) есть задача максимизации линейной функции при линейных ограничениях. Задачу ЛП можно записать несколькими стандартными способами. Мы здесь рассмотрим только три таких способа.

Задача ЛП в канонической форме записывается следующим образом: $max\{c^T x : Ax \leq b\}$,

Где A – действительная матрица размера $m * n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, а $x = (x_1 \ldots, x_n)^T$ есть вектор неизвестных.

Задача ЛП в стандартной форме **имеет следующий вид:**

$$\max\{c^T x : Ax = b, \quad x \geq 0\},$$

где A, c, в и x определяются также, как и для задачи ЛП в канонической форме. Для задачи ЛП в стандартной форме обычно предполагается, что A есть матрица полного столбцового ранга, т. е. rank A = n.

Еще одна часто встречающаяся форма задачи ЛП следующая:

$$\max\{c^T x : Ax \leq b, \quad x \geq 0\}$$

где A, c, в их определяются как и ранее, но здесь не накладывают никаких ограничений на ранг матрицы A.

Эквивалентность задач ЛП в разных формах

$$max\{c^T x : Ax \le b\}, \dashrightarrow max\{c^T x : Ax \le b, x \ge 0\},$$

Представим вектор $x = x^+ - x^-$ как разность двух неотрицательных векторов $x^+, x^- \in \mathbb{R}^n_+$.Вводя обозначения

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix}, \qquad \bar{c} = \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix}, \qquad \bar{A} = [A \mid -A],$$

<u>Запишем задачу в форме:</u> $max\{c^T x : Ax \le b\},$

$$\max\{c^T x : Ax \le b, \quad x \ge 0\},$$

$$\max\{\bar{c}^T \bar{x} : \bar{A}\bar{x} \le b, \quad \bar{x} \ge 0\}$$

TUSUR UNIVERSITY

$\max\{c^T x : Ax \leq b, \;\; x \geq 0\}, \;\; ------\!\!\rightarrow \;\; max\{c^T : Ax = b, \;\; x \geq 0\},$

Введём вектор $s = (s_1, \dots, s_m)^T$ переменных недостатка.

$$\bar{x} = \binom{x}{s}, \;\; \bar{c} = \binom{c}{0}, \;\; \bar{A} = [A|I],$$

$$max\{\bar{c}^T\bar{x} : \; \bar{A}\bar{x} = b, \;\; \bar{x} \geq 0\}.$$

$$max\{c^T: Ax = b, x \geq 0\}, Ax \leq b, \quad Ax \geq b \longrightarrow max\{c^T: Ax \leq b\},$$

Вводя обозначения

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \bar{A} = \begin{bmatrix} A \\ -A \\ -I \end{bmatrix},$$

$$max\{c^T x : \bar{A}x \leq \bar{b}\}$$

Задача дробно-линейного программирования

Задача дробно-линейного программирования - это задача минимизации дробно-линейной целевой функции при линейных ограничениях:

$$\frac{c^T x + d}{u^T x + v} \to min,$$

$$Ax \le b,$$
$$Gx \le h,$$
$$u^T x + v > 0.$$

обобщает задачу ЛП: если u = 0 и v = 1,

$$\frac{c^T x + d}{u^T x + v} \to min,$$

$$Ax \leq b,$$
$$Gx \leq h,$$
$$u^T x + v > 0.$$

можно преобразовать в задачу ЛП:

$$c^T x + dt \to min,$$
$$Ax - bt = 0,$$
$$Gx - ht = 0,$$
$$u^T y + vt = 1,$$
$$t \geq 0.$$

Двойственность в линейном программировании

<u>Теория двойственности линейного программирования</u> имеет прямое отношение к проблеме оценки эффективности использования ресурсов в производственных процессах.

Рассмотрим задачу ЛП:

$$-c^T x \to min,$$
$$Ax \leq b,$$
$$x \geq 0,$$

(*)

где $c, x \in \mathbb{R}^n, b, y \in \mathbb{R}^m$, а «А» есть действительная матрица размера $m * n$.

При условии, что $S = \mathbb{R}_+^n$ функция Лагранжа

$$L(x, \lambda) = -c^T x + \lambda^T (Ax - b) = -b^T \lambda + (A^T \lambda - c)^T x,$$

а двойственная функция Лагранжа следующая

$$w(\lambda) = \inf_{x \in \mathbb{R}_+^n} L(x, \lambda) = -b^T \lambda + \inf_x (A^T \lambda - c)^T x$$

Инфимум линейной функции $q^T x$ на $\mathbb{R}_+^n$ равен $-\infty$, если $q \notin \mathbb{R}_+^n$, и 0, если $q \geq 0$. Поэтому

$$w(\lambda) = \begin{cases} -b^T \lambda, & \text{если } A^T \lambda - c \geq 0, \\ -\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, двойственная задача Лагранжа для задачи ЛП

$$\max\{w(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}_{+}^{m}\} = \{-b^T\lambda : A^T\lambda \ \geq c, \lambda \ \geq 0\}.$$

Мы показали, что для задачи ЛП

$$\max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\}$$

двойственная задача записывается следующим образом:

$$\min\{b^T y : \ A^T y \geq \mathrm{c}, \mathrm{y} \geq 0\}.$$

Задачи (П) и (Д) будем называть, соответственно, **прямой** и **двойственной** задачами. В отношении к прямой задаче(П) переменные x_j $(j = 1, \dots, n)$ называются **прямыми**, а переменные y_i $(i = 1, \dots, m)$ – **Двойственными.** Отметим также, что отношение двойственности симметрично, т.е задача двойственная к двойственной является прямой (*докажите это!*)

Теорема (двойственности) : *Имеют место следующие альтернативы:*

1. *Обе задачи (П) и (Д) имеет допустимые решения:*

$$\max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} = \min\{b^T y : \ A^T y \geq c, y \geq 0\}.$$

2. *Фесли одна из задач (П) или (Д) не имеет допустимых решений, а другая имеет, то целевая функция этой задачи неограничена.*

3. *Обе задачи (П) и (Д) не имеет допустимых решений.*

Допустимые решения x и y* соответственно задач (П) и (Д) является их оптимальными решениями тогда и только тогда, когда имеют место следующие условия дополняющей нежесткости:*

$$(b - Ax^*)^T y^* = 0 \qquad и \qquad (c - A^T y^*)^T x^* = 0$$

Пример двойственных задач:

$2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \to max,$	$9y_1 + 5y_2 + 4y_3 \to min,$
$x_1 + x_2 - x_3 = 9,$	$y_1 - 2y_2 + y_3 \geq 2,$
$-2x_1 + x_1 \leq 5,$	$y_1 + y_2 = -4,$
$x_1 - 3x_3 \geq 4,$	$-y_1 - 3y_3 \leq 3,$
$x_1 \geq 0,$	$y_2 \geq 0,$
$x_3 \leq 0,$	$y_3 \leq 0.$

Общее правило записи

Пара двойственных задач ЛП:

Прямая задача	Двойственная задача
$\max c^T x$	$\min b^T y$
$A_i x \leq b_i, \quad i \in R_1$	$y_i \geq 0, \quad i \in R_1$
$A_i x = b_i, \quad i \in R_2$	$y_i \in \mathbb{R}, \quad i \in R_2$
$A_i x \geq b_i, \quad i \in R_3$	$y_i \leq 0, \quad i \in R_3$
$x_j \geq 0, \quad j \in C_1$	$y^T A^j \geq c_j, \quad j \in C_1$
$x_j \in \mathbb{R}, \quad j \in C_2$	$y^T A^j = c_j, \quad j \in C_2$
$x_j \leq 0, \quad j \in C_3$	$y^T A^j \leq c_j, \quad j \in C_3$

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Двойственные переменные и теневые цены

Предприятие планирует производить n видов продукции, используя m видов ресурсов: для производства единицы j-го продукта требуется a_{ij} единиц i-го ресурса. Стоимость единицы j-го продукта равна c_j. В наличии имеется b_i единиц i-го ресурса. Нужно определить план производства, с целью максимизировать прибыль. Обозначив через x_j объём выпуска продукции j-го вида (j = 1, …, n), мы можем записать задачу поиска оптимального производственного плана следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max\,, \qquad z(b) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{c^T x : Ax \le b, \quad x \ge 0\}.$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \le b_i\,, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

Пусть x^* - оптимальное базисное решение задачи, а y^* - оптимальное решение двойственной задачи. Тогда для достаточно малого $\epsilon > 0$ имеем

$$
\begin{aligned}
z(b+\epsilon e_i) - z(b) &= \max\{c^T x : Ax \le b+\epsilon e_i, \quad x \ge 0\} \\
&\quad - \max\{c^T x : Ax \le b,\ x \ge 0\} \\
&= \min\{(b+\epsilon e_i)^T y :\ A^T y \ge c, y \ge 0\} \\
&\quad - \min\{b^T y :\ A^T y \ge c,\ \ y \ge 0\} \\
&= (b+\epsilon e_i)^T y^* - b^T y^* = \epsilon y_i^*.
\end{aligned}
$$

Теперь мы можем вычислить

$$\frac{\partial z}{\partial b_i}(b) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{z(b+\epsilon e_i) - z(b)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon y_i^*}{\epsilon} = y_i^*.$$

Экономический смысл двойственных переменных следует из приблизительного равенства:

$$z(b + \epsilon e_i) \approx y_i^* \epsilon,$$

которое означает, что на каждую дополнительную единицу ресурса i предприятие получает прибыль равную y_i^*. Поэтому оптимальные двойственные переменные y_i^* называются **теневыми ценами.** Если теневая цена y_i^* больше цены ресурса i на рынке, то предприятию для увеличения прибыли целесообразно закупить дополнительное количество i-го ресурса. Из условия дополняющей нежёсткости $y_i^*(b_i - A_i x^*) = 0$ следует, что теневая цена неполностью использованного ресурса $(A_i x^* < b_i)$ равна нулю.

Приведённой стоимостью переменной x_j (продукта j) называется величина

$$\overline{c_j} = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*,$$

равная стоимости единицы продукта j минус теневая стоимость ресурсов, используемых для её производства. Отметим следующие свойства приведённых стоимостей:

- Поскольку y^* - допустимое решение задачи ЛП

$$\max\{b^T y : \ y^T A \geq c, \qquad y \geq 0\}$$

двойственной задаче (*), то все приведённые стоимости неположительны.

- Из условия дополняющей нежёсткости $x_j^*(c_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i^*) = 0$ следует, что приведённая стоимость производимого продукта j $(x_j^* > 0)$ равна нули, а если приведённая стоимость отрицательна, то продукт не производится ($\overline{c_j} < 0$ влечёт $x_j^* = 0$).

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

г. Томск, ул. Вершинина, 47, офис 434

e-mail: aleksandr.i.sukhanov@tusur.ru

тел.: (3822) 70-15-36