ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

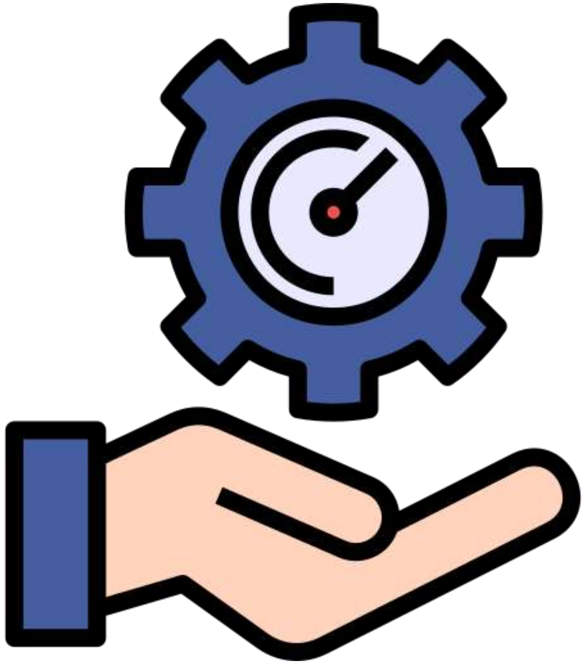
Доцент каф. АСУ: Суханов А.Я.

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Нелинейная оптимизация с ограничениями

Необходимые условия оптимальности:

Будем рассматривать задачу:
$f(x) \to \min$, $g_i(x) \le 0$, $i \in I = \{1,\dots,m\}$, $x \in \mathbb{R}^n$,
где функции f и g_i $(i \in I)$ непрерывно дифференцируемы.



X множество решений задачи
$X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon g_i(x) \le 0, i \in I\}$.

Точка $x^0 \in X$ есть локальный оптимум (минимум) задачи

$$f(x) \to \min,\ g_i(x) \le 0,\ i \in I = \{1, \ldots, m\},\ x \in \mathbb{R}^n,$$

если для некоторого числа $\varepsilon > 0$ выполняется условие

$$f(x^0) \le f(x)\ \forall\ x \in X,\ ||x - x^0|| \le \varepsilon.$$

Необходимые условия Куна – Таккера

Теорема 2.1 (Куна — Таккера)

Предположим, что все функции f и g_i $(i = 1,\ldots,m)$ непрерывно дифференцируемы и в точке $x^0 \in X$ выполняется условие выделения ограничений. Если x^0 есть точка локального минимума, то существуют такие числа

$\lambda_i \geq 0$ $(i = 1,\ldots,m)$, что

$\nabla f(x^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^0) = 0,$

$\lambda_i g_i(x^0) = 0,\ i = 1,\ldots,m.$

(Числа λ_i называются множителями Куна-Таккера.)

Условия Куна — Таккера допускают также следующую физическую интерпретацию. Материальная точка движется внутри множества X под действием переменной силы, вектор которой в точке x равен $-\nabla f(x)$. Грани (границы) множества X являются абсолютно упругими и, когда материальная точка достигает грани $g_i(x) = 0$ в точке x^0, на материальную точку действует сила реакции $\lambda_i \nabla g_i(x^0)$, где множитель $\lambda_i \geq 0$ выбирается из условия, что сила $\lambda_i \nabla g_i(x^0)$ должна уравновешивать силу, с которой материальная точка давит на данную грань. Нужно найти точку покоя x^0, в которой движение материальной точки прекратиться. В такой интерпретации условия Куна — Таккера выражают тот факт, что в точке покоя силы реакции $\lambda_i \nabla g_i(x^0)$ граней уравновешивают силу $-\nabla f(x)$, действующую на материальную точку

Числовой пример:

Записывая и решая системы уравнений и неравенств, выражающих условия Куна — Таккера, мы можем решать небольшие примеры оптимизационных задач. При этом следует заметить, что в компьютерных программах, способных решать задачи реалистичных для практики размеров, реализованы совершенно иные (численные) методы решения гладких оптимизационных задач с ограничениями, а теорема Куна — Таккера — это важный теоретический результат, который применяется при доказательстве многих теорем.

Решим задачу:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to \min,$$
$$g_1(x) = 2x_1 - x_2 + x_3 - 5 \leq 0,$$
$$g_2(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0.$$

$$\Delta f(x) = \begin{bmatrix} 2r_1 \\ 2r_2 \\ 2r_3 \end{bmatrix} \qquad \Delta g1(x) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Delta g1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Запишем условия Куна-Таккера:

$$\begin{bmatrix} 2r_1 \\ 2r_2 \\ 2r_3 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$2x_1 - x_2 + x_3 - 5 \le 0,$
$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0,$
$\lambda_1(2x_1 - x_2 + x_3 - 5) = 0,$
$\lambda_2(x_1 + x_2 + x_3 - 3) = 0,$
$\lambda_1 \ge 0$

$2x_1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0,$
$2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0,$
$2x_3 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0,$
$2x_1 - x_2 + x_3 - 5 \le 0,$
$\lambda_1(2x_1 - x_2 + x_3 - 5) = 0,$
$x_1 + x_2 + x_3 = 3,\ \lambda_1 \ge 0$

Рассмотрим два случая.
1.$\lambda_1 = 0$.
Тогда из первых трех уравнений получаем, что $x_1 = -\lambda_2/2$, $x_2 = -\lambda_2/2$ и $x_3 = -\lambda_2/2$. Подставляя эти значения в последнее уравнение, найдем λ_2:
$x_1 + x_2 + x_3 = -3/2\ \lambda_2 = 3 \Rightarrow \lambda_2 = -2$.
Откуда $x^1 = (1, 1, 1)^T$ - стационарная точка.
Причем, поскольку f(x) - выпуклая функция, то x^1 точка глобального минимума[5].
$\lambda_1 > 0$. Теперь в силу условия дополняющей нежесткости
$2x_1 - x_2 + x_3 = 5$.

Из первых трех уравнение найдем:

$$x_1 = -\tfrac{1}{2}(2\lambda_1 + \lambda_2),$$
$$x_2 = -\tfrac{1}{2}(-\lambda_1 + \lambda_2),$$
$$x_3 = -\tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Подставляя эти значение в уравнения:

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 5,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

Получим: $-2\lambda_1 - \lambda_2 - 1/2\ \lambda_1 + 1/2\ \lambda_2 - 1/2\ \lambda_1 - 1/2\ \lambda_2 = 5$

$-\lambda_1 - 1/2\ \lambda_2 + 1/2\ \lambda_1 - 1/2\ \lambda_2 - 1/2\ \lambda_1 - 1/2\ \lambda_2 = 3$

или

$-3\lambda_1 - \lambda_2 = 5$

$-\lambda_1 - 3/2\ \lambda_2 = 3$

Умножив первое уравнение на $-\frac{3}{2}$ и сложив со вторым, получим:

$$(9/2 - 1)\lambda_1 + (3/2 - 3/2)\lambda_2 = -5/2 + 3, \text{ или } 7/2\,\lambda_1 = -9/2$$

Отсюда $\lambda_1 = -9/7$, что противоречит требованию неотрицательности λ_1. Следовательно, $x^1 = (1, 1, 1)$ - единственная точка глобального минимума

Экономическая интерпретация множителя Куна – Таккера

Фирма использует n производственных процесса для производства n продуктов. Процесс j (j = 1,…,n) описывается производственной функцией f_j: $xj = f_j(x_1^j,\ldots,x_n^j)$,

- где переменная xj обозначает количество единиц продукта j, производимого j-м процессом
- Переменная x_i^j обозначает количество единиц ресурса i (i = 1,…,m), используемого в j-м процессе. В наличии имеется a_i единиц ресурса i, i = 1,…,m. Задан вектор цен $p = (p_1,\ldots,p_n)^T$ выпускаемых продуктов.

Нужно найти производственный план $x^* = (x_1,\ldots,x_n)^T$, стоимость которого p^Tx^* максимальна.-

Дававвнная задача формулируется следующим образом:

$p^T x \to \max,$

λ_j: $x_j - f_j(x_1^j, \ldots, x_\square^j) = 0,\ j = 1, \ldots, n,$

μ_i: $\sum_{i=1}^{n} x_i^j - a_i \leq 0,\ i = 1,\ \ldots,\ m,$

v_j: $x_j \geq 0,\ j = 1,\ \ldots,\ n,$

ρ_i^j: $x_i^j \geq 0,\ i = 1,\ \ldots,\ m,\ j = 1,\ \ldots,\ n.$

Здесь в самом левом столбце записаны множители Куна – Таккера для соответствующих ограничений.

Условия Куна – Таккера для задачи:

$-p_j + \lambda_j + v_j = 0, \ j = 1, \ldots, n,$ a

$\mu_i - \lambda_j \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i^j}(x_1^j, \ldots, x_m^j) + \rho_i^j = 0, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n,$ b

$x_j - f_j(x_1^j, \ldots, x_{\square}^j) = 0, \ j = 1, \ldots, n,$ c

$\sum(j=1$ до $n)\ x_i^j \leq a_i \ , \ i = 1,\ldots,m,$ d

$\mu_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_i^j - a_i\right) = 0, \ i = 1,\ldots,m$ e

$v_j x_j = 0, \ j = 1, \ldots, n,$ f

$\rho_i^j x_i^j = 0, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n,$ g

$v_j \leq 0, \ j = 1, \ldots, n,$ h

$\rho_i^j \leq 0, \ i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n.$ i

$$v_j x_j = 0,\ j = 1,\ldots,n, \qquad \text{f}$$

$$-p_j + \lambda_j + v_j = 0,\ j = 1,\ldots,n, \qquad \text{a}$$

Если продукт j производится ($x_j > 0$), то из условия дополняющей нежесткости (f) имеем, что $v_j = 0$, и тогда из (a) следует, что $\lambda_j = p_j$, т. е. множители, соответствующие технологическим процессам производимых продуктов, равны ценам этих продуктов.

$$\mu_i - \lambda_j * \partial f_j/\partial x_i^j (x_1^j, \ldots, x_m^j) + \rho_i^j = 0, i = 1,\ldots,m, j = 1,\ldots,n, \quad (b)$$

$$\rho_i^j x_i^j = 0, i = 1,\ldots,m, j = 1,\ldots,n, \quad (g)$$

Если ресурс *i* используется в *j*-м процессе ($x_i^j > 0$), то из *(2.9g)* вытекает, что $\rho_i^j = 0$, и тогда для производимого продукта *j* ($x_j > 0$) из *(2.9b)* имеем:

$\mu_i = p_j * \partial f_j/\partial x_i^j (x_1^j, \ldots, x_m^j)$.

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Если ресурс *i* не используется полностью ($\sum$(j=1 до n) $x_i^j < a_i$), то из (2.9e) имеем, что $\mu_i = 0$. Но, если ресурс *i* используются в производственном процессе для какого-либо производимого продукта *j*, и поскольку *p_j* > 0 и $\partial f_j/\partial x_i^j(x_1^j, ..., x_{□}^j) > 0$, то и μ_i > 0, т. е. такой ресурс *i* должен использоваться полностью.

$$\mu_i\left(\sum_{j=1}^{n} x_i^j - a_i\right) = 0, \; i = 1,\ldots,m,$$

Суммируя сказанное выше, мы формулируем свойства множителей ресурсных ограничений следующим образом:
множитель ресурса, который не используется ни в одном технологическом процессе, производящем продукт, равен нулю; если ресурс *i* используется в технологическом процессе, производящем некоторый продукт *j*, то соответствующий этому ресурсу множитель μ_i равен стоимости предельного продукта *j* относительно ресурса

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

г. Томск, ул. Вершинина, 47, офис 434

e-mail: aleksandr.i.sukhanov@tusur.ru

тел.: (3822) 70-15-36