Коалиционные игры: ядро и вектор Шепли

Лекция 11b

Доцент каф. АСУ: Суханов А.Я.

Введение

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Коалиционные игры являются важной частью теории игр, изучающей взаимодействие групп игроков, формирующих коалиции для достижения совместных целей. В данной презентации мы рассмотрим ключевые концепции коалиционных игр, такие как ядро и вектор Шепли, их математическое представление, а также примеры и области применения.

Основы коалиционных игр

Коалиционная игра формально определяется через характеристическую функцию $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{S})$, которая задает выигрыш коалиции **S⊆N**, где N — множество всех игроков.

- Ключевые элементы:
- Игроки N={1,2,…,n}N={1,2,…,n}.
- Коалиции S, представляющие подмножества N.
- Функция выигрыша $v(S)$v(S), определяющая общий выигрыш коалиции S.

Пример коалиционной игры

Рассмотрим пример с тремя игроками, которые объединяются для выполнения проекта. Их взаимодействие описывается характеристической функцией **$v(S)$**, которая определяет выигрыш каждой коалиции **S**.

Например:

1. Если игроки действуют поодиночке, их выигрыши равны **$(\{1\})=10, v(\{2\})=20, v(\{3\})=15$**.
2. Если игроки начинают взаимодействовать, то коалиции **$\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$** обеспечивают выигрыш **$v(\{1,2\})=50, v(\{1,3\})=40, v(\{2,3\})=60$**.
3. Если все трое объединяются, общий выигрыш **$v(\{1,2,3\})=100$**.

Эти значения $v(S)$ представляют потенциал каждой коалиции, который нужно справедливо распределить между игроками. Вопрос: как распределить общий выигрыш так, чтобы все игроки были довольны? Коалиционные игры дают несколько подходов к решению этой задачи, таких как ядро и вектор Шепли.

Ядро коалиционной игры

Ядро коалиционной игры — это множество распределений выигрыша между игроками, которые обеспечивают устойчивость коалиции. Оно позволяет гарантировать, что ни одна подгруппа игроков не будет стремиться отделиться, так как внутри коалиции они получают не меньше, чем могли бы заработать самостоятельно.

Распределение выигрышей x принадлежит ядру, если выполняются два условия:

1. Сумма всех выигрышей равна общему выигрышу коалиции:$\sum_{i \in N} x_i = v(N)$.
2. Для каждой коалиции $S \subseteq N$S⊆N сумма выигрышей её участников не меньше, чем её собственный выигрыш: $\sum_{i \in s} x_i \geq v(S)$.

Эти условия обеспечивают:

- Эффективность: общий выигрыш распределяется без потерь.
- Справедливость: ни одна группа игроков не может улучшить своё положение за счёт выхода из коалиции.

На практике ядро помогает оценить устойчивость коалиции в задачах совместного принятия решений, например, при распределении ресурсов или доходов.

Графическая интерпретация ядра

Ядро коалиционной игры можно представить как область решений в пространстве $\boldsymbol{R^n}$, где каждая точка — это возможное распределение выигрышей.

Условия:

1. Линейное равенство: $\boldsymbol{\Sigma_{\chi_i}} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{N})$ (эффективность).
2. Неравенства: $\sum_{i \in s} \boldsymbol{x_i} \geq \boldsymbol{v}(\boldsymbol{S})$ для всех коалиций S (устойчивость).

Пример:

Для n=3n=3 ядро отображается как выпуклый многогранник. Если ядро пустое, устойчивого распределения нет. Ненулевое ядро показывает все устойчивые варианты распределения. На графике эта область отображает точки, удовлетворяющие всем условиям.

Пример расчета ядра

Рассмотрим пример с тремя игроками. Ядро определяется системой условий, задающих ограничения на распределение выигрышей.

Условия:

1. Эффективность: $\boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 = 100}$
2. Устойчивость коалиций: $\boldsymbol{x_1 + x_2 \geq 50}$, $\boldsymbol{x_1 + x_3 \geq 40, x_2 + x_3 \geq 60}$.
3. Индивидуальная рациональность: $\boldsymbol{x_1 \geq 10, x_2 \geq 20, x_3 \geq 15}$.

Объяснение:

Эти условия формируют многогранник в пространстве $\boldsymbol{R^3}$. Его точки представляют все устойчивые распределения выигрышей, которые удовлетворяют требованиям эффективности и справедливости.

Вектор Шепли

Вектор Шепли — это метод распределения общего выигрыша в кооперативной игре, основанный на справедливом учете вклада каждого игрока в различные коалиции.

Что такое вектор Шепли?

Вектор Шепли распределяет выигрыши так, чтобы каждый игрок получал часть общего результата пропорционально своему среднему вкладу в различные коалиции.

Формула:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(|N|-|S|-1)!}{|N|!}(v(S \cup \{i\}) - v(S)).$$

Свойства:

1. Симметрия: игроки с равными вкладами получают равные выигрыши.
2. Эффективность: сумма выигрышей всех игроков равна общему выигрышу коалиции (v(N)).
3. Нулевая плата: игрок, не влияющий на выигрыши, получает **φi=0**.

Объяснение:

Метод учитывает все возможные способы включения игрока в коалиции, определяя его влияние на итоговый выигрыш. Вектор Шепли применяется для анализа справедливого распределения ресурсов или прибыли.

Расчет вектора Шепли

Пример:

Рассмотрим расчет вектора Шепли на примере игры с тремя игроками и характеристической функцией:

1. **v({1}) = 10, v({2}) = 20, v({3}) = 15.**
2. **v({1,2}) = 50, v({1,3}) = 40, v({2, 3}) = 60.**
3. **v({1,2,3}) = 100.**

Шаги расчета:

1. Определяем вклад каждого игрока в коалиции. Например, вклад игрока 1 в коалиции **{1,2}{1,2}:**

v({1,2})−v({2})=50−20=30.

2. Считаем средневзвешенный вклад игрока в каждую возможную коалицию, используя формулу Шепли.

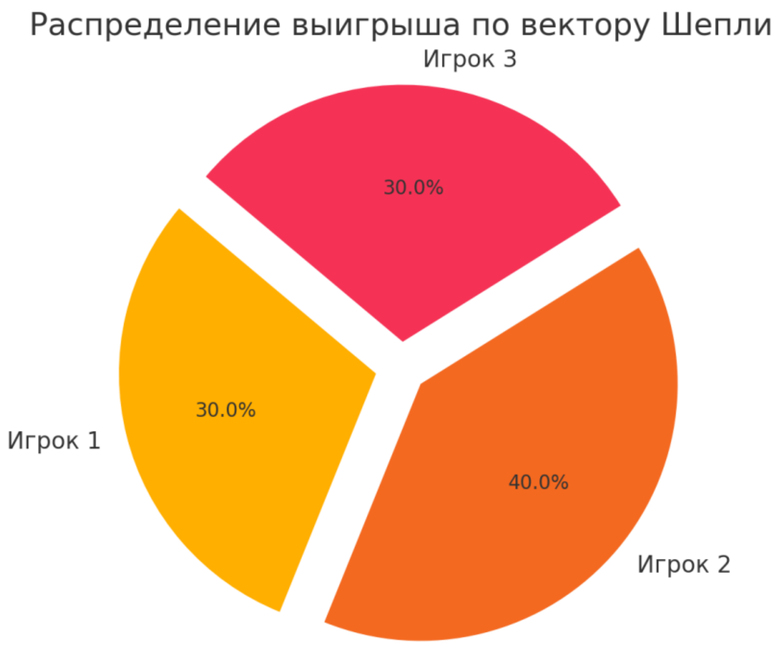
Вектор Шепли показывает, как справедливо распределить общий выигрыш в 100 единиц, учитывая вклад каждого игрока во все коалиции. Этот метод гарантирует, что распределение отвечает свойствам эффективности и симметрии. Диаграмма может показать доли каждого игрока визуально.

Пример распределения по Шепли

Для трёх игроков итоговые значения вектора Шепли:
- **φ1=30**
- **φ2=40**
- **φ3=30**

Распределение учитывает вклад каждого игрока в коалиции. Например, игрок 2 внёс больший вклад в самые сильные коалиции, поэтому его доля больше.

Диаграмма:
Круговая диаграмма показывает, как распределяется общий выигрыш в 100 единиц между игроками:
- Игрок 1: 30%.
- Игрок 2: 40%.
- Игрок 3: 30%.



Сравнение ядра и вектора Шепли

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Ядро и вектор Шепли — два подхода к распределению выигрышей в коалиционных играх, которые имеют разные цели и свойства.

Сходства:

1. Оба метода обеспечивают справедливое распределение выигрышей.
2. Учитывают вклад игроков в коалиции.

Различия:

1. Ядро:

1. Гарантирует устойчивость коалиции, предотвращая выход игроков.
2. Может быть пустым, если устойчивое распределение невозможно.

2. Вектор Шепли:

1. Фокусируется на справедливости распределения на основе среднего вклада.
2. Всегда существует и единственен.

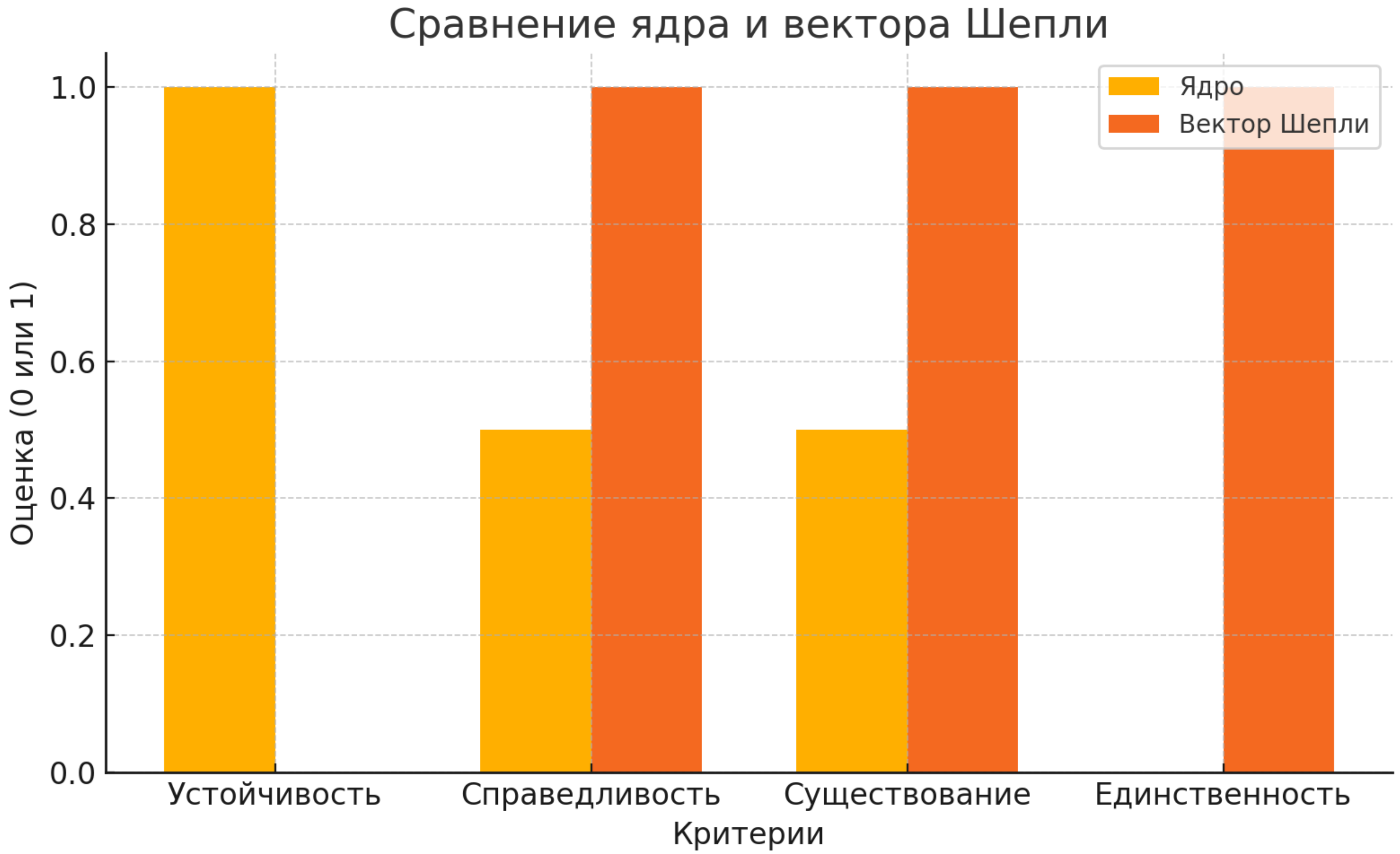
Сравнение ядра и вектора Шепли

- **Пример применения:**
- Ядро используется, когда важна устойчивость, например, в политических коалициях.
- Вектор Шепли чаще применяется для справедливого распределения ресурсов или прибыли.

- **Дополнение:**

Диаграмма или таблица может показать визуальное сравнение ключевых свойств этих подходов.

Сравнение ядра и вектора Шепли



Приложения коалиционных игр

Коалиционные игры используются в областях, где важно справедливое распределение ресурсов и совместное принятие решений.

Примеры:

1. **Экономика:** распределение прибыли в консорциумах, совместные проекты.
2. **Политика:** устойчивые парламентские коалиции, голосование.
3. **Ресурсы:** оптимизация распределения воды, энергии, финансов.
4. **Технологии:** мультиагентные системы, распределение вычислительных мощностей.

Эти методы помогают учитывать интересы всех участников, обеспечивая справедливость и устойчивость решений.

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

г. Томск, ул. Вершинина, 47, офис 434

e-mail: aleksandr.i.sukhanov@tusur.ru

тел.: (3822) 70-15-36