ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Доцент каф. АСУ: Суханов А.Я.

TУСУР
TUSUR UNIVERSITY

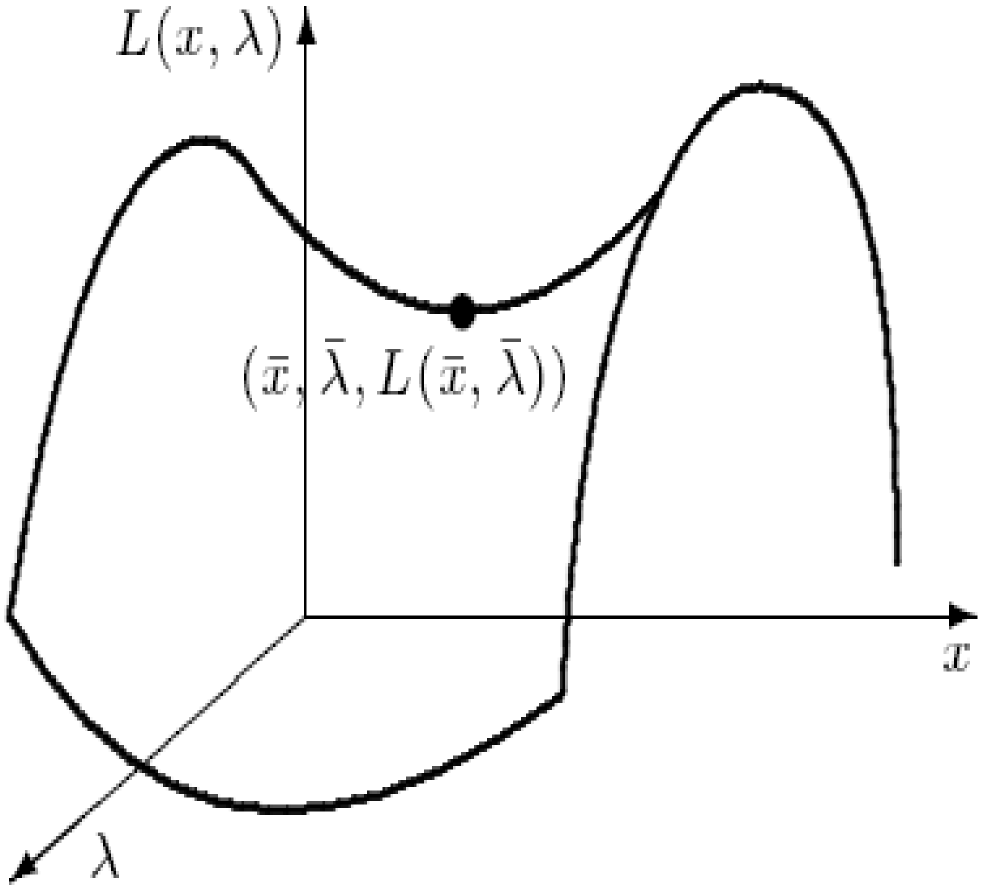
Седловые точки и функции Лагранжа

Поставим в соответствие i-му ограничению (i $\in$ I) неотрицательное действительное число, называемое множителем Лагранжа. Определим функцию Лагранжа по правилу:

$$L(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i\in I} \lambda_i g_i(x).$$

Говорят, что точка $(\bar{x},\ \bar{\lambda}) \in S \times \mathbb{R}_+^m$ есть *седловая точка* функции $L(x,\lambda)$, если

$$L(\bar{x},\lambda) \leq L\ (\bar{x},\ \bar{\lambda}),\ \mathrm{x} \in S, \lambda \in \mathbb{R}_+^m.$$



Здесь $\bar{x}$ есть точка минимума функции $L(x,\bar{\lambda})$ по $x \in S$, а , $\bar{\lambda}$ есть точка максимума функции $L(\bar{x},\lambda)$ по $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Можно представить, что трехмерная точка $(\bar{x}, \bar{\lambda}, L(\bar{x},\bar{\lambda}))$ находится в центре поверхности седла для верховной езды на лошади.

TYCYP
TUSUR UNIVERSITY

Теорема (свойство седловых точек)

Точка $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \epsilon S \times \mathbb{R}_+^m$ является седловой для функции $L(x, \lambda)$ тогда и только тогда, когда

$$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \min_{x \epsilon S} L(x, \bar{\lambda}),$$

$$g_i(\bar{x}) \leq 0, \qquad i \in I,$$

$$\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0,, \qquad i \in I.$$

Доказательство. Если $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ – седловая точка, то равенство

$L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \min_{x \epsilon S} L(x, \bar{\lambda})$, выполняется.

С другой стороны, для любого $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$ имеем неравенство

$$f(\bar{x}) + \sum_{i\in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = L(\bar{x},\bar{\lambda}) \geq (\bar{x},\lambda) = f(\bar{x}) + \sum_{i\in I} \lambda_i g_i(\bar{x}).$$

Откуда $\sum\limits_{i\in I}(\lambda_i - \bar{\lambda}_i) g_i(\bar{x}) \leq 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}_+^m.$

Если условие $g_i(\bar{x}) \leq 0, \quad i \in I,$

не выполняется для некоторого индекса $i \in I$, то

всегда можно выбрать достаточно большое $\lambda_i > 0,$

чтобы $\sum_{i\in I}(\lambda_i - \bar{\lambda}_i) g_i(\bar{x}) \leq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^m$. не выполнялось

тогда $g_i(\bar{x}) \leq 0, \quad i \in I$, должно выполняться

Наконец, при $\lambda = 0$ неравенство $\sum_{i\in I}(\lambda_i - \bar{\lambda}_i)g_i(\bar{x}) \le 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^m_+$.
превращается в неравенство $\sum_{i\in I}\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \ge 0$.
Но поскольку $\bar{\lambda}_i \ge 0$ и $g_i(\bar{x}) \le 0$ для всех $i \in I$, то

$$\sum_{i\in I}\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \le 0.$$

Следовательно

$$\sum_{i\in I}\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0.$$

и поэтому

$$\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0 \text{ для всех } i \in I.$$

Теорема (достаточное условие оптимальности)

Если пара $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \epsilon\, S \times \mathbb{R}_+^m$, есть седловая точка функции $L(x, \lambda)$, то $\bar{x}$ является *глобальным минимумом в задаче* $f(x) \to \min,$

$$g_i(x) \le 0, i \in I = \{1, \dots, m\},$$

$$x \in S \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Для любого $x \in S$, удовлетворяющего условию $g_i(x) \le 0\ (i \in I)$, из условий $L(\bar{x},\ \bar{\lambda}) = \min_{x \in S} L\,(x, \bar{\lambda}),$

$$g_i(\bar{x}) \le 0, \quad i \in I,$$

$$\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i \in I.$$

с учетом того, что

$$\bar{\lambda}_i \ge 0, \quad f(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \le f(x) + \sum_{i \in I} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \le f(x)$$

имеются задачи, для которых функция Лагранжа не имеет седловых точек.

Для примера, рассмотрим следующую задачу с одной переменной *x*:

$$f(x) = -x^2 \to min,$$

$$g_i(x) = 2x - 1 \leq 0,$$

$$S = \{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq 1\}.$$

Поскольку функция Лагранжа

$$L(x, \lambda) = -x^2 + \lambda(2x - 1)$$

строго вогнута по *x*, то

$$\min_{x \in [0,1]} L(x, \lambda)$$

при любом фиксированном λ достигается либо в точке *x*=0, либо в точке *x*=1.

Поскольку единственный глобальный минимум в задаче $x^* = 1/2$ не является точкой минимума функций $L(x, \lambda)$ ни при каком значении λ, то $L(x, \lambda)$ не имеет седловой точки.

Теорема: Если в задаче

$$f(x) \to \min,$$
$$g_i(x) \le 0,\ i \in I = \{1, \dots, m\},$$
$$x \in \mathbb{R}^n,$$

все функции f и g_i $(i \in I)$ выпуклы и непрерывно дифференцируемы, то для того чтобы $\bar{x} \in X$ была глобальным минимумом, необходимо и достаточно, чтобы в точке $\bar{x}$ выполнялись условия Куна – Таккера.

Пусть все функции f и g_i $(i \in I)$ выпуклы, множество S замкнуто и выпукло, и существует такая точка $x \in$ S, что $g_i(x) < 0,\ i \in I$.

Тогда если задача

$$f(x) \to \min,$$
$$g_i(x) \le 0,\ i \in I = \{1, \dots, m\},$$
$$x \in \mathbb{R}^n,$$

имеет оптимальное решение $\bar{x}$, то существует такой вектор множителей $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+$, что $(\bar{x},\ \bar{\lambda})$ есть седловая точка функции Лагранжа $L(x, \lambda)$.

Лагранжева двойственность

Рассмотрим оптимизационную задачу:

$$
\begin{aligned}
& f(x) \to \min, \\
& g_i(x) \le 0, \qquad i \in I = \{1, \dots, m\}, \\
& x \in S \subseteq \mathbb{R}^n,
\end{aligned}
$$

Двойственная функция Лагранжа *w* : R → R^m, в точке λ ∈ R определяется как минимальное по x значение функции Лагранжа:

$$
w(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in S} \left(L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \right).
$$

Заметим, что $w(\lambda) = -\infty$, если $L(x, \lambda)$ неограничена снизу по *x на* множестве *S.*

Чтобы получить наилучшую нижнюю оценку, мы должны решить *двойственную задачу Лагранжа* $\max\limits_{\lambda \in \mathbb{R}^m_+} w(\lambda)$

Слабая теорема двойственности

Если x^* и λ^* есть оптимальные решения соответственно прямой и двойственной $w(\lambda^*) \leq f(x^*)$.

Сильная двойственность

Если x^* и λ^*есть оптимальные решения соответственно прямой и двойственной задач, то $w(\lambda^*) = f(x^*)$ тогда и только тогда, когда пара (x^*, λ^*) образует седловую точку функции Лагранжа $L(x, \lambda)$.

Решить оптимизационную задачу

$$x_1^2 - x_1 + x_2^2 \to min,$$

$$2x_1 + 4x_2 \le -1,$$

предварительно решив двойственную задачу.

Решение. Здесь $S = \mathbb{R}^2$ обе функции выпуклы.

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 \quad \text{и} \quad g_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 + 1$$

Следовательно, по теореме функция Лагранжа

$$L(x, \lambda) = L(x_1, x_2, \lambda_1) = x_1^2 - x_1 + x_2^2 + 2\lambda_1 x_1 + 4\lambda_1 x_2 + \lambda_1$$

имеет седловую точку $(x^* \lambda^*)$ и $f\ (x^*) = w(\lambda^*)$.

Минимум по x функции $L(x,\lambda)$ найдём из условий оптимальности первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} L(x,\lambda) = 2x_1 - 1 + 2\lambda_1 = 0 \ \Rightarrow x_1 = 1/2 - \lambda_1$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} L(x,\lambda) = 2x_2 + 4\lambda_1 = 0 \ \Rightarrow x_2 = -2\lambda_1$$

Подставляя $x_1 = 1/2 - \lambda_1$ и $x_2 = -2\lambda_1$ в выражение для $L(x,\lambda)$, получим двойственную функцию

$$\omega(\lambda_1) = (1/2 - \lambda_1)^2 - (1/2 - \lambda_1) + 4\lambda_1^2 + -2\lambda_1(1/2 - \lambda_1) - 8\lambda_1^2 + \lambda_1$$
$$= -5\lambda_1^2 + 2\lambda_1 - 1/4$$

Как и должно быть, двойственная функция вогнута. Её максимум найдём из условия:

$$\omega'(\lambda_1) = -10\lambda_1 + 2 = 0.$$

Откуда, $\lambda_1^* = 1/5$ и

$$x_1^* = 1/2 - \lambda_1^* = 1/2 - 1/5 = 3/10, \qquad x_2^* = -2\lambda_1^* = -\,2/5.$$

Вычислим

$$\omega(\lambda_1^*) = -\,1/5^2 + 2/5 - 1/4 = 1/5 - 1/4 = -\,1/20,$$

$$f(x_1^*, x_2^*) = (3/10)^2 - 3/10 + (2/5)^2 = (9 - 30 + 16)/100 = -\,1/20,$$

чтобы убедиться в справедливости равенства $\omega(\lambda_1^*) = f(x_1^*, x_2^*)$.

Разрыв двойственности

В тех случаях, когда сильная теорема двойственности не выполняется, говорят, что имеет место *разрыв двойственности*, величина которойго равна $f(x^*) - \omega(\lambda^*)$, где x^* и λ^*есть оптимальные решения соответственно прямой и двойственной задач. К сожалению, разрыв двойственности присущ очень многим важным классам оптимизационных задач. Как правило, задачи с разрывом двойственности очень трудны с вычислительной точки зрения. В частности, разрыв двойственности имеет место в задачах целочисленного программирования.

Вычислить разрыв двойственности

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \to min,$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 3,$$
$$x_1, x_1, x_1 \in \{0,1\}.$$

Решение. Здесь $S = \{0,1\}^3$ и

$$f(x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3,$$
$$g_1(x) = -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3.$$

Поэтому функция Лагранжа имеет следующий вид:

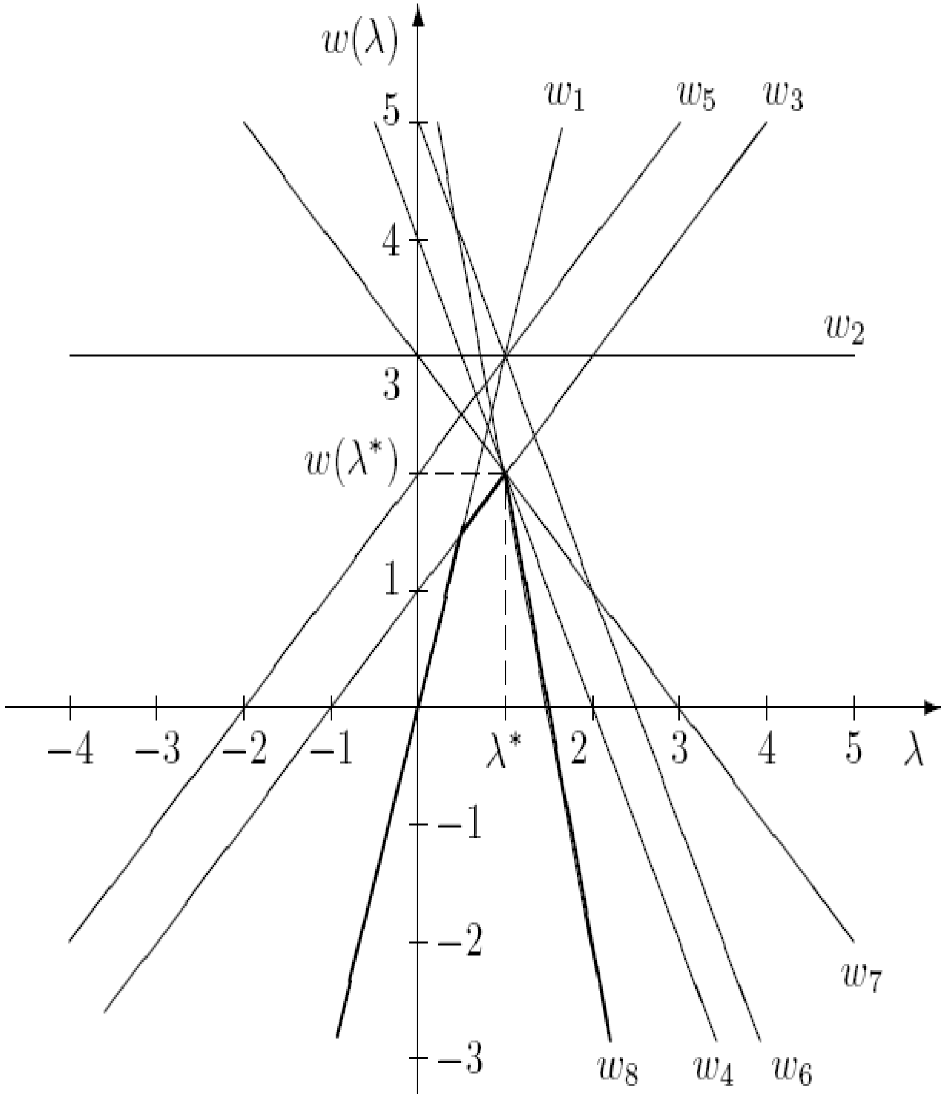
$$L(x,\lambda) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + \lambda(3 - 2x_1 - 2x_2 - 3x_3).$$

Теперь запишем двойственную функцию

$$\omega(\lambda) = \min_{x\epsilon\{0,1\}^3} L(x,\lambda) = \min_{1\le i\le 8} \omega_i(\lambda),$$

где векторы x^i и функции $\omega_i(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} L\left(x^i,\lambda\right)$ представлены в следующей таблице:

Сначала рисуем графики линейных функций $\omega_i(\lambda)$



i	x^i	$\omega_i(\lambda)$
1	(0,0,0)	3λ
2	(0,0,1)	3
3	(0,1,0)	$1+\lambda$
4	(0,1,1)	$4-2\lambda$
5	(1,0,0)	$2+\lambda$
6	(1,0,1)	$5-2\lambda$
7	(1,1,0)	$3-\lambda$
8	(1,1,1)	$6-4\lambda$

строим нижнюю огибающую

Это и есть график функции $\omega(\lambda)$.

В точке λ^* максимума функции $\omega(\lambda)$ пересекаются графики функций $\omega_3(\lambda)$ и $\omega_8(\lambda)$. Из уравнения $\omega_3(\lambda) = \omega_8(\lambda)$ найдем λ^*:

$$1 + \lambda = 6 - 4\lambda \Longrightarrow \lambda^* = 1.$$

Теперь вычислим $\omega(\lambda^*) = \omega_3(\lambda^*) = 1 + \lambda^* = 2.$

В задаче – два оптимальных решения: $x^2 = (1,1,0)$ и $x^0 = (0,0,1)$

$f(x)^* = f(x^0) = 3.$

Разрыв двойственности для задачи равен $f(x)^* - \omega(\lambda^*) = 1 > 0.$

Экономическая интерпретация ланражевой двойственности

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Предположим, что вектор *x* описывает операционный план фирмы, а $f(x) = -c(x)$, где $\mathrm{c}(x)$ есть чистая прибыль фирмы, использующей план *x*. Неравенства $g_i(x) = r_i(x) - b_i \leq 0, i \in I = \{1, \dots, m\}$ – представляют ограничения на ресурсы (труд, электроэнергию, складские помещения ит. д.), или выражают лимиты, установленные регулирующими органами(например, на выброс парниковых газов). Чтобы найти операционный план, приносящий наибольшую прибыль, нужно решить оптимизационную задачу (***) , где включение $\mathrm{x} \in S$ представляет другие (нересурсные) ограничения. Если *x** - оптимальный операционный план, то - $f(x^*)$ - наибольшая чистая прибыль фирмы.

$$f(x) \longrightarrow \min,$$
$$g_i(x) \leq 0, i \in I = \{1, \dots, m\},$$
$$x \in \mathbb{R}^n$$

Теперь представим иной сценарий, в котором ресурсные ограничения могут нарушаться за определенную плату: используя план x, плата за ресурс i равна $\lambda_i g_i(x)$, где $\lambda_i \geq 0$ есть *цена* ресурса i. Если имеется перерасход ресурса i, $g_i(x)$, то фирма платит за ресурс сумму $\lambda_i g_i(x)$. Если ресурс i не используется полностью, $g_i(x) < 0$, то фирма получает сумму $-\lambda_i g_i(x)$. Скажем, если неравенство $g_i(x) \leq 0$задает ограничение на складские помещения, то λ_i - это стоимость одного квадратного метра складских помещений; фирма может как арендовать дополнительные площади, так и сама сдавать в аренду неиспользуемые складские помещения.

В этом новом сценарии суммарные издержки фирмы, использующей m план x, равны $L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$. Стремясь минимизировать издержки, фирма находит свой оптимальный план $x(\lambda)$, решая оптимизационную задачу

$$\omega(\lambda) = min\{L(x, \lambda) : x \in X\}.$$

Это значит, что значение $-\omega(\lambda)$ двойственной функции Лагранжа, взятое с обратным знаком, есть оптимальная прибыль фирмы при ценах на ресурсы, заданных вектором λ.

Используя представленную выше интерпретацию, мы можем перефразировать слабую теорему двойственности следующим образом:

при любых ценах на ресурсы оптимальная прибыль фирмы в ситуации, когда разрешено продавать и покупать ресурсы, не меньше оптимальной прибыли фирмы в ситуации, когда покупать и продавать ресурсы нельзя.

При этом величину разрыва двойственности можно интерпретировать как наименьшую возможную выгоду (при самых неблагоприятных ценах на ресурсы), которую может получить фирма, от возможности покупать и продавать ресурсы.

Теперь рассмотрим случай, когда справедлива сильная теорема двойственности и $f(x^*) = \omega(\lambda^*)$есть оптимальное решение двойственной задачи (**). В таком случае λ^* можно интерпретировать как вектор цен ресурсов, при которых фирма не получает выгоды от покупки и продажи ресурсов. Поэтому компоненты вектора λ^* называют *теневыми ценами* ресурсов.

При выполнении сильной теоремы двойственности должно выполняться условие дополняющей нежесткости 23

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \qquad i = 1, \dots, m,$$

из которого следует, что

теневые цены не полностью использованных ресурсов равны нулю.

Действительно, если $g_i(x^*) < 0$, то из $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$ следует, что $\lambda_i^* = 0$.

Неоклассическая задача потребления

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Потребитель может потреблять n наборов благ (товары и услуги). Набор благ - это любой вектор x $\in \mathbb{R}^n_+$, где x_i есть количество блага j в наборе x. Потребитель описывается его функцией полезности $U\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, которая

а) дважды непрерывно дифференцируема по всем n аргументам;

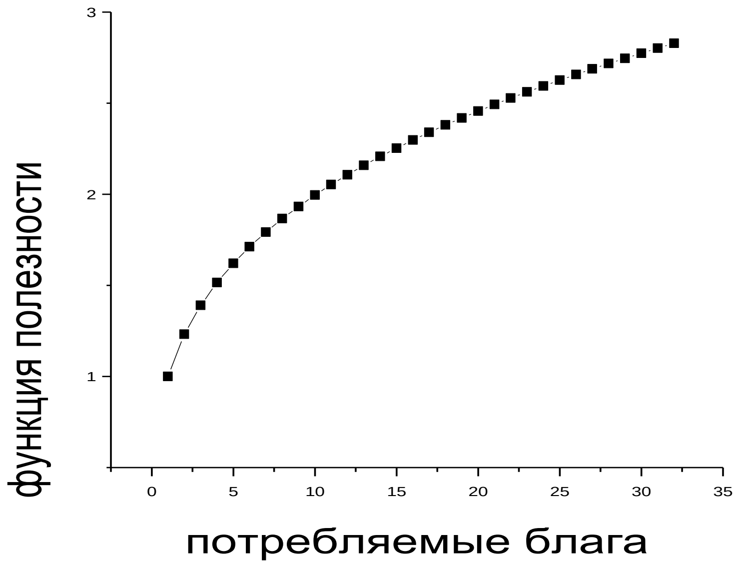
б) неубывающая $\frac{\partial U_{(x)}}{\partial x_j} \geq 0$ для всех $\mathrm{j} = 1, \dots, \mathrm{n}$;

в) вогнутая: в любой точке $x \in \mathbb{R}^n_{++}$матрица вторых производных $\nabla^2 U(x)$ неположительно определена.

Заметим, что более строгий вариант свойства в), когда требуется строгая вогнутость функции U, подразумевает выполнение закона Госсена, который утверждает, что с ростом объема потребления любого блага j его предельная полезность убывает: $\frac{\partial U_{(x)}}{\partial x_j}(x) < 0$.

Неоклассическая задача потребления состоит в максимизации функции полезности на множестве потребления $\mathbb{R}^n_+$ при известных ценах $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ и бюджете (доходе) потребителя I: $max\{U(x)\colon p^T \leq I, x \geq 0\}$.

Функция полезности — функция, с помощью которой можно представить предпочтения на некотором множестве альтернатив. Функция полезности является очень удобным вспомогательным средством, которое открывает возможность использования теории оптимизации при решении задачи потребителя. Без использования функции полезности решение такой задачи с математической точки зрения может быть затруднительным. С другой стороны, не каждое предпочтение может быть представлено с помощью функции полезности. Тем не менее, несмотря на некоторую ограниченность подхода, функция полезности является неотъемлемой частью большинства современных экономических моделей.



Неоклассическая экономическая теория возникла в 1870-е годы.
Неоклассическое направление исследует поведение т. н. экономического человека (потребителя, предпринимателя, наёмного работника), который стремится максимизировать доход и минимизировать затраты. Основные категории анализа — предельные величины (см. Маржинализм). Экономисты неоклассического направления разработали теорию предельной полезности и теорию предельной производительности, теорию общего экономического равновесия, согласно которой механизм свободной конкуренции и рыночного ценообразования обеспечивает справедливое распределение доходов и полное использование экономических ресурсов, экономическую теорию благосостояния, принципы которой положены в основу современной теории государственных финансов (П. Сэмуэльсон), теорию рациональных ожиданий и др.
Во второй половине XIX века наряду с марксизмом возникает и развивается неоклассическая экономическая теория. Из всех её многочисленных представителей наибольшую известность приобрёл английский учёный Альфред Маршалл (1842—1924). Он был профессором, заведующим кафедрой политической экономии Кембриджского университета. А. Маршалл обобщил результаты новых экономических исследований в фундаментальном труде "Принципы экономической теории" (1890).
В своей теории цены А. Маршалл опирается на концепции спроса и предложения. Цена блага определяется соотношением спроса и предложения. В основе спроса на благо лежат субъективные оценки предельной полезности блага потребителями (покупателями). В основе предложения блага лежат издержки производства. Производитель не может продавать по цене, не покрывающей его затраты на производство. Если классическая экономическая теория рассматривала формирование цен с позиций производителя, то неоклассическая теория рассматривает ценообразование и с позиций потребителя (спрос), и с позиций производителя (предложение).

Маржинализм (фр. marginalisme, от лат. margo (marginis) — край) — направление в экономической науке, признающее принцип снижающейся предельной полезности фундаментальным элементом теории стоимости; возникло в 70-е гг. XIX века в форме так называемой «маржинальной революции». Основателями данного направления считаются ученые К. Менгер, У. С. Джевонс и Л. Вальрас. Теоретические подходы, реализованные в ходе «маржиналистской революции», можно найти в более ранних работах А. Карно, Ж. Дюпюи, И. фон Тюнена, Г. Госсена.

Основной причиной возникновения маржинализма считается необходимость поиска условий, при которых данные производительные услуги распределялись бы с оптимальным результатом между конкурирующими направлениями использования. Подобная смена парадигмы экономической теории, в свою очередь, была обусловлена бурным развитием промышленности и прикладных наук.

Важнейшие элементы маржинализма:

- Использование предельных величин.
- Субъективизм, то есть подход, при котором все экономические явления исследуются и оцениваются с точки зрения отдельного хозяйствующего субъекта.
- Гедонизм хозяйствующих субъектов. Человек рассматривался маржиналистами как рациональное существо, целью которого является максимизация собственного удовлетворения.
- Статичность. Изучение использования редких ресурсов для удовлетворения потребностей людей в данный момент времени.
- Ликвидация приоритета сферы производства, характерного для экономического анализа классиков.
- Восприятие рыночной экономики как равновесной системы.

$$(^*)\quad max\{U(x): p^T x \leq I, x \geq 0\}.$$

Пусть x^0 есть решение задачи $(^*)$ По теореме Куна-Таккера существуют число $\lambda_0 \geq 0$ и вектор $\lambda \in \mathbb{R}_+^n$, что

$$\nabla U(\mathrm{x}^0) = \lambda_{0p} + \lambda,$$

$$\lambda_0(I - p^T \mathrm{x}^0) = 0,$$

$$\lambda_j x_j^0 = 0, j = 1, \dots, n.$$

$\frac{1}{p_j}\frac{\partial U(\mathrm{x}^0)}{\partial x_j} = \lambda_0,$ для всех j, для которых $x_j^0 > 0,$

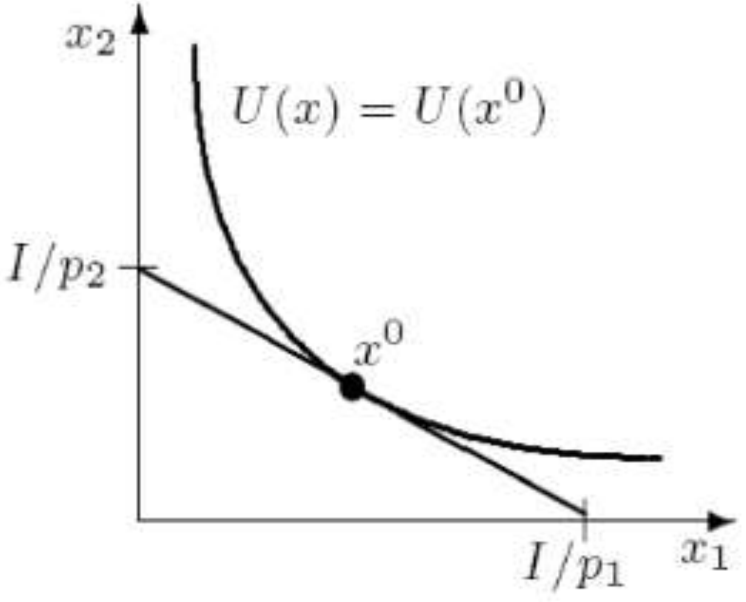
т.е. отношения *предельной полезности* $\frac{\partial U(\mathrm{x}^0)}{\partial x_j}$ к цене p_j должно быть одинаковым для всех закупленных товаров j. Считая, что некоторые товары были куплены из (**) следует, что оптимальный множитель λ_0 должен быть положительным. Тогда из (*) следует, что весь доход должен быть израсходован: $I - p^T\mathrm{x}^0 = 0$.

$$\frac{1}{p_j}\frac{\partial U(\mathrm{x}^0)}{\partial x_j} = \lambda_0, \qquad (**)$$

$$\lambda_0(I - p^T\mathrm{x}^0) = 0, \qquad (*)$$

Будем считать, что потребители покупают все виды товаров и услуг(в противном случае можно уменьшить размерность пространства товаров, исключая из рассмотрения не покупаемые товары). Тогда условия примут вид

$$\nabla U(x^0) - \lambda_{0p} = 0, \qquad I - p^T \mathrm{x}^0 = 0.$$



Мы видим, что оптимальное решение x^0 задачи потребления является точкой касания бюджетной гиперплоскости $p^T \mathrm{x} = I$ поверхностью безразличия $U(x) = U(x^0)$. Исходя из этого наблюдения, ответьте наследующий вопрос: как изменится набор потребления, если цена продукта 1 увеличится?

Модель равновесия Фишера

Рассмотрим рынок с *n* делимыми *продуктами* и *m потребителями*. Предположим, что на рынке имеется b_j единиц продукта *j*, а потребитель *i* обладает суммой денег a_i, и $U_i\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ есть его функция полезности, которая является неубывающей и вогнутой.

Говорят, что вектор цен $p = (p_1, \dots, p_n)^T$ *освобождает рынок*, если для оптимальных векторов потребления

$$x^{-i} \in \arg max \left\{ U_i(x)\colon \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \le a_i, x \in \mathbb{R}^n_+ \right\}, \ i = 1, \dots, m,$$

каждый потребитель полностью тратит все свои деньги и все продукты потребляются полностью

$$\sum_{i=1}^{m} x_j^{-1} = b_j, \qquad j = 1, \dots n. \qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^{-i} = a_j, \qquad i = 1, \dots m.$$

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

г. Томск, ул. Вершинина, 47, офис 434

e-mail: aleksandr.i.sukhanov@tusur.ru

тел.: (3822) 70-15-36