ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Исследование операций

Лекция 4

Доцент каф. АСУ: Суханов А.Я.

Метод ограничений

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

В методе уступок и методе идеальной точки, заданные критерии по степени важности неразличимы.

Однако нередко приходится сталкиваться с ситуациями, в которых подобное равноправие критериев нарушено, и у каждого из них есть свой вес.

Метод свертывания и метод ограничений показывают, как можно решать многокритериальную задачу с критериями, разными по степени важности.

Общая постановки линейной многокритериальной задачи

TYCYP
TUSUR UNIVERSITY

Задача

Предположим заданными область изменения допустимых значений переменных $x_1, \dots x_n$ определяемую совокупностью линейных уравнений и неравенств, и набор критериев $Cr_1, \dots Cr_n$, оценивающих качество искомого решения.

Будем считать, что каждый из этих критериев линейно связан с переменными $x_1, \dots x_n$

$$Cr_i = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ik} x_k$$

Где γ_{ik} - известные числа

В области ω требуется найти такой набор переменных $(x_1, \dots x_n)$, при котором по всем критериям достигались бы максимальные значения, $Cr_1 \rightarrow max, \dots, Cr_1 \rightarrow max$

Метод свертывания

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Лицо, принимающее решения, из некоторых, часто доступных только ему соображений назначает веса критериев, $w_1,\dots w_l ,\dots w_m$

$w_1 \geq 0,\dots w_l \geq 0 ,\dots w_m \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{w}_i = 1$$

что позволяет свернуть заданные критерии в один глобальный критерий,

$Cr = w_1 Cr_1 + \dots + w_i Cr_i \dots + w_n Cr_n$ и свести исходную задачу к обычной задаче линейного программирования с одним критерием: найти в области ω такой набор переменных $(x_1,\dots x_n)$, при котором глобальный критерий *Cr* достигает максимального значения

Метод ограничений

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Метод ограничений строится таким образом, что лицо, принимающее решения, определяет веса заданных критериев, опираясь только на количественную информацию о степени их важности, которую оно получает в ходе изучения поставленной задачи. Специально подчеркнем, что в распоряжении лица, принимающего решения, никаких предварительных сведений о сравнительной важности критериев нет.

Общая схема решения

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Для решения многокритериальной задачи методом ограничений требуется несколько шагов (не больше чем m-1, где m — число частных критериев).

1-й шаг, как и следующие за ним, разбивается на ряд этапов. На первом этапе в области допустимых значений ω осуществляется оптимизация отдельно по каждому из критериев (решаются соответствующие задачи линейного программирования). Затем для каждого найденного при этой однокритериальной оптимизации набора неизвестных (x_1 ,… x_n) вычисляются значения всех критериев.

Пусть, например, при оптимизации по критерию $Cr_i, i = 1, \dots, m$, мы получили набор (x_1,… x_n).

Общая схема решения

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Обозначим через $C_{p,i}$ $(p = 1, \ldots, m)$значения критериев для этого набора и составим таблицу:

	Cr_1	…	Cr_i	…	Cr_m
Cr_1	$C_{1,1}$	…	$C_{i,1}$	…	$C_{m,1}$
…	…	…	…	…	…
Cr_i	$C_{1,i}$	…	$C_{i,i}$	…	$C_{m,i}$
…	…	…	…	…	…
Cr_m	$C_{1,m}$	…	$C_{1,m}$	…	$C_{m,m}$

(в i-м столбце помещены значения i-го критерия, вычисленные для наборов, доставляющих максимум каждому из m заданных критериев).

Ясно, что среди значений $Cr_{i,1}$,…, $Cr_{i,i}$,…, $Cr_{i,m}$ критерия Cr_i, наибольшим является Cr_i, $C_{i,i} = max\ C_{p,i}$

Общая схема решения

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Затем проводится нормировка найденных значений критериев к значениям в промежутке [0, 1][0,1] по формулам: $C_{p,i} = \frac{C_{p,i} - \min C_{q,i}}{\max C_{q,i} - \min C_{q,i}}, p = 1, \dots, m$

В случае, когда все значения критериев Cr_i положительны, нормировку проводят немного иначе:

$$C_{p,i} = \frac{C_{p,i}}{\max C_{q,i}}, p = 1, \dots, m$$

В результате получаем относительные (безразмерные) значения для всех критериев:

	Cr_1	…	Cr_i	…	Cr_m
Cr_1	1	…	$C_{i,1}$	…	$C_{m,1}$
…	…	…	…	…	…
Cr_i	$C_{1,i}$	…	1	…	$C_{m,i}$
…	…	…	…	…	…
Cr_m	$C_{1,m}$	…	$C_{1,m}$	…	1

Общая схема решения

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

После нормировки наибольшее значение каждого критерия станет равным единице.

В таблице представлена ценная информация, характеризующая область допустимых значений заданных критериев. Если значения двух столбцов близки в каждой из строк (кроме строк с единицами в этих столбцах), то соответствующие критерии сильно зависимы — изменения других критериев одинаково влияют на эти два. Есть и противоречивые критерии, когда высокая оценка по одному сопровождается низкой по другому.

Общая схема решения

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

По таблице вычисляются веса (индексы) критериев.

Пусть a_i^0— среднее (среднее арифметическое) значение, взятое по всем элементам i-го столбца (кроме равного 1). Вес w_i^0 -го критерия определяется формулой:

$$w_i^0 = \frac{1 - a_i^0}{\sum_{p=1}^{n}(1 - a_p^0)}$$

Найденный вес — это своеобразный коэффициент внимания, которое следует уделять i-му критерию при поиске решения. Предположим, к примеру, что все элементы i-го столбца в таблице близки к 1. Тогда среднее значение a_i^0 , также будет близко к 1, 1 - a_i^0 будет мало, малым будет и соответствующий вес w_i^0.

Общая схема решения

TУСУР TUSUR UNIVERSITY

Следующий этап — оптимизация по глобальному критерию:

$$Cr_g^0 = w_1^0 Cr_1 + \ldots + w_i^0 Cr_i + \ldots + w_m^0 Cr_m$$

отыскание $x_1^0, \ldots, x_n^0$, вычисление соответствующих значений критериев $Cr_1^0, \ldots, Cr_n^0$ и предъявление результатов лицу, принимающему решения (руководителю).

Анализ лицом, принимающим решения, предъявленных результатов — следующий важнейший этап.

Сначала, сравнивая компоненты вектора утопии: $z^0 = \{\max Cr_1, \ldots, \max Cr_m\}$

с только что найденными значениями критериев: $y^0 = \{Cr_1^*, \ldots, Cr_m^*\}$,

лицо, принимающее решения, отвечает на вопрос: все ли компоненты вектора y^0 имеют удовлетворительные значения?

Общая схема решения

ТУСУР TUSUR UNIVERSITY

Если **да**, то искомое решение получено. Если **нет**, то лицо, принимающее решения, выделяет (один) критерий с наименее удовлетворительным значением (пусть это будет критерий Cr_i) и просит назначить для критерия Cr_i пороговое значение l_i, признавая тем самым, что приемлемо любое значение этого критерия, удовлетворяющее условию: $Cr_i \geq l_i$.

Неравенство $Cr_i \geq l_i$ накладывает на область ω допустимых значений переменных x_1 ,… x_n дополнительное ограничение и сужает ее до ω_0 .

Общая схема решения

Начинается с этапа расчета для новой области допустимых значений.

При этом число критериев на единицу меньше исходного.

Завершается 2-й шаг выбором порогового значения для еще одного критерия.

Вследствие того что набор критериев конечен и на каждом шаге их число уменьшается на единицу, этот процесс рано или поздно подойдет к концу, и приемлемые значения будут получены по всем критериям.

Пример

Область ω допустимых значений неизвестных xx и yy задана системой неравенств:

$$\begin{cases} 2x + y - 13 \leq 0, \\ x - 3y + 11 \geq 0, \\ x \geq 1, \\ 2x + 5y - 17 \geq 0. \end{cases}$$

Требуется найти в области ω такую точку, в которой каждый из трех критериев Cr_1 , Cr_2 и Cr_3 достигает максимального значения:

$$Cr_1 = 2x - 7y + 35 \to \max,$$

$$Cr_2 = -2x + 19y + 25 \to \max,$$

$$Cr_3 = -14x - 3y + 95 \to \max\,.$$

Решение

Область ω представляет собой четырехугольник ABCD с вершинами A(6,1), B(4,5), C(1,4), D(1,3).

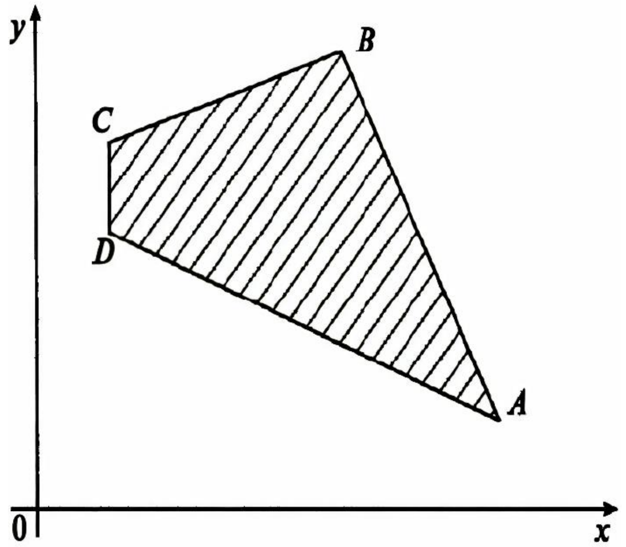
Его стороны лежат на прямых:

$$AB : 2x + y - 13 = 0,$$

$$BC : x - 3y + 11 = 0,$$

$$CD : x = 1,$$

$$DA : 2x + 5y - 17 = 0.$$



Решение

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

1-й шаг. Вычислим в каждой вершине этого четырехугольника значения всех трех критериев:

	Cr_1	Cr_2	Cr_3
A	40	32	8
B	8	112	24
C	9	99	69
D	16	80	72

Это позволит нам решить в области ABCDABCD три обычных задачи линейного программирования по критериям Cr_1 , Cr_2 , Cr_3 .

Решение

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Это позволит нам решить в области ABCD три обычных задачи линейного программирования:

1) по критерию Cr_1 — он достигает максимального значения 40 в точке A,

2) по критерию Cr_2 — он достигает максимального значения 112 в точке D

3) по критерию Cr_3 — он достигает максимального значения 72 в точке D.

В таблице представлены значения каждого из этих трех критериев в точках A, B и D, доставляющих максимум критериям Cr_1 , Cr_2 и Cr_3 соответственно

	$\boldsymbol{Cr_1}$	$\boldsymbol{Cr_2}$	$\boldsymbol{Cr_3}$
Cr_1	<u>40</u>	32	8
Cr_2	8	<u>112</u>	24
Cr_3	16	80	<u>72</u>

Решение

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Пронормируем значения критериев в таблице по формулам (*).

Имеем:

	$\boldsymbol{Cr_1}$	$\boldsymbol{Cr_2}$	$\boldsymbol{Cr_3}$
Cr_1	$\underline{1}$	0	0
Cr_2	0	$\underline{1}$	1/4
Cr_3	1/4	3/5	$\underline{1}$

Решение

Вычисляя средние значения в каждом из столбцов таблицы (исключая равные 1),

$$a_1^0 = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}, a_2^0 = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{3}{5}\right) = \frac{3}{10}, a_3^0 = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$$

получаем

$$1 - a_1^0 = \frac{7}{8}, 1 - \ a_2^0 = \frac{7}{10}, 1 - a_3^0 = \frac{7}{8}$$

Отсюда следует, что технические веса равны

$$w_1^0 = \frac{5}{14}, w_2^0 = \frac{4}{14}, w_3^0 = \frac{5}{14}$$

соответственно.

Глобальный критерий

$$Cr_{gl}^0 = \frac{5}{14}(2x - 7y + 35) + \frac{4}{14}(-2x + 19 + 25) + \frac{5}{14}(-14x - 3y + 95)$$

после приведения подобных преобразуется к виду

$$Cr_{gl}^0 = \frac{1}{7}(-34x + 13y + 375)$$

Решение

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Решая задачу $Cr_{gl}^{0} \to max$ в четырехугольнике ABCD, получаем, что максимального значения глобальный критерий достигает в точке C(1,4).

Сравним вектор утопии $\boldsymbol{z}^{\mathbf{0}}$**= {40, 112, 72}** составленный из максимальных значений критериев Cr_1 , Cr_2 и Cr_3 , с вектором $\boldsymbol{y}^{\mathbf{0}}$ **= {9, 99, 69}**, компоненты которого — это значения этих же критериев, вычисленные в точке C, доставляющей максимум глобальному критерию Cr_{gl}^{0} .

Если лицо, принимающее решения, считает, что все компоненты вектора имеют приемлемые значения, то искомое решение получено — это $Cr_1 = 9$, $Cr_2 = 99$, $Cr_3 = 6$

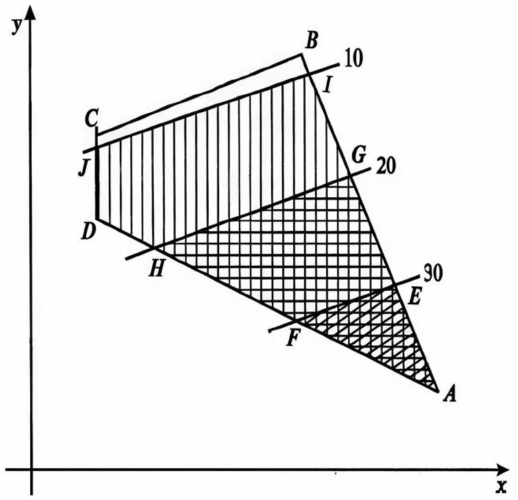
при x = 1 и y = 4

Решение

Будем считать, что лицо, принимающее решения, полученным результатом не удовлетворено. Тогда оно (это лицо) должно выделить критерий с наименее приемлемым значением. Пусть это критерий *Cr1*. Для него лицом, принимаюцим решения, назначается норог *l1* = 20, ниже которого значения 1-го критерия не должны опускаться.

Чтобы дать возможность лицу, принимаюшему решения, принять более взвешенное решение, найдем максимально возможные значения двух других критериев *Cr2* и *Cr3* при следующих ограничсниях, накладываемых на критерий *Cr1*.

$Cr_1 \geq 30,\ Cr_1 \geq 20$ и $Cr_1 \geq 10$



Для этого достаточно нодсчитать эти значения в треугольнике *AEF* в треугольнике *AGH* в четырехугольнике *AIJD*

Решение

Треугольник AEF с вершинами: $A(6,1)$, $E(\frac{43}{8},\frac{9}{4})$, $\mathrm{F}\left(\frac{47}{12},\frac{11}{6}\right)$

Треугольник AGH с вершинами: $A(6,1)$, $G(\frac{19}{4},\frac{7}{2})$, $\mathrm{H}\left(\frac{11}{6},\frac{8}{3}\right)$

Четырехугольник AIJD с вершинами: $A(6,1)$, $I(\frac{33}{8},\frac{19}{4})$, $\mathrm{J}\left(1,\frac{27}{7}\right)$, $\mathrm{D}(1,3)$

Сравниваем решения (результаты проведенных вычислений занесены в таблицу):

	$\boldsymbol{Cr_1 \geq 30}$	$\boldsymbol{Cr_1 \geq 20}$	$\boldsymbol{Cr_1 \geq 10}$
Cr_2	57	82	107
Cr_3	104/3	184/3	72

При анализе таблицы лицо, принимающее решение, выбирает условие $Cr_1 \geq 10$.

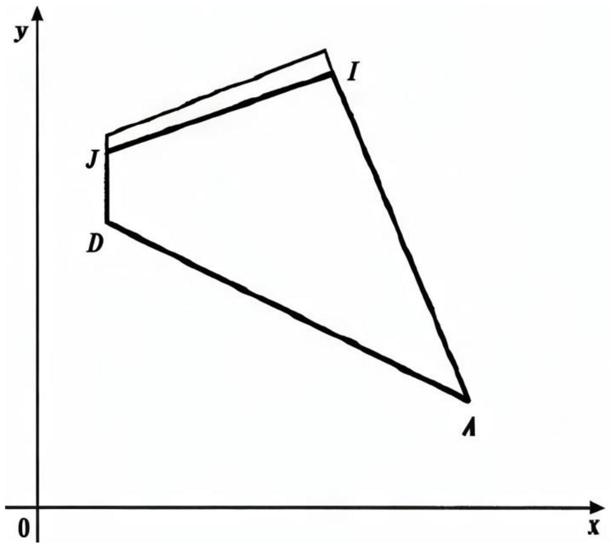
Конец 1-го шага

Решение

2-й шаг. Новая область $\omega^0 \subset \omega$ допустимых значений переменных x и y описывает неравенствами

$$\begin{cases} 2x + y - 13 \le 0 \\ x - 3y + 11 \ge 0 \\ x \ge 1 \\ 2x + 5y - 17 \ge 0 \\ 2x - 7y + 35 \ge 10 \end{cases}$$

(к исходным неравенствам, описывающим область ω, добавлено неравенство $Cr_1 = 2x - 7y + 35 \ge 10$, полученное в конце 1-го шага) и представляет собой четырехугольник $AIJD$



Решение

Проведем оптимизацию в области ω^0 по каждому из двух оставшихся критериев Cr_2 и Cr_3.

В таблицах представлены значения этих критериев в точках I и D, доставляющих максимальные значения критериям Cr_2 и Cr_3 соответственно.

	Cr_2	Cr_3
Cr_2	107	23
Cr_3	80	72

Нормируя значения критериев таблицы по формулам $C_{p,i} = \frac{C_{p,i} - \min C_{q,i}}{\max C_{q,i} - \min C_{q,i}}, p = 1, \dots, m$

Получим:

	Cr_2	Cr_3
Cr_2	107	23
Cr_3	80	72

Отсюда находим средние

$a_1^{00} = \frac{80}{107} = 0.75,$ $a_2^{00} = \frac{23}{72} = 0.32$

Далее находим технические веса

Решение. Технические веса

TУСУР
TUSUR UNIVERSITY

$$w_1^{00} = \frac{0.25}{0.93} = 0.27, \qquad w_2^{00} = \frac{0.68}{0.93} = 0.73$$

Это позволяет сформировать новый глобальный критерий

$$Cr_{gl}^{00} = 0.27(-2x + 19 + 25) + 0.73(-14x - 3y + 95) = -10.76x + 2.94y + 76.10$$

который достигает наибольшего значения в точке

$$J\left(1, \frac{27}{7}\right)$$

Для отыскания максимума достаточно сравнить его значения в вершинах четырехугольника *AIJD*:

$$Cr_{gl}^{00}(A) = -10.76 \cdot 6 + 2.94 \cdot 1 + 76.10,$$

$$Cr_{gl}^{00}(I) = -10.76 \cdot \frac{33}{8} + 2.94 \cdot \frac{19}{4} + 76.10,$$

$$Cr_{gl}^{00}(J) = -10.76 \cdot 1 + 2.94 \cdot \frac{27}{7} + 76.10,$$

$$Cr_{gl}^{00}(D) = -10.76 \cdot 1 + 2.94 \cdot 3 + 76.10.$$

Решение

Вычислив в точке J значение критериев Cr_2 *и* Cr_3: $Cr_2 = 96\frac{2}{7}$, $Cr_3 = 69\frac{3}{7}$

Построим вектор: $y^{00} = \{96\frac{2}{7}, 69\frac{3}{7}\}$

Предположим, что, сравнивая его с вектор утопии $z^{00} = \{107, 72\}$ лицо, принимающее решения, заключает, что значение по критерию Cr_2 наименее удовлетворительно, и назначает нижний уровень по этому критерию равным 100. Чтобы дать возможность руководителю принять более взвешенное решение, найдем максимально возможные значения оставшегося критерия Cr_2 при следующихограничениях, накладываемых на критерий Cr_2 : $Cr_2 \geq 105, Cr_2 \geq 100$

Решение

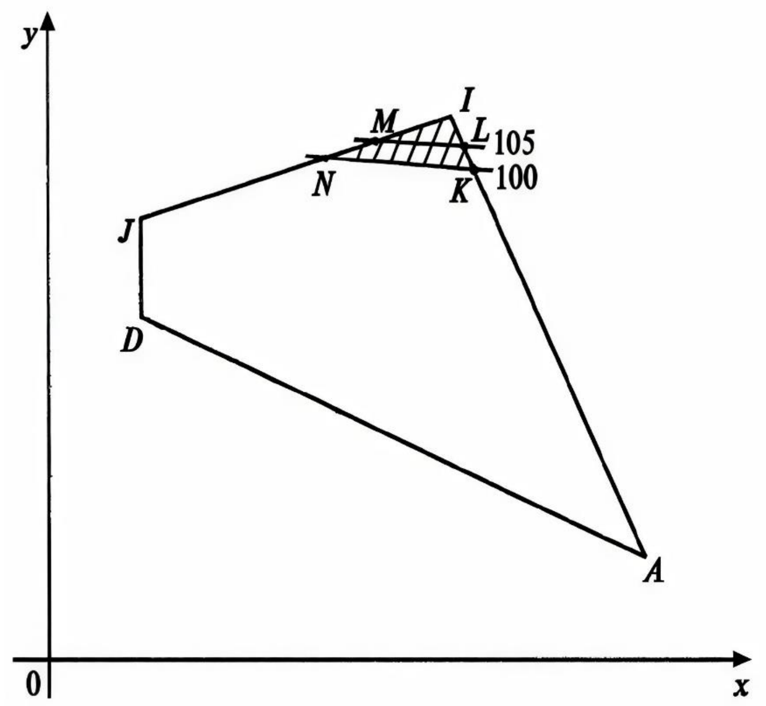
Для этого достаточно нодсчитать эти значения в треугольнике IKN с вершинами

$I\left(\frac{33}{8},\frac{19}{4}\right)$, $K\left(\frac{43}{10},\frac{22}{5}\right)$, $N\left(\frac{25}{12},\frac{25}{6}\right)$

в треугольнике ILM с вершинами

$I\left(\frac{33}{8},\frac{19}{4}\right)$, $L\left(\frac{167}{40},\frac{93}{20}\right)$, $M\left(\frac{85}{24},\frac{55}{12}\right)$

и сравнить.



Решение

Результаты проведенных вычислений занесены в таблицу

	$Cr_2 \geq 105$	$Cr_2 \geq 100$
Cr_3	95/3	160/3

При анализе таблицы лицо, принимающее решение, выбирает условие: $Cr_2 \geq 100$.

Итак, выбор сделан

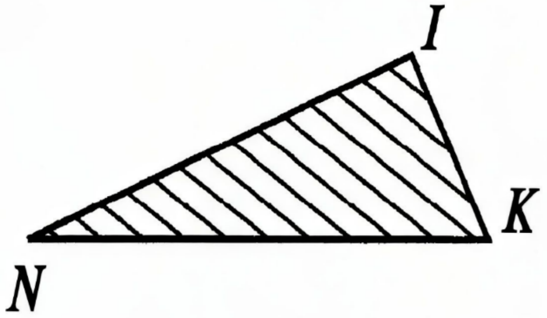
$Cr_1 \geq 10$, $Cr_2 \geq 100$

Конец 2-го шага

Решение

3-й шаг. Новая область $\omega^{00} \subset \omega^0$ допустимых значений переменных x и y описывается неравенствами
неравенствами

$$\begin{cases} 2x + y - 13 \leq 0 \\ x - 3y + 11 \geq 0 \\ x \geq 1 \\ 2x + 5y - 17 \geq 0 \\ 2x - 7y + 35 \geq 10 \\ -2x + 19y + 25 \geq 100 \end{cases}$$



(добавлено неравенство $Cr_2 = -2x + 19y + 25 \geq 100$ полученное в конце 2-го шага) и представляет собой треугольник IKN

Решение. Итог

Проведем оптимизацию в области ω^{00} по оставшемуся критерию Cr_3

$Cr_3 \to max$

Вычисляя его значения в вершинах треугольника IKN,

$$Cr_3(I) = 23, \quad Cr_3(N) = 53\frac{1}{3}, \quad Cr_3(K) = 21\frac{3}{5}$$

получаем, что наибольшего значения критерий Cr_3 достигает в точке N. Теперь остается лишь выписать соответствующие значения переменных x и y,

$$x^0 = \frac{25}{12} \; y^0 = \frac{25}{6}$$

Ответ: приемлемые значения критериев $Cr1$, $Cr2$ и $Cr3$

$$Cr_1 = 10, \quad Cr_2 = 100, \quad Cr_3 = 55\frac{1}{3}$$

достигаются при $x^0 = \frac{25}{12}$ $y^0 = \frac{25}{6}$.

Пример применение метода ограничений

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

В одной работе описано, как метод ограничений был применен для прогнозирования последствий различных вариантов управления кадрами большой организации.

Была построена линейная модель, характеризующая изменения со временем состава персонала организации и продуктивности ее работы.

Проверялись разные стратегии приема на работу и повышения в должности через два, три и четыре года. В качестве переменных рассматривалось количество сотрудников, назначенных на различные должности в определенные промежутки времени.

Пример применение метода ограничений

В модель были заложены следующие зависимости:

- *Эффективность работы сотрудника* линейно зависит от отношения оценки его возможностей к оценке требований, предъявляемых должностью к сотруднику.

- *Удовлетворение сотрудника* во время пребывания на определенной должности сначала возрастает до максимального значения, а затем уменьшается со временем до начального значения, также в зависимости от отношения оценки его возможностей к оценке требований, предъявляемых должностью к сотруднику.

Пример применение метода ограничений

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

И были выбраны следующие четыре критерия:

- Общее удовлетворение кадров (критерий Cr_1).
- Фактическая интенсивность работы кадров (критерий Cr_2).
- Затраты, связанные с приемом на работу дополнительных сотрудников (критерий Cr_3).
- Затраты, связанные с нехваткой кадров по отношению к прогнозируемым потребностям (критерий Cr_4).

Пример применение метода ограничений

С математической точки зрения изучаемая проблема представляет собой задачу линейного программирования с четырьмя критериями качества. Требовалось найти такой набор переменных, при котором каждый из этих четырёх критериев принимает наибольшее значение.

Так как в этом конкретном случае рассматривалась большая организация, то и количество переменных и количество ограничений были велики — 350 и 200 соответственно. Поэтому для её решения были использованы не только интеллектуальные, но и значительные вычислительные ресурсы.

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

г. Томск, ул. Вершинина, 47, офис 434

e-mail: aleksandr.i.sukhanov@tusur.ru

тел.: (3822) 70-15-36

tusur.ru