Исследование операций

Лекция 5

Доцент каф. АСУ: Суханов А.Я.

Марковские случайные процессы

При исследовании различных операций с точки зрения выбора оптимального решения часто возникают ситуации, когда обстановка приведения операции характеризуется случайными неконтролируемыми факторами.

В этом случае операция развивается по схеме случайного процесса, протекание которого зависит от сопровождающих операцию случайных факторов.

В случае стохастических задач исследования операций построение математической модели является достаточно сложным. Исключение составляет особый случай, когда исследуемая операция представляет собой так называемый **марковский процесс.**

Марковские случайные процессы

Количественно случайный процесс описывается случайной функцией времени t, которая может принимать различные значения с заданным распределением вероятностей. То есть для любого $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t_i}$ значение $\xi_i = \xi(t_i)$ является случайной величиной.

Случайный процесс определяется совокупностью функций времени и законами, характеризующими свойства этой совокупности. Каждая из функций этой совокупности называется реализацией случайного процесса. Реализация обозначается $\xi^{(q)}(t)$, где q = 1, 2,... .

Марковские случайные процессы

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

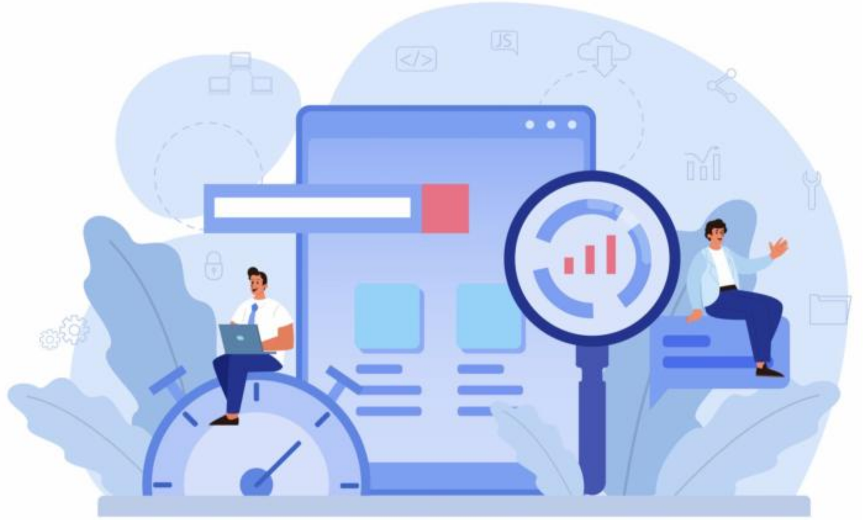
В зависимости от того, принадлежат ли возможные значения времени t и реализации **ξ(t)**, дискретному множеству чисел или интервалу действительных чисел, различают четыре типа случайных процессов:

1. Случайный процесс общего типа: t и **ξ(t)** могут принимать любые значения.

2. Дискретный случайный процесс: t-непрерывно, а значения **ξ(t)** дискретны.

3. Случайная последовательность общего типа: t-дискретно, а **ξ(t)** принимает любые значения.

4. Дискретная случайная последовательность: t и **ξ(t)** дискретны.



Марковские случайные процессы

Для описания случайного процесса используют функции распределения:

1. Одномерная интегральная функция распределения вероятностей случайного процесса:

$F_1(x_1, t_1) = P(\xi(t_1) \leq x_1)$

$\partial F_1(x_1, t_1) / \partial x_1 = f(x_1, t_1)$

Определим n-мерную функцию распределения вероятностей случайного процесса

$F_n(x_1, t_1, \ldots, x_n, t_n) = P\{\xi(t_1) \leq x_1, \xi(t_2) \leq x_2, \ldots, \xi(t_n) \leq x_n\}$

$\partial^n F_n{}^L(x_1, t_1, \ldots, x_n, t_n) / \partial x_1 * \ldots * \partial x_n = f_n(x_1, t_1, \ldots, x_n, t_n)$

Случайный процесс будет марковским, если выполняется условие

$f(x_n, t_n \mid x_1, t_1, \ldots, x_{n-1}, t_{n-1}) = f(x_n, t_n \mid x_{n-1}, t_{n-1})$

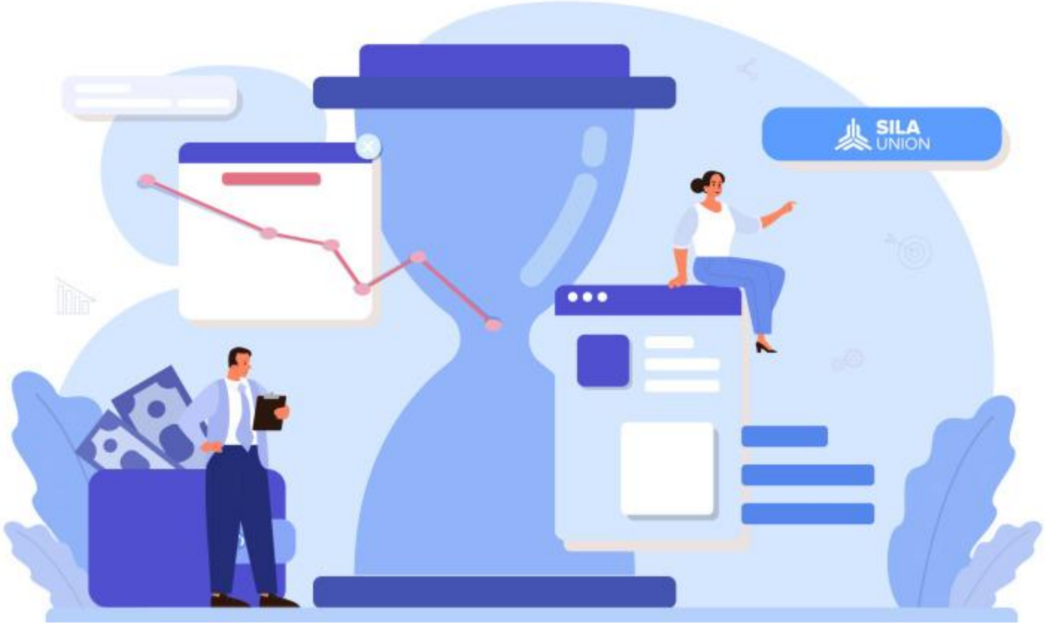
$f(x_1, t_1, \ldots, x_n, t_n) = f(x_1, t_1) * f(x_2, t_2 \mid x_1, t_1) * \ldots * f(x_n, t_n \mid x_{n-1}, t_{n-1})$

Марковские случайные процессы

$f(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1})$ называется **плотностью вероятности перехода.**

Если плотность вероятности перехода зависит от разности $t_i - t_{i-1}$

$f(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) = f(x_i, t_i - t_{i-1} | x_{i-1})$ **то такой процесс называется однородным.**



Пример системы с дискретными состояниями и непрерывным временем

Техническое устройство Q состоит из двух узлов каждый из которых в случайный момент времени может выйти из строя, после чего мгновенно начинается его ремонт, который продолжается случайное время.

Возможные состояния системы:

- **Q0** - оба узла исправны.
- **Q1** - первый узел ремонтируется, а второй исправен.
- **Q2** - второй узел ремонтируется, а первый исправен.
- **Q3** - оба узла ремонтируются. Переход системы Q из состояния в состояние происходит практически мгновенно в случайные моменты времени выхода какого-то узла из строя или состояния его ремонта.

Потоки событий

Для рассмотрения случайных процессов, протекающих в системах с дискретными состояниями и непрерывным временем определим понятие "**поток событий**".

<u>**Потоком событий**</u> *называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени (поток автобусов на данной остановке, поток отказов какой-то системы и т.п.)* Поток событий будем изображать последовательностью точек на оси времени

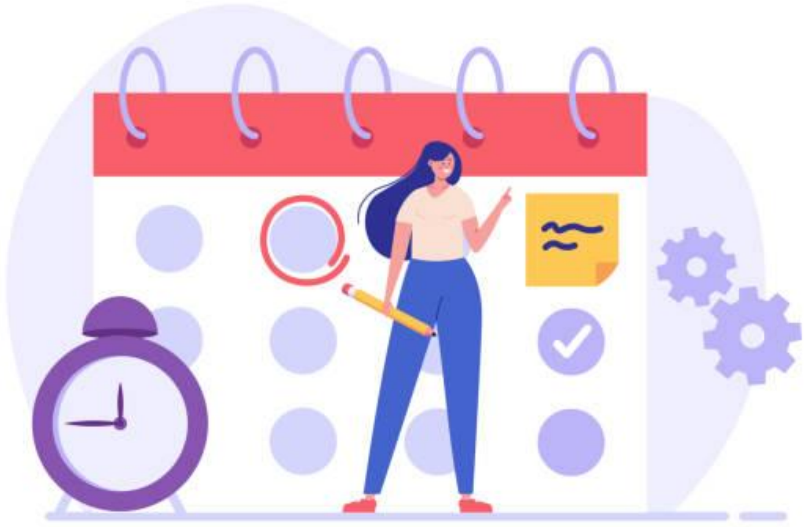
Будем рассматривать потоки событий, обладающие свойствами: стационарность, отсутствие последействия, ординарность.

<u>**Поток событий**</u> *называется простейшим, если он стационарен, однороден и не имеет последействия.*

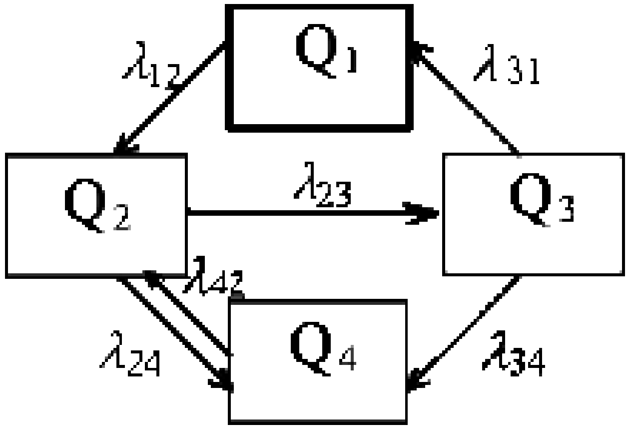
Потоки событий

Для простейшего потока интервал *t* между соседними событиями имеет показательное распределение $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

Поток событий называется рекуррентным или потоком "Пальма“, *если он стационарен, ординарен, а интервалы времени между событиями представляют собой независимые случайные величины с одинаковым произвольным распределением*



Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний



Формула Пуассона → $P(m, \Delta t) = ((\lambda * \Delta t)^m / m!) * e^{(-\lambda * \Delta t)}$

$P(0, \Delta t) = (\lambda * \Delta t)^0 * \exp(-\lambda * \Delta t)/0! \approx 1, \Delta t \to 0$

С учетом ординарности

$P(1, \Delta t) = (\lambda * \Delta t)^1 * \exp(-\lambda * \Delta t)/1! \approx \lambda * \Delta t, \Delta t \to 0$

$P(0, \Delta t) = P(1, \Delta t) \approx 1$, а $P(1, \Delta t) \approx \lambda * \Delta t$

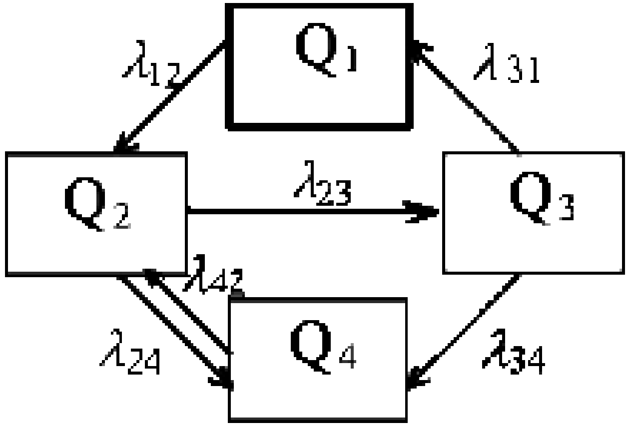
Найдем вероятность $p_1(t)$, что в момент t система будет находиться в состоянии Q_1.
Придадим t приращение Δt и найдем вероятность того, что в момент
$t + \Delta t$ система будет находиться в состоянии Q_1

Это событие может осуществиться двумя способами:

1. В момент t система была в состоянии Q1 и за время Δt из него не вышла;

2. В момент t система была в состоянии Q3 и за Δt перешла в Q1 .

Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний



1.В момент t система была в состоянии Q1 и за время Δt из него не вышла;
Вероятность равна произведению $p_1(t)$ на условную вероятность того, что за Δt не произойдет перехода $Q_1 \rightarrow Q_2$
Условная вероятность, что не произойдет переход равна вероятности события обратному возникновению перехода $1-\lambda_{12}\Delta t$
В целом вероятность события 1 равна $p_1(t)(1-\lambda_{12}\Delta t)$

2. В момент t система была в состоянии Q3 и за Δt перешла в Q1.
$p_3(t)(\lambda_{31}\Delta t)$

$$p_1(t + \Delta t) = p_1(t) * (1 - \lambda_{12} * \Delta t) + p_3(t) * (\lambda_{31} * \Delta t)$$

Получение диф. уравнения

$p_1(t + \Delta t) = p_1(t) * (1 - \lambda_{12} * \Delta t) + p_3(t) * \lambda_{31} * \Delta t$
$p_1(t + \Delta t) = p_1(t) - p_1(t) * \lambda_{12} * \Delta t + p_3(t) * \lambda_{31} * \Delta t$
$p_1(t + \Delta t) - p_1(t) = -p_1(t) * \lambda_{12} * \Delta t + p_3(t) * \lambda_{31} * \Delta t$

Делим на Δt

$$\frac{p_1(t + \Delta t) - p_1(t))}{\Delta t} = -p_1(t) * \lambda_{12} + p_3(t) * \lambda_{31},\ \Delta t \to 0$$

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -p_1(t)\lambda_{12} + p_3(t)\lambda_{31}$$

Переходим к
к пределу при
Δt -> 0

Получение уравнения вероятностей состояний (уравнения Колмогорова)

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda_{12}p_1(t) + \lambda_{31}p_3(t)$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = -\lambda_{23}p_2 - \lambda_{24}p_2 + \lambda_{12}p_1 + \lambda_{42}p_4$$

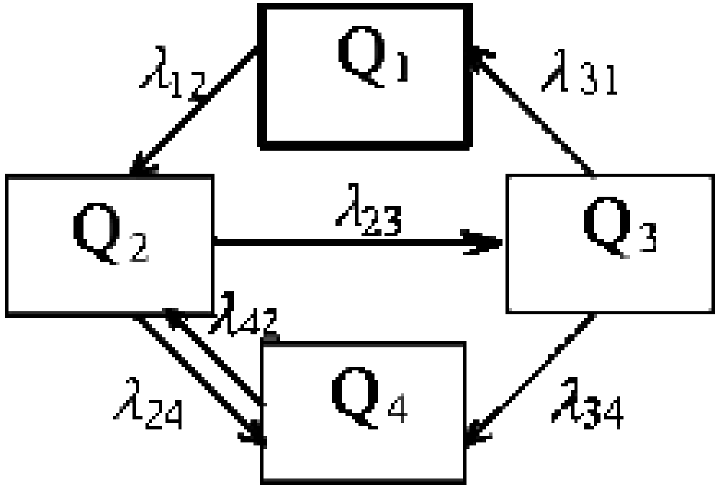
$$\frac{dp_3(t)}{dt} = -\lambda_{31}p_3 - \lambda_{34}p_3 + \lambda_{23}p_2$$

$$\frac{dp_4(t)}{dt} = -\lambda_{42}p_4 + \lambda_{24}p_2 + \lambda_{34}p_3$$

Получение уравнения вероятностей состояний (уравнения Колмогорова)

- Интегрируя эту систему уравнений, можно найти вероятности состояний, как функции времени. Для этого необходимо задать начальные условия при t=0.

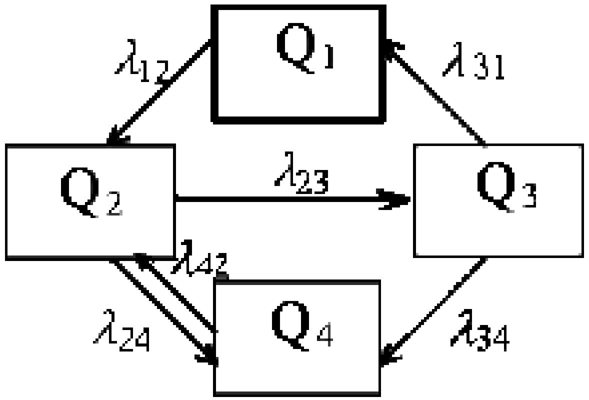
- Например $p_1=p_3=p_4=0$, $p_2=1$ - это означает, что при t=0 система находится в состоянии Q2.



Правило составления дифференциальных уравнений

В левой части каждого уравнения стоит производная вероятности состояния, а правая содержит столько членов, сколько стрелок связано с данным состоянием.
Если стрелка направлена из состояния, соответствующий член имеет знак "-", если в состояние знак "+".

Каждый член равен произведению плотности вероятности перехода, соответствующему данной стрелке, умноженной на вероятность состояния, из которого исходит стрелка.



$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda_{12}p_1(t) + \lambda_{31}p_3(t)$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = -\lambda_{23}p_2 - \lambda_{24}p_2 + \lambda_{12}p_1 + \lambda_{42}p_4$$

$$\frac{dp_3(t)}{dt} = -\lambda_{31}p_3 - \lambda_{34}p_3 + \lambda_{23}p_2$$

$$\frac{dp_4(t)}{dt} = -\lambda_{42}p_4 + \lambda_{24}p_2 + \lambda_{34}p_3$$

Предельные вероятности состояний

Предельные состояния системы $p_1, \dots, p_n$ при $t \to \infty$

Предельные или финальные вероятности характеризуют установившийся стационарный режим, для которого $\frac{dp_i}{dt} = 0$

$$\sum p_i = 1$$

$$\lambda_{31}p_3 - \lambda_{12}p_1 = 0$$
$$-\lambda_{32}p_2 - \lambda_{24}p_2 + \lambda_{12}p_1 + \lambda_{42}p_4 = 0$$
$$-\lambda_{31}p_3 - \lambda_{34}p_3 + \lambda_{23}p_2 = 0$$
$$-\lambda_{42}p_4 + \lambda_{24}p_2 + \lambda_{34}p_3 = 0$$

Использование предельных вероятностей состояний

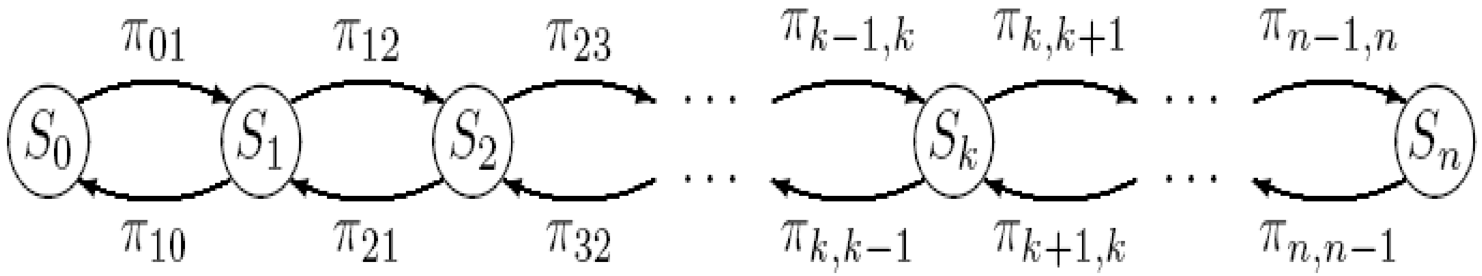
Знание финальных вероятностей можно использовать, например, для оценки эффективности работы всей системы. Если предположить, что, находясь в состоянии Q_i, система приносит доход w_i, тогда средний доход в стационарном режиме равен

$$W = \sum w_i p_i$$

Можно ставить и решать задачу оптимизации системы.

Схема гибели и размножения

Термин «схема гибели и размножения» в биологии описывает изменение численности популяции. Схема гибели и размножения очень часто встречается и в задачах теории массового обслуживания, поэтому мы и начинаем с ее рассмотрения.



Граф состояний для схемы гибели и размножения

S_k – состояние означает: численность популяции равна k

Схема гибели и размножения

Обозначим через $p_k(t)$ вероятность того, что в момент времени t система находится в состоянии S_k. Для достаточно малого $\Delta t > 0$ в момент времени $t + \Delta t$ система окажется в состоянии S_k $(1 < k < n)$:

- с вероятностью $\pi_{k-1,k}\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_{k-1};
- с вероятностью $1 - (\pi_{k,k-1} + \pi_{k,k+1})\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_k;
- с вероятностью $\pi_{k+1,k}\Delta t$, если в момент t она была в состоянии S_{k+1}.

Поэтому справедливо равенство:
$p_k(t + \Delta t) = p_{k+1}(t)\pi_{k+1,k}\Delta t + p_{k-1}(t)\pi_{k-1,k}\Delta t + p_k(t)(1 - (\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})\Delta t)$.

Схема гибели и размножения

Разделив обе части равенства на Δt, получим:

$$\frac{p_k(t+\Delta t) - p_k(t)}{\Delta t} = \pi_{k+1,k}p_{k+1}(t) + \pi_{k-1,k}p_{k-1}(t) - (\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})p_k(t)$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим:

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \pi_{k+1,k}p_{k+1}(t) + \pi_{k-1,k}p_{k-1}(t) - (\pi_{k,k+1} + \pi_{k,k-1})p_k(t),\ k = 1, \ldots, n-1$$

Аналогично можно получить уравнения для k = 0 и k = n:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \pi_{10}p_1(t) - \pi_{01}p_0(t)$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \pi_{n-1,n}p_{n-1}(t) - \pi_{n,n-1}p_n(t)$$

Схема гибели и размножения

Если в системе установился стационарный режим, то все вероятности $p_k(t) = p_k$ постоянны (не зависят от времени). Мы можем вычислить стационарные вероятности $p_0, p_1, \dots, p_n$ состояний системы, решая систему уравнений, основанную на том, что:

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = 0 \text{для } k = 0, 1, \dots, n$$

Для состояния S_0 справедливо равенство:

$$\pi_{01} p_0 = \pi_{10}\, p_1$$

Для состояния S1 имеем:

$$(\pi_{10} + \pi_{12})\, p_{11} = \pi_{01} p_0 + \pi_{21} p_2$$

Последнее равенство приводится к виду:

$$\pi_{12}\, p_1 = \pi_{21}\, p_2$$

Схема гибели и размножения

Далее, совершенно аналогично, получаем равенство:

$$\pi_{23}p_2 = \pi_{32}p_3$$

и для любого $k = 1, \ldots, n$ имеем:

$$\pi_{k-1,k}p_{k-1} = \pi_{k,k-1}p_k$$

Итак, финальные вероятности $p_0, p_1, \ldots, p_n$ удовлетворяют системе:

$$\pi_{01}p_0 = \pi_{10}p_1$$

$$\pi_{12}p_1 = \pi_{21}p_2$$

....

$$\pi_{k-1,k}p_{k-1} = \pi_{k,k-1}p_k$$

....

$$\pi_{n-1,n}p_{n-1} = \pi_{n,n-1}p_n$$

Схема гибели и размножения

$\pi_{01}p_0 = \pi_{10}p_1$, выразим p_1 через p_0:

$$p_1 = \frac{\pi_{01}}{\pi_{10}}p_0$$
$$\pi_{12}p_1 = \pi_{21}p_2$$
$$p_2 = \frac{\pi_{12}}{\pi_{21}}p_1 = (\pi_{01}\,\pi_{12}) \,/\, (\pi_{21}\,\pi_{10})p_0$$

Аналогично выражаем p_3:

$$p_3 = \frac{\pi_{23}}{\pi_{32}}\;p_2 = (\pi_{01}\pi_{12}\,\pi_{23}) \,/\, (\pi_{32}\pi_{21}\pi_{10})\,p_0$$

В общем, для любого $k = 1, \ldots, n$ имеем:

$$p_k = (\pi_{01}\pi_{12}\ldots\pi_{k-1,k}) \,/\, (\pi_{k,k-1} \ldots \pi_{21}\,\pi_{10})p_0$$

Схема гибели и размножения

$$p_k = (\pi_{01}\pi_{12} \ \dots \ \pi_{k-1,k}) \ / \ (\pi_{k,k-1} \ \dots \ \pi_{21} \ \pi_{10}) \ p_0$$

Заметим, что в формуле числитель есть произведение всех интенсивностей, стоящих у дуг, ведущих слева направо от состояния S_0 до состояния S_k, а знаменатель есть произведение всех интенсивностей, стоящих у дуг, ведущих справа налево от состояния S_k до состояния S_0.
Таким образом, все вероятности состояний p_1, …, p_n выражаются через состояние p_0.
Подставив эти выражения в нормировочное равенство:

$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1,$$

Найдем:

$$p_0 = (1 + \frac{\pi_{01}}{\pi_{10}}) + (\pi_{01}\pi_{12}) \ / \ (\pi_{21} \ \pi_{10}) + \dots + (\pi_{01}\pi_{12} \dots \pi_{n-1,n}) \ / \ (\pi_{n,n-1} \dots \pi_{21} \ \pi_{10}))$$

Теория массового обслуживания

- Каждая система массового обслуживания (**СМО**) состоит из одного или нескольких «приборов», которые называются каналами обслуживания. Каналами могут быть: линии связи, билетные кассы, лифты, такси, веб серверы, серверы баз данных и др. СМО могут быть одноканальными и многоканальными.
- Всякая СМО предназначена для обслуживания некоторого потока заявок (или «требований»), которые поступают в случайные моменты времени. Обслуживание заявки продолжается какое-то время (в общем случае продолжительность обслуживания заявки есть случайная величина), после чего канал освобождается и готов к обслуживанию следующей заявки. Случайный характер потока заявок и продолжительности их обслуживания приводит к тому, что в некоторые периоды времени на входе СМО может скапливаться излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными); в другие же периоды отдельные каналы СМО могут простаивать.
- Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем; состояние СМО меняется скачком в моменты, когда появляется новая заявка, или завершается обслуживание некоторой заявки, или заявка, которой надоело ждать в очереди, покидает очередь.
- В дальнейшем, будем предполагать, что все потоки заявок и обслуживаний являются пуассоновскими.

Теория массового обслуживания

Поскольку средняя продолжительность интервала между последовательными событиями $E(T_j) = 1/\lambda$, то параметр λ можно рассматривать как *интенсивность потока*, которая равна среднему количеству событий, происходящих в единицу времени.

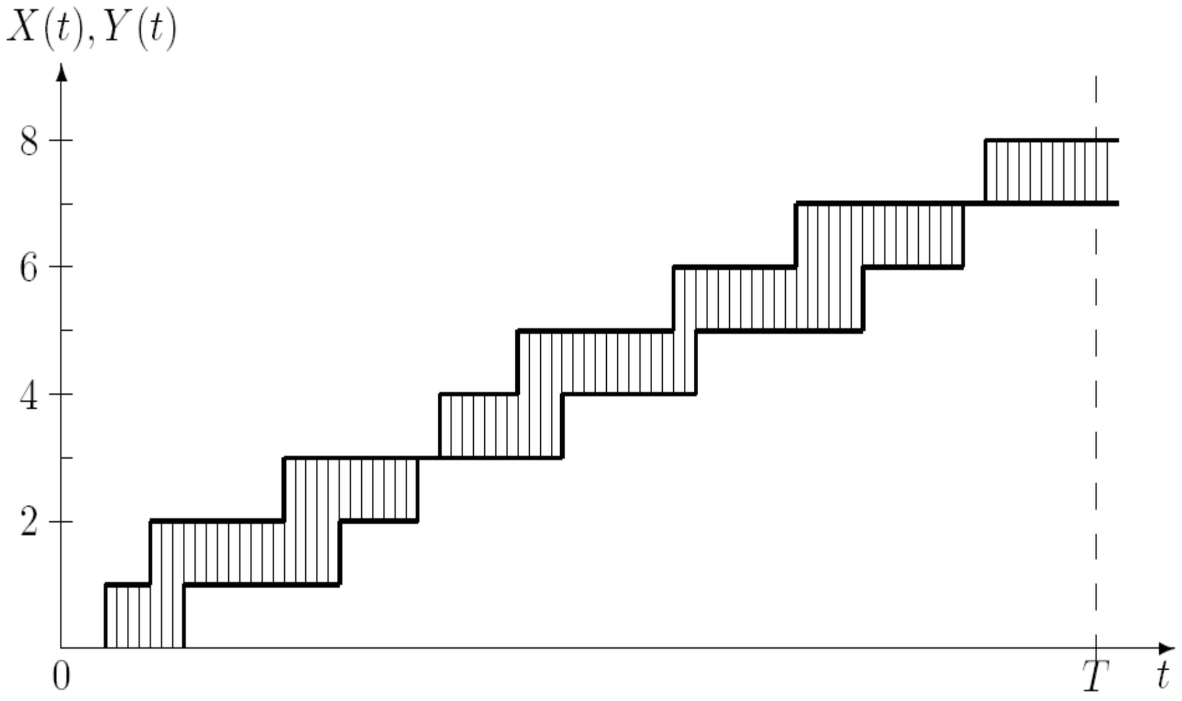
Формулы Литтла

Выведем важную формулу, связывающую (для предельного стационарного режима) среднее число заявок *Lсист* , находящихся в СМО (т. е. обслуживаемых или стоящих в очереди), и среднее время пребывания заявки в системе Wсист .

Рассмотрим любую СМО (одноканальную или многоканальную, марковскую или немарковскую, с неограниченной или с ограниченной очередью, и т. д.) и связанные с нею два потока событий: поток заявок, поступающих в СМО, и поток заявок, покидающих СМО. Если в системе установился предельный стационарный режим, то среднее число заявок, поступающих в СМО, равно среднему числу заявок, покидающих СМО, т. е. оба потока имеют одну и ту же интенсивность λ.

Формулы Литтла

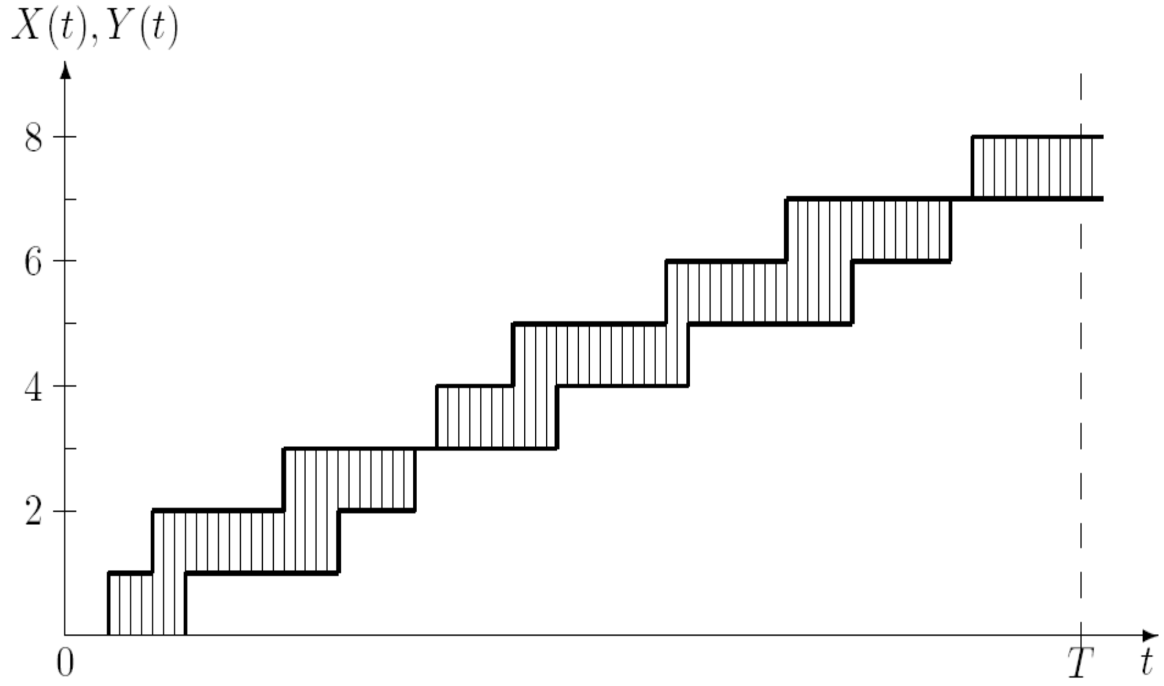
Обозначим через X(t) число заявок, поступивших в СМО до момента времени t, а через Y (t) число заявок, покинувших СМО до момента t. И та и другая функции являются случайными, X(t) увеличиваются на единицу в момент поступления новой заявки, а Y (t) увеличивается на единицу в момент, когда некоторая заявка покидает систему.



Поведение функций X(t) и Y (t) проиллюстрировано на рисунке. Для любого момента t разность Z(t) = X(t) − Y (t) есть число заявок, находящихся в СМО. Когда Z(t) = 0, в системе нет заявок.

Формулы Литтла

Рассмотрим очень большой промежуток времени Т и вычислим для него среднее число заявок, находящихся в СМО. Среднее число заявок будет равно:



$$\frac{1}{T}\int_0^T Z(t)dt$$

Формулы Литтла

Отсюда получаем

$$L_{\text{сист}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} L = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T z(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{k(T)} t_k = \lambda \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T\lambda} \sum_{k=1}^{k(T)} t_k$$

Но величина Tλ есть среднее число заявок, поступивших за время T. Поэтому: $\lim_T$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T\lambda} \sum_{k=1}^{k(T)} t_k$$

есть среднее время пребывания заявки в системе $W_{\text{сист.}}$. Итак $L_{\text{сист.}} = \lambda W_{\text{сист.}}$

$$W_{\text{сист.}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист.}}$$

Первая формула Литтла

$$W_{\text{сист.}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист.}}$$

Для любой СМО, при любом характере потока заявок, при любом распределении времени обслуживания, при любой дисциплине обслуживания среднее время пребывания заявки в системе равно среднему числу заявок в системе, деленному на интенсивность потока заявок.

Вторая формула Литтла

Вторая формула Литтла, связывающая среднее время пребывания заявки в очереди Wоч и среднее число заявок в очереди Lоч

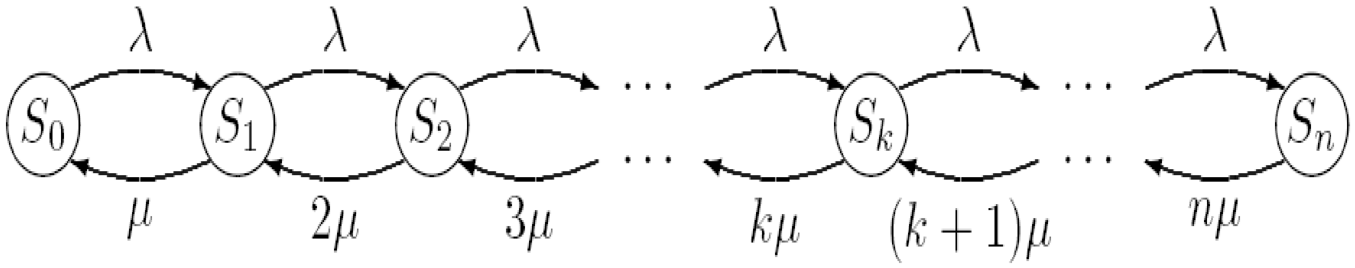
$$W_{\text{сист.}} = \frac{1}{\lambda} L_{\text{сист}}$$

Для вывода формулы достаточно заменить функцию Y на функцию U , где U (t) есть количество заявок, покинувших очередь до момента t (если заявка, поступая в систему, обслуживается сразу, не становясь в очередь, то можно считать, что она пробыла в очереди нулевое время).

Многоканальная СМО с отказами

- Одна из первых по времени «классических» задач теории массового обслуживания. Эта задача возникла из практических нужд телефонии и была решена в начале 19-го века датским математиком Эрлангом.
- Имеется n каналов (линий связи), на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживаний имеет интенсивность μ.
- Нужно найти финальные вероятности состояний СМО, а также характеристики ее эффективности:
- • A — абсолютную пропускную способность, т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;
- • Q — относительную пропускную способность, т. е. среднею долю пришедших заявок, обслуженных системой;
- • Pотк — вероятность отказа, т. е. того, что заявка покинет СМО необслуженной;
- • $\bar{k}$ — среднее число занятых каналов.
- Состояние данной СМО определяется числом заявок в системе (в данном случае оно совпадает с числом занятых каналов): S_k — в СМО находится k заявок (k = 1, . . . , n). Граф состояний СМО соответствует схеме гибели и размножения

Многоканальная СМО с отказами



$$p_0 = (1 + (\pi_{01}/\pi_{10}) + \frac{\pi_{01}\pi_{12}}{\pi_{21}\pi_{10}} + \ldots + (\frac{\pi_{01}\pi_{12}\ldots\pi_{n-1,n2}}{\pi_{n,n-1}\ldots\pi_{21}\pi_{100}})^{-1}$$

$$p\_k = (\frac{\pi_{01}\ \pi_{12}\ \ldots\ \pi_{k-1,k}}{\pi_{k,k-1}\ \ldots\ \pi_{21}\ \pi_{100}}) * p_0$$

По формулам предельных вероятностей состояний находим

$$p0 = (1 + \lambda/\mu + \lambda^2/2\mu^2 + \lambda^3/3!\mu^3 + \ldots + \lambda^k/k!\mu^k + \ldots + \lambda^n/n!\mu^n)^{-1}$$

$$p_k = (\lambda^k / k!\mu^k) * p_0,\ k = 1, \ldots, n.$$

Члены разложения являются коэффициентами при p0 в выражениях для p1 , . . . , pn

Формулы Эрланга

Обозначим отношение λ/μ через ρ и назовем его «приведенной интенсивностью потока заявок». Заметим, что ρ есть среднее число заявок, приходящее за среднее время обслуживания одной заявки. Пользуясь этим обозначением, перепишем формулы следующим образом:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} (\rho^k / k!)\right)^{-1}$$

$$p_k = (\rho^k / k!)\ p_0,\ k = 1, \dots, k$$

Определение характеристики СМО

Вероятность того, что пришедшая заявка получит отказ (не будет обслужена) равна:

$$P_{отк} = p_n = (\rho^n / n!) * p_0$$

Далее находим относительную пропускную способность — вероятность того, что пришедшая заявка будет обслужена:

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - (\rho^n / n!) * p_0.$$

Абсолютную пропускную способность получим, умножая интенсивность потока заявок λ на Q:

$$A = \lambda Q = \lambda\ (1 - (\rho^n / n!) * p_0).$$

Среднее число занятых каналов k-

$\bar{k} = 0 * p_0 + 1 * p_1 + 2 * p_2 + \ldots + n * p_n$,

$$\bar{k} = A / \mu$$

$\bar{k} = \rho(1 - (\rho^n / n!)p_0)$

А – средняя интенсивность обслуживания СМО (абсолютная пропускная способность, число обслуженных заявок в единицу времени)
μ – средняя интенсивность обслуживания одним каналом

TУСУР
TUSUR UNIVERSITY

Пример

- Станция связи имеет три канала (n = 3), интенсивность потока заявок 1.5 заявки в минуту, среднее время обслуживания одной заявки 2 минуты. Найти финальные вероятности состояний и характеристики эффективности СМО: A, Q, Ротк , k. Сколько нужно каналов, чтобы удовлетворять не менее 80 % заявок? Какая доля каналов при этом будет простаивать?

Пример

- **Решение.** Здесь $\lambda = 3/2$, $\mu = 1/2$ и $\rho = (3/2)/(1/2) = 3$.
- По формуле вычислим:

$$p_0 = (1 + \lambda/\mu + \lambda^2/2!\mu^2 + \lambda^3/3!\mu^3 + \dots + \lambda^n/n!\mu^n)^{-1}$$

$$p_0 = 1 / (1 + \rho + \rho^2/2 + \rho^3/6) = 1 / (1 + 3 + 9/2 + 27/6) = 1/13$$

Пример

Теперь мы можем вычислить вероятность отказа:

$P_{отк} = p_3 = (\rho^3 / 6) * p_0 = (3/6)^3 * (1/13) = 9/26$

Относительная пропускная способность системы:

$Q = 1 - P_{отк} = 1 - 9/26 = 15/26$

Абсолютная пропускная способность системы:

$A = \lambda Q = (3/2) * (15/26) = 45/52$

И среднее число занятых каналов:

$k = A/\mu = (45/52) / (1/2) = 45/26 = 1.73$ (из 3 каналов)

ТУСУР
TUSUR UNIVERSITY

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

г. Томск, ул. Вершинина, 47, офис 434

e-mail:

тел.: (3822) 70-15-36