Subst, apply and unify

大村伸一

平成 31 年 5 月 2 日

1 概要

$x \leftarrow f(x)$ がどこで拒絶されるのかを洗い直す。そのために、代入の定義から見直す。

2 定義

2.1 Substitution

$\mathcal{V}$ は変数記号の集合、$\mathcal{T}$ は term の集合とする。
代入 Σ は、$\bar{\mathcal{V}} \times \bar{\mathcal{T}}$ の部分集合。ただし、$\bar{X}$ は X の要素のベクトルを示す。
例)
ここでは、変数記号は、x, y, z、定数記号は a, b, c とする。

- $x \leftarrow x$ 空代入
- $x \leftarrow f(y)$ 項の代入
- $x \leftarrow f(x)$ 代入の右辺が変数でなく、同じ変数を含む場合。
- $\{(x, y) \leftarrow (f(y), g(y))\}$ ベクトルの場合

2.2 apply

2.2.1 項への apply

表現 $E[x, y]$ への Substitiontion$(x, y, z) \leftarrow (s, t, u)$ は、表現 E に出現するすべての変数 x, y, z を同時に並行に表現 s, t, u に置き換える操作である。

だから、Substitution を変数ごとに $\{x \leftarrow t, y \leftarrow s\}$ と表現せずに、$(x, y) \leftarrow (t, s)$ と表記する。

もしも $\sigma = \emptyset$ ならば、その値は空表現 (Λ) に縮退する。$E\sigma = \Lambda$ と定義する。空表現は自身を含むすべての表現と等しくない。(無理か?)

2.2.2 代入への apply

代入に対して代入を適用する操作は、unify の処理中に発生するが、ここでは略す。

2.3 Unification

表現 t, s の unification を行う操作は、$unify(t, s)$ または $<t\!:\!s>$ と表記する。
σ $=<t\!:\!s>$ であるとき、$t \cdot \sigma \equiv s \cdot \sigma$ が成り立つ。

3 性質

3.1 unification では $<x\!:\!f(x)>$ は排除される

証明 1
$\sigma =<x\!:\!f(x)>$ ならば、$x \cdot \sigma = f(x) \cdot \sigma = f(x \cdot \sigma)$ である。
σ に変数 x の代入 $x \leftarrow s$ が含まれているならば、これは $s \equiv f(s)$ であることを意味する。
このことから、s は f で始まる表現でありしかも、f の右側が s それ自体でなくてはならない。有限の記号列としてはそのような s は存在しないので、$\sigma =<x\!:\!f(x)>$ は存在しない。

3.2 列の unification

関数記号を持つ項の unification では、実質的にベクトルあるいは列の unification が発生する。
$\sigma =< f(\bar{s}) : f(\bar{t}) >$ はを次のように定義する。
$t \equiv f(t_1, t_2, \ldots, t_k), s \equiv f(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ とする。
このとき、代入の列 $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k$ を次のように定義する。

$$
\begin{aligned}
\sigma_0 &= < s_0 : t_0 > \\
\sigma_1 &= < s_1\sigma_0 : t_1\sigma_0 > \\
& \quad \ldots \\
\sigma_k &= < s_k\sigma_{k-1} : t_k\sigma_{k-1} >
\end{aligned}
$$

そして

$$\sigma = \sigma_k$$

3.3　記号の無限列

次に、代入 $\sigma_0 = x \leftarrow f(x)$ を考える。記号の列

$$x, x\sigma_0^1, x\sigma_0^2, x\sigma_0^3, \ldots, x\sigma_0^k, \ldots$$

つまり

$$x, f(x), f^2(x), \ldots, f^k(x), \ldots$$

を考える。

unification $\sigma = <t:s>$ は、二つの表現 t と s の差を意味している。

記号列の隣り合う記号の差 $<f^k(x):f^{k+1}(x)>$ は、常に $<x:f(x)>$ であり、記号列をどれだけ先に進んでも変化しない。し適用してできる記号の列の収束というものは考えられないか。(これだけだと、有限か無限に続くかでしかないので、つまらない)

例)

有限の場合

$$<x:x> \quad : \quad x, x, x, \ldots \tag{1}$$

$$<x:y> \quad : \quad x, y, y, \ldots \tag{2}$$

$$<x:f(y)> \quad : \quad x, f(y), f(y), \ldots \tag{3}$$

補足

$t_i \neq t_{i+1}$ で、$x \leftarrow f(x)$ の場合、$<t_i:t_{i+1}>$ が不変になる。

3.4　term のドメイン

項に対して、その変数に $\mathcal{H}$ の要素を代入してできる全ての項の集合を対応させる。

$$[[x]] = \mathcal{H}$$

$$[[f(x)]] = \{f(e) : e \in \mathcal{H}\}$$

この観点から、$\sigma = x \leftarrow f(y)$ に対して

$$\rho(\sigma) = \frac{|[[f(x)]]|}{|[[x]]|}$$

を考える。

ここで、$|X|$ は、集合 X のサイズとする。

$$\rho(\sigma) = \frac{|f\mathcal{H}|}{|\mathcal{H}|}$$

である。

例 1) $\mathcal{A} = \{+P(a), -P(x)\}$

$$\sigma = < P(a) : P(x) > = x \leftarrow a$$

$$\mathcal{H} = \{a\}$$

なので

$$\rho(\sigma) = \frac{1}{1} = 1$$

例 2) 任意の $\mathcal{A}$ で、空の代入については

$$\sigma = < P(x) : P(x) > = x \leftarrow x$$

なので

$$\rho(\sigma) = \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}} = 1$$

例 3)

$$\sigma = < P(x) : P(f(y)) > = x \leftarrow f(y)$$

なので

$$\rho(\sigma) = \frac{f\mathcal{H}}{\mathcal{H}} < 1$$

この場合、