証明と反証、全称と存在

大村伸一

平成 31 年 5 月 2 日

1　概要

反証で証明を作る時、∃と∀はどのように証明プロセスに影響するか。
前にも書いたような気がするが、再整理。

1.1　定義

2　単純な例

2.1　いくつかの変数に依存して値の決まる場合

例 1)

conj： $\forall x \exists y \Phi(x, y)$

$\neg$**conj：** $\exists x \forall y \neg \Phi(x, y)$

conj の場合は、$\mathcal{H}$ の任意の要素 e について、ある値 y が存在して $\Phi(e, y)$ が成り立つ。これを反証で証明する場合、¬conj の形になる。clause に変換すると、変数 x は定数 c_x に置き換わるので、

$$\neg \Phi(c_x, y)$$

で反証を行うことになる。

conj の証明のためには、c_x の選択方法にしたがって、すべての $c_x \in \mathcal{H}$ について、反証を行う必要がある。

$\mathcal{H}$ を記号的にいくつかの集合に分け、それを表す論理式を用いて、有限の場合分けにできれば、証明操作は完了できるだろう。

$$\{\forall c_x \in \mathcal{H}\}\mathcal{A}, \forall y \neg \Phi(c_x) \vdash \Box$$
$$\mathcal{A} \cup \{\neg \Phi(c_x, y)\} \vdash \Box$$
$$\text{ここで}$$
$$\mathcal{A} \to \Phi(x, f(x)) \text{ と} \neg \Phi(c_x, y) \text{ を } refute \text{ し}$$
$$(x, y) \leftarrow (c_x, f(c_x)) \text{ という形の } f \text{ の存在を示すか、証明する必要がある。}$$

2.2　特定の変数に対して、すべての値で真になる場合

例 2)

conj： $\exists x \forall y \Phi(x,y)$

¬conj： $\forall x \exists y \neg\Phi(x,y)$

conj は、ある $c_x \in \mathcal{H}$ が存在して、すべての y について $\Phi(c_x, y)$ が成立すると主張している。

このタイプの証明では、$\mathcal{H}$ の全要素について反証を試みて、ひとつも反例がないことを示さなくてはならないので、反証法は適さない。たとえば、この例を反証するには、どのような c_x を選んでも、すべての y について $\neg\Phi(c_x, y)$ であるというのだから、x,y の両方に $\mathcal{H}$ の要素をあてはめて反証ができないことを言うしかない。

反証の中に $\exists y$ があるということは、$\mathcal{H}$ の全要素について調べなくてはならないということ。

3　どのような論理式なら反証法で証明できるのか

まず、$\{something\}$ は、意味論に基づくメタな操作を示すことにする。例えば、$\forall c \in \mathcal{H}$ で、エルブラン宇宙のすべての要素について何かを行うとかを示す。

3.1　その 1

$$
\begin{tikzcd}
Conjecture & NegConjecture \\
\forall x P(x) \arrow[r] \arrow[d] & \exists x \neg P(x) \arrow[d] \\
P(x) \arrow[d] & \{\forall c \in \mathcal{H}\} \neg P(c), \mathcal{A} \vdash \Box \\
\neg P(x) &
\end{tikzcd}
$$

Conjecure の場合　$(A), \neg P(x) \vdash \Box$ が証明できればこれが反証になり、$\Box x \leftarrow c$ という mgu が得られた時 $c \in H$ で $\mathcal{A} \vdash P(c)$ しか言えない。

すべての H の要素については何も証明できていない。

Neg Conjecture の場合　反証から

$$\{\forall c \in \mathcal{H}\} \mathcal{A} \vdash P(c)$$

が言えるので、$\forall x P(x)$ が証明できる。

3.2 その 2

Conjecture が $\exists x P(x)$ の場合、

Conjecture の中で $\exists x P(x)$ を skolemize すると $\{select c \in \mathcal{H}\}$ として要素 c を選び、それの否定を $\neg P(c)$ として neg conj を作り、$\mathcal{A}, \neg P(c) \vdash \Box$ をすべての c について実行する必要があり、手続きとして成り立たない。

Negate では $\forall x \neg P(x)$ を反証するので skolemize は発生せず、$\mathcal{A}, \neg P(x) \vdash \Box$ の証明をして $\{x \leftarrow a\}$ が得られたとすると、x として a の存在がいえるので、Conjecture の証明ができる。このときは $\mathcal{H}$ を用いた、意味論にもとづく操作は必要ない。

その 1 とその 2 から、Conjecture Φ をそのまま否定するのは、手続きとして成り立たない。