述語論理での世界の書き方の研究

H2nI3sc

平成 31 年 1 月 20 日

目 次

1 何を書きたいか **3**
1.1 意図 3
1.2 用語あるいは定義 4
1.3 定義 4

2 有限の場合 **5**
2.1 基本的な検討 5
2.2 $\mathcal{A} = \{\}$ について 5
2.3 $\mathcal{A} = \{P(a)\}$ 5
2.4 $\mathcal{A} = \{P(a), P(b)\}$ 6
2.5 $\mathcal{A} = \{P(a), Q(a)\}$ 7
2.6 $\mathcal{A} = \{P(a), Q(b)\}$ 7
2.7 $\mathcal{A} = \{P(a), \bar{P}(a)Q(b)\}$ 8
2.8 有限のまとめ 8

3 $\mathcal{A}^*$ が無限の場合 **10**
3.1 $\mathcal{A}$ は有限集合だが $\mathcal{H}$ が無限になる場合 10
3.1.1 $\mathcal{A} = \{P(a), P(f(a))\}$ 10
3.1.2 $\mathcal{A} = \{P(a), P(f(b))\}$ 10
3.1.3 $\mathcal{A} = \{P(a), Q(f(a))\}$ 10
3.1.4 $\mathcal{A} = \{P(a), Q(f(b))\}$ 12
3.1.5 $\mathcal{H}$ が無限集合の場合のまとめ 12
3.2 $\mathcal{A}$ が無限集合。無限の観測命題が書かれていると想定した場合 13
3.2.1 $\mathcal{A} = \{P(a), \ldots, P(f^k(a)), \ldots\}$ 13
3.3 $\mathcal{A}$ が無限集合の場合のまとめ 13
3.4 $\mathcal{A}$ は有限集合だが $\mathcal{A}^*$ が無限になる場合 14
3.4.1 $\mathcal{A} = \{P(a), \bar{P}(x)P(f(x))\}$ 14
3.4.2 $\mathcal{A} = \{P(a), \bar{P}(x)Q(f(x)), \bar{Q}(x)P(g(x))\}$ 14

3.5 $\mathcal{A}$ は有限集合で $\mathcal{A}^*$ が無限集合になる場合のまとめ 14
3.6 無限の場合のまとめ 15

4 付録: 計算過程 16
4.1 関数やプログラムの定義が書かれている場合 16
4.1.1 $\supset$ か $\wedge$ か 16
♠ は疑問のあるセクション

1 何を書きたいか

1.1 意図

ニューラルネット (NN) などの学習システムによって、世界の様々な情報を分類できたとする。そのカテゴリーを述語に対応させ、一階論理などの命題にできれば、証明システムを用いて、推論できる。

論理は、人間が何千年もかけて生み出した方法ではあるが、機械学習がそれを必要とするかどうかははっきりしない。おそらく、推論の効率化の役に立つのではないかと思うが、確かではない。しかし、ここでは、そのような対応づけが可能であり、役に立つと考える。

その場合、NN が作り出す命題は、事実の記述になるだろう。限定された観測データに基づく記述なので、真実とは言えないが、様々なセンスデータから高い確率でそうだと思われる事実が、論理式の形で構成される。

それらの事実の間に成り立つ法則であるとか、仮説であるとかを、機械学習で構成できるのかどうかもつまびらかではないが、それができれば、それも事実の言明に加えていけばよいだろう。

そのとき、機械証明の側から何ができるのかが知りたい。

この「法則や仮説を構成する」が機械学習だけでできなくても、機械証明と機械学習が協力すればできるのかどうかも知りたい。

このような動機から、では、一階論理で事実を書くとき、どう書くべきなのか、であるとか、観測した命題の有限集合に対して、法則を命題で表現したとき、それが証明できるものなのかどうか、であるとか、いろいろ考えていきたいというのががもともとの意図である。

書いているうちに、他にもテーマがみつかるのかもしれない。

なお、以下では、証明システムとして resolution と refutaion を用いる。

1.2 用語あるいは定義

観測命題: 世界を観測して得られた事実とみなせる論理式。ここでは観測と呼んでいるが、数理論理学では公理と呼ばれているもの。(ここ、意味論と証明論がまざっている) 公理というほど確定したものではなく、観測し正しいと信じられる言明程度のもの。

観測集合: 観測命題の集合。記号では $\mathcal{A}$ で表すと思う。

仮説: 証明しようとする論理式。conjecture と呼んだり、conj と書いたりする。記号では $\Psi(x)$ のように書くことが多いはず。

Fact: 観測論理式の中で、観測された事実のみの論理式やその集合を意味する。真実という意味ではない。ground unit clause になる。

定義: 観測集合に書かれた、Fact の間の関係を意味する論理式。indubtive definition も含むが、定義という役割にすることで、真偽を証明する義務を除外したものが定義。

エルブラン宇宙 エルブランドメインと呼ぶかも。特定の述語記号に対するエルブランドメインについても書くかもしれない。

観測命題はポジティブのみである。なぜなら、否定された状態というものは、直接、観測できず、何らかの推論によってのみ得られる状態だから。

1.3 定義

$\Box$ は 矛盾を示す。
$\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ は、観測集合 $\mathcal{A}$ に対するエルブラン宇宙
$\mathcal{A}^* := \{x|\mathcal{A} \vdash x\}$

2　有限の場合

2.1　基本的な検討

Fact とは、事実としての根拠がある命題の集合だと考える。その根拠は論理の外側で判定される。たとえば、Neural Network(以下では NN) などを想定している。NN で Fact 集合を構成する方法は未知である。

$\mathcal{A}$ には Fact 以外の命題も含まれる。命題レベルの推論である場合も、変数を含む場合もある。NN でそのような命題が構成できるのかは未知である。

2.2　$\mathcal{A} = \{\}$ について

観測集合が $\mathcal{A} = \{\}$ の場合は、リテラルが 1 つもないので、どんな conjecture も観測命題と resolution できない。つまり、$\mathcal{A}$ に含まれない述語記号や定数記号を用いて構成したどのような Ψ についても、$\{\} \nvdash \Psi$ である。このとき、refutation を考えると、$\square$ を証明することが不可能なので、$\{\}$ は無矛盾である。

(個人的な感想) 無矛盾というと、直感的には Ψ か $\bar{\Psi}$ かどちらかが証明できて、両方一緒に証明はできないという話だと思う。この場合、Ψ も $\bar{\Psi}$ も証明できないので、無矛盾というのとはすこし違うイメージがある。数学での にまつわる証明はどれもそういうものだけれど。

証明の作り方から、conjecture のリテラルもその否定も $\mathcal{A}$ に出現していない場合、それを真とも偽ともみなせないということなので、真偽値に値も含めて考えてみる。

それを ω と書くことにする。

つまり、真偽値を $\{\top, \bot, \omega\}$ とする。

2.3　$\mathcal{A} = \{P(a)\}$

これに対して、次のような conj の場合の真偽値は次の通り。

No	観測	Ψ	真偽値
1	$\{P(a)\}$	$P(a)$	T
2	$\{P(a)\}$	$\bar{P}(a)$	ω
3	$\{P(a)\}$	$P(b)$	ω
4	$\{P(a)\}$	$\bar{P}(b)$	ω
5	$\{P(a)\}$	$Q(a)$	ω
6	$\{P(a)\}$	$\bar{Q}(a)$	ω
7	$\{P(a)\}$	$\exists x P(x)$	$T \because \exists a\, P(a)$
8	$\{P(a)\}$	$\forall x P(x)$	$T \because P(a)$ a is all of H

表 1: 集合と仮説の関係 (有限の場合 1)

ただし、$H_{\mathcal{A}} = \{a\}$

まず、未定義について考えると、次の 3 つの場合がある。

1. P という述語記号が $\mathcal{A}$ に出現しない。
2. conjecture に出現するリテラルの complement が $\mathcal{A}$ に出現しない。この場合は、片方だけは真偽が決まるが、その反対は未定義になる。
3. conjecture に出現するリテラルの述語記号が $\mathcal{A}$ に出現しない。

2 は、complement が存在しないだけで、$P(P(a))$ は $\mathcal{A}$ に出現している。3,4 は、述語記号は $\mathcal{A}$ に出現しているが、resolution によって消滅させるリテラルが存在しないので、証明も反証も不可能であり、未定義とする。5,6 は、述語記号 Q 自体が $\mathcal{A}$ に出現していない。

refutation で $\square$ が導けないときは、conjecture が導けない、つまりということであり、これを偽だとみなすすれば、ω は F と同じ。

表では、区別するために ω にしておく。

7 については、エルブラン宇宙の term a について $P(a)$ が成り立つので $\{\exists x P(x)\}$ が真となる。

8 は、意味論で考えると、エルブラン宇宙のすべての term、つまりただ一つの term a について $P(a)$ が成り立つので $\{\forall x P(x)\}$ は真となる。

証明の観点から見ると、resolution refutaion を用いる場合、conjecture を否定し、観測集合との和をとって $\square$ を導けるかどうかを試すので、7 の場合は $\neg\forall x P(x)$ から、$\bar{P}(x)$ という clause をつくり、これを $\mathcal{A}$ に加えて

$\{P(a), P(x)\} \vdash \square$

これが成り立つので、conjecture については真となる。

8 の場合は、conjecture を否定すると $\neg\{\forall x P(x)\}$ から $\exists x \bar{P}(x)$ が conj の否定となり、この $\exists x$ の x を、定数に置き換える。その定数 ($\exists$ の前に $\forall$ があれば、関数だが、ないので 0 引数の関数として定数になる) は conjecture の論理式に出現していない定数である必要があるが、a はその条件を満たしている唯一の term なので $\bar{P}(a)$ が最終的に conj の否定となる。(conjecture に含まれない定数という意味では、$\mathcal{H}$ にない定数、たとえばここでは b でもよいが、その場合 unifiable なリテラルが存在しないことは明らかなので、そのような定数を導入する必要はない。つまり、エルブラン宇宙の要素だけを考えれば良い)

これから

$\{P(a), P(a)\} \vdash \square$

という反証ができるので、conjecture は真となる。

(ここらへん意味論と証明論がごっちゃになっているかも)

2.4 $\mathcal{A} = \{P(a), P(b)\}$

これに対して、次のような conj の場合の真偽値は表の通り。

観測集合で $P(b)$ が増えたので、3 も真偽値は T になった。

しかし、Q は含まれないので、5,6 は ω のまま。

7 については、conj の否定は同じ形になるので、証明すべきは

No	観測	Ψ	真偽値
1	$\{P(a), P(b)\}$	$P(a)$	T
2	$\{P(a), P(b)\}$	$\bar{P}(a)$	ω
3	$\{P(a), P(b)\}$	$P(b)$	T
4	$\{P(a), P(b)\}$	$\bar{P}(b)$	ω
5	$\{P(a), P(b)\}$	$Q(a)$	ω
6	$\{P(a), P(b)\}$	$\bar{Q}(a)$	ω
7	$\{P(a), P(b)\}$	$\exists x P(x)$	$T \because P(a)$
8	$\{P(a), P(b)\}$	$\forall x P(x)$	$T \because P(a) and P(b) hold$

表 2: 集合と仮説の関係 (有限の場合 2)

$\{P(a), P(b), P(x)\} \vdash \square$
であるが、これは成り立つ。
ただし、反証は 2 つ存在するが、$\exists$ の意味から、2 つ目の証明は考慮されない。この場合は b。
8 については、conj の否定 $\exists x \bar{P}(x)$ の変数 x は、$\mathcal{H}$ から a と b の二つが存在する。
$\{P(a), P(b), \bar{P}(a)\} \vdash \square$
$\{P(a), P(b), \bar{P}(b)\} \vdash \square$
一般には、どちらかが証明できないかもしれないので、証明はすべての場合について判定する必要がある。この場合は、どちらであっても矛盾するので、片方だけでも正解になるが、一般にはそうはいかないという話。
つまり証明の対象とする集合のすべてについて反証が必要ということであり、$\forall$ の意味が証明手続きに移行したということになる。
この議論は、$\{P(a), P(b), P(c)\}$ など定数が増えても同じ。

2.5 $\mathcal{A} = \{P(a), Q(a)\}$

この場合は、$P(a)$ の場合と違わないので、省略する

2.6 $\mathcal{A} = \{P(a), Q(b)\}$

これは、述語記号が増えた場合。
ここではエルブラン宇宙に b が存在するが、P(b) というリテラルが観測集合にでていないので、未定義としている。
5 は、
$\{P(a), Q(b), P(x)\} \vdash \square$
の証明を求めることになるが、この場合、反証は $\square\{x \leftarrow a\}$ のみとなる。
6 は、
$\{P(a), Q(b), \bar{P}(a)\} \vdash \square$

No	観測	Ψ	真偽値
1	$\{P(a), Q(b)\}$	$P(a)$	T
2	$\{P(a), Q(b)\}$	$\bar{P}(a)$	F
3	$\{P(a), Q(b)\}$	$P(b)$	ω
4	$\{P(a), Q(b)\}$	$\bar{P}(b)$	ω
5	$\{P(a), Q(b)\}$	$\exists x P(x)$	$T \because P(a)$
6	$\{P(a), Q(b)\}$	$\forall x P(x)$	$F \because b \in H \wedge \bar{P}(b)$

表 3: 集合と仮説の関係 (有限の場合 2)

$\{P(a), Q(b), \bar{P}(b)\} \vdash \Box$
の両方の証明が必要だが、$P(b)$ の反証に失敗するので、conjecture は否定される。

2.7 $\mathcal{A} = \{P(a), \bar{P}(a)Q(b)\}$

これは、要素数が 2 の観測集合だが、命題の推論ができるので、$\mathcal{A}^* = \{P(a), \bar{P}(a)Q(b), Q(b)\}$ となる。

No	観測	Ψ	真偽値
1	$\{P(a), \bar{P}(a)Q(b)\}$	$P(a)$	T
2	$\{P(a), \bar{P}(a)Q(b)\}$	$\bar{P}(a)$	ω
3	$\{P(a), \bar{P}(a)Q(b)\}$	$Q(b)$	T
4	$\{P(a), \bar{P}(a)Q(b)\}$	$\bar{Q}(b)$	ω
5	$\{P(a), \bar{P}(a)Q(b)\}$	$\exists x Q(x)$	$T \because Q(b) \in \mathcal{A}^*$
6	$\{P(a), \bar{P}(a)Q(b)\}$	$\forall x Q(x)$	$F \because \bar{Q}(a) \notin \mathcal{A}^*$
7	$\{P(a), \bar{P}(a)Q(b)\}$	$\exists x P(x)$	$T \because P(a) \in \mathcal{A}^*$
8	$\{P(a), \bar{P}(a)Q(b)\}$	$\forall x P(x)$	$F \because \bar{P}(b) \notin \mathcal{A}^*$

表 4: 集合と仮説の関係 (有限の場合 2)

$\bar{P}(a)Q(b)$ は、変数がないので、命題論理と同じ推論しかされないが、conjecture が変数を含む形の場合は、変数への代入を生むので、必ずしも命題論理に限定した話ではなくなる。

$\bar{P}(x)P(f(x))$ という形の無限に consequence を生成する clause については次のセクションか付録で分析する。

2.8 有限のまとめ

conjecture が $\exists x$ の prefix を持つ場合、resolution refutation によって、具体的な反例をみつけることができるので、通常の resolution refutation に基づく単純な証明方法で証明が可能である。

しかし、conjecture が $\forall x$ の prefix を持つ場合、エルブラン宇宙の定数すべてについて、反証がないことを示さなくてはならないため、1 つの観測集合の反証だけで終わらず、エルブラン宇宙のすべての要素を x に代入した conjecture のインスタンスについて、反証がないことを示さなくてはならない。(もしも、$\mathcal{A}$ に inductive definition が書かれていたら、通常の証明手続きで反証できる)

1 つの定数の反証は、必ず有限時間で終了するので、Fact が有限集合の場合は実行可能である。

(心の声)

これは、エルブラン宇宙上での制御を必要とし、意味論のからんだ話になっているように見える。ただし、エルブラン宇宙は機械的に作れるので、証明論の範疇なのかもしれない。

いずれにせよ、conjecture の形は同じでも、その意味は観測集合の形によって違ってくる。

モデルに依存した真偽値になっているのは、意味論の範疇なのか。

$\forall x$ の prefix を持つ conjecture の場合、反例がみつかると、それはこの conjecture のどこが違っているのかの情報になる。その情報が必要であれば、エルブラン宇宙のすべての要素について、矛盾のチェックが必要であり、そのような制御をすると $\forall x$ と同じことになりそう。

(心の声　おわり)

3　$\mathcal{A}^*$ が無限の場合

無限の観測集合 $\mathcal{A}$ は、有限時間で書くことはできないが、ここではそれを含めて検討する。
3 つの場合を想定している。

1. $\mathcal{A}$ は有限集合だが $\mathcal{H}$ が無限になる場合。観測命題の中に関数記号が出現する場合。
2. $\mathcal{A}$ が無限集合。無限の観測命題が書かれていると想定した場合。
3. $\mathcal{A}$ は有限集合だが $\mathcal{A}^*$ が無限になる場合。観測命題の中に、induction definition の形のものがある場合。

3.1　$\mathcal{A}$ は有限集合だが $\mathcal{H}$ が無限になる場合

3.1.1　$\mathcal{A} = \{P(a), P(f(a))\}$

$\mathcal{H}$ は、$\{a, f(a), ...\}$ となる。ただし、観測集合では述語 P についてポジティブなものしかない。

No	観測	Ψ	真偽値
1	$\{P(a), P(f(a))\}$	$P(a)$	T
2	$\{P(a), P(f(a))\}$	$P(f(f(a)))$	ω
3	$\{P(a), P(f(a))\}$	$P(a) \vee P(f(a))$	T
4	$\{P(a), P(f(a))\}$	$P(a) \wedge P(f(a))$	T
5	$\{P(a), P(f(a))\}$	$P(a) \vee P(f(f(a)))$	ω
6	$\{P(a), P(f(a))\}$	$P(a) \wedge P(f(f(a)))$	ω
7	$\{P(a), P(f(a))\}$	$\forall x P(x)$	T
8	$\{P(a), P(f(a))\}$	$\exists x P(x)$	T

表 5: 集合と仮説の関係 (H が無限の場合 1)

3.1.2　$\mathcal{A} = \{P(a), P(f(b))\}$

関数記号が増えたため $\mathcal{H}$ は、$\{a, f(a), ...\}$ となる。

3.1.3　$\mathcal{A} = \{P(a), Q(f(a))\}$

述語記号に Q が増え、関数 f が増えている場合。関数記号 f が使われているので、$\mathcal{H}$ は、$eseta, f(a), ...$ となるが、関数記号は Q でしか使われていない。その意味では、エルブラン宇宙の無限の部分は Q でのみ意味があるのかもしれない。しかし、それは表現されない。

No	観測	Ψ	真偽値
1	$\{P(a), P(f(b))\}$	$P(a)$	T
2	$\{P(a), P(f(b))\}$	$P(b)$	F
3	$\{P(a), P(f(b))\}$	$P(f(f(a)))$	ω
4	$\{P(a), P(f(b))\}$	$P(f(f(b)))$	ω
5	$\{P(a), P(f(b))\}$	$P(a) \vee P(f(a))$	ω
6	$\{P(a), P(f(b))\}$	$P(a) \wedge P(f(a))$	ω
7	$\{P(a), P(f(b))\}$	$\forall x P(x)$	T
8	$\{P(a), P(f(b))\}$	$\exists x P(x)$	T

表 6: 集合と仮説の関係 (H が無限の場合 2)

No	観測	Ψ	真偽値
1	$\{P(a), Q(f(a))\}$	$P(a)$	T
2	$\{P(a), Q(f(a))\}$	$P(f(f(a)))$	ω
3	$\{P(a), Q(f(a))\}$	$P(a) \vee P(f(a))$	T
4	$\{P(a), Q(f(a))\}$	$P(a) \wedge P(f(a))$	T
5	$\{P(a), Q(f(a))\}$	$\forall x P(x)$	F $\because x = f(a)$
6	$\{P(a), Q(f(a))\}$	$\exists x P(x)$	T
7	$\{P(a), Q(f(a))\}$	$\forall x Q(f(x))$	F $\because x = f(a)$
8	$\{P(a), Q(f(a))\}$	$\exists x Q(f(x))$	T

表 7: 集合と仮説の関係 (H が無限の場合 3)

3.1.4 $\mathcal{A} = \{P(a), Q(f(b))\}$

さらに、定数 b は Q でしか使われていないので、P のエルブランドメインと Q のエルブランドメインを分けて考えれば、$\forall x P(x)$ は成り立っているのだが、エルブランドメインを分ける仕組みはないので以下のようになる。

No	観測	Ψ	真偽値
1	$\{P(a), Q(f(b))\}$	$P(a)$	T
2	$\{P(a), Q(f(b))\}$	$P(f(f(a)))$	ω
3	$\{P(a), Q(f(b))\}$	$Q(b)$	ω
4	$\{P(a), Q(f(b))\}$	$Q(f(f(a)))$	ω
5	$\{P(a), Q(f(b))\}$	$P(a) \vee Q(f(b))$	T
6	$\{P(a), Q(f(b))\}$	$P(a) \wedge Q(f(b))$	T
7	$\{P(a), Q(f(b))\}$	$\forall x P(x)$	F $\because x = f(a)$
8	$\{P(a), Q(f(b))\}$	$\exists x P(x)$	T
9	$\{P(a), Q(f(b))\}$	$\forall x Q(f(x))$	F $\because x = f(a)$
10	$\{P(a), Q(f(b))\}$	$\exists x Q(f(x))$	T

表 8: 集合と仮説の関係 (H が無限の場合 4)

3.1.5 $\mathcal{H}$ が無限集合の場合のまとめ

エルブラン宇宙が無限になっても、観測集合が有限なので、観測集合だけを見ていると成立する $\forall$ の法則が、エルブラン宇宙のもとでは成り立たなくなる。

このために、各述語記号のエルブランドメインを考えることもできるだろう。

だがそれはモデルの話であり、エルブラン宇宙が無限になってしまうと証明で扱うのは難しい。

3.2 $\mathcal{A}$ が無限集合。無限の観測命題が書かれていると想定した場合

3.2.1 $\mathcal{A} = \{P(a), \dots, P(f^k(a)), \dots\}$

自然数と同じ構造なので、conjecture としてペアノの公理を持って来れば、全部真になるのだろうか。

No	観測	Ψ	真偽値
1	$\{P(a), P(f(a)), \dots\}$	$P(a)$	T
2	$\{P(a), P(f(a)), \dots\}$	$\bar{P}(a)$	ω
3	$\{P(a), P(f(a)), \dots\}$	$\forall x P(x)$	T
4	$\{P(a), P(f(a)), \dots\}$	$\forall x \bar{P}(x) \vee P(f(x))$	T
5	$\{P(a), P(f(a)), \dots\}$	$\forall x \bar{P}(x) \wedge P(f(x))$	T
6	$\{P(a), P(f(a)), \dots\}$	$P(f(f(a)))$	$T \because P(f(f(a))) \in \mathcal{A}^*$
7	$\{P(a), P(f(a)), \dots\}$	$\bar{P}(a) \vee P(f(f(a)))$	T
8	$\{P(a), P(f(a)), \dots\}$	$\bar{P}(a) \wedge P(f(f(a)))$	T
9	$\{P(a), P(f(a)), \dots\}$	$\exists x P(f(f(x)))$	$T \because P(f(f(a))) \in \mathcal{A}^*$
10	$\{P(a), P(f(a)), \dots\}$	$\exists x P(f(f(x)))$	$T \because P(f(f(f(a)))) \in \mathcal{A}^*$
11	$\{P(a), P(f(a)), \dots\}$	$\forall x \bar{P}(x) \vee P(f(f(f(x))))$	$F \because P(a) \wedge \bar{P}(f(f(f(a)))) \notin \mathcal{A}^*$
12	$\{P(a), P(f(a)), \dots\}$	$\forall x \bar{P}(x) \wedge P(f(f(f(x))))$	$F \because P(a) \wedge \bar{P}(b) \notin \mathcal{A}^*$

表 9: 集合と仮説の関係 ($\mathcal{A}$ が無限集合 1)

3.3 $\mathcal{A}$ が無限集合の場合のまとめ

conjecture として、変数を含むものが、観測集合について成り立つ法則を表している。

定数のみの式は法則ではなく、Fact として正しいかどうかの query である。

¶($\phi(x)$) の形のものは、P のドメインに対する query である。

query の場合の prefix は $\exists x$ であり、反証するため否定して $\forall x$ となって、clause に変数が残る。

conjecture の prefix が $\forall x$ だと、エルブラン宇宙のすべての要素 (定数) を x に代入してできる conjecture のインスタンスを否定したものをすべて反証しなくてはならない。

3.4 $\mathcal{A}$ は有限集合だが $\mathcal{A}^*$ が無限になる場合

3.4.1 $\mathcal{A} = \{P(a), \bar{P}(x)P(f(x))\}$

これは、$\bar{P}(x)P(f(x))$ を適用することで、$\mathcal{A}^*$ が無限の場合の例の観測集合を生成する。

No	観測	Ψ	真偽値
1	$\{P(a), \bar{P}(x)P(f(x))\}$	$P(f(a))$	T
2	$\{P(a), \bar{P}(x)P(f(x))\}$	$P(f(f(a)))$	T
3	$\{P(a), \bar{P}(x)P(f(x))\}$	$\bar{P}(x) \vee P(f(x))$	T
4	$\{P(a), \bar{P}(x)P(f(x))\}$	$P(x) \wedge \bar{P}(f(x))$	T
5	$\{P(a), \bar{P}(x)P(f(x))\}$	$P(f(f(a)))$	T
6	$\{P(a), \bar{P}(x)P(f(x))\}$	$\bar{P}(x)P(f(f(a)))$	T

表 10: 集合と仮説の関係 ($\mathcal{A}^*$ が無限になる場合 1)

conjecture が、観測集合に含まれる $\bar{P}(x)P(f(x))$ と同じ形をしていると、conjecture の否定が観測集合に含まれる $\bar{P}(x)P(f(x))$ と打ち消しあって自明な □ の証明が構成される。

その場合はそのような conjecture の反証に意味はなく、観測集合のその式を使えば良い。

その式を観測集合に含める段階で、それを含まない観測集合と矛盾しないかどうかを確認する必要はあるだろう。

だから、問題は、$\bar{P}(x)P(f(x))$ を誰がどこで見つけるかということになる。

たとえば、$P(a), P(f(a)), ..., P(f^k(a))$ までを観測したとき、そこから、高い確度で任意の k について $P(f^k(a))$ だという結論を、観測システムで導けるか、そのような帰納推論を行うシステムを構築できるか。

3.4.2 $\mathcal{A} = \{P(a), \bar{P}(x)Q(f(x)), \bar{Q}(x)P(g(x))\}$

前の例は、無限生成のルールが P のみの式で書かれていたが、間に Q が介入する例。未稿

3.5 $\mathcal{A}$ は有限集合で $\mathcal{A}^*$ が無限集合になる場合のまとめ

NN と機械証明を連携させたい場合、NN は事実を (確率がはいるにせよ) 言語化するだけであり、そこからどうやって法則を作り出すかが、問題になる。

機械証明自体に帰納の能力はない。

機械証明の分野で、帰納の研究があったと思う。無関係ではない。

また、NN で、学習プロセス自体を学習するようなことをして、法則を発見することができないのだろうか。

3.6　無限の場合のまとめ

NN で Fact を収集したとして、個々の変数にはいるデータのサイズや、述語の引数の数がかなり大きなものになると思われる。

法則の発見がなければ、それでも観測集合は有限であり、$\forall x$ が気をぬくと無限のドメインを仮定してしまうため、有限ではなかなか正しい結論がでないように思う。

無限は、扱いが難しいけれど、表現を簡単にする力がある。ここで扱おうとしている論理式では、Fact は巨大かもしれないが必ず有限であり、$\forall x$ がときどき無限の側にはみだすことに気をつけなくてはならない。

NN では、膨大なデータに基づく関連付けによって結論を出す (本当は結論を出しているのは、NN ではなくそれを使うプログラムのほう)。機械証明によって、その計算をスキップすることができるのではないかという期待を持っている。そのためには、まだ明白になっていないギャップがいろいろある。

4 付録: 計算過程

4.1 関数やプログラムの定義が書かれている場合

プログラムの入出力条件は、一般的にはこのように書ける。
$\forall x \exists z \Phi(x)\{z \leftarrow \sigma(x)\}\Psi(x,z)$
ただし、n 変数の場合は x をベクトルにするなどの一般化はあるが、ここでは基本的な仕組みのみ検討する。
この $\{\dots\}$ の部分が論理記号の何に変換されるのかは自明ではない。
おそらく 2 つの選択肢がある。

$$\forall x \exists z \Phi(x) \supset \Psi(x,z) \tag{1}$$
$$\forall x \exists z \Phi(x) \wedge \Psi(x,z) \tag{2}$$

どちらが適切なのかは、この後で検討する。
いずれにせよ、入力である x に特定の定数を代入し、次の形の論理式を conjecture として証明を構成すると、それは $sigma(x)$ の計算過程に対応する。

$$\exists z \Phi(a) \supset \Psi(a,z) \tag{3}$$
$$\exists z \Phi(a) \wedge \Psi(a,z) \tag{4}$$

だから、定数を代入せず変数のままで証明を構成すると、それらの証明全体がプログラムの構造に対応する。
1 つの証明は、場合分けなどで同じパスを通る計算過程の集合に対応している。(量子計算の場合は、場合分けだけではない条件 (エンタングルされた状態ではないか) で同じパス (?) を通る計算を一つの計算過程として記述できるのではないか?)

4.1.1 ⊃ か ∧ か

一般形の場合、clause 形式での否定は次のようになる。

$$\exists x \forall z \Phi(x) \wedge \bar{\Psi}(x,z) \tag{5}$$
$$\exists x \forall z \bar{\Phi}(x) \vee \bar{\Psi}(x,z) \tag{6}$$

となる。
 で 2 つの clause に分かれる場合、反証するには $\mathcal{A})^*$ には、対応する 1 つの clause が存在する必要がある。つまり、1 行目の場合は次の形の clause が必要になる。

$$\bar{\Phi}(w)\Psi(w,z) \tag{7}$$

ただし、w は任意の $\mathcal{H}$ の要素 (定数) である。

2 行目の場合は、次の形の 2 つの clause が必要になる。

$$\{\Phi(x), \Psi(x,z)\} \tag{8}$$

これらが $\mathcal{A}$ に書かれているとすると、どういう意味になるか $\cdots$

$\bar{\Phi}(w)\Psi(w,z)$ はルールが書かれているということであり、$\bar{\Phi}(w)$ が成り立っているかどうかは書かれていない。

故に、この場合の反証では、$\Phi(x)$ の証明は不要あるいは不能であり、$\Psi(x,z)$ だけで $\Box$ が証明される。

一方で、$\{\Phi(x), \Psi(x,z)\}$ の場合は、それぞれポジティブに、x が Φ を満たすことと、入力と出力 (x,z) が Ψ を満たすことだけを主張している。これは、Fact として記述できる。

故に、後者の方が妥当と思われる。

前者は、入力条件が満たされることの帰結として、出力条件が成り立つと言っているのに対し、後者は入力条件と出力条件の間に論理的帰結という関係はなく、同時に成り立っているということだけを仮定している。