証明と反証、全称と存在

大村伸一

平成 31 年 4 月 14 日

1　概要

反証で証明を作る時、∃と∀はどのように証明プロセスに影響するか。
前にも書いたような気がするが、再整理。

1.1　定義

1.2　用語あるいは定義

観測命題: 世界を観測して得られた事実とみなせる論理式。ここでは観測と呼んでいるが、数理論理学では公理と呼ばれているもの。(ここ、意味論と証明論がまざっている) 公理というほど確定したものではなく、観測し正しいと信じられる言明程度のもの。

観測集合: 観測命題の集合。記号では $\mathcal{A}$ で表すと思う。

仮説: 証明しようとする論理式。conjecture と呼んだり、conj と書いたりする。記号では $\Psi(x)$ のように書くことが多いはず。

Fact: 観測論理式の中で、観測された事実のみの論理式やその集合を意味する。真実という意味ではない。ground unit clause になる。

定義: 観測集合に書かれた、Fact の間の関係を意味する論理式。indubtive definition も含むが、定義という役割にすることで、真偽を証明する義務を除外したものが定義。

エルブラン宇宙 エルブランドメインと呼ぶかも。特定の述語記号に対するエルブランドメインについても書くかもしれない。

観測命題はポジティブのみである。なぜなら、否定された状態というものは、直接、観測できず、何らかの推論によってのみ得られる状態だから。

1.3　定義

$\Box$ は 矛盾を示す。
$\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ は、観測集合 $\mathcal{A}$ に対するエルブラン宇宙
$\mathcal{A}^* := \{x|\mathcal{A} \vdash x\}$

2　単純な例

2.1　いくつかの変数に依存して値の決まる場合

例 1)

conj： $\forall x \exists y \Phi(x,y)$

$\neg$**conj：** $\exists x \forall y \neg\Phi(x,y)$

conj の場合は、$\mathcal{H}$ の任意の要素 e について、ある値 y が存在して $\Phi(e,y)$ が成り立つ。これを反証で証明する場合、¬conj の形になる。clause に変換すると、変数 x は定数 c_x に置き換わるので、

$$\neg\Phi(c_x,y)$$

の反証を行うことになる。

conj の証明のためには、c_x の選択方法にしたがって、すべての $c_x \in \mathcal{H}$ について、反証を行う必要がある。

$\mathcal{H}$ を記号的にいくつかの集合に分け、それを表す論理式を用いて、有限の場合分けにできれば、証明操作は完了できるだろう。

2.2　特定の変数に対して、すべての値で真になる場合

例 2)

conj： $\exists x \forall y \Phi(x,y)$

$\neg$**conj：** $\forall x \exists y \neg\Phi(x,y)$

conj は、ある $c_x \in \mathcal{H}$ が存在して、すべての y について $\Phi(c_x,y)$ が成立すると主張している。

このタイプの証明では、$\mathcal{H}$ の全要素について反証を試みて、ひとつも反例がないことを示さなくてはならないので、反証法は適さない。たとえば、この例を反証するには、どのような c_x を選んでも、すべての y について $\neg\Phi(c_x,y)$ であるというのだから、x,y の両方に $\mathcal{H}$ の要素をあてはめて反証ができないことを言うしかない。

反証の中に $\exists y$ があるということは、$\mathcal{H}$ の全要素について調べなくてはならないということ。

3　どのような論理式なら反証法で証明できるのか