

# 証明と反証、全称と存在

大村伸一

平成 31 年 5 月 2 日

## 1 概要

反証で証明を作る時、 $\exists$  と  $\forall$  はどのように証明プロセスに影響するか。  
前にも書いたような気がするが、再整理。

### 1.1 定義

## 2 単純な例

### 2.1 いくつかの変数に依存して値の決まる場合

例 1)

$\text{conj} : \forall x \exists y \Phi(x, y)$

$\neg \text{conj} : \exists x \forall y \neg \Phi(x, y)$

$\text{conj}$  の場合は、 $\mathcal{H}$  の任意の要素  $e$  について、ある値  $y$  が存在して  $\Phi(e, y)$  が成り立つ。これを反証で証明する場合、 $\neg \text{conj}$  の形になる。clause に変換すると、変数  $x$  は定数  $c_x$  に置き換わるので、

$$\neg \Phi(c_x, y)$$

で反証を行うことになる。

$\text{conj}$  の証明のためには、 $c_x$  の選択方法にしたがって、すべての  $c_x \in \mathcal{H}$  について、反証を行う必要がある。

$\mathcal{H}$  を記号的にいくつかの集合に分け、それを表す論理式を用いて、有限の場合分けにできれば、証明操作は完了できるだろう。

$$\{\forall c_x \in \mathcal{H}\} \mathcal{A}, \forall y \neg \Phi(c_x) \vdash \square$$

$$\mathcal{A} \cup \{\neg \Phi(c_x, y)\} \vdash \square$$

ここで

$$\mathcal{A} \rightarrow \Phi(x, f(x)) \text{ と } \neg \Phi(c_x, y) \text{ を } \textit{refute} \text{ し}$$

$$(x, y) \leftarrow (c_x, f(c_x)) \text{ という形の } f \text{ の存在を示すか、証明する必要がある。}$$

## 2.2 特定の変数に対して、すべての値で真になる場合

例 2)

**conj** :  $\exists x \forall y \Phi(x, y)$

**¬conj** :  $\forall x \exists y \neg \Phi(x, y)$

conj は、ある  $c_x \in \mathcal{H}$  が存在して、すべての  $y$  について  $\Phi(c_x, y)$  が成立すると主張している。

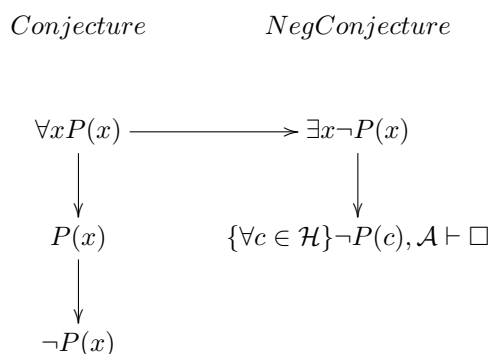
このタイプの証明では、 $\mathcal{H}$  の全要素について反証を試みて、ひとつも反例がないことを示さなくてはならないので、反証法は適さない。たとえば、この例を反証するには、どのような  $c_x$  を選んでも、すべての  $y$  について  $\neg \Phi(c_x, y)$  であるというのだから、 $x, y$  の両方に  $\mathcal{H}$  の要素をあてはめて反証ができないことを言うしかない。

反証の中に  $\exists y$  があるということは、 $\mathcal{H}$  の全要素について調べなくてはならないということ。

## 3 どのような論理式なら反証法で証明できるのか

まず、 $\{something\}$  は、意味論に基づくメタな操作を示すことにする。例えば、 $\forall c \in \mathcal{H}$  で、エルブラン宇宙のすべての要素について何かを行うとかを示す。

### 3.1 その 1



**Conjecure** の場合  $(A), \neg P(x) \vdash \square$  が証明できればこれが反証になり、 $\square x \leftarrow c$  という mgu が得られた時  $c \in H$  で  $\mathcal{A} \vdash P(c)$  しか言えない。

すべての  $H$  の要素については何も証明できていない。

**Neg Conjecture** の場合 反証から

$$\{\forall c \in \mathcal{H}\} \mathcal{A} \vdash P(c)$$

が言えるので、 $\forall x P(x)$  が証明できる。

### 3.2 その2

Conjecture が  $\exists xP(x)$  の場合、

Conjecture の中で  $\exists xP(x)$  を skolemize すると  $\{selectc \in \mathcal{H}\}$  として要素  $c$  を選び、その否定を  $\neg P(c)$  として neg conj を作り、 $\mathcal{A}, \neg P(c) \vdash \square$  をすべての  $c$  について実行する必要がある、手続きとして成り立たない。

Negate では  $\forall x\neg P(x)$  を反証するので skolemize は発生せず、 $\mathcal{A}, \neg P(x) \vdash \square$  の証明をして  $\{x \leftarrow a\}$  が得られたとすると、 $x$  として  $a$  の存在がいえるので、Conjecture の証明ができる。このときは  $\mathcal{H}$  を用いた、意味論にもとづく操作は必要ない。

その1とその2から、Conjecture  $\Phi$  をそのまま否定するのは、手続きとして成り立たない。