

## **automi**

- Teoria della computazione
  - Teoria della calcolabilità
  - Teoria della complessità
  - Teoria degli automi e dei linguaggi formali
- Alfabeti e stringhe
- Automi
  - Automa a stati finiti deterministico (DFA)
  - Rappresentazioni
  - Automi a stati finiti non-deterministici (NFA)
  - Equivalenze DFA e NFA
  - NFA con  $\epsilon$ -mosse

## Teoria della computazione

- teoria della calcolabilità
- teoria degli automi e dei linguaggi formali
- teoria della complessità

### Teoria della calcolabilità

nata dal **problema di decisione**  $\Rightarrow$  *esiste un algoritmo che, presi in input un insieme di assiomi e una proposizione matematica, è in grado di decidere se la proposizione è vera in ogni struttura che soddisfa gli assiomi?* risposta negativa

*questione centrale*  $\Rightarrow$

- problemi **solvable**
- problemi **unsolvable**

### Teoria della complessità

**solvable**  $\Rightarrow$  problema per il quale esiste un *algoritmo* che permette di calcolare la soluzione del problema per ogni input.

- tempo di esecuzione
- memoria

**hard problem**  $\Rightarrow$  non esiste un *algoritmo* per risolverlo con una quantità ragionevole di risorse.

*Questione centrale*  $\Rightarrow$  classificazione dei problemi in base alla quantità di risorse necessarie per risolverli.

### Teoria degli automi e dei linguaggi formali

automi

- automi a stati finiti
- automi a pila
- macchine di turing

*Questione centrale*  $\Rightarrow$  individuazione della classe di problemi (linguaggi riconoscibili) dai vari modelli e loro proprietà.

### Alfabeti e stringhe

Un alfabeto  $\Sigma$  è un insieme finito e non vuoto di simboli.

Una stringa su  $\Sigma$  è una qualunque sequenza finita di simboli di  $\Sigma$ .

Dicendo che una stringa su  $\Sigma$  è una qualunque sequenza di simboli di  $\Sigma$  ammettiamo anche la sequenza vuota composta da zero simboli.

Chiamiamo tale sequenza stringa vuota, e la indichiamo con  $\epsilon$ .

## Automi

### Automa a stati finiti deterministico (DFA)

**def**  $\Rightarrow$  e una 5-upla  $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  in cui:

- $Q \Rightarrow$  e l insieme finito non vuoto degli *stati*.
- $\Sigma \Rightarrow$  e l alfabeto (input).
- $\delta : Q \times \Sigma \Rightarrow Q \Rightarrow$  e la funzione di transizione.
- $q_0 \in Q \Rightarrow$  e lo stato iniziale.
- $F \subseteq Q \Rightarrow$  e l insieme degli stati finali.

**def**  $\Rightarrow$  il linguaggio  $L(A)$  accettato da un DFA e l insieme di tutte le stringhe accettate dall automa  $A$  (la computazione deve finire in un doppio cerchio, uno stato finale).

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* | A \text{ accetta } w\}$$

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* | \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$$

### Note

- Si osservi che in un DFA, dati uno stato  $q$  e un simbolo di input  $a$ :
  - la mossa dell automa e sempre definita ( $\delta$  associa un valore ad ogni coppia  $(q, a) \in Q \times \Sigma$ );
  - il risultato della mossa e univocamente determinato (e il valore della funzione  $\delta(q, a)$ ).
- ne segue che dati uno stato  $r_0 \in Q$  e una stringa  $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$ , esiste una sola possibile sequenza di mosse dell'automata  $A$  su  $w$ .
- se lo stato iniziale e anche uno stato finale, l automa accetta la stringa vuota.

## Rappresentazioni



Se nella rappresentazione tabellare evidenziamo lo stato iniziale ( $\rightarrow$ ) e gli stati finali ( $*$ ), l'automa è completamente descritto dalla tabella di transizione.

$\delta$	0	1
$\rightarrow q_0$	$q_0$	$q_1$
$*q_1$	$q_2$	$q_1$
$q_2$	$q_1$	$q_1$

Figure 1: varie rappresentazioni automi

Alla fine della computazione l'automa deve trovarsi in uno stato accettante (doppio cerchio).

## Automi a stati finiti non-deterministici (NFA)

**def**  $\Rightarrow$  e una 5-upla  $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  in cui:

- $Q \Rightarrow$  e l'insieme finito non vuoto degli *stati*.
- $\Sigma \Rightarrow$  e l'alfabeto (input).
- $\delta : Q \times \Sigma \Rightarrow 2^Q \Rightarrow$  e la funzione di transizione.  $2^Q = \{S | S \subseteq Q\}$
- $q_0 \in Q \Rightarrow$  e lo stato iniziale.
- $F \subseteq Q \Rightarrow$  e l'insieme degli stati finali.

l'unica differenza tra un DFA e NFA è la funzione di transizione  $\delta$ . invece che associare ad una coppia stato simbolo uno stato, associa ad una coppia stato simbolo un sottoinsieme di stati.  $2^Q =$  insieme delle parti

## Note

- $A$  accetta  $w$  se  $\delta(q_0, w) \cap F \neq \emptyset$  /
- Linguaggio riconosciuto da  $A$ .  $L(A) = \{w \in \Sigma^* | A \text{ accetta } w\}$

## Equivalenze DFA e NFA

DFA e NFA riconoscono la stessa classe di linguaggi:

- $\forall D \exists N_D | L(N_D) = L(D)$  -  $\forall N \exists D_N | L(D_N) = L(N)$

**Equivalenza da DFA a NFA (DFA  $\Rightarrow$  NFA)** i DFA sono casi particolari di NFA. ogni DFA e un NFA. un DFA e equivalente ad un NFA se essi riconoscono lo stesso linguaggio.

**Lemma** Dato un DFA  $D = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ ,  $\forall w \in \Sigma^* : \hat{\delta}_N(q_0, w) = \{\hat{\delta}(q_0, w)\}$

**Teorema** Dato un DFA  $D = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ ,  $L(N_D) = L(D)$

#### NFA con $\epsilon$ -mosse

$\Sigma_\epsilon = \Sigma \cup \{\epsilon\}$  **def**  $\Rightarrow$  e una 5-upla  $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$  in cui:

- $Q \Rightarrow$  e l insieme finito non vuoto degli *stati*.
- $\Sigma \Rightarrow$  e l alfabeto (input).
- $\delta : Q \times \Sigma_\epsilon \Rightarrow 2^Q \Rightarrow$  e la funzione di transizione.  $2^Q = \{S | S \subseteq Q\}$
- $q_0 \in Q \Rightarrow$  e lo stato iniziale.
- $F \subseteq Q \Rightarrow$  e l insieme degli stati finali.

Si noti che  $\epsilon$  non consuma simboli dalla stringa di input quando computiamo nell automa.