

# logica

- logica sillogistica
  - sintassi
  - dimostrazioni
    - \* dirette
      - leggi di conversione:
      - sillogismi perfetti:
    - \* indirette
      - contraddittori:
- logica proposizionale
- risoluzione proposizionale

# logica sillogistica

## sintassi

- $A(x, y)$ : Tutti gli  $x$  sono  $y$ .
- $E(x, y)$ : Nessun  $x$  è  $y$ .
- $I(x, y)$ : Qualche  $x$  è  $y$ .
- $O(x, y)$ : Qualche  $x$  non è  $y$ .

Figure 1: termini logici

termini non logici:

- Abbiamo un insieme finito (vocabolario)  $V$  di termini non logici (e.g. “uomo”, “mortale”, eccetera) e tale che  $A, E, I, O$  non sono in  $V$ .

Un modello  $M = (\Delta, \iota)$  per un vocabolario  $V$  è dato da:

- Un insieme non vuoto  $\Delta$  di individui (“dominio del discorso”);
- Una funzione  $\iota$  che associa ogni termine non logico  $x \in V$  a un insieme non vuoto  $\iota(x) \subseteq \Delta$ ,  $\iota(x) \neq \emptyset$ .

- Sia  $V = \{\text{uomo, mortale, mammifero, dio}\}$ .
- Un possibile modello  $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$  per  $V$  può essere costruito come:
  - $\Delta = \{\text{Socrate, Fuffi, Polly, Zeus}\}$ ;
  - $\iota(\text{uomo}) = \{\text{Socrate}\}$ ;
  - $\iota(\text{mortale}) = \{\text{Socrate, Fuffi, Polly}\}$ ;
  - $\iota(\text{mammifero}) = \{\text{Socrate, Fuffi, Zeus}\}$ ;
  - $\iota(\text{dio}) = \{\text{Zeus}\}$ .



Dato un modello  $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$  e una formula  $\phi$  della nostra logica, diciamo che  $\mathfrak{M}$  soddisfa  $\phi$  (e scriviamo  $\mathfrak{M} \models \phi$ ) se  $\phi$  è vera in  $\mathfrak{M}$ . Più precisamente, per  $x, y \in V$ ,  $x \neq y$ :

- $\mathfrak{M} \models A(x, y)$  se e solo se  $\iota(x) \subseteq \iota(y)$  (tutti gli  $x$  sono  $y$ );
- $\mathfrak{M} \models E(x, y)$  se e solo se  $\iota(x) \cap \iota(y) = \emptyset$  (nessun  $x$  è  $y$ );
- $\mathfrak{M} \models I(x, y)$  se e solo se  $\iota(x) \cap \iota(y) \neq \emptyset$  (qualche  $x$  è  $y$ );
- $\mathfrak{M} \models O(x, y)$  se e solo se  $\iota(x) \not\subseteq \iota(y)$  (qualche  $x$  non è  $y$ ).

Se  $\Sigma$  è un insieme di formule, scriviamo  $\mathfrak{M} \models \Sigma$  se  $\mathfrak{M} \models \phi$  per tutti gli  $\phi \in \Sigma$ .

- $\mathfrak{M} \models A(\text{uomo, mammifero})$ , perchè  $\iota(\text{uomo}) \subseteq \iota(\text{mammifero})$ ;
- $\mathfrak{M} \not\models A(\text{mortale, mammifero})$ , perchè  $\iota(\text{mortale}) \not\subseteq \iota(\text{mammifero})$ ;
- $\mathfrak{M} \models E(\text{dio, mortale})$ , perchè  $\iota(\text{mortale}) \cap \iota(\text{dio}) = \emptyset$ ;
- $\mathfrak{M} \not\models E(\text{mortale, mammifero})$ , perchè  $\text{Fuffi} \in \iota(\text{mortale}) \cap \iota(\text{mammifero})$ ;
- $\mathfrak{M} \models I(\text{mortale, mammifero})$ , perchè  $\text{Socrate} \in \iota(\text{mortale}) \cap \iota(\text{mammifero})$ ;
- $\mathfrak{M} \not\models I(\text{mortale, dio})$ , perchè  $\iota(\text{mortale}) \cap \iota(\text{dio}) = \emptyset$ ;
- $\mathfrak{M} \models O(\text{mammifero, mortale})$ , perchè  $\text{Zeus} \in \iota(\text{mammifero})$ ,  $\text{Zeus} \notin \iota(\text{mortale})$ ;
- $\mathfrak{M} \not\models O(\text{dio, mammifero})$ , perchè  $\iota(\text{dio}) \subseteq \iota(\text{mammifero})$ .



inferenze quadrato delle opposizioni:

- If  $A$  is true, then  $E$  is false,  $I$  is true,  $O$  is false;
- If  $E$  is true, then  $A$  is false,  $I$  is false,  $O$  is true;
- If  $I$  is true, then  $E$  is false,  $A$  and  $O$  are indeterminate;
- If  $O$  is true, then  $A$  is false,  $E$  and  $I$  are indeterminate;
- If  $A$  is false, then  $O$  is true,  $E$  and  $I$  are indeterminate;
- If  $E$  is false, then  $I$  is true,  $A$  and  $O$  are indeterminate;
- If  $I$  is false, then  $A$  is false,  $E$  is true,  $O$  is true;
- If  $O$  is false, then  $A$  is true,  $E$  is false,  $I$  is true

## dimostrazioni

### dirette

#### leggi di conversione:

- **C1:**  $E(x, y) \Rightarrow E(y, x)$
- **C2:**  $A(x, y) \Rightarrow I(x, y)$
- **C3:**  $I(x, y) \Rightarrow I(y, x)$

### indirette

#### contraddittori:

- $\overline{A(x, y)} = O(x, y)$
- $\overline{E(x, y)} = I(x, y)$
- $\overline{I(x, y)} = E(x, y)$
- $\overline{O(x, y)} = A(x, y)$
- $\overline{\phi} = \phi$

### sillogismi perfetti:

- **PS1:**  $A(y, z) \wedge A(x, y) \Rightarrow A(x, z)$
- **PS2:**  $E(y, z) \wedge A(x, y) \Rightarrow E(x, z)$
- **PS3:**  $A(y, z) \wedge I(x, y) \Rightarrow I(x, z)$
- **PS4:**  $E(y, z) \wedge I(x, y) \Rightarrow O(x, z)$

# logica proposizionale

## Definizione

Una formula  $P$  è **soddisfacibile** se esiste una valutazione delle variabili  $v$  tale che  $v(P) = 1$ , cioè se esiste una riga della sua tavola di verità nella quale la formula ha valore 1. In questo caso si dice che la valutazione  $v$  soddisfa la formula  $P$  e si scrive anche  $v \models P$ .

Una formula è una **tautologia** se per ogni valutazione delle variabili  $v$  si ha  $v(P) = 1$ , cioè se in ogni riga della tavola di verità di  $P$  la formula ha valore 1. In questo caso si scrive anche  $\models P$ .

Una formula è una **contraddizione** o insoddisfacibile se per ogni valutazione delle variabili  $v$  si ha  $v(P) = 0$ , cioè se in ogni riga della tavola di verità di  $P$  la formula ha valore 0.

## Forma normale disgiuntiva

### Definizione

Un **letterale** è una variabile o la negazione di una variabile. Lo indicheremo in generale con  $\ell$ .

Una formula è in **forma normale disgiuntiva (DNF)** se è della forma

$$\bigvee_{i=1}^n \left( \bigwedge_{j=1}^{m_i} \ell_{ij} \right)$$

dove per ogni  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, m_i$  (con  $n \geq 1$  e  $m_i \geq 1$ ) gli  $\ell_{ij}$  sono letterali.

### Esempio

$(X \wedge \neg Y) \vee (\neg Z \wedge X \wedge Y)$  è una formula in DNF (dove  $n = 2$ ,  $m_1 = 2$  e  $m_2 = 3$ ).

## CNF

### Definizione

Analogamente diciamo che una formula è in **forma normale congiuntiva** se è una congiunzione di disgiunzioni di letterali.

### Esempio

La formula  $(X \vee \neg Y) \wedge (\neg Y \vee Z)$  è in CNF.

La formula  $\neg Y \wedge (X \vee Z)$  è in CNF.

Le formule  $\neg Y \wedge X \wedge Z$  e  $\neg Y \vee Z \vee \neg Z$  sono in CNF (e anche in DNF).

### Esempio

L'implicazione invece non è commutativa  $A \rightarrow B \neq B \rightarrow A$  e neanche associativa  $A \rightarrow (B \rightarrow C) \neq (A \rightarrow B) \rightarrow C$ .

**Contronominale:**  $A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$ . Questa equivalenza si usa spesso nelle dimostrazioni: se voglio dimostrare che da  $A$  segue  $B$  posso provare a ipotizzare la negazione di  $B$  e concludere che da tale ipotesi segue la negazione di  $A$ . Se poi aggiungo che  $A \wedge \neg A \equiv \perp$  ottengo le dimostrazioni per assurdo.

**Implicazione materiale:** le formule  $A \rightarrow B$  e  $\neg A \vee B$  sono logicamente equivalenti:

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg A \vee B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

### Esempio

**Doppia negazione:**  $\neg \neg A \equiv A$ .

**Leggi di De Morgan:** Le formule  $\neg(A \vee B)$  e  $\neg A \wedge \neg B$  sono logicamente equivalenti.

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

Analogamente si ha che  $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ . Inoltre vale

$$\begin{aligned} A \wedge B &\equiv \neg(\neg A \vee \neg B) \\ A \vee B &\equiv \neg(\neg A \wedge \neg B) \end{aligned}$$

## Esempio

### Assorbimento:

$$\begin{aligned} X \vee (X \wedge Y) &\equiv X \\ X \wedge (X \vee Y) &\equiv X \end{aligned}$$

**Legge distributiva:** Vale la distributività di  $\wedge$  rispetto a  $\vee$  e anche il viceversa.

$$\begin{aligned} X \vee (Y \wedge Z) &\equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z) \\ X \wedge (Y \vee Z) &\equiv (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \end{aligned}$$

Generalizzando si ha che vale:

$$\begin{aligned} (X_1 \vee X_2) \wedge (Y_1 \vee Y_2) &\equiv (X_1 \wedge Y_1) \vee (X_1 \wedge Y_2) \vee (X_2 \wedge Y_1) \vee (X_2 \wedge Y_2) \\ (X_1 \wedge X_2) \vee (Y_1 \wedge Y_2) &\equiv (X_1 \vee Y_1) \wedge (X_1 \vee Y_2) \wedge (X_2 \vee Y_1) \wedge (X_2 \vee Y_2) \end{aligned}$$

### Definizione

Una formula  $P$  è una  **$\alpha$ -formula** se ha la forma  $A \wedge B$  oppure  $\neg(A \vee B)$  oppure  $\neg(A \rightarrow B)$ . I ridotti di una  $\alpha$ -formula sono definiti dalla seguente tabella:

	ridotti	
$A \wedge B$	A	B
$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$
$\neg(A \rightarrow B)$	A	$\neg B$

### Proposizione

Ogni  $\alpha$ -formula è equivalente alla congiunzione dei suoi ridotti.

### Definizione

Una formula  $P$  è una  **$\beta$ -formula** se ha la forma  $A \vee B$  oppure  $\neg(A \wedge B)$  oppure  $A \rightarrow B$ . I ridotti di una  $\beta$ -formula sono definiti dalla seguente tabella:

	ridotti	
$A \vee B$	A	B
$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$
$A \rightarrow B$	$\neg A$	B

### Proposizione

Ogni  $\beta$ -formula è equivalente alla disgiunzione dei suoi ridotti.

### Proposizione

Ogni formula  $P$  è di uno dei seguenti tipi:

- $P$  è un letterale;
- $P$  è una doppia negazione, cioè  $P = \neg \neg Q$ ;
- $P$  è una  $\alpha$ -formula;
- $P$  è una  $\beta$ -formula.

### Definizione

Una coppia di letterali  $X, \neg X$  si dice **complementare**.

Chiaramente una coppia complementare di letterali non è soddisfacibile. In generale vale che:

### Proposizione

Un insieme di letterali è soddisfacibile se e solo se non contiene coppie complementari.

### Definizione

Un ramo di un tableau è **chiuso** se la foglia contiene una coppia complementare. Un tableau è **chiuso** se ogni ramo è chiuso.

(slide tratte dal corso di B. Gerla)

### Definizione

Un **tableau** per una formula  $P$  è un albero  $T$  i cui nodi sono etichettati con insiemi di sottoformule di  $P$ .

Denotiamo con  $E(n)$  l'etichetta del nodo  $n$ .

L'albero si costruisce per passi successivi.

Al passo 0 abbiamo un albero  $T_0$  formato da un solo nodo con etichetta  $\{P\}$ .

Se al passo  $i - 1$  abbiamo costruito un albero  $T_{i-1}$ , al passo  $i$  costruiamo l'albero  $T_i$  guardando le foglie dell'albero  $T_{i-1}$ :

- Se nelle foglie ci sono solo letterali, allora la costruzione termina e  $T_{i-1}$  sarà l'albero finale.

- supponiamo che nell'etichetta  $E(n)$  della foglia  $n$  ci sia una formula  $G$  che non è un letterale. Allora si possono avere i seguenti casi:

- Se  $G$  è una doppia negazione  $G = \neg\neg G_1$ , allora l'albero  $T_i$  si costruisce aggiungendo un nodo  $n_1$  come successore di  $n$  e ponendo

$$E(n_1) = (E(n) \setminus \{G\}) \cup \{G_1\}.$$

- Se  $G$  è una  $\alpha$  formula con ridotti  $G_1$  e  $G_2$ , allora l'albero  $T_i$  si costruisce aggiungendo un nodo  $n_1$  come successore di  $n$  e ponendo

$$E(n_1) = (E(n) \setminus \{G\}) \cup \{G_1, G_2\}.$$

- Se  $G$  è una  $\beta$  formula con ridotti  $G_1$  e  $G_2$ , allora l'albero  $T_i$  si costruisce aggiungendo due nodi  $n_1$  e  $n_2$  come successori di  $n$  e ponendo

$$E(n_1) = (E(n) \setminus \{G\}) \cup \{G_1\},$$

$$E(n_2) = (E(n) \setminus \{G\}) \cup \{G_2\}.$$

To convert a [propositional formula](#) to [conjunctive normal form](#), perform the following two steps:

- Push negations into the formula, repeatedly applying [De Morgan's Law](#), until all negations only apply to atoms. You obtain a formula in [negation normal form](#).

- $\neg(p \vee q)$  to  $(\neg p) \wedge (\neg q)$

- $\neg(p \wedge q)$  to  $(\neg p) \vee (\neg q)$

- Repeatedly apply the [distributive law](#) where a disjunction occurs over a conjunction. Once this is not possible anymore, the formula is in CNF.

- $p \vee (q \wedge r)$  to  $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

To obtain a formula in disjunctive normal form, simply apply the distribution of  $\wedge$  over  $\vee$  in step 2.

# risoluzione proposizionale

## Definizione

Una **clausola** è una disgiunzione di letterali.

## Definizione

La **clausola vuota** (denotata con  $\square$ ) è l'insieme vuoto di letterali.

## Semantica delle clausole

Adattando la nozione di valutazione agli insiemi di clausole abbiamo:

## Definizione

Sia  $S$  un insieme di clausole. Una valutazione è una funzione  $v: Var \rightarrow \{0, 1\}$ . Per definire quando  $v$  soddisfa  $S$  (in simboli  $v \models S$ ) procediamo nel seguente modo:

- Se  $X \in Var$  allora  $v \models X$  se  $v(X) = 1$  e  $v \models \neg X$  se  $v(X) = 0$ ;
- per ogni clausola  $C \in S$ , con  $C = \{L_1, \dots, L_n\}$  si ha  $v \models C$  se esiste  $i \in \{1, \dots, n\}$  tale che  $v \models L_i$ ;
- $v \models S$  se per ogni  $C \in S$  si ha  $v \models C$ .

Nei casi particolari della clausola vuota e dell'insieme vuoto di clausole abbiamo che

La clausola vuota  $\square$  è sempre insoddisfacibile.

Ogni insieme di clausole che contiene  $\square$  è insoddisfacibile.

L'insieme vuoto di clausole  $\emptyset$  è soddisfatto da ogni interpretazione.

## Definizione

Due insiemi di clausole  $S$  e  $S'$  sono logicamente equivalenti ( $S \equiv S'$ ) se sono soddisfatti dalle stesse valutazioni.

$S'$  è una conseguenza logica di  $S$  se ogni valutazione che soddisfa  $S$  soddisfa anche  $S'$ .

## Proposizione

Una clausola è una tautologia se e solo se contiene un letterale e la sua negazione.

Sia  $S'$  l'insieme ottenuto da  $S$  cancellando una tautologia. Allora  $S \equiv S'$ .

## Esempio

$S = \{\{X, Y, \neg Z\}, \{X, \neg Y\}, \{X, \neg X, Y\}\}$  è logicamente equivalente a  $S' = \{\{X, Y, \neg Z\}, \{X, \neg Y\}\}$ . Controllare che le formule  $(X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee \neg Y) \wedge (X \vee \neg X \vee Y)$  e  $(X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee \neg Y)$  sono logicamente equivalenti.

## Definizione

Siano  $C_1$  e  $C_2$  due clausole tali che esista un letterale  $L \in C_1$  e  $\neg L \in C_2$ . Allora il **risolvente**  $R$  di  $C_1$  e  $C_2$  (rispetto al letterale  $L$ ) è la clausola

$$R = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{\neg L\}).$$

Diciamo anche che  $R$  si ottiene per **risoluzione** da  $C_1$  e  $C_2$ .

## Esempio

Se  $C_1 = \{\neg X, \neg Y, Z\}$  e  $C_2 = \{Y, H, Z\}$  allora  $R = \{\neg X, Z, H\}$  è il risolvente di  $C_1$  e  $C_2$  rispetto a  $Y$ .

## Proposizione: correttezza della risoluzione

Il risolvente  $R$  è conseguenza logica della congiunzione  $\{C_1, C_2\}$ .

## Dimostrazione.

Sia  $v$  una valutazione tale che  $v \models C_1$  e  $v \models C_2$ . Questo vuol dire che esistono  $M \in C_1$  e  $N \in C_2$  tali che  $v(M) = v(N) = 1$ . Se fosse  $M = L$  e  $N = \neg L$  non potrebbe essere  $v(M) = v(N) = 1$ , quindi almeno uno tra  $M$  e  $N$  appartiene a  $R$  e quindi  $R$  è soddisfatta.  $\square$

Si ha quindi che

$$\{C_1, C_2\} \equiv \{C_1, C_2, R\}.$$

Nota che se  $R = \square$  allora si ha  $\{C_1, C_2\} \equiv \{C_1, C_2, \square\}$  che è insoddisfacibile e quindi:

Se da  $C_1$  e  $C_2$  ottengo  $\square$  tramite risoluzione, allora l'insieme  $\{C_1, C_2\}$  è insoddisfacibile.

## Definizione

Una clausola  $C$  è derivabile **per risoluzione** da un insieme di clausole  $S$  se esiste una sequenza  $C_1, \dots, C_n$  di clausole tale che  $C_n = C$  e per ogni  $i = 1, \dots, n-1$  si ha che  $C_i \in S$  oppure  $C_i$  si ottiene per risoluzione da clausole di  $S$  e da qualche  $C_j$  con  $j < i$ .

In questo caso scriviamo

$$S \vdash_R C.$$

## Definizione

Una **refutazione** di  $S$  è una derivazione della clausola vuota  $\square$  da  $S$ .  $S$  è refutabile se  $S \vdash_R \square$ .

## Teorema

$S \vdash_R \square$  se e solo se  $S$  è insoddisfacibile.

## Definizione

Se  $C$  e  $G$  sono due clausole e  $C \subseteq G$  (ma  $C \neq G$ ) allora diciamo che  $C$  **sussunte**  $G$  (o che  $G$  è **sussunta** da  $C$ ).

## Proposizione

Sia  $S'$  l'insieme ottenuto cancellando da  $S$  tutte le clausole  $G$  sussunte da altre clausole  $C \in S$ . Allora  $S' \equiv S$ .

## Procedura di Davis-Putnam

E' un algoritmo che semplifica un insieme finito di clausole al fine di determinare se è soddisfacibile oppure no.

## Definizione

Se  $X$  è una variabile, si dice che una clausola è **X-esonerata** se non contiene né  $X$  né  $\neg X$ .

Dato un insieme di clausole  $S$ , gli **X-risolventi** di  $S$  sono tutte le clausole che si ottengono da  $S$  facendo la risoluzione rispetto a  $X$  e  $\neg X$ .

Sia  $S$  l'insieme di clausole considerato.

Iniziamo con il togliere da  $S$  tutte le tautologie e le clausole sussunte. Poi trasformiamo  $S$  con una sequenza di passi.

## Procedura di Davis-Putnam

Da  $S$  otteniamo un insieme  $S_1$  nel seguente modo:

- Si eliminano da  $S$  tutte le tautologie e tutte le clausole sussunte.
- Si sceglie una variabile  $X$  (detta il **pivot**) che occorre nella clausola più corta. Nel caso di parità di lunghezza si applica l'ordine alfabetico.
- Si aggiungono a  $S_1$  tutte le clausole **X-esonerate** di  $S$ .
- Si aggiungono a  $S_1$  tutti gli **X-risolventi** di  $S$  fatti su clausole che non sono **X-esonerate**.
- Si rimuovono da  $S_1$  tutte le eventuali tautologie e le clausole sussunte.

Dopo questo primo passo la variabile  $X$  non sarà presente in  $S_1$ .

Nota che se in  $S$  ci sono solo clausole che contengono  $X$  o solo clausole che contengono  $\neg X$ , allora in  $S_1$  tali clausole non saranno presenti.

Per quanto detto finora,  $S_1$  è soddisfacibile se e solo se  $S$  è soddisfacibile.

## Teorema

Sia  $S$  un insieme di clausole nelle variabili  $X_1, \dots, X_n$ . Allora dopo  $t$  passi (con  $t \leq n$ ) l'insieme  $S_t$  è costituito solo dalla clausola vuota, oppure è vuoto. Nel primo caso  $S$  è insoddisfacibile, nel secondo caso è soddisfacibile.