logica

- logica proposizionale
  - sintassi
  - dimostrazioni

logica proposizionale

- **A**(x, y): Tutti gli x sono y.
- **E**(x, y): Nessun x è y.
- **I**(x, y): Qualche x è y.
- **O**(x, y): Qualche x non è y.

Figure 1: regole

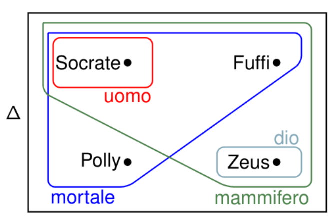
sintassi

termini logici:
- A -> tutti
- E -> nessuno
- I -> qualche
- O -> non tutti

termini non logici:
- Abbiamo un insieme finito (vocabolario) V di termini non logici (e.g. "uomo", "mortale", eccetera) e tale che A, E, I, O non sono in V.

Un modello M = (Δ, ι) per un vocabolario V è dato da:
- Un insieme non vuoto Δ di individui ("dominio del discorso");
- Una funzione ι che associa ogni termine non logico $x \in V$ a un insieme non vuoto $\iota(x) \subseteq \Delta$, $\iota(x) \neq \emptyset$.

- Sia $V = \{\text{uomo}, \text{mortale}, \text{mammifero}, \text{dio}\}$.
- Un possibile modello $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$ per V può essere costruito come:
  - $\Delta = \{\text{Socrate}, \text{Fuffi}, \text{Polly}, \text{Zeus}\}$;
  - $\iota(\text{uomo}) = \{\text{Socrate}\}$;
  - $\iota(\text{mortale}) = \{\text{Socrate}, \text{Fuffi}, \text{Polly}\}$;
  - $\iota(\text{mammifero}) = \{\text{Socrate}, \text{Fuffi}, \text{Zeus}\}$;
  - $\iota(\text{dio}) = \{\text{Zeus}\}$.



Dato un modello $\mathfrak{M} = (\Delta, \iota)$ e una formula ϕ della nostra logica, diciamo che $\mathfrak{M}$ soddisfa ϕ (e scriviamo $\mathfrak{M} \models \phi$) se ϕ è vera in $\mathfrak{M}$. Più precisamente, per $x, y \in V$, $x \neq y$:

- $\mathfrak{M} \models$ **A**(x, y) se e solo se $\iota(x) \subseteq \iota(y)$ (tutti gli x sono y);
- $\mathfrak{M} \models$ **E**(x, y) se e solo se $\iota(x) \cap \iota(y) = \emptyset$ (nessun x è y);
- $\mathfrak{M} \models$ **I**(x, y) se e solo se $\iota(x) \cap \iota(y) \neq \emptyset$ (qualche x è y);
- $\mathfrak{M} \models$ **O**(x, y) se e solo se $\iota(x) \not\subseteq \iota(y)$ (qualche x non è y).

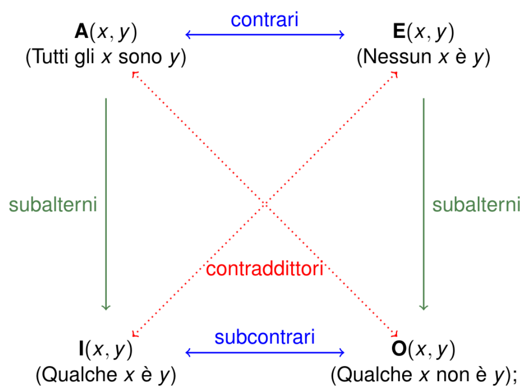
Se Σ è un insieme di formule, scriviamo $\mathfrak{M} \models \Sigma$ se $\mathfrak{M} \models \phi$ per tutti gli $\phi \in \Sigma$.

- $\mathfrak{M} \models$ **A**(uomo, mammifero), perchè $\iota(\text{uomo}) \subseteq \iota(\text{mammifero})$;
- $\mathfrak{M} \not\models$ **A**(mortale, mammifero), perchè $\iota(\text{mortale}) \not\subseteq \iota(\text{mammifero})$;

- $\mathfrak{M} \models$ **E**(dio, mortale), perchè $\iota(\text{mortale}) \cap \iota(\text{dio}) = \emptyset$;
- $\mathfrak{M} \not\models$ **E**(mortale, mammifero), perchè Fuffi $\in \iota(\text{mortale}) \cap \iota(\text{mammifero})$;

- $\mathfrak{M} \models$ **I**(mortale, mammifero), perchè Socrate $\in \iota(\text{mortale}) \cap \iota(\text{mammifero})$;
- $\mathfrak{M} \not\models$ **I**(mortale, dio), perchè $\iota(\text{mortale}) \cap \iota(\text{dio}) = \emptyset$;

- $\mathfrak{M} \models$ **O**(mammifero, mortale), perchè Zeus $\in \iota(\text{mammifero})$, Zeus $\notin \iota(\text{mortale})$;
- $\mathfrak{M} \not\models$ **O**(dio, mammifero), perchè $\iota(\text{dio}) \subseteq \iota(\text{mammifero})$.



inferenze:
- If A is true, then E is false, I is true, O is false;
- If E is true, then A is false, I is false, O is true;
- If I is true, then E is false, A and O are indeterminate;
- If O is true, then A is false, E and I are indeterminate;
- If A is false, then O is true, E and I are indeterminate;
- If E is false, then I is true, A and O are indeterminate;
- If I is false, then A is false, E is true, O is true;
- If O is false, then A is true, E is false, I is true

dimostrazioni

dirette

leggi di conversione:

- **C1**: $E(x, y) \Rightarrow E(y, x)$
- **C2**: $A(x, y) \Rightarrow I(x, y)$
- **C3**: $I(x, y) \Rightarrow I(y, x)$

sillogismi perfetti:

- **PS1**: $A(y, z) \wedge A(x, y) \Rightarrow A(x, z)$
- **PS2**: $E(y, z) \wedge A(x, y) \Rightarrow E(x, z)$
- **PS3**: $A(y, z) \wedge I(x, y) \Rightarrow I(x, z)$
- **PS4**: $E(y, z) \wedge I(x, y) \Rightarrow O(x, z)$

indirette

contradditori:

- $\overline{A(x,y)} = O(x,y)$
- $\overline{E(x,y)} = I(x,y)$
- $\overline{I(x,y)} = E(x,y)$
- $\overline{O(x,y)} = A(x,y)$
- $\overline{\overline{\phi}} = \phi$