

automi

- Teoria della computazione
 - Teoria della calcolabilità
 - Teoria della complessità
 - Teoria degli automi e dei linguaggi formali
- Alfabeti e stringhe
- Automi
 - Automa a stati finiti deterministico (DFA)
 - Rappresentazioni
 - Automi a stati finiti non-deterministici (NFA)
 - Equivalenze DFA e NFA
 - NFA con ϵ -mosse

Teoria della computazione

- teoria della calcolabilità
- teoria degli automi e dei linguaggi formali
- teoria della complessità

Teoria della calcolabilità

nata dal **problema di decisione** \Rightarrow *esiste un algoritmo che, presi in input un insieme di assiomi e una proposizione matematica, è in grado di decidere se la proposizione è vera in ogni struttura che soddisfa gli assiomi?* risposta negativa

questione centrale \Rightarrow

- problemi **solvable**
- problemi **unsolvable**

Teoria della complessità

solvable \Rightarrow problema per il quale esiste un *algoritmo* che permette di calcolare la soluzione del problema per ogni input.

- tempo di esecuzione
- memoria

hard problem \Rightarrow non esiste un *algoritmo* per risolverlo con una quantità ragionevole di risorse.

Questione centrale \Rightarrow classificazione dei problemi in base alla quantità di risorse necessarie per risolverli.

Teoria degli automi e dei linguaggi formali

automi

- automi a stati finiti
- automi a pila
- macchine di turing

Questione centrale \Rightarrow individuazione della classe di problemi (linguaggi riconoscibili) dai vari modelli e loro proprietà.

Alfabeti e stringhe

Un alfabeto Σ è un insieme finito e non vuoto di simboli.

Una stringa su Σ è una qualunque sequenza finita di simboli di Σ .

Dicendo che una stringa su Σ è una qualunque sequenza di simboli di Σ ammettiamo anche la sequenza vuota composta da zero simboli.

Chiamiamo tale sequenza stringa vuota, e la indichiamo con ϵ .

Automi

Automa a stati finiti deterministico (DFA)

def \Rightarrow e una 5-upla $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ in cui:

- $Q \Rightarrow$ e l insieme finito non vuoto degli *stati*.
- $\Sigma \Rightarrow$ e l alfabeto (input).
- $\delta : Q \times \Sigma \Rightarrow Q \Rightarrow$ e la funzione di transizione.
- $q_0 \in Q \Rightarrow$ e lo stato iniziale.
- $F \subseteq Q \Rightarrow$ e l insieme degli stati finali.

def \Rightarrow il linguaggio $L(A)$ accettato da un DFA e l insieme di tutte le stringhe accettate dall automa A (la computazione deve finire in un doppio cerchio, uno stato finale).

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* | A \text{ accetta } w\}$$

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* | \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$$

Note

- Si osservi che in un DFA, dati uno stato q e un simbolo di input a :
 - la mossa dell automa e sempre definita (δ associa un valore ad ogni coppia $(q, a) \in Q \times \Sigma$);
 - il risultato della mossa e univocamente determinato (e il valore della funzione $\delta(q, a)$).
- ne segue che dati uno stato $r_0 \in Q$ e una stringa $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$, esiste una sola possibile sequenza di mosse dell'automata A su w .
- se lo stato iniziale e anche uno stato finale, l automa accetta la stringa vuota.

Rappresentazioni



Se nella rappresentazione tabellare evidenziamo lo stato iniziale (\rightarrow) e gli stati finali ($*$), l'automa è completamente descritto dalla tabella di transizione.

| δ | 0 | 1 |
|-------------------|-------|-------|
| $\rightarrow q_0$ | q_0 | q_1 |
| $* q_1$ | q_2 | q_1 |
| q_2 | q_1 | q_1 |

Figure 1: varie rappresentazioni automi

Alla fine della computazione l'automa deve trovarsi in uno stato accettante (doppio cerchio).

Automi a stati finiti non-deterministici (NFA)

def \Rightarrow e una 5-upla $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ in cui:

- $Q \Rightarrow$ e l'insieme finito non vuoto degli *stati*.
- $\Sigma \Rightarrow$ e l'alfabeto (input).
- $\delta : Q \times \Sigma \Rightarrow 2^Q \Rightarrow$ e la funzione di transizione. $2^Q = \{S | S \subseteq Q\}$
- $q_0 \in Q \Rightarrow$ e lo stato iniziale.
- $F \subseteq Q \Rightarrow$ e l'insieme degli stati finali.

l'unica differenza tra un DFA e NFA è la funzione di transizione δ . invece che associare ad una coppia stato simbolo uno stato, associa ad una coppia stato simbolo un sottoinsieme di stati. $2^Q =$ insieme delle parti

Note

- A accetta w se $\delta(q_0, w) \cap F \neq \emptyset$ /
- Linguaggio riconosciuto da A . $L(A) = \{w \in \Sigma^* | A \text{ accetta } w\}$

Equivalenze DFA e NFA

DFA e NFA riconoscono la stessa classe di linguaggi:

- $\forall D \exists N_D | L(N_D) = L(D)$ - $\forall N \exists D_N | L(D_N) = L(N)$

Equivalenza da DFA a NFA (DFA \Rightarrow NFA) i DFA sono casi particolari di NFA. ogni DFA e un NFA. un DFA e equivalente ad un NFA se essi riconoscono lo stesso linguaggio.

Lemma Dato un DFA $D = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, $\forall w \in \Sigma^* : \hat{\delta}_N(q_0, w) = \{\hat{\delta}(q_0, w)\}$

Teorema Dato un DFA $D = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, $L(N_D) = L(D)$

NFA con ϵ -mosse

$\Sigma_\epsilon = \Sigma \cup \{\epsilon\}$ **def** \Rightarrow e una 5-upla $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ in cui:

- $Q \Rightarrow$ e l insieme finito non vuoto degli *stati*.
- $\Sigma \Rightarrow$ e l alfabeto (input).
- $\delta : Q \times \Sigma_\epsilon \Rightarrow 2^Q \Rightarrow$ e la funzione di transizione. $2^Q = \{S | S \subseteq Q\}$
- $q_0 \in Q \Rightarrow$ e lo stato iniziale.
- $F \subseteq Q \Rightarrow$ e l insieme degli stati finali.

Si noti che ϵ non consuma simboli dalla stringa di input quando computiamo nell automa.