

Laboratorio di Elettromagnetismo e Ottica

Esperienza libera sui circuiti

Prof. C. Massimi e N. Mauri
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

Obiettivi

- Progettare un circuito contenente R , L e C in regime transitorio, sinusoidale o impulsivo
 - Lista componenti disponibili su virtuale.unibo.it
- Studiare analiticamente il comportamento atteso
- Realizzare il circuito su breadboard ELVIS II
- Osservare il comportamento con oscilloscopio (da banco o ELVIS)
- Scrivere un programma LabVIEW per effettuare misure significative
- Confrontare misure con comportamento atteso
 - Descrizione qualitative, misure selezionate, confronto con comportamento e valori attesi

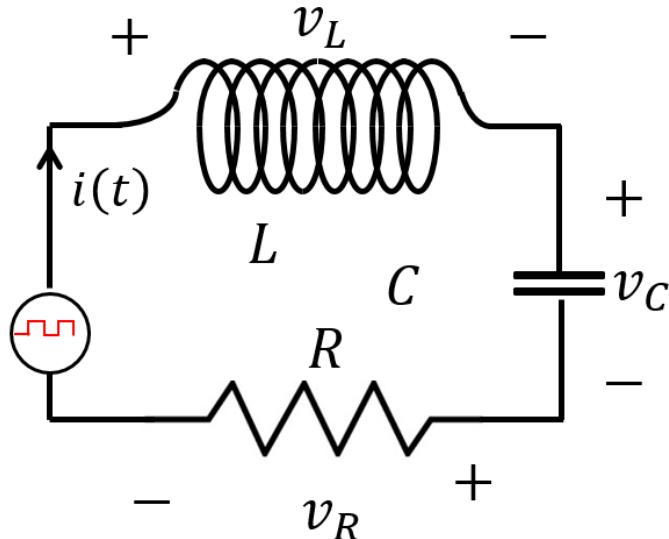


Aspetti comuni: dati digitali

- In tutti i casi i dati acquisiti sono il frutto di una conversione analogico – digitale.
- I canali analog input di ELVISII si basano su un ADC a 16 bit, intervallo ingresso ± 10 V. La risoluzione è quindi 0.305 mV.
- Il rumore (incertezza casuale) è dovuto a molti aspetti e si valuta eseguendo misure ripetute
 - Tensioni in funzione del tempo
 - Ampiezza e fase di una sinusoide tramite «extract single tone»
- La frequenza di acquisizione deve essere impostata in modo da poter sondare adeguatamente le forme d'onda. Per una forma d'onda periodica: almeno 10 punti per periodo.



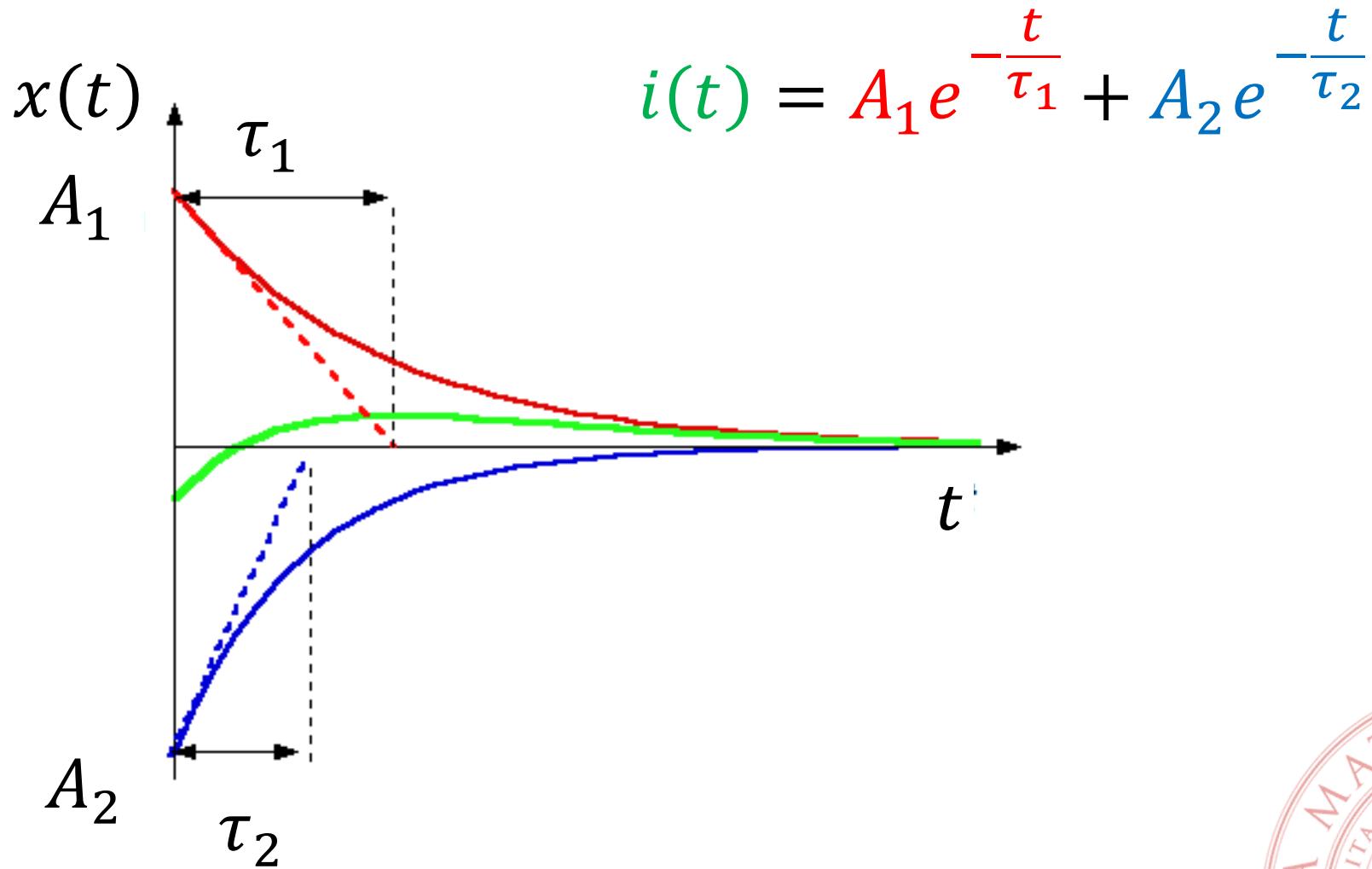
RLC transiente



- Generatore di onde quadre per indurre transienti periodici
- A seconda dei valori di R , L e C si possono avere oscillazioni sottosmorzate, con smorzamento critico o sovrasmorzate



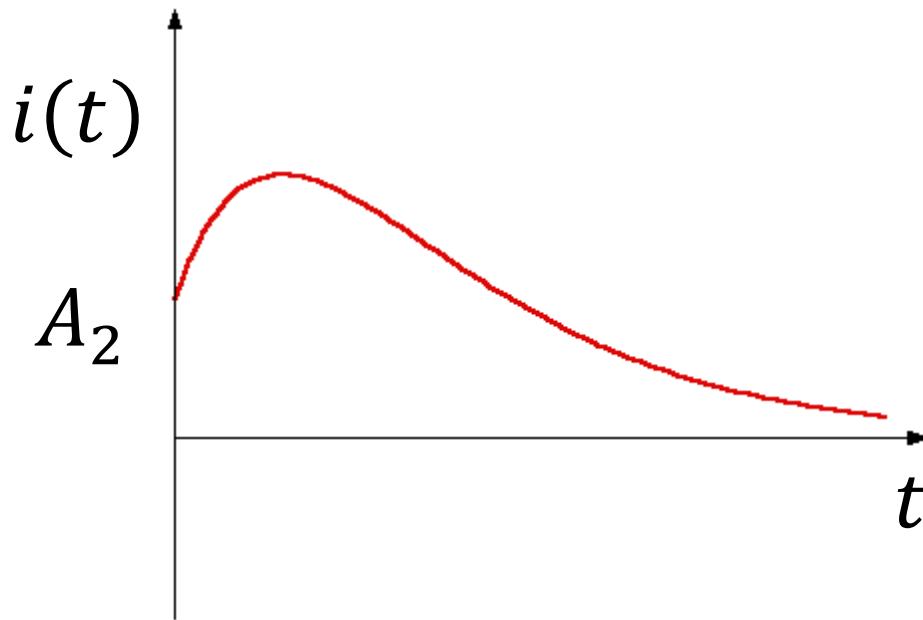
Circuito sovrasmorzato: $\alpha > \omega_0$



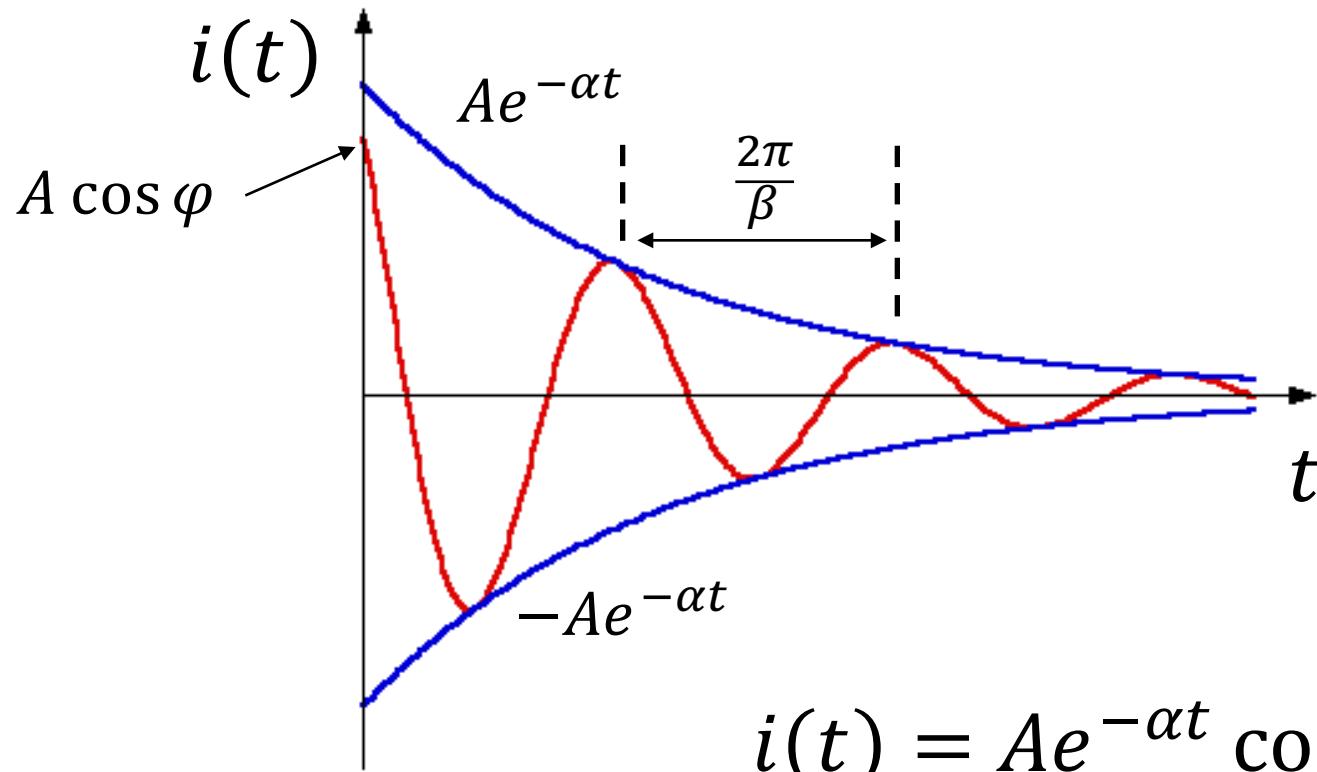
Smorzamento critico: $\alpha = \omega_0$

- La soluzione è

$$i(t) = (A_1 t + A_2)e^{-\alpha t}$$

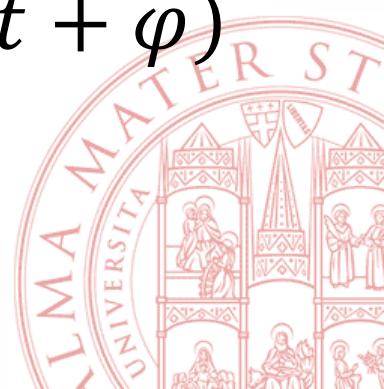


Circuito sottosmorzato: $\alpha < \omega_0$



$$i(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\beta t + \varphi)$$

$$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$



RLC transiente

- Generatore di onde quadre per indurre transienti periodici
- I valori di R , L e C determinano regime; il più interessante è sottosmorzato, caratterizzato da pseudo periodo $\frac{2\pi}{\beta}$ e costante di smorzamento α
- Scegliere R , L e C in modo che $\frac{2\pi}{\beta}$ e α abbiano valori ragionevoli
 - Frequenza di oscillazione: 5 - 50 kHz
 - Smorzamento tale da osservare almeno 5 oscillazioni con ampiezza visibilmente decrescente
- Scegliere la frequenza del generatore che permetta di osservare l'andamento atteso
 - Tra 5 e 10 volte minore della frequenza di oscillazione

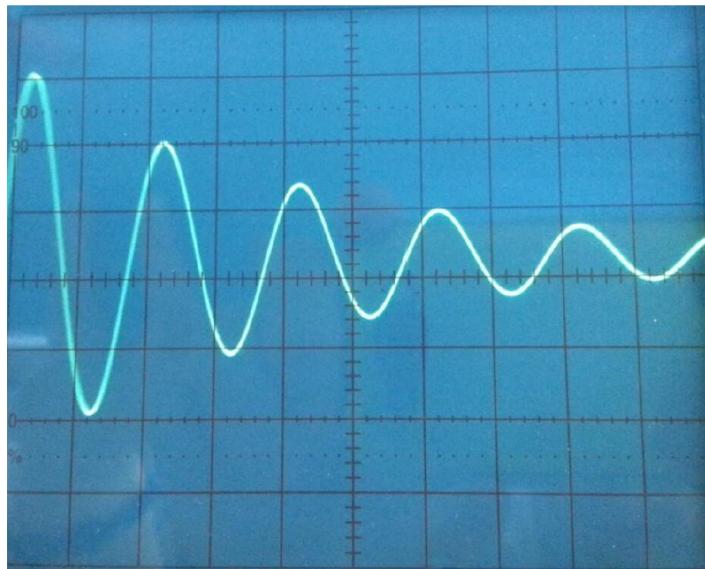


RLC transiente

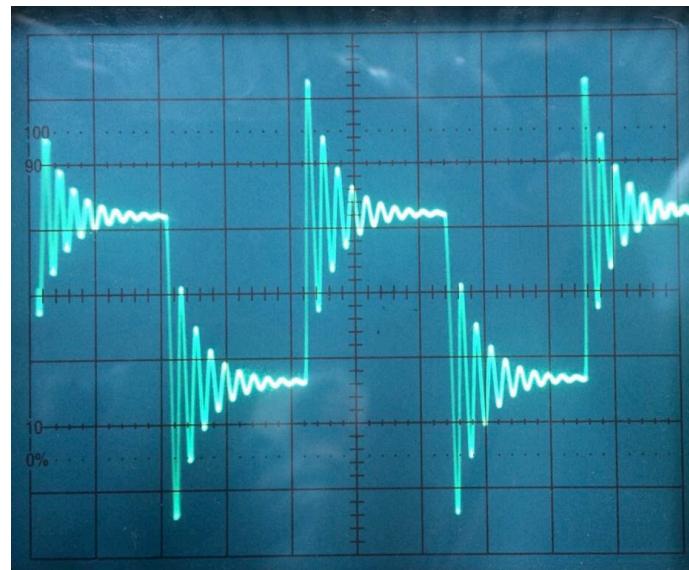
- Quando si usa il generatore di funzione esterno tenere conto della resistenza interna
- Quando si usa oscilloscopio e generatore di funzione esterno attenzione al collegamento a massa: deve essere in un punto unico del circuito (modificare ordine componenti)
- Misurare le tensioni ai capi di R e altri componenti
- Per cambiare regime: modificare R
- Nel programma LabVIEW scegliere frequenza di campionamento che permetta di osservare il comportamento atteso
 - Per valutare frequenza e ampiezza di una oscillazione: almeno 10 punti per periodo



RLC transiente



V_R (singolo periodo)



V_C (diversi periodi)



RLC transiente

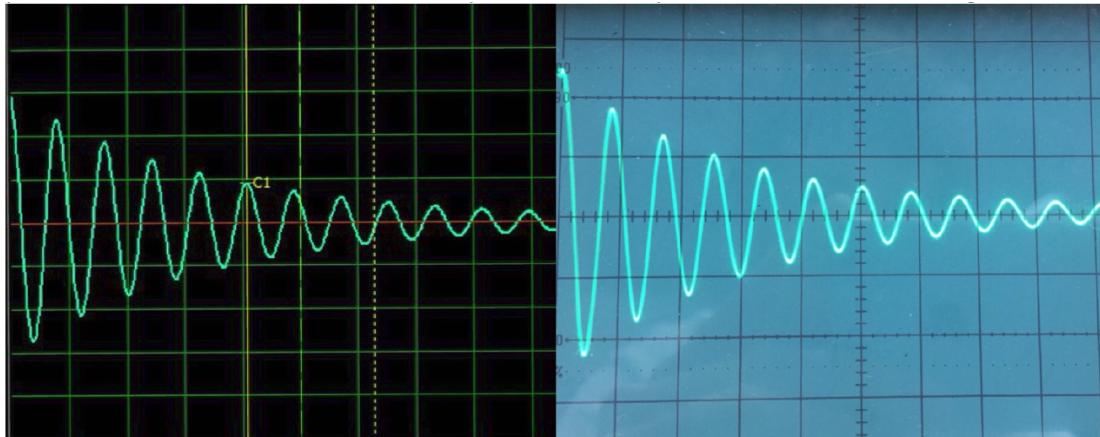


Figura 2: Andamento della tensione $v_R(t)$ ai capi della resistenza, visualizzato rispettivamente dall'oscilloscopio DAQ digitale (sinistra), e da quello analogico (destra).

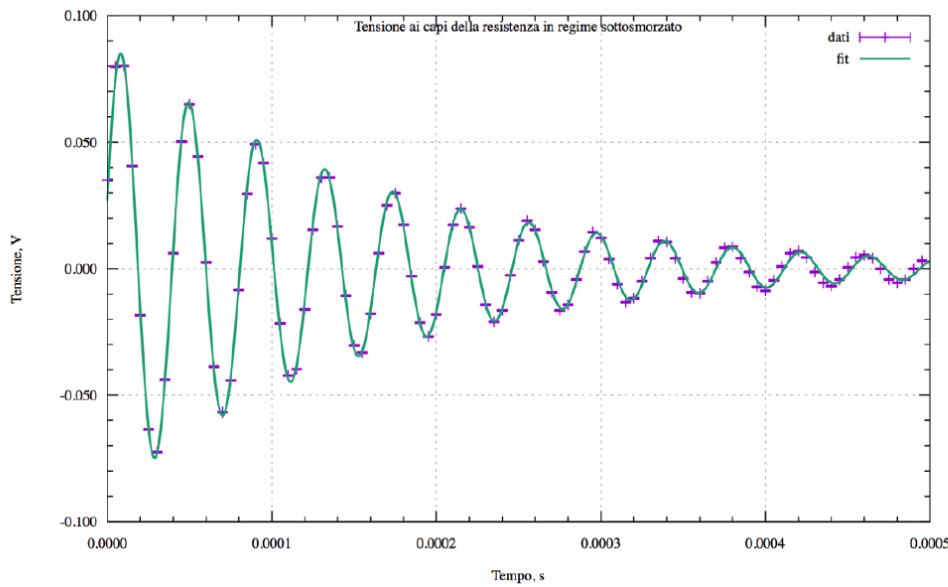
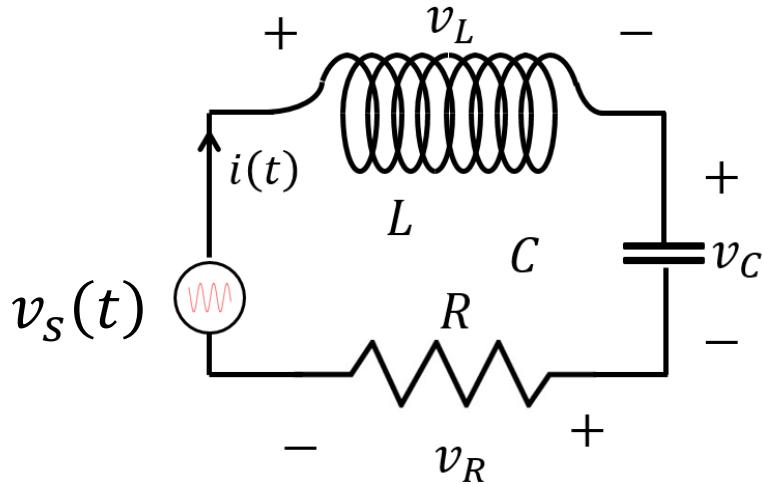


Figura 3: Fit dei dati relativo all'andamento della tensione $v_R(t)$ ai capi della resistenza, eseguito con Gnuplot variando i parametri α e ω_0 .



RLC sinusoidale



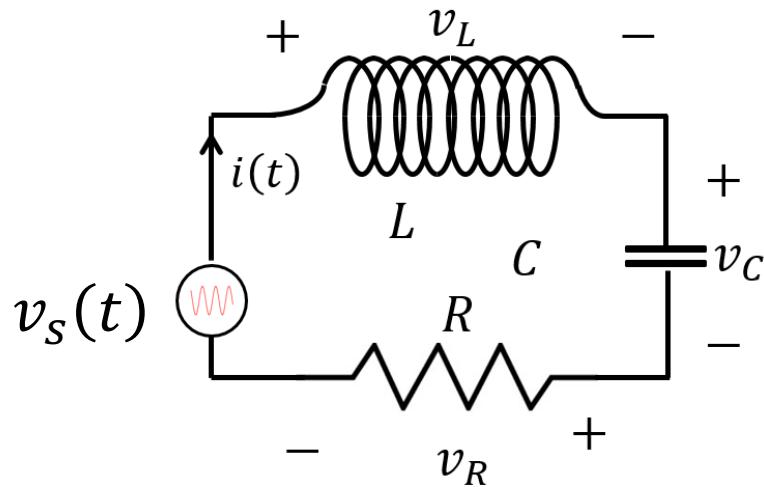
- Generatore sinusoidale per indurre oscillazioni della corrente nel circuito

$$v_s(t) = V_0 \cos \omega t$$

- Le tensioni ai capi dei componenti hanno andamento sinusoidale con ampiezza e sfasamento che dipendono dalla frequenza del generatore



RLC sinusoidale

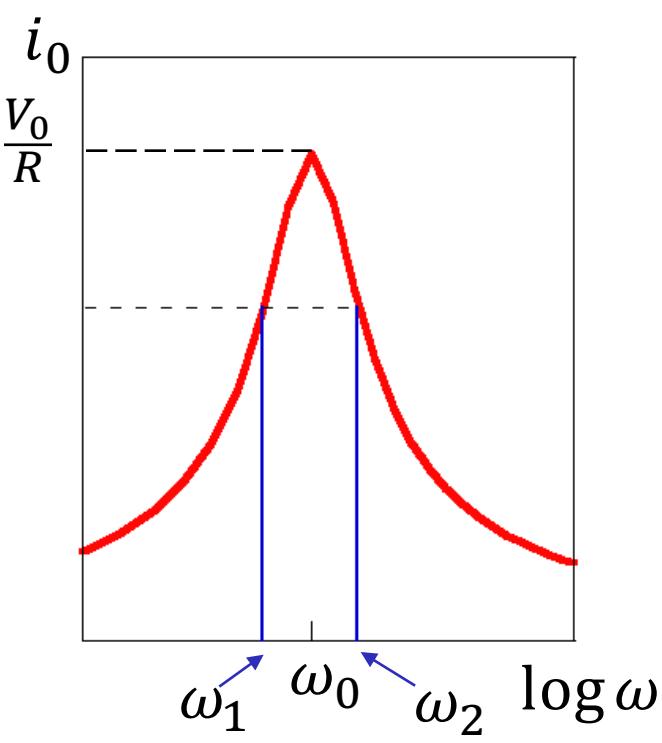


- La corrente nel circuito è

$$i(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos \left[\omega t + \left(\tan^{-1} \left\{ \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega RC} \right\} \right) \right]$$



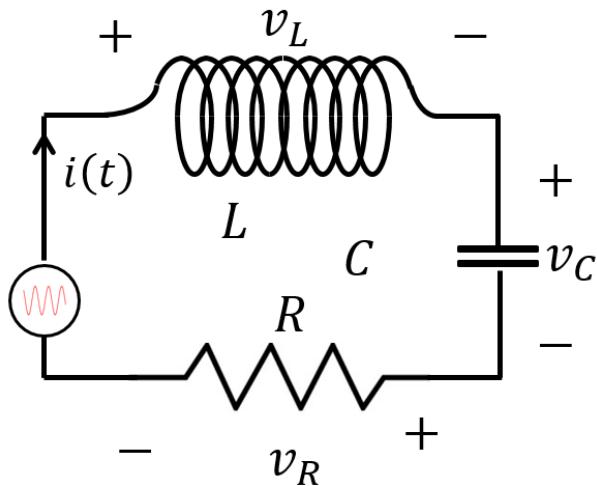
RLC sinusoidale



- Il modulo della corrente è
$$i_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$
- Massimo alla frequenza di risonanza $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$



RLC sinusoidale



$$i(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cos \left[\omega t + \left(\tan^{-1} \left\{ \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega RC} \right\} \right) \right]$$

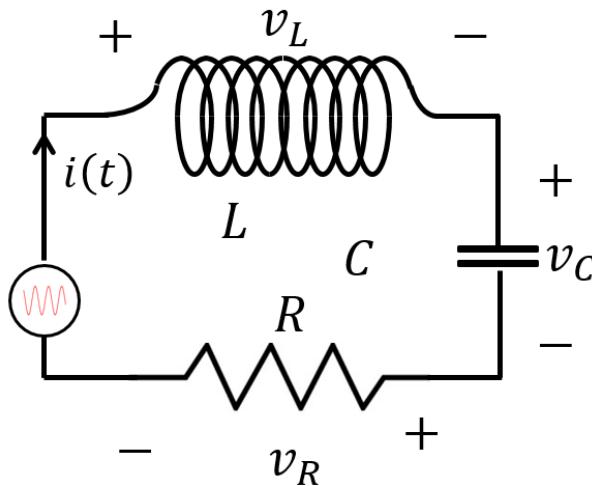
- Le tensioni ai capi della resistenza è

$$v_R(t) = \frac{R V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cos \left[\omega t + \left(\tan^{-1} \left\{ \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega RC} \right\} \right) \right]$$

- Sempre in fase con la corrente, di ampiezza variabile
- In risonanza in fase con il generatore



RLC sinusoidale



$$i(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cos \left[\omega t + \left(\tan^{-1} \left\{ \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega RC} \right\} \right) \right]$$

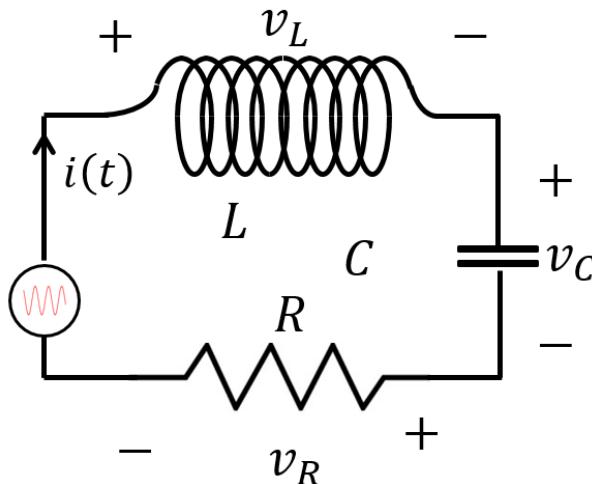
- Le tensioni ai capi dell'induttore è

$$v_L(t) = \frac{\omega L V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cos \left[\omega t + \left(\tan^{-1} \left\{ \frac{1 - \omega^2 LC}{R} \right\} \right) + \frac{\pi}{2} \right]$$

- In anticipo di 90° rispetto alla corrente
- Aampiezza variabile, aumenta con ω



RLC sinusoidale



$$i(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cos \left[\omega t + \left(\tan^{-1} \left\{ \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega RC} \right\} \right) \right]$$

- Le tensioni ai capi del condensatore è

$$v_C(t) = \frac{\left(\frac{V_0}{\omega C} \right)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cos \left[\omega t + \left(\tan^{-1} \left\{ \frac{1 - \omega^2 LC}{R} \right\} \right) - \frac{\pi}{2} \right]$$

- In ritardo di 90°
- Ampiezza variabile, diminuisce con ω



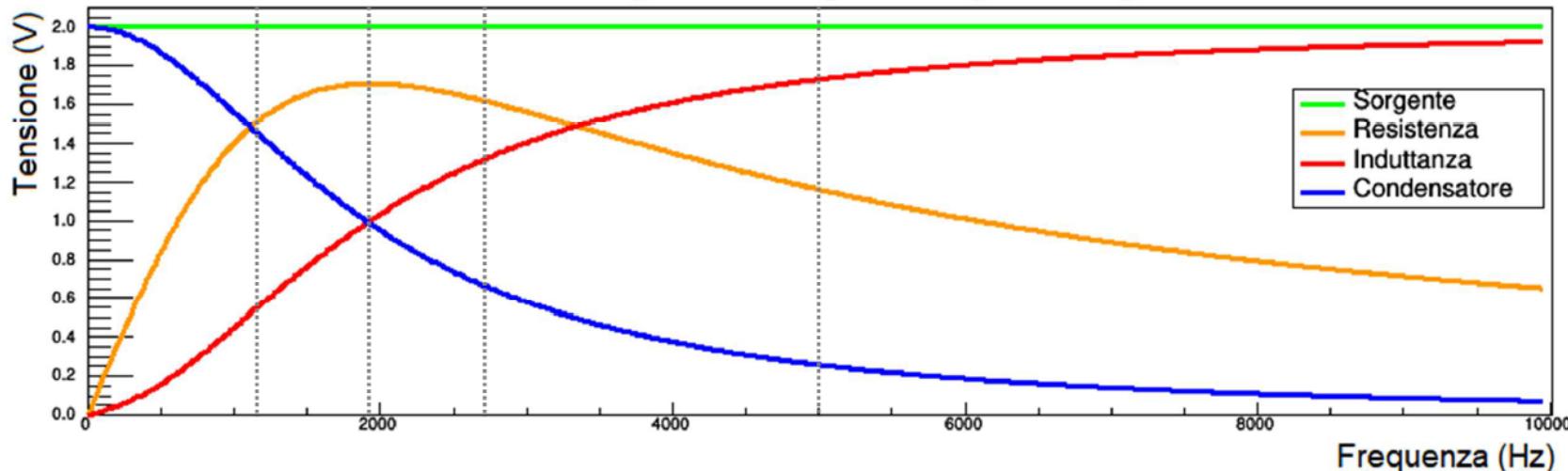
RLC sinusoidale

- I valori di R , L e C determinano pulsazione di risonanza ω_0 e fattore di qualità Q : scegliere R , L e C in modo che abbiano valori ragionevoli
- Scegliere la frequenza del generatore e frequenza di campionamento che permettano di osservare l'andamento atteso in un intervallo di frequenza intorno a $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$
- Visualizzare e misurare tensioni ai capi di diversi componenti in funzione del tempo
- Studiare come cambiano ampiezza e fase in funzione della frequenza

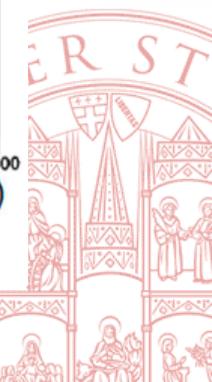
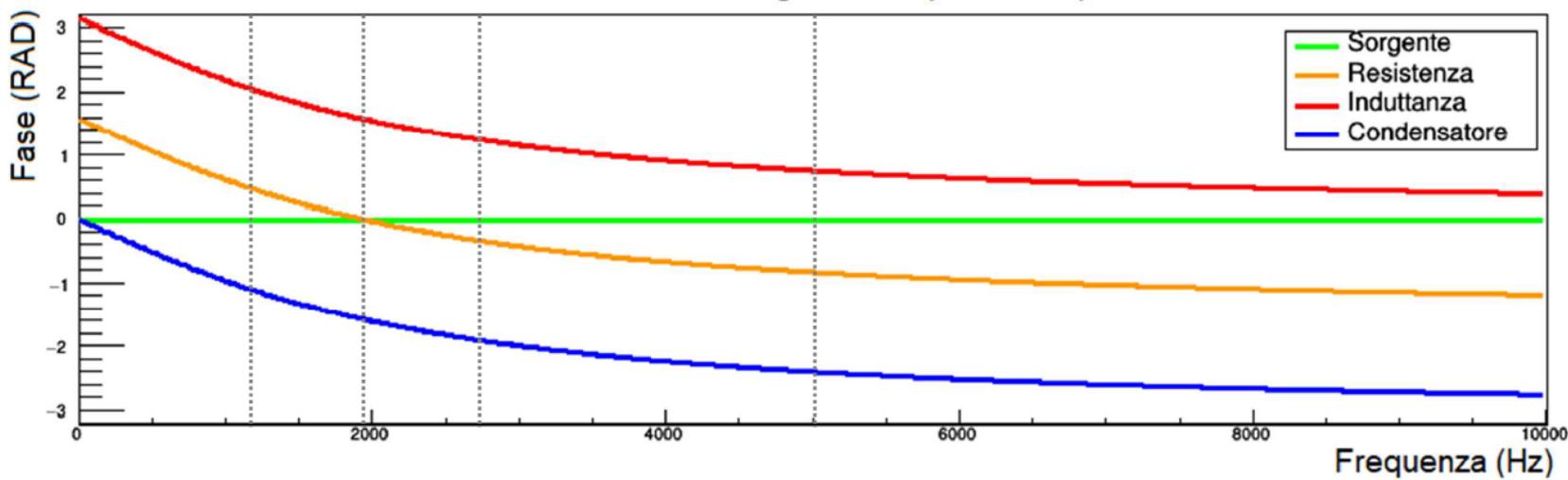


RLC sinusoidale

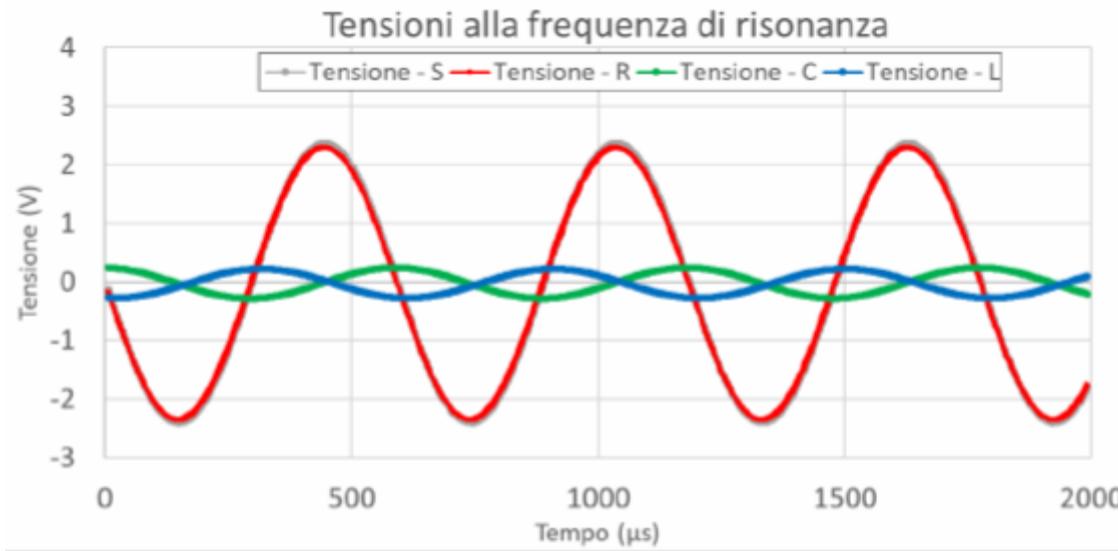
Simulazione ampiezza del segnale ai capi dei componenti



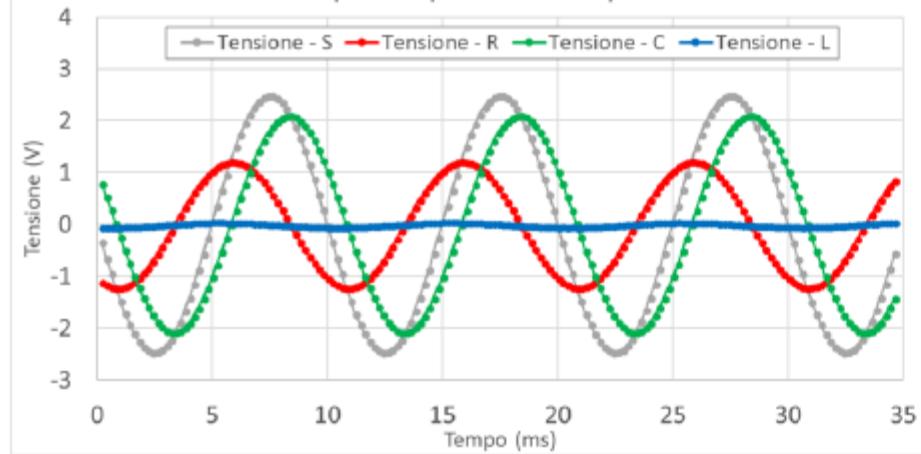
Simulazione fase del segnale ai capi dei componenti



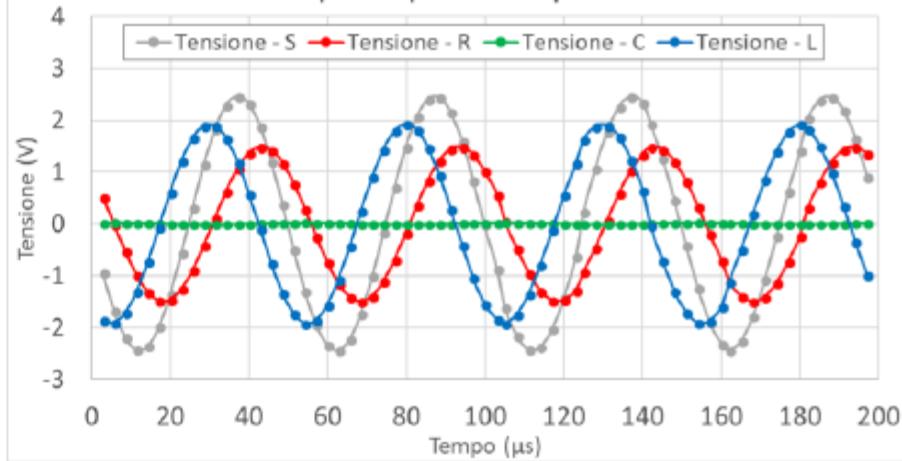
RLC sinusoidale



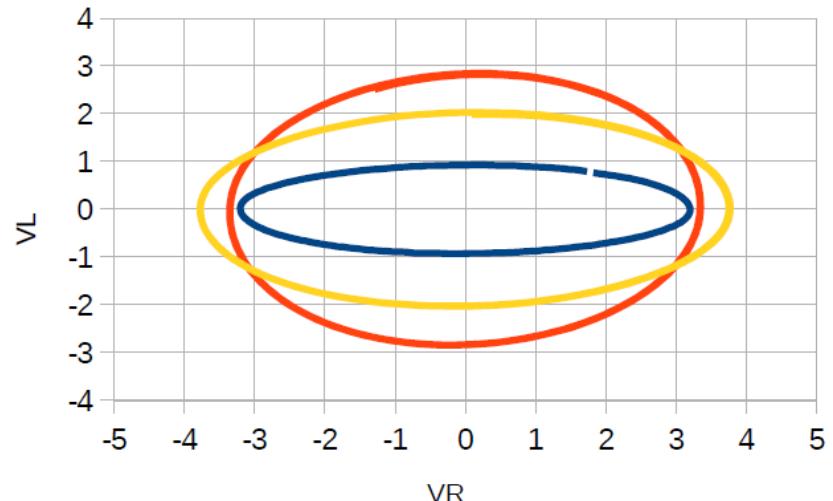
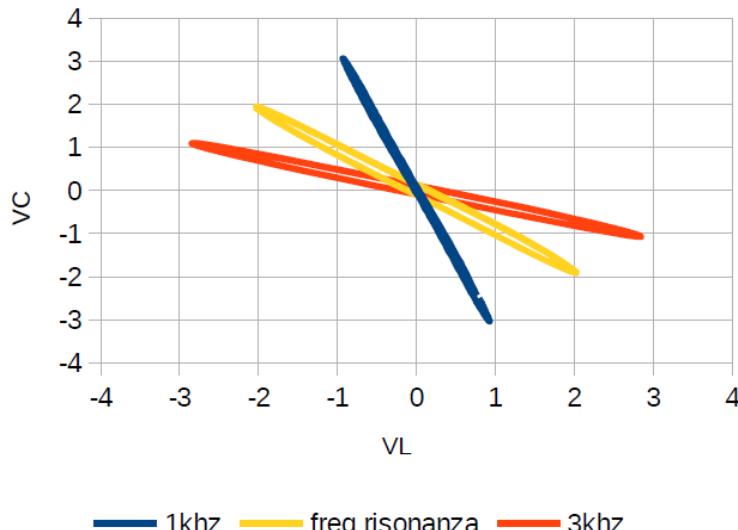
Tensioni a frequenza più bassa di quella di risonanza



Tensioni a frequenza più alta di quella di risonanza



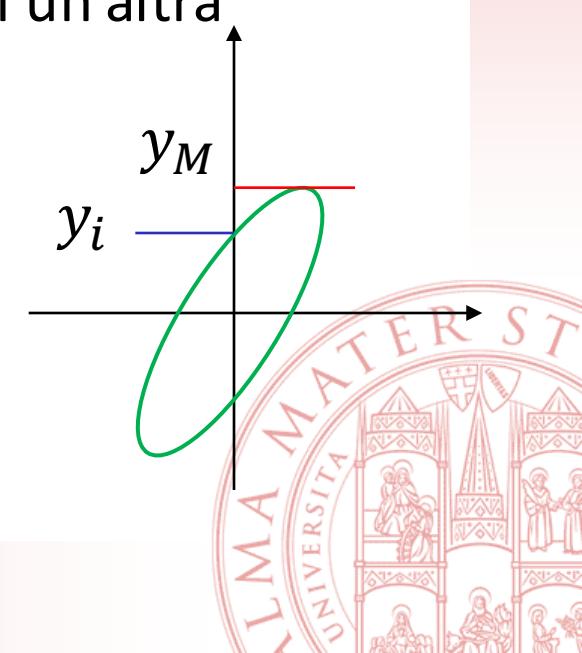
RLC sinusoidale



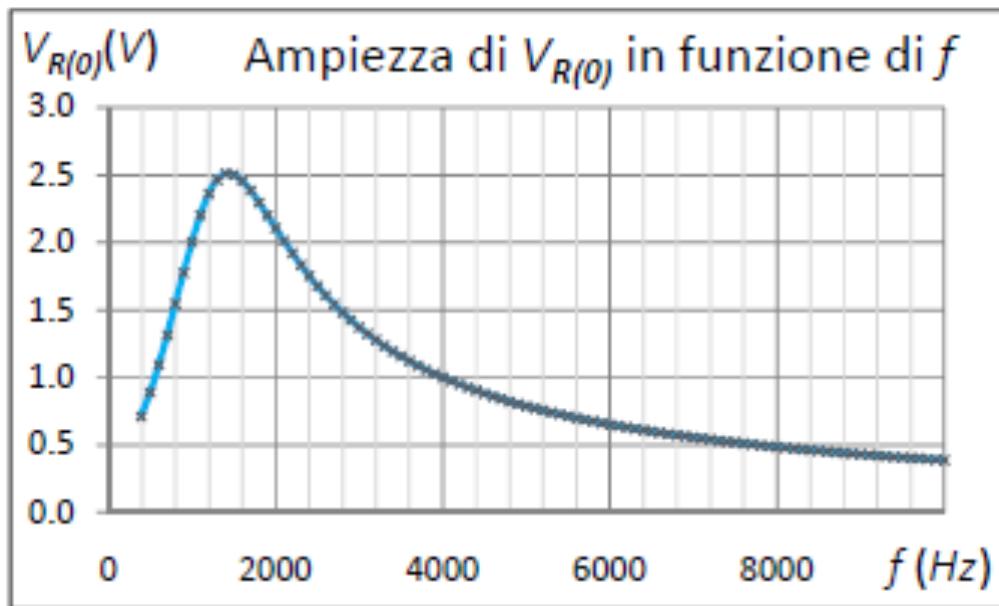
- Figure di Lissajous: una tensione in funzione di un'altra
- Permettono di evidenziare la relazione di fase
- Nel caso isofrequenziale

$$x(t) = A \sin \omega t, y(t) = B \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\varphi = \sin^{-1} \left(\frac{y_i}{y_M} \right)$$

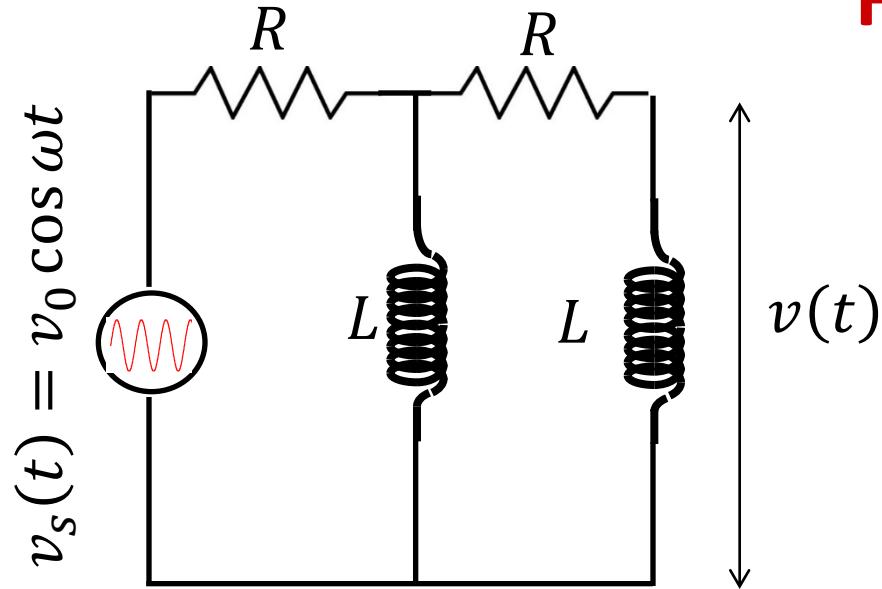


RLC sinusoidale



V_R in funzione della frequenza: evidenzia fenomeno di risonanza

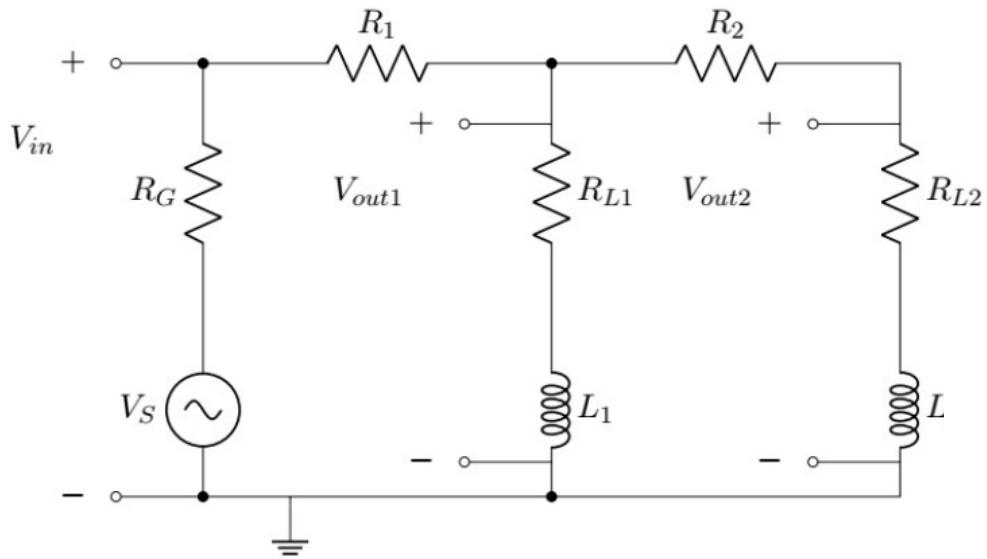
Filtro passa alto



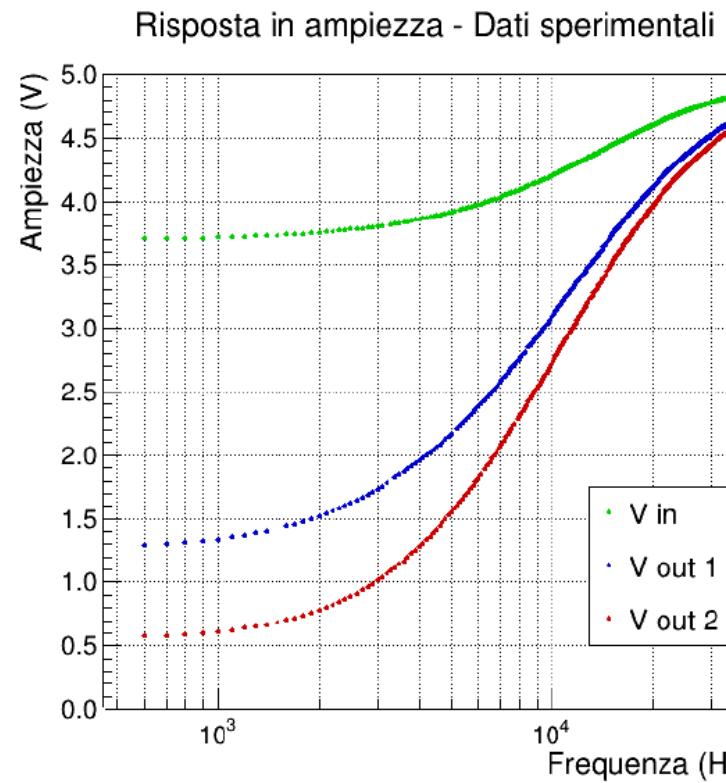
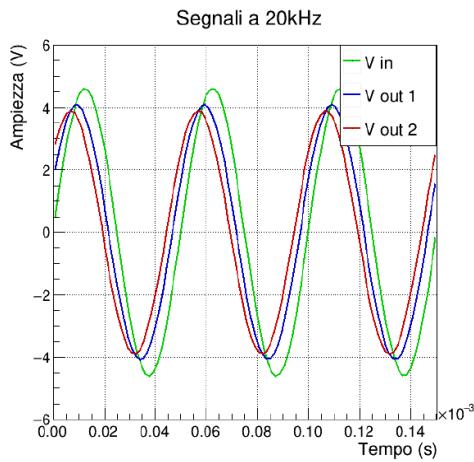
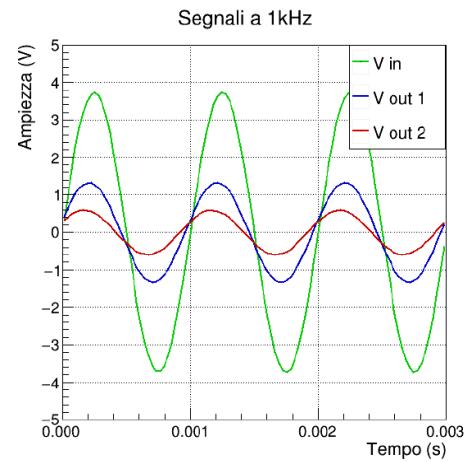
- Esempio 13.9 Perfetti
- $v(t) = \frac{v_0 \omega^2 L^2}{\sqrt{(\omega^2 L^2 - R^2)^2 + 9\omega^2 L^2 R^2}} \cos\left[\omega t + \left(\tan^{-1}\left\{\frac{3\omega LR}{\omega^2 L^2 - R^2}\right\}\right)\right]$
- Frequenza di taglio $f_c = 0.4253 \frac{R}{L}$



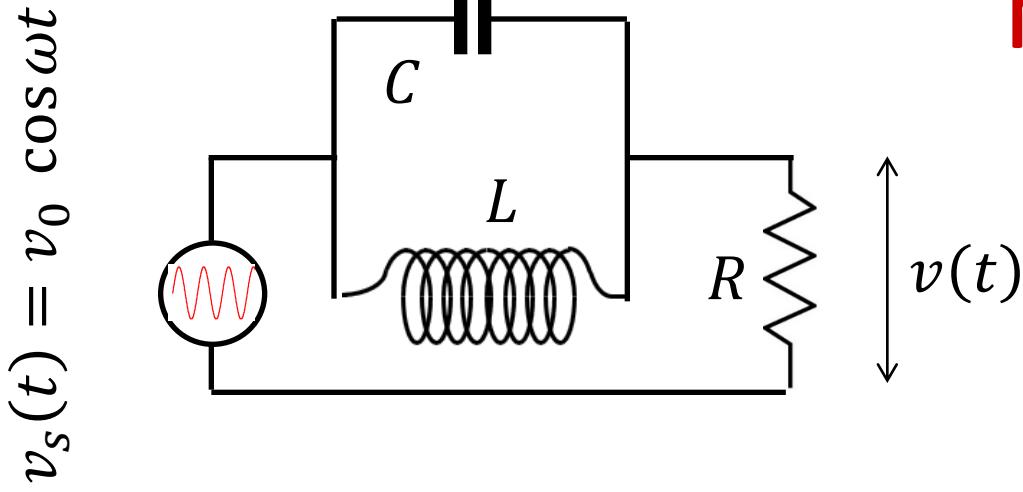
Filtro passa alto: caso più realistico



Matteo Costa, AA 2020-21



Notch filter singolo



Giulia Fazzino, AA 2020-21

- La funzione di trasferimento è

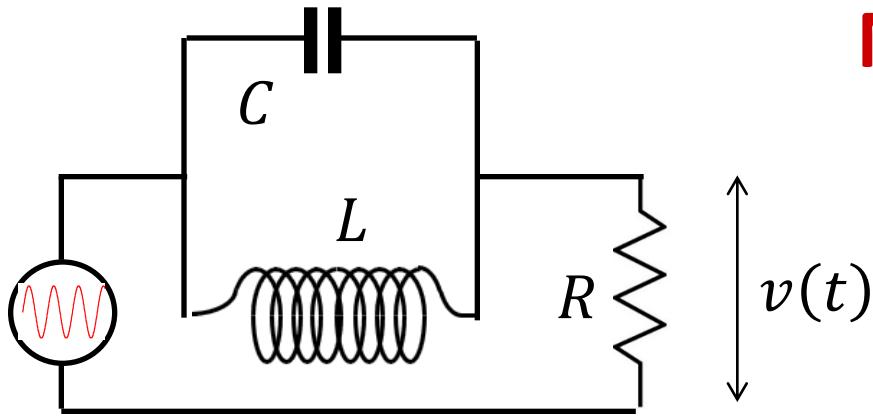
$$H(\omega) = \frac{R(\omega^2 LC - 1)}{R(\omega^2 LC - 1) - j\omega L}$$

- La frequenza di notch è $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

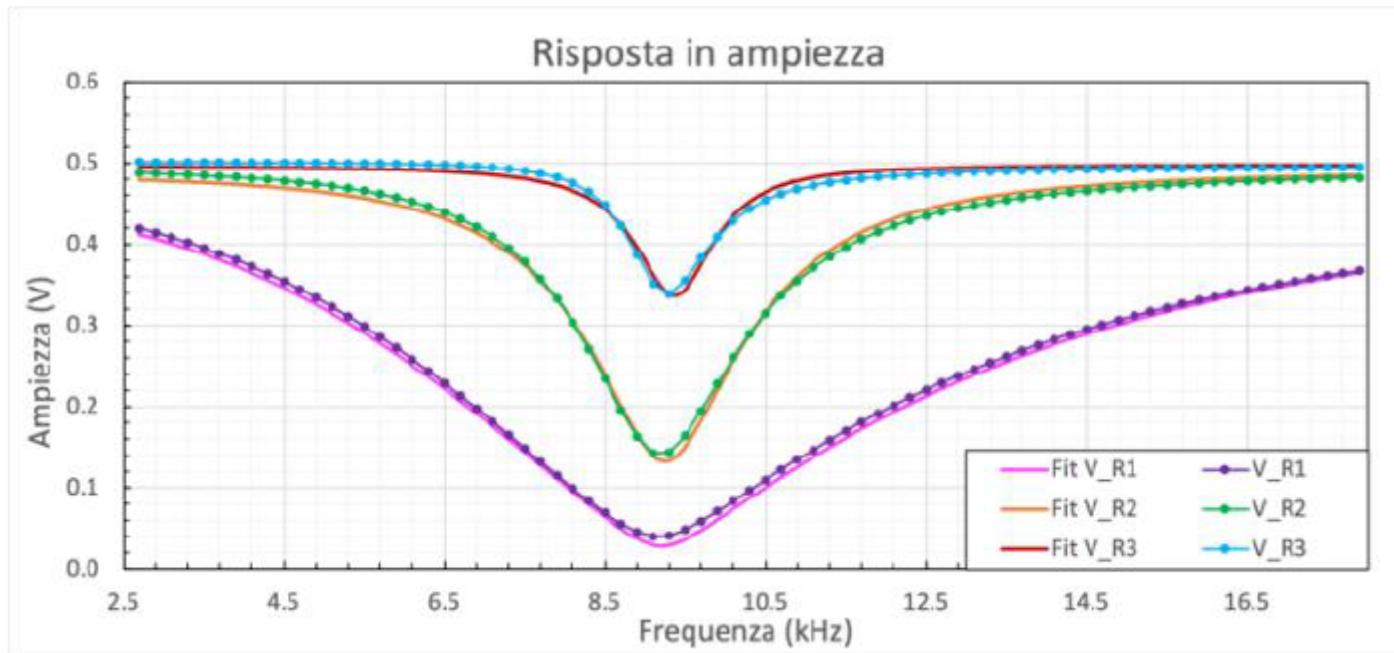
- Il fattore di qualità è $Q = R \sqrt{\frac{C}{L}} = RC \omega_0$



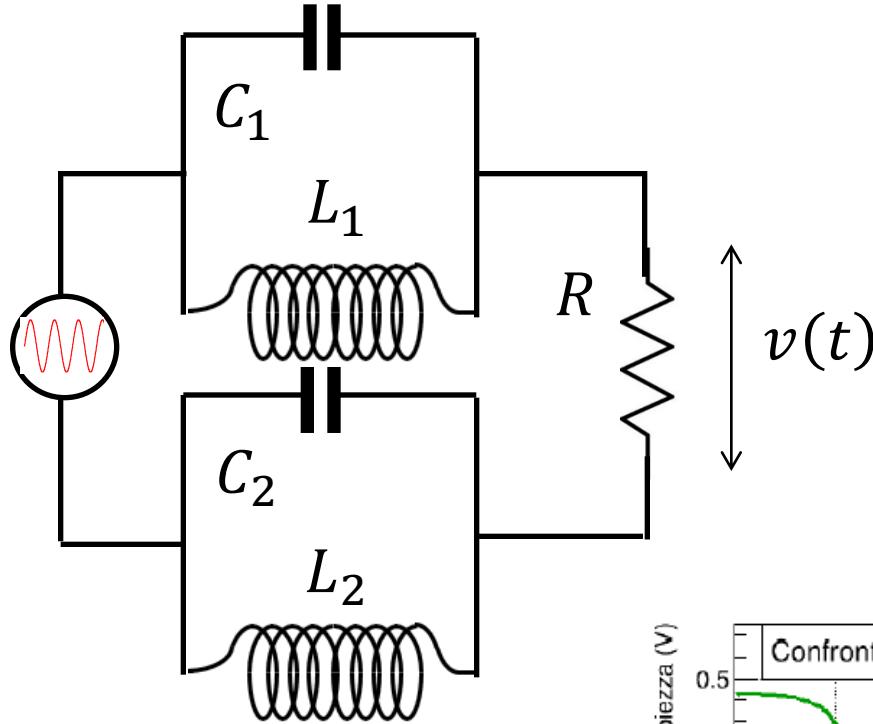
$$v_s(t) = v_0 \cos \omega t$$



Notch filter singolo



$$v_s(t) = v_0 \cos \omega t$$



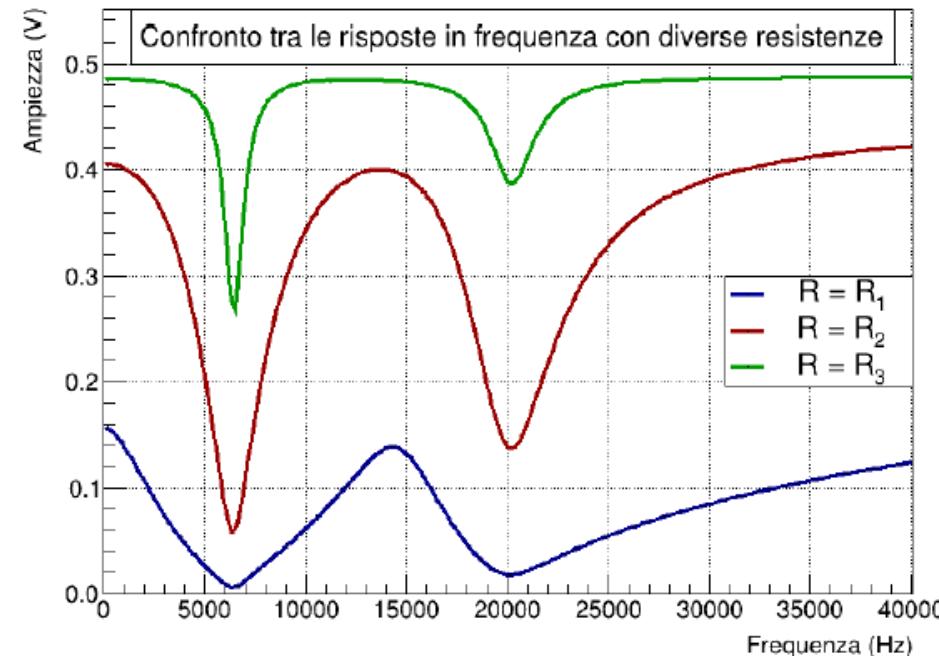
Notch filter doppio

Tommaso Antonelli, AA 2020-21

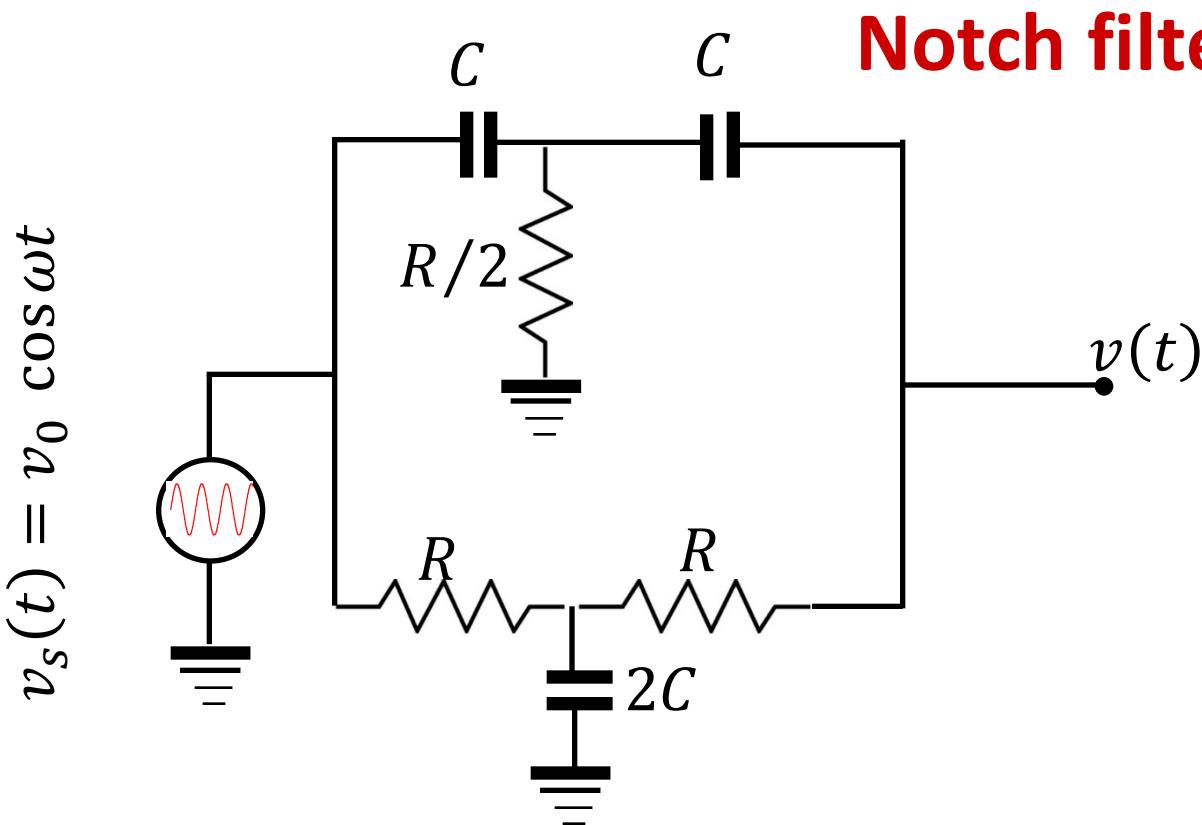
- Due frequenze di notch

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$$



Notch filter «doppio T»



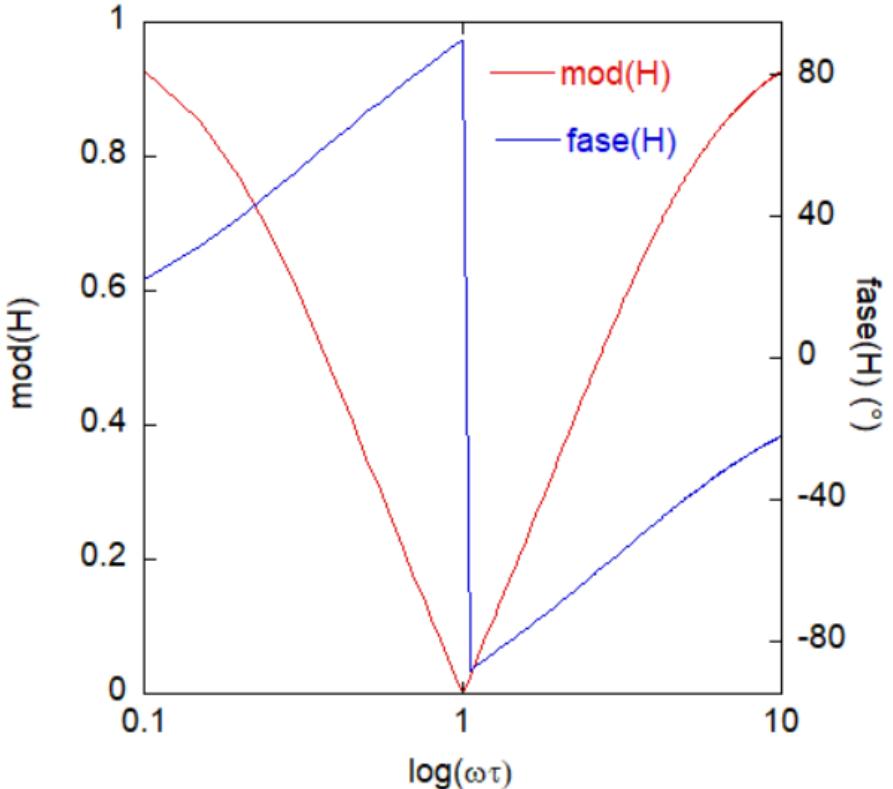
- Esempio 13.10 Perfetti
- Combinazione di un passa alto e passa basso
- La funzione di trasferimento è

$$H(\omega) = \frac{1 - \omega^2 \tau^2}{1 - \omega^2 \tau^2 + 4j\omega\tau}$$

con $\tau = RC$



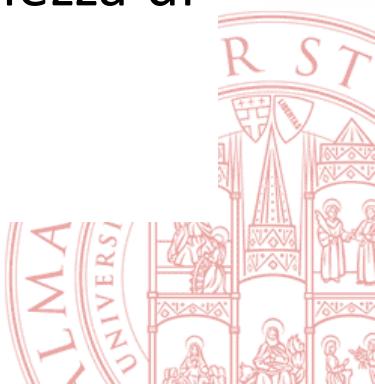
Notch filter «doppio T»



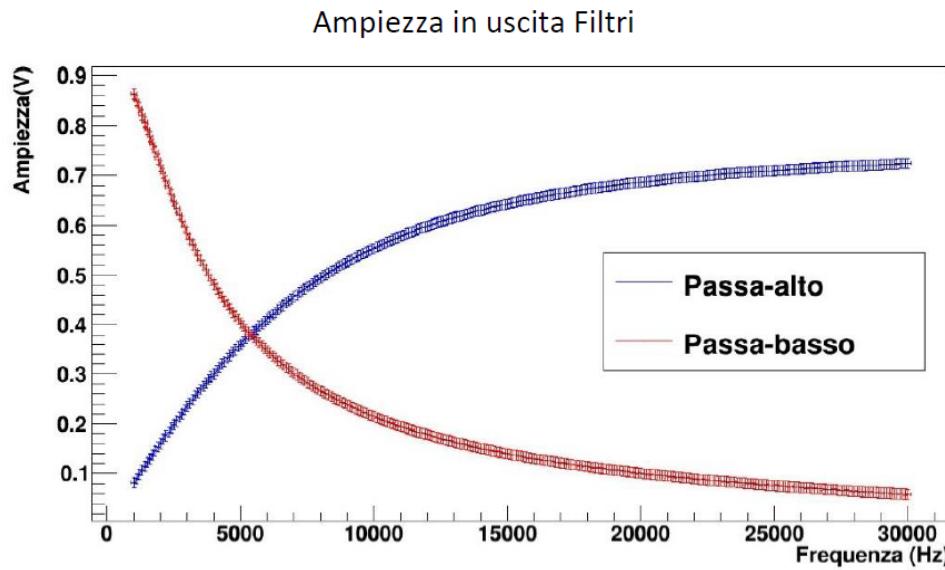
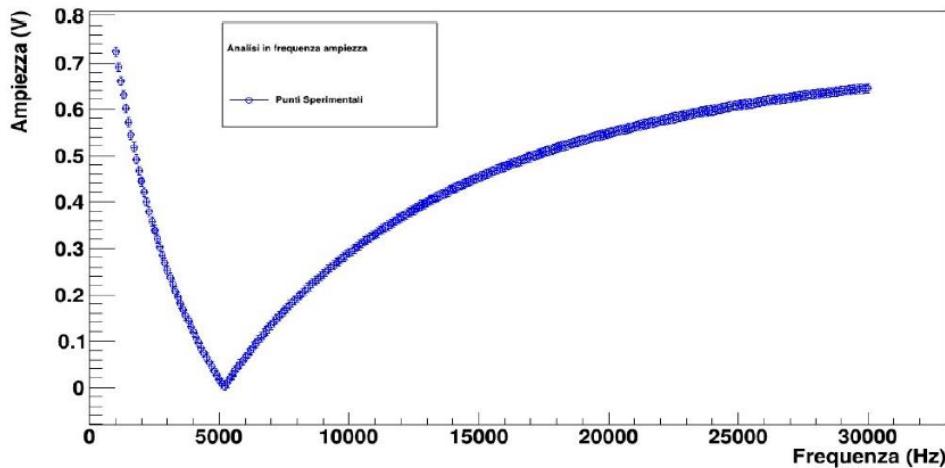
- $v(t) = \frac{v_0 (1-\omega^2\tau^2)}{\sqrt{(1-\omega^2\tau^2)^2+16\omega^2\tau^2}} \cos[\omega t + (\tan^{-1}\left\{\frac{4\omega\tau}{\omega^2\tau^2-1}\right\})]$

- $|H| = 0$ per $\omega_c\tau = 1$, cioè $f_c = \frac{1}{2\pi\tau}$
- $|H| = \frac{1}{2}$ quando $\omega\tau = 0.373$ e 2.68 , quindi la larghezza di banda è

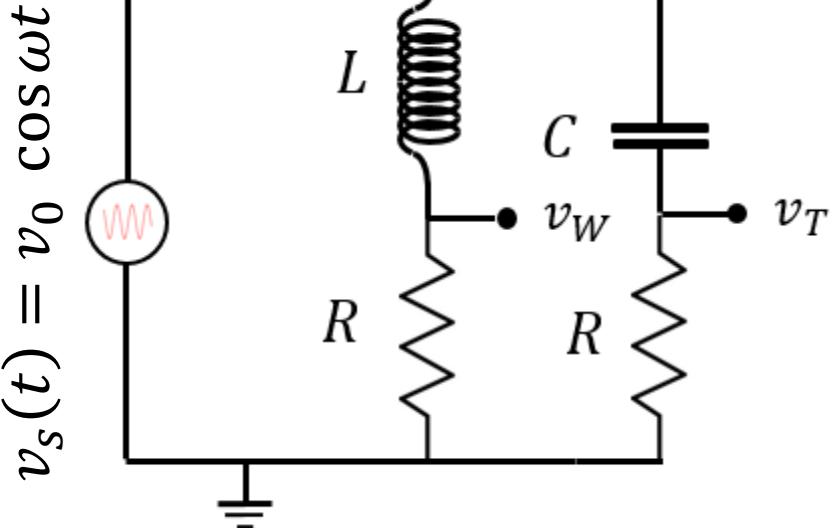
$$\frac{\Delta f}{f_c} \cong 2.3$$



Notch filter «doppio T»



Filtro cross over



- Cap. 13.8 Perfetti
- Ripartisce un segnale in ingresso in due:
 - uno contiene le alte frequenze (tweeter)
 - l'altro le basse (woofer)

$$\bullet \quad v_W(t) = \frac{v_0 R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \left[\omega t + \left(\tan^{-1} \left\{ -\frac{\omega L}{R} \right\} \right) \right]$$

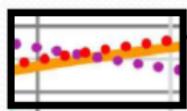
$$\bullet \quad v_T(t) = \frac{v_0 R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cos \left[\omega t + \left(\tan^{-1} \left\{ \frac{1}{\omega R C} \right\} \right) \right]$$

- $$\bullet \quad \text{Alla frequenza di cross over } f_C = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$
- i moduli delle due tensioni sono uguali e le fasi sono uguali in modulo e opposte in segno

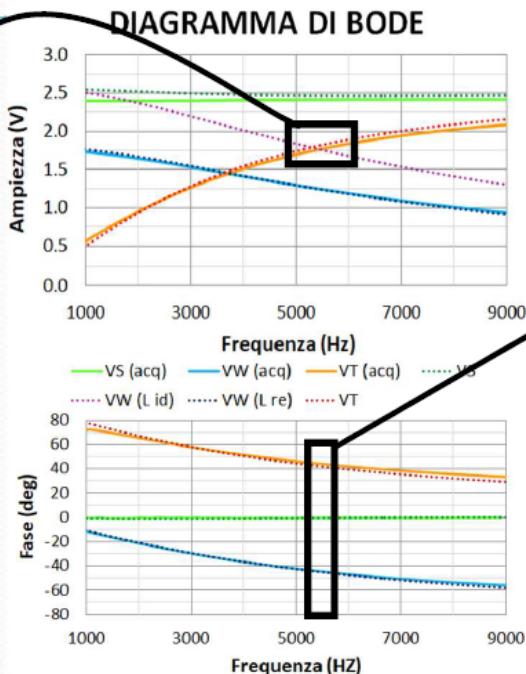


Filtro cross over

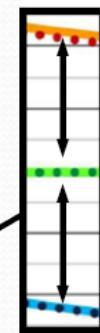
CONCLUSIONI



FREQUENZA DI
CROSSOVER
(5284 ± 4) Hz



A BASSE FREQUENZE IL SEGNALE È

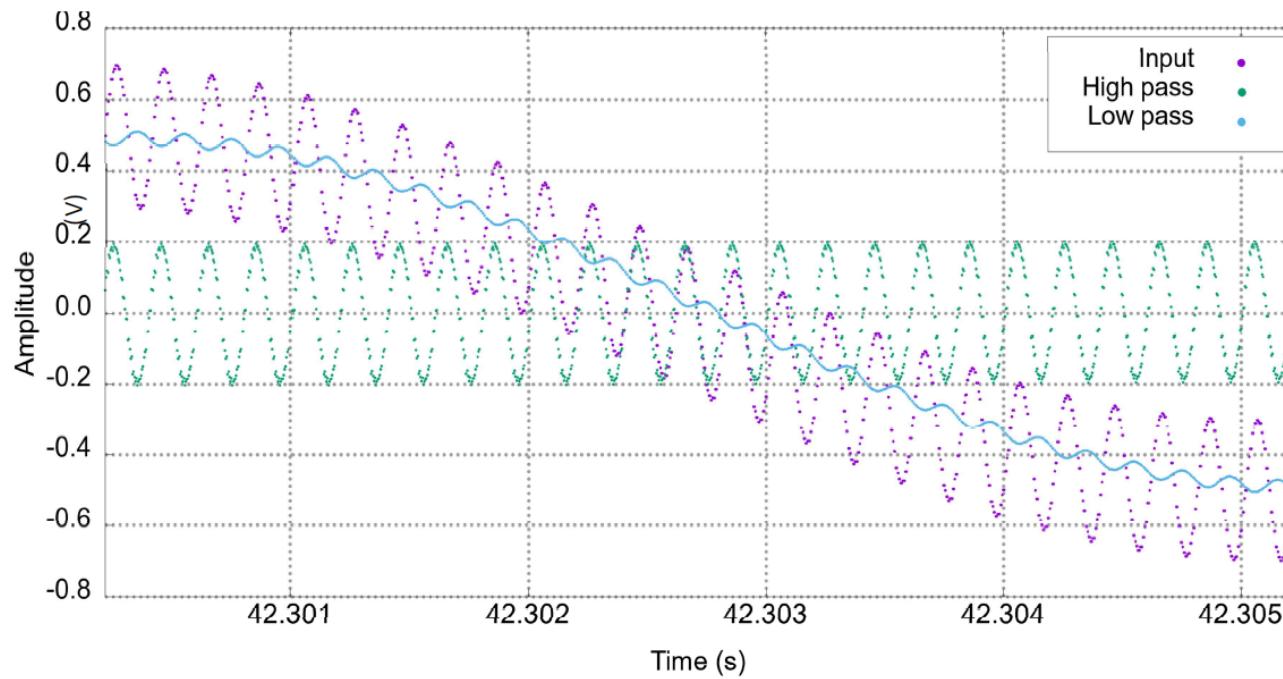


ALLA FREQUENZA DI
CROSSOVER LE FASI
DELLE TENSIONI AI
CAPI DI R_W ed R_T
SONO UGUALI E
CONTRARIE

AD ALTE FREQUENZE IL SEGNALE È

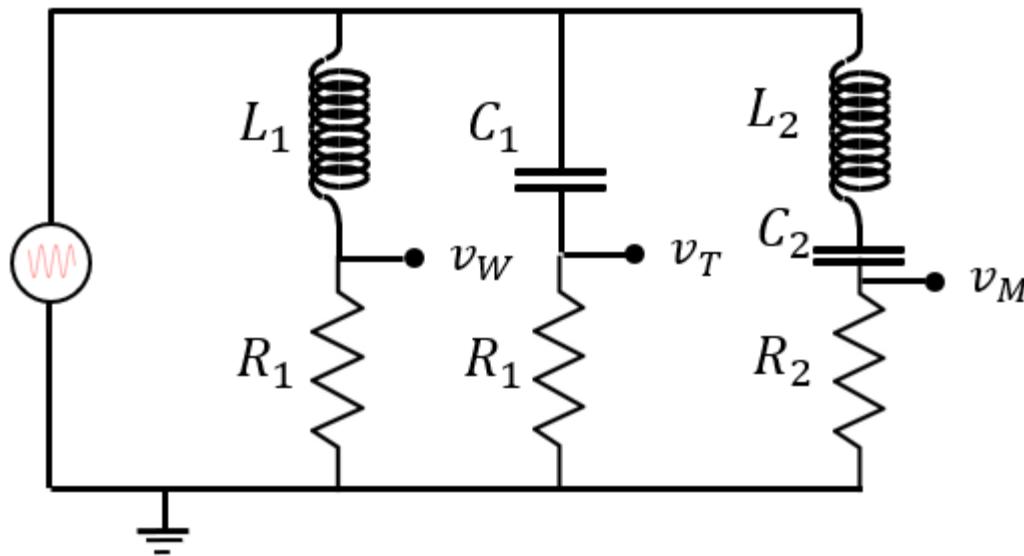


Filtro cross over



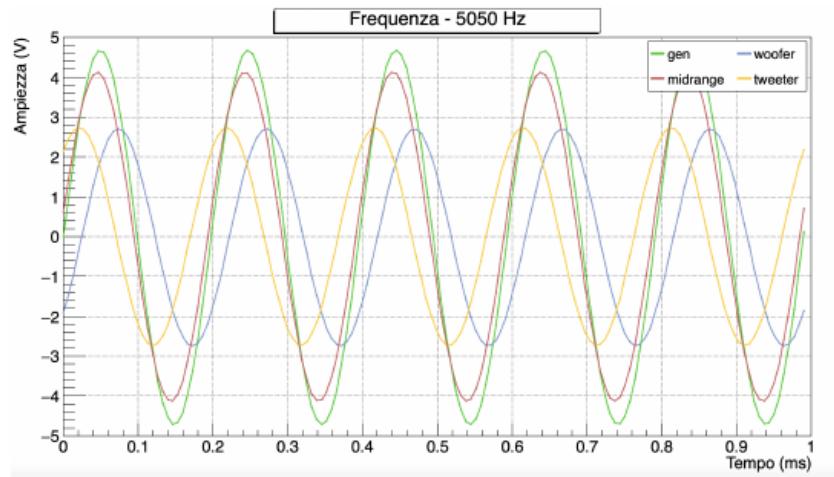
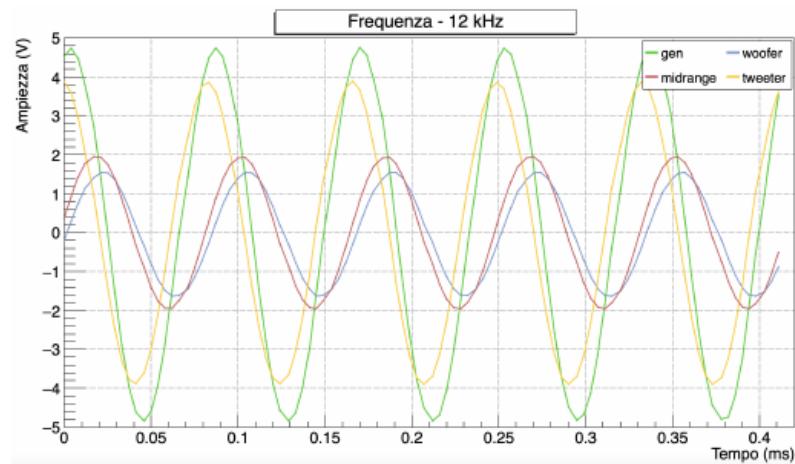
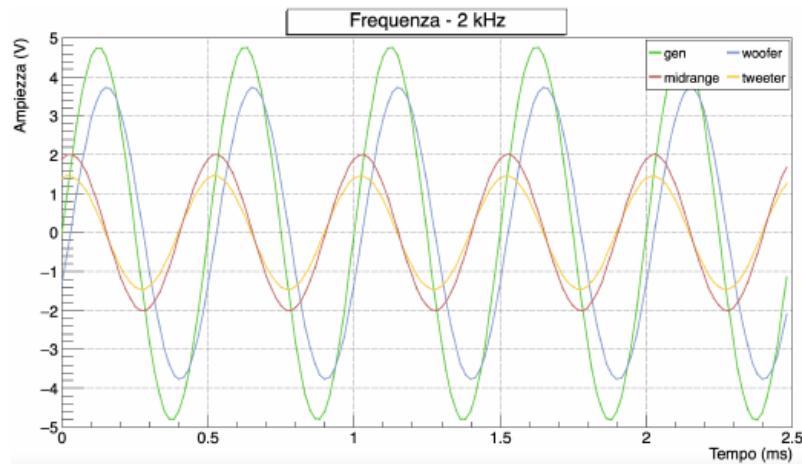
Filtro cross over a tre vie

Davide Mattei, AA 2020-21

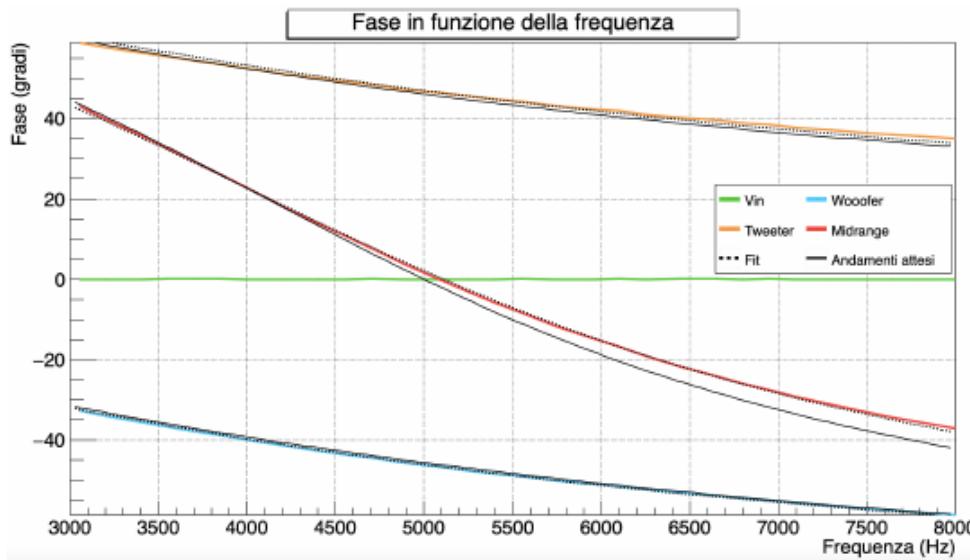
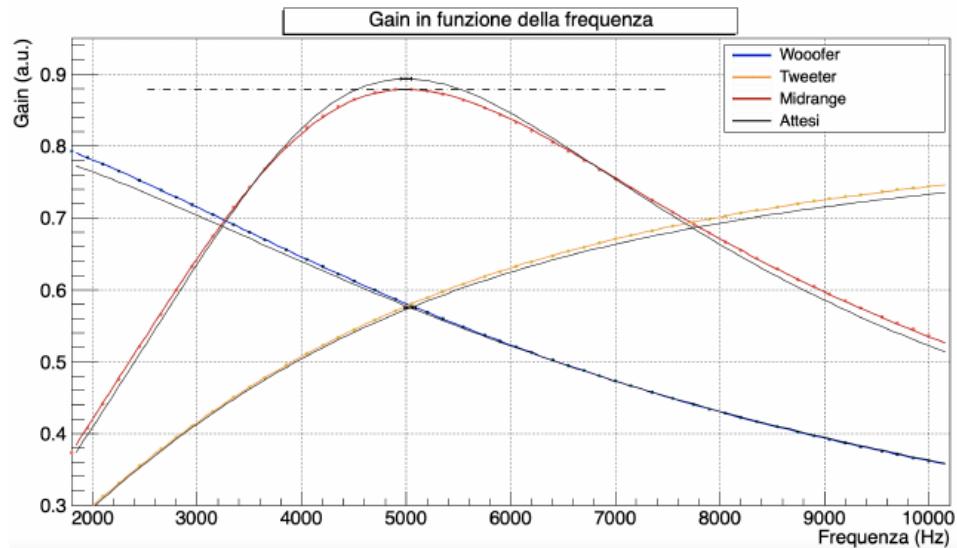


- Aggiunta di un ramo RLC serie, midrange, con frequenza di risonanza vicina a quella di cross-over

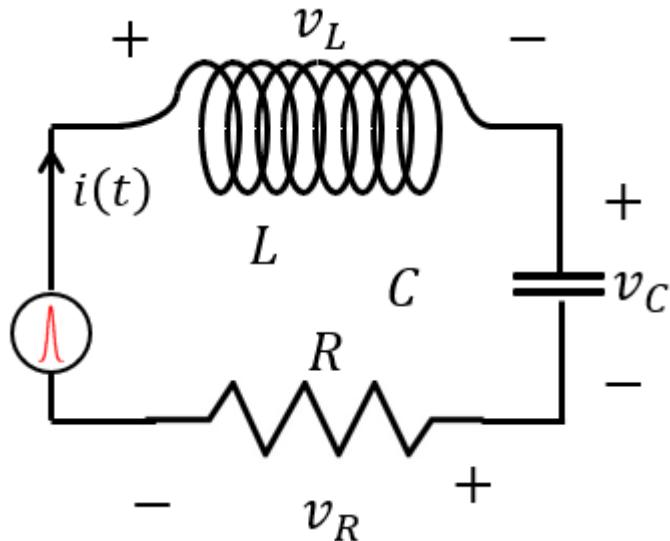
Filtro cross over a tre vie



Filtro cross over a tre vie



RLC impulsivo



Nicolò Montalti, AA 2020-21

Pierre Cafarelli et al. «The RLC system: An invaluable test bench for students». American Journal of Physics 80.9 (2012), pp. 789–799. doi: 10.1119/1.4726205

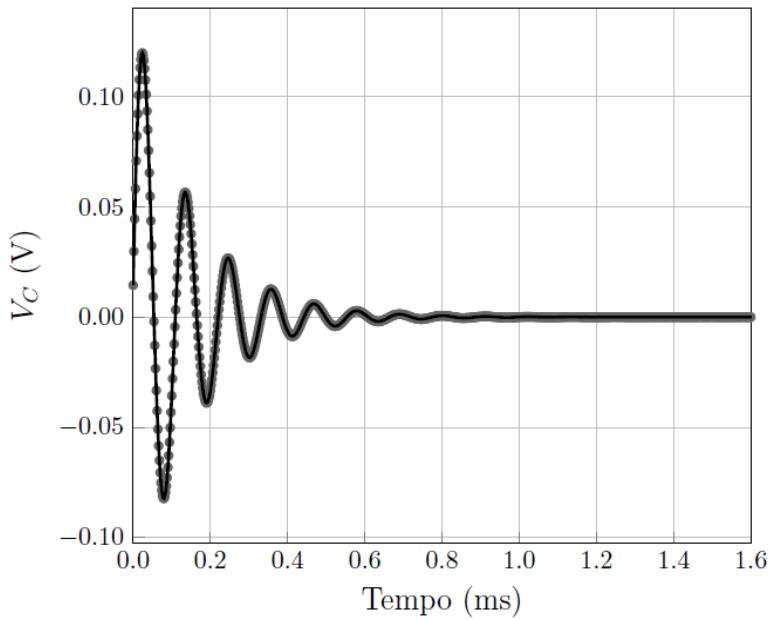
- Stimolando il circuito con un impulso

$$V_G(t) = V_0 \delta(t)$$

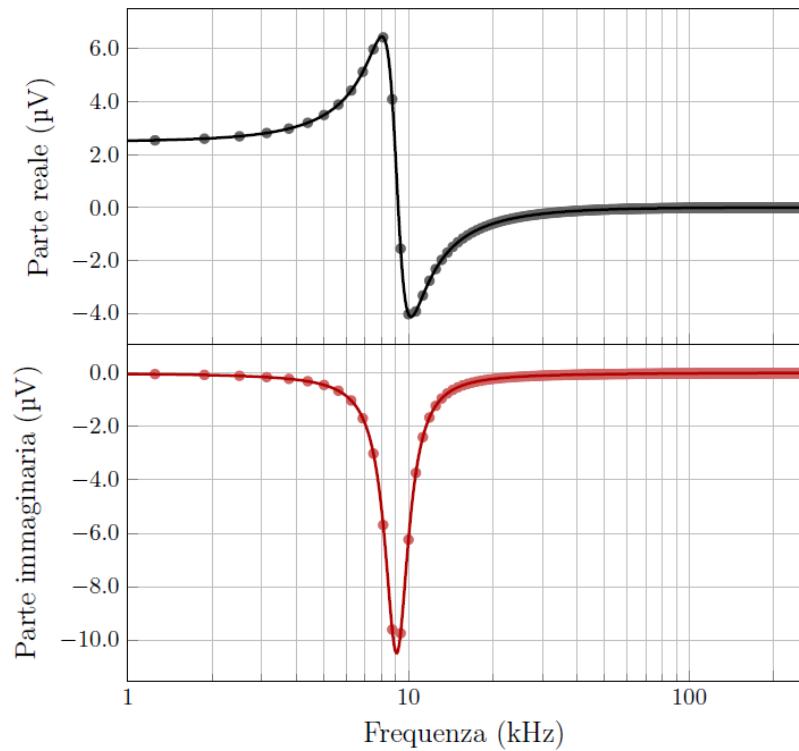
si dimostra che



RLC impulsivo



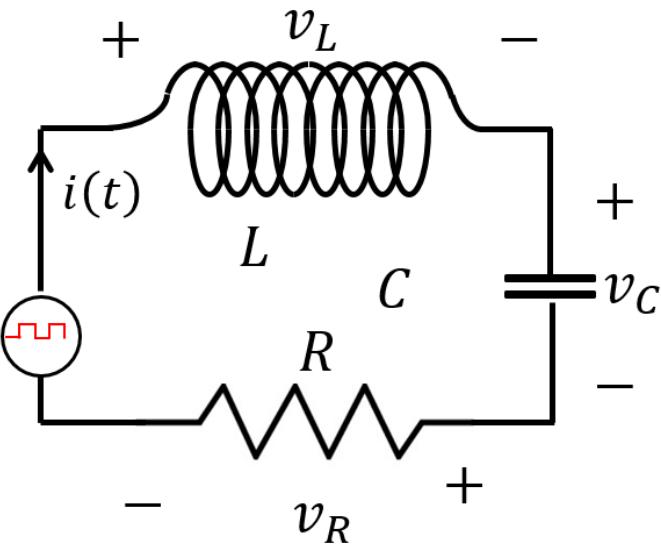
- Dominio del tempo



- Dominio delle frequenze:
trasformata di Fourier



RLC onda quadra



Dimitri Corradini, AA 2020-21

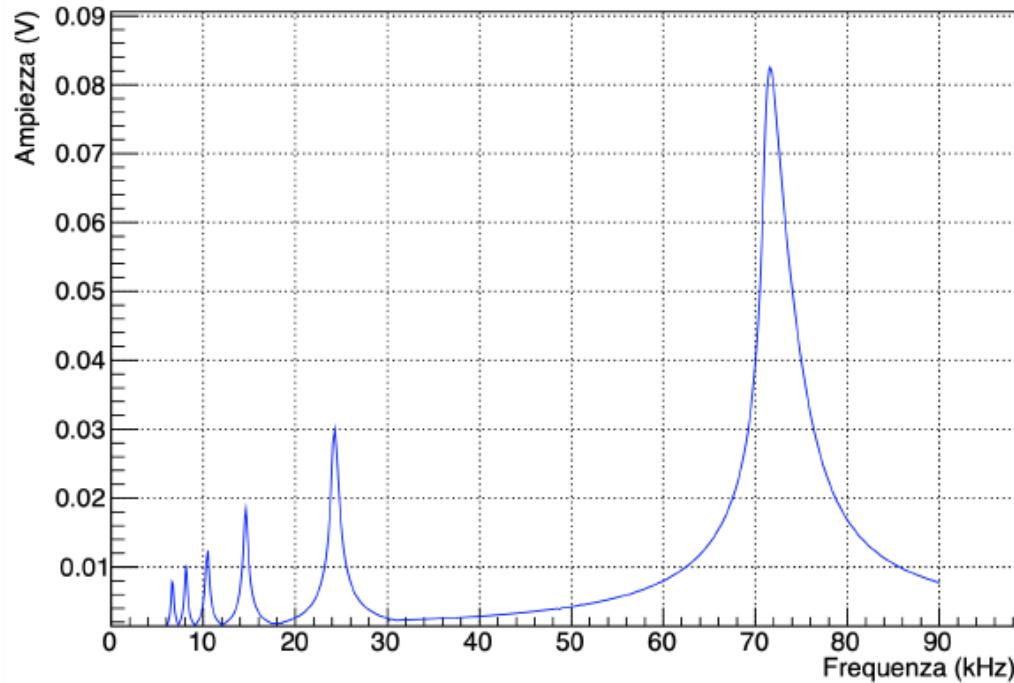
- La frequenza dell'onda quadra viene variata in un intervallo che comprende la frequenza di risonanza e sottomultipli
- La serie di Fourier di un'onda quadra che oscilla tra $-V_0$ e V_0 è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(n\omega t)$$

- Ci sono solo termini dispari



RLC onda quadra



- Ampiezza di V_R in funzione della frequenza, si notano picchi in corrispondenza della frequenza di risonanza e sottomultipli dispari

