Семінар 3. Індукція і множини

9 травня 2023

Задача 1

Довести за допомогою математичної індукції

- $n(n^2+5)$ ділиться на 6 без залишку для будь-якого натурального n
- $\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

Задача 2

Довести, що будь-яку сумму ≥ 8 можна скласти з 3 і 5 (методом Тараса)

Принцип сильної математичної індукції

Нехай $P(n)$ це предикат визначений на всіх натуральних n. Якщо наступні два твердження вірні:

- 1. $P(1)$ вірно (**база**)
- 2. Для всіх натуральних чисел $k > 1$ з істинності $P(1), P(2), \ldots P(k)$ випливає істинність $P(k+1)$ (**перехід**)

тоді для всіх натуральних n $P(n)$ вірно.

Задача 4

Доведіть методом сильної математичної індукції що будь-яке натуральне число має представлення у бінарній системі.

$n = c_0 * 2^0 + c_1 * 2^1 + c_2 * 2^2 + \ldots + c_k * 2^k$, де $c_k = 1; c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ або 0 або 1

Порівняйте потужність двох множин

- Кількість перших 2^k натуральних чисел
- Кількість їх можливих представлень у бінарній системі

Формула включень-виключень

$A, B, C, A_1, A_2, \dots A_n$ - скінченні множини

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$
- $|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_1^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + (-1)^{n-1} |\bigcap_{i=1}^n A_i|$