

Семінар 2. Індукція

28 квітня 2023

Приклад

Довести, що будь-яку сумму ≥ 8 можна скласти з 3 і 5.

Означення

Принцип математичної індукції Нехай $P(n)$ це предикат визначений на всіх натуральних n , а a - деяке натуральне число. Якщо наступні два твердження вірні:

- 1. $P(a)$ вірно (**база індукції**)
- 2. Для всіх натуральних чисел $k > a$ з істинності $P(k)$ випливає істинність $P(k + 1)$ (**індукційний перехід**)

тоді для всіх натуральних $n \geq a$ $P(n)$ вірно.

База важлива

- Що відбудеться, якщо замінити в монетках 8 на 7?
- Довести за допомогою математичної індукції, що для всіх натуральних чисел $3^n - 2$ парне

Задачі на послідовності

- Знайдіть $\sum(1 + 2 + \dots + n)$
- Знайдіть $\sum(1 + x + \dots + x^n)$
- Знайдіть $\sum(1 + 4 + \dots + n^2)$ Підказка: $(n(n + 1)(2n + 1))/6$
- Доведіть що $n^3 - n$ ділиться на 6 для всіх натуральних $n > 2$
- Доведіть що $5^n + 9 < 6^n$ для всіх натуральних $n > 1$
- Доведіть що $n^2 < 2^n$ для всіх натуральних $n > 4$
- Доведіть що $n! > n^2$ для всіх натуральних $n \geq 4$
- Доведіть що $1 + nx \leq (1 + x)^n$ для дійсних $x > -1$ і натуральних $n \geq 2$

Задача з зірочкою

L-Триміно це фігурка з трьох квадратів у формі букви L. Доведіть за допомогою математичної індукції, що якщо з квадрата розміром $2^n \times 2^n$ прибрати одну будь-яку клітинку, то його можна повністю замостити за допомогою L-триміно без перекриття