Projeto de Iniciação Científica

Provas de independência via forcing

Joel Soares Moreira[1]
Orientador: Prof. Edélcio Gonçalves de Souza[2]
15 de setembro de 2024

Resumo

A aplicação de métodos modelo-teoréticos foi bem-sucedida na demonstração de teoremas importantes em diversas áreas da matemática. Um dos seus maiores sucessos foi o desenvolvimento do *forcing*, uma técnica da teoria de conjuntos desenvolvida por Paul Cohen para provar a independência da hipótese do contínuo dos axiomas de Zermelo-Fraenkel. Nesse projeto, estudaremos a teoria de modelos, a teoria de conjuntos e o método de *forcing*.

1 Introdução

1.1 O que é a Teoria de Modelos?

A teoria de modelos é a área da lógica matemática que estuda a relação entre *teorias formais* e seus *modelos* (1). Uma teoria formal consiste num conjunto de sentenças escritas em uma linguagem formal: por exemplo, os axiomas de Peano para a aritmética de números naturais, ou os axiomas de Zermelo-Fraenkel para a teoria dos conjuntos. Um modelo é uma interpretação dessas sentenças, isto é, uma estrutura específica que satisfaz elas: por exemplo, os números naturais $\mathbb{N}$, ou a hierarquia de conjuntos de von Neumann V.

Em termos amplos, a preocupação com essa relação está presente em várias áreas da matemática. Notávelmente, a álgebra estuda estruturas algébricas, que são modelos dos axiomas de grupo, ou anel, ou espaço vetorial, entre outros. O diferencial da teoria de modelos está no seu foco em teorias **formais**: os axiomas são sentenças de alguma lógica, acrescida de símbolos não-lógicos, com regras de inferência e definições de verdade bem-definidas. Isso permite que analisemos as teorias e seus modelos usando as ferramentas da lógica matemática desenvolvidas ao longo do século 20. A síntese das duas disciplinas é sumarizada por Chang & Keisler (1) na equação "álgebra universal + lógica = teoria de modelos".

[1] joelsm@usp.br
[2]

1.2 Satisfatibilidade e consistência

A relação entre lógica e teoria de modelos fica clara quando estudamos dois conceitos centrais dessas disciplinas: a consistência e a satisfatibilidade.

Dizemos que uma teoria T é *consistente* (ou *sintáticamente consistente*) se ela não leva a contradição, isto é, se não é possível demonstrar α e $\neg\alpha$ a partir de T usando algum sistema dedutivo. Note que consistência é uma propriedade negativa: podemos demonstrar *in*consistência apresentando uma dedução de α e uma dedução de $\neg\alpha$ a partir de T, mas só podemos demonstrar consistência se mostrarmos que essas deduções não existem.

Dizemos que uma teoria T é *satisfazível* se ela possui um modelo, isto é, se existe alguma estrutura onde todas as sentenças de T, corretamente interpretadas, são verdadeiras. Note que satisfatibilidade é uma propriedade positiva: podemos demonstrar satisfatibilidade apresentando um modelo onde todas as sentenças de T são verdadeiras, mas só podemos demonstrar insatisfatibilidade se mostrarmos que esse modelo não existe.

Essas duas propriedades são unidas pelo teorema da completude de Gödel: *uma teoria é satisfazível se e só se ela é consistente.* Esse teorema permite que naveguemos entre a lógica e a teoria de modelos de acordo com o que é mais conveniente: provar que uma teoria é inconsistente é mais simples que provar que ela é insatisfazível, e provar que uma teoria é satisfazível é mais simples que provar que ela é consistente.

1.3 Provas de independência

Uma sentença α é dita *independente* de uma teoria T quando ela não pode ser provada nem refutada pelos axiomas, isto é, tanto $T + \alpha$ quanto $T + \neg\alpha$ são teorias consistentes.

Um exemplo clássico de independência é o postulado das retas paralelas. Ele era controverso desde a época de Euclides pois, diferente dos outros axiomas, ele parecia derivado o suficiente para que fosse esperado que ele fosse demonstrável a partir dos outros. Contudo, inúmeras tentativas de demonstrá-lo ao longo dos séculos falharam: somente no século XIX, com a exploração de geometrias não-euclidianas, que a sua independência foi determinada.

O caso das retas paralelas, em conjunto com a seção anterior, dá uma dica de como lidar com provas de independência. Provar a consistência de uma teoria é complexo, mas provar a existência de um modelo — como as geometrias não-euclidianas — é simples. Assim, é possível demonstrar independência construíndo modelos para $T + \alpha$ e $T + \neg\alpha$.

1.4 Paul Cohen e *forcing*

Os axiomas de Zermelo-Fraenkel com o axioma da escolha (ZFC) são uma axiomatização da teoria de conjuntos, construída para evitar paradoxos como o de Russell presentes na teoria de conjuntos intuitiva. A hipótese do contínuo (CH) afirma que não existem cardinalidades intermediárias entre a cardinalidade dos números naturais (denotada por $\aleph_0$) e a cardinalidade dos números reais (denotada por $2^{\aleph_0}$), isto é, que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Em 1963, Cohen (2) provou a independência da hipótese do contínuo dos axiomas ZFC. Para isso, ele criou uma técnica chamada *forcing*: uma forma de construír um modelo $M[\text{CH}]$ de ZFC + CH e um modelo $M[\neg\text{CH}]$ de ZFC + $\neg$CH a partir de um modelo M de ZFC. Isso permitiu que ele provasse a consistência *relativa* dessas duas teorias, isto é, que se ZFC é consistente (i.e. possui um modelo M) então as duas teorias ZFC + CH e ZFC + $\neg$CH também são.

Da época de Cohen até os dias de hoje, a técnica de *forcing* viu aplicações tanto na teoria de conjuntos (como na independência da hipótese do contínuo generalizada, a ideia que não existem cardinalidades intermediárias entre um cardinal infinito e o seu powerset) quanto fora dela.

2 Objetivos e justificativa

O desenvolvimento de sistemas axiomáticos para tornar a matemática mais rigorosa foi um dos grandes motivadores no desenvolvimento da matemática no século XIX. Na análise, por exemplo, a busca por maior rigor no cálculo newtoniano levou a uma reforma completa da área, dando origem a todas ferramentas vistas hoje em um curso prototípico de cálculo: a definição épsilon-delta de limite, integração de Riemann, sequências de Cauchy, etc. Assim, a matemática contemporânea é caracterizada por uma procura por rigor, e áreas de caráter mais fundamental como a teoria de modelos e a teoria de conjuntos permitem um estudo sistematizado desse rigor.

Além disso, o estudo da lógica matemática ganhou grande importância no século XX e XXI, com o surgimento e proliferação de computadores. De fato, a chamada "lógica de programação", que consiste na capacidade de expressar os passos necessários para resolver um problema numa linguagem de programação, é uma das habilidades fundamentais pedidas de qualquer programador. Avanços no desenvolvimento de computadores, tanto no nível de hardware (e.g. computação quântica) quanto de software (e.g. redes neurais) decerto estarão atrelados a avanços correspondentes na lógica.

O objetivo do projeto é familiarizar o aluno com três grandes tópicos: a teoria de modelos, a teoria de conjuntos e a técnica de *forcing* para provar resultados de independência. Com inspiração da equação de Chang & Keisler, "álgebra universal + lógica = teoria de modelos", também é possível incluir incluir álgebra e lógica como tópicos desejáveis. Assim, ao final do projeto, espera-se que o aluno esteja familiarizado com:

- Álgebra: teoria de grupos e de anéis elementar. Estudo via as matérias de graduação MAT0264 (Grupos) e MAT0265 (Anéis e Corpos).

- Teoria dos Conjuntos: axiomatização ZFC, relações de boa-ordem, ordinais e cardinais, provas de consistência e independência via *forcing*. Estudo via a matéria de graduação MAT0330, a matéria da pós-graduação MAT5739 e os livros de Halmos (3), Jech (4) e Kunen (5).

- Teoria de Modelos: teoremas da compacidade e de Löwenheim-Skolem, ultraprodutos, eliminação de quantificadores, categoricidade, estabilidade. Estudo via a matéria de pós-graduação MAT5865 e o livro de Chang & Keisler (1)

- Lógica: Aluno já possui familiaridade com o conteúdo necessário de lógica de primeira ordem via os livros de Boolos, Burgess & Jeffrey (6) e Smith (7). Contudo, cursará as disciplinas de lógica da graduação FLF0444 e FLF0504 para ter contato com tópicos avançados de lógica, como lógicas não-clássicas.

3 Plano de trabalho e cronograma

3.1 Cronograma de trabalho

O projeto será desenvolvido ao longo de quatro semestres, com início em Agosto de 2022 e término em Julho de 2024. Durante esse período, o aluno será responsável pelas seguintes atividades:

1. Leitura da bibliografia relevante ao projeto: os livros de Halmos (3), Jech (4), Kunen (5) e Chang & Keisler (1) mencionados na seção 2, em conjunto com artigos relacionados.

2. Participação em disciplinas relevantes ao projeto: as disciplinas MAT0264, MAT0265, MAT0330 da graduação e as disciplinas MAT5865 e MAT5739 da pós-graduação. As disciplinas de lógica FLF0444 e FLF0504 também serão cursadas, mas não são necessárias para o entendimento de *forcing* e teoria de modelos.

3. Elaboração de relatório final: a escrita de um trabalho sumarizando o conteúdo de teoria de modelos, teoria de conjuntos e *forcing* estudado ao longo do projeto.

4. Reuniões com o orientador para averiguar como o projeto está procedendo.

O cronograma dessas atividades, semestre-a-semestre, está resumido na Tabela 1.

3.2 Grade de disciplinas

Como descrito na seção 2, o sucesso dos objetivos do projeto depende tanto da leitura de livros-texto quanto de disciplinas oferecidas pela USP-Butantã.

	S1	S2	S3	S4
Leitura de livros-texto e artigos relevantes	x	x	x	
Curso de matérias da USP necessárias	x	x	x	
Elaboração de rascunho inicial do relatório final		x	x	
Conclusão do relatório final				x
Reuniões de acompanhamento com o orientador	x	x	x	x

Tabela 1 – Cronograma de trabalho proposto.

As disciplinas que serão cursadas podem ser divididas em dois grupos: as cujo objetivo é fornecer conceitos necessários para o entendimento do tópico central (*forcing*) e as cujo objetivo é expandir os horizontes do aluno.

No primeiro grupo, temos:

- Álgebra: MAT0265 - Grupos e MAT0264 - Anéis e Corpos.
- Teoria de Conjuntos: MAT0330 - Teoria dos Conjuntos e MAT5739 - Teoria dos Conjuntos e Aplicações
- Teoria de Modelos: MAT5865 - Teoria dos Modelos e Aplicações

No segundo grupo, temos as disciplinas de Lógica oferecidas pela FFLCH: FLF0444 - Lógica III e FLF0504 - Lógica IV.

Essas disciplinas totalizam 44 créditos. Somados com os 48 créditos de Iniciação a Pesquisa I-IV, a grade horária total prevista terá 92 créditos.

Abaixo segue uma tabela com a grade de disciplinas descrita acima.

2º Semestre 2022	FLF0444 - Lógica III (6)
	MAT0265 - Grupos (4)
	CCM0318 - Iniciação à Pesquisa I (12)
1º Semestre 2023	MAT0264 - Anéis e Corpos (4)
	MAT0330 - Teoria dos Conjuntos (4)
	CCM0328 - Iniciação à Pesquisa II (12)
2º Semestre 2023	MAT5739 - Teoria dos Conjuntos e Aplicações (10)
	MAT5865 - Teoria dos Modelos e Aplicações (10)
	CCM0418 - Iniciação à Pesquisa III (12)
1º Semestre 2024	FLF0504 - Lógica IV (6)
	CCM0428 - Iniciação à Pesquisa IV (12)

Tabela 2 – Grade horária proposta.

Referências

1 CHANG, C. C.; KEISLER, H. J. *Model theory*. 3. ed. Mineola, NY: Dover Publications, 2012. (Dover Books on Mathematics).

2 COHEN, P. J. The independence of the continuum hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, National Academy of Sciences, v. 50, n. 6, p. 1143–1148, 1963. ISSN 00278424. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/71858>.

3 HALMOS, P. R. *Naive set theory*. 1974. ed. New York, NY: Springer, 2013. (Undergraduate Texts in Mathematics).

4 JECH, T. *Set Theory*. 3. ed. Berlin, Germany: Springer, 2007. (Springer Monographs in Mathematics).

5 KUNEN, K. *Set theory: an introduction to independence proofs*. Oxford, England: North-Holland, 1983. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics).

6 BOOLOS, G. S.; BURGESS, J. P.; JEFFREY, R. C. *Computability and Logic*. 5. ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2007.

7 SMITH, N. J. J. *Logic: The Laws of Truth*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2012.