

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA



**MODELOS SIMPLIFICADOS DE GRAVEDAD CUÁNTICA
CON AUTÓMATAS CELULARES**

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Supervisor: David Pérez García

Saul Baltasar

Doble Grado en Matemáticas y Física

Curso académico 2024-25

Resumen:

En este trabajo se estudia una familia de modelos discretos propuesta en [1], basada en autómatas celulares y diseñada para reproducir las propiedades de una teoría cuántica de campos conforme. Asimismo, se analiza su interpretación como estados cuánticos definidos en la frontera de distintas geometrías asociadas a teorías gravitatorias, en el marco de la Relatividad General, lo que permite entenderlos como modelos holográficos discretos. La principal ventaja de adoptar un enfoque discreto radica en la rigurosidad y trazabilidad matemática que ofrece. Sin embargo, muchas propuestas discretas previas presentan dificultades para definir una evolución temporal consistente de los estados cuánticos sin comprometer dicha trazabilidad. Para abordar esta limitación, los modelos estudiados en este trabajo incorporan una ley dinámica que permite una evolución temporal completamente natural, lo que posibilita el análisis de geometrías como AdS y de agujeros negros. Estos últimos se emplean en el estudio de la paradoja de la pérdida de información en agujeros negros. En particular, en este TFG se investigan las propiedades de esta familia de modelos holográficos en relación con dicho problema, aportando resultados originales que contribuyen al avance en esta área de investigación.

Abstract:

This work explores a family of discrete models introduced in [1], which are based on cellular automata and designed to replicate key features of conformal quantum field theory. Additionally, these models can be interpreted as quantum states defined on the boundaries of various geometries associated with gravitational theories, within the framework of General Relativity. This perspective allows them to be understood as discrete holographic models. One of the main advantages of a discrete approach to holography is its mathematical rigor and traceability. However, previous discrete models have struggled to establish a consistent time evolution for quantum states without sacrificing these properties. To address this challenge, the models analyzed in this work incorporate a well-defined dynamical law that ensures a natural time evolution, enabling the study of geometries such as AdS space and black holes. Black holes, in particular, play a crucial role in the investigation of the information loss paradox. This bachelor's thesis examines the properties of this family of holographic models in relation to this problem, presenting original results that contribute to our understanding of quantum gravity and holography.

Índice

1. Introducción	2
2. Mecánica Cuántica	2
2.1. Espacios de Hilbert	3
2.2. Evolución temporal	4
2.3. Sistemas compuestos	5
2.4. Matrices de densidad y entrelazamiento	6
3. Redes tensoriales	9
4. Correspondencia AdS/CFT	11
4.1. Relatividad General	12
4.1.1. Métrica de Minkowski	13
4.1.2. Métrica de Anti-de Sitter	13
4.2. Termodinámica de agujeros negros	14
4.3. Teorías cuánticas de campo conformes	15
4.4. Correspondencia AdS/CFT y prescripción Ryu-Takayanagi	16
5. Autómatas celulares cuánticos conformes	17
5.1. Circuitos cuánticos en dimensión $1 + 1$	18
5.2. Puertas dualmente unitarias	20
5.3. Operador de evolución temporal conforme	21
5.3.1. Transformaciones conformes en QCAs	21
5.3.2. Transformaciones de Lorentz en QCAs	22
5.3.3. Invariancia de escala de T	23
5.3.4. Operador T de dos capas	25
6. Holografía discreta	25
6.1. Geometría de entrelazamiento	26
6.2. Estado Anti-de Sitter	30
6.3. Agujeros de gusano y agujeros negros	31
6.3.1. Paradoja de la información en agujeros negros y Python's lunches	34
7. Conclusión	37

1. Introducción

Para describir sistemas cuánticos, se debe tener en cuenta que la dimensión de los espacios de Hilbert crece exponencialmente con el número de grados de libertad. Esta característica conduce rápidamente a una complejidad extremadamente alta, dificulta su análisis teórico y genera una carga computacional inasumible. En este contexto, surgen las *redes tensoriales* (*Tensor Networks*) [2] como herramientas que permiten explotar la estructura y las simetrías presentes en los sistemas físicos típicos. A primera vista, podría pensarse que estas técnicas solo resultan útiles para estudiar sistemas muy específicos; sin embargo, en la práctica, muchos sistemas físicos exhiben simetrías que no se perciben completamente mediante una representación estándar de los estados cuánticos. Las redes tensoriales proporcionan, por tanto, una representación eficiente de los estados cuánticos, permitiendo identificar y analizar las propiedades universales de ciertas clases de estados. Estas herramientas han demostrado ser especialmente útiles en el estudio de sistemas de muchos cuerpos (*many-body systems*), información cuántica, etc. [3]. En este trabajo, además, exploraremos su aplicación en la discretización de teorías cuánticas de campos conformes y modelos holográficos [1].

El principio holográfico [4] y su posterior interpretación [5] constituye uno de los descubrimientos más trascendentales en la búsqueda de una unificación entre la gravedad y la mecánica cuántica. Este principio se formula en el contexto de la teoría de cuerdas, y su máxima realización hasta la fecha es la correspondencia AdS/CFT [6], que establece una dualidad entre el espacio gravitacional de Anti-de Sitter (AdS) y una teoría cuántica de campos conforme (*Conformal Field Theory*, CFT) en un espacio plano (Minkowski). En este contexto, la prescripción Ryu-Takayanagi [7] proporciona una receta para calcular la entropía de entrelazamiento en una CFT a partir de la métrica AdS. Esta prescripción se puede generalizar para el caso general, en que una variedad (pseudo) riemanniana con frontera presenta una teoría cuántica en la misma, de manera que la entropía de entrelazamiento cuántico en la frontera determina la geometría del interior y viceversa.

Este trabajo se organiza de la siguiente manera. En §2 se introducen los fundamentos de la mecánica cuántica relevantes para el estudio del entrelazamiento en espacios de Hilbert de dimensión finita. Posteriormente, en §3, se presentan las redes tensoriales como una herramienta para describir estados cuánticos de manera eficiente. En §4, se ofrece una motivación rigurosa de la correspondencia AdS/CFT y, para modelar estados con propiedades asociadas a esta equivalencia, empleamos una familia de autómatas celulares cuánticos conformes introducida en §5. A continuación, en §6, nos centramos en estados AdS y de agujero negro con el objetivo de analizar la paradoja de la pérdida de información en estos sistemas. En esta línea, este TFG aporta un resultado original y sugiere posibles direcciones para futuras investigaciones. Finalmente, en §7, se presentan nuestras conclusiones.

2. Mecánica Cuántica

La mecánica cuántica es la teoría fundamental que describe el comportamiento de los sistemas físicos a escalas microscópicas, donde las leyes de la mecánica clásica dejan de ser aplicables. Su desarrollo en el siglo XX permitió explicar fenómenos que no podían entenderse dentro del marco de la física clásica, como la estabilidad de los átomos, el efecto fotoeléctrico y la dualidad onda-partícula. A diferencia de la mecánica clásica, en la que los sistemas tienen trayectorias bien definidas en el espacio y el tiempo, la mecánica cuántica introduce una descripción probabilística basada en varios postulados clave [8]:

- **Principio de superposición:** Un sistema cuántico puede existir en una combinación de múltiples estados simultáneamente hasta que se realiza una medición.
- **Cuantización de observables:** Magnitudes físicas como la energía y el momento angular

no pueden tomar valores arbitrarios, sino que están determinadas por el espectro de ciertos operadores.

- **Medición y colapso:** Al medir una propiedad de un sistema, su estado colapsa a un estado bien definido asociado al valor medido.
- **Entrelazamiento cuántico:** Dos o más sistemas pueden estar correlacionados de manera no local, lo que significa que medir una propiedad en uno afecta instantáneamente el estado del otro, sin importar la distancia.

2.1. Espacios de Hilbert

En mecánica cuántica, un sistema físico se describe mediante un espacio de Hilbert \mathcal{H} cuyos elementos describen el estado cuántico del sistema.

Definición 2.1 (Espacio de Hilbert). Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial complejo \mathcal{H} junto con un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$, que satisface las siguientes propiedades:

1. **Linealidad:** Para todo $|\psi\rangle, |\phi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{H}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\langle \alpha\psi + \beta\phi, \chi \rangle = \alpha\langle \psi | \chi \rangle + \beta\langle \phi | \chi \rangle. \quad (1)$$

2. **Conjugado simétrico:** Para todo $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}$,

$$\overline{\langle \psi | \phi \rangle} = \langle \phi | \psi \rangle. \quad (2)$$

3. **Positividad:** Para todo $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$,

$$\langle \psi | \psi \rangle \geq 0 \quad \text{y} \quad \langle \psi | \psi \rangle = 0 \iff |\psi\rangle = 0. \quad (3)$$

4. **Compleitud:** El espacio \mathcal{H} es completo con respecto a la norma inducida por el producto interno. Esto significa que toda sucesión de Cauchy en \mathcal{H} converge a un límite en \mathcal{H} .

Los elementos de \mathcal{H} son vectores que representan el estado cuántico del sistema, denotados como $|\psi\rangle$, donde $|\psi\rangle$ es un vector unitario en \mathcal{H} , es decir, $\langle \psi | \psi \rangle = 1$, y los operadores actuando sobre estos se restringen a aquellos operadores lineales y acotados sobre el espacio de Hilbert.

Definición 2.2 (Operador hermítico). Un operador lineal y acotado $\hat{A} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, se dice **hermítico** (o autoadjunto) si satisface la siguiente condición:

$$\text{para todo } |\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}, \quad \langle \psi | \hat{A} \phi \rangle = \langle \hat{A} \psi | \phi \rangle. \quad (4)$$

Equivalentemente, un operador \hat{A} es hermítico si, y solo si, $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$, donde $\hat{A}^\dagger = (A^\top)^*$ denota el adjunto de \hat{A} y $*$ el complejo conjugado de un operador.

En mecánica cuántica, a los observables físicos se les asocia un operador hermítico actuando en \mathcal{H} . Por ejemplo, el observable energía, se representa por el operador Hamiltoniano \hat{H} , y describe la energía total del sistema cuántico. La hermiticidad asegura que los autovalores de estos operadores sean reales, lo cual es fundamental para interpretar las mediciones físicas como resultados observables.

Llamaremos *ket* a los elementos $|\psi\rangle$ (notación de Dirac) del espacio de Hilbert \mathcal{H} . Supongamos que \mathcal{H} tiene dimensión d , y consideremos una base ortonormal, denotada como $\mathcal{B} = \{|i\rangle : i = 0, \dots, d-1\}$. Esta base se conoce como *base computacional* y, al ser base ortonormal, satisface la

relación $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. Por tanto, podemos expresar cualquier vector $|\psi\rangle$ del espacio de Hilbert, en esta base como $|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{d-1} \psi_i |i\rangle$, donde $\psi_i = \langle i|\psi\rangle$ son coeficientes complejos. Llamaremos *bra* a los funcionales lineales del espacio de Hilbert \mathcal{H} , esto es, a los elementos del espacio dual \mathcal{H}^* y los denotaremos como $\langle\phi|$. El funcional $\langle\phi|$ actúa sobre un ket $|\psi\rangle$ tomando el producto interno:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \sum_i \overline{\phi^i} \langle i|\psi\rangle = \overline{\phi^i} \psi_i, \quad (5)$$

donde $\overline{\phi^i}$ son los coeficientes de $\langle\phi|$ (conjugados de $|\phi\rangle$) e $\{|i\rangle\}$ es la base dual a $\{|i\rangle\}$. En la última igualdad, se ha utilizado el convenio de sumación de Einstein: siempre que haya dos índices iguales en diferentes alturas, su suma es implícita. Este convenio es particularmente conveniente para entender las redes de tensores pues internalizan esta regla en su propia estructura.

Podemos ver tanto a los bras como a los kets como tensores de orden 1. De hecho, un operador lineal y acotado que actúa sobre el espacio de Hilbert, se puede entender también como un tensor de orden dos mediante $\hat{A} = \sum_{i,j=0}^{d-1} A_i^j |i\rangle\langle j|$, con $A_i^j = \langle i|\hat{A}|j\rangle$. Es decir, en notación de Dirac, el número de índices de las componentes de un tensor definen el orden del mismo. La valencia de un tensor se define como el número de índices arriba y abajo que presenten sus componentes. Por ejemplo, los kets son tensores de valencia (1,0), luego se dice que son (1,0)-tensores. Los bras, son (0,1)-tensores y un operador actuando en el espacio de Hilbert será un (1,1)-tensor. Para terminar de ilustrar el convenio de Einstein, veamos la actuación del operador \hat{A} sobre el estado $|\psi\rangle$,

$$\hat{A}|\psi\rangle = \sum_{i,j=0}^{d-1} A_i^j |i\rangle\langle j| \left(\sum_{k=0}^{d-1} \psi_k |k\rangle \right) = \sum_{i,j,k=0}^{d-1} A_i^j \psi_k |i\rangle \delta_{jk} = \sum_{i=0}^{d-1} A_i^j \psi_j |i\rangle, \quad (6)$$

donde se supone el convenio de Einstein en la última igualdad.

2.2. Evolución temporal

La evolución temporal de un sistema cuántico está gobernada por la ecuación de Schrödinger, que describe cómo evoluciona el estado $|\psi(t)\rangle$ con el tiempo t :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (7)$$

donde \hbar denota la constante reducida de Planck y \hat{H} el operador Hamiltoniano que representa la energía total del sistema. Dado un estado inicial del sistema en $t = t_0$, $|\psi(t_0)\rangle$, y un Hamiltoniano \hat{H} no dependiente del tiempo, la solución general a esta ecuación diferencial se puede escribir como

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar} |\psi(t_0)\rangle. \quad (8)$$

Si elegimos un autoestado del Hamiltoniano, $\hat{H}|\psi(t_0)\rangle = E|\psi(t_0)\rangle$, entonces la evolución se simplifica a:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iE(t-t_0)/\hbar} |\psi(t_0)\rangle, \quad (9)$$

y E se interpreta como la energía del estado $|\psi\rangle$, que es constante para todo tiempo t .

Para el caso general, en que el operador Hamiltoniano puede depender explícitamente del tiempo, la evolución temporal viene dada por un operador unitario \hat{U} . La definición de unitariedad ilustra su utilidad física, pues permite que la norma de los elementos del espacio de Hilbert se preserve en la evolución.

Definición 2.3 (Operador Unitario). Un operador lineal y acotado $\hat{U} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ actuando sobre un espacio de Hilbert \mathcal{H} se dice **unitario** si preserva el producto interno,

$$\text{para todo } |\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}, \quad \langle \hat{U}\psi | \hat{U}\phi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle. \quad (10)$$

Equivalentemente, si \hat{U}^\dagger es el adjunto de \hat{U} y \hat{I} es el operador identidad en \mathcal{H} , \hat{U} es unitario si

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = \hat{I}. \quad (11)$$

De esta manera, el estado en tiempo t vendrá dado por la actuación de \hat{U} sobre el estado en tiempo t_0 :

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle. \quad (12)$$

Esta interpretación se conoce como la imagen de Schrödinger, en la cual los estados evolucionan temporalmente, de acuerdo con la ecuación de Schrödinger. En experimentos sobre mecánica cuántica, sin embargo, la única información disponible en las mediciones son valores esperados. Veamos pues, cómo evoluciona el valor esperado de un observable \hat{A} ,

$$\langle \hat{A}^S \rangle = \langle \psi^S(t) | \hat{A}^S | \psi^S(t) \rangle = \langle \psi(t_0) | U^\dagger(t, t_0) \hat{A}^S U(t, t_0) | \psi(t_0) \rangle = \langle \psi^H | \hat{A}^H(t) | \psi^H \rangle, \quad (13)$$

donde los superíndices S y H aluden a la imagen de Schrödinger y Heisenberg, respectivamente. La imagen de Heisenberg se relaciona con la imagen de Schrödinger a través de los operadores, $\hat{A}^H(t) = U^\dagger(t, t_0) \hat{A}^S U(t, t_0)$ y los estados $|\psi^H\rangle = |\psi^S(t_0)\rangle$. Es decir, en la imagen de Heisenberg los operadores $\hat{A}^H(t)$ evolucionan temporalmente, mientras que en la imagen de Schrödinger, son los estados $|\psi^S(t)\rangle$ aquellos que evolucionan. Modificando la ecuación de Schrödinger y empleando estas últimas relaciones, se deriva la ecuación de Heisenberg, que determina la evolución temporal unitaria de un operador,

$$\frac{d}{dt} \hat{A}^H(t) = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}^H(t), \hat{A}^H(t)]. \quad (14)$$

2.3. Sistemas compuestos

Dos sistemas individuales, \mathcal{H}_A , \mathcal{H}_B pueden conformar un sistema cuántico compuesto, construyendo el espacio de Hilbert total asociado como el producto tensorial de los espacios de Hilbert individuales correspondientes a cada sistema individual, $\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Esto se conoce como un sistema bipartito, pero se puede construir cualquier sistema multipartito concatenando productos tensoriales.

En el espacio total, podemos expresar una base como el producto tensorial (ordenado) de una base de cada factor. Los estados compuestos se pueden representar como combinaciones lineales de productos tensoriales de estados individuales. Así, dadas $\{a_i\}$, $\{b_j\}$ bases de \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B , respectivamente, el estado compuesto del sistema se puede escribir como $|\psi_{AB}\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |a_i\rangle \otimes |b_j\rangle \in \mathcal{H}_{AB}$. Los operadores en el espacio de Hilbert compuesto actúan sobre el espacio de Hilbert total. Cuando los subsistemas evolucionan de forma independiente, el operador de evolución del sistema total se descompone como $\hat{U}_{AB} = \hat{U}_A \otimes \hat{U}_B$; su acción sobre estados producto de la forma $|\psi_{AB}\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$ vendrá dada por $\hat{U}_{AB} |\psi_{AB}\rangle = \hat{U}_A |\psi_A\rangle \otimes \hat{U}_B |\psi_B\rangle$. En general, dado un sistema cuántico descrito por el espacio de Hilbert $\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}_i$, la noción de tensor cobra mayor importancia, debido a su simplicidad. Un operador \hat{A} actuando sobre el espacio de Hilbert multipartito tendrá una representación como (N,N)-tensor dada por las componentes $A_{i_1, \dots, i_N}^{j_1, \dots, j_N}$.

2.4. Matrices de densidad y entrelazamiento

En mecánica cuántica, nuestro conocimiento del sistema suele ser incompleto. Por ejemplo, cuando tenemos acceso únicamente a un subsistema de un sistema más amplio, o cuando existe incertidumbre clásica en el estado cuántico. En estos casos, la descripción mediante un vector de estado $|\psi\rangle$ resulta insuficiente, lo que motiva la introducción de las matrices de densidad. Una matriz de densidad ρ es un operador lineal en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, que satisface las siguientes propiedades:

1. Hermiticidad: $\rho = \rho^\dagger$.
2. Positividad: para todo $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$, $\langle\phi|\rho|\phi\rangle \geq 0$.
3. Normalización (traza unitaria): $\text{Tr}(\rho) = 1$.

Un estado puro es aquel que puede ser descrito por un vector de estado $|\psi\rangle$, luego su matriz de densidad se puede construir simplemente como $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. En cambio, un estado mixto representa una mezcla estadística de estados puros $\{|\psi_i\rangle\}$, cada uno con probabilidades clásicas $\{p_i\}$, es decir, $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$, verificando $\sum_i p_i = 1$ y $p_i \geq 0$. Dado un estado cualquiera, los estados mixtos y puros están caracterizados unívocamente por la siguiente propiedad de su matriz de densidad asociada.

Proposición 2.1. Un estado cuántico, dado por una matriz de densidad ρ es, o bien

$$\begin{cases} \text{puro} & \iff \text{Tr}(\rho^2) = 1, \text{ o bien,} \\ \text{mixto} & \iff \text{Tr}(\rho^2) < 1. \end{cases} \quad (15)$$

Demostración. Consideremos una base ortonormal $\{|\phi_k\rangle\}$ del espacio de Hilbert y calculemos la traza de ρ^2 :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho^2) &= \sum_k \langle\phi_k|\rho^2|\phi_k\rangle = \sum_k \langle\phi_k| \left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j| \right) |\phi_k\rangle = \\ &= \sum_{ijk} p_i p_j \langle\phi_k|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\phi_k\rangle = \sum_{ijk} p_i p_j \langle\psi_j|\phi_k\rangle\langle\phi_k|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \\ &= \sum_{ij} p_i p_j \langle\psi_j| \left(\sum_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k| \right) |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \sum_{ij} p_i p_j \langle\psi_j|\mathbb{I}|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \sum_{ij} p_i p_j |\langle\psi_i|\psi_j\rangle|^2 \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\langle\psi_j|\phi_k\rangle$ es un escalar y que $\sum_k |\phi_k\rangle\langle\phi_k| = \mathbb{I}$, sumando sobre todos los elementos de la base de \mathcal{H} .

En virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwartz aplicada al producto escalar $\langle\cdot|\cdot\rangle$, y recordando que los estados $\{|\psi_i\rangle\}$ están normalizados,

$$\sum_{ij} p_i p_j |\langle\psi_i|\psi_j\rangle|^2 \leq \sum_{ij} p_i p_j = \sum_i p_i \sum_j p_j = 1 \Leftrightarrow \text{Tr}(\rho^2) \leq 1$$

La igualdad se da si y solo si $|\psi_i\rangle = \pm|\psi_j\rangle := |\psi\rangle$, $\forall i, j$, en cuyo caso $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = |\psi\rangle\langle\psi|$, esto es, ρ representa un estado puro. \square

Consideremos ahora un estado puro que engloba el sistema cuántico a estudiar más el entorno, descrito mediante un vector de estado $|\psi\rangle$ en el espacio de Hilbert bipartito $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, donde \mathcal{H}_A representa el espacio de Hilbert del sistema de interés y \mathcal{H}_B el del entorno. Por tanto, la matriz

densidad del estado total se expresa como $\rho_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi|$. Se pueden definir subestados asociados a cada uno de los subsistemas, mediante el operador conocido como la traza parcial sobre un subsistema.

Definición 2.4 (Traza parcial). Dado un espacio de Hilbert bipartito $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, se define la traza parcial sobre el subsistema B como el único operador lineal $\text{Tr}_B : \mathcal{L}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_A)$ tal que para todo $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ y para todo $M_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A), M_B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_B)$:

1. Preserva la traza total: $\text{Tr}(\text{Tr}_B(X)) = \text{Tr}(X)$.
2. Respeta el producto tensorial: $\text{Tr}_B(M_A \otimes M_B) = M_A \cdot \text{Tr}(M_B)$.

Equivalentemente, en un espacio de Hilbert de dimensión finita, la traza parcial se puede definir simplemente como,

$$\text{Tr}_B = \mathbb{I}_A \otimes \text{Tr}, \quad (16)$$

donde \mathbb{I}_A es la identidad de \mathcal{H}_A y $\text{Tr} : \mathcal{H}_B \rightarrow \mathbb{C}$.

Consideremos bases ortonormales $|i\rangle_A$ y $|j\rangle_B$ para \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B respectivamente. Dado un operador $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$, la traza parcial se puede calcular explícitamente según la Ec. (16):

$$\text{Tr}_B(X) = \sum_j {}_B\langle j|X|j\rangle_B, \quad (17)$$

donde ${}_B\langle j|X|j\rangle_B$ es un operador que actúa sobre \mathcal{H}_A .

De esta manera, podemos definir la matriz densidad reducida del subsistema A , aplicando la traza parcial respecto de B sobre la matriz de densidad total

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB}). \quad (18)$$

Esta operación tiene una interesante interpretación en el contexto de agujeros negros. Un observador con acceso únicamente a la información del subsistema A , percibe el subsistema B como un agujero negro y la separación entre ambos como el horizonte de sucesos. El observador A solo percibe la información en el horizonte, y nada más allá. De igual manera, un observador en B , dentro de un agujero negro, no percibirá información del exterior. Esta analogía motivará la fórmula de Ryu-Takayanagi en la correspondencia AdS/CFT [7].

Un estado puro bipartito $|\psi_{AB}\rangle$ se dice entrelazado si no puede escribirse como un producto tensor de estados individuales, $|\psi_{AB}\rangle \neq |\phi_A\rangle \otimes |\chi_B\rangle$. El entrelazamiento se puede entender como correlaciones cuánticas que impiden expresar el sistema como la suma de sus partes por separado. Conocer el estado de cualquiera de los subsistemas determina (al menos parcialmente) el estado del otro subsistema. Clásicamente, para medir la cantidad de información presente en una distribución de probabilidad $\{p_i\}$, se utiliza la entropía de Shannon, $S(\{p_i\}) = -\sum_i p_i \log p_i$. Aquellos sucesos cuya probabilidad sea menor aportarán mayor información del sistema, pues son menos frecuentes. Su análogo cuántico es la entropía de von Neumann, definida para una matriz densidad ρ :

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log \rho) = -\sum_i \lambda_i \log \lambda_i, \quad (19)$$

donde λ_i son los autovalores de ρ .

Aplicando la entropía de von Neumann a la matriz reducida del subsistema A , se obtiene la *entropía de entrelazamiento*, $S(\rho_A)$, que medirá las correlaciones cuánticas entre los subsistemas que conforman un estado puro.¹ Por otro lado, la entropía de von Neumann aplicada a la matriz de

¹En el caso de un estado mixto, la entropía de entrelazamiento no cumple ciertas propiedades buscadas en una medida de información [9]. Para estos estados se suelen utilizar otras cantidades, como la *información mutua*, que sí captura las correlaciones entre subsistemas de estados mixtos.

densidad total del estado mide el *grado de mezcla* del estado. Para un estado puro $S(\rho) = 0$. Por tanto, la entropía de entrelazamiento de estados bipartitos puros es independiente del subsistema utilizado, es decir, $S(\rho_A) = S(\rho_B)$. Para un sistema bipartito $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^d$, el estado de la forma

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=0}^{d-1} |i\rangle_A \otimes |i\rangle_B, \quad (20)$$

verifica que la matriz densidad reducida de cualquier subsistema es proporcional a la identidad, $\rho_A = \rho_B = \frac{1}{d} \sum_i |i\rangle\langle i| = \frac{1}{d} \mathbb{I}_d$. Un estado cuya matriz de densidad es proporcional a la identidad se dice que es un estado máximamente mixto. Por tanto, un estado puro tendrá entropía de entrelazamiento máxima $S(\rho_A) = \log d$ (será máximamente entrelazado) si, y solo si, cada uno de los subestados es máximamente mixto.

En el caso general, $\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^N \mathbb{C}^d$, para construir un estado máximamente entrelazado respecto de la partición $k|N - k$ (supongamos $k < N$)² recurrimos a la descomposición de Schmidt (ver sección 2.5 de [10]), que no es más que un caso concreto de la descomposición en valores singulares de una matriz. De esta manera, todo estado máximamente entrelazado presenta un rango de Schmidt (número de coeficientes no nulos de la descomposición) igual a $R = \min(d^k, d^{N-k}) = d^k$, y tiene la forma

$$|\Phi_k^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d^k}} \sum_{i=0}^{d^k-1} |i\rangle_{A_k} \otimes |i\rangle_{B_{N-k}}, \quad (21)$$

donde $A_k = \bigotimes_{i=1}^k \mathbb{C}^d$, $B_{N-k} = \bigotimes_{i=1}^{N-k} \mathbb{C}^d$. La matriz de densidad reducida del subsistema A_k , tendrá d^k autovalores no nulos, cada uno igual a $1/d^k$ y vendrá dada por $\rho_{A_k} = \frac{1}{d^k} \mathbb{I}_k$. Por tanto, la entropía de entrelazamiento de un estado máximamente entrelazado para la partición $k|N - k$ será:

$$S(\rho_{A_k}) = k \log d. \quad (22)$$

Por último, definamos el estado purificado de un estado cuántico (mixto), que será de utilidad en §6.3. Para ello probemos la existencia de un estado puro asociado a una matriz de densidad.

Proposición 2.2 (Purificación). Sea ρ_A la matriz densidad de un estado cuántico en un espacio de Hilbert \mathcal{H}_A . Existe un estado puro (no único, en general) $|\psi\rangle$ en un espacio de Hilbert ampliado $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ tal que:

$$\rho_A = \text{Tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|). \quad (23)$$

Definimos, por tanto, un estado purificado o purificación de ρ como el estado puro $|\psi\rangle$.

Demostración. De acuerdo con las propiedades 1 y 2 de las matrices de densidad, ρ_A puede diagonalizarse en una base ortonormal $\{|i\rangle\}$, y sus autovalores $\{p_i\}$ serán todos no negativos. Por lo tanto, podemos expresar

$$\rho_A = \sum_i p_i |i\rangle\langle i|. \quad (24)$$

Sea ahora \mathcal{H}_B una copia del espacio \mathcal{H}_A y consideremos un estado puro $|\psi\rangle_{AB} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, definido como

$$|\psi\rangle_{AB} = \sum_i \sqrt{p_i} |i\rangle \otimes |i\rangle. \quad (25)$$

²Recordemos que la entropía de von Neumann se define para sistemas bipartitos, luego debemos agrupar todos los factores en dos.

A continuación, calculamos la traza parcial respecto del subsistema B :

$$\begin{aligned} \text{Tr}_B(|\psi\rangle_{AB}\langle\psi|_{AB}) &= \text{Tr}_B \left[\left(\sum_i \sqrt{p_i} |i\rangle_A \otimes |i\rangle_B \right) \left(\sum_j \sqrt{p_j} \langle j|_A \otimes \langle j|_B \right) \right] = \\ &= \text{Tr}_B \left(\sum_{ij} \sqrt{p_i p_j} |i\rangle \langle j|_A \otimes |i\rangle \langle j|_B \right) = \left(\sum_{ij} \sqrt{p_i p_j} |i\rangle \langle j|_A \delta_{ij} \right) = \rho_A, \end{aligned} \quad (26)$$

que concluye la prueba. \square

3. Redes tensoriales

En mecánica cuántica el estado de un sistema compuesto por N subsistemas se describe mediante un vector en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , que generalmente se expresa como el producto tensorial de los espacios de Hilbert individuales, es decir, $\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^N \mathcal{H}_i$. La dimensión de este espacio crece exponencialmente con N , lo que genera un problema de escalabilidad. Como consecuencia, la simulación de un sistema cuántico con un número moderado de subsistemas puede volverse computacionalmente prohibitiva. Las Redes de Tensores (*Tensor Networks*) [2] surgen como una representación compacta y eficiente para describir estados cuánticos de interés físico, permitiendo superar las limitaciones computacionales asociadas con la representación explícita de estados en sistemas de muchos cuerpos. En términos generales, una red de tensores es una estructura gráfica en la que los vértices representan tensores y las aristas corresponden a las contracciones entre los índices de dichos tensores.

En muchos sistemas físicos relevantes, los estados cuánticos presentan correlaciones altamente estructuradas. Por ejemplo, en sistemas cuánticos locales con interacciones de corto alcance, la entropía de entrelazamiento de una región R es proporcional al área de su frontera, en lugar del volumen de R . Este comportamiento sugiere que el espacio de estados físicamente accesibles es una subregión de baja dimensión dentro del espacio de Hilbert completo. Las redes de tensores explotan estas propiedades al parametrizar estados cuánticos con tensores que preservan de manera eficiente las correlaciones locales y el entrelazamiento. Algunos ejemplos son los Estados Producto de Matrices (MPS, en inglés), adecuado para sistemas con interacciones de corto alcance [11]; o las Redes de Estados Proyectados (PEPS, en inglés), que extienden las MPS a dimensiones superiores [3].

En este trabajo, las redes de tensores serán de especial utilidad para describir sistemas de muchos cuerpos con modelos que permiten asegurar rigurosidad y trazabilidad tanto matemática como computacional. Una de las claves de su utilidad es la claridad de su notación, que engloba a todos los tensores que describen un sistema cuántico como objetos dentro del mismo diagrama. De aquí en adelante omitiremos el “gorro” encima de los operadores. La notación se puede resumir en los diagramas de la Figura 1.

Es común dibujar los índices correspondientes a cada línea de la red de tensores. Por ejemplo, un $(2,1)$ -tensor, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_j \otimes \mathcal{H}^k)$ se puede expresar como,



$$(27)$$

Existen tres tensores específicos que (esencialmente) desempeñan el papel del delta de Kronecker. Estos tensores permiten: contraer índices, elevar y bajar índices y establecen una dualidad

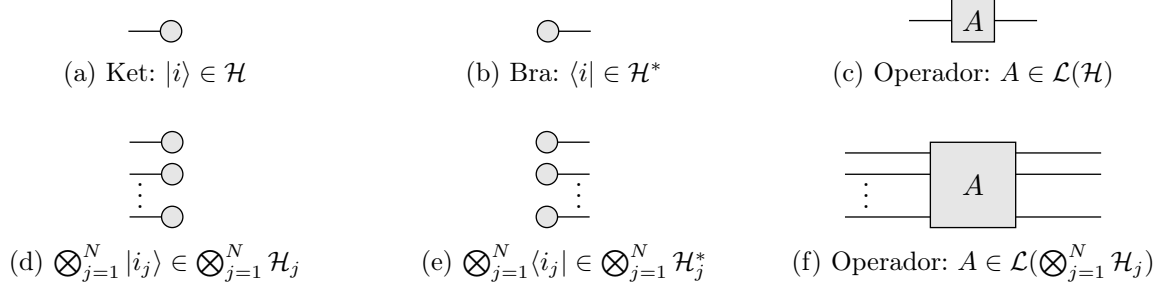


Figura 1: Representación en redes de tensores de algunos tensores simples, donde $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ denota el espacio de operadores lineales acotados que actúan en \mathcal{H} .

entre vectores, elementos duales y tensores en general. La dualidad introducida al conectar hilos se representa diagramáticamente de la siguiente forma:

$$(a) \left| = \delta_i^j \quad (b) \cap = \delta_{ij} \quad (c) \cup = \delta^{ij} \quad (28)$$

Si consideramos estos tensores en términos de componentes, por ejemplo, $\delta_{ij} = 1 - (i - j)^2$ para $i, j = 0, 1$, podemos observar lo siguiente:

$$\mathbb{I} = \sum_{ij} \delta_i^j |i\rangle\langle j| = \sum_k |k\rangle\langle k|, \quad (29)$$

$$|00\rangle + |11\rangle + \dots + |nn\rangle = \sum_{ij} \delta_{ij} |ij\rangle = \sum_k |kk\rangle, \quad (30)$$

$$\langle 00| + \langle 11| + \dots + \langle nn| = \sum_{ij} \delta^{ij} \langle ij| = \sum_k \langle kk|, \quad (31)$$

donde el mapa identidad Ec. (28)(a) corresponde a la Ec. (29), Ec. (28)(b) a la Ec. (30) y Ec. (28)(c) a la Ec. (31). La relación entre estas tres ecuaciones se da mediante la unión de diferentes tensores e hilos (correspondientes a deltas de Kronecker). En una base, doblar un hilo corresponde a convertir un bra en un ket, y viceversa.

La multiplicación de dos tensores se puede expresar uniendo ambos tensores mediante sus hilos, es decir, sus índices libres:

$$BA = \sum_k A_i^k B_k^j = \underset{i}{\text{---}} \boxed{A} \underset{k}{\text{---}} \boxed{B} \text{---} \underset{j}{\text{---}} \quad (32)$$

Aunque el orden de los tensores parece estar invertido, la notación se lee de manera que B actúa sobre A . Así, el índice de salida de A debe conectarse con el índice de entrada de B .

La contracción de dos índices de tensores se representa uniendo estos índices con un único hilo. Dados los tensores T_{jk}^i , A_n^l , y B_m^q , podemos contraer índices al multiplicar (con suma implícita) por $\delta_l^j \delta_q^k$, obteniendo el siguiente tensor,

$$A_n^j B_m^k T_{jk}^i \equiv \Gamma_{nm}^i, \quad (33)$$

donde el tensor Γ_{nm}^i se define para simplificar la notación. En la notación de Dirac, se puede expresar como,

$$\Gamma = \sum_{inm} \Gamma_{nm}^i |nm\rangle\langle i| = \sum_{ijknm} A_n^j B_m^k T_{jk}^i |nm\rangle\langle i|, \quad (34)$$

mientras que en notación de redes de tensores, el diagrama es simplemente

$$\Gamma = \begin{array}{c} |i \\ \boxed{\Gamma} \\ |n \quad |m \end{array} \equiv \begin{array}{c} |i \\ \boxed{T} \\ |j \quad |k \\ \boxed{A} \quad \boxed{B} \\ |n \quad |m \end{array} \quad (35)$$

De aquí en adelante nos referiremos como qudit a un sistema de d niveles, es decir, un sistema cuyo espacio de Hilbert es $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d$. Los operadores, o puertas cuánticas, que actúan sobre cada uno de los qudits se pueden escribir mediante redes tensoriales. Una puerta entre qudits vendrá dada por un tensor de valencia $(2, 2)$, \mathbf{u}_{ij}^{kl} , donde cada índice toma valores en el conjunto $0, 1, \dots, d-1$. En notación de red tensorial, utilizando un convenio de patas diagonales que facilitará los diagramas posteriores, esta puerta será un tensor “de cuatro patas” dado por

$$\begin{array}{c} k \quad l \\ \boxed{\mathbf{u}} \\ i \quad j \end{array} \quad (36)$$

La propiedad de unitariedad es fundamental para las puertas cuánticas pues, como hemos explicado en §2, los operadores de evolución temporal deben ser unitarios. Esta condición se puede expresar en notación de redes tensoriales mediante la siguiente relación:

$$\mathbf{u}^\dagger \mathbf{u} = \sum_{kl} (\mathbf{u}^\dagger)_{kl}^{i'j'} \mathbf{u}_{ij}^{kl} = \begin{array}{c} i' \quad j' \\ \boxed{\mathbf{u}^\dagger} \\ \boxed{\mathbf{u}} \\ i \quad j \end{array} = \begin{array}{c} i' \quad j' \\ | \quad | \\ i \quad j \end{array} = \delta_i^{i'} \delta_j^{j'} = \mathbb{I} \quad (37)$$

Nótese que el operador autoadjunto de \mathbf{u} es el operador traspuesto del complejo conjugado de \mathbf{u} y trasponer un operador se puede expresar en notación de redes de tensores invirtiendo los índices de entrada con los de salida. Una relación equivalente se tiene para $\mathbf{u}\mathbf{u}^\dagger$.

4. Correspondencia AdS/CFT

El principio holográfico [4, 5] conjetura que la información contenida en un volumen puede representarse completamente en términos de los grados de libertad en la superficie que delimita dicho volumen. Este principio surge en el contexto de la gravedad cuántica, en parte motivado por la termodinámica de agujeros negros, donde se observa que la entropía de un agujero negro es proporcional al área de su horizonte de eventos, en lugar de al volumen que encierra. Este concepto alcanzó una formulación precisa en la correspondencia entre espacios Anti-de Sitter y teorías cuánticas de campo conformes, conocida como correspondencia AdS/CFT [6], propuesta por Maldacena en 1997. Esta dualidad establece una equivalencia entre una teoría de gravedad en un espacio AdS y una teoría de campo conforme definida en la frontera de ese espacio, por lo que supone una relación fundamental entre la gravedad y la física cuántica.

Esta sección tiene como objetivo motivar la correspondencia AdS/CFT. Para ello, se introduce la teoría de la Relatividad General, con el fin de explicar la relación entre la gravedad y los espacios métricos. Posteriormente, se establece una conexión entre las leyes de la termodinámica y

los agujeros negros, destacando en este contexto uno de los indicios más flagrantes de la existencia de una dualidad holográfica. A continuación, se presentan las teorías cuánticas de campos y las transformaciones conformes, lo que permite sentar las bases necesarias para, finalmente, formular la correspondencia AdS/CFT.

4.1. Relatividad General

La Relatividad General es una teoría física que describe la gravedad como una manifestación de la curvatura del espaciotiempo, en lugar de considerarla como una fuerza en el sentido tradicional [12]. Formalmente, la Relatividad General utiliza el lenguaje de la geometría diferencial para describir el espaciotiempo como una variedad diferenciable de cuatro dimensiones equipada con una métrica pseudoriemanniana $g_{\mu\nu}$ [13].

Definición 4.1 (Métrica). Sea \mathcal{M} una variedad diferenciable de dimensión n . Una métrica es un campo tensorial g de valencia $(0, 2)$ sobre \mathcal{M} , es decir, una asignación suave que a cada punto $p \in \mathcal{M}$ asocia una forma bilineal simétrica $g(p)$ en el espacio tangente $T_p\mathcal{M}$:

$$g(p) : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \mapsto g(X, Y), \quad (38)$$

tal que en cada punto $p \in \mathcal{M}$, es no degenerada $\det[g(p)] \neq 0$.

Esta forma bilineal se puede expresar en coordenadas locales (x^μ) en términos de sus componentes en la base $\{dx^\mu\}$ del espacio tangente dual $(T_p\mathcal{M})^*$, dando lugar a lo que se conoce como el *elemento de línea*, ds^2 , que proporciona la distancia infinitesimal entre dos puntos cercanos en la variedad:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (39)$$

Dependiendo de la signatura de $g_{\mu\nu}$, la métrica puede ser riemanniana $(+, +, \dots, +)$ o pseudoriemanniana, en caso contrario. En relatividad general, se suele adoptar la signatura $(-, +, +, +)$.

El tensor métrico no solo codifica la información de la variedad sobre distancias y ángulos, también se puede utilizar para caracterizar simetrías, dando lugar a lo que se conoce como el grupo de isometría de una variedad.

Definición 4.2 (Isometría). Una isometría es una transformación que preserva la métrica del espaciotiempo. Dado un espaciotiempo descrito por la métrica $g_{\mu\nu}$, una transformación $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ es una isometría si satisface:

$$g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}(x') dx'^\mu dx'^\nu. \quad (40)$$

La relación entre la curvatura del espaciotiempo, dada por el tensor $g_{\mu\nu}$, y la distribución de materia y energía, descrita por el tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$, está codificada en las ecuaciones de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (41)$$

donde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R es el escalar de curvatura, Λ es la constante cosmológica³, G es la constante de gravitación universal y c es la velocidad de la luz.

³Normalmente se relaciona con la aceleración de la expansión del universo.

4.1.1. Métrica de Minkowski

La métrica de Minkowski, η , describe un espaciotiempo plano, que es el escenario de la Relatividad Especial. En coordenadas cartesianas (t, x, y, z) , se expresa como:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (42)$$

Aquí, el elemento de línea ds^2 representa la distancia invariante entre dos eventos en el espaciotiempo. Un espaciotiempo descrito por esta métrica tiene curvatura cero, $R_{\mu\nu} = 0$. La métrica de Minkowski presenta una simetría, dada por la invariancia bajo el grupo de Poincaré. Estas transformaciones incluyen tanto transformaciones de Lorentz como traslaciones espaciotemporales.

Definición 4.3 (Transformaciones de Lorentz). Una transformación de Lorentz, Λ ,⁴ es una transformación lineal que preserva la métrica de Minkowski. Es decir, si $x'^\rho = \Lambda^\rho_\mu x^\mu$ son coordenadas relacionadas por una transformación de Lorentz, se tiene

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu dx^\mu dx^\nu, \quad (43)$$

luego satisface la relación:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu \iff \eta = \Lambda^\top \eta \Lambda, \quad (44)$$

donde la última expresión es una igualdad entre matrices. Esta condición asegura que la distancia ds^2 se conserva bajo transformaciones del espaciotiempo.

El conjunto de todas las transformaciones de Lorentz forma un grupo de Lie, denotado por $SO(1, 3)$. Este grupo incluye rotaciones espaciales, que afectan solo las coordenadas espaciales y corresponden al grupo $SO(3)$, y *boosts de Lorentz*, que mezclan la coordenada temporal con una de las coordenadas espaciales, asociadas con un cambio de sistema de referencia en movimiento relativo. Un ejemplo es un boost en la dirección x que, en coordenadas, se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (45)$$

donde $\beta = v/c$ es la velocidad relativa en unidades de la velocidad de la luz y $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ es el factor de Lorentz.

Definición 4.4 (Transformaciones de Poincaré). El grupo de Poincaré es la extensión afín del grupo de Lorentz, que incluye además las traslaciones en el espaciotiempo. Por tanto, el grupo de Poincaré es el grupo de isometría del espaciotiempo de Minkowski. En coordenadas, una transformación de Poincaré combina una transformación de Lorentz Λ^μ_ν con una traslación a^μ y actúa sobre x^μ como:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu. \quad (46)$$

4.1.2. Métrica de Anti-de Sitter

El espacio Anti-de Sitter (AdS_{n+2}) es una variedad pseudoriemanniana, cuyo tensor métrico es solución a las ecuaciones de Einstein con una constante cosmológica negativa ($\Lambda < 0$). En coordenadas globales (t, r, Ω) , la métrica del espacio AdS toma la forma:

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{L^2}} + r^2 d\Omega_n^2, \quad (47)$$

⁴No confundir con la constante cosmológica.

donde $t \in (-\infty, \infty)$ es la coordenada temporal global, $r \geq 0$ es la coordenada radial, $d\Omega_n^2$ representa el elemento de línea de una esfera \mathcal{S}^n y L es el radio de curvatura característico del espacio AdS. Otra forma común de escribir la métrica es en coordenadas de Poincaré:

$$ds^2 = L^2 \left(-\cosh^2 \varrho d\tilde{t}^2 + d\varrho^2 + \sinh^2 \varrho d\Omega_n^2 \right), \quad (48)$$

donde $\varrho \geq 0$ es la coordenada radial de AdS y $\tilde{t} \in (-\infty, \infty)$, es la coordenada temporal que denotaremos como t indistintamente.

El grupo de isometrías del espacio AdS resulta ser $SO(2, n)$, que denota el grupo de Lorentz en una variedad pseudoriemanniana con signatura $(-, -, +, \dots, +)$. No obstante, en coordenadas de Poincaré, el espacio AdS posee una frontera ubicada en $\varrho \rightarrow \infty$ y la métrica inducida en esta frontera viene dada por:

$$ds_{\text{frontera}}^2 \propto \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (49)$$

que corresponde la métrica de Minkowski salvo por un factor de escala. Por tanto, el grupo de isometrías en la frontera será el grupo conforme de Minkowski (ver §4.3) y se dice que la frontera es conforme. Esta propiedad es fundamental en la correspondencia AdS/CFT, ya que sugiere que la teoría gravitacional en el volumen de AdS es dual a una teoría cuántica de campos conforme en la frontera. Por último, el escalar de curvatura del espacio AdS está dado por $R = -\frac{(n+2)(n+1)}{L^2}$, que es constante y negativo en todo punto.

4.2. Termodinámica de agujeros negros

La termodinámica de agujeros negros [14, 15] es un campo que conecta principios fundamentales de la mecánica cuántica, la relatividad general y la termodinámica. Esta disciplina explora cómo los agujeros negros, objetos predichos por las soluciones de las ecuaciones de Einstein, pueden describirse utilizando leyes análogas a las de la termodinámica clásica. Un aspecto crucial de esta conexión es la interpretación de la entropía de un agujero negro, introducida por Jacob Bekenstein y Stephen Hawking [16, 17], y la radiación de Hawking [17], que demuestra que los agujeros negros no son completamente oscuros, sino que emiten radiación térmica. En particular, su avance más significativo fue el descubrimiento de que la entropía de un agujero negro es proporcional al área de su horizonte de eventos, en lugar de su volumen. Este resultado sugiere que las leyes de la física pueden estar fundamentadas en una descripción holográfica, donde la información en un volumen se codifica en una dimensión inferior.

En termodinámica clásica, la entropía S mide el número de configuraciones microscópicas o microestados Ω que corresponden a un estado macroscópico dado de un subsistema [18], de acuerdo con la fórmula de Boltzmann:

$$S = k_B \ln \Omega, \quad (50)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann.

En 1970, Bekenstein propuso que los agujeros negros deberían poseer una entropía proporcional al área A de su horizonte de eventos. La justificación de esta idea proviene de la segunda ley de la termodinámica, que establece que la entropía total de un sistema aislado nunca disminuye. Si un objeto con entropía cae en un agujero negro, parecería que la entropía del universo disminuye. Para preservar la segunda ley, Bekenstein postuló que el agujero negro debe ganar una cantidad de entropía proporcional al área de su horizonte de eventos. Más tarde, en 1974, Stephen Hawking mostró que los agujeros negros emiten radiación térmica debido a efectos cuánticos cerca del horizonte de eventos. Además, mostró que esta radiación es de cuerpo negro, es decir, solo depende de la temperatura del emisor. Este fenómeno, conocido como radiación de Hawking, implica que un agujero negro con masa M tiene una temperatura efectiva dada por:

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B M}. \quad (51)$$

Este resultado permitió a Hawking calcular la entropía de un agujero negro, confirmando la propuesta de Bekenstein y refinándola cuantitativamente:

$$S_{\text{BH}} = \frac{k_B c^3 A}{4\hbar G}, \quad (52)$$

donde A es el área del horizonte de eventos. En efecto, la entropía de un agujero negro es proporcional a su área, y no a su volumen, lo que contrasta con la intuición clásica sobre sistemas termodinámicos. Intuitivamente, el hecho de que la información de un sistema sea proporcional al volumen que este ocupa es razonable, pues los grados de libertad de un sistema crecen con su volumen [18].

El hecho de que la entropía de un agujero negro dependa del área en lugar del volumen sugiere que la información física de un sistema gravitacional podría estar codificada en una dimensión inferior, pues volúmenes en la dimensión inferior corresponden a superficies de la dimensión superior. Este es el indicio mas claro de la correspondencia entre espacios gravitatorios de una dimensión superior duales a una teoría cuántica y está en el corazón del *principio holográfico*.

4.3. Teorías cuánticas de campo conformes

Generalmente, una teoría cuántica de campos en espaciotiempo de Minkowski [15] viene formulada en términos de campos tensoriales actuando sobre un espacio de Hilbert, es decir, asignaciones suaves de cada punto p de una variedad de dimensión n a operadores $\phi(p) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Además de estos campos, también conocidos como operadores de campo, la teoría consta de un funcional, llamado *acción*, dado por $S[\phi] = \int d^n x \mathcal{L}(\phi(p), d\phi(p))$, donde x denotan coordenadas locales del punto p y \mathcal{L} es un funcional que depende únicamente de los operadores de campo $\phi(p)$ y de sus derivadas exteriores $d\phi(p)$. La acción es realmente el elemento diferenciador de cada teoría cuántica de campos, pues determina los operadores de campo como soluciones de la ecuación de variaciones $\delta S = 0$. Por ejemplo, en el caso de una teoría libre de campos escalares masivos ϕ de masa m , su acción viene dada por:

$$S[\phi] = \int d^n x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right), \quad (53)$$

donde $g(d\phi, d\phi) = g_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi$ en coordenadas locales, con $d\phi = \partial_\mu \phi dx^\mu \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} dx^\mu$ por ser ϕ un campo escalar. Por último, g denota el determinante de la métrica, que es negativo porque en estas teorías se escogen métricas con signatura Lorentziana, esto es, $(-, +, \dots, +)$. La acción nos permite introducir simetrías en una teoría cuántica de campos. Los elementos de un grupo actúan como transformaciones sobre las coordenadas x que, de manera efectiva, modifican los operadores de campo ϕ y, a su vez, la acción: $S[\phi] \rightarrow S'[\phi']$.

Definición 4.5 (Invariancia de teorías de campos). Se dice que una teoría cuántica de campos es invariante bajo la acción de un cierto grupo de simetría si la acción asociada a la teoría respeta la invariancia que define al grupo. En el caso del grupo conforme, definido por mantener invariante la métrica salvo por un factor de escala local, una teoría de campos será invariante bajo el grupo conforme si su acción lo es, salvo un factor de escala local.

Así, las CFTs [19] son un tipo especial de teorías cuánticas de campos que exhiben invariancia bajo transformaciones conformes, es decir, transformaciones que preservan el ángulo entre vectores pero no necesariamente las distancias.

Definición 4.6 (Transformaciones conformes). Las transformaciones conformes son una generalización de las isometrías. Son transformaciones que varían la métrica del espaciotiempo solo por un factor de escala local, denominado *factor conforme* $\Omega(x)^2 > 0$:

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x) = \Omega(x)^2 g_{\mu\nu}(x). \quad (54)$$

En un espaciotiempo de Minkowski, el grupo conforme incluye traslaciones $x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu$, rotaciones $x^\mu \rightarrow R^\mu_\nu x^\nu$, boosts de Lorentz $x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu$, dilataciones $x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu$, ($\lambda > 0$) y otros tipos de transformaciones conformes especiales.

Retomando el caso de una teoría libre de campos escalares, podemos observar que la acción Ec. (53) depende de $d^n x \sqrt{-g}$ y de $g(d\phi, d\phi)$, ambos invariantes bajo transformaciones conformes (salvo por un factor de escala)⁵. Sin embargo, el término $-\frac{1}{2}m^2\phi^2$ no tiene por qué ser invariante bajo estas transformaciones. Así, se tiene que una teoría cuántica libre de campos escalares será una teoría conforme solo en el caso de $m = 0$.

Haciendo hincapié en la anterior conclusión, las partículas masivas rompen la simetría conforme debido a la introducción de una escala de masa en la teoría. Para un campo escalar masivo, el término $m^2\phi^2$ en la acción introduce una dependencia de longitud característica $\ell \sim m^{-1}$, rompiendo la invariancia bajo transformaciones conformes. Por tanto, en una CFT, toda partícula compatible con la teoría debe tener masa nula.

4.4. Correspondencia AdS/CFT y prescripción Ryu-Takayanagi

La correspondencia AdS/CFT, formulada inicialmente por Juan Maldacena en 1997, establece una dualidad entre una teoría de gravedad en un espacio AdS_5 de dimensión 5 y una teoría de campos conforme definida en el borde del espacio AdS_5 , de dimensión 4. Esta dualidad proporciona una conexión profunda entre la gravedad y las teorías cuánticas de campos. La correspondencia AdS/CFT proporciona una herramienta poderosa para estudiar la física en regímenes no perturbativos. Por ejemplo, permite calcular cantidades en teorías cuánticas de campos fuertemente acopladas utilizando magnitudes puramente gravitacionales, normalmente más accesibles. Además ofrece una interpretación holográfica de la gravedad cuántica, donde los grados de libertad cuánticos están codificados en la frontera de una teoría gravitacional.

En el marco de la correspondencia AdS/CFT, una de las ideas más profundas y fructíferas ha sido la conexión entre la entropía de entrelazamiento en una CFT y la geometría del espacio AdS dual. Esta conexión está formalizada a través de la prescripción de Ryu-Takayanagi, propuesta inicialmente por Shinsei Ryu y Tadashi Takayanagi en 2006 [7]. Según esta prescripción, la entropía de entrelazamiento en la CFT está relacionada con el área de una superficie mínima en el espacio AdS, proporcionando una interpretación geométrica del entrelazamiento cuántico en términos gravitacionales. Más específicamente, consideremos un espacio AdS_{n+2} en coordenadas de Poincaré (ver Ec. (48)) y fijemos una hipersuperficie de t constante. Sea una subregión A de dimensión n , definida en la frontera de la hipersuperficie (fijado t). La entropía de entrelazamiento correspondiente al subsistema A en la CFT dual está dada por:

$$S_A = \frac{\text{Área}(\gamma_A)}{4G}, \quad (55)$$

donde γ_A es una superficie de dimensión n definida en la hipersuperficie de t fijo (no en su frontera). Esta superficie, denominada *superficie mínima*, debe satisfacer tres propiedades:

- γ_A tiene la misma frontera que A : $\partial\gamma_A = \partial A$.
- γ_A es homóloga a A .
- γ_A tiene área mínima⁶ de entre todas las superficies que verifican las propiedades anteriores.

⁵De hecho el término $\sqrt{-g}$ se introduce para que el elemento infinitesimal $d^n x \sqrt{-g}$ sea invariante bajo transformaciones conformes.

⁶El área se calcula de acuerdo a la métrica AdS .

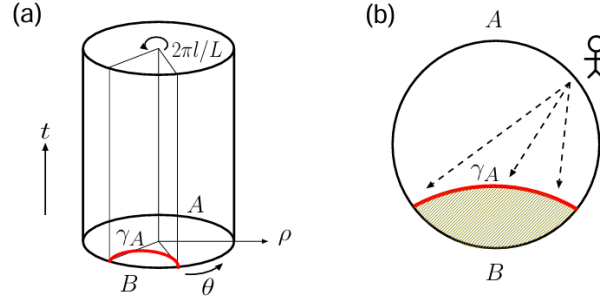


Figura 2: Figura 1 de [7]. (a) AdS_3 en coordenadas de Poincaré y su CFT_2 dual en la frontera $\varrho = \varrho_0$. En la hipersuperficie de menor t (base del cilindro) están definidas las regiones complementarias A y B en su frontera, separadas por la superficie minimal γ_A definida en el bulk de la hipersuperficie. (b) Hipersuperficie de menor t , en que un observador situado en A observa la superficie minimal como una pantalla holográfica.

De esta prescripción se desprende directamente la propiedad de que para subsistemas complementarios, la entropía debe coincidir $S_A = S_B$ (siendo B el complementario de A sobre la frontera de la hipersuperficie de t fijo de AdS), pues la superficie mínima de A y la de B coincide. En la Figura 2(a) se puede observar el caso concreto de un espacio AdS_3 expresado en coordenadas de Poincaré (t, ϱ, θ) (ver Ec. (48)), con $0 \leq \varrho \leq \varrho_0$ para evitar la singularidad de la métrica (situando la frontera en ϱ_0), y $\theta \in (0, 2\pi)$ siendo $d\theta^2$ el elemento de línea de una esfera de dimensión 1. La CFT dual está definida en la frontera, dada por las coordenadas $(t, \varrho_0, \theta) \equiv (t, \theta)$. Fijando t , la subregión A de la frontera se define por las coordenadas $\theta \in [0, 2\pi l/L]$, siendo l la medida de A (en la frontera se tiene la métrica usual, como vimos en §4.1). La superficie minimal γ_A se puede identificar fácilmente en este caso, al ser la geodésica⁷ que conecta $\theta = 0$, $\theta = 2\pi/L$, a través del “bulk” (interior). Mediante la expresión de una geodésica en AdS_3 se puede calcular su medida, dando lugar a la entropía de entrelazamiento asociada al subsistema A según la prescripción Ryu-Takayanagi Ec. (55), que coincide con la entropía calculada por métodos usuales de CFT [7].

La superficie γ_A se puede entender como una “pantalla holográfica” para un observador con acceso únicamente a la información del subsistema A , como se ve en la Figura 2(b). Es decir, de la misma manera en que se argumentaba en §2.4, los grados de libertad (entropía) de la CFT codificados en la región A están completamente determinados por la estructura de la mínima superficie de separación entre A y su región complementaria B , como si el subsistema A fuera un holograma de la superficie γ_A . Volviendo al caso de Hawking y Bekenstein, si B es un agujero negro y A el exterior, la entropía de A (ídem. B) es proporcional al área del horizonte de sucesos, siempre que el horizonte de sucesos corresponda a la superficie minimal para todo t . Veremos en §6.3.1 cómo esta última condición motivará un procedimiento para solucionar la paradoja de la pérdida de información en agujeros negros.

5. Autómatas celulares cuánticos conformes

Los autómatas celulares cuánticos (*quantum cellular automata*, QCAs) representan una extensión de los autómatas celulares clásicos al ámbito de la mecánica cuántica, y constituyen un potente marco teórico para el estudio de sistemas cuánticos discretos. Un autómata celular cuántico se define sobre una red regular, donde cada celda representa un espacio de Hilbert. La evolución del sistema, también discreta, se rige por una regla de transición global construida a partir de

⁷Una geodésica en una variedad diferenciable se define una curva que minimiza la distancia entre dos puntos fijos.

operadores unitarios, garantizando la reversibilidad y la conservación de la información. A diferencia de los modelos clásicos, donde el estado toma valores discretos, en un QCA el estado global de las distintas celdas puede encontrarse en una superposición de estados, lo que permite la propagación coherente de la información y la posibilidad de simular dinámicas cuánticas complejas.

5.1. Circuitos cuánticos en dimensión $1 + 1$

Consideremos una dimensión espacial, definida por una cadena de n sitios etiquetados por números enteros (módulo n) $x \in \mathbb{Z}_n$, donde n es múltiplo de cuatro⁸, y una dimensión temporal, dada por la coordenada t . Nótese que la periodicidad del grupo \mathbb{Z}_n impone condiciones periódicas en el sistema cuántico también. En cada sitio reside un sistema cuántico representado por \mathbb{C}^d , de modo que el espacio de Hilbert del sistema global es $\mathcal{H} = \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{C}^d$. Este tipo de sistema es comúnmente conocido como cadena de qudits o cadena de espines, debido a la interpretación física del espín de una partícula como un sistema cuántico \mathbb{C}^d .

Denotamos por \mathcal{A} el álgebra de operadores que actúan en \mathbb{C}^d y por $\mathcal{A}_{x,y,\dots}$ el álgebra de operadores que actúan en los sitios $x, y, \dots \in \mathbb{Z}_n$. Como se ha expuesto en §2, una teoría cuántica está definida por su Hamiltoniano, el cual, a su vez, determina una evolución temporal. Así, podemos fijar una teoría cuántica eligiendo un operador temporal directamente. La dinámica de una QCA estará descrita a través del operador de evolución temporal T , definido mediante el circuito

$$T \equiv T_{\text{impar}} T_{\text{par}} = \left(\prod_{x \text{ impar}} \mathbf{v}_x \right) \left(\prod_{x \text{ par}} \mathbf{u}_x \right) =$$

$$= \cdots \begin{array}{ccccccc} & \boxed{\mathbf{v}} & & \boxed{\mathbf{v}} & & \boxed{\mathbf{v}} & & \boxed{\mathbf{v}} & & \cdots \\ \boxed{\mathbf{u}} & & \boxed{\mathbf{u}} & & \boxed{\mathbf{u}} & & \boxed{\mathbf{u}} & & \boxed{\mathbf{u}} & & \cdots \\ x = -1 & 0 & 1 & 2 & & & & & & & \end{array} \uparrow t, \quad (56)$$

donde $\mathbf{u}_x, \mathbf{v}_y \in \mathcal{A}_{x,x+1}$ son operadores (puertas) unitarios. La dinámica de los estados estará gobernada por la actuación discreta del operador T sobre un estado cuántico $|\psi\rangle$ de manera que

$$|\psi(t)\rangle = T|\psi(0)\rangle, \quad T \equiv \begin{cases} T(2t) = T^t \\ T(2t+1) = T^t T_{\text{impar}} \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (57)$$

La construcción de este circuito es muy natural y general. Se emplean dos puertas diferentes, denotadas como \mathbf{u} y \mathbf{v} , que actúan en los sitios pares e impares, respectivamente. Al aplicar cada puerta en dos sitios, en lugar de uno, se asegura mantener el entrelazamiento del estado inicial. Además, actuar en tres sitios sería redundante, ya que al operar en sitios pares e impares se garantiza el entrelazamiento entre todos los sitios del estado de la manera más sencilla posible, entrelazando los pares con los impares en la segunda capa. Las puertas que operan en sitios pares corresponderán a tiempos semienteros, mientras que las puertas que actúan en sitios impares se asociarán con tiempos enteros.

⁸Este número se justificará en §6.1

La actuación de T sobre un operador local⁹ en el origen $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_0$ es

$$T\mathbf{a}T^\dagger = \begin{array}{c} \text{v} \\ \text{u} \\ \text{a} \\ \text{u}^\dagger \\ \text{v}^\dagger \end{array} \in \mathcal{A}_{-1,0,1,2} . \quad (58)$$

Esta acción refleja la causalidad de T , pues operadores locales, tras evolucionar por T , dan lugar a operadores que actúan no trivialmente en todos (pero solo en) los sitios colindantes. A medida que se evoluciona en el tiempo t veces, la actuación de los operadores en el espacio se propaga a $2t$ sitios. En un diagrama de Minkowski, con la velocidad de la luz en unidades naturales (para este circuito $c = 2$, al haber dividido la actuación de T en dos capas) se tiene el cono de luz de la Figura 3.

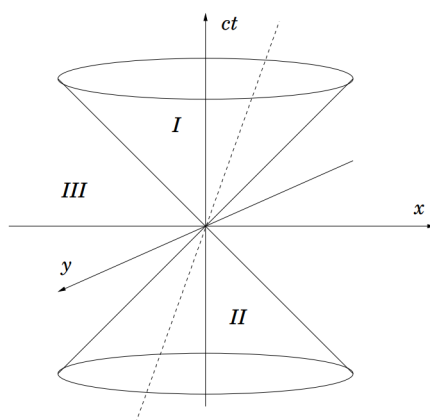


Figura 3: Figura 5 de [20]. Cono de luz: en la region I el cono futuro del origen, en II el cono pasado del origen y en III la región desconectada causalmente del origen.

Un cono de luz refleja las regiones causalmente relacionadas con un punto en el espacio tiempo. Los límites del cono están dados por la trayectoria de objetos que se mueven a la velocidad de la luz. Según la relatividad especial, toda interacción se propaga como mucho a la velocidad de la luz, luego cualquier suceso en relación causal con el origen debe haber interactuado dentro de los límites del cono, tanto en el pasado (*II*) como en el futuro (*I*). De la misma manera la relación 58 refleja la causalidad, pues todos los sitios $|x| > c \cdot t$ serán proporcionales a la identidad, por la propiedad de unitariedad de las puertas. Por tanto, solo los sitios dentro del cono (bidimensional) $|x| \leq c \cdot t$ estarán relacionados causalmente con el operador **a**. De esta manera se ha probado que, únicamente mediante la localidad y unitariedad de las puertas, se consigue una evolución temporal que respeta la causalidad.

Introducimos también el operador traslación espacial

[illegible]

⁹Un operador local se refiere a un operador que actúa en un único sitio.

y se prueba fácilmente que

$$STS^\dagger = T. \quad (60)$$

Esta ecuación prueba que se cumple el principio de equivalencia débil de Galileo. Según este principio, toda ley física debe ser igual en cualquier sistema de referencia fijo, es decir, cualquier sistema de coordenadas relacionado por una traslación espacial pertenece a la misma clase de equivalencia, dada por las leyes físicas invariantes en cada clase.

5.2. Puertas dualmente unitarias

En esta sección presentamos las puertas que utilizaremos para construir tanto los estados como los operadores. Denotamos al operador $\mathbf{u} \in \mathcal{A}_{0,1}$ como un tensor de cuatro patas $\mathbf{u} = \begin{array}{|c|} \hline \text{↑} \\ \hline \text{↓} \\ \hline \end{array}$. Su operador traspuesto tendrá las patas de entrada y de salida invertidas $\mathbf{u}^\top = \begin{array}{|c|} \hline \text{↓} \\ \hline \text{↑} \\ \hline \end{array}$. Utilizando el operador intercambio $\mathbf{s} = \times$, su conjugado por este operador será $\mathbf{su}^\dagger = \begin{array}{|c|} \hline \text{↓} \\ \hline \text{↑} \\ \hline \end{array}$. También denotamos el complejo conjugado con un fondo mas oscuro $\mathbf{u}^* = \begin{array}{|c|} \hline \text{↑} \\ \hline \text{↓} \\ \hline \end{array}$, luego el operador adjunto viene dado por $\mathbf{u}^\dagger = \begin{array}{|c|} \hline \text{↓} \\ \hline \text{↑} \\ \hline \end{array}$. Con esta notación, podemos expresar la unitariedad de \mathbf{u} mediante las dos condiciones equivalentes:

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{↑} \\ \hline \text{↓} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{↑} \\ \hline \text{↓} \\ \hline \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{↓} \\ \hline \text{↑} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{↓} \\ \hline \text{↑} \\ \hline \end{array}. \quad (61)$$

Ahora, definimos la propiedad clave de los circuitos que estudiaremos, la unitariedad dual. Decimos que una puerta es dualmente unitaria si además de ser unitaria satisface las dos condiciones equivalentes

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{↑} \\ \hline \text{↓} \\ \hline \end{array} = \text{---} \quad \text{y} \quad \begin{array}{|c|} \hline \text{↓} \\ \hline \text{↑} \\ \hline \end{array} = \text{---}, \quad (62)$$

que se pueden entender como unitariedad en la dirección espacial.

En general, asumiremos que los operadores locales $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_0$ presentan traza igual a 0, por dos razones principalmente. Todo operador local actuando en un espacio de Hilbert (finito) se puede descomponer como $\mathbf{a} = \alpha \mathbb{I} + \tilde{\mathbf{a}}$, donde $\tilde{\mathbf{a}}$ es un operador con traza 0. Además, la traza se preserva por evolución unitaria, esto es, $\text{Tr}(U\mathbf{a}U^\dagger) = \text{Tr}(\mathbf{a})$. Por tanto, el término de traza no nula de la descomposición solo aportará contribuciones triviales a la dinámica del modelo, luego asumiremos $\alpha = 0$. Así, estudiemos la propagación temporal de un operador local sin traza que actúa en el sitio 0, $\mathbf{a} \in \mathcal{A}_0$. Para empezar, si \mathbf{u}, \mathbf{v} son dualmente unitarios, la traza parcial en el sitio 2 de $T\mathbf{a}T^\dagger \in \mathcal{A}_{-1,0,1,2}$ se anula:

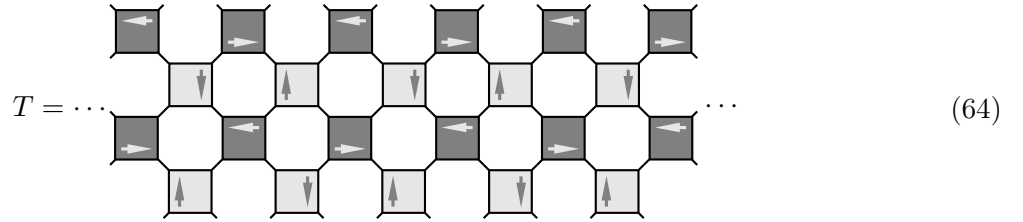
$$\text{Tr}_2(T\mathbf{a}T^\dagger) = \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{v} \\ \hline \mathbf{u} \\ \hline \mathbf{a} \\ \hline \mathbf{u}^\dagger \\ \hline \mathbf{v}^\dagger \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{v} \\ \hline \mathbf{u} \\ \hline \mathbf{a} \\ \hline \mathbf{u}^\dagger \\ \hline \mathbf{v}^\dagger \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{v} \\ \hline \mathbf{u} \\ \hline \mathbf{a} \\ \hline \mathbf{u}^\dagger \\ \hline \mathbf{v}^\dagger \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{v} \\ \hline \mathbf{u} \\ \hline \mathbf{a} \\ \hline \mathbf{u}^\dagger \\ \hline \mathbf{v}^\dagger \\ \hline \end{array} = \mathbb{I}_{-1}\mathbb{I}_0\mathbb{I}_1 \text{Tr}(\mathbf{a}) = 0. \quad (63)$$

Cualquier operador actuando sobre cuatro sitios se puede expresar como combinación lineal de términos de la forma $\mathbf{b}_{-1} \otimes \mathbb{I}_0 \otimes \mathbf{c}_1 \otimes \mathbf{d}_2$, con $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ sin traza, y todas las combinaciones de identidades y operadores locales sin traza actuando en cada uno de los sitios. Sin embargo, puesto que la traza parcial sobre el sitio 2 de $T\mathbf{a}T^\dagger$ es 0, entonces sus términos proporcionales a \mathbb{I}_2 deben anularse. Es decir, $T\mathbf{a}T^\dagger$ siempre actúa de manera no trivial en el sitio 2. En general, dado un operador local

$\mathbf{a} \in \mathcal{A}_x$ con x par, entonces \mathbf{a} evoluciona temporalmente hacia la derecha, con velocidad máxima, $v = 2$ en unidades de la red, pues siempre actúa no trivialmente en el sitio $x + 2t$.¹⁰ En el caso de que el operador local actúe sobre un sitio x impar, entonces este evolucionará hacia la izquierda con velocidad máxima, $v = -2$. Concluimos, por tanto, que toda perturbación en un circuito dualmente unitario evoluciona a máxima velocidad, al igual que en CFT. Además, una partícula en este contexto se puede modelar como un operador local que desplaza el sitio en que actúa al evolucionar temporalmente, y que no decae o varía. Un ejemplo son los solitones: operadores locales autoestados (salvo, tal vez, cambio de sitio) del operador evolución temporal T , con autovalor de módulo 1, que asegura que no decae en la evolución [21]. La fase del autovalor se suele expresar como e^{-im} , donde m se interpreta como su masa. En [1] se demuestra que para la familia de operadores de evolución temporal conforme estudiada en este trabajo (ver Ec. (64) en la siguiente subsección) se verifica $m = 0$ para cualquier solitón. Esto es, toda partícula de la teoría debe tener masa nula, cumpliendo así una de las condiciones necesarias de las CFT, pues los campos masivos rompen la simetría conforme (ver §4.3).

5.3. Operador de evolución temporal conforme

Tras haber definido las puertas \mathbf{u} , estamos listos para introducir la familia de circuitos conformes, esto es, una familia de autómatas celulares cuánticos que modelen una teoría de campos conforme. Dada cualquier puerta dualmente unitaria $\mathbf{u} = \boxed{\begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array}}$, definimos el operador evolución temporal como



Nótese que todas las puertas y conexiones entre ellas están determinadas por la posición de la primera puerta que se coloque. Además tiene condiciones de contorno periódicas. Su estructura está construida de manera que respete las reglas conformes, tal y como veremos a continuación.

5.3.1. Transformaciones conformes en QCAs

En dimensión $1 + 1$, la métrica de Minkowski viene dada por $g = \text{diag}(-1, 1)$ y la forma lineal de la métrica ds^2 tiene como núcleo vectores tal que $t = \pm x$. Así, definiendo las coordenadas $u = t - x, v = t + x$, la forma lineal de la métrica se escribe $ds^2 = -dudv$. Como se ha discutido en §4.3, una teoría de campos conforme en el espaciotiempo de Minkowski debe ser invariante bajo transformaciones Λ del grupo conforme de Minkowski, es decir, $g'_{\mu\nu}(u', v') = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta g_{\alpha\beta}(u, v) = \Omega^2(u, v) g_{\mu\nu}(u, v)$, con $\Omega^2(u, v) > 0$. Dado que $g_{uv} = g_{vu} = -1/2$ es el único término no nulo de la métrica, los únicos elementos distintos de 0 de las matrices $\Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta$ son $\Lambda_{u'}^u \equiv \frac{\partial u'}{\partial u}$ y $\Lambda_{v'}^v \equiv \frac{\partial v'}{\partial v}$. Se sigue que, necesariamente, $u' = f(u)$, $v' = g(v)$, y $\Omega^2(u, v) = f'(u)g'(v)$, para dos funciones diferenciables y monótonas f, g . En otras palabras, el grupo conforme de Minkowski en dimensión $1 + 1$ transforma las coordenadas u, v de manera independiente y viene dado unívocamente a través de las funciones f, g .

Consideremos ahora una cadena de espines con $n = \infty$ y $x \in \mathbb{Z}$. Los operadores T y S no tienen por qué estar bien definidos en la cadena infinita, pero es su acción adjunta sobre operadores la que

¹⁰Este hecho no contradice que exista evolución hacia la izquierda, pero no es relevante para nuestra discusión.

es de interés, que sí está bien definida para cualquier operador con soporte en un número finito de sitios (e.g., ver Ec. (58)). Definamos ahora los operadores

$$\begin{aligned} J_x &= d^{-\frac{1}{2}} \mathbb{I}_{y \leq x-2} (S^\dagger T)_{y \geq x+2} \quad \forall x \text{ par} \\ K_x &= d^{-\frac{1}{2}} (ST)_{y \leq x-2} \mathbb{I}_{y \geq x+2} \quad \forall x \text{ impar,} \end{aligned} \quad (65)$$

donde los subíndices se refieren a los sitios y donde cada operador actúa, en función del sitio x , y d es la dimensión de cada espín. Nótese que su actuación no está definida en los sitios $|y - x| < 2$. Aplicando estos operadores a un operador local (sin traza) actuando sobre el sitio y en tiempo t , $\mathbf{a}(y, t) := T^t \mathbf{a}_y T^{-t}$, con $\mathbf{a}_y \in \mathcal{A}_y$, se tiene

$$J_x \mathbf{a}_y(t) J_x^\dagger = \begin{cases} S^\dagger (T \mathbf{a}_y(t) T^\dagger) S = \mathbf{a}_{y-2}(t+1) & \forall y \geq x+2 \\ \mathbb{I} \mathbf{a}_y(t) \mathbb{I}^\dagger = \mathbf{a}_y(t) & \forall y \leq x-2 \end{cases} \quad (66)$$

$$K_x \mathbf{a}_y(t) K_x^\dagger = \begin{cases} S (T \mathbf{a}_y(t) T^\dagger) S^\dagger = \mathbf{a}_{y+2}(t+1) & \forall y \leq x-2 \\ \mathbb{I} \mathbf{a}_y(t) \mathbb{I}^\dagger = \mathbf{a}_y(t) & \forall y \geq x+2 \end{cases}. \quad (67)$$

Es decir, de manera efectiva estos operadores desplazan una perturbación local tanto en el espacio como en el tiempo. Específicamente, el operador J_x transforma $t \rightarrow t+1, x \rightarrow x-2$, luego $u' \equiv f(u) = (t+1) - (x-2) = (t-x) + 3 = u + 3$. Análogamente, K_x realiza $v' \equiv g(v) = v + 3$. Por tanto, podemos ver que J_x, K_x son análogos discretos de generadores del grupo conforme de Minkowski y, así, se puede obtener la representación discreta de cualquier elemento del grupo.

5.3.2. Transformaciones de Lorentz en QCAs

Las transformaciones de Lorentz son un ejemplo de operadores que podemos obtener usando los generadores discretos del grupo conforme. Así, para todo $l > 0$ par, definimos la familia uniparamétrica de transformaciones de Lorentz (globales) hacia la derecha como el operador conforme dado por

$$R_l : \mathcal{H}_\infty \rightarrow \mathcal{H}_\infty, \quad R_l = \cdots J_{5l} J_{3l} J_l \tilde{J}_{-l} \tilde{J}_{-3l} \tilde{J}_{-5l} \cdots \quad (68)$$

donde $\tilde{J}_x = ST^\dagger J_x$. El hecho de usar \tilde{J}_x en vez de J_x en los sitios $x < 0$ es para que R_l actúe trivialmente sobre el origen $x \in [-(l-2), (l-2)]$. Análogamente, para todo $l > 0$ impar, podemos introducir la familia de transformaciones de Lorentz (globales) hacia la izquierda como

$$L_l : \mathcal{H}_\infty \rightarrow \mathcal{H}_\infty, \quad L_l = \cdots K_{-5l} K_{-3l} K_{-l} \tilde{K}_l \tilde{K}_{3l} \tilde{K}_{5l} \cdots \quad (69)$$

con $\tilde{K}_x = ST^\dagger K_x$.

Estas transformaciones conmutan con traslaciones espaciotemporales en la dirección diagonal $(x, t) = (\pm 2, 1)$ (recordemos $c = 2$):

$$R_l(ST) = (ST)R_l, \quad L_l(S^\dagger T) = (S^\dagger T)L_l, \quad (70)$$

es decir, evolucionar nuestro estado en la dirección diagonal es invariante bajo un cambio de coordenadas (que en Minkowski son transformaciones de Lorentz, para mantener la métrica), tal y como se esperaría de una teoría cuántica de campos.

El nombre de estos operadores está motivado por la actuación de R_l sobre un operador local $\mathbf{a}(x, t)$, que se puede describir informalmente como

$$R_l \mathbf{a}(x, t) R_l^\dagger = L_l \mathbf{a}(x, t) L_l^\dagger = \begin{cases} \mathbf{a}(x', t') & \text{para la mayoría de } (x, t) \\ \text{complicado} & \text{para pocos } (x, t) \end{cases}, \quad (71)$$

donde “complicado” se refiere a una transformación que no solo varía las coordenadas. Para $|x| \gg l$, las nuevas coordenadas se pueden expresar mediante

$$\begin{aligned} x' &= \left(1 - \frac{1}{l}\right)x \pm \frac{2}{l}t \\ t' &= \left(1 - \frac{1}{l}\right)t \pm \frac{1}{2l}x, \end{aligned} \quad (72)$$

teniendo en cuenta que $+$ corresponde a las transformaciones hacia la derecha R_l y $-$ hacia la izquierda, L_l . Notemos que esta transformación de coordenadas preserva la métrica de Minkowski (con $c = 2$), salvo un factor de escala:

$$(ct')^2 - x'^2 = \left(1 - \frac{2}{l}\right) [(ct)^2 - x^2]. \quad (73)$$

El factor de escala se puede eliminar dividiendo las coordenadas (x', t') por $\sqrt{1 - 2/l}$, obteniendo así un boost de Lorentz puro. Por semejanza con su análogo continuo, podemos obtener la velocidad del boost, parametrizada por l :

$$v = \frac{2}{\sqrt{4 - 2l + l^2}}. \quad (74)$$

Para eliminar la etiqueta de ‘complicado’ y que la actuación de las transformaciones de Lorentz discretas sea simple y suave en todo punto (x, t) , podemos definir operadores que tengan un buen límite al continuo, utilizando funciones ventana $\varphi(y)$ (e.g. una distribución Gaussiana) centradas en x y cuyo soporte se extienda un gran número de sitios:

$$\Phi_n(x, t) = \sum_{y \in \mathbb{Z}_n} \varphi(y - x) \mathbf{a}(y, t). \quad (75)$$


De esta manera,

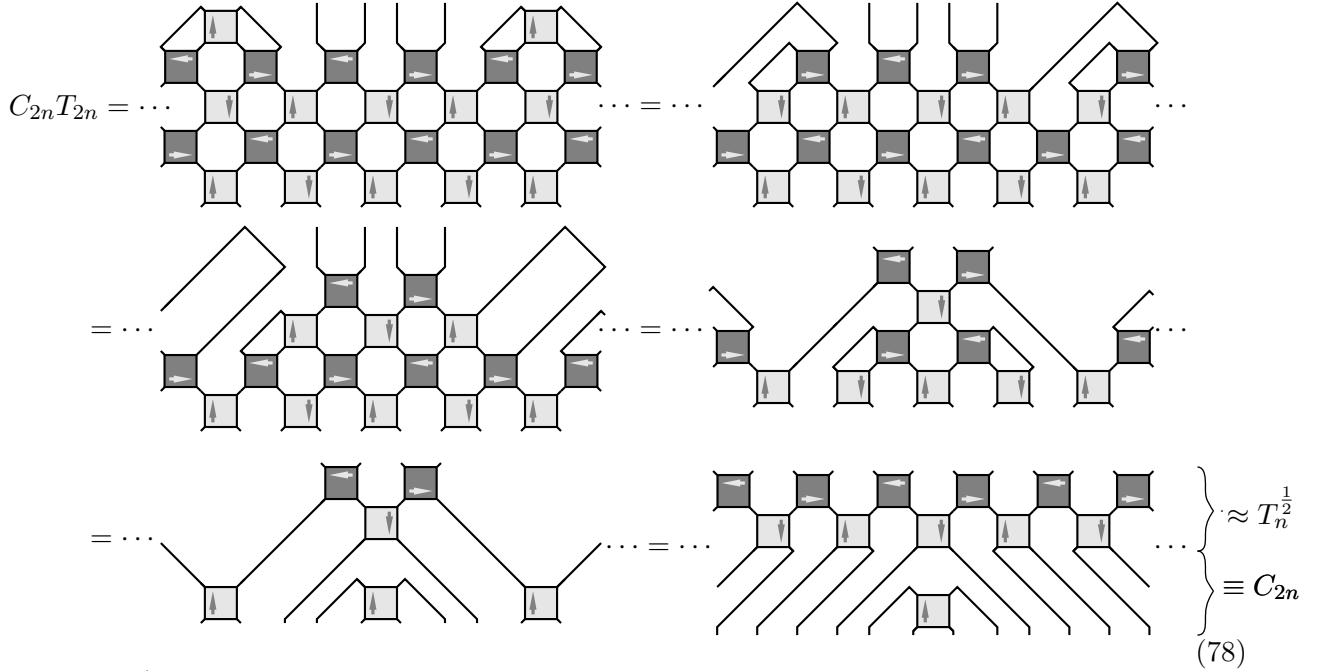
$$R_l \Phi_n(x, t) R_l^\dagger \approx \left(1 - \frac{1}{l}\right) \Phi_n(x', t') \quad \forall (x, t). \quad (76)$$

5.3.3. Invariancia de escala de T

Para esta subsección, no se requiere una cadena infinita, sino simplemente n múltiplo de 8, que nos permitirá definir contracciones. Al igual que para transformaciones de Lorentz, podemos definir ahora la isometría de contracción $C : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_{\frac{n}{2}}$, dada por

$$C = d^{-\frac{n}{8}} \left(\cdots \begin{array}{c} \diagup \quad \square \quad \diagdown \\ \text{0} \end{array} \quad \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \end{array} \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \square \quad \diagdown \\ \text{0} \end{array} \quad \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \end{array} \quad \cdots \right), \quad (77)$$

que envía cadenas de n sitios a cadenas de $\frac{n}{2}$ sitios. Gracias a la estructura de C y T , y a que se ha empleado la misma puerta  para ambos, podemos calcular fácilmente el producto de las dos:



$$C_{2n}T_{2n} = \dots = \dots \approx T_n^{\frac{1}{2}} \equiv C_{2n} \quad (78)$$

donde $\approx T_n^{\frac{1}{2}}$ debe entenderse como dos de las cuatro capas del operador T . Por tanto, la anterior ecuación de redes de tensores se puede sintetizar como,

$$C_{2n}T_{2n}^2 = T_n C_{2n} \Leftrightarrow C_{2n}T_{2n}^2 C_{2n}^\dagger = T_n, \quad (79)$$

donde los subíndices de los operadores están indicados para enfatizar la cantidad de sitios sobre los que este actúa. Esta ecuación representa la actuación del operador C sobre T , y podemos observar que, efectivamente, C produce un reescalado tanto en el espacio como en el tiempo, con factor de escala $\frac{1}{2}$, al reducir a la mitad el número de veces que actúa T (que proporciona la coordenada t), y el número de sitios sobre los que este actúa (coordenada x). Esto implica que el operador T y, por tanto, la teoría cuántica que representa, son invariantes bajo la actuación de una contracción espaciotemporal, salvo un factor de escala.

Aprovechando la unitariedad dual de las puertas, podemos calcular la acción de C sobre un operador local $\mathbf{a}(x, t)$:

$$C\mathbf{a}(x, t)C^\dagger = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, 1, 2, 3 \bmod 8 \\ \mathbf{a}(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}) & \text{si } x = 4, 5, 6, 7 \bmod 8 \end{cases}, \quad (80)$$

que depende de la posición de una manera muy irregular. Para solventarlo, empleamos los operadores definidos por funciones ventana en la Ec. (75), resultando en

$$C\Phi_n(x, t)C^\dagger = \frac{1}{2}\Phi_n(\frac{x}{2}, \frac{t}{2}). \quad (81)$$

Reuniendo los desarrollos realizados sobre transformaciones de Lorentz y transformaciones conformes podemos concluir en el siguiente teorema.

Teorema. El operador T definido en la Ec. (64) es una representación discreta de una teoría cuántica de campos conforme. Es decir, la teoría cuántica discreta definida por T (Ec. (64)) como operador de evolución temporal, $|\psi(t)\rangle = T|\psi(0)\rangle$, representa una teoría cuántica de campos conforme.

5.3.4. Operador T de dos capas

Vamos a redefinir \mathbf{u} como el siguiente operador, que actúa sobre una red “más gruesa”:

$$\mathbf{u} = \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \end{array} \equiv \begin{array}{c} \text{Diagram 2} \end{array} . \quad (82)$$

También redefinimos d , de manera que la dimensión del espacio de Hilbert de los sitios de la nueva red más gruesa sea d . Esta notación codifica una nueva simetría, $\mathbf{u}^\top = \mathbf{su}\mathbf{s}^\dagger$, y nos permite escribir el operador de evolución temporal como un operador de dos capas

$$T = \dots \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \end{array} \dots \quad (83)$$

En el resto del trabajo utilizaremos esta una notación abreviada, usando $\mathbf{u} = \boxed{\uparrow\downarrow}$ con la simetría $\mathbf{u}^\top = \mathbf{su}\mathbf{s}^\dagger$, y el operador T dado por Ec. (83). Nótese que la dinámica de este circuito es más general que la anterior, de cuatro capas.

6. Holografía discreta

En este trabajo, hemos empleado redes de tensores para establecer una caracterización discreta de una teoría cuántica de campos conforme. A diferencia de otros modelos de holografía discreta, que frecuentemente recurren a aproximaciones mediante operadores cuasi-unitarios, nuestro enfoque mantiene el rigor matemático inherente a la mecánica cuántica sin necesidad de tales aproximaciones. Si bien existen otros planteamientos rigurosos en la literatura, estos generalmente carecen de un operador de evolución temporal que permita describir la dinámica de los estados cuánticos [22, 23]. En este contexto, el modelo propuesto en [1] presenta una estrategia innovadora que logra preservar simultáneamente el rigor y la trazabilidad. Esto se consigue mediante el uso de la misma puerta $\boxed{\uparrow\downarrow}$ como elemento fundamental en la construcción sistemática tanto de los estados cuánticos como del operador dinámico. Esta metodología unificada permite calcular analíticamente la evolución temporal del sistema en cualquier instante, facilitando así el análisis de la dinámica de sus propiedades físicas. Incluso, nos permitirá adentrarnos en regímenes difíciles de modelar, como es el interior de un agujero negro, en busca de explicaciones a la pérdida de información en estos, como la propuesta de [24].

Los estados cuánticos están definidos como redes de tensores, elementos de la cadena de espines $\mathcal{H}_n = \bigotimes_{i=1}^n \mathbb{C}^d$, cuyos sitios toman valores en $x \in \mathbb{Z}_n$. Un ejemplo de tales estados en una cadena de $n = 20$ sitios es:

$$|\Psi^{\text{Plano}}\rangle = \frac{1}{d^5} \begin{array}{c} \text{Diagram 4} \end{array} . \quad (84)$$

Cada punto negro representa un índice libre de la cadena. La constante $\frac{1}{d^5}$ se toma para que el estado esté normalizado, pero en el futuro ignoraremos esta constante. La evolución temporal del estado $|\Psi^{Plano}\rangle$ se realiza de manera muy natural mediante la actuación operador T sobre la red de tensores del estado. Para mayor claridad, vamos a dividir al operador T en su primera capa, T_{par} que da la evolución en tiempos semienteros, y su segunda capa T_{impar} , dando lugar al estado en tiempos enteros. Así,

$$T_{\text{par}}|\Psi^{Plano}\rangle = \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2}, \quad (85)$$

y

$$T_{\text{impar}}T_{\text{par}}|\Psi^{Plano}\rangle = \text{Diagram 3} = \text{Diagram 4}. \quad (86)$$

Nótese que el estado en tiempo t no está completamente determinado hasta que se conoce la posición de uno de los sitios, por ejemplo $x = 0, 1$. Su evolución completa se puede encontrar en la Figura 1 de [1], en la que se observa un ciclo con período $\Delta t = 5$. Además, el estado plano puede generalizarse a una cadena espines con n (múltiplo de 4) sitios, cuyo correspondiente período será $\Delta t = \frac{n}{4}$.

6.1. Geometría de entrelazamiento

Al tener un número de qudits múltiplo de 4, es posible “doblar” los estados cuánticos de manera que formen un cuadrilátero. Esto permite asociar los grados de libertad del estado cuántico a la frontera de un espacio contenido en dicho cuadrilátero. En otras palabras, los estados cuánticos de redes de tensores pueden interpretarse como geometrías espaciales bidimensionales inmersas en el interior (*bulk*) de un estado cuántico descrito por una cadena de qudits. Este comportamiento es precisamente el que se espera de la correspondencia AdS/CFT, en la que los grados de libertad de una teoría cuántica, definidos en la frontera, están asociados a una teoría gravitatoria caracterizada por una métrica en una dimensión superior. Además, la métrica del *bulk* puede fijarse mediante la prescripción de Ryu-Takayanagi, Ec. (55), cuya formulación original fue propuesta para un espacio AdS, pero que puede generalizarse a cualquier geometría. En este marco, la entropía de entrelazamiento entre dos subconjuntos de qudits consecutivos en la frontera se asocia a la longitud de la curva mínima en el *bulk* que conecta los extremos de dichas subcadenas. Aquí, la curva mínima se define como aquella que atraviesa el menor número de enlaces en la red de tensores.

Es importante destacar que la familia de QCAs conformes dada por la Ec. (83) aplicada sobre estados cuánticos definidos a través de estas redes de tensores constituye el primer ejemplo analítico

y riguroso de modelos holográficos discretos cuya evolución temporal no solo genera un estado cuántico dinámico en la frontera, sino que también da lugar a una geometría dinámica en el bulk. Hemos analizado un ejemplo de ello en las Ecs. (85) y (86), pero en [1] se muestran algunos más.

Calculemos primero la métrica del ejemplo más simple de estado plano, para $n = 4$:

$$|\Psi^{Plano}\rangle = \frac{1}{d} \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ \boxed{\uparrow \downarrow} \\ 3 \quad 2 \end{array}, \quad (87)$$

cuya matriz de densidad reducida del subsistema $\{0, 1\}$ se puede calcular como

$$\rho_{01} = \text{Tr}_{23} (|\Psi^{Plano}\rangle \langle \Psi^{Plano}|) = \frac{1}{d^2} \begin{array}{c} \boxed{\uparrow \downarrow} \\ \boxed{\uparrow \downarrow} \end{array} = \frac{1}{d^2} \left| \begin{array}{c} \boxed{\uparrow \downarrow} \\ \boxed{\uparrow \downarrow} \end{array} \right| = \frac{1}{d^2} \mathbb{I}_{01}, \quad (88)$$

donde hemos usado la unitariedad de $\boxed{\uparrow \downarrow}$. Por tanto, el estado es máximamente entrelazado con respecto a la partición $01|23$, y el mismo resultado se obtiene para la partición $03|12$ debido a la unitariedad dual. Esto implica que cualquier sitio $(0, 1, 2, 3)$ está máximamente entrelazado con el resto en el estado $|\Psi^{Plano}\rangle$. En particular, la entropía de entrelazamiento de una partición $k|n-k$ satisface $S_k = k \log d$, donde k es el número de qudits en la subpartición más pequeña, de acuerdo con la Ec. (22). Esta geometría puede representarse mediante el diagrama $\boxed{\times}$, en el que cada uno de los 4 triángulos denota una región del *bulk*. Aplicando la prescripción de Ryu-Takayanagi, es posible determinar la métrica del *bulk*, identificando la entropía de entrelazamiento de una partición con la medida de la curva que la divide, cortando el mínimo número de líneas en el diagrama. De este modo, la distancia entre regiones (definida por la medida de la curva que las conecta) corresponde exactamente al número de líneas que atraviesa. No obstante, en el caso $n = 4$, el *bulk* solo incluye regiones adyacentes a la frontera. En la situación general, donde el interior del *bulk* es no trivial, podemos formular el siguiente teorema, ilustrado en la Figura 4 para $t = 0,5$, cuya demostración se omite en [1].

Teorema. Dado un espacio de Hilbert \mathcal{H}_n y $|\Psi^{Plano}\rangle \in \mathcal{H}_n$ definido como en Ec. (84) para n sitios, la geometría inducida por la prescripción Ryu-Takayanagi aplicada a este estado es una geometría euclídea.

Demostración. Recordemos que la matriz de densidad de un estado puro viene dada por $\rho = |\Psi^{Plano}\rangle \langle \Psi^{Plano}|$, con $\langle \Psi^{Plano}| = |\Psi^{Plano}\rangle^\dagger$. Vamos a ilustrar la prueba en un caso del estado para

$n = 20$ en $t = 0$. Calculemos la matriz de densidad reducida del subsistema $\{-4, \dots, 5\}$:

$$\begin{aligned} \rho_{-4,\dots,5} &= \frac{1}{d^{10}} \\ &= \frac{1}{d^{10}} \text{ (diagram of a 10x10 grid of squares with arrows)} \\ &= \frac{1}{d^8} \left| \begin{array}{c} \text{diagram of a square with arrows} \\ -4 \end{array} \right| \begin{array}{c} \text{diagram of a square with arrows} \\ -2 \end{array} \begin{array}{c} \text{diagram of a square with arrows} \\ -1 \end{array} \begin{array}{c} \text{diagram of a square with arrows} \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \text{diagram of a square with arrows} \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \text{diagram of a square with arrows} \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \text{diagram of a square with arrows} \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \text{diagram of a square with arrows} \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \text{diagram of a square with arrows} \\ 5 \end{array} \right|. \end{aligned} \quad (89)$$

En la segunda igualdad se han representado las contracciones de los índices mediante diferentes colores, siguiendo etapas. De la primera a la última se han usado los colores azul oscuro, azul claro, marrón, amarillo y rojo. Los puntos negros denotan índices libres, mientras que las líneas exteriores unen los índices involucrados en la traza parcial. En la última red, se han indicado los sitios de entrada sobre los que actúa la matriz de densidad reducida. Por último, recordemos que un bucle en estos diagramas representa la traza de la identidad que, para un sitio, es igual a d .

Expresando ahora la matriz de densidad reducida en notación de operadores:

$$\begin{aligned} \rho_{-4,\dots,5} = & \left(\frac{1}{d}\mathbb{I}_{-4}\right) \otimes \left(\frac{1}{d^2}\text{Tr}_k(|\Psi_{n=4}^{\text{Plano}}\rangle\langle\Psi_{n=4}^{\text{Plano}}|)_{-1,-2,-3}\right) \otimes \left(\frac{1}{d}\mathbb{I}_0\right) \otimes \\ & \left(\frac{1}{d}\mathbb{I}_1\right) \otimes \left(\frac{1}{d^2}\text{Tr}_l(|\Psi_{n=4}^{\text{Plano}}\rangle\langle\Psi_{n=4}^{\text{Plano}}|)_{2,3,4}\right) \otimes \left(\frac{1}{d}\mathbb{I}_5\right) \end{aligned} \quad (90)$$

donde $\text{Tr}_k(|\Psi_{n=4}^{\text{Plano}}\rangle\langle\Psi_{n=4}^{\text{Plano}}|)_{a,b,c}$ denota la matriz de densidad reducida a 3 qudits (a, b, c) del estado plano para $n = 4$, que anteriormente hemos demostrado que es máximamente entrelazado para cualquier partición de qudits consecutivos. En particular para una partición $\{1 \text{ qudit}\} \{3 \text{ qudits}\}$, la entropía de entrelazamiento es igual a $\log d$.

Ahora, haremos uso de una identidad para la entropía de entrelazamiento del producto tensorial de matrices de densidad. Dada una matriz de densidad $\rho = \bigotimes_{i=1}^m \rho_i$, tal que $\text{Tr} \rho_i = 1$ (equivalente a la condición de normalización de un estado cuántico), se tiene

$$S(\rho) = \sum_i^m S(\rho_i). \quad (91)$$

Aplicando esta identidad a la Ec. (90), podemos calcular la entropía de entrelazamiento de la matriz de densidad reducida, resultando en

$$S(\rho_{-4,\dots,5}) = [1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1] \log d = 6 \log d, \quad (92)$$

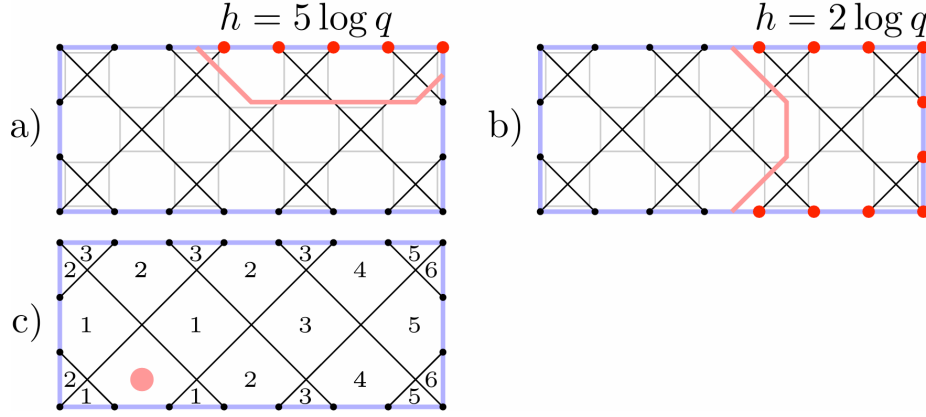


Figura 4: Figura 2 de [1]. Red de tensores del estado plano para $n = 20$ sitios en tiempo $t = 0,5$. a) y b) muestran la entropía de entrelazamiento correspondiente a los subconjuntos de qubits destacados en rojo. En ambos casos, la entropía coincide con el mínimo número de líneas que una curva ha de cortar para aislar al subconjunto de qubits rojos. En c) se representa la distancia desde el punto rosa hasta las diferentes regiones del *bulk*.

que, en efecto, coincide con el número de líneas que corta la geodésica que divide la partición.

Procediendo de igual manera se puede hallar la entropía de entrelazamiento de toda partición en el caso $n = 20$. Por ejemplo, podemos reciclar la Ec. (90) para calcular la matriz de densidad reducida respecto del subconjunto de qubits $\{0, \dots, 4\}$, trazando sobre los sitios $\{-4, \dots, -1, 5\}$. Los sitios -4 y 5 proporcionan d^2 , mientras que -3 completa la contracción necesaria para aplicar la unitariedad dual de $\begin{smallmatrix} \uparrow & \downarrow \\ \hline \end{smallmatrix}$, quedando d^2 tras trazar sobre -2 y -1 . Así,

$$\rho_{0,\dots,4} = \left(\frac{1}{d}\mathbb{I}_0\right) \otimes \left(\frac{1}{d}\mathbb{I}_1\right) \otimes \left(\frac{1}{d^2}\text{Tr}_l(|\Psi_{n=4}^{\text{Plano}}\rangle\langle\Psi_{n=4}^{\text{Plano}}|)_{2,3,4}\right). \quad (93)$$

Usando la identidad de Ec. (91), resulta en:

$$S(\rho_{0,\dots,4}) = [1 + 1 + 1] \log d = 3 \log d, \quad (94)$$

que igualmente coincide con el número de líneas que corta la geodésica divisoria.

Si $t > 0$ se tienen también estructuras similares. Por ejemplo, en la Figura 4 se puede observar el caso del estado plano evolucionado a tiempo $t = 0,5$. Notablemente, la partición $\{0, \dots, 4\}$, mostrada en a), presenta una entropía de entrelazamiento distinta a la calculada para la misma partición en $t = 0$. Es claro entonces, que esta prescripción proporciona una geometría dinámica. Para el caso general n , se tendrán las mismas simplificaciones y, recordando expresar algunas de las redes como estados planos de menor dimensión y empleando la Ec. (91), se llega a la misma conclusión. Para terminar, podemos calcular la medida de cualquier curva, pues las geodésicas determinan unívocamente una métrica. Así, se revela que la geometría del estado plano es plana, como se puede ver en la Figura 4c). \square

La estrategia de contar líneas para calcular el entrelazamiento no es nueva, sino que se ha empleado en la literatura para proponer algunos de los más prominentes algoritmos de corrección de errores cuánticos, como el HaPPY Code [23]. En este algoritmo se utilizan “tensores perfectos” para garantizar la igualdad entre cortes de líneas y entrelazamiento. En este trabajo, sin embargo, esta igualdad se desprende únicamente de la unitariedad dual de las puertas y de la estructura de los estados. De este tipo de modelos holográficos, lo mínimo que se espera es que tengan este tipo de comportamiento, en que se identifica una medida en el *bulk*, con el entrelazamiento en la

frontera. No obstante, la familia de modelos conformes estudiada en este trabajo no solo hace emerger la prescripción Ryu-Takayanagi, sino también modela correctamente algunos comportamientos de espaciotiempos más complejos, como el de AdS o de un agujero negro, como veremos en la siguiente subsección. Aún así, una de las limitaciones de estas familias de modelos holográficos discretos es la ausencia de grados de libertad en el *bulk*. En el futuro, esta puede ser una fuente de estudio, empleando, por ejemplo, estados PEPS [3] o alguna variante de estados MERA, como en [23].

6.2. Estado Anti-de Sitter

Comencemos definiendo el operador dilatación, que no es más que el operador adjunto de C (Ec. (77)) solo que definido para el circuito de 2 capas, en vez de 4. Por tanto, la isometría de dilatación $D_n : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{H}_{2n}$, que envía cadenas de n espines a cadenas de $2n$ espines, toma la forma:

$$D_n = d^{-\frac{n}{8}} \left(\cdots \begin{array}{c} -2 \quad -1 \\ | \quad | \\ 0 \quad 1 \end{array} \begin{array}{c} 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \\ \diagdown \quad \boxed{\text{gate}} \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \end{array} \begin{array}{c} 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \end{array} \begin{array}{c} 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \\ \diagdown \quad \boxed{\text{gate}} \quad \diagup \\ 3 \quad 4 \quad 5 \end{array} \cdots \right). \quad (95)$$

Se propone el siguiente modelo de estado AdS simplificado, definido recursivamente como

$$|\Psi_4^{\text{AdS}}\rangle = \frac{1}{d} \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ \boxed{\text{gate}} \\ 3 \quad 2 \end{array}, \quad (96)$$

$$|\Psi_{2n}^{\text{AdS}}\rangle = D_n |\Psi_n^{\text{AdS}}\rangle,$$

obteniendo el estado general con n grados de libertad en la frontera:

$$|\Psi_n^{\text{AdS}}\rangle = D_{\frac{n}{2}} \cdots D_8 D_4 |\Psi_4^{\text{AdS}}\rangle. \quad (97)$$

Podemos definir una nueva coordenada, denotada por ϱ_{AdS} , que represente el número de dilataciones aplicadas al estado inicial. Nótese, por tanto, que el tamaño de la cadena final será $n = 4 \cdot 2^{\varrho_{\text{AdS}}}$. En la Figura 5 se puede observar una sucesión de dilataciones aplicadas al estado AdS inicial, en que cada corte horizontal representa el estado intermedio, que corresponde a un corte de tiempo fijo del espaciotiempo AdS, con coordenada radial restringida al intervalo $[0, \varrho]$.

Procediendo como en Ec. (79), podemos obtener una identidad parecida para D :

$$T_{2n}^2 D_n = D_n T_n \iff T_{2n}^2 = D_n T_n D_n^\dagger, \quad (98)$$

es decir, cuando la coordenada radial ϱ decrece en una unidad, no solo el espacio x sino también el tiempo, se divide por un factor 2:

$$T_n^{\frac{n}{4}} |\Psi_n^{\text{AdS}}\rangle = D_{\frac{n}{2}} T_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{4}} |\Psi_{\frac{n}{2}}^{\text{AdS}}\rangle = D_{\frac{n}{2}} D_{\frac{n}{4}} T_{\frac{n}{4}}^{\frac{n}{4}} |\Psi_{\frac{n}{4}}^{\text{AdS}}\rangle = \cdots = D_{\frac{n}{2}} D_{\frac{n}{4}} \cdots D_4 T_4 |\Psi_4^{\text{AdS}}\rangle \quad (99)$$

En otras palabras, al decrecer en la coordenada radial de AdS, el tiempo se contrae exponencialmente, tal y como se ve en la métrica AdS de la Ec. (48). Sin embargo, como se ve en la Figura 5, la geometría es muy irregular. Para solventarlo, en [1] se construye un autoestado del operador T como combinación lineal de estados $|\Psi_n^{\text{AdS}}\rangle$, obteniendo una geometría mucho más uniforme. De hecho, existe un d_0 tal que para todo $d > d_0$, se tiene que la distancia en el *bulk* de este autoestado viene dada por la siguiente métrica discreta:

$$\Delta s^2 = \log^2 d \left(-2^{2\varrho} \Delta \tau^2 + \Delta \varrho^2 + 2^{2\varrho} \frac{\Delta \theta^2}{\pi^2} \right), \quad (100)$$

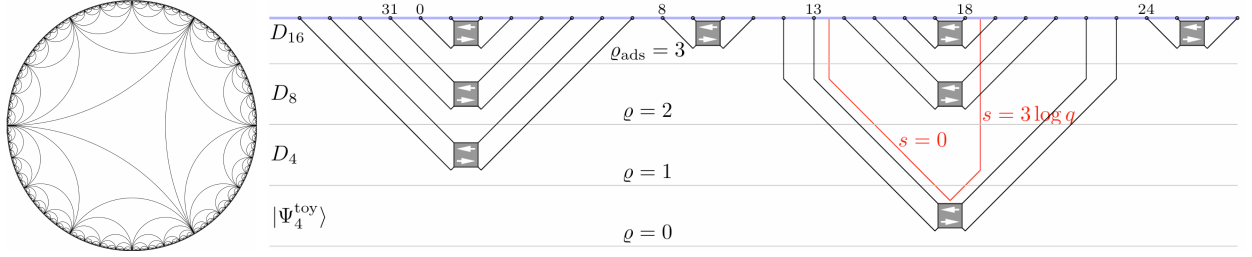


Figura 5: Figura 3 de [1]. La imagen de la izquierda representa un corte a tiempo fijo del espacio-tiempo continuo de AdS_3 en coordenadas de Poincaré, cuya coordenada radial ϱ se ha truncado en un valor finito, donde se encuentra la frontera. La métrica AdS en 2 dimensiones espaciales es una geometría hiperbólica y se puede representar como tal. Las curvas dividen el disco en tres regiones de igual área, iterativamente. En la imagen de la derecha, se muestra la red de tensores del estado AdS discreto, con $\varrho_{\text{AdS}} = 3$. En cada corte horizontal se distingue el estado intermedio con $\varrho < \varrho_{\text{AdS}}$. En rojo, se representa la curva mínima que separa los qudits $x = 13, \dots, 18$ del resto. Aplicando la prescripción Ryu-Takayanagi se indica la distancia desde los puntos $x = 13$ y $x = 18$ a $\varrho = 0$, haciendo evidente el comportamiento altamente irregular de la geometría de este estado.

donde el tiempo “propio” τ se relaciona exponencialmente en ϱ con el tiempo t , vía $t = \log d \cdot 2^{2\varrho_{\text{AdS}}} \tau$, reflejando la contracción del tiempo en AdS. Se observa fácilmente que es equivalente (en el límite considerado) a la métrica AdS de la Ec. (48), para una esfera de dimensión 1.

6.3. Agujeros de gusano y agujeros negros

Como se ha analizado en §4.2, los agujeros negros sirven de puente entre la mecánica cuántica y la teoría de la gravedad. En esta subsección, se estudia un modelo discreto de agujero negro como un estado cuántico, lo que permite profundizar en su interpretación termodinámica y en el problema de la pérdida de información. Los agujeros negros se caracterizan por emitir radiación de cuerpo negro, lo que posibilita su descripción mediante sistemas cuánticos con temperatura bien definida. No solo bien definida, sino que esta caracterización permite modelarlos a través de una función que depende únicamente de la temperatura. En el régimen de temperatura infinita, el sistema alcanza un estado máximamente mixto, en el que el estado cuántico está completamente indeterminado desde una perspectiva clásica. En este caso, la radiación se describe mediante una distribución de estados dominada por fluctuaciones clásicas aleatorias. Por otro lado, en el límite de temperatura cero, el sistema se encuentra en un estado puro, completamente determinado, ya que, en ausencia de temperatura, las fluctuaciones clásicas no juegan ningún papel.

Para analizar estos sistemas, se utiliza frecuentemente el estado purificado (ver Proposición 2.2) del agujero negro, conocido como el estado Thermofield Double (TFD). El estado TFD propuesto en [1] consiste en un sistema puro bipartito dado por dos cadenas de espines $\mathcal{H}_n \otimes \mathcal{H}_n$, evolucionando en el tiempo mediante el operador conjunto $T \otimes T^\top$ ¹¹ (ver Figura 6). Este estado se define, de nuevo, recursivamente, mediante el siguiente estado puro inicial, máximamente entrelazado:

$$|\Psi_{a,a}^{\text{TFD}}\rangle = \bigotimes_{x \in \mathbb{Z}_a} |\psi\rangle_x = \cdots \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right| \cdots \\ -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \end{array} \quad (101)$$

¹¹La presencia del operador traspuesto actuando sobre la segunda cadena es “artificial”, pues representamos la segunda cadena como índices de salida, es decir, libres hacia arriba (Ec. (101)).

donde $|\psi\rangle_x$ es el estado máximamente entrelazado entre el sitio x de una cadena y el sitio x de la otra cadena,

$$|\psi\rangle_x = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^q |k\rangle_x \otimes |k\rangle_x. \quad (102)$$

Nótese que, aunque este estado aparenta ser una matriz de densidad máximamente mixta (proporcional al producto de identidades), en realidad es un estado puro. Esta “ambigüedad” surge de un abuso de notación, pues la representación de la purificación de un estado como una red tensorial es equivalente a la de la matriz de densidad del estado inicial (salvo doblar índices). En efecto, tomando las definiciones de la Proposición 2.2:

$$|\psi^{\text{Purif.}}\rangle_{AB} = \bigcap, \quad \rho = \text{Tr}_B(|\psi^{\text{Purif.}}\rangle_{AB} \langle \psi^{\text{Purif.}}|_{AB}) = \begin{array}{c} \text{U} \\ \text{N} \end{array} \Bigg| = \Bigg|. \quad (103)$$

Aplicando una sucesión de operadores dilatación (Ec. (95)), obtenemos el estado general TFD como

$$|\Psi_{n,a}^{\text{TFD}}\rangle = (D_{\frac{n}{2}} \cdots D_{2a} D_a) \otimes (D_{\frac{n}{2}} \cdots D_{2a} D_a)^* |\Psi_{a,a}^{\text{TFD}}\rangle. \quad (104)$$

Por analogía con el estado AdS, podemos definir la coordenada ϱ , que determina la distancia radial de AdS en el *bulk* del estado, dada por el número de dilataciones aplicadas. Por tanto, ϱ tomará valores entre $[\varrho_G, \varrho_H] \subseteq \mathbb{Z}$, con $a = 4 \cdot 2^{\varrho_G}$ y $n = 4 \cdot 2^{\varrho_H}$, donde los superíndices G y H denotan Garganta y Horizonte, respectivamente. De esta manera, a determina el tamaño de la garganta que une las dos cadenas de espines, cada una de tamaño n . Interpretaremos este estado TFD, como dos agujeros negros cuyos horizontes de sucesos se encuentran en cada cadena de espines, entrelazados (literal y cuánticamente) mediante una garganta que se encuentra a distancia radial $\varrho_H - \varrho_G$ de cada horizonte, entendida como un agujero de gusano.

Como en anteriores apartados, tenemos la siguiente identidad:

$$(T_{2n}^\dagger)^2 D_n^* = D_n^* T_n^\dagger, \quad (105)$$

lo que implica que, en este caso también, el tiempo se ralentiza en un factor 2 al disminuir la coordenada radial en 1:

$$(T_{2n} \otimes T_{2n}^\dagger)^2 |\Psi_{2n,a}^{\text{TFD}}\rangle = (D_n \otimes D_n^*) (T_n \otimes T_n^\dagger) |\Psi_{n,a}^{\text{TFD}}\rangle. \quad (106)$$

Así, la garganta del agujero de gusano crece linealmente con el tiempo propio de la misma. Es decir, teniendo en cuenta que evolucionar el estado $|\Psi_{n,a}^{\text{TFD}}\rangle$ vía $(T_n \otimes T_n^\dagger)^{2\varrho_H - \varrho_G}$ corresponde a evolucionar la garganta, $|\Psi_{a,a}^{\text{TFD}}\rangle$, solamente una vez por cada lado, $(T_a \otimes T_a^\dagger) = T_a^2 \otimes \mathbb{I}$, entonces la longitud de la garganta aumenta cada dos unidades de tiempo cuatro capas, dos por cada operador T , debido a que $|\Psi_{a,a}^{\text{TFD}}\rangle$ es proporcional a la identidad (ver representación como red tensorial en Ec. (101)).

Si eliminamos los grados de libertad de una de las cadenas de espines \mathcal{H}_n mediante la traza parcial, obtenemos la matriz de densidad reducida de la otra cadena, la cual, según nuestra interpretación, corresponde al estado cuántico de un agujero negro. La entropía de von Neumann de esta matriz puede interpretarse de dos maneras, de acuerdo con la condición 1 de la Definición 2.4: como la medida del entrelazamiento del estado TFD entre los dos agujeros negros conectados por la garganta, o como el grado de mezcla de la matriz de densidad de uno de los agujeros negros. La segunda interpretación nos permite relacionar esta cantidad con la temperatura de cada agujero negro. Como se mencionó anteriormente, un agujero negro está completamente determinado por su temperatura, la cual depende de las correlaciones clásicas. En este contexto, el entrelazamiento

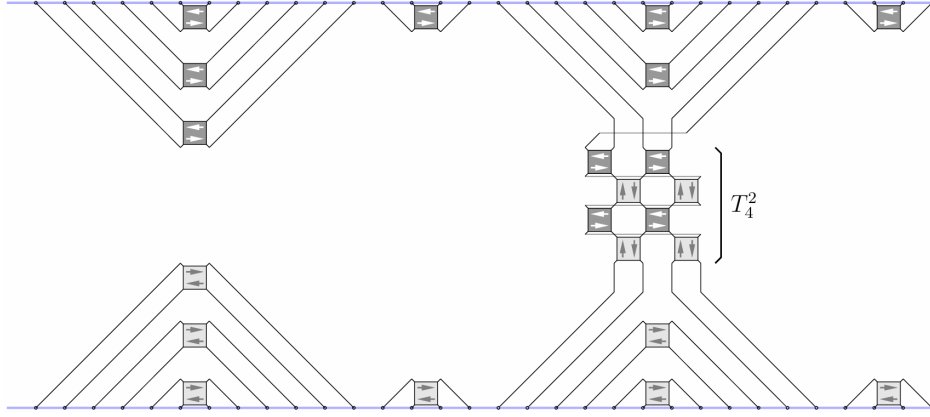


Figura 6: Figura 5 de [1]. Red tensorial del estado Thermofield Double (TFD), con $\varrho_H = 3$ y $\varrho_G = 0$, dando lugar a dos horizontes de tamaño $n = 32$ y una garganta de tamaño $a = 4$. Este estado representa un agujero de gusano conectando dos agujeros negros situados en las fronteras, u horizontes, del estado, donde se encuentran los índices libres. La garganta se identifica por las líneas que conectan ambas fronteras. Se ha dejado evolucionar a la garganta durante 2 unidades de tiempo propio, que equivalen a $t = 2 \times 2^{\varrho_H - \varrho_G} = 16$ unidades de tiempo en las fronteras (8 en cada una).

entre los agujeros negros de un agujero de gusano determina la temperatura de ambos, la cual debe ser idéntica, ya que el estado TFD es puro y la entropía de entrelazamiento es independiente de qué subsistema se considere dentro de una partición dada. Esta interpretación constituye un caso concreto de la conjetura ER=EPR, según la cual un estado entrelazado (EPR) se asocia a la existencia de un agujero de gusano que conecta ambos sistemas (ER). No obstante, esta conexión no es meramente conceptual. Aplicando la prescripción de Ryu-Takayanagi a nuestro sistema, el entrelazamiento entre subconjuntos de espines de las distintas cadenas determina la distancia de la curva mínima que separa ambos horizontes. Como resultado, emerge una geometría no trivial con una distancia mínima para $\varrho = \varrho_G$ y un máximo en los horizontes, en concordancia con la estructura esperada para un agujero de gusano. Este estado constituye, por tanto, un ejemplo concreto y exitoso de esta conjetura.

El caso $n = a$ da lugar a un estado máximamente entrelazado entre las dos cadenas de espines, lo que implica que la entropía de von Neumann satisface $S(\rho^{\text{AN}}) = a \log d$, donde el superíndice “AN” denota Agujero Negro. Esto corresponde a un estado máximamente mixto para cada uno de los agujeros negros, es decir, un régimen de temperatura infinita. En el caso general, cuando $n > a$, la matriz de densidad de uno de los agujeros negros se obtiene al calcular la traza parcial sobre una de las cadenas (por ejemplo, la de la derecha) del estado puro $|\Psi_{n,a}^{\text{TFD}}\rangle\langle\Psi_{n,a}^{\text{TFD}}|$:

$$\rho_{n,a}^{\text{AN}} = \text{Tr}_{\text{derecha}} |\Psi_{n,a}^{\text{TFD}}\rangle\langle\Psi_{n,a}^{\text{TFD}}| = (D_{\frac{n}{2}} \cdots D_{2a} D_a) \mathbb{I}_a (D_{\frac{n}{2}} \cdots D_{2a} D_a)^\dagger. \quad (107)$$

Dado que D_n es una isometría, la entropía de von Neumann de la matriz de densidad es exactamente $S(\rho_{n,a}^{\text{AN}}) = a \log d$, igual a la obtenida para $n = a$. Sin embargo, existe una diferencia sutil: en este caso, la entropía de entrelazamiento máxima es $n \log d$ en lugar de $a \log d$. Dado que la entropía de entrelazamiento entre ambas cadenas permanece invariante, independientemente del tamaño de los agujeros negros, pero la entropía máxima crece linealmente con el tamaño de los horizontes, el entrelazamiento efectivo entre los agujeros negros disminuye a medida que aumenta el número de dilataciones aplicadas. Como consecuencia, los distintos valores de n , que determinan el tamaño de las fronteras de los estados TFD, caracterizan de manera unívoca estados con diferentes temperaturas. Este resultado permite establecer un modelo en el que el estado de temperatura infinita

corresponde a $n = a$, mientras que en el límite $n \rightarrow \infty$ se alcanza el estado de temperatura cero.

6.3.1. Paradoja de la información en agujeros negros y Python's lunches

Como hemos mencionado, el estado TFD es puro, lo que implica que los agujeros negros en ambos extremos se encuentran a la misma temperatura, en equilibrio térmico. Este es precisamente el caso de la radiación emitida por un agujero negro, ya que la radiación de Hawking se encuentra en equilibrio térmico con el agujero negro emisor. Por tanto, podemos emplear este modelo interpretando una de las cadenas como un agujero negro y la otra como los grados de libertad de la radiación emitida. Dado que la radiación debe estar entrelazada con el objeto que la generó, y apoyándonos en la conjetura $ER = EPR$, ambos estarán conectados por un agujero de gusano, luego esta interpretación es razonable.

La radiación de Hawking planteó una aparente paradoja en relación con la información que cae en un agujero negro. Según la descripción clásica y la formulación original de esta paradoja, la información contenida en el interior de un agujero negro se perdería, ya que la radiación predicha por Hawking es puramente térmica y, por tanto, no transporta información. Sin embargo, este argumento no tiene en cuenta correlaciones cuánticas, que pueden estar codificando la información. Así, una formulación más moderna de esta paradoja se basa en el análisis de la entropía de entrelazamiento del estado de la radiación. Si consideramos un agujero negro como un objeto cuántico sin geometría, entrelazado con la radiación que emite, entonces la entropía de entrelazamiento respecto de la partición *Radiación/Agujero Negro* medirá la cantidad de información transportada por la radiación. A medida que el agujero negro emite radiación, los grados de libertad de esta aumentan, lo que provoca un crecimiento estricto de la entropía de entrelazamiento, al menos de manera lineal con el número de grados de libertad. Es importante señalar que, en esta descripción, la radiación está entrelazada con los grados de libertad del agujero negro en su totalidad, y no únicamente con los de su frontera.

No obstante, se espera que la evolución de la entropía siga lo que se conoce como la *curva de Page*. Inicialmente, dado que no hay radiación, el estado compuesto por el agujero negro y la radiación es separable, es decir,

$$|\psi_{\text{total}}\rangle = |\text{Agujero Negro}\rangle \otimes |\text{No Radiación}\rangle, \quad (108)$$

lo que implica que la entropía de entrelazamiento es nula. De manera análoga, al final del proceso, cuando solo queda radiación, el estado total será

$$|\psi_{\text{total}}\rangle = |\text{No Agujero Negro}\rangle \otimes |\text{Radiación}\rangle, \quad (109)$$

y, dado que nuevamente se trata de un estado separable, la entropía también será nula. Esto implica que, en algún punto intermedio, la entropía debe alcanzar un máximo antes de comenzar a decrecer. El instante en el que se alcanza este valor máximo se denomina *tiempo Page*, t_{Page} . Si se asocia, de nuevo, la entropía de mezcla con la temperatura, esto sugiere que, inicialmente, el agujero negro tiene temperatura cero, ya que no emite radiación. Posteriormente, a medida que el agujero negro evoluciona, este aumenta su temperatura hasta alcanzar un valor infinito en el tiempo Page, cuando se encuentra máximamente entrelazado con la radiación. A partir de este punto, la temperatura comienza a decrecer hasta llegar nuevamente a cero al final del proceso.

Para abordar esta paradoja, consideremos una descripción más detallada del estado compuesto por el agujero negro y la radiación, representado por un sistema con dos cadenas de grados de libertad. La primera cadena corresponde a la radiación, cuyo número de grados de libertad debe aumentar con la evolución temporal. La segunda cadena representa el horizonte de eventos del agujero negro, cuyo número de grados de libertad, en cambio, debe disminuir debido a la evaporación

del agujero negro *en* radiación. Utilicemos ahora la prescripción de Ryu-Takayanagi. Consideremos cortes que dividan el agujero de gusano en distintas particiones, dibujados en la Figura 7. Existen dos mínimos locales en el área de cada corte (ver Figura 8). El primero corresponde al corte por la garganta del agujero de gusano, que divide el sistema en *Radiación/Agujero Negro*. El segundo mínimo local se encuentra justo antes de escapar del agujero negro por el horizonte de eventos, separando el estado en la partición *(Interior del Agujero Negro + Radiación)/Horizonte del Agujero Negro*.

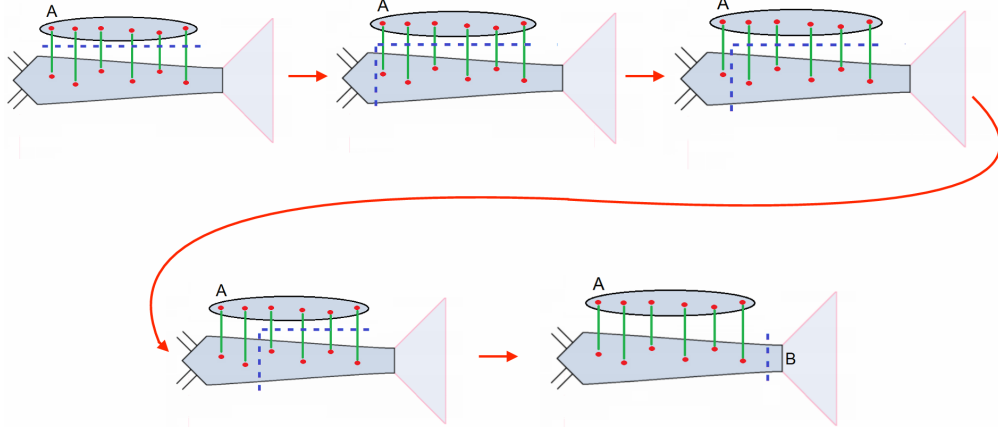


Figura 7: Figura 14 de [24]. Se muestran cinco cortes diferentes del mismo sistema *Agujero Negro + Radiación* a tiempo fijado. Cada uno de los pentágonos representa el interior del agujero negro, que ha evolucionado hacia la derecha, de manera que el horizonte de eventos—límite derecho del pentágono—decrece en el tiempo. La radiación emitida por el agujero negro se dibuja en rojo y contenida en una elipse. Cada partícula de radiación está entrelazada con alguna partícula del agujero negro mediante líneas continuas verdes, que simbolizan la garganta del agujero de gusano. Las líneas discontinuas azules denotan los diferentes cortes.

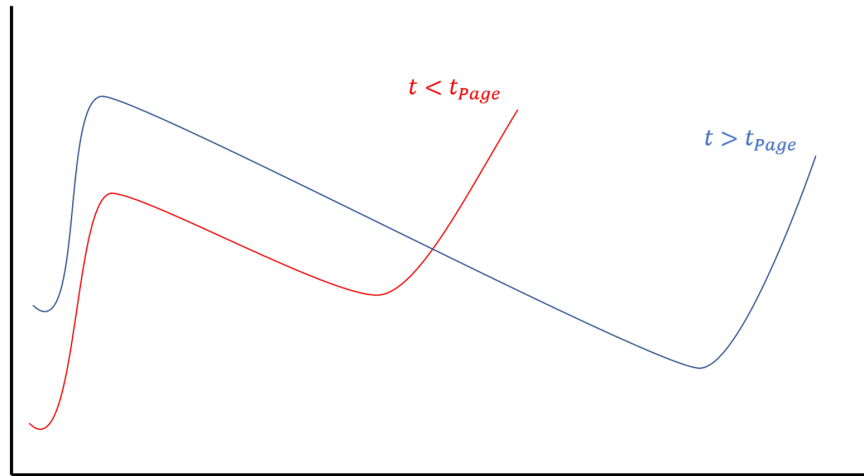


Figura 8: Figura 15 de [24]. Se muestra una interpolación continua del tamaño de los cortes (líneas discontinuas azules) de la Figura 7, en el mismo orden, para dos tiempos fijados. El eje Y representa el tamaño y el eje X el parámetro de interpolación. Para $t < t_{\text{Page}}$ el mínimo global se da para el corte que divide el sistema por la garganta del agujero de gusano, mientras que para $t > t_{\text{Page}}$ el corte mínimo se encuentra próximo al horizonte de eventos.

Para tiempos menores que el tiempo Page, $t < t_{\text{Page}}$, el horizonte de eventos del agujero negro es aún grande, ya que la evaporación es incipiente. En consecuencia, el primer mínimo local es también el mínimo global en este régimen, lo que implica que la entropía de entrelazamiento está determinada por el corte en la garganta del agujero de gusano, de acuerdo con la prescripción Ryu-Takayanagi. Esto concuerda con el cálculo inicial, ya que la garganta se ensancha proporcionalmente al número de partículas de la radiación. El tiempo Page se puede caracterizar como el instante en que ambos mínimos locales coinciden. Para tiempos posteriores, por tanto, $t > t_{\text{Page}}$, el horizonte del agujero negro se ha reducido significativamente y el segundo mínimo local ahora es el mínimo global. Por consiguiente, la entropía de entrelazamiento está ahora determinada por el corte cercano al horizonte de eventos. Así, la entropía de entrelazamiento decrecerá, ya que el horizonte continúa reduciéndose hasta desaparecer. De esta manera, se resuelve la paradoja de la pérdida de información en un agujero negro.

Esta solución aún carece de un modelo concreto que sea consistente con las descripciones completas de agujero negro y de su radiación. En particular, es necesario un marco teórico capaz de explicar cómo emerge este comportamiento, en el que la superficie mínima de separación entre el agujero negro y su radiación cambia de ubicación. Esta explicación, que se conoce como una *Python's lunch*, fue propuesta en [24].

Podemos analizar ahora el modelo TFD propuesto en [1] para investigar la presencia de este tipo de comportamiento. Este estudio constituye, por tanto, una contribución original del autor del TFG y la primera aplicación de esta familia de modelos holográficos discretos al problema de la información en agujeros negros y a la aparición de *Python's lunches*. No obstante, el resultado obtenido en esta investigación resulta algo desalentador, como se resume en la siguiente proposición.

Proposición 6.1. El estado TFD definido en la Ec. (104) no reproduce la formación de *Python's lunches* y, en consecuencia, no puede proporcionar una solución a la paradoja de la información en agujeros negros.

Demostración. Lo que cabría esperar del estado TFD es, al menos, que la anchura de la garganta que conecta las dos cadenas de espines variara a lo largo de la evolución temporal. Dado que un corte en la garganta proporciona la entropía de entrelazamiento entre ambas cadenas de espines, al ser la curva mínima según la prescripción de Ryu-Takayanagi, su variación en el tiempo reflejaría cambios en el entrelazamiento.

Consideremos el estado $|\Psi_{n,a}^{\text{TFD}}\rangle$. De acuerdo con la Ec. (105), evolucionar las fronteras $\frac{n}{a}$ unidades de tiempo equivale a evolucionar la garganta en una unidad de tiempo (propio). En consecuencia, la longitud de la garganta crece linealmente con el tiempo propio, pero su anchura permanece constante, ya que $(T_a \otimes T_a^\tau)^\tau |\Psi_{a,a}^{\text{TFD}}\rangle \in \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_a$ para todo $\tau \in \mathbb{Z}$. Durante la evolución en tiempos $t \in [0, \frac{n}{a}]$ de la frontera, la garganta también crece linealmente, añadiendo dos capas del operador T cada cuatro unidades de tiempo de la frontera, t . No obstante, la anchura de la garganta, y por tanto la entropía de entrelazamiento entre ambos agujeros negros, permanece invariable a lo largo de la evolución temporal de este estado TFD.

Además, el número de dilataciones aplicadas (que determina el tamaño de las fronteras, n) no afecta a esta propiedad, ya que, como hemos argumentado, la evolución temporal del estado puede describirse exclusivamente mediante la evolución de la garganta, inicialmente dada por $|\Psi_{a,a}^{\text{TFD}}\rangle$. Finalmente, el tamaño inicial de la garganta, a , tampoco introduce variaciones, pues se tiene que $(T_a \otimes T_a^\tau)^\tau |\Psi_{a,a}^{\text{TFD}}\rangle = T_a^{2\tau}$ para todo $\tau \in \mathbb{Z}$ y todo $a \in \mathbb{Z}$, lo que confirma que la anchura de la garganta se mantiene inalterada a lo largo del tiempo. \square

Este resultado sugiere que, si bien este modelo TFD captura ciertos aspectos del entrelazamiento y la evolución térmica de los agujeros negros, no es suficiente para describir la transición en la superficie de mínima separación postulada en el marco de la curva de Page. Esto indica la necesidad

de explorar extensiones del modelo o considerar estructuras más ricas que permitan la aparición de estos efectos geométricos.

Una posible dirección sería la elección de nuevos estados iniciales. Sin embargo, el estado inicial utilizado en este trabajo ha sido seleccionado precisamente para representar un estado máximamente entrelazado, correspondiente a un agujero negro de temperatura infinita. Además, la estructura que involucra rotaciones y complejos conjugados de la puerta CNOT garantiza que la relación entre el número de líneas que corta una geodésica y la entropía de entrelazamiento de la partición correspondiente se mantenga válida. Otra posible extensión del modelo consistiría en modificar la construcción del operador T , incorporando puertas adicionales que generen líneas laterales. Esto permitiría la contracción de ciertos índices, lo que podría inducir una variación en la anchura de la garganta, haciendo posible la aparición de la transición esperada en la geometría holográfica.

7. Conclusión

En el presente trabajo se han estudiado estados con propiedades holográficas, es decir, estados cuánticos definidos en la frontera de un espacio métrico asociado a una teoría gravitatoria. Para ello, se han empleado redes tensoriales, que constituyen una representación conveniente de los estados cuánticos. Dichas redes nos han permitido aislar los grados de libertad de una teoría cuántica de campos en una cadena, la cual se interpreta como la frontera de un espacio bidimensional. Esta interpretación no habría sido posible sin la utilización de redes tensoriales, que además proporcionan una evolución temporal analítica y sencilla de los estados. Esta evolución se lleva a cabo mediante una novedosa familia de modelos discretos fundamentados en autómatas celulares cuánticos y puertas cuánticas dualmente unitarias, introducida en [1]. En el texto mostramos que un circuito local y unitario predice la causalidad de la teoría y que añadir unitariedad dual resulta equivalente a una teoría de campos conforme. Para completar la teoría cuántica discreta, se hace uso de la prescripción generalizada de Ryu-Takayanagi para relacionar la geometría del interior con el entrelazamiento en la frontera, logrando así interpretar los estados cuánticos de redes tensoriales como estados holográficos.

También se aborda la paradoja de la pérdida de información en agujeros negros, presentando una contribución original del autor del TFG y la primera aplicación de esta familia de modelos a dicho problema. Específicamente, se demuestra que el estado de agujero de gusano TFD introducido en [1] no puede dar lugar a una *Python's lunch*. No obstante, estos modelos constituyen un escenario teórico sumamente rico para estudiar las propiedades de la correspondencia AdS/CFT y explorar posibles soluciones a la paradoja de la información en agujeros negros. Finalmente, se proponen algunas líneas futuras de desarrollo orientadas a encontrar soluciones a esta paradoja.

Resolver esta paradoja permitiría establecer un marco coherente entre fenómenos puramente cuánticos, como la radiación emitida, y los procesos generados por objetos con una naturaleza puramente gravitatoria, como son los agujeros negros. Además, físicos como John Preskill y Patrick Hayden están estudiando algoritmos de criptografía cuántica en los que agujeros negros “encriptan” la información [25]. Por otro lado, investigadores como Fernando Pastawski y Beni Yoshida han diseñado un algoritmo de corrección de errores cuántico basado en el principio holográfico y en sus propiedades [23]. Estos avances son esenciales para el desarrollo de ordenadores cuánticos viables y escalables, capaces de simular sistemas cuánticos extremadamente complejos. Entre sus posibles aplicaciones se encuentra crear simulaciones del flujo molecular mediante mecanismos hasta ahora inaccesibles, como el funcionamiento de la bomba de sodio-potasio en las células.

Referencias

- [1] L. Masanes, *Discrete holography in dual-unitary circuits*, [arXiv:2301.02825](#).
- [2] J. Biamonte, *Lectures on quantum tensor networks*, 2020.
- [3] J. I. Cirac, D. Pérez-García, N. Schuch, and F. Verstraete, *Matrix product states and projected entangled pair states: Concepts, symmetries, theorems*, *Rev. Mod. Phys.* **93** (2021) 045003.
- [4] G. 't Hooft, *Dimensional reduction in quantum gravity*, [gr-qc/9310026](#).
- [5] L. Susskind, *The world as a hologram*, *Journal of Mathematical Physics* **36** (1995) 6377–6396.
- [6] J. Maldacena, *The large n limit of superconformal field theories and supergravity*, *International Journal of Theoretical Physics* **38** (1999) 1113–1133.
- [7] S. Ryu and T. Takayanagi, *Holographic Derivation of Entanglement Entropy from the anti-de Sitter Space/Conformal Field Theory Correspondence*, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 1.
- [8] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe, *Quantum mechanics*. John Wiley & Sons, 1977.
- [9] F. Giraldi and P. Grigolini, *Quantum entanglement and entropy*, *Physical Review A* **64** (2001) 10.
- [10] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2012.
- [11] D. Perez-Garcia, F. Verstraete, M. M. Wolf, and J. I. Cirac, *Matrix product state representations*, 2007.
- [12] R. M. Wald, *General Relativity*. Chicago Univ. Pr., 1984.
- [13] J. M. Lee, *Smooth Manifolds*, pp. 1–29. Springer, 2003.
- [14] S. Carlip, *Black hole thermodynamics*, *International Journal of Modern Physics D* **23** (2014) 1430023.
- [15] R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Space-Time and Black Hole Thermodynamics*. Chicago Lectures in Physics. University of Chicago Press, 1995.
- [16] J. D. Bekenstein, *Black holes and entropy*, *Phys. Rev. D* **7** (1973) 2333–2346.
- [17] S. W. Hawking, *Particle Creation by Black Holes*, *Commun. Math. Phys.* **43** (1975) 199–220.
- [18] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, vol. 5 of *Course of Theoretical Physics*. Butterworth-Heinemann, 1980.
- [19] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal, *Conformal Field Theory*. Graduate Texts in Contemporary Physics. Springer, 1997.
- [20] B. Janssen, *Breve repaso de la relatividad especial*, 2005.
- [21] B. Bertini, P. Kos, and T. Prosen, *Operator entanglement in local quantum circuits ii: Solitons in chains of qubits*, *SciPost Physics* **8** (2020).
- [22] B. Swingle, *Constructing holographic spacetimes using entanglement renormalization*, 2012.

- [23] F. Pastawski, B. Yoshida, D. Harlow, and J. Preskill, *Holographic quantum error-correcting codes: toy models for the bulk/boundary correspondence*, *Journal of High Energy Physics* (2015).
- [24] A. R. Brown, H. Gharibyan, G. Penington, and L. Susskind, *The python's lunch: geometric obstructions to decoding hawking radiation*, 2019.
- [25] P. Hayden and J. Preskill, *Black holes as mirrors: quantum information in random subsystems*, *Journal of High Energy Physics* (2007) 120.