III Concurso de Modelización Matemática

Natalia Averna García, Saúl Baltasar Jiménez, Nicolás Ratier Werbin

19 de octubre del 2020

Presentación de los concursantes

Esta solución ha sido elaborada por Natalia Averna García, Saúl Baltasar Jiménez y Nicolás Ratier Werbin, tres estudiantes de segundo curso del Doble Grado en Matemáticas - Física en la Universidad Complutense de Madrid. Las direcciones de email de los concursantes son las siguientes:

- Natalia Averna García (representante): naverna@ucm.es
- Saúl Baltasar Jiménez: sbalta01@ucm.es
- Nicolás Ratier Werbin: nratier@ucm.es

Junto a este documento, se adjuntan los expedientes académicos y los resguardos de matrícula de los tres estudiantes, a modo de justificante de que estamos matriculados en un grado de la UCM en el curso 2020- 2021. Asimismo, se adjuntan los siguientes programas de MATLAB, que contienen los cálculos realizados para resolver el problema: regresionlogaritmica.m, tasarecuperacion.m, estimaciones.m, predicciones.mlx, contagios.m, fallecidos.m, modelo.m y modelomod.m.

1 Ecuaciones del primer modelo epidemiológico

En este modelo vamos a dividir a los habitantes en tres grupos. Por un lado, los susceptibles serán aquellos que no han contraído la enfermedad, cuyo número en el instante t está representado por $S(t)$. Por otro lado, los infectados serán aquellos que tienen la capacidad de contagiar a los demás y, en el instante t, su número es $I(t)$. Por último, los recuperados son aquellos que han pasado la enfermedad y se han vuelto inmunes, $R(t)$. El número total de habitantes en cada instante será $N(t)$, y será la suma de los números de los tres grupos anteriores.

En las ecuaciones del modelo epidemiológico hay que tener en cuenta varias premisas. Por un lado, $\lambda(t)$ representa el número de nacimientos por día y por habitante en el instante t. Por tanto, el número de nacimientos por día en el instante t es $\lambda(t)N(t) = \lambda(t)S(t) + \lambda(t)I(t) + \lambda(t)R(t)$. Todos los recién nacidos pertenecen al grupo de susceptibles. Por otra parte, $\mu^*(t)$ se define como el número de fallecimientos que provoca la enfermedad por día y por infectado en el instante t. En consecuencia, el número de infectados fallecidos por día a causa de la enfermedad es $\mu^*(t)I(t)$. Además, $\mu(t)$ es el número de fallecimientos por otras causas por día y por habitante en el instante t, por lo que el número de susceptibles fallecidos por día en el instante t es $\mu(t)S(t)$, el número de recuperados fallecidos por día en el instante t es $\mu(t)R(t)$, y el número de infectados fallecidos por día por causas ajenas a la enfermedad en el instante t es $\mu(t)I(t)$.

También hay que tener en cuenta las variaciones debidas a nuevos contagios o recuperaciones. La constante de recuperación γ se define como el número de recuperados por día y por infectado. El número de personas que dejan de ser infectados y pasan al grupo de recuperados por día es $\gamma I(t)$. Si consideramos que cada habitante tiene $\beta(t)N(t)$ contactos efectivos con resultado de contagio por día, entonces se producen $\beta(t)N(t)S(t)$ contactos efectivos con resultado de contagio de personas susceptibles por día. Si tenemos en cuenta que la probabilidad de que estos contactos sean con personas infectadas es de $I(t)/N(t)$, entonces se producen un total de $\beta(t)N(t)S(t)I(t)/N(t) = \beta(t)I(t)S(t)$ contagios al día.

Teniendo en cuenta todas estas condiciones, llegamos al sistema de ecuaciones (1), en el que $S'(t)$, $I'(t)$ y $R'(t)$ representan, respectivamente, las derivadas temporales de $S(t)$, $I(t)$ y $R(t)$.

$$\left\{ \begin{array}{c} S'(t) = \lambda(t)S(t) + \lambda(t)I(t) + \lambda(t)R(t) - \mu(t)S(t) - \beta(t)S(t)I(t) \\ I'(t) = \beta(t)I(t)S(t) - [\gamma + \mu(t) + \mu^*(t)]I(t) \\ R'(t) = \gamma I(t) - \mu(t)R(t) \end{array} \right. \tag{1}$$

2 Calibración del modelo

2.1 Tasa de contagio efectivo y tasa de mortalidad debida a la enfermedad

Debido a las medidas de distanciamiento social e higiénico-sanitarias decretadas con el estado de alarma, se produce una caída exponencial de las tasas de contagio efectivo β y de mortalidad debida a la enfermedad μ^*. Gracias a los datos proporcionados de los valores observados de nuevos infectados diarios, recuperados diarios y defunciones diarias debidas a la enfermedad bajo estudio en el periodo de 41 días desde el 20 de marzo de 2020, podemos aproximar los valores observados de las tasas de contacto efectivo y de mortalidad en el día t, representados respectivamente por $\beta_e(t)$ y μ_e^*, mediante las expresiones (2).

$$\beta_e(t+1) = \frac{i_e(t+1)}{I_e(t)N} \qquad \mu_e^*(t+1) = \frac{d_e(t+1)}{I_e(t)} \tag{2}$$

Los resultados obtenidos se adjuntan en el archivo (regresionlogaritmica.m). Utilizaremos estos datos para aproximar $\beta(t)$ y $\mu^*(t)$ mediante una regresión logarítmica a los parámetros de la forma (3).

$$\beta(t) = \beta_0 + e^{at+b} \qquad \mu^*(t) = \mu_0^* + e^{ct+d} \tag{3}$$

Esta aproximación se reduce a una regresión lineal (4).

$$log(\beta(t) - \beta_0) = at - b \qquad log(\mu^*(t) - \mu_0^*) = at - b \tag{4}$$

Asumiremos los siguientes valores dados para β_0 y μ_0^*.

$$\beta_0 = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{N(0)} = 8,26 \cdot 10^{-11} \qquad\qquad \mu_0^* = 2,2 \cdot 10^{-4}$$

Los cálculos realizados se adjuntan en el programa (regresionlogaritmica.m). Obtenemos los siguientes resultados.

$$a = -0,056 \qquad b = -19,988 \qquad c = -0,043 \qquad d = -4,132$$

La gráfica de la Figura 1 representa los valores observados de β_e y la función obtenida por regresión β frente al tiempo.

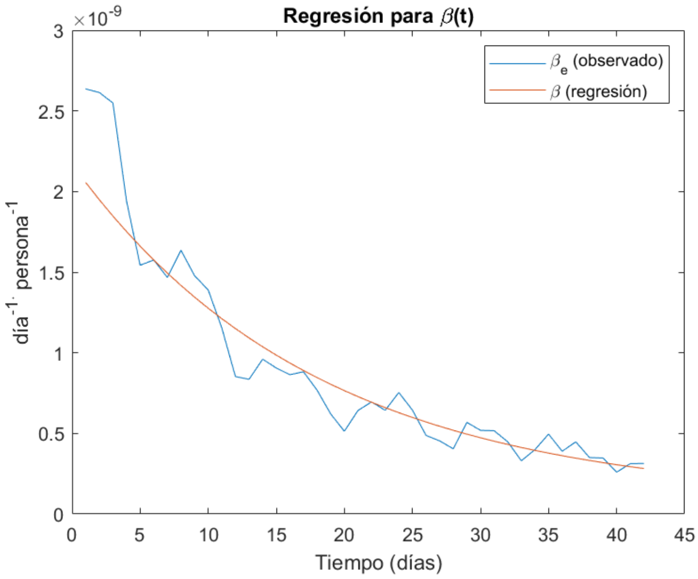

Figure 1: Tasa de contacto efectivo frente al tiempo

La gráfica de la Figura 2 representa los valores observados de μ_e^* y la función obtenida por regresión μ frente al tiempo.

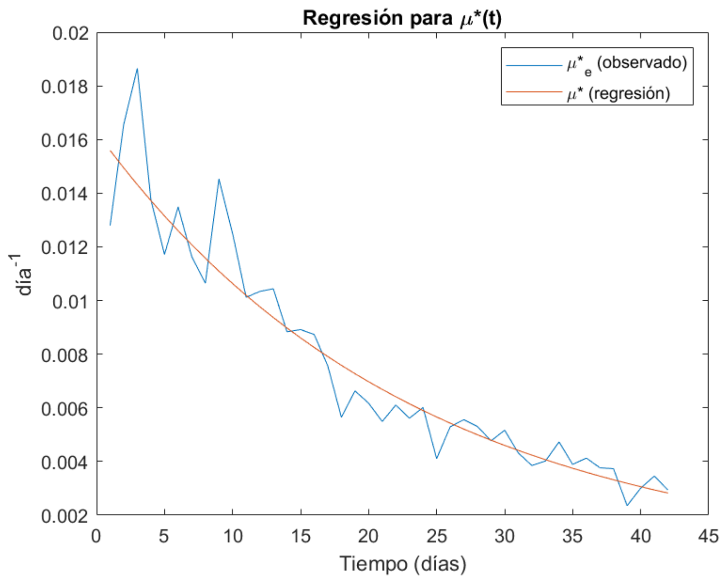

Figure 2: Tasa de mortalidad por la enfermedad frente al tiempo

2.2 Tasa de nacimientos y tasa de contagios

A pesar de que la tasa de nacimientos no es constante, su variación durante el año no es tan relevante como en la tasa de mortalidad, por lo que la suponemos constante.

$$\lambda(t) = 1,9 \cdot 10^{-5}$$

Para la tasa de mortalidad buscamos una función periódica $\mu(t)$ de la forma (5), sabiendo los valores máximo y mínimo, $\mu_{máx} = 3,62 \cdot 10^{-5}$ y $\mu_{min} = 2,53 \cdot 10^{-5}$.

$$\mu(t) = P + L\, cos(\eta t + \xi) \tag{5}$$

Sabemos que $\mu_{máx}$ se alcanza cuando $cos(\eta t + \xi) = 1$ y μ_{min} cuando $cos(\eta t + \xi) = -1$.

$$\begin{cases} \mu_{máx} = P + L = 3,62 \cdot 10^{-5} \\ \mu_{min} = P - L = 2,53 \cdot 10^{-5} \end{cases} \tag{6}$$

$$P = \frac{\mu_{máx} + \mu_{min}}{2} = 3,075 \cdot 10^{-5} \qquad L = \frac{\mu_{máx} - \mu_{min}}{2} = 5,45 \cdot 10^{-6}$$

También sabemos que $\mu_{máx}$ se alcanza el 4 de febrero, es decir, en $t = -45$ tomando $t = 0$ el 20 de marzo, y μ_{min} se alcanza el 10 de agosto, es decir, en $t = 143$. Conviene subrayar que se ha tenido en cuenta que 2020 es un año bisiesto.

$$\begin{cases} cos(-45\eta + \xi) = 1 \\ cos(143\eta + \xi) = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -45\eta + \xi = 0 \\ 143\eta + \xi = \pi \end{cases} \tag{7}$$

$$\eta = \frac{\pi}{188} \qquad \xi = \frac{45\pi}{188}$$

En la Figura 3 representamos la tasa de mortalidad frente al tiempo, desde antes del 4 de febrero hasta después del 10 de agosto del 2020. Comprobamos que es periódica y que se cumplen las condiciones de máximo y mínimo.

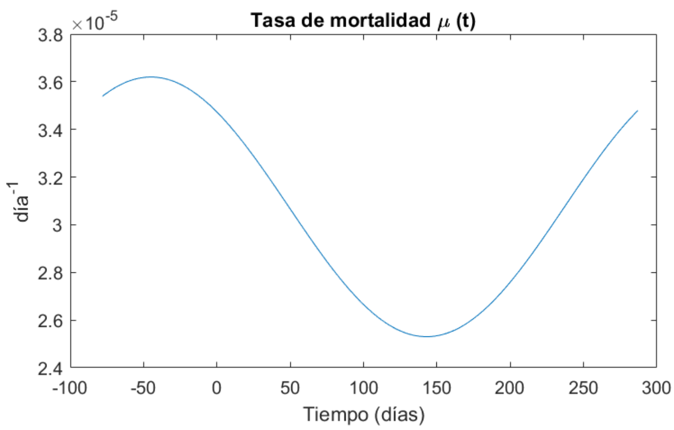

Figure 3: Tasa de mortalidad

2.3 Tasa de recuperación

Los valores diarios de las tasas de recuperación pueden calcularse con los datos proporcionados en el fichero Excel, a partir de la fórmula (8). Los cálculos se adjuntan en el script (tasarecuperacion.m).

$$\gamma(t) = \frac{r_e(t)}{I_e(t)} \tag{8}$$

Tomaremos como valor de γ en la calibración del modelo la media de las tasas de recuperación de los últimos 20 días.

$$\gamma = 0,0194$$

Al representar en la Figura 4 los valores diarios de las tasas de recuperación de los últimos 20 días, observamos que no siguen un patrón concreto, sino que oscilan de forma aleatoria en torno a su valor medio.

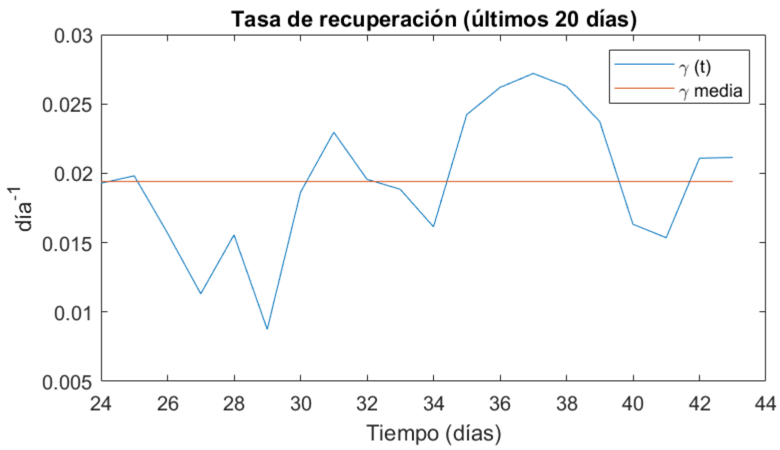

Figure 4: Tasa de repuperación

2.4 Estimaciones

Utilizando los parámetros calculados anteriormente, podemos integrar numéricamente el sistema de ecuaciones (1) en el intervalo [0,150], tomando como valores iniciales los datos proporcionados en el fichero de Excel para el día 0. Los cálculos se adjuntan en el archivo (estimaciones.m). En la Figura 5 se representan los infectados y recuperados en el intervalo [0,150] calculados mediante integración numérica.

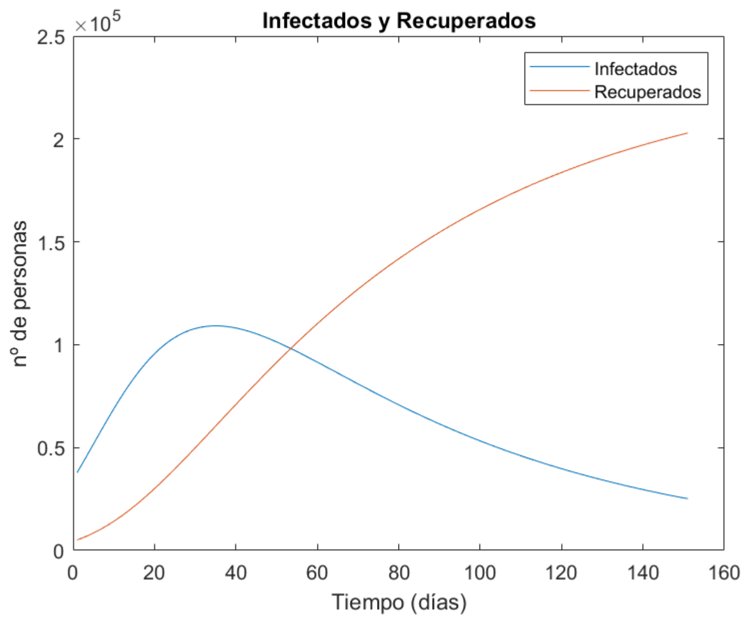

Figure 5: Infectados y recuperados frente al tiempo

En la Figura 6 se representa la evolución de los susceptibles en el intervalo [0,150] calculados mediante integración numérica. Hay que hacer notar que la variación no es tan pronunciada, ya que en la gráfica solo se representan los valores entre $6,015 \cdot 10^7$ y $6,05 \cdot 10^7$ personas.

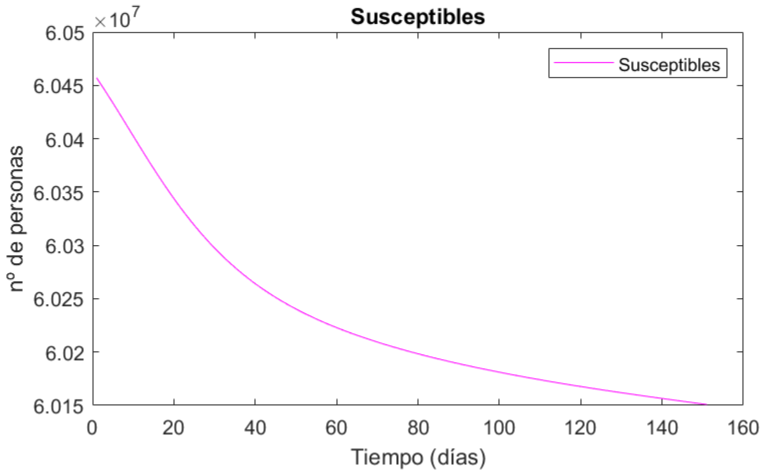

Figure 6: Susceptibles frente al tiempo

Todos los cálculos realizados para estimar los siguientes valores se adjuntan en el mismo programa (estimaciones.m).

1. Podemos calular el número de nuevos contagios diarios con la fórmula (9).

$$C(t) = \beta(t)S(t)I(t) \tag{9}$$

   Así, el número de personas que se han infectado en el periodo [0,150], debemos integrar numéricamente C en dicho intervalo y obtenemos un total C_T.

$$C_T = 216.737$$

2. Gracias a la integración numérica, tenemos los valores de las funciones $S(t)$, $I(t)$ y $R(t)$ en el intervalo [0,150], por lo que el número de habitantes cada día vendrá dado por $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$. El número de fallecidos a causa de la epidemia cada día vendrá dado por (10).

$$f^*(t) = \mu^*(t)I(t) \tag{10}$$

   Integrando en [0,150], obtenemos el valor total de fallecidos por la epidemia en dicho intervalo.

$$F_E = 30.790$$

   El número de fallecidos por otras causas cada día vendrá dado por $f(t) = \mu(t)N(t)$, e integrando obtenemos el número total de fallecidos por otras causas, 264.199. Sumando ambos valores, obtenemos el total de fallecidos en el intervalo [0,150].

$$F_T = 294.989$$

3. Llamemos R a la razón entre el número de defunciones por la epidemia y el número de personas que se han infectado en el periodo [0,150].

$$R = \frac{F_E}{C_T} = 0,1421$$

4. La población total el día 0 era $N(0) = 60.500.000$. La población total el día 150 es $N(150) = S(150) + I(150) + R(150) = 60.378.751$.

$$N(150) - N(0) = -121.249$$

   La población ha disminuido en 121.249 habitantes.

3 Predicción a partir del modelo calibrado

A partir del día 150, se observa una relajación del cumplimiento de las recomendaciones higiénico-sanitarias. Como consecuencia, la tasa de contagio aumenta lineamente desde $\beta(150) = 8,3078 \cdot 10^{-11}$ hasta $\beta(180) = 10\beta_0 = 8,26 \cdot 10^{-10}$. El parámetro β toma la forma (11) en el intervalo [150,180] de t. Para simplificar los cálculos, vamos a hacer un cambio de variable $t_2 = t - 150$, para considerar $t_2 = 0$ el primer día del aumento lineal.

$$\beta(t_2) = \frac{8,26 \cdot 10^{-10} - 8,3078 \cdot 10^{-11}}{30} t_2 + 8,3078 \cdot 10^{-11} = 2,47641 \cdot 100^{-10} t_2 + 8,3078 \cdot 10^{-11} \quad (11)$$

Asimismo, la tasa de mortalidad aumenta linealmente desde $2,4429 \cdot 10^4$ a $2\mu_0^* = 4,4 \cdot 10^{-4}$ en 30 días, según la expresión (12).

$$\mu^*(t_2) = \frac{4,4 \cdot 10^{-4} - 2,4429 \cdot 10^{-4}}{30} t_2 + 2,4429 \cdot 10^{-4} = 6,5237 \cdot 10^{-6} t_2 + 2,4429 \cdot 10^{-4} \quad (12)$$

Estos son los parámetros en el intervalo [0,30] de t_2, es decir, el intervalo [150,180] de t. A partir de ese momento, los valores de β y μ^* se estabilizan. Durante los 50 días siguientes, las tasas de contacto efectivo y de mortalidad por la enfermedad se mantienen constantes en los valores (13) y (14).

$$\beta(t) = 10\beta_0 = 8,26 \cdot 10^{-10} \quad (13)$$

$$\mu^*(t) = 2\mu_0^* = 4,4 \cdot 10^{-4} \quad (14)$$

De nuevo, mediante la integración numérica adjuntada en el archivo (predicciones.mlx) con la función (contagios.m), obtenemos la gráfica de la Figura 7, que representa el número de nuevos contagios diarios frente al tiempo t.

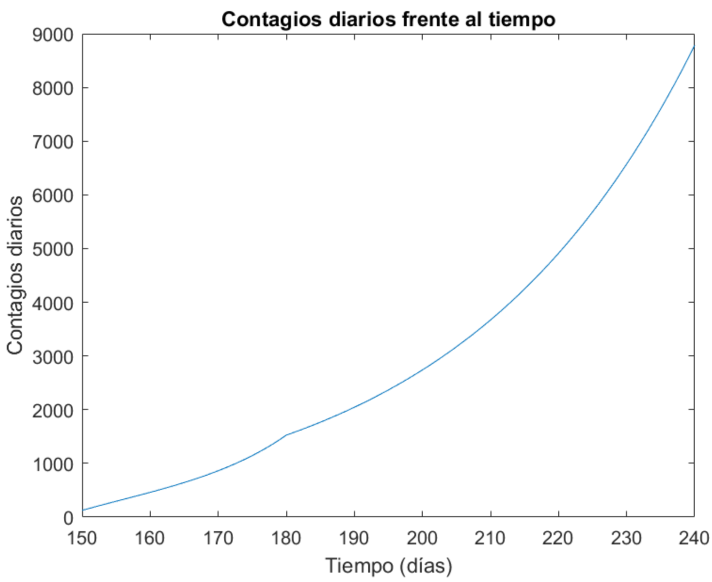

Figure 7: Contagios diarios frente al tiempo

Los 5.000 contagios diarios se superan en $t = 221$ días, que, tomando el 20 de marzo como $t = 0$, se corresponde con el 27 de octubre del 2020.

Por otro lado, la Figura 8 representa el número de fallecimientos diarios a causa de la epidemia frente al tiempo t. Los cálculos se han obtenido ejecutando el programa (predicciones.mlx) con la función (fallecidos.m).

Los 50 fallecimientos diarios por la enfermedad se superan en $t = 225$ días, que, tomando el 20 de marzo como $t = 0$, se corresponde con el 31 de octubre del 2020.

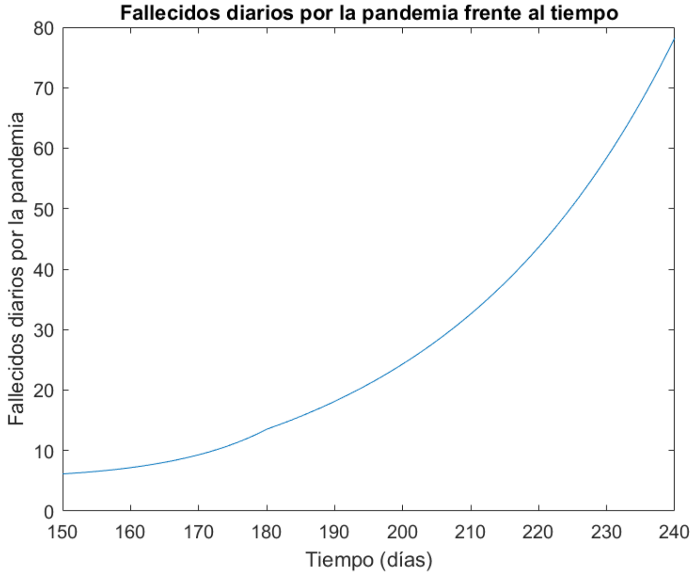

Figure 8: Fallecimientos diarios por la enfermedad frente al tiempo

A continuación, definimos la incidencia acumulada como el número de nuevos contagios producidos en los últimos 14 días por cada por 100.000 habitantes. Calculamos la incidencia acumulada para cada día en el intervalo [164,240] de t, en el archivo adjunto (predicciones.mlx) con la función (contagios.m). La Figura 9 representa la incidencia acumulada frente al tiempo en dicho periodo.

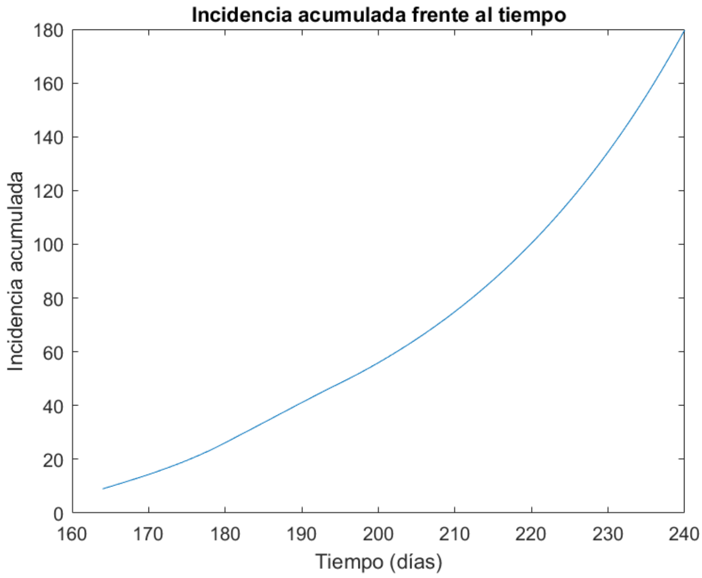

Figure 9: Incidencia acumulada frente al tiempo

La incidencia acumulada supera el umbral de 50 en $t = 197$ días, es decir, el 3 de octubre del 2020. Posteriormente, supera el umbral de 100 en $t = 220$, es decir, el 26 de octubre del 2020.

Por último, calculamos el número total de fallecidos por la enfermedad ($F_{T'}$) y de contagiados ($C_{T'}$) desde que se estabilizan los valores de β y μ^*, en $t = 180$ días. Esto lo hacemos sumando los fallecidos y contagios diarios, respectivamente, en dicho periodo. Los cálculos están adjuntos en el archivo (predicciones.mlx) con las funciones (contagios.m) y (fallecidos.m).

$$F_{T'} = 2.260 \qquad\qquad C_{T'} = 254.385$$

4 Modificación del primer modelo epidemiológico

En esta variación del modelo epidemiológico, vamos a añadir un grupo más, el de los asintomáticos. Los asintomáticos no enferman ni desarrollan síntomas, pero tienen la capacidad de contagiar a los susceptibles, produciendo o bien más asintomáticos, o bien infectados. El número de asintomáticos en el instante t será $A(t)$.

Las tasas de natalidad, mortalidad y mortalidad por la enfermedad funcionan igual que en el primer modelo, pero esta vez las consideraremos constantes en el tiempo para simplificar el sistema. El número de nacimientos por día en el instante t es $\lambda N(t) = \lambda S(t) + \lambda I(t) + \lambda R(t) + \lambda A(t)$, y todos los recién nacidos son susceptibles. El número de infectados fallecidos por día a causa de la enfermedad es $\mu^* I(t)$ y el número de infectados fallecidos por día por causas ajenas a la enfermedad en el instante t es $\mu I(t)$. Los números de susceptibles, recuperados y asintomáticos fallecidos por día en el instante t son, respectivamente, $\mu S(t)$, $\mu R(t)$, y $\mu A(t)$.

La tasa de contacto efectivo entre susceptibles e infectados para producir infectados es β_1, por lo que el número de personas que dejan de ser susceptibles y pasan a ser infectados en el instante t es $\beta_1 I(t)S(t)$. Además, la tasa de contacto efectivo entre susceptibles e infectados para producir asintomáticos es β_2, por lo que el número de personas que dejan de ser susceptibles y pasan a ser asintomáticos en el instante t es $\beta_2 I(t)S(t)$. La tasa de contacto efectivo entre susceptibles y asintomáticos para producir infectados es β_3, por lo que el número de personas que dejan de ser susceptibles y pasan a ser infectados en el instante t es $\beta_3 A(t)S(t)$. Finalmente, la tasa de contacto efectivo entre susceptibles y asintomáticos para producir asintomáticos es β_4, por lo que el número de personas que dejan de ser susceptibles y pasan a ser asintomáticos en el instante t es $\beta_4 A(t)S(t)$.

Por último, la tasa de recuperación γ se define como el número de recuperados por día y por infectado, por lo que el número de personas que dejan de ser infectados y pasan al grupo de recuperados por día es $\gamma I(t)$. Por otro lado, γ^* es el número de recuperados por día y por asintomático, por lo que el número de personas que dejan de ser asintomáticos y pasan a ser recuperados por día es $\gamma A(t)$.

Teniendo en cuenta todas estas condiciones, llegamos al sistema de ecuaciones (15), en el que $S'(t)$, $I'(t)$, $R'(t)$ y $A'(t)$ representan, respectivamente, las derivadas temporales de $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ y $A(t)$.

$$\left\{ \begin{array}{c} S'(t) = \lambda\left(S(t) + R(t) + I(t) + A(t)\right) - \left(\beta_1 + \beta_2\right) I(t)S(t) - (\beta_3 + \beta_4)A(t)S(t) - \mu S(t) \\ I'(t) = -\mu^* I(t) + \beta_1 S(t)I(t) + \beta_3 S(t)A(t) - \gamma I(t) \\ R'(t) = \gamma I(t) + \gamma^* A(t) - \mu R(t) \\ A'(t) = -\mu A(t) + \beta_2 S(t)I(t) + \beta_4 S(t)A(t) - \gamma^* A(t) \end{array} \right. \tag{15}$$

4.1 Integración y análisis del sistema de ecuaciones

Tras integrar numéricamente el sistema (15) en el archivo adjunto (modelo.m), obtenemos las gráficas de la Figura 9, con resultados coherentes.

En efecto, la gráfica decreciente de las personas susceptibles a lo largo del tiempo respalda la validez del modelo, además del continuo aumento de los recuperados reflejado en el crecimiento de la última gráfica.

Por otro lado, el razonamiento que explica la evolución de los asintomáticos es el siguiente. Si nos fijamos en la ecuación de $A'(t)$, vemos que $\beta_2 S(t)$ y $\beta_4 S(t)$ son del orden de 10^{-2}, mientras que $I(t)$ y $A(t)$ son del orden de 10^4 y 10^5, respectivamente. Por otro lado, μ es del orden de 10^{-5} y γ^* del orden de 10^{-2}. Vemos, por tanto, que los términos con mayor contribución son $\beta_4 S(t)A(t)$ y $\gamma^* A(t)$. Si consideramos que $\gamma^* = 7 \cdot 10^{-2}$ y $\beta_4 S(t) \approx 4 \cdot 10^{-2}$, el factor $(\beta_4 S(t) - \gamma^*)$ es negativo y, en consecuencia, es lógico que la gráfica de $A(t)$ sea inicialmente decreciente.

Salta a la vista la coherencia detrás de la gráfica de los susceptibles, ya que debido a la inexorable exposición a la enfermedad, gran parte de la población acaba pasando la enfermedad pasando de este grupo al de infectados o asintomáticos.

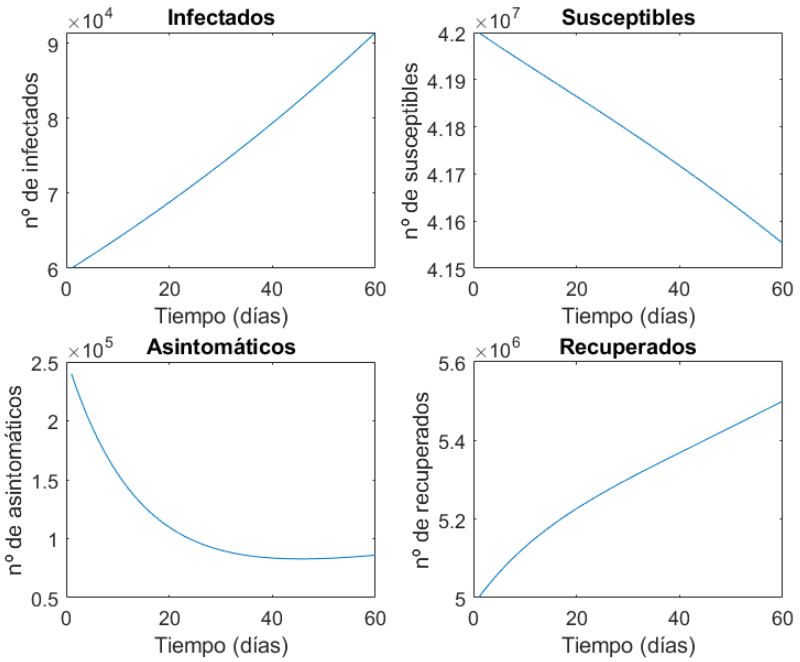

Figure 10: Infectados, Susceptibles, Asintomáticos y Recuperados frente al tiempo

4.2 Estimaciones con el modelo modificado

En el archivo (modelo.m) se adjunta el cálculo del número de personas que fallecerán por la epidemia por día durante los siguientes 60 días, mediante la fórmula (16).

$$F^*(t) = \mu^* I(t) \tag{16}$$

El número total de personas que fallecerán por la epidemia en los 60 días, $F_{T''}$, es la suma de todos ellos.

$$F^*_{T''} = 2.241$$

El número de contagiados por asintomáticos cada día se obtiene mediante la fórmula (17).

$$C_A(t) = (\beta_3 + \beta_4)A(t)S(t) \tag{17}$$

Tras integrar numéricamente a lo largo de 60 días obtenemos el valor de $C_{TA} = 59.375$ infectados por asintomáticos. De forma análoga, obtenemos el número de contagiados por infectados cada día mediante la fórmula (18).

$$C_I(t) = (\beta_1 + \beta_2)I(t)S(t) \tag{18}$$

Los contagiados por infectados suman en total $C_{TI} = 395.840$ contagiados. Esto nos deja un número total de personas que enfermerán en los siguientes 60 días, $C_{T''} = C_{TA} + C_{TI}$.

$$C_{T''} = 455.215$$

El porcentaje de contagiados por asintomáticos es, por tanto, $13,04\%$.

Para estimar cuántas personas podrán fallecer en los siguientes 60 días al ser contagiadas por personas asintomáticas, podemos calcular cada día el porcentaje de contagiados por asintomáticos y aplicarlo al número de fallecidos por la enfermedad de cada día. De esta manera, obtenemos un total de 284 fallecidos tras ser contagiados por asintomáticos. Otra manera más directa de calcularlo es aplicar el $13,04\%$ al número total de personas que han fallecido por la enfermedad $F^*_{T''}$, obteniendo 292 fallecidos tras ser contagiados por asintomáticos.

4.3 Estimaciones con red de rastreo

Se estima que la existencia de una red de rastreo tiene el efecto de disminuir las tasas de contacto efectivo.

$$\beta_{1'} = \frac{\beta_1}{2} \qquad \beta_{2'} = \frac{\beta_2}{2} \qquad \beta_{3'} = \frac{\beta_3}{10} \qquad \beta_{4'} = \frac{\beta_4}{10}$$

Volvemos a integrar el sistema (15) con los nuevos datos en el archivo adjunto (modelomod.m). Procediendo de la misma manera que en el apartado anterior, obtenemos los siguientes resultados.

En primer lugar, obtenemos que el número de personas que fallecerán por la epidemia en los 60 días pasa a ser 1.716. A continuación, tenemos que el número de contagiados por asintomáticos será 4.190, mientras que los contagiados por infectados pasan a ser 152.090, dejándonos un porcentaje de infectados por asintomáticos del $2,68\%$. Además, obtenemos que los fallecidos por haber sido infectados por asintomáticos serán 46.

En la Figura 11, se representan las mismas gráficas que en la Figura 10, pero teniendo en cuenta la red de rastreo. Se puede apreciar un cambio sustancial en la evolución de los infectados, que antes era una función creciente y ahora decreciente.

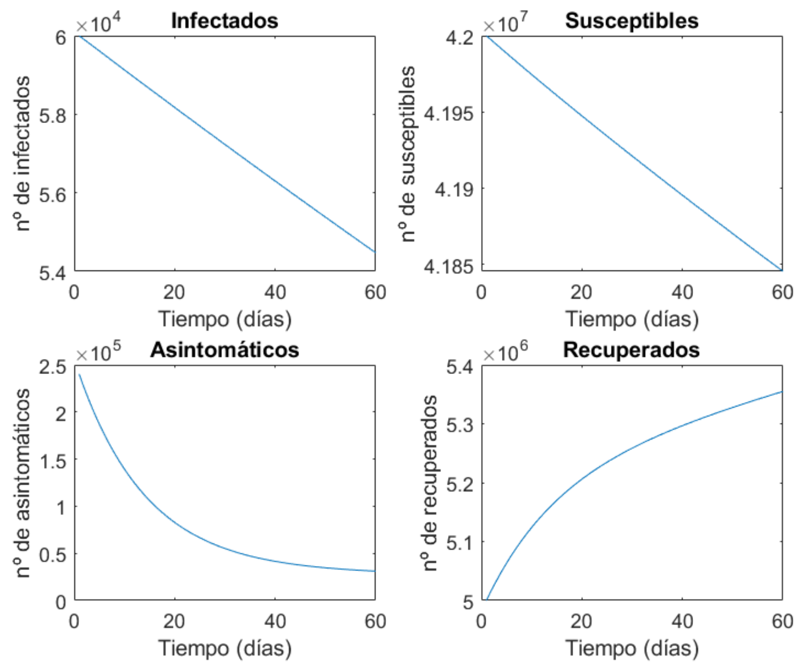

Figure 11: Infectados, Susceptibles, Asintomáticos y Recuperados frente al tiempo