

第一次作业

1. 请计算下面程序中循环语句的执行次数，并给出计算过程（要求是计算准确的次数而不是算法复杂度的阶，其中 n 为正整数）。

(1)

```
for (i = 1; i < n - 1; i++)
    for (j = n; j >= i; j--)
    {
        a[i][j] = 1;
    }
```

(2)

```
int i = n * n;
while (i != 1)
{
    i = i / 2;
}
```

(3)

```
int i = 0, s = 0;
do {
    i = i + 1;
    s = s + 10 * i;
} while ((i < n) && (s < n));
```

(4)

```
int i = 1;
while(i <= n)
{
    i = i * 2;
}
```

2. 证明

1) 对于任意实数 $a > b > 1$, $b^n = O(a^n)$, 但 $a^n \neq O(b^n)$ 。

2) $n! = O(n^n)$, 但 $n^n \neq O(n!)$

3) $\log(n!) = \Theta(n \log n)$

4) 如下，第一行给定 $T(N)$ 的迭代公式。 $T(N)$ 表示问题规模为 N 的算法运算步数，

$T(N/2)$ 表示问题规模为 $N/2$ 时候的算法运算步数。

请证明 $T(N)$ 的复杂度上界。

已知:
$$T(N) = T\left(\frac{N}{2}\right) + 1$$

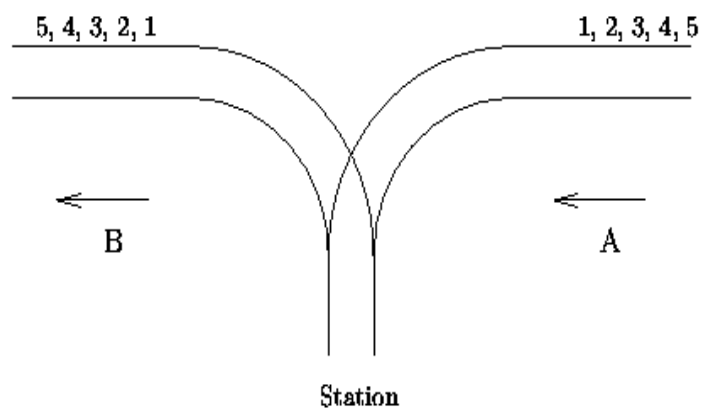
证明:
$$T(N) = O(\log N)$$

3. 设计一个算法,将数组 $A(0..n-1)$ 中的元素循环右移 k 位,假设原数组序列为 $a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}$; 移动后的序列为 $a_{n-k}, a_{n-k+1}, \dots, a_0, a_1, \dots, a_{n-k-1}$ 。要求只用一个元素大小的附加存储,元素移动或交换次数为 $O(n)$ 。例如, $n=10, k=4$, 则算法要求如下:

原始数组: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

右移 k 位后的数组: 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5

4. 已知一个单向链表 L , 请设计空间复杂度 $O(1)$ 的算法判断 L 是否有环, 并分析算法的时间复杂度。
5. 已知两个单链表 A 和 B 分别表示两个集合, 其元素递增排列, 编写算法求出 A 和 B 的交集 C , 要求 C 同样以元素递增的单链表形式存储。(伪代码就行, 要求: 分析代码的时间复杂度和空间复杂度)
6. 请利用两个栈 $S1$ 和 $S2$ 来模拟一个队列。已知栈的三个运算定义如下: $PUSH(ST, x)$: 元素 x 入 ST 栈; $POP(ST, x)$: ST 栈顶元素出栈, 赋给变量 x ; $Empty(ST)$: 判 ST 栈是否为空。那么如何利用栈的运算来实现该队列的三个运算: $enqueue$: 插入一个元素入队列; $dequeue$: 删除一个元素出队列; $queue_empty$: 判队列为空。(请写明算法的思想及必要的注释)。
7. (1) 编号为 $1, 2, \dots, n$ 的 n 辆火车顺序开进栈式结构的站台。禁止将车厢从缓冲铁轨移动至入轨, 也禁止从出轨移动车厢至缓冲铁轨。请问开出车站的顺序有多少种可能? 请写出你的推导过程。
- (2) 证明: 从初始输入序列 $1, 2, \dots, n$, 可以利用一个栈得到输出序列 p_1, p_2, \dots, p_n (p_1, p_2, \dots, p_n 是 $1, 2, \dots, n$ 的一种排列) 的充分必要条件是, 不存在下标 i, j, k , 满足 $i < j < k$ 同时 $p_j < p_k < p_i$ 。



8. 1) 试利用栈将中缀表达式 $12 * (8 * 9 - 10) - 11$ 转换成后缀式，写出每个步骤及每个步骤的栈的状态。
- 2) 利用栈计算上一题中得到的后缀表达式，写出每个步骤及每个步骤的栈的状态。