베이즈 모델

I. 나이브 베이즈 모델

II. 움퍼스 월드 다시 보기

I. 나이브 베이즈 모델

전체 결합 확률 분포

$$\boldsymbol{P}(Cause, \underbrace{Effect_1, \ldots, Effect_n}) = \boldsymbol{P}(Cause) \prod_i \boldsymbol{P}(Effect_i \mid Cause)$$

주어진 원인에 대해
조건부 독립

◆ 일반적으로 "효과" 변수들($Effect_1, \ldots, Effect_n$)이 엄격하게 독립적이지 않은 경우에도 잘 작동

추론

- 관측된 효과 : $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}$
- 관측되지 않은 효과: $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}$

효과의 조건부 독립

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(\mathit{Cause} \mid \boldsymbol{e}) &= \alpha \sum_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{P}(\mathit{Cause}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{y}) \\
&= \alpha \sum_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{P}(\mathit{Cause}) \boldsymbol{P}(\boldsymbol{y} \mid \mathit{Cause}) \overbrace{\left(\prod_{j} \boldsymbol{P}(e_j \mid \mathit{Cause}) \right)}^{\equiv \boldsymbol{P}(\boldsymbol{e} \mid \mathit{Cause})} \\
&= \alpha \boldsymbol{P}(\mathit{Cause}) \left(\prod_{j} \boldsymbol{P}(e_j \mid \mathit{Cause}) \right) \underbrace{\sum_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{y} \mid \mathit{Cause})}_{=1} \\
&= \alpha \boldsymbol{P}(\mathit{Cause}) \left(\prod_{j} \boldsymbol{P}(e_j \mid \mathit{Cause}) \right)
\end{aligned}
$$

효과가 조건부 독립이 아닐 때:

$$
\boldsymbol{P}(\mathit{Cause} \mid \boldsymbol{e}) = \alpha \boldsymbol{P}(\mathit{Cause}) \boldsymbol{P}(\boldsymbol{e} \mid \mathit{Cause})
$$

(cont'd)

$$P(Cause \mid e) = \alpha P(Cause)\left(\prod_j P(e_j \mid Cause)\right)$$

관측된 효과를 바탕으로 원인의 확률 분포를 계산:

- 가능한 모든 원인을 취함
- 각 원인 별로 관측된 모든 결과에 대한 조건부 확률의 곱과 사전 확률을 곱해 줌
- 결과를 정규화

- 관측된 결과의 개수에 대해서만 *선형으로 비례하여 시간 소요*
- 관측되지 않은 효과의 수는 얼마나 크든 상관 없음(예. 의학)

텍스트 분류

문제: 주어진 텍스트가 미리 정의된 일련의 클래스 또는 범주 중 어디에 속하는지 결정

"원인" → (신문의 섹션) *범주 카테고리*, e.g.,

{*news, sports, business, weather, entertainment* }

"결과" → *HasWord*$_i$: i^{th} 번째 키워드의 존재 또는 부재

예시 문장

1. *월요일 주식 상승. 주요 지수가 1% 상승하여 1분기 실적 시즌에 대한 낙관론 지속*

2. *월요일 동부 해안 대부분에 계속된 폭우로 뉴욕시 및 기타 지역에서 홍수 경보 발령*

각 문장을 범주에 맞게 분류

분류 (cont'd)

- 사전 확률: $\boldsymbol{P}(Category)$
- 조건부 확률: $\boldsymbol{P}(HasWord_i \mid Category)$

♣ $\boldsymbol{P}(Category = c) \approx$ 이전에 본 모든 문서 중 범주 c에 속하는 문서의 비율

$P(Category = weather) = 0.09$ // 9%의 기사가 날씨에 관한 것임

♣ $\boldsymbol{P}(HasWord_i \mid Category) \approx$ 각 범주에 속하는 문서 중 단어 i를 포함하는 문서의 비율

$P(HasWord_6 = true \mid Category = business) \approx 0.37$
// 비즈니스 분야의 기사 중 6번 단어인 “stocks”을
// 포함하는 기사의 비율은 37%

분류 알고리즘

- 문서 내용에 어떤 키워드(즉, 효과)가 나타나는지 확인

- 각 카테고리(즉, 원인)에 대한 사후 확률 분포 계산

$$\boldsymbol{P}(\mathit{Category} \mid \mathit{HasWords}) = \alpha \boldsymbol{P}(\mathit{Category}) \left(\prod_j \boldsymbol{P}(\mathit{HasWord}_j \mid \mathit{Category}) \right)$$

$$\textit{e.g., HasWords} = \underbrace{\mathit{HasWord}_1 = \mathit{true} \wedge \mathit{HasWord}_2 = \mathit{false} \wedge \cdots}_{\text{각 키워드 별 출현 여부}}$$

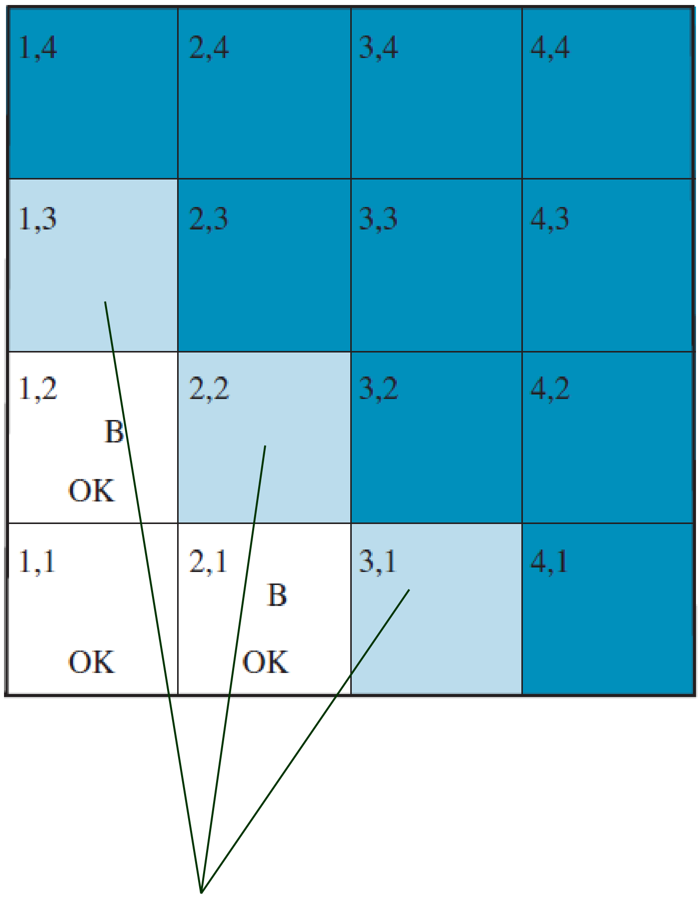
나이브 베이즈 모델의 다른 응용 사례

- ♦ 언어 판별(텍스트가 작성에 사용된 언어 감지)
- ♦ 스팸 필터링(스팸 이메일 식별)
- ♦ 감성 분석(소셜 미디어에서 고객의 긍/부정 감정 식별)
- ♦ 실시간 예측(고속 상황 예측)
- ♦ 추천 시스템(감지되지 않은 정보 필터링 및 사용자가 대상 자원을 좋아하는지 예측)

나이브 베이즈 모델이 사용되지 않는 분야

- ♠ 의료 진단 분야(더 복잡한 고급 모델 필요)

II. 움퍼스 월드 다시 보기



이 3개 방에 함정이 있을 수 있음

♠ 논리 추론으로는 어떤 방이 가장 안전할 가능성이 높은지 결론을 내릴 수 없음

♠ 논리적 에이전트가 취할 수 있는 방안은 3개 방 중 하나를 무작위로 선택하는 것

♦ 각 방 [1,3], [2,2], [3,1]에 구덩이가 있을 확률을 계산

- 함정은 모든 이웃하는 방에 바람을 일으킴
- [1, 1] 이외의 방에 구덩이가 있을 확률은 0.2

♦ 계산에 필요한 랜덤 변수 지정

- $P_{i,j}$: 방 [i, j]에 구덩이가 있는 경우 true
- $B_{i,j}$: 방 [i, j]에 바람이 부는 경우 true – 이미 방문한 방을 대상으로 함, 즉 [1,1], [1, 2], [2,1].

전체 결합 확률 분포

$\boldsymbol{P}(P_{1,1},\ldots,P_{4,4},B_{1,1},B_{1,2},B_{2,1}) =$

// $P_{1,1} \equiv$ false

$$\underbrace{\boldsymbol{P}(B_{1,1},B_{1,2},B_{2,1} \mid P_{1,1},\ldots,P_{4,4})}\ \underbrace{\boldsymbol{P}(P_{1,1},\ldots,P_{4,4})}$$

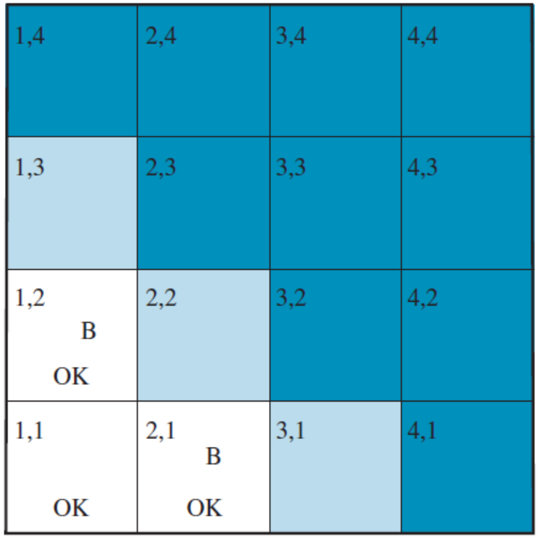
주어진 함정 구성에 대한 분포의 값은 방 [1,1], [1,2], [2,1] 중 바람이 부는 방이 함정 방과 인접한 경우 1이고, 그렇지 않으면 0

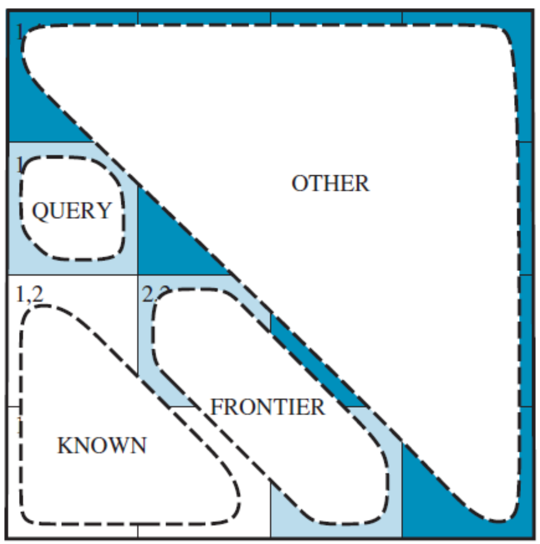
함정 구성의 사전 확률

$$\boldsymbol{P}(P_{1,1},\ldots,P_{4,4}) = \prod_{i,j=1,2}^{4,4} \boldsymbol{P}(P_{i,j})$$

15개 이하의 함정이 있는 구성의 경우 $0.2^n \times 0.8^{15-n}$

증거(Evidence)





$b = \neg b_{1,1} \wedge b_{1,2} \wedge b_{2,1}$

$known = \neg p_{1,1} \wedge \neg p_{1,2} \wedge \neg p_{2,1}$

Query $\mathbf{P}(P_{1,3} \mid known, b)$?

// 현재까지 관측된 내용을 바탕으로 [1,3]에 함정이 있을 확률은?

♦ *Unknown*: 알려진 세 개의 사각형과 쿼리 사각형 [1, 3]을 제외한 12개의 $P_{i,j}$ 집합

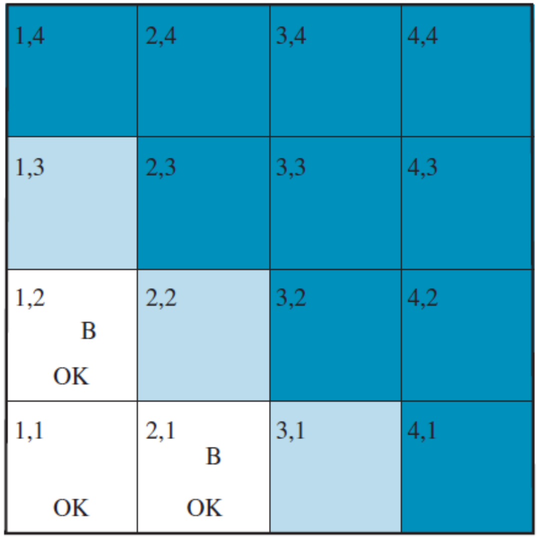
$$\mathbf{P}(P_{1,3} \mid known, b) = \alpha \sum_{unknown} \mathbf{P}(P_{1,3}, known, b, unknown)$$

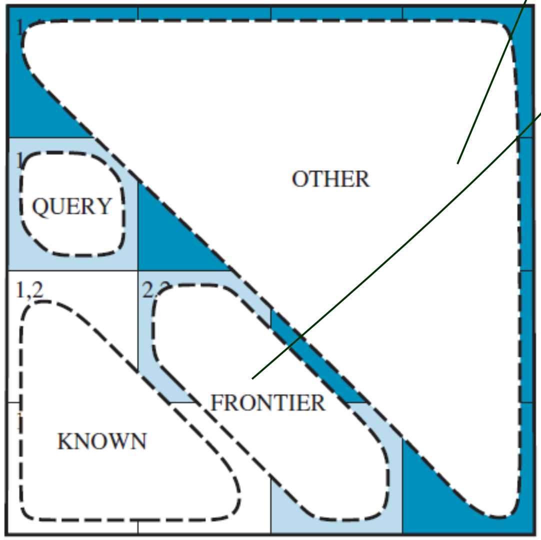
$\in \{(p_{1,4}, p_{2,2}, \ldots, p_{4,4}), \ldots, (\neg p_{1,4}, \neg p_{2,2}, \ldots \neg p_{4,4})\}$

♠ 2^12=4096개의 항에 대한 합 (전체 결합 확률을 알고 있다는 전제하에)

방의 개수에 지수적으로 비례하여 증가!

고려하지 않아도 되는 방들?





Frontier: 방문한 방에 인접한 방들에 대한 함정 변수

[2,2] and [3,1]

Other: 그 외의 미지의 방들에 대한 함정 변수

10개의 다른 방들이 존재

Unknown = *Frontier* ∪ *Other*

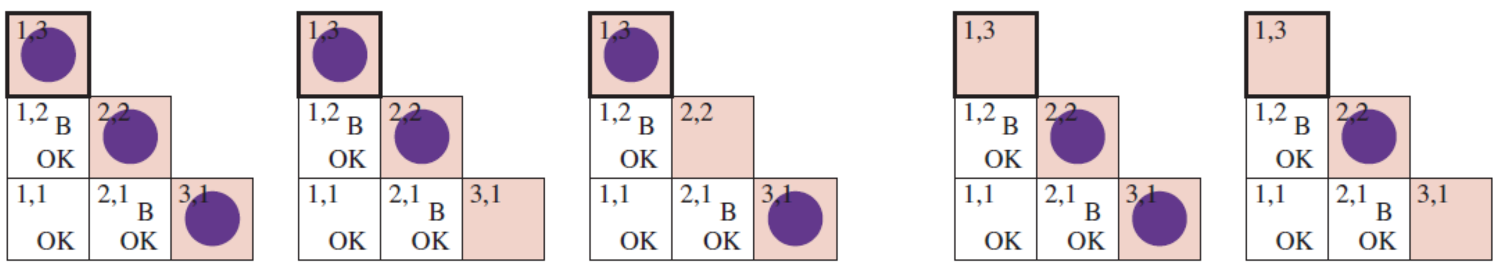
Insight: KNOWN, QUERY, FRONTIER가 알려진 상태에서 바람이 관찰된 경우, 이는 Other에 대해 조건부 독립인 사상이 됨

함정이 있을 확률

$$\mathbf{P}(P_{1,3} \mid known,\ b) = \alpha' \mathbf{P}(P_{1,3}) \sum_{frontier} \underbrace{\mathbf{P}(b \mid P_{1,3}, known, frontier)}_{=\ 1 \text{ or } 0} P(frontier)$$

- ♣ 분포 $\mathbf{P}(b \mid P_{1,3}, known, frontier)$에서의 확률은 b가 P_1,3의 값 및 "frontier"에 있는 변수들과 연관되는 경우에는 1이고, 그렇지 않으면 0
- ♣ P_1,3에 대한 모든 값에 대해, *known 상태에 부합하는* frontier 변수에 대한 논리 모델들의 합산

$Frontier = \{P_{2,2}, P_{3,1}\}$에 부합하는 5개의 모델:



$0.2 \times 0.2 = 0.04$ $0.2 \times 0.8 = 0.16$ $0.8 \times 0.2 = 0.16$ $0.2 \times 0.2 = 0.04$ $0.2 \times 0.8 = 0.16$

$b = \neg b_{1,1} \wedge b_{1,2} \wedge b_{2,1}$

$known = \neg p_{1,1} \wedge \neg p_{1,2} \wedge \neg p_{2,1}$

$$\mathbf{P}(P_{1,3} \mid known,\ b) = \alpha' \langle 0.2(0.04 + 0.16 + 0.16), 0.8(0.04 + 0.16) \rangle$$

$$\approx \langle 0.31, 0.69 \rangle$$

[1,3] 은 31% 의 확률로 함정임