Zusammenfassung ISEM

Sebastian Bechtel

10. März 2017

1 Halbgruppentheorie

1.1 Varianten von Hille-Yosida

Ziel dieses Abschnitts ist es, verschiedene Varianten von Hille-Yosida darzustellen und deren Verbindung zu untersuchen.

Ist $T(t)$ eine C0-Halbgruppe, so gibt es bekanntlicherweise $M \geq 1$ sowie $\omega \in \mathbb{R}$ mit $\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$. Die Wahl von M und ω ist dabei nicht eindeutig. Damit $T(t)$ eine Kontraktionshalbgruppe sein kann, ist es notwendig, dass $M = 1$ realisierbar ist. Ist $\omega \leq 0$, so ist die Halbgruppe beschränkt, und generell macht ω eine Aussage über die Asymptotik der Halbgruppe.

Sei nun A dicht definierter, abgeschlossener Operator auf einem Banachraum X.

In einer einfachsten Variante von Hille-Yosida gelte $M = 1$ und $\omega = 0$. Dann ist A genau dann Generator einer Kontraktionshalbgruppe $T(t)$, wenn $(0, \infty) \subset \rho(A)$ und $\|(A - \lambda)^{-1}\| \leq 1/\mathrm{Re}\lambda$ für $\mathrm{Re}\lambda > 0$.

Diese Variante ist äquivalent zu einer Version mit $\omega \in \mathbb{R}$: Dann ist A genau dann Generator einer C0-Halbgruppe $T(t)$ mit $\|T(t)\| \leq \mathrm{e}^{\omega t}$, wenn $(\omega, 0) \subset \rho(A)$ und $\|(A - \lambda)^{-1}\| \leq 1/(\lambda - \omega)$ für $\lambda > \omega$.

Dazu wird das Spektrum des Operators verschoben bzw. die Halbgruppe skaliert und jeweils das andere Resultat angewandt. Es gilt $\rho(A + \omega) = \rho(A) + \omega$ und der Generator von $\mathrm{e}^{\omega t}T(t)$ ist $A + \omega$, denn

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\mathrm{e}^{\omega t}T(T)x - x\right) = \lim_{t\to 0} \mathrm{e}^{\omega t}\frac{1}{t} \left(T(t)x - x\right) + \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\mathrm{e}^{\omega t}x - x\right) = Ax + \omega x.$$

Es drängt sich die Frage auf, ob $M = 1$ eine Einschränkung ist, oder dies durch hochdrehen von ω immer zu erreichen ist. Die Antwort ist negativ: Betrachte auf $L^1(\mathbb{R})$ eine Linkstranslationshalbgruppe mit Sprung: $(T(t)f)(s) = 2f(s + t)$ für $s \in [-t, 0]$, sonst $(T(t)f)(s) = f(s + t)$. Es gilt $\|T(t)\| = 2$ für $t > 0$ (betrachte $\chi_{[0,t]}$), somit ist $M = 1$ nicht möglich, da $\mathrm{e}^{\omega t} \geq 2$ für alle $t > 0$ für kein ω gilt.

Für diese extra Freiheit bezahlen wir mit signifikant höheren Anforderungen an die Resolventenabschätzung. Es ist A Generator einer C0-Halbgruppe mit $\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega t}$ genau dann, wenn $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ und $\|(A - \lambda)^{-n}\| \leq M/(\lambda - \omega)^n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda > \omega$.

Für $M = 1$ erhalten wir die zweite Variante aus dieser, wenn wir nur die Resolventenabschätzung für $n = 1$ berücksichtigen und diese Variante erhalten wir aus der zweiten, wenn wir die Potenzen der Resolvente mit der Submultiplikativität der Norm abschätzen.

1.2 Motivation für die allgemeine Version anhand der Hille-Approximation

Die Hille-Approximation ist gegeben durch

$$\mathrm{e}^{tA} = \lim_n (n/tR(n/t, A))^n.$$

D.h. wir brauchen $(0, \infty) \subset \rho(A)$, damit die vorkommenden Resolventen überhaupt existieren und aus der Resolventenabschätzung folgt

$$\|(n/tR(n/t, A))^n\| \leq (n/t)^n \|R(n/t, A)^n\| \leq (n/t)^n (n/t)^{-n} = 1,$$

also beschränkt, was eine konvergente Folge auch leisten sollte.

1.3 Beispiele: analytisch und C0 implizieren sich gegenseitig nicht

Wir betrachten auf $C_b(\mathbb{R})$ die Linkstranslationshalbgruppe. Deren Generator ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. Sei $f \in C_b(\mathbb{R}) \setminus C_b^1(\mathbb{R})$, dann ist $T(t)f \notin D(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})$ und somit kann die Halbgruppe nicht analytisch sein.
Betrachten wir die G.W.-Halbgruppe auf $C_b(\mathbb{R})$, so ist diese analytisch, aber nicht stark stetig. Jedoch erhalten wir durch Einschränkung auf $BUC(\mathbb{R})$ eine C0-Halbgruppe.

2 Variation der Konstanten

Wir wollen $\partial_t u = \Delta u + g$ mit Anfangswert $u_0 = f$ lösen. Dazu machen wir einen Ansatz über Variation der Konstanten. Die Lösung zum homogenen Problem $\partial_t v = \Delta v$ mit $v_0 = f$ ist gegeben durch $v = T(t)f$. Das f ist nun in der Rolle der zu variierenden Konstante. Wir machen den Ansatz $u(t) = T(t)f(t)$. Es soll also gelten:

$$\Delta u + g = \partial_t u = \Delta T(t)f(t) + T(t)f'(t) = \Delta u(t) + T(t)f'(t).$$

Also benötigen wir $g = T(t)f'(t)$. Wir erheben kurz $T(t)$ zur Operatorgruppe und erhalten die Gleichung $f'(t) = T(-t)g$ und erhalten durch aufintegrieren $f(t) = f(0) + \int_0^t T(-s)g(s)\mathrm{d}s$. Durch einsetzen in unseren Ansatz erhalten wir unter Berücksichtigung von $f(0) = f$ die Lösungsformel

$$u(t) = T(t)f + \int_0^t T(t-s)g(s)\mathrm{d}s.$$

3 parabolische Gleichungen

3.1 Einleitung

Unser finales Resultat wird sein, dass wir für ein beschränktes Gebiet Ω mit genügend glattem Rand das Cauchy-Problem $\partial_t u - \mathcal{A}u = g$ mit Anfangswert $u(0) = f$ und homogenem Dirichlet-Rand auf $[0,t] \times \overline{\Omega}$ lösen werden. Auf dem Weg dort hin werden wir sowohl einfachere Geometrien in Form von Ganzraum und Halbraum betrachten, sowie mit dem Δ als Prototypen für gleichmäßig elliptische Operatoren starten.

Neben inhomogenen Problemen in beschränkter Zeit wie oben werden wir auch homogene Probleme in unbeschränkter Zeit betrachten, die unter den Rahmen der Halbgruppentheorie fallen, z.B. $\partial_t u - \mathcal{A}u = 0$ auf $[0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ mit Anfangswert $u(0) = f$, wobei $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$. Hierbei wird das inhomogene Problem der Schlüssel sein und gewissermaßen die Rolle des elliptischen Problems in der bekannten Theorie einnehmen...

3.2 Ganzraum

3.2.1 homogen mit Δ

Wir betrachten die Gleichung $\partial_t u = \Delta u$ auf $[0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ mit Anfangswert $u(0,x) = f(x)$ für $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$. Die Gauß-Weierstraß Halbgruppe liefert für jedes f eine Lösung der Gleichung. Die Halbgruppe ist analytisch und eingeschränkt auf $BUC(\mathbb{R}^d)$ stark-stetig.

3.2.2 inhomogen mit Δ

Aus der homogenen Lösung erhalten wir via Variation der Konstanten (siehe oben!) eine Lösung der inhomogenen Gleichung $\partial_t u - \Delta u = g$ auf $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ mit Anfangswert $u(0,x) = f(x)$, wobei $g \in C_b^{\alpha/2,\alpha}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ und $f \in C_b^{2+\alpha}(\mathbb{R}^d)$. Für die Lösung gilt $u \in C_b^{1+\alpha/2,2+\alpha}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ (man beachte, dass die Regularität - im Gegensatz zum inhomogenen Halbgruppensetting - bis in die 0 geht, was daran liegt, dass der Anfangswert selbst, im Vergleich zu $C_b(\mathbb{R}^d)$, regulär genug ist) und es gilt die Schauder-Abschätzung

$$\|u\|_{C_b^{1+\alpha/2,2+\alpha}([0,T]\times\mathbb{R}^d)} \leq C\left(\|f\|_{C_b^{2+\alpha}(\mathbb{R}^d)} + \|g\|_{C_b^{\alpha/2,\alpha}([0,T]\times\mathbb{R}^d)}\right).$$

Aus der Abschätzung folgt Stetigkeit und Injektivität des Lösungsoperators. Da Anwendung von $(\partial_t - \Delta)$ sowie Auswertung in $t = 0$ auf eine Funktion aus $C_b^{1+\alpha/2,2+\alpha}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ Daten der benötigten Regularität liefert, ist der Lösungsoperator auch surjektiv, also ein Isomorphismus der Banachräume.

3.2.3 inhomogen mit $\mathcal{A}$

Nun wollen wir in der obigen Gleichung Δ durch einen allgemeinen gleichmäßig elliptischen Operator $\mathcal{A}$ mit α-Hölder-stetigen Koeffizienten ersetzen. Der inverse Operator des obigen Problems mit Δ ist der Datenoperator $u \mapsto (\partial_t u - \Delta u, u(0,\cdot))$. Dessen Invertierbarkeit wollen wir per Stetigkeitsmethode auf den Datenoperator mit $\mathcal{A}$ anstelle von Δ hochziehen. Dazu zeigen wir eine apriori-Abschätzung für $\mathcal{A}$ der Form

$$\|u\|_{C_b^{1+\alpha/2,2+\alpha}([0,T]\times\mathbb{R}^d)} \leq C\left(\|\partial_t u - \mathcal{A}u\|_{C_b^{\alpha/2,\alpha}([0,T]\times\mathbb{R}^d)} + \|u(0,\cdot)\|_{C_b^{2+\alpha}(\mathbb{R}^d)}\right),$$

wobei C nur von Schranken an die Elliptizitätskonstante μ und die α-Hölder-Normen der Koeffizienten abhängt. Wir zeigen die Abschätzung zuerst für eine konstante Koeffizientenmatrix und verallgemeinern dann durch Einfrieren der Koeffizienten. Nun können wir das Segment $\mathcal{A}_\sigma = (1-\sigma)\Delta + \sigma\mathcal{A}$ untersuchen und stellen fest, dass diese Operatoren alle gleichmäßig elliptisch sind und die Elliptizitätskonstante sowie die α-Hölder-Normen der Koeffizienten unabhängig von σ sind. Wir erhalten also aus der oben formulierten apriori-Abschätzung eine uniforme Konstante und erhalten aus der Stetigkeitsmethode die Invertierbarkeit des Datenoperators mit $\mathcal{A}$ und somit die eindeutige Lösbarkeit des inhomogenen Problems mit $\mathcal{A}$.

3.2.4 Stetigkeitsmethode

Sind X, Y Banachräume, $T_0, T_1 : X \to Y$ stetig und es gibt eine Konstante $C > 0$ mit $\|x\|_X \leq C\|T_\sigma x\|_Y$ wobei $T_\sigma = (1-\sigma)T_0 + \sigma T_1$ für $\sigma \in [0,1]$. Dann ist T_σ invertierbar für alle σ genau dann, wenn es für ein σ invertierbar ist.

„Gegenbeispiel“, falls die Konstante nicht unabhängig von σ ist: $X = Y$ ist beliebiger Banachraum, $T_0 = 0$ und $T_1 = 1$. Dann ist für T_σ eine solche Konstante durch σ gegeben, aber T_0 ist nicht invertierbar, jedoch T_σ für $\sigma \in (0,1]$.

3.2.5 a priori Abschätzung durch Einfrieren der Koeffizienten

Um die Stetigkeitsmethode anwenden zu können, brauchen wir eine apriori Abschätzung. Diese zeigen wir zuerst für einen Operator $\mathrm{Tr}(Q\mathrm{D}^2)$ mit Q positiv definit. Wir wollen eine Abschätzung für den allgemeinen Operator $\mathcal{A}u = \mathrm{Tr}(Q(x)\mathrm{D}^2u) + \langle b(x), Du\rangle + c(x)u$ erhalten, indem wir $\mathcal{A}$ in die Abschätzung für $\mathrm{D}_t u - \mathcal{A}_{x_0}$ einschieben, wobei $\mathcal{A}_{x_0}u \coloneqq \mathrm{Tr}(Q(x_0)\mathrm{D}^2u$:

$$\begin{aligned}\|u\|_{C^{1+\alpha/2,2+\alpha}([0,T]\times\mathbb{R}^d)} \leq C\big(&\|\mathrm{D}_t u - \mathcal{A}u\|_{C^{\alpha/2,\alpha}([0,T]\times\mathbb{R}^d)} + \|\mathcal{A}_{x_0}u - \mathcal{A}u\|_{C^{\alpha/2,\alpha}([0,T]\times\mathbb{R}^d)} \\ &+ \|u(0,\cdot)\|_{C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^d)}\big).\end{aligned}$$

Die Norm $\|\mathcal{A}_{x_0}u - \mathcal{A}u\|_{C^{\alpha/2,\alpha}([0,T]\times\mathbb{R}^d)}$ würden wir gerne durch $\varepsilon\|u\|_{C^{1+\alpha/2,2+\alpha}([0,T]\times\mathbb{R}^d)}$ abschätzen, um diesen Term nach links schieben zu können.
Durch Lokalisierung von u via Cutoff-Funktion auf $B_r(x_0)$ kriegen wir dies auch hin (mit $\varepsilon = r^\alpha$), allerdings auf Kosten eines Terms $r^{-2-\alpha}\|u\|_{C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^d)}$ (dieser entspringt dem Müllterm bei Anwendung von $\mathcal{A}_{x_0}$ auf das lokalisierte u).
Mit einem Lemma im Peter&Paul-Style erhält man die Abschätzung

$$\|u\|_{C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon\|u\|_{C^{1+\alpha/2,2+\alpha}([0,T]\times\mathbb{R}^d)} + C\big(\|\mathrm{D}_t u - \mathcal{A}u\|_{C_b([0,T]\times\mathbb{R}^d)} + \|u(0,\cdot)\|_{C_b(\mathbb{R}^d)}\big),$$

somit kann man erst durch fixieren eines kleinen r_0 die $C^{1+\alpha/2,2+\alpha}$-Norm nach links schieben und dann durch Anwendung des Lemmas dies ebenso mit der $C^{1,2}$-Norm machen.

3.2.6 homogen mit $\mathcal{A}$

Wir betrachten wieder ein homogenes Problem in unbeschränkter Zeit, und zwar $\partial_t u = \mathcal{A}u$ auf $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ mit $u(0,x) = f(x)$, wobei $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$. Dieses besitzt eine Lösung $u \in C^{1,2}([0,\infty)\times\mathbb{R}^d) \cap C([0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ wobei zusätzlich $u \in C_b([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ sowie $u \in C^{1+\alpha/2,2+\alpha}_{\mathrm{loc}}((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ gilt. Die ersten beiden Aussagen machen u zu einer klassischen Lösung (insbesondere Gleichung punktweise formulierbar und Anfangswert durch Stetigkeit in der 0 sinnvoll), die Beschränktheit bei beschränkter Zeit geht über Stetigkeit hinaus, da es keine Kompaktheit im Ort gibt und die lokale Hölderregularität kommt aus der Konstruktion als lokal gleichmäßiger Limes von Lösungen des inhomogenen Problems via Arzela-Ascoli. Die Lösung kann wieder mit einer Halbgruppe assoziiert werden, die auf $C_b(\mathbb{R}^d)$ analytisch und auf $BUC(\mathbb{R}^d)$ stark-stetig ist.

3.3 Halbraum

Wir betrachten nun analoge Probleme zum obigen Fall, jedoch nun auf dem Halbraum $\mathbb{R}^d_+$, sodass wir zusätzlich einen Randwert vorschreiben können, der bei uns immer der homogene

Dirichletrandwert sein wird.

3.3.1 inhomogen mit Δ

Wir untersuchen nun die Gleichung $\partial_t u - \Delta u = g$ auf $[0,T] \times \overline{\mathbb{R}^d_+}$ mit $u(0,x) = f(x)$ sowie $u(t,x) = 0$ für $t \in [0,\infty), x \in \partial\mathbb{R}^d_+$, wobei $f \in C_b^{2+\alpha}(\overline{\mathbb{R}^d_+})$ und $g \in C_b^{\alpha/2,\alpha}([0,T] \times \overline{\mathbb{R}^d_+})$ mit $f = \Delta f = g(t,\cdot) = 0$ auf $\partial\mathbb{R}^d_+$ (notwendig ist lediglich $f = g(t,\cdot) + \Delta f = 0$ auf $\partial\mathbb{R}^d_+$, später wird auf diese natürlichere Bedingung abgeschwächt). Wir erhalten eine eindeutige Lösung $u \in C_b^{1+\alpha/2,2+\alpha}([0,T] \times \overline{\mathbb{R}^d_+})$ sowie eine Schauderabschätzung. Zur Lösung werden die Daten ungerade auf den Ganzraum fortgesetzt und das entsprechende Ganzraumresultat angewandt. Für die Lösung dessen zeigt man dann, dass die Randwertbedingung erfüllt ist.

3.3.2 homogen mit Δ

Wie bereits im Ganzraumfall erhalten wir eine Halbgruppe auf $C_b(\overline{R^d_+})$ für die Gleichung $\partial u = \Delta u$ auf $[0,\infty) \times \overline{\mathbb{R}^d_+}$ mit $u(0,x) = f(x)$. Der Beweis verläuft analog zu jenem auf dem Ganzraum, jedoch nun mit dem inhomogenen Resultat für den Halbraum.

3.3.3 inhomogen mit $\mathcal{A}$

Mit viel Technik erhalten wir eindeutige Lösbarkeit des Cauchyproblems auf dem Halbraum mit gleichmäßig elliptischem Operator $\mathcal{A}$ und der natürlichen Bedingung an Inhomogenität und Anfangswert, nämlich $f = g(0,\cdot) + \mathcal{A}u = 0$ auf $\partial\mathbb{R}^d_+$.

3.4 beschränktes Gebiet

Wir betrachten das inhomogene Cauchyproblem auf einem beschränkten Gebiet Ω mit $C^{2+\alpha}$-Rand. Wir überdecken den Rand des Gebiets mit Karten in den Halbraum, endlich viele davon reichen wegen Beschränktheit des Gebiets. Die Diffeomorphismen transformieren den Operator auf einem Teil des Rands zu einem Operator auf einer Halbkugel im Halbraum. Durch die Randregularität des Gebiets sind die Koeffizienten α-Hölder-stetig. Sowohl die Randoperatoren als auch den Operator im inneren des Gebiets setzen wir durch eine Cut-Off Funktion mit Δ fort, sodass wir einen elliptischen Operator auf Halb- bzw. Ganzraum erhalten (der Laplace ist quasi Fortsetzung durch 1). Nun können wir unsere Halbraum- und Ganzraumresultate anwenden, um eine Lösung auf dem Gebiet (durch „zusammensetzen“ der Einzellösungen mit Zerlegung der Eins) zu erhalten.

3.5 Ornstein-Uhlenbeck Operator

Wir betrachten zunächst den Operator $\mathrm{Tr}(Q\mathrm{D}^2 u(t,x)) + \langle Bx, \mathrm{D}u(t,x)\rangle$ mit konstanten Matrizen Q, B, wobei Q symmetrisch und positiv definit sowie $B \neq 0$, also $b(x) := Bx$ unbeschränkt. Definiere $Q_t := \int_0^t \mathrm{e}^{sB}\, Q\, \mathrm{e}^{sB^*}\, \mathrm{d}s$. Für B schiefsymmetrisch (wie im Fall von $\mathcal{A} = \Delta$, also $B = 0$) gilt $Q_t = tQ$. Definiere den Kolmogorov-Kern via

$$k_t(z) := (4\pi)^{-d/2} (\det Q_t)^{-1/2}\, \mathrm{e}^{-1/4\langle Q_t^{-1} z, z\rangle}\,.$$

Im Fall von $\mathcal{A} = \Delta$, also $Q = 1$, reduziert sich der Kolmogorov-Kern zum Gauß-Weierstraß-Kern. Dann ist die Lösung der Gleichung für $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ gegeben durch Faltung mit dem Kolmogorov-Kern ausgewertet in $\mathrm{e}^{tB}\, x$, also $u(t,x) := (k_t * f)(\mathrm{e}^{tB}\, x)$.

Die Lösung ist eindeutig, also definiert $(T_{OU}(t)f)(x) := (k_t * f)(\mathrm{e}^{tB}\, x)$ eine Halbgruppe auf $C_b(\mathbb{R}^d)$. Diese glättet,also ist die Halbgruppe nicht stark stetig auf $C_b(\mathbb{R}^d)$ mit dem gleichen Argument wie für die Gauß-Weierstraß-Halbgruppe. Auch auf $BUC(\mathbb{R}^d)$ ist sie nicht stark stetig, $T_{OU}(t)f$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen f, wenn $f \in BUC(\mathbb{R}^d)$ und $f(\mathrm{e}^{tB}\,\cdot) \to f$ gleichmäßig. Dass die Halgruppe nicht C0 ist, ist dem Raum zuzuschreiben, auf $L^p(\mathbb{R}^d)$ wird nämlich eine stark stetige Halbgruppe definiert.

Analytisch ist sie auch nicht. Auf $L^p(\mathbb{R}^d)$ sieht man dies daran, dass das Spektrum eine Halbebene enthält. Idee des Beweises: $T_{OU}(t)$ lässt $BUC(\mathbb{R}^d)$ invariant, also wäre auch Einschränkung auf $BUC(\mathbb{R}^d)$ analytisch, dort führt man die Beschränktheit der Operatoren der Halbgruppe zum Widerspruch.

Man kann auch hier wieder das inhomogene Problem in beschränkter Zeit betrachten: $\mathrm{D}_t u - \mathcal{A}u = g$ auf $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ sowie $u(0,x) = f(x)$. Da die Zeitableitung der Lösung keine Hölderregularität hat (nicht mal beschränkt über $\mathbb{R}^d$), kann man die Forderung an g relaxieren zu $g \in \mathrm{C}_\mathrm{b}^{0,\alpha}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$, allerdings weiterhin mit $f \in \mathrm{C}_\mathrm{b}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^d)$. Die Lösung ist dann $u \in \mathrm{C}^{1,2}((0,T]\times\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{C}_\mathrm{b}^{0,2+\alpha}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ und ist eindeutig. Außerdem gibt es eine Schauderabschätzung.

3.6 allgemeinere elliptische Operatoren mit unbeschränkten Koeffizienten

Wir betrachten nun wieder Operatoren der Form $\mathcal{A}u = \mathrm{Tr}(Q(x)\mathrm{D}^2 u) + \langle b(x), \mathrm{D}u\rangle + c(x)u$, wobei nun alle Koeffizienten nurnoch $\mathrm{C}^\alpha_\mathrm{loc}(\mathbb{R}^d)$ sein müssen und $Q(x)$ nicht mehr eine gemeinsame Elliptizitätskonstante haben muss, sondern diese durch eine stetige Funktion $\kappa : \mathbb{R}^d \to (0,\infty)$ gegeben ist, diese also nach 0 degenerieren kann (dies umgehen wir später dadurch, dass wir $\mathbb{R}^d$ durch Kompakte ausschöpfen und dort κ ein Minimum annimmt). Für c muss gelten, dass es nach oben beschränkt ist.

Für das homogene Problem in unbeschränkter Zeit gibt es eine (nicht eindeutige) Lösung $u \in \mathrm{C}([0,\infty)\times\mathbb{R}^d)\cap \mathrm{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}_{\mathrm{loc}}((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$ mit $\|u(t,\cdot)\|_\infty \leq \mathrm{e}^{tc_0}\,\|f\|_\infty$, wobei $c_0 \coloneqq \sup c$. Beachte, dass diese Abschätzung nur für die konstruierte Lösung und nicht für alle Lösungen gilt (sonst wäre die Gleichung eindeutig lösbar)!

Beweisidee: Wir schöpfen $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ durch kompakte Teilmengen aus, auf diesen hat der Operator aber wieder beschränkte Koeffizienten, also können wir das klassische Resultat für Gebiete verwenden. Durch innere Schauderabschätzungen erhalten wir lokale Hölderbeschränktheit und können durch Arzela-Ascoli und einem Diagonalfolgenargument eine Lösung konstruieren.

Die Existenz einer Lyapunov-Funktion zu einem Operator $\mathcal{A}$ (die nichts mit jenen aus DGL zu tun hat und deren Auffindung vollkommen unklar ist) ist hinreichend für eindeutige Lösbarkeit zu dessen homogenem Problem.

Im eindimensionalen Fall gibt es ein Hille-Yosida-ähnliches Resultat, dass das parabolische mit dem elliptischen Problem verknüpft: Sei $c_0 \coloneqq \sup c$, dann ist $(c_0,\infty)\subset\rho(\mathcal{A})$ genau dann, wenn das parabolische Problem genau eine Lösung mit Wachstumsbedingung $|u(t,x)| \leq M\,\mathrm{e}^{\rho t}$ hat, wobei $M \geq 1$ und $\rho \geq c_0$.