# Zusammenfassung PDE I

Sebastian Bechtel

25. Februar 2017

## 1 lineare Grundgleichungen

### 1.1 Transportgleichung

Betrachte $u_t + a \cdot u_x = 0$. *Methode der Charakteristiken*: Aus der DGL folgt, dass eine Lösung konstant längs $s \mapsto (s, as + c)$ ist. Bestimme $u(x, y)$ aus den Anfangswerten durch eine Kurve obiger Form, die durch $(x, y)$ und den Definitionsbereich der Anfangswerte geht.

### 1.2 Laplace-Gleichung

Betrachte $\triangle u = 0$. Lösungen heißen *harmonische Funktionen*. Nutze Rotationsinvarianz von $\triangle$, um ODE in $r$ zu erhalten. Nichttriviale Lösung heißt *Fundamentallösung des Laplace*. Für $n = 2$: $C \log |x|$, für $n \geq 3$: $C|x|^{2-n}$ (jeweils für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, Ansatz benötigt Differenzierbarkeit von $r = |x|$).

#### 1.2.1 Anschauung: harmonische Funktionen auf $\mathbb{R}$

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ harmonisch, also $f'' = 0$ auf $\mathbb{R}$. Dann ist $f$ konvex und konkav. Betrachte $f$ eingeschränkt auf $[a, b]$. Dann muss der Graph von $f$ oberhalb und unterhalb der Verbindungslinie zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegen, also ist $f$ affin linear. Somit ist klar, dass $f$ entweder konstant ist, oder die Extrema am Rand angenommen werden. Außerdem rechnet man leicht $f(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(y) \, \mathrm{d}y$ nach, also gilt die Mittelwerteigenschaft.

#### 1.2.2 Poisson-Gleichung (auf dem Ganzraum)

Betrachte $-\triangle u = f$, wobei $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$. Eine Lösung ist gegeben durch $u(x) := (\varphi * f)(x)$. Trick: Schneide Singularität der Fundamentallösung aus dem Faltungsintegral raus.

### 1.2.3 Mittelwerteigenschaft

Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ ist harmonisch gdw. Mittelwerteigenschaft

$$u(x) = \fint_{B_r(x)} u(y)\,\mathrm{dy}$$

gilt.

### 1.2.4 Maximumsprinzip

Ist $\Omega$ beschränktes Gebiet, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonisch, dann gelten die folgenden Aussagen:

1. *Schwaches Maximumsprinzip*: $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.
2. *Starkes Maximumsprinzip*: Ist $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, so ist $u$ konstant.

Beweis: Starkes Maximumsprinzip folgt aus der MWE: $|u(x_0)| \leq \fint_{B_r(x)} |u(y)|\,\mathrm{d}y \leq \fint_{B_r(x)} |u(x_0)|\,\mathrm{d}y = |u(x_0)|$, also muss $u$ konstant auf dem Ball sein, also durch Ausschöpfung auf dem Gebiet. Schwaches Maximumsprinzip folgt unmittelbar aus dem starken.

### 1.2.5 Eindeutigkeit der Lösung des DP

Betrachte $-\triangle u = f$ in $\Omega$, $u = g$ auf $\partial\Omega$. Sind $u_1, u_2$ Lösungen, so betrachte $w_1 = u_1 - u_2$, $w_2 = u_2 - u_1$. Da $w_i$ die Laplace-Gleichung löst, folgt mit dem Maximumsprinzip: $\max_{\overline{\Omega}} u_1 - u_2 = \max_{\partial\Omega} w_1 = 0$, also $u_2 \leq u_1$ und analog $u_1 \leq u_2$.

### 1.2.6 Glattheit harmonischer Funktionen

Ist $u \in C(\Omega)$ mit Mittelwerteigenschaft, so ist $u \in C^\infty(\Omega)$, somit $h$ harmonisch. Beweis: Geschickte Nutzung von Mollifiern.

### 1.2.7 Green'sche Funktionen

Betrachte Poisson-Problem auf beschränktem Gebiet $\Omega$. Leite Lösungsformel her; Diese enthält $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ (unbekannt). Löse $\triangle \Phi^x = 0$ in $\Omega$, $\Phi^x = \Phi(y-x)$ auf $\partial\Omega$ für alle $x \in \Omega$. Durch $G(x,y) := \Phi(y-x) - \Phi^x(y)$ wird *Green-Funktion* definiert. Diese liefert Lösungsformel (für das Poisson-Problem auf diesem Gebiet), die nur bekannte Größen enthält. Problem: Bestimme zu gegebenem Gebiet $\Omega$ die Lösungen $\Phi^x$ der obigen DGL. Idee: Entferne Singularität durch „Reflexion" aus dem Gebiet.

### 1.2.8 Eindeutigkeit des DP mit Energiemethode

Zeige für $w \coloneqq u_1 - u_2$, dass $|\nabla w| = 0$ gilt (Green'sche Formeln). Da $w$ am Rand 0, im inneren konstant und stetig, folgt $u_1 = u_2$.

## 1.3 Wärmeleitungsgleichung

Betrachte $u_t - \triangle u = 0$ auf $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, $u(0,x) = u_0(x)$ auf $\mathbb{R}^n$. Fourier-Trafo in $x$ liefert ODE für $\hat{u}$, jene ist explizit lösbar, Rücktrafo. liefert Fundamentallösung $G(t,x) \coloneqq (4\pi t)^{-n/2}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ für $t > 0$, sonst 0, genannt *Gauß-Kern*. Die Faltung $u(t,x) \coloneqq (G_t * u_0)(x)$ liefert Lösung. Der Gauß-Kern glättet, es gilt $u \in C^\infty$.

### 1.3.1 Mittelwerteigenschaft

Es gilt eine Mittelwerteigenschaft für Heatballs im parabolischen Zylinder. Ein Heatball ist gegeben durch $(x,t) + \{(y,s) : \Phi(y,s) > \lambda\}$, $(x,t)$ ist der "Mittelpunkt"des Heatballs, sieht ungefähr aus wie ein Ellipsoid, dessen oberster Punkt der Mittelpunkt ist. Hängt wegen der Heatball-Definition nur von vergangenen Zeiten ab.

### 1.3.2 Maximumsprinzip

Wie bei $\triangle$, jedoch nun mit parabolischem Zylinder und parabolischem Rand.

### 1.3.3 Eindeutigkeit der Lösung der Wärmeleitungsgleichung

Wie bei der Poisson-Gleichung mittels Maximumsprinzip.

## 1.4 Wellengleichung

Betrachte $u_{tt} - \triangle u = 0$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
Fall $n = 1$: Reduziere auf Transportgleichung ($\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 = (\mathrm{d}t + \mathrm{d}x)(\mathrm{d}t - \mathrm{d}x)$, substituiere $v = u_t - u_x$ und löse zweimal Transportgleichung). Lösung ist so glatt wie Anfangswert.
Fall $n$ ungerade: Reduziere auf parabolische Gleichung. Rechnen und Laplace-Trafo liefert Lösungsformel, in $n = 3$ *Kirschhoff'sche Formel* genannt. Lösung ist $C^2$, Regularitätsforderung steigt in der Dimension, die Gleichung glättet also nicht! Lösung hängt vom Anfangswert nur auf Sphären ab.
Fall $n$ gerade: Ist $u(t, x_1, \dots, x_n)$ eine Lösung in Dimension $n$, so ist $\bar{u}(t, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = u(t, x_1, \dots, x_n)$ eine Lösung in Dimension $n+1$, also ungerade, dort haben wir aber eine Lösungsformel. Dann rumrechnen (Transformation von Ball auf Halbraum). Lösung hängt vom

Anfangswert auf Bällen ab. Die Lösungen unterscheiden sich also fundamental in geraden und ungeraden Raumdimensionen!

### 1.4.1 Eindeutigkeit der Lösung der Wellengleichung

Energiemethode.

# 2 schwache Lösungstheorie

## 2.1 Sobolevräume

Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist $H^1(\Omega)$ der Sobolevraum zu $p = 2$. Schwache Ableitungen sind eindeutig bestimmt (Fundamentallemma). Wir definieren als Teilraum $H_0^1(\Omega) := \overline{C_c^\infty}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}$. Es sind $H^1(\Omega)$ sowie $H_0^1(\Omega)$ Hilberträume. Für $\Omega = (a, b)$ haben die Funktionen stetige Repräsentanten und es gilt der Hauptsatz.

### 2.1.1 stetige Repräsentanten: Sobolev-Ungleichung im Fall $p = n = 1$

Es gilt $C_c^\infty(\mathbb{R})$ dicht in $W^{1,1}(\mathbb{R})$ (im Ganzraumfall geht die Dichtheit von $C^\infty$ leicht über Mollifier, sonst durch lokale Aussage hochhangeln, und kompakten Träger via. Cut-Off Funktion). Dann gilt für $f \in C_c^1(\mathbb{R})$ die Identität $f(x) = \int_{-\infty}^x f'(y)\mathrm{d}y$, also die Abschätzung $|f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f'| \leq \|f\|_{W^{1,1}(\mathbb{R})}$. Durch Fortsetzung erhält man die stetige Einbettung $\iota : W^{1,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow C(\mathbb{R})$.
Da $C(\mathbb{R})$ dicht in $W^{1,1}(\mathbb{R})$, finden wir zu $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$ eine Folge $f_n \in C(\mathbb{R})$ mit $f_n \to f$ in $\|\cdot\|_{W^{1,1}(\mathbb{R})}$. Wegen der stetigen Einbettung gilt aber $\iota(f) = \lim_n f_n$ stetig als gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen. Also besitzt $f$ einen stetigen Repräsentanten!

## 2.2 schwache Lösung des Dirichlet-Problem

Betrachte wieder $-\triangle u = f$ in $\Omega$, $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $\int \nabla u \nabla v = \int fv$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ heißt *schwache Lösung des (DP)*.
Hat $\Omega$ glatten Rand, so gilt $u \in H_0^1(\Omega)$ gdw. $u = 0$ auf $\partial\Omega$ für $u \in H^1(\Omega)$ (im Spursinne).
Klassische Lösung ist schwache Lösung: Aus der Randwertbedingung folgt $u \in H_0^1(\Omega)$. Bedingung der schwachen Lösung auf $C_c^\infty(\Omega)$ nachrechnen, dann Dichtheitsargument.
Existenz und Eindeutigkeit der schwachen Lösung: Es gilt für $u \in H_0^1(\Omega)$ die Poincare-Ungleichung $\|u\|_{L^2} \leq C\|\nabla u\|_{L^2}$, wobei $C$ nur von $\Omega$ abhängt. Die Formen $a(u, v) := \int \nabla u \nabla v$ sowie $f(v) := \int fv$ sind beschränkt. Außerdem zeigt man durch $|\nabla u|^2 = 1/2|\nabla u|^2 + 1/2|\nabla u|^2$ und Poincare, dass $a$ koerziv ist, also liefert Lax-Malgram die Existenz einer eindeutigen Schwachen Lösung.

Regularität: Für $f \in H^m(\Omega)$ gilt, dass die schwache Lösung $u$ des zugehörigen (DP) die Regularität $H^{m+2}(\Omega)$ besitzt.
Rückkehr zur klassischen Lösung: Es gilt ein Lemma von Sobolev: ist $m > n/2 + k$ und $u \in H^m(\Omega)$, so gibt es $g \in C^k(\Omega)$ mit $g = u$ f.ü. Beweisidee: Fouriertrafo und $u \in H^m(\Omega)$ gdw. $(1 + |\xi|^2)^{m/2} |\hat{f}(\xi)| \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Das die schwache Lösung gleich der starken Lösung ist, folgt dann aus dem Fundamentallemma.

# 3 Distributionen

Setze $\mathcal{D}(\Omega) \coloneqq C_c^\infty(\Omega)$. Es gelte $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, falls es $K \subseteq \Omega$ kompakt gibt mit $\operatorname{supp} \varphi_j \subseteq K$ für alle $j$ und $D^\alpha \varphi_j \to D^\alpha \varphi$ gleichmäßig für alle Multiindices $\alpha$.
Definiere $\mathcal{D}'(\Omega) \coloneqq \{T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C} \text{ stetig, linear}\}$. Die Elemente von $\mathcal{D}'(\Omega)$ heißen *Distributionen*.
Beispiele: Ist $a \in \Omega$, so definiert $\langle \delta_a, \varphi \rangle \coloneqq \varphi(a)$ die *Dirac-Delta-Distribution in $a$*, speziell: $\delta \coloneqq \delta_0$. Ist $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, dann ist die *reguläre Distribution zu $f$* definiert durch $\langle T_f, \varphi \rangle \coloneqq \int f \varphi \, \mathrm{dx}$. Es gilt $1/x \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$; Definiere Distribution über Cauchy-Hauptwert: $\langle \operatorname{pv} 1/x, \varphi \rangle \coloneqq \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \varphi(x)/x \, \mathrm{dx}$.
Der Raum $\mathcal{D}'(\Omega)$ trägt die schwach-*-Topologie. Beispiele: $f_j \to f$ in $L^1_{\text{loc}}$, dann $T_{f_j} \to T_f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Ist $\varphi$ Mollifier, so gilt $T_{\varphi_\varepsilon} \to \delta$.

## 3.1 Operationen auf $\mathcal{D}'(\Omega)$

1. Ableitung: $\langle D^\alpha T, \varphi \rangle \coloneqq (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$.

2. Multiplikation mit $f \in C^\infty$: $\langle f \cdot T, \varphi \rangle \coloneqq f(0) \langle T, \varphi \rangle$.

Beispiele zur Ableitung: Ist $|\alpha| \leq k$, $f \in H^k$, dann: $D^\alpha T_f = T_{D^\alpha f}$, für die *Heavyside-Funktion* $H(x) \coloneqq 1$, falls $x > 0$, sonst 0, gilt $H' = \delta$, für die Delta-Distribution gilt wiederum $\langle D^\alpha \delta, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi(0)$.

## 3.2 Faltung

Idee: Für $f \in L^1_{\text{loc}}$, $\varphi \in \mathcal{D}$ ist $(f * \varphi)(x) \coloneqq \int f(y) \varphi(x - y) \, \mathrm{dy}$. Es ist $x - y$ eine Spiegelung und Translation um $x$ von $y$. Definiere Spiegelung und Translation auf Distributionen und verallgemeinere zu $(T * \varphi)(x) \coloneqq \langle T, \tau_x \tilde{\varphi} \rangle$, wobei $\tilde{f}(y) \coloneqq f(-y)$ sowie $\tau_x f(y) \coloneqq f(y - x)$. Es gilt $(T * \varphi) \in C^\infty$, $D_j(T * \varphi) = (D_j T) * \varphi = T * (D_j \varphi)$.

### 3.2.1 Fundamentallösungen

Sei $A$ Differentialoperator, $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Ist $T$ Distribution mit $AT = \delta$, denn heißt $T$ *Fundamentallösung* von $A$ und $u := T * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ löst $Au = f$ distributionell (aber Lösung ist eine reguläre Distribution!). Es gilt der Satz von *Milgrange-Ehrenpreis*: Jeder Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten hat eine Fundamentallösung.

### 3.2.2 Träger von Distributionen

Sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definiere $0_T := \{x \in \Omega :$ es ex. offene Umgebung $V$ von $x$ mit $T_V = 0\}$, wobei $\langle T_V, \varphi \rangle := \langle T, \tilde{\varphi} \rangle$ mit $\varphi \in \mathcal{D}'(V)$, $\tilde{\varphi}$ Fortsetzung von $\varphi$ auf $\Omega$ durch 0. Setze $\operatorname{supp} T := \Omega \setminus 0_T$, diese Menge heißt *Träger* von $T$. Beispiele: Für $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ gilt $\operatorname{supp} T_f = \operatorname{supp} f$ (zeige die Gleichheit über Kontaposition (also $x \notin \operatorname{supp} f$ bzw. $\operatorname{supp} T_f$) und nutze Fundamentallemma bzw. $|\int_V f\varphi| \le \|\varphi\|_\infty \int |f| = 0$). Für $x \in \Omega$ gilt $\operatorname{supp} \delta_x = \{x\}$. Für $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}$ gilt: Ist $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset$, dann $\langle T, \varphi \rangle = 0$.
Definiere $\mathcal{E}(\Omega) := C^\infty(\Omega)$. Es gelte $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{E}(\Omega)$, falls für alle $K \subseteq \Omega$ kompakt gilt: $\|D^\alpha \varphi_j - D^\alpha \varphi\|_{C(K)} \to 0$. Identifiziere $\mathcal{E}'(\Omega)$ mit den Distributionen mit kompaktem Träger (durch Cut-Off Funktion auf dem Träger der Distribution können Elemente aus $\mathcal{E}(\Omega)$ mit solchen aus $\mathcal{D}(\Omega)$ identifiziert werden).

### 3.2.3 Faltung von Distributionen mit kompaktem Träger

Seien $S, T \in \mathcal{D}'(R^n)$ und mindestens eine habe kompakten Träger, dann definiere die Faltung durch $\langle S * T, \varphi \rangle := (S * (T * \tilde{\varphi}))(0)$ wobei $\varphi \in \mathcal{D}$. Hat immer höchstens eine Distribution keinen kompakten Träger, so gelten die bekannten Regeln (Kommutativität, Assoziativität, Summe der Träger, ...). Sind die Träger nicht kompakt, so gilt Assoziativität nicht: $1 * (\delta' * H) = 1 * \delta = 1 \neq 0 = 0 * H = (1 * \delta') * H$.

## 3.3 Schwartz-Raum

Sei $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : |f|_{\alpha,\beta} := \sup |x^\beta D^\alpha f| < \infty$ für alle Multiindices $\alpha, \beta\}$ der *Schwartz-Raum*. Definiere $|f|_m := \sup_{|\alpha|,|\beta| \le m} |f|_{\alpha,\beta}$. Es konvergiere $f_j \to f$ in $\mathcal{S}$, falls $|f_n - f|_m \to 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Es gilt offensichtlich $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$, aber $\mathcal{D} \neq \mathcal{S}$, denn $x \mapsto e^{-|x|^2} \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{D}$.

### 3.3.1 Fouriertrafo auf $S$

Definiere zu $u$ die (anti-symmetrische) Fouriertrafo durch $\hat{u}(\xi) := \int e^{-ix\xi} u(x) \, \mathrm{d}x$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$. Die Fouriertrafo ist Isomorphismus von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$, $(\hat{\cdot})^{-1} = \check{\cdot}$.

Es ist $\mathcal{S}$ abgeschlossen unter Faltung und Multiplikation. Es gilt der Faltungssatz $(f * g)\hat{} = \hat{f} \cdot \hat{g}$ sowie $(f \cdot g)\hat{} = (2\pi)^{-n} \hat{f} \cdot \hat{g}$ sowie die Ableitungsregeln $(D^\alpha u)\hat{}(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{u}(\xi)$ als auch $(x^\alpha u)\hat{}(\xi) = (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \hat{u}(\xi)$. Es gilt die *Parseval/Plancherel* Gleichung: $\int f\bar{g}\,\mathrm{dx} = (2\pi)^{-n} \int \hat{f}\bar{\hat{g}}\,\mathrm{d}\xi$.

### 3.3.2 Fouriertrafo auf $L^2$

TODO

## 3.4 Temperierte Distributionen

Betrachte den Dualraum $\mathcal{S}'$ von $\mathcal{S}$. Die Elemente heißen temperierte Distributionen. Es gilt $\mathcal{S}' \neq \mathcal{D}'$, denn $e^x \in \mathcal{S}'$, jedoch $e^x e^{ie^x} \notin \mathcal{S}'$, also auch nicht $L^1_{\text{loc}} \hookrightarrow \mathcal{S}'$. Wir statten $\mathcal{S}'$ mit schwach-*-Topologie aus.
Sei $p$ Polynom, $\psi \in \mathcal{S}$, dann sind folgende Operationen auf $\mathcal{S}'$ definiert:

- Multiplikation mit Polynom: $\langle pT, \varphi\rangle := \langle T, p\varphi\rangle$.
- Multiplikation mit Schwartz-Funktion: $\langle \psi T, \varphi\rangle := \langle T, \psi\varphi\rangle$.
- Fouriertrafo: $\langle \hat{T}, \varphi\rangle := \langle T, \hat{\varphi}\rangle$.
- Ableitung: $\langle D^\alpha T, \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle$.

Die Fouriertrafo ist Isomorphismus $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$. Es gelten folgende Regeln:

- $\mathcal{F}(D^\alpha T) = (ix)^\alpha \mathcal{F}(T)$,
- $\mathcal{F}(x^\alpha T) = (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \mathcal{F}(T)$,
- für $T \in \mathcal{S}$ gilt: $T_{\hat{S}} = \widehat{T_S}$ und
- für $R \in \mathcal{S}'$ mit kompaktem Träger gilt: $(T * R) \in \mathcal{S}'$ und $\mathcal{F}(T * R) = \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(R)$.

### 3.4.1 Beispiele für die Fouriertrafo auf $\mathcal{S}'$

- $\hat{\delta} = 1$,
- $p(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha (x^\alpha 1)$ Polynom, dann $\hat{p} = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha i^{|\alpha|} D^\alpha \delta$.

### 3.4.2 Fundamentallösungen

Ist $AT = \delta$, dann $p(i\xi)\hat{T} = 1$, löse algebraische Gleichung. Rücktrafo liefert Fundamentallösung.

## 3.5 Fouriertransformation auf verschiedenen Räumen

Es gilt $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$ nach Riemann-Lebesgue mit $\mathcal{F}(f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,y\rangle} f(y)\,\mathrm{dy}$. Eingeschränkt auf $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ ist der Wertebereich $L^2$ und die Abbildung ist isometrisch. Es gibt eine Fortsetzung zu einem unitären Operator $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$. Von $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ist $\mathcal{F}$ ebenfalls Isomorphismus, somit auch von $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$.
Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ respektive $f, g \in \mathcal{S}$ gilt $\int \hat{f} g = \int f \hat{g}$ (zum Beweis wendet man Fubini auf die konkrete Darstellung der Fourier-Trafo an).
Die Ableitungsregel gilt auf $\mathcal{S}$ immer und auf $H^k$ für Multiindices $\alpha$ mit $|\alpha| \leq k$.

# 4 nichtlineare Randwertprobleme

## 4.1 Fixpunktsätze

Es gilt der Brownsche Fixpunktsatz: Ist $B$ die abgeschlossene Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ und $T : B \to B$ stetig, so besitzt $T$ einen Fixpunkt. Man zeigt damit den Fixpunktsatz von Schauder: Sei $X$ B.R. und $K \subseteq X$ nicht-leer, kompakt, konvex sowie $T : K \to K$ stetig, so besitzt $T$ einen Fixpunkt. Es gilt außerdem folgende Variante: Sei $X$ B.R., $T : X \to X$ stetig und kompakt sowie $\{u \in X : u = \alpha T u \text{ für ein } \alpha \in [0,1]\}$ beschränkt, dann besitzt $T$ einen Fixpunkt.

### 4.1.1 Anwendung auf nicht-lineares Problem

Betrachte $-\triangle u = f(u), u|_\Omega = 0$, wobei $f$ (Lipschitz?) stetig, beschränkt und $\Omega$ beschränkt ist. Beweisidee: Finde $M_0$ sodass $C := \{u \in H_0^1(\Omega) : \|\nabla u\| \leq M_0\}$ nicht-leere, kompakte, konvexe Menge ist. $T = (-\nabla)^{-1}(f(\cdot)) : H_0^1 \to H_0^1$ ist stetig, Schauder liefert Fixpunkt.

## 4.2 Methode der Unter- und Oberlösungen

Löse wieder $-\triangle u = f(u)$ in $\Omega$, $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Wir setzen die Existenz von Unter- und Oberlösungen voraus, um eine Lösung zu ermitteln, die - mehr oder weniger - konstruktiv ist, und zwar durch monotone Limiten.
Eine Funktion $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ heißt *schwache Unterlösung*, falls für $v \in H_0^1(\Omega)$ mit $v \geq 0$ fast überall gilt, dass $\int \nabla \underline{u} \nabla v \leq \int f(\underline{u}) v$, analog *schwache Oberlösung*.

## 4.3 Nichtexistenz glatter Lösungen von nichtlinearen Gleichungen

Durch Ausnutzung von Haupteigenwert und Haupteigenfunktion von $-\triangle$ lässt sich zeigen, dass $u_t - \triangle u = u^2$ in $(0,T) \times \Omega$, $u = 0$ auf $(0,T) \times \partial\Omega$, $u(0,x) = u_0(x)$ in $\Omega$ keine glatte Lösung besitzt, indem man ein Blowup-Argument macht.

# 5 Maximumsprinzipien

## 5.1 elliptische Operatoren

Betrachten *elliptische Operatoren 2. Ordnung*, d.h. Operatoren der Form

$$Au(x) := -\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\partial_j\partial_i u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u(x) + c(x)u(x),$$

wobei wir $a_{i,j} = a_{j,i}$ annehmen.

Der Operator $A$ heißt *gleichmäßig elliptisch*, falls ein $\mu > 0$ existiert, mit

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu|\xi|^2.$$

Es gilt das *schwache Maximumsprinzip*: Ist $\Omega$ beschränktes Gebiet und $A$ gleichmäßig elliptisch mit stetigen Koeffizienten, wobei $c \equiv 0$, dann gilt für $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit $Au \leq 0$ in $\Omega$, dass das Maximum auf dem Rand von $\Omega$ angenommen wird.

Das *Lemma von Hopf* besagt, dass für ein $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ mit $Au \leq 0$ in $\Omega$ und $x_0 \in \partial\Omega$ mit $u(x_0) > u(x)$ für $x \in \Omega$ gilt, dass $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) > 0$, wobei die innere Kugelbedingung in $x_0$ gelten soll, d.h. es gibt eine offene Kugel $K \subseteq \Omega$ mit $x_0 \in \partial K$.

Aus dem Lemma von Hopf folgt das *starke Maximumsprinzip*: Sind $u, A, \Omega$ wie im schwachen Maximumsprinzip und wird das Maximum in einem inneren Punkt angenommen, so ist $u$ konstant in $\Omega$.

## 5.2 parabolische Operatoren

Betrachte Operator

$$Lu(t,x) := \partial_t u(t,x) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t,x)\partial_j\partial_i u(t,x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\partial_i u(t,x)$$

auf Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ mit stetigen Koeffizienten und $a_{i,j} = a_{j,i}$.

Der Operator $L$ heißt *gleichmäßig parabolisch*, falls ein $\mu > 0$ existiert, mit

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t,x)\xi_i\xi_j \geq \mu|\xi|^2.$$

Es gilt das *schwache Maximumsprinzip*: Ist $u \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ mit $Lu \leq 0$, so nimmt $u$ sein Maximum auf dem parabolischen Rand an.

Außerdem gilt ein starkes Maximumsprinzip von Hopf: Wird in einem inneren Punkt das Maximum angenommen, so auch in jedem Punkt, der durch horizontale und nach oben gerichtete vertikale Segmente verbunden werden kann.

# 6 Halbgruppentheorie

## 6.1 Brownsche Bewegung

Beispiel für Brownsche Bewegung: $P(t,x,y) \coloneqq G_t(x-y)$. Auf $BUC(\mathbb{R}^n)$ definiert $(T(t)f)(x) \coloneqq \int P(t,x,y)f(y)\,\mathrm{dy}$ eine stark stetige Halbgruppe. Für ein $c > 0$ ist $A = c \cdot \triangle$ der Erzeuger dieser Halbgruppe, insbesondere $P(t,x,y) = G_{ct}(x-y)$.

## 6.2 abstraktes Cauchy-Problem

Betrachte *abstraktes Cauchy-Problem*: $X$ Banachraum, $A : D(A) \to X$ Operator, dann soll $u : [0,\infty) \to X$ gefunden werden mit $u'(t) = Au(t)$ sowie $u(0) = u_0$ für ein $u_0 \in X$. Beispiel: $X = L^2(\Omega)$, $A = \triangle$, $D(A) = H^2(\Omega)$. Aus einer PDE wird also eine banachraumwertige ODE.

## 6.3 $C_0$-Halbgruppen

Eine Familie $T \coloneqq (T(t))_{t>0}$ von beschränkten, linearen Operatoren auf $X$ heißt $C_0$-*Halbgruppe* auf $X$, falls gilt: $T(0) = \mathrm{id}$, $T(s+t) = T(s)T(t)$ sowie für alle $f \in X$ gilt: $t \mapsto T(t)f$ stetig. Man nennt $T$ *Kontraktionshalbgruppe*, falls $\|T(t)\| \leq 1$ für alle $t \geq 0$ gilt.

## 6.4 Generator einer Halbgruppe

Setze $D(A) \coloneqq \{f \in X : \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T(t)f - f)\,\text{existiert in } X\}$ und definiere $Af \coloneqq \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T(t)f - f)$ auf $D(A)$. Dann heißt $(D(A), A)$ der Generator von $T$.
Es gilt $\frac{d}{dt}T(t)f = AT(t)f$, also ist $u(t) \coloneqq T(t)f$ Lösung des abstrakten Cauchy-Problems von $A$ zum Anfangswert $f$.
Der Generator ist dicht definiert und abgeschlossen. Beweisidee: Dicht definiert: Zeige $\int_0^t T(s)f\,\mathrm{ds}$ ist in $D(A)$, dann konvergiert $\frac{1}{t}\int_0^t T(s)f\,\mathrm{ds}$ gegen $f$. Abgeschlossen: Schreibe $T(t)f_n - f_n$ via Hauptsatz und nutze, dass $\frac{d}{dt}T(t)f_n$ die DGL löst.

## 6.5 Hille-Yosida-Theorem

Sei $A$ ein dicht definierter Operator auf $X$. Dann erzeugt $A$ eine $C_0$-Halbgruppe mit $\|T(t)\| \leq 1$ gdw. $(0,\infty) \subseteq \rho(A)$ und $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$ für alle $\lambda > 0$.
Beweisidee: Hinrichtung: Zeige $R_\lambda f \coloneqq \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)f\,\mathrm{dt}$ ist die Resolvente zu $\lambda$ von $A$ ausgewertet an $f$. Für jene Darstellung folgen die Eigenschaften leicht. Rückrichtung: Regularisiere $A$ durch den beschränkten Operator $A_\lambda \coloneqq \lambda A(\lambda - A)^{-1}$. Es konvergiert $A_\lambda$ stark gegen $A$, $T_\lambda(t) \coloneqq e^{tA_\lambda}$

definiert stark stetige Kontraktionshalbgruppe zu $A_\lambda$. Es konvergiert $T_\lambda$ gegen eine Halbgruppe $T$, dessen Generator $A$ ist.

## 6.6 Anwendung Hille-Yosida auf parabolisches Problem

Löse das abstrakte Cauchy-Problem durch Anwendung von Hille-Yosida. Resolventenbedingung wird auf Lösung der Resolventengleichung reduziert, für die es schwache Lösungstheorie gibt. Normabschätzung folgt aus der Ungleichung $a(u,u) \geq \alpha \|u\|_{H_0^1}^2 - \gamma \|u\|_{L^2}^2$. Nach Hille-Yosida gibt es also zu $A$ eine stark-stetige Halbgruppe, die Lösung des abstrakten Cauchy-Problems ist.