Zusammenfassung PDE I

Sebastian Bechtel

24. Oktober 2016

1 lineare Grundgleichungen

1.1 Transportgleichung

Betrachte $u_t + a \cdot u_x = 0$. *Methode der Charakteristiken*: Aus der DGL folgt, dass eine Lösung konstant längs $s \mapsto (s, as + c)$ ist. Bestimme $u(x, y)$ aus den Anfangswerten durch eine Kurve obiger Form, die durch (x, y) und den Definitionsbereich der Anfangswerte geht.

1.2 Laplace-Gleichung

Betrachte $\triangle u = 0$. Nutze Rotationsinvarianz von $\triangle$, um ODE in r zu erhalten. Lösungs heißt *Fundamentallösung des Laplace*. Für $n = 2$: $C \log |x|$. Für $n \geq 3$: $C|x|^{2-n}$.

1.2.1 Poisson-Gleichung

Betrachte $-\triangle u = f$. Lösung $u(x) \coloneqq (\varphi * f)(x)$. Trick: Schneide Singularität der Fundamentallösung aus dem Faltungsintegral raus.

1.2.2 Mittelwerteigenschaft

Eine Funktion $u \in C^2(\Omega)$ ist harmonisch gdw. Mittelwerteigenschaft

$$u(x) = \fint_{B_r(x)} u(y) \, \mathrm{dy}$$

gilt.

1.2.3 Maximumsprinzip

Ist Ω beschränktes Gebiet, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonisch, dann gelten die folgenden Aussagen:

1. *Schwaches Maximumsprinzip*: $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.

2. *Starkes Maximumsprinzip*: Ist $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, so ist u konstant.

1.2.4 Eindeutigkeit der Lösung des DP

Betrachte $-\triangle u = f$ in Ω, $u = g$ auf $\partial\Omega$. Sind u_1, u_2 Lösungen, so betrachte $w_1 = u_1 - u_2$, $w_2 = u_2 - u_1$. Da w_i die Laplace-Gleichung löst, folgt mit dem Maximumsprinzip: $\max_{\overline{\Omega}} u_1 - u_2 = \max_{\partial\Omega} w_1 = 0$, also $u_2 \leq u_1$ und analog $u_1 \leq u_2$.

1.2.5 Glattheit harmonischer Funktionen

Ist $u \in C(\Omega)$ mit Mittelwerteigenschaft, so ist $u \in C^\infty(\Omega)$, somit h harmonisch. Beweis: Geschickte Nutzung von Mollifiern.

1.2.6 Green'sche Funktionen

Betrachte Poisson-Problem auf beschränktem Gebiet Ω. Leute Lösungsformel her, diese enthält $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ (unbekannt). Löse $\triangle \Phi^x = 0$ in Ω, $\Phi^x = \Phi(y - x)$ auf $\partial\Omega$ für alle $x \in \Omega$. Durch $G(x, y) := \Phi(y - x) - \Phi^x(y)$ wird *Green-Funktion* definiert. Diese liefert Lösungsformel, die nur bekannte Größen enthält. Problem: Bestimme zu gegebenem Gebiet Ω die Lösungen Φ^x der obigen DGL. Idee: Entferne Singularität durch „Reflexion" aus dem Gebiet.

1.2.7 Eindeutigkeit des DP mit Energiemethode

Zeige für $w := u_1 - u_2$, dass $|\nabla w| = 0$ gilt (Green'sche Formeln). Da w am Rand 0, im inneren konstant und stetig, folgt $u_1 = u_2$.

1.3 Wärmeleitungsgleichung

Betrachte $u_t - \triangle u = 0$ auf $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, $u(0, x) = u_0(x)$ auf $\mathbb{R}^n$. Fourier-Trafo in x liefert ODE für $\hat{u}$, jene ist explizit lösbar, Rücktrafo. liefert Fundamentallösung $G(t, x) := (4\pi t)^{-n/2}\, e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ für $t > 0$, sonst 0, genannt *Gauß-Kern*. Die Faltung $u(t, x) := (G_t * u_0)(x)$ liefert Lösung. Der Gauß-Kern glättet, es gilt $u \in C^\infty$.

1.3.1 Mittelwerteigenschaft

Es gilt eine Mittelwerteigenschaft für Heatballs im parabolischen Zylinder. Hängt wegen der Heatball-Definition nur von vergangenen Zeiten ab.

1.3.2 Maximumsprinzip

Wie bei $\triangle$, jedoch nun mit parabolischem Zylinder und parabolischem Rand.

1.3.3 Eindeutigkeit der Lösung der Wärmeleitungsgleichung

Wie bei der Poisson-Gleichung mittels Maximumsprinzip.

1.4 Wellengleichung

Betrachte $u_{tt} - \triangle u = 0$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Fall $n = 1$: Reduziere auf Transportgleichung. Lösung ist so glatt wie Anfangswert. Fall n ungerade: Reduziere auf parabolische Gleichung. Rechnen und Laplace-Trafo liefert Lösungsformel, in $n = 3$ *Kirschhoff'sche Formel* genannt. Lösung ist C^2, Regularitätsforderung steigt in der Dimension, die Gleichung glättet also nicht! Lösung hängt vom Anfangswert nur auf Sphären ab. Fall $n = 2$: Absteigemethode, löse $n = 3$-Fall aus. Lösung hängt vom Anfangswert auf Bällen ab. Die Lösungen unterscheiden sich also fundamental in geraden und ungeraden Raumdimensionen!

1.4.1 Eindeutigkeit der Lösung der Wellengleichung

Energiemethode.

2 schwache Lösungstheorie

2.1 Sobolevräume

Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist $H^1(\Omega)$ der Sobolevraum zu $p = 2$. Schwache Ableitungen sind eindeutig bestimmt (Fundamentallemma). Wir definieren als Teilraum $H_0^1(\Omega) := \overline{C_c^\infty}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}}$. Es sind $H^1(\Omega)$ sowie $H_0^1(\Omega)$ Hilberträume. Für $\Omega = (a, b)$ haben die Funktionen stetige Repräsentanten und es gilt der Hauptsatz.

2.2 schwache Lösung des Dirichlet-Problem

Betrachte wieder $-\triangle u = f$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $\int \nabla u \nabla v = \int fv$ für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ heißt *schwache Lösung des (DP)*.
Hat Ω glatten Rand, so gilt $u \in H_0^1(\Omega)$ gdw. $u = 0$ auf $\partial\Omega$ für $u \in H^1(\Omega)$ (im Spursinne).
Klassische Lösung ist schwache Lösung: Aus der Randwertbedingung folgt $u \in H_0^1(\Omega)$. Bedingung der schwachen Lösung auf $C_c^\infty(\Omega)$ nachrechnen, dann Dichtheitsargument.
Existenz und Eindeutigkeit der schwachen Lösung: Es gilt für $u \in H_0^1(\Omega)$ die Poincare-Ungleichung $\|u\|_{L^2} \le C\|\nabla u\|_{L^2}$, wobei C nur von Ω abhängt. Die Formen $a(u, v) := \int \nabla u \nabla v$ sowie $f(v) :=$

$\int fv$ sind beschränkt. Außerdem zeigt man durch $|\nabla u|^2 = 1/2|\nabla u|^2 + 1/2|\nabla u|^2$ und Poincare, dass a koerziv ist, also liefert Lax-Milgram die Existenz einer eindeutigen Schwachen Lösung.
Regularität: Für $f \in H^m(\Omega)$ gilt, dass die schwache Lösung u des zugehörigen (DP) die Regularität $H^{m+2}(\Omega)$ besitzt.
Rückkehr zur klassischen Lösung: Es gilt ein Lemma von Sobolev: ist $m > n/2 + k$ und $u \in H^m(\Omega)$, so gibt es $g \in C^k(\Omega)$ mit $g = u$ f.ü. Beweisidee: Fouriertrafo und $u \in H^m(\Omega)$ gdw. $(1+|\xi|^2)^{m/2}|\hat{f}(\xi)| \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Das die schwache Lösung gleich der starken Lösung ist, folgt dann aus dem Fundamentallemma.

3 Distributionen

Setze $\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$. Es gelte $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, falls es $K \subseteq \Omega$ kompakt gibt mit $\operatorname{supp}\varphi_j \subseteq K$ für alle j und $D^\alpha\varphi_j \to D^\alpha\varphi$ gleichmäßig für alle Multiindices α.
Definiere $\mathcal{D}'(\Omega) := \{T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C} \text{ stetig, linear}\}$. Die Elemente von $\mathcal{D}'(\Omega)$ heißen *Distributionen*.
Beispiele: Ist $a \in \Omega$, so definiert $\langle \delta_a, \varphi\rangle := \varphi(a)$ die *Dirac-Delta-Distribution in* a, speziell: $\delta := \delta_0$. Ist $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, dann ist die *reguläre Distribution zu* f definiert durch $\langle T_f, \varphi\rangle := \int f\varphi \,\mathrm{dx}$. Es gilt $1/x \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$; Definiere Distribution über Cauchy-Hauptwert: $\langle \operatorname{pv} 1/x, \varphi\rangle := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} \varphi(x)/x \,\mathrm{dx}$.
Der Raum $\mathcal{D}'(\Omega)$ trägt die schwach-*-Topologie. Beispiele: $f_j \to f$ in L^1_{loc}, dann $T_{f_j} \to T_f$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Ist φ Mollifier, so gilt $T_{\varphi_\varepsilon} \to \delta$.

3.1 Operationen auf $\mathcal{D}'(\Omega)$

1. Ableitung: $\langle D^\alpha T, \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle$.

2. Multiplikation mit $f \in C^\infty$: $\langle f \cdot T, \varphi\rangle := f(0)\langle T, \varphi\rangle$.

Beispiele zur Ableitung: Ist $|\alpha| \leq k$, $f \in H^k$, dann: $D^\alpha T_f = T_{D^\alpha f}$, für die *Heavyside-Funktion* $H(x) := 1$, falls $x > 0$, sonst 0, gilt $H' = \delta$, für die Delta-Distribution gilt wiederum $\langle D^\alpha\delta, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha\varphi(0)$.

3.2 Faltung

Idee: Für $f \in L^1_{\text{loc}}$, $\varphi \in \mathcal{D}$ ist $(f * \varphi)(x) := \int f(y)\varphi(x-y)\,\mathrm{dy}$. Es ist $x - y$ eine Spiegelung und Translation um x von y. Definiere Spiegelung und Translation auf Distributionen und verallgemeinere zu $(T * \varphi)(x) := \langle T, \tau_x\tilde{\varphi}\rangle$, wobei $\tilde{f}(y) := f(-y)$ sowie $\tau_x f(y) := f(y-x)$. Es gilt $(T * \varphi) \in C^\infty$, $D_j(T * \varphi) = (D_jT) * \varphi = T * (D_j\varphi)$.

3.2.1 Fundamentallösungen

Sei A Differentialoperator, $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Ist T Distribution mit $AT = \delta$, denn heißt T *Fundamentallösung* von A und $u := T * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ löst $Au = f$ distributionell. Es gilt der Satz von *Milgrange-Ehrenpreis*: Jeder Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten hat eine Fundamentallösung.

3.2.2 Träger von Distributionen

Sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, definiere $0_T := \{x \in \Omega : \text{ es ex. offene Umgebung } V \text{ von } x \text{ mit } T_V = 0\}$, wobei $\langle T_V, \varphi\rangle := \langle T, \tilde{\varphi}\rangle$ mit $\varphi \in \mathcal{D}'(V)$, $\tilde{\varphi}$ Fortsetzung von φ auf Ω durch 0. Setze $\operatorname{supp} T := \Omega \setminus 0_T$, diese Menge heißt *Träger* von T. Beispiele: Für $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ gilt $\operatorname{supp} T_f = \operatorname{esssupp} f$. Für $x \in \Omega$ gilt $\operatorname{supp} \delta_x = \{x\}$. Für $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\varphi \in \mathcal{D}$ gilt: Ist $\operatorname{supp} T \cap \operatorname{supp} \varphi = \emptyset$, dann $\langle T, \varphi\rangle = 0$.
Definiere $\mathcal{E}(\Omega) := C^\infty(\Omega)$. Es gelte $\varphi_j \to \varphi$ in $\mathcal{E}(\Omega)$, falls für ein $K \subseteq \Omega$ kompakt gilt: $\|D^\alpha \varphi_j - D^\alpha \varphi\|_{C(K)} \to 0$. Identifiziere $\mathcal{E}'(\Omega)$ mit den Distributionen mit kompaktem Träger.

3.2.3 Faltung von Distributionen mit kompaktem Träger

Seien $S, T \in \mathcal{D}'(R^n)$ und mindestens eine habe kompakten Träger, dann definiere die Faltung durch $\langle S * T, \varphi\rangle := (S * (T * \tilde{\varphi}))(0)$ wobei $\varphi \in \mathcal{D}$. Hat immer höchstens eine Distribution keinen kompakten Träger, so gelten die bekannten Regeln (Kommutativität, Assoziativität, Summe der Träger, ...). Sind die Träger nicht kompakt, so gilt Assoziativität nicht: $1 * (\delta' * H) = 1 * \delta = 1 \neq 0 = 0 * H = (1 * \delta') * H$.

3.3 Schwartz-Raum

Sei $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : |f|_{\alpha,\beta} := \sup |x^\beta D^\alpha f| < \infty$ für alle Multiindices $\alpha, \beta\}$ der *Schwartz-Raum*. Definiere $|f|_m := \sup_{|\alpha|,|\beta| \leq m} |f|_{\alpha,\beta}$. Es konvergiere $f_j \to f$ in $\mathcal{S}$, falls $|f_n - f|_m \to 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Es gilt offensichtlich $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$, aber $\mathcal{D} \neq \mathcal{S}$, denn $x \mapsto e^{-|x|^2} \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{D}$.

3.3.1 Fouriertrafo auf S

Definiere zu u die (anti-symmetrische) Fouriertrafo durch $\hat{u}(\xi) := \int e^{-ix\xi} u(x) \,\mathrm{dx}$ für $\xi \in \mathbb{R}^n$. Die Fouriertrafo ist Isomorphismus von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$, $(\hat{\cdot})^{-1} = \check{\cdot}$.
Es ist $\mathcal{S}$ abgeschlossen unter Faltung und Multiplikation. Es gilt der Faltungssatz $(f * g)\hat{} = \hat{f} \cdot \hat{g}$ sowie $(f \cdot g)\hat{} = (2\pi)^{-n} \hat{f} \cdot \hat{g}$ sowie die Ableitungsregeln $(D^\alpha u)\hat{}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{u}(\xi)$ als auch $(x^\alpha u)\hat{}(\xi) = (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \hat{u}(\xi)$. Es gilt die *Parseval/Plancherel* Gleichung: $\int f \bar{g} \,\mathrm{dx} = (2\pi)^{-n} \int \hat{f} \bar{\hat{g}} \,\mathrm{d}\xi$.

3.3.2 Fouriertrafo auf L^2

TODO

3.4 Temperierte Distributionen

Betrachte den Dualraum $\mathcal{S}'$ von $\mathcal{S}$. Die Elemente heißen temperierte Distributionen. Es gilt $\mathcal{S}' \neq \mathcal{D}'$, denn $e^x \in \mathcal{S}'$, jedoch $e^x\, e^{ie^x}$, also auch nicht $L^1_{\text{loc}} \hookrightarrow \mathcal{S}'$. Wir statten $\mathcal{S}'$ mit schwach-*-Topologie aus.
Sei p Polynom, $\psi \in \mathcal{S}$, dann sind folgende Operationen auf $\mathcal{S}'$ definiert:

- Multiplikation mit Polynom: $\langle pT, \varphi\rangle := \langle T, p\varphi\rangle$.
- Multiplikation mit Schwartz-Funktion: $\langle \psi T, \varphi\rangle := \langle T, \psi\varphi\rangle$.
- Fouriertrafo: $\langle \hat{T}, \varphi\rangle := \langle T, \hat{\varphi}\rangle$.
- Ableitung: $\langle D^\alpha T, \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle$.

Die Fouriertrafo ist Isomorphismus $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$. Es gelten folgende Regeln:

- $\mathcal{F}(D^\alpha T) = (ix)^\alpha \mathcal{F}(T)$,
- $\mathcal{F}(x^\alpha T) = (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \mathcal{F}(T)$,
- für $T \in \mathcal{S}$ gilt: $T_{\hat{S}} = \widehat{T_S}$ und
- für $R \in \mathcal{S}'$ mit kompaktem Träger gilt: $(T * R) \in \mathcal{S}'$ und $\mathcal{F}(T * R) = \mathcal{F}(T)\mathcal{F}(R)$.

3.4.1 Beispiele für die Fouriertrafo auf $\mathcal{S}'$

- $\hat{\delta} = 1$,
- $p(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha (x^\alpha 1)$ Polynom, dann $\hat{p} = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha i^{|\alpha|} D^\alpha \delta$.

3.4.2 Fundamentallösungen

Ist $AT = \delta$, dann $p(i\xi)\hat{T} = 1$, löse algebraische Gleichung. Rücktrafo liefert Fundamentallösung.

3.5 Fouriertransformation auf verschiedenen Räumen

Es gilt $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$ nach Riemann-Lebesgue mit $\mathcal{F}(f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,y\rangle} f(y)\,\mathrm{dy}$. Eingeschränkt auf $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ ist der Wertebereich L^2 und die Abbildung ist isometrisch. Es gibt

eine Fortsetzung zu einem unitären Operator $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$. Von $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ist $\mathcal{F}$ ebenfalls Isomorphismus, somit auch von $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$.
Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ respektive $f, g \in \mathcal{S}$ gilt $\int \hat{f} g = \int f \hat{g}$ (zum Beweis wendet man Fubini auf die konkrete Darstellung der Fourier-Trafo an).
Die Ableitungsregel gilt auf $\mathcal{S}$ immer und auf H^k für Multiindices α mit $|\alpha| \leq k$.

4 nichtlineare Randwertprobleme

4.1 Fixpunktsätze

Es gilt der Brownsche Fixpunktsatz: Ist B die abgeschlossene Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ und $T : B \to B$ stetig, so besitzt T einen Fixpunkt. Man zeigt damit den Fixpunktsatz von Schauder: Sei X B.R. und $K \subseteq X$ nicht-leer, kompakt, konvex sowie $T : K \to K$ stetig, so besitzt T einen Fixpunkt. Es gilt außerdem folgende Variante: Sei X B.R., $T : X \to X$ stetig und kompakt sowie $\{u \in X : u = \alpha T u \text{ für ein } \alpha \in [0,1]\}$ beschränkt, dann besitzt T einen Fixpunkt.

4.1.1 Anwendung auf nicht-lineares Problem

Betrachte $-\triangle u = f(u), u|_\Omega = 0$, wobei f (Lipschitz?) stetig, beschränkt und Ω beschränkt ist. Beweisidee: Finde M_0 sodass $C := \{u \in H_0^1(\Omega) : \|\nabla u\| \leq M_0\}$ nicht-leere, kompakte, konvexe Menge ist. $T = (-\nabla)^{-1}(f(\cdot)) : H_0^1 \to H_0^1$ ist stetig, Schauder liefert Fixpunkt.

4.2 Methode der Unter- und Oberlösungen

Löse wieder $-\triangle u = f(u)$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Wir setzen die Existenz von Unter- und Oberlösungen voraus, um eine Lösung zu ermitteln, die - mehr oder weniger - konstruktiv ist, und zwar durch monotone Limiten.
Eine Funktion $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ heißt *schwache Unterlösung*, falls für $v \in H_0^1(\Omega)$ mit $v \geq 0$ fast überall gilt, dass $\int \nabla \underline{u} \nabla v \leq \int f(\underline{u}) v$, analog *schwache Oberlösung*.

4.3 Nichtexistenz glatter Lösungen von nichtlinearen Gleichungen

Durch Ausnutzung von Haupteigenwert und Haupteigenfunktion von $-\triangle$ lässt sich zeigen, dass $u_t - \triangle u = u^2$ in $(0,T) \times \Omega$, $u = 0$ auf $(0,T) \times \partial\Omega$, $u(0,x) = u_0(x)$ in Ω keine glatte Lösung besitzt, indem man ein Blowup-Argument macht.

5 Maximumsprinzipien

5.1 elliptische Operatoren

Betrachten *elliptische Operatoren 2. Ordnung*, d.h. Operatoren der Form

$$Au(x) := -\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\partial_j\partial_i u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u(x) + c(x)u(x),$$

wobei wir $a_{i,j} = a_{j,i}$ annehmen.
Der Operator A heißt *gleichmäßig elliptisch*, falls ein $\mu > 0$ existiert, mit

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu|\xi|^2.$$

Es gilt das *schwache Maximumsprinzip*: Ist Ω beschränktes Gebiet und A gleichmäßig elliptisch mit stetigen Koeffizienten, wobei $c \equiv 0$, dann gilt für $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit $Au \leq 0$ in Ω, dass das Maximum auf dem Rand von Ω angenommen wird.
Das *Lemma von Hopf* besagt, dass für ein $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ mit $Au \leq 0$ in Ω und $x_0 \in \partial\Omega$ mit $u(x_0) > u(x)$ für $x \in \Omega$ gilt, dass $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) > 0$, wobei die innere Kugelbedingung in x_0 gelten soll, d.h. es gibt eine offene Kugel $K \subseteq \Omega$ mit $x_0 \in \partial K$.
Aus dem Lemma von Hopf folgt das *starke Maximumsprinzip*: Sind u, A, Ω wie im schwachen Maximumsprinzip und wird das Maximum in einem inneren Punkt angenommen, so ist u konstant in Ω.

5.2 parabolische Operatoren

Betrachte Operator

$$Lu(t,x) := \partial_t u(t,x) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t,x)\partial_j\partial_i u(t,x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\partial_i u(t,x)$$

auf Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ mit stetigen Koeffizienten und $a_{i,j} = a_{j,i}$.
Der Operator L heißt *gleichmäßig parabolisch*, falls ein $\mu > 0$ existiert, mit

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t,x)\xi_i\xi_j \geq \mu|\xi|^2.$$

Es gilt das *schwache Maximumsprinzip*: Ist $u \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ mit $Lu \leq 0$, so nimmt u sein Maximum auf dem parabolischen Rand an.
Außerdem gilt ein starkes Maximumsprinzip von Hopf: Wird in einem inneren Punkt das Maximum angenommen, so auch in jedem Punkt, der durch horizontale und nach oben gerichtete

vertikale Segmente verbunden werden kann.

6 Halbgruppentheorie

6.1 Brownsche Bewegung

Beispiel für Brownsche Bewegung: $P(t,x,y) := G_t(x-y)$. Auf $BUC(\mathbb{R}^n)$ definiert $(T(t)f)(x) := \int P(t,x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$ eine stark stetige Halbgruppe. Für ein $c > 0$ ist $A = c \cdot \triangle$ der Erzeuger dieser Halbgruppe, insbesondere $P(t,x,y) = G_{ct}(x-y)$.

6.2 abstraktes Cauchy-Problem

Betrachte *abstraktes Cauchy-Problem*: X Banachraum, $A : D(A) \to X$ Operator, dann soll $u : [0,\infty) \to X$ gefunden werden mit $u'(t) = Au(t)$ sowie $u(0) = u_0$ für ein $u_0 \in X$. Beispiel: $X = L^2(\Omega)$, $A = \triangle$, $D(A) = H^2(\Omega)$. Aus einer PDE wird also eine banachraumwertige ODE.

6.3 C_0-Halbgruppen

Eine Familie $T := (T(t))_{t>0}$ von beschränkten, linearen Operatoren auf X heißt *C_0-Halbgruppe* auf X, falls gilt: $T(0) = \mathrm{id}$, $T(s+t) = T(s)T(t)$ sowie für alle $f \in X$ gilt: $t \mapsto T(t)f$ stetig. Man nennt T *Kontraktionshalbgruppe*, falls $\|T(t)\| \leq 1$ für alle $t \geq 0$ gilt.

6.4 Generator einer Halbgruppe

Setze $D(A) := \{f \in X : \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T(t)f - f) \text{ existiert in } X\}$ und definiere $Af := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T(t)f - f)$ auf $D(A)$. Dann heißt $(D(A), A)$ der Generator von T.

Es gilt $\frac{d}{dt}T(t)f = AT(t)f$, also ist $u(t) := T(t)f$ Lösung des abstrakten Cauchy-Problems von A zum Anfangswert f.

Der Generator ist dicht definiert und abgeschlossen. Beweisidee: Dicht definiert: Zeige $\int_0^t T(s)f\,\mathrm{d}s$ ist in $D(A)$, dann konvergiert $\frac{1}{t}\int_0^t T(s)f\,\mathrm{d}s$ gegen f. Abgeschlossen: Schreibe $T(t)f_n - f_n$ via Hauptsatz und nutze, dass $\frac{d}{dt}T(t)f_n$ die DGL löst.

6.5 Hille-Yosida-Theorem

Sei A ein dicht definierter Operator auf X. Dann erzeugt A eine C_0-Halbgruppe mit $\|T(t)\| \leq 1$ gdw. $(0,\infty) \subseteq \rho(A)$ und $\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$ für alle $\lambda > 0$.

Beweisidee: Hinrichtung: Zeige $R_\lambda f := \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)f\,\mathrm{d}t$ ist die Resolvente zu λ von A ausgewertet an f. Für jene Darstellung folgen die Eigenschaften leicht. Rückrichtung: Regularisiere A durch den beschränkten Operator $A_\lambda := \lambda A(\lambda - A)^{-1}$. Es konvergiert A_λ stark gegen A, $T_\lambda(t) := e^{tA_\lambda}$

definiert stark stetige Kontraktionshalbgruppe zu A_λ. Es konvergiert T_λ gegen eine Halbgruppe T, dessen Generator A ist.

6.6 Anwendung Hille-Yosida auf parabolisches Problem

Löse das abstrakte Cauchy-Problem durch Anwendung von Hille-Yosida. Resolventenbedingung wird auf Lösung der Resolventengleichung reduziert, für die es schwache Lösungstheorie gibt. Normabschätzung folgt aus der Ungleichung $a(u,u) \geq \alpha\|u\|_{H_0^1}^2 - \gamma\|u\|_{L^2}^2$. Nach Hille-Yosida gibt es also zu A eine stark-stetige Halbgruppe, die Lösung des abstrakten Cauchy-Problems ist.