

Zusammenfassung Spektraltheorie und Operatoralgebren

Sebastian Bechtel

16. Dezember 2016

1 Spektraltheorie in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

1.1 Multiplikationsoperatoren und Borel-FK für diagonalisierbare Operatoren

Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit ONB (e_i) aus Eigenvektoren. Dann: $U : \mathcal{H} \ni e_n \mapsto \delta_n \in l^2(I)$ unitär, $M_f : l^2(I) \ni g \mapsto fg \in l^2(I)$ Multiplikationsoperator mit $f \in l^\infty(I)$ gegeben via $f(i) = \lambda_i := T(e_i)$ und $T = U^* M_f U$ ist unitär äquivalent zu Multiplikationsoperator.

Aber: Es gibt Multiplikationsoperatoren auf L^2 ohne Eigenwerte: Betrachte $M_x \in L^2([0,1])$, dann für $\lambda \in \mathbb{C}$ wegen $(x - \lambda) = 0$ fast überall: $xf(x) = \lambda f(x)$ impliziert $f = 0$ fast überall.

Ein Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt *diagonalisierbar*, falls es lokalisierbaren Maßraum (Ω, Σ, μ) sowie $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ gibt mit T unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator M_f auf $L^2(\Omega, \mu)$.

Ziel: Zeige, dass jeder normale Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ diagonalisierbar ist, entwickle beschränkten Funktionalkalkül für Multiplikationsoperatoren und lifte diesen auf normale Operatoren via Multiplikator Darstellung hoch.

1.1.1 C^* Algebra der Multiplikationsoperatoren

Die Abbildung $L^\infty \ni f \mapsto M_f \in \mathcal{B}(L^2)$ ist isometrischer, einserhaltender $*$ -Homomorphismus, also Isomorphismus auf sein Bild $\mathcal{M} := \mathcal{M}(L^2(\Omega, \mu)) = \{M_f : f \in L^\infty\}$. Somit ist \mathcal{M} kommutative C^* -Algebra der Multiplikationsoperatoren.

1.1.2 Borel-Funktionalkalkül für Multiplikationsoperatoren

Sei $f \in L^\infty$, $K := \text{essrange } f = \sigma(M_f)$ kompakt, dann ist $B_b(K)$ die C^* -Algebra der beschränkten Borelfunktionen auf K .

Die Zuordnung $B_b(K) \ni g \mapsto g \circ f \in L^\infty$ ist $*$ -Homomorphismus, aber im Allgemeinen weder injektiv (wähle $g = 0$ f.ü., aber $g \neq 0$), noch surjektiv (wähle auf $[0, 2]$ mit Lebesgue-Maß $f \equiv 1$ und $g = \chi_{[0,1]}$).

Definiere *Borel-Funktionalalkül für M_f* via einserhaltendem $*$ -Homomorphismus $B_b(\sigma(M_f)) \rightarrow L^\infty \rightarrow \mathcal{B}(L^2)$ und schreibe $g(M_f)$ für M_f eingesetzt in g .

1.1.3 Borel-Funktionalalkül für diagonalisierbare Operatoren

Es sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ diagonalisierbar mit $T = U^* M_f U$, dann definiert der $*$ -Homomorphismus $B_b(K) \rightarrow L^\infty \rightarrow \mathcal{M}(L^2) \subset \mathcal{B}(L^2) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $g \mapsto g \circ f \mapsto M_{g \circ f} \mapsto U^* M_{g \circ f} U$ den Borel-FK für T und dieser setzt den stetigen FK von T fort ($id(T) = T$, also stimmen stetiger FK und Borel-FK auf Polynomen überein und jene sind dicht in $C(K)$; beachte dass $\|\cdot\|_\infty$ Norm auf $B_b(K)$).

1.2 normale Operatoren sind diagonalisierbar

1.2.1 zyklische Vektoren und invariante Teilräume

Sei $x \in \mathcal{H}$, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ abgeschlossen, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ Algebra und $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ abgeschlossen unter Adjunktion.

Dann heißt x *zyklischer Vektor für \mathcal{A}* , falls $\mathcal{A}x$ dicht in \mathcal{H} . Ferner heißt x *zyklischer Vektor für T* , falls x zyklisch für $C^*(T, 1)$. Es heißt \mathcal{K} *invarianter Teilraum von T* , falls $T\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ und *invarianter Teilraum von \mathcal{S}* , falls \mathcal{K} invariant für alle $S \in \mathcal{S}$.

Ist \mathcal{K} invariant unter \mathcal{S} , so auch \mathcal{K}^\perp (wegen Abgeschlossenheit unter Adjunktion!) und die orthogonale Projektion $P_{\mathcal{K}}$ auf \mathcal{K} kommutiert mit allen Elementen aus \mathcal{S} (vgl. VNA: Kommutante).

1.2.2 Spektralmaß μ_x

Für $f \in C(K)$ mit $f \geq 0$ ist $f(T) \geq 0$, somit $\langle f(T)x, x \rangle \geq 0$, also $C(K) \ni f \mapsto \langle f(T)x, x \rangle \in \mathbb{C}$ positives, stetiges Funktional auf $C(K)$.

Nach Riesz-Markov existiert ein eindeutiges reguläres Borelmaß μ_x mit $\int_K f d\mu_x = \langle f(T)x, x \rangle$. Das Maß μ_x heißt das zu x gehörige *Spektralmaß*.

1.2.3 Multiplikator Darstellung für normale Operatoren

Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal, $K := \sigma(T)$.

Ist $x \in \mathcal{H}$ zyklischer Vektor für T , dann gilt für $f, g \in C(K)$: $\langle f(T)x, g(T)x \rangle = \langle f, g \rangle_{L^2}$, also $\tilde{U} : \mathcal{H} \ni f(T)x \mapsto f \in C(K)$ wohldefiniert und isometrisch. Da x zyklisch für T , d.h. $\{f(T)x :$

$f \in C(K)\}$ dicht in \mathcal{H} , und $C(K)$ dicht in L^2 , besitzt \tilde{U} Fortsetzung zu unitärem Operator $U : \mathcal{H} \rightarrow L^2$ mit $U(x) = U(\text{id}(T)x) = \text{id}$ und $U^*TU = M_{\text{id}}$.

Gibt es keinen zyklischen Vektor für T , so zerlege \mathcal{H} in direkte Summe orthogonaler, zyklischer Teilräume (Zorn!) und wende obigen Fall auf die Räume der Zerlegung an.

1.2.4 Borel-FK für normale Operatoren

Da normale Operatoren diagonalisierbar sind, kann der Borel-Funktionalkalkül für diagonalisierbare Operatoren verwendet werden.