Zusammenfassung Spektraltheorie und Operatoralgebren

Sebastian Bechtel

28. Dezember 2016

1 Grundlegendes zu Algebren

1.1 Beispiele von Algebren

1.2 Elementare Eigenschaften

Sei $\mathcal{A}$ Banachalgebra. Dann ist die Multiplikation stetig. Hat $\mathcal{A}$ eine Involution und ist die C*-Eigenschaft erfüllt, so ist $\mathcal{A}$ eine Banach-*-Algebra: $\|x\|^2 = \|x^*x\| \leq \|x^*\|\|x\|$, also $\|x\| \leq \|x^*\|$, somit $\|x\| \leq \|x^*\| \leq \|(x^*)^*\| = \|x\|$. Ist $1 \in \mathcal{A}$, so gilt $\|1\| \geq 1$, denn $\|1\| \leq \|1\|^2$ und ist $\mathcal{A}$ C*-Algebra, so gilt $\|1\| = 1$, denn es gilt $1^* = 1$ und somit folgt die Behauptung aus $\|1\| = \|1^*1\| = \|1\|^2$.

1.3 Algebren ohne Eins

Algebren wie $L^1(\mathbb{R})$ und $C_0(\mathbb{R})$ haben keine Eins. Um trotzdem Spektraltheorie betreiben zu können, betten wir sie als Ideale in eine Algebra mit Eins ein.
Algebraisch: $\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \times \mathbb{C}$ mit geeigneter Multiplikation ist Algebra mit $1_{\tilde{\mathcal{A}}} = (0, 1)$ und $\mathcal{A} \ni x \mapsto (x, 0) \in \tilde{\mathcal{A}}$ bettet $\mathcal{A}$ als Ideal in $\tilde{\mathcal{A}}$ ein.
Banach-algebraisch: Statte $\tilde{\mathcal{A}}$ mit l^1 Norm der direkten Summe aus, also $\|(x, \alpha)\|_{\tilde{\mathcal{A}}} = \|x\| + |\alpha|$.
C*-algebraisch: Problem: Banach-algebraische Konstruktion erhält C*-Eigenschaft im Allgemeinen nicht. Definiere deshalb andere Norm, deren Konstruktion aber bereits die C*-Eigenschaft benutzt!

1.3.1 Linksreguläre Darstellung

Betrachte den Algebrahomomorphismus $\mathcal{A} \ni x \mapsto L_x \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, wobei $L_x(y) := xy$ die *Linksreguläre Darstellung* ist. Ist $\mathcal{A}$ C*-Algebra, dann gilt $\|L_x\| = \|x\|$, denn $\|L_x\| \geq \|xx^*\|/\|x^*\| =$

$\|x^*\| = \|x\|$ und $\|L_x\| \leq \|x\|$ ist klar.
Also: Ist $\mathcal{A}$ C*-Algebra, dann betrachte auf $\tilde{\mathcal{A}}$ die Norm $\|(x, \alpha)\| = \|L_x + \alpha\|_{\text{op}}$. Definitheit nutzt Isometrie des Algebrahomomorphismus und die Tatsache, dass $\mathcal{A}$ keine Eins besitzt.

1.4 Spektraltheorie in Banachalgebren

Sei $\mathcal{A}$ Banachalgebra mit Eins. Für $x \in \mathcal{A}$ definiere durch $\rho(x) \ni \lambda \mapsto r(\lambda, x) := (\lambda - x)^{-1}$ die *Resolvente* $r(\cdot, x)$ von x.
Ist $0 \neq \lambda \in \sigma(x)$, so ist $1/\lambda \in \sigma(x^{-1})$. Auch im Fall $xy \neq yx$ stimmen deren Spektren fast überein, es gilt $\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}$. Hinzunahme der 0 ist notwendig: Sei S der Rechtsshift, dann $S^*S = \text{id}$, also $0 \notin \sigma(S^*S)$, aber SS^* nicht injektiv. Ist $\|x\| < 1$, dann ist $1 - x$ invertierbar und die Inverse ist gegeben durch die *Neumann-Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, vgl. geometrische Reihe! Die Resolventenmenge ist offen, also $\sigma(x)$ abgeschlossen, außerdem gilt für den *Spektralradius* $r_\sigma(x) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$ die Abschätzung $r_\sigma(x) \leq \|x\|$, also ist das Spektrum $\sigma(x)$ kompakt. Es gilt $\lim_{|\lambda| \to \infty} r(\lambda, x) = 0$, vgl. mit Resolventenabschätzungen für H.G.en, z.B. $\|r(\lambda, A)\| \leq M/|\lambda|$ für Generatoren von analytischen H.G.en. Die Resolvente ist holomorph (leite Potenzreihenentwicklung aus Neumann-Reihe ab). Es folgt $\sigma(x) \neq \emptyset$: Wäre $\sigma(x)$ leer, dann wäre die Resolvente eine ganze Funktion. Wegen dem Grenzverhalten für $|\lambda| \to \infty$ folgt Beschränktheit, also nach Liouville $r(\lambda, x) \equiv 0$, aber 0 ist nicht invertierbar, Widerspruch. Ist $\mathcal{A}$ Banach-*-Algebra, so gilt $\sigma(x*) = \overline{\sigma(x)}$, nutze dazu $1^* = 1$.

1.5 Der Satz von Gelfand-Mazur

Ist $\mathcal{A}$ Banachalgebra mit Eins und jedes $x \neq 0$ sei invertierbar (genannt *Divisionsalgebra*), dann gilt $\mathcal{A} \cong \mathbb{C}$. Bew: Identifiziere x eindeutig mit einem Skalar: Aus $\sigma(x) \neq \emptyset$ folgt die Existenz eines λ mit $\lambda - x$ nicht invertierbar, also nach Voraussetzung $x = \lambda$.

2 Gelfandtheorie

Ist E normierter Raum, so ist $K := (E')_1$ eine schwach-*-kompakte Menge und $E \ni x \mapsto \hat{x} \in C(K)$ ein isometrischer Isomorphismus von normierten Räumen, wobei K also kompakter Hausdorffraum ist. Für eine kommutative, unitale Banachalgebra $\mathcal{A}$ ist aber $C(K)$ keine Algebra, denn im Allgemeinen gilt $(\hat{x}\hat{y})(\varphi) = \varphi(x)\varphi(y) \neq \varphi(xy) = \widehat{xy}(\varphi)$ (sofern φ keine multiplikative Linearform ist, z.B. das Integral auf $L^1([0,1])$).
Ansatz: Schränke K ein, sodass Multiplikativität erfüllt ist!
Wir definieren das *Spektrum der Algebra* via $\hat{\mathcal{A}} := \{\varphi \in \mathcal{A}^* : \varphi \neq 0, \varphi \text{ multiplikativ}\}$. Dies ist der Kandidat für die Einschränkung. Wir benötigen $\varphi \neq 0$, da sonst $\hat{1}$ keine Eins in $C(\hat{\mathcal{A}})$ sein

kann, denn es gilt $\hat{1}(0) = 0(1) = 0$.

Ist $\varphi \in \hat{\mathcal{A}}$ und $\mathcal{A}$ unital, so gilt $\varphi(1) = 1$, denn $\varphi(1) = \varphi(1)^2$ und $\varphi(1) = 0$ impliziert $\varphi = 0$. Außerdem gilt $\|\varphi\| \leq 1$, insbesondere $\hat{\mathcal{A}} \subseteq (E^*)_1$ (Banach-Alaoglu!). Aus $\varphi(x) = \lambda$ folgt $\lambda \in \sigma(x)$, denn dann gilt $\varphi(\lambda - x) = 0$ und wegen Multiplikativität und $\varphi(1)$ kann dann λ nicht in der Resolventenmenge sein. Daraus folgt dann $|\varphi(x)| \leq r_\sigma(x) \leq \|x\|$.

2.1 topologische Eigenschaften von $\hat{\mathcal{A}}$

Ist $\mathcal{A}$ unital, so ist $\hat{\mathcal{A}}$ kompakt, denn Multiplikativität wird automatisch erhalten und wegen $\varphi(1) = 1$ ist der Grenzwert nicht 0. Ansonsten gilt $\hat{\hat{\mathcal{A}}} \cong \hat{\mathcal{A}} \cup \{\varphi_\infty\}$, also ist $\hat{\hat{\mathcal{A}}}$ die Einpunktkompaktifizierung von $\hat{\mathcal{A}}$ und somit lokalkompakt.

2.2 Idealtheorie in $\mathcal{A}$

Ernte der Idealtheorie wird sein, dass wir $\|\hat{x}\| = r_\sigma(x)$ erhalten. Dazu werden wir nutzen, dass nicht invertierbare Elemente in echten, maximalen Idealen enthalten sind, die wiederum zu den Kernen von Elementen in $\hat{\mathcal{A}}$ korrespondieren.

Ist $\mathcal{A}$ Banachalgebra mit Eins, dann ist der Abschluss eines echten (zweiseitigen) Ideals wieder ein echtes Ideal, nutze, dass, falls I dicht, $1 \in \mathcal{A}$ impliziert, dass es $y \in I$ gibt mit $\|1 - y\| < 1$, also y invertierbar und somit $1 \in I$, Widerspruch. Z.B. ist $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ echtes Ideal und $\overline{\mathcal{F}(\mathcal{H})} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$ ebenso. Ohne Eins gilt dies nicht, z.B. $C_c(\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R})$ echtes Ideal, aber dicht. Maximale Ideale sind abgeschlossen, denn sonst wäre der Abschluss ein echtes Ideal, dass größer ist, und nach Zorn ist jedes Ideal in einem abgeschlossenen, maximalen Ideal enthalten (ohne Eins mit gleichem Beispiel wie oben falsch).

Für $\mathcal{A}$ unital, kommutativ ist x nicht invertierbar genau dann, wenn x in einem echten, abgeschlossenen Ideal enthalten ist. Ist x invertierbar, so kann es nicht in einem echten Ideal enthalten sein, da sonst $1 = xx^{-1}$ im Ideal wäre. Andererseits ist wegen Kommutativität $x\mathcal{A} = \mathcal{A}x$ zweiseitiges Ideal und wegen $1 \in \mathcal{A}$ gilt $x \in x\mathcal{A}$.

Es gilt *der Satz, der die Theorie zum Laufen bringt*: Für ein echtes Ideal I ist Maximalität äquivalent zu $\mathcal{A}/I \cong \mathbb{C}$: Ist I maximal, so enthält $\mathcal{A}/I$ keine echten Ideale, also ist $\mathcal{A}/I$ Divsionsalgebra und nach Gelfand-Mazur isomorph zu $\mathbb{C}$. Die Abbildung $\hat{\mathcal{A}} \ni \varphi \mapsto \mathcal{N}(\varphi) \in M(\mathcal{A})$ ist Bijektion ($M(\mathcal{A})$ bezeichne die echten, maximalen Ideala von $\mathcal{A}$).

<u>In Summe</u>: Es gilt für $x \in \mathcal{A}$, dass $\lambda \in \sigma(x)$ genau dann, wenn es $\varphi \in \hat{\mathcal{A}}$ gibt mit $\varphi(x) = \lambda$, denn: $\lambda \in \sigma(x)$ gdw. $\lambda - x$ nicht invertierbar gdw. es echtes, maximales Ideal I gibt mit $\lambda - x \in I$ gdw. es ex. $\varphi \in \hat{\mathcal{A}}$ mit $\lambda - x \in \mathcal{N}(\varphi)$ gdw. es ex. $\varphi \in \hat{\mathcal{A}}$ mit $\varphi(x) = \lambda$.

2.3 Der Satz von Gelfand

Ist $\mathcal{A}$ kommutative Banachalgebra, $K \coloneqq \hat{\mathcal{A}}$, dann ist $\mathcal{A} \ni x \mapsto \hat{x} \in C_0(K)$ kontraktiver Algebrahomomorphismus und heißt *Gelfand-Transformation*. K ist lokalkompakt und genau dann kompakt, wenn $\mathcal{A}$ unital. Es gilt $\sigma(x) = \hat{x}(\hat{\mathcal{A}})$ und somit $\|\hat{x}\|_\infty = r_\sigma(x)$.

2.4 Anwendung: Satz von Wiener

Betrachte die Banachalgebra $(l^1(\mathbb{Z}), *, \|\cdot\|_1)$. Diese hat das Einselement δ_0 und es gilt $\delta_k = \delta_0^k$, somit sind Elemente aus $\hat{\mathcal{A}}$ durch ihren Wert auf δ_0 eindeutig festgelegt. Für $\alpha \in \mathbb{T}$ definiere $\varphi_\alpha : l^1(\mathbb{Z}) \ni \sum_n f(n)\delta_n \mapsto \sum_n \alpha^n f(n) \in \mathbb{C}$, dann ist $\mathbb{T} \ni \alpha \mapsto \varphi_\alpha \in \hat{\mathcal{A}}$ ein Homöomorphismus, $\mathbb{T} \cong \hat{\mathcal{A}}$. Die Gelfand-Transformation ist die diskrete Fouriertransformation (ersetze α durch $e^{i\psi}$ in der Darstellung von φ_α) und das Bild ω heißt *Wiener-Algebra* (ausgestattet mit $\|g\|_{\mathrm{W}} \coloneqq \|\check{g}\|_{l^1(\mathbb{Z})}$ anstatt Supremumsnorm).

3 Spektraltheorie in C*-Algebren

Ist x s.a., so gilt $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$. Ist x unitär, so gilt $\sigma(x) \subset \mathbb{T}$.
Für x normal gilt $\|x^2\| = \|x\|^2$, via Darstellung des Spektralradius folgt $\|x\| = r_\sigma(x)$ und für allgemeines x gilt $\|x\| = r_\sigma(x^*x)^{1/2}$ (vgl. Spektralnorm von Matrizen).
<u>Also</u>: Verknüpfung zwischen Topologie (Norm) und Algebra (Spektralradius)! Somit gibt es auf einer *-Algebra höchstens eine C*-Norm.
Ist $\mathcal{B}$ Banach-*-Algebra, $\mathcal{A}$ C*-Algebra und $\pi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ ein *-Homomorphismus, so ist π stetig mit $\|\pi\| \leq 1$ (algebraische Eigenschaft „schenkt" topologische Eigenschaft der Stetigkeit!). Beweisidee: Durch Übergang zu $\tilde{\mathcal{B}}$ und $\mathcal{A}_{\text{red}} \coloneqq \pi(1)\tilde{\mathcal{A}}\pi(1)$ (vgl. vNA Reduktion von Algebren) ist π oBdA einserhaltender *-Homomorphismus, x invertierbar in $\mathcal{B}$ impliziert $\pi(x)$ invertierbar in $\mathcal{A}$, dann $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$ via Abschätzung der Spektralradien.

3.1 Gelfandtheorie für C*-Algebren

Ist $\mathcal{A}$ unitale, kommutative C*-Algebra, so ist jedes Element insbesondere normal, also $\|\hat{x}\| = r_\sigma(x) = \|x\|$, also Bild des Gelfand-Homomorphismus abgeschlossene Unteralgebra stetiger Funktionen auf $\hat{\mathcal{A}}$, die die Eins erhält (wegen $\varphi(1) = 1$ für $\varphi \in \hat{\mathcal{A}}$) und Punkte trennt ($\varphi \neq \psi \in \hat{\mathcal{A}}$, dann ex $x \in \mathcal{A}$ mit $\varphi(x) \neq \psi(x)$, also $\hat{x}(\varphi) \neq \hat{x}(\psi)$), somit nach Stone-Weierstraß $\{\hat{x} : x \in \mathcal{A}\} = C(\hat{\mathcal{A}})$, also $\mathcal{A} \cong C(\hat{\mathcal{A}})$. Hat $\mathcal{A}$ keine Eins, dann $\mathcal{A} \cong C_0(\hat{\mathcal{A}})$, $\hat{\mathcal{A}}$ lokalkompakt.

3.1.1 Satz von Banach-Stone

Für kompakte Hausdorffräume X, Y gilt: $X \cong Y$ gdw. $C(X) \cong C(Y)$, nenne daher die Untersuchung von C*-Algebren auch nichtkommutative Topologie. Beweisidee: Zeige $C(\hat{\mathcal{A}}) = \mathcal{A} = C(X)$ impliziert $\hat{\mathcal{A}} \cong X$. Setze $\varphi_x(f) = f(x)$, dann zeige $X \ni x \mapsto \varphi_x \in \hat{\mathcal{A}}$ ist Homöomorphismus. Stetig und injektiv leicht. Surjektivität durch Widerspruchsbeweis: Erhalte nichttriviale Funktion aus Urysohn, die ein Urbild unter dem Gelfand-Homomorphismus in $C(X)$ hat, die trivial ist (Bild!).

3.2 Spektralsatz und stetiger Funktionalkalkül

Sei $x \in \mathcal{A}$ normal, $\mathcal{A}$ unital, dann ist die von x und 1 erzeugte C*-Algebre $C^*(x, 1)$ kommutativ, also isomorph zu einer Algebra $C(\Omega)$ mit Ω kompakt. Es gilt $\Omega \cong \sigma(x)$ (via $\varphi \mapsto \hat{x}(\varphi) \in \sigma(x)$), somit $C^*(x, 1) \cong C(\sigma(x))$ und der Isomorphismus ist durch $i(x) = \mathrm{id}$ eindeutig bestimmt (festgelegt auf Polynomen, diese sind dicht wegen Weierstraß).
Für $f \in C(\sigma(x))$ definiere stetigen Funktionalkalkül via $f(x) := i^{-1}(f)$. Da i isometrischer *-Isomorphismus, gilt $(f+g)(x) = f(x) + g(x), (fg)(x) = f(x)g(x), (\bar{f})(x) = (f(x))^*, \|f(x)\| = \|f\|$. Es gilt $\sigma(f(x)) = f(\sigma(x))$, denn $\sigma(f) = \mathcal{R}(f)$.
Anwendung: Ist $x \in \mathcal{A}$ s.a., definiere $e^{ix} \in \mathcal{A}$ unitär. Ist $x \geq 0$, definiere $x^{1/2}$.

4 Positivität

Sei $x \in \mathcal{A}$, man nennt x *positiv*, falls x s.a. und $\sigma(x) \subset [0, \infty)$. Jedes Element einer C*-Algebra ist Summe positiver Elemente (zerlege in Real- und Imaginärteil, dort klar im Funktionenbild).
Ist $x \geq 0$, so ist die Wurzel $x^{1/2} \geq 0$ eindeutig bestimmt: Ist y mit $y \geq 0, y^2 = x$, so ist x und somit $x^{1/2}$ in $C^*(1, y)$, Behauptung folgt mit Eindeutigkeit der Wurzel in $\mathbb{R}$.
Es gilt das *einfach, aber wichtig*-Kriterium: Ist $\mathcal{A}$ unital, $x^* = x \in \mathcal{A}$, $\|x\| \leq 1$, dann sind $x \geq 0$ und $\|1 - x\| \leq 1$ äquivalent (Funktionenbild!). Die positiven Elemente $\mathcal{A}_+$ bilden einen abgeschlossenen Kegel (weise das Kriterium nach!).
Für ein s.a. Element x sind $x \geq 0$, $x = y^*y$ für ein $y \in \mathcal{A}$ sowie $x = h^2$ für ein s.a. h äquivalent. Beweisidee: Ist $x \geq 0$, so liefert die Wurzel die gewünschten Darstellungen. Ist $x = y^*y$, so ist x s.a., also zerlege x in Positiv- und Negativteil und zeige $x_- = 0$. Viel rechnen, aber es steckt auch viel Spektraltheorie drin, z.B. $\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}$, Spektralsatz für Zerlegung, $\sigma(x_-^2) = \{0\}$ impliziert $x_- = 0$ (Spektraler Abbildungssatz sowie Spektralsatz).
Anwendung: $\mathcal{A}$ C*-Algebra, $x \in \mathcal{A}$ impliziert $x^*x + 1$ invertierbar (ehemals Definition für C*-Algebra), denn x^*x positiv, somit $0 \notin \sigma(x^*x + 1) \subset [1, \infty)$.

Positivität wird unter Konjugation und *-Homomorphismen erhalten: $x = y^*y \geq 0$, dann $z^*xz = z^*y^*yz = (yz)^*yz \geq 0$ und $\pi(x) = \pi(y)^*\pi(y) \geq 0$. Ebenso wird Monotonie erhalten.

5 Spektraltheorie in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

5.1 Multiplikationsoperatoren und Borel-FK für diagonalisierbare Operatoren

Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit ONB (e_i) aus Eigenvektoren. Dann: $U : \mathcal{H} \ni e_n \mapsto \delta_n \in l^2(I)$ unitär, $M_f : l^2(I) \ni g \mapsto fg \in l^2(I)$ Multiplikationsoperator mit $f \in l^\infty(I)$ gegeben via $f(i) = \lambda_i := T(e_i)$ und $T = U^* M_f U$ ist unitär äquivalent zu Multiplikationsoperator.
Aber: Es gibt Multiplikationsoperatoren auf L^2 ohne Eigenwerte: Betrachte $M_x \in L^2([0,1])$, dann für $\lambda \in \mathbb{C}$ wegen $(x - \lambda) = 0$ fast überall: $xf(x) = \lambda f(x)$ impliziert $f = 0$ fast überall.
Ein Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt *diagonalisierbar*, falls es lokalisierbaren Maßraum (Ω, Σ, μ) sowie $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ gibt mit T unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator M_f auf $L^2(\Omega, \mu)$.
Ziel: Zeige, dass jeder normale Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ diagonalisierbar ist, entwickle beschränkten Funktionalkalkül für Multiplikationsoperatoren und lifte diesen auf normale Operatoren via Multiplikatordarstellung hoch.

5.1.1 C^* Algebra der Multiplikationsoperatoren

Die Abbildung $L^\infty \ni f \mapsto M_f \in \mathcal{B}(L^2)$ ist isometrischer, einserhaltender *-Homomorphismus, also Isomorphismus auf sein Bild $\mathcal{M} := \mathcal{M}(L^2(\Omega, \mu)) = \{M_f : f \in L^\infty\}$. Somit ist $\mathcal{M}$ kommutative *C^*-Algebra der Multiplikationsoperatoren.*

5.1.2 Borel-Funktionalkalkül für Multiplikationsoperatoren

Sei $f \in L^\infty$, $K := \operatorname{essrange} f = \sigma(M_f)$ kompakt, dann ist $B_b(K)$ die C^*-Algebra der beschränkten Borelfunktionen auf K.
Die Zuordnung $B_b(K) \ni g \mapsto g \circ f \in L^\infty$ ist *-Homomorphismus, aber im Allgemeinen weder injektiv (wähle $g = 0$ f.ü., aber $g \neq 0$), noch surjektiv (wähle auf $[0, 2]$ mit Lebesgue-Maß $f \equiv 1$ und $g = \chi_{[0,1]}$).
Definiere *Borel-Funktionalkalkül für M_f* via einserhaltendem *-Homomorphismus $B_b(\sigma(M_f)) \to L^\infty \to \mathcal{B}(L^2)$ und schreibe $g(M_f)$ für M_f eingesetzt in g.

5.1.3 Borel-Funktionalkalkül für diagonalisierbare Operatoren

Es sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ diagonalisierbar mit $T = U^* M_f U$, dann definiert der *-Homomorphismus $B_b(K) \to L^\infty \to \mathcal{M}(L^2) \subset \mathcal{B}(L^2) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $g \mapsto g \circ f \mapsto M_{g \circ f} \mapsto U^* M_{g \circ f} U$ den Borel-FK für T und dieser setzt den stetigen FK von T fort ($id(T) = T$, also stimmen stetiger FK und Borel-FK auf Polynomen überein und jene sind dicht in $C(K)$; beachte dass $\|\cdot\|_\infty$ Norm auf $B_b(K)$).

5.2 normale Operatoren sind diagonalisierbar

5.2.1 zyklische Vektoren und invariante Teilräume

Sei $x \in \mathcal{H}$, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ abgeschlossen, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ Algebra und $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ abgeschlossen unter Adjunktion.
Dann heißt x *zyklischer Vektor für* $\mathcal{A}$, falls $\mathcal{A}x$ dicht in $\mathcal{H}$. Ferner heißt x *zyklischer Vektor für* T, falls x zyklisch für $C^*(T,1)$. Es heißt K *invarianter Teilraum von* T, falls $T\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ und *invarianter Teilraum von* $\mathcal{S}$, falls $\mathcal{K}$ invariant für alle $S \in \mathcal{S}$.
Ist $\mathcal{K}$ invariant unter $\mathcal{S}$, so auch $\mathcal{K}^\perp$ (wegen Abgeschlossenheit unter Adjunktion!) und die orthogonale Projektion $P_\mathcal{K}$ auf $\mathcal{K}$ kommutiert mit allen Elementen aus $\mathcal{S}$ (vgl. VNA: Kommutante).

5.2.2 Spektralmaß μ_x

Für $f \in C(K)$ mit $f \geq 0$ ist $f(T) \geq 0$, somit $\langle f(T)x, x\rangle \geq 0$, also $C(K) \ni f \mapsto \langle f(T)x, x\rangle \in \mathbb{C}$ positives, stetiges Funktional auf $C(K)$.
Nach Riesz-Markov existiert ein eindeutiges reguläres Borelmaß μ_x mit $\int_K f \,\mathrm{d}\mu_x = \langle f(T)x, x\rangle$. Das Maß μ_x heißt das zu x gehörige *Spektralmaß*.

5.2.3 Multiplikatordarstellung für normale Operatoren

Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal, $K := \sigma(T)$.
Ist $x \in \mathcal{H}$ zyklischer Vektor für T, dann gilt für $f, g \in C(K)$: $\langle f(T)x, g(T)x\rangle = \langle f, g\rangle_{L^2}$, also $\tilde{U} : \mathcal{H} \ni f(T)x \mapsto f \in C(K)$ wohldefiniert und isometrisch. Da x zyklisch für T, d.h. $\{f(T)x : f \in C(K)\}$ dicht in $\mathcal{H}$, und $C(K)$ dicht in L^2, besitzt $\tilde{U}$ Fortsetzung zu unitärem Operator $U : \mathcal{H} \to L^2$ mit $U(x) = U(\mathrm{id}(T)x) = \mathrm{id}$ und $U^*TU = M_{\mathrm{id}}$.
Gibt es keinen zyklischen Vektor für T, so zerlege $\mathcal{H}$ in direkte Summe orthogonaler, zyklischer Teilräume (Zorn!) und wende obigen Fall auf die Räume der Zerlegung an.

5.2.4 Borel-FK für normale Operatoren

Da normale Operatoren diagonalisierbar sind, kann der Borel-Funktionalkalkül für diagonalisierbare Operatoren verwendet werden.

5.3 Zerlegung des Spektrums

Für $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ lässt sich das Spektrum $\sigma(T)$ disjunkt zerlegen als $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$. Es ist $\lambda \in \sigma_p(T)$, falls $T - \lambda$ nicht injektiv. Es ist $\lambda \in \sigma_c(T)$, falls $T - \lambda$ injektiv, nicht surjektiv, aber $\mathcal{R}(T-\lambda)$ dicht und $\lambda \in \sigma_r(T)$, falls $T - \lambda$ injektiv, nicht surjektiv und $\mathcal{R}(T-\lambda)$ nicht dicht.

5.3.1 Projektionswertiges Maß und Spektralscharen

Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal, dann definiert $\mathbb{P} : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \ni A \mapsto \chi_{A \cap \sigma(T)}(T) \in P(\mathcal{H})$ ein projektionswertiges Maß ($\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(\mathbb{C}) = 1$, σ-Additivität gilt stop). Im Fall $T = T^*$ ist $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ und es reicht $\lambda \mapsto P_\lambda := \mathbb{P}((-\infty, \lambda])$ zu betrachten, genannt *Spektralschar*. Die Zuordnung $\lambda \mapsto P_\lambda$ ist monoton und rechtsseitig stop-stetig. Wir benutzen sie, um Aussagen über die Zusammensetzung des Spektrums zu zeigen.

5.3.2 Das Spektrum normaler und s.a. Operatoren

Ist $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal, dann $\sigma_r(T) = \emptyset$, denn (O.B.d.A $\lambda = 0$, sonst betrachte $\tilde{A} := A - \lambda$ normal) ist $\mathcal{R}(T)$ nicht dicht, dann wegen $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*)$ (denn $\|Tx\| = \|T^*x\|$ für T normal) folgt $\{0\} \neq \mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}(T^*) = \mathcal{N}(T)$, also $\lambda = 0$ Eigenwert.
Nun: $T = T^*$, dann $\lambda \mapsto P_\lambda$ auf $\sigma(T)$ strikt monoton wachsend, in $\lambda \in \sigma_c(T)$ beidseitig stop-stetig (deshalb kontinuierlich!), d.h. zusätzlich links-stop-stetig, und mit Sprungstellen in $\lambda \in \sigma_p(T)$. Bild!
Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *approximativer Eigenwert*, falls es Folge (x_n) von Einheitsvektoren gibt mit $\|(T-\lambda)x_n\| \to 0$, insbesondere gilt für die Fourierkoeffizienten: $\langle Tx_n, x_n \rangle \to \lambda$. Das Spektrum eines normalen Operators besteht vollständig aus approximativen Eigenwerten.