Zusammenfassung Spektraltheorie und Operatoralgebren

Sebastian Bechtel

17. Dezember 2016

1 Spektraltheorie in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

1.1 Multiplikationsoperatoren und Borel-FK für diagonalisierbare Operatoren

Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit ONB (e_i) aus Eigenvektoren. Dann: $U : \mathcal{H} \ni e_n \mapsto \delta_n \in l^2(I)$ unitär, $M_f : l^2(I) \ni g \mapsto fg \in l^2(I)$ Multiplikationsoperator mit $f \in l^\infty(I)$ gegeben via $f(i) = \lambda_i \coloneqq T(e_i)$ und $T = U^* M_f U$ ist unitär äquivalent zu Multiplikationsoperator.
Aber: Es gibt Multiplikationsoperatoren auf L^2 ohne Eigenwerte: Betrachte $M_x \in L^2([0,1])$, dann für $\lambda \in \mathbb{C}$ wegen $(x-\lambda) = 0$ fast überall: $xf(x) = \lambda f(x)$ impliziert $f = 0$ fast überall.
Ein Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt *diagonalisierbar*, falls es lokalisierbaren Maßraum (Ω, Σ, μ) sowie $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ gibt mit T unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator M_f auf $L^2(\Omega, \mu)$.
Ziel: Zeige, dass jeder normale Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ diagonalisierbar ist, entwickle beschränkten Funktionalkalkül für Multiplikationsoperatoren und lifte diesen auf normale Operatoren via Multiplikatordarstellung hoch.

1.1.1 C^* Algebra der Multiplikationsoperatoren

Die Abbildung $L^\infty \ni f \mapsto M_f \in \mathcal{B}(L^2)$ ist isometrischer, einserhaltender *-Homomorphismus, also Isomorphismus auf sein Bild $\mathcal{M} \coloneqq \mathcal{M}(L^2(\Omega, \mu)) = \{M_f : f \in L^\infty\}$. Somit ist $\mathcal{M}$ kommutative *C^*-Algebra der Multiplikationsoperatoren.*

1.1.2 Borel-Funktionalkalkül für Multiplikationsoperatoren

Sei $f \in L^\infty$, $K \coloneqq \operatorname{essrange} f = \sigma(M_f)$ kompakt, dann ist $B_b(K)$ die C^*-Algebra der beschränkten Borelfunktionen auf K.

Die Zuordnung $B_b(K) \ni g \mapsto g \circ f \in L^\infty$ ist *-Homomorphismus, aber im Allgemeinen weder injektiv (wähle $g = 0$ f.ü., aber $g \neq 0$), noch surjektiv (wähle auf $[0,2]$ mit Lebesgue-Maß $f \equiv 1$ und $g = \chi_{[0,1]}$).
Definiere *Borel-Funktionalkalkül für M_f* via einserhaltendem *-Homomorphismus $B_b(\sigma(M_f)) \to L^\infty \to \mathcal{B}(L^2)$ und schreibe $g(M_f)$ für M_f eingesetzt in g.

1.1.3 Borel-Funktionalkalkül für diagonalisierbare Operatoren

Es sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ diagonalisierbar mit $T = U^* M_f U$, dann definiert der *-Homomorphismus $B_b(K) \to L^\infty \to \mathcal{M}(L^2) \subset \mathcal{B}(L^2) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $g \mapsto g \circ f \mapsto M_{g \circ f} \mapsto U^* M_{g \circ f} U$ den Borel-FK für T und dieser setzt den stetigen FK von T fort ($id(T) = T$, also stimmen stetiger FK und Borel-FK auf Polynomen überein und jene sind dicht in $C(K)$; beachte dass $\|\cdot\|_\infty$ Norm auf $B_b(K)$).

1.2 normale Operatoren sind diagonalisierbar

1.2.1 zyklische Vektoren und invariante Teilräume

Sei $x \in \mathcal{H}$, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ abgeschlossen, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ Algebra und $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ abgeschlossen unter Adjunktion.
Dann heißt *x zyklischer Vektor für $\mathcal{A}$*, falls $\mathcal{A}x$ dicht in $\mathcal{H}$. Ferner heißt *x zyklischer Vektor für T*, falls x zyklisch für $C^*(T, 1)$. Es heißt *K invarianter Teilraum von T*, falls $T\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ und *invarianter Teilraum von $\mathcal{S}$*, falls $\mathcal{K}$ invariant für alle $S \in \mathcal{S}$.
Ist $\mathcal{K}$ invariant unter $\mathcal{S}$, so auch $\mathcal{K}^\perp$ (wegen Abgeschlossenheit unter Adjunktion!) und die orthogonale Projektion $P_\mathcal{K}$ auf $\mathcal{K}$ kommutiert mit allen Elementen aus $\mathcal{S}$ (vgl. VNA: Kommutante).

1.2.2 Spektralmaß μ_x

Für $f \in C(K)$ mit $f \geq 0$ ist $f(T) \geq 0$, somit $\langle f(T)x, x\rangle \geq 0$, also $C(K) \ni f \mapsto \langle f(T)x, x\rangle \in \mathbb{C}$ positives, stetiges Funktional auf $C(K)$.
Nach Riesz-Markov existiert ein eindeutiges reguläres Borelmaß μ_x mit $\int_K f \,\mathrm{d}\mu_x = \langle f(T)x, x\rangle$.
Das Maß μ_x heißt das zu x gehörige *Spektralmaß*.

1.2.3 Multiplikatordarstellung für normale Operatoren

Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal, $K := \sigma(T)$.
Ist $x \in \mathcal{H}$ zyklischer Vektor für T, dann gilt für $f, g \in C(K)$: $\langle f(T)x, g(T)x\rangle = \langle f, g\rangle_{L^2}$, also $\tilde{U} : \mathcal{H} \ni f(T)x \mapsto f \in C(K)$ wohldefiniert und isometrisch. Da x zyklisch für T, d.h. $\{f(T)x :$

$f \in C(K)\}$ dicht in $\mathcal{H}$, und $C(K)$ dicht in L^2, besitzt $\tilde{U}$ Fortsetzung zu unitärem Operator $U : \mathcal{H} \to L^2$ mit $U(x) = U(\mathrm{id}(T)x) = \mathrm{id}$ und $U^*TU = M_{\mathrm{id}}$.
Gibt es keinen zyklischen Vektor für T, so zerlege $\mathcal{H}$ in direkte Summe orthogonaler, zyklischer Teilräume (Zorn!) und wende obigen Fall auf die Räume der Zerlegung an.

1.2.4 Borel-FK für normale Operatoren

Da normale Operatoren diagonalisierbar sind, kann der Borel-Funktionalkalkül für diagonalisierbare Operatoren verwendet werden.

1.3 Zerlegung des Spektrums

Für $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ lässt sich das Spektrum $\sigma(T)$ disjunkt zerlegen als $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$. Es ist $\lambda \in \sigma_p(T)$, falls $T - \lambda$ nicht injektiv. Es ist $\lambda \in \sigma_c(T)$, falls $T - \lambda$ injektiv, nicht surjektiv, aber $\mathcal{R}(T - \lambda)$ dicht und $\lambda \in \sigma_r(T)$, falls $T - \lambda$ injektiv, nicht surjektiv und $\mathcal{R}(T - \lambda)$ nicht dicht.

1.3.1 Projektionswertiges Maß und Spektralscharen

Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal, dann definiert $\mathbb{P} : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \ni A \mapsto \chi_{A \cap \sigma(T)}(T) \in P(\mathcal{H})$ ein projektionswertiges Maß ($\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(\mathbb{C}) = 1$, σ-Additivität gilt stop). Im Fall $T = T^*$ ist $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ und es reicht $\lambda \mapsto P_\lambda := \mathbb{P}((-\infty, \lambda])$ zu betrachten, genannt *Spektralschar*. Die Zuordnung $\lambda \mapsto P_\lambda$ ist monoton und rechtsseitig stop-stetig. Wir benutzen sie, um Aussagen über die Zusammensetzung des Spektrums zu zeigen.

1.3.2 Das Spektrum normaler und s.a. Operatoren

Ist $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal, dann $\sigma_r(T) = \emptyset$, denn (O.B.d.A $\lambda = 0$, sonst betrachte $\tilde{A} := A - \lambda$ normal) ist $\mathcal{R}(T)$ nicht dicht, dann wegen $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*)$ (denn $\|Tx\| = \|T^*x\|$ für T normal) folgt $\{0\} \neq \mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}(T^*) = \mathcal{N}(T)$, also $\lambda = 0$ Eigenwert.
Nun: $T = T^*$, dann $\lambda \mapsto P_\lambda$ auf $\sigma(T)$ strikt monoton wachsend, in $\lambda \in \sigma_c(T)$ beidseitig stop-stetig (deshalb kontinuierlich!), d.h. zusätzlich links-stop-stetig, und mit Sprungstellen in $\lambda \in \sigma_p(T)$. Bild!
Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *approximativer Eigenwert*, falls es Folge (x_n) von Einheitsvektoren gibt mit $\|(T - \lambda)x_n\| \to 0$, insbesondere gilt für die Fourierkoeffizienten: $\langle Tx_n, x_n \rangle \to \lambda$. Das Spektrum eines normalen Operators besteht vollständig aus approximativen Eigenwerten.