Zusammenfassung Spektraltheorie und Operatoralgebren

Sebastian Bechtel

24. Dezember 2016

1 Grundlegendes zu Algebren

1.1 Beispiele von Algebren

1.2 Elementare Eigenschaften

Sei $\mathcal{A}$ Banachalgebra. Dann ist die Multiplikation stetig. Hat $\mathcal{A}$ eine Involution und ist die C*-Eigenschaft erfüllt, so ist $\mathcal{A}$ eine Banach-*-Algebra: $\|x\|^2 = \|x^*x\| \leq \|x^*\|\|x\|$, also $\|x\| \leq \|x^*\|$, somit $\|x\| \leq \|x^*\| \leq \|(x^*)^*\| = \|x\|$. Ist $1 \in \mathcal{A}$, so gilt $\|1\| \geq 1$, denn $\|1\| \leq \|1\|^2$ und ist $\mathcal{A}$ C*-Algebra, so gilt $\|1\| = 1$, denn es gilt $1^* = 1$ und somit folgt die Behauptung aus $\|1\| = \|1^*1\| = \|1\|^2$.

1.3 Algebren ohne Eins

Algebren wie $L^1(\mathbb{R})$ und $C_0(\mathbb{R})$ haben keine Eins. Um trotzdem Spektraltheorie betreiben zu können, betten wir sie als Ideale in eine Algebra mit Eins ein.
Algebraisch: $\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \times \mathbb{C}$ mit geeigneter Multiplikation ist Algebra mit $1_{\tilde{\mathcal{A}}} = (0, 1)$ und $\mathcal{A} \ni x \mapsto (x, 0) \in \tilde{\mathcal{A}}$ bettet $\mathcal{A}$ als Ideal in $\tilde{\mathcal{A}}$ ein.
Banach-algebraisch: Statte $\tilde{\mathcal{A}}$ mit l^1 Norm der direkten Summe aus, also $\|(x, \alpha)\|_{\tilde{\mathcal{A}}} = \|x\| + |\alpha|$.
C*-algebraisch: Problem: Banach-algebraische Konstruktion erhält C*-Eigenschaft im Allgemeinen nicht. Definiere deshalb andere Norm, deren Konstruktion aber bereits die C*-Eigenschaft benutzt!

1.3.1 Linksreguläre Darstellung

Betrachte den Algebrahomomorphismus $\mathcal{A} \ni x \mapsto L_x \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, wobei $L_x(y) := xy$ die *Linksreguläre Darstellung* ist. Ist $\mathcal{A}$ C*-Algebra, dann gilt $\|L_x\| = \|x\|$, denn $\|L_x\| \geq \|xx^*\|/\|x^*\| =$

$\|x^*\| = \|x\|$ und $\|L_x\| \leq \|x\|$ ist klar.
Also: Ist $\mathcal{A}$ C*-Algebra, dann betrachte auf $\tilde{\mathcal{A}}$ die Norm $\|(x, \alpha)\| = \|L_x + \alpha\|_{\text{op}}$. Definitheit nutzt Isometrie des Algebrahomomorphismus und die Tatsache, dass $\mathcal{A}$ keine Eins besitzt.

1.4 Spektraltheorie in Banachalgebren

Sei $\mathcal{A}$ Banachalgebra mit Eins. Für $x \in \mathcal{A}$ definiere durch $\rho(x) \ni \lambda \mapsto r(\lambda, x) := (\lambda - x)^{-1}$ die *Resolvente* $r(\cdot, x)$ von x.
Ist $0 \neq \lambda \in \sigma(x)$, so ist $1/\lambda \in \sigma(x^{-1})$. Auch im Fall $xy \neq yx$ stimmen deren Spektren fast überein, es gilt $\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}$. Hinzunahme der 0 ist notwendig: Sei S der Rechtsshift, dann $S^*S = \text{id}$, also $0 \notin \sigma(S^*S)$, aber SS^* nicht injektiv. Ist $\|x\| < 1$, dann ist $1 - x$ invertierbar und die Inverse ist gegeben durch die *Neumann-Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, vgl. geometrische Reihe! Die Resolventenmenge ist offen, also $\sigma(x)$ abgeschlossen, außerdem gilt für den *Spektralradius* $r_\sigma(x) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$ die Abschätzung $r_\sigma(x) \leq \|x\|$, also ist das Spektrum $\sigma(x)$ kompakt. Es gilt $\lim_{|\lambda| \to \infty} r(\lambda, x) = 0$, vgl. mit Resolventenabschätzungen für H.G.en, z.B. $\|r(\lambda, A)\| \leq M/|\lambda|$ für Generatoren von analytischen H.G.en. Die Resolvente ist holomorph (leite Potenzreihenentwicklung aus Neumann-Reihe ab). Es folgt $\sigma(x) \neq \emptyset$: Wäre $\sigma(x)$ leer, dann wäre die Resolvente eine ganze Funktion. Wegen dem Grenzverhalten für $|\lambda| \to \infty$ folgt Beschränktheit, also nach Liouville $r(\lambda, x) \equiv 0$, aber 0 ist nicht invertierbar, Widerspruch.

1.5 Der Satz von Gelfand-Mazur

Ist $\mathcal{A}$ Banachalgebra mit Eins und jedes $x \neq 0$ sei invertierbar (genannt *Divisionsalgebra*), dann gilt $\mathcal{A} \cong \mathbb{C}$. Bew: Identifiziere x eindeutig mit einem Skalar: Aus $\sigma(x) \neq \emptyset$ folgt die Existenz eines λ mit $\lambda - x$ nicht invertierbar, also nach Voraussetzung $x = \lambda$.

2 Gelfandtheorie

Ist E normierter Raum, so ist $K := (E')_1$ eine schwach-*-kompakte Menge und $E \ni x \mapsto \hat{x} \in C(K)$ ein isometrischer Isomorphismus von normierten Räumen, wobei K also kompakter Hausdorffraum ist. Für eine kommutative, unitale Banachalgebra $\mathcal{A}$ ist aber $C(K)$ keine Algebra, denn im Allgemeinen gilt $(\hat{x}\hat{y})(\varphi) = \varphi(x)\varphi(y) \neq \varphi(xy) = \widehat{xy}(\varphi)$ (sofern φ keine multiplikative Linearform ist, z.B. das Integral auf $L^1([0, 1])$).
Ansatz: Schränke K ein, sodass Multiplikativität erfüllt ist!
Wir definieren das *Spektrum der Algebra* via $\hat{\mathcal{A}} := \{\varphi \in \mathcal{A}^* : \varphi \neq 0, \varphi \text{ multiplikativ}\}$. Dies ist der Kandidat für die Einschränkung. Wir benötigen $\varphi \neq 0$, da sonst $\hat{1}$ keine Eins in $C(\hat{\mathcal{A}})$ sein kann, denn es gilt $\hat{1}(0) = 0(1) = 0$.

Ist $\varphi \in \hat{\mathcal{A}}$ und $\mathcal{A}$ unital, so gilt $\varphi(1) = 1$, denn $\varphi(1) = \varphi(1)^2$ und $\varphi(1) = 0$ impliziert $\varphi = 0$. Außerdem gilt $\|\varphi\| \leq 1$, insbesondere $\hat{\mathcal{A}} \subseteq (E^*)_1$ (Banach-Alaoglu!). Aus $\varphi(x) = \lambda$ folgt $\lambda \in \sigma(x)$, denn dann gilt $\varphi(\lambda - x) = 0$ und wegen Multiplikativität und $\varphi(1)$ kann dann λ nicht in der Resolventenmenge sein. Daraus folgt dann $|\varphi(x)| \leq r_\sigma(x) \leq \|x\|$.

3 Spektraltheorie in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

3.1 Multiplikationsoperatoren und Borel-FK für diagonalisierbare Operatoren

Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit ONB (e_i) aus Eigenvektoren. Dann: $U : \mathcal{H} \ni e_n \mapsto \delta_n \in l^2(I)$ unitär, $M_f : l^2(I) \ni g \mapsto fg \in l^2(I)$ Multiplikationsoperator mit $f \in l^\infty(I)$ gegeben via $f(i) = \lambda_i \coloneqq T(e_i)$ und $T = U^* M_f U$ ist unitär äquivalent zu Multiplikationsoperator.
Aber: Es gibt Multiplikationsoperatoren auf L^2 ohne Eigenwerte: Betrachte $M_x \in L^2([0,1])$, dann für $\lambda \in \mathbb{C}$ wegen $(x - \lambda) = 0$ fast überall: $xf(x) = \lambda f(x)$ impliziert $f = 0$ fast überall.
Ein Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt *diagonalisierbar*, falls es lokalisierbaren Maßraum (Ω, Σ, μ) sowie $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$ gibt mit T unitär äquivalent zum Multiplikationsoperator M_f auf $L^2(\Omega, \mu)$.
Ziel: Zeige, dass jeder normale Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ diagonalisierbar ist, entwickle beschränkten Funktionalkalkül für Multiplikationsoperatoren und lifte diesen auf normale Operatoren via Multiplikatordarstellung hoch.

3.1.1 C^* Algebra der Multiplikationsoperatoren

Die Abbildung $L^\infty \ni f \mapsto M_f \in \mathcal{B}(L^2)$ ist isometrischer, einserhaltender *-Homomorphismus, also Isomorphismus auf sein Bild $\mathcal{M} \coloneqq \mathcal{M}(L^2(\Omega, \mu)) = \{M_f : f \in L^\infty\}$. Somit ist $\mathcal{M}$ kommutative *C^*-Algebra der Multiplikationsoperatoren.*

3.1.2 Borel-Funktionalkalkül für Multiplikationsoperatoren

Sei $f \in L^\infty$, $K \coloneqq \operatorname{essrange} f = \sigma(M_f)$ kompakt, dann ist $B_b(K)$ die C^*-Algebra der beschränkten Borelfunktionen auf K.
Die Zuordnung $B_b(K) \ni g \mapsto g \circ f \in L^\infty$ ist *-Homomorphismus, aber im Allgemeinen weder injektiv (wähle $g = 0$ f.ü., aber $g \neq 0$), noch surjektiv (wähle auf $[0, 2]$ mit Lebesgue-Maß $f \equiv 1$ und $g = \chi_{[0,1]}$).
Definiere *Borel-Funktionalkalkül für M_f* via einserhaltendem *-Homomorphismus $B_b(\sigma(M_f)) \to L^\infty \to \mathcal{B}(L^2)$ und schreibe $g(M_f)$ für M_f eingesetzt in g.

3.1.3 Borel-Funktionalkalkül für diagonalisierbare Operatoren

Es sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ diagonalisierbar mit $T = U^* M_f U$, dann definiert der *-Homomorphismus $B_b(K) \to L^\infty \to \mathcal{M}(L^2) \subset \mathcal{B}(L^2) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $g \mapsto g \circ f \mapsto M_{g \circ f} \mapsto U^* M_{g \circ f} U$ den Borel-FK für T und dieser setzt den stetigen FK von T fort ($id(T) = T$, also stimmen stetiger FK und Borel-FK auf Polynomen überein und jene sind dicht in $C(K)$; beachte dass $\| \cdot \|_\infty$ Norm auf $B_b(K)$).

3.2 normale Operatoren sind diagonalisierbar

3.2.1 zyklische Vektoren und invariante Teilräume

Sei $x \in \mathcal{H}$, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ abgeschlossen, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ Algebra und $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ abgeschlossen unter Adjunktion.

Dann heißt x *zyklischer Vektor für* $\mathcal{A}$, falls $\mathcal{A}x$ dicht in $\mathcal{H}$. Ferner heißt x *zyklischer Vektor für* T, falls x zyklisch für $C^*(T, 1)$. Es heißt K *invarianter Teilraum von* T, falls $T\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ und *invarianter Teilraum von* $\mathcal{S}$, falls $\mathcal{K}$ invariant für alle $S \in \mathcal{S}$.

Ist $\mathcal{K}$ invariant unter $\mathcal{S}$, so auch $\mathcal{K}^\perp$ (wegen Abgeschlossenheit unter Adjunktion!) und die orthogonale Projektion $P_\mathcal{K}$ auf $\mathcal{K}$ kommutiert mit allen Elementen aus $\mathcal{S}$ (vgl. VNA: Kommutante).

3.2.2 Spektralmaß μ_x

Für $f \in C(K)$ mit $f \geq 0$ ist $f(T) \geq 0$, somit $\langle f(T)x, x \rangle \geq 0$, also $C(K) \ni f \mapsto \langle f(T)x, x \rangle \in \mathbb{C}$ positives, stetiges Funktional auf $C(K)$.

Nach Riesz-Markov existiert ein eindeutiges reguläres Borelmaß μ_x mit $\int_K f \, \mathrm{d}\mu_x = \langle f(T)x, x \rangle$. Das Maß μ_x heißt das zu x gehörige *Spektralmaß*.

3.2.3 Multiplikatordarstellung für normale Operatoren

Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal, $K \coloneqq \sigma(T)$.

Ist $x \in \mathcal{H}$ zyklischer Vektor für T, dann gilt für $f, g \in C(K)$: $\langle f(T)x, g(T)x \rangle = \langle f, g \rangle_{L^2}$, also $\tilde{U} : \mathcal{H} \ni f(T)x \mapsto f \in C(K)$ wohldefiniert und isometrisch. Da x zyklisch für T, d.h. $\{f(T)x : f \in C(K)\}$ dicht in $\mathcal{H}$, und $C(K)$ dicht in L^2, besitzt $\tilde{U}$ Fortsetzung zu unitärem Operator $U : \mathcal{H} \to L^2$ mit $U(x) = U(\mathrm{id}(T)x) = \mathrm{id}$ und $U^*TU = M_{\mathrm{id}}$.

Gibt es keinen zyklischen Vektor für T, so zerlege $\mathcal{H}$ in direkte Summe orthogonaler, zyklischer Teilräume (Zorn!) und wende obigen Fall auf die Räume der Zerlegung an.

3.2.4 Borel-FK für normale Operatoren

Da normale Operatoren diagonalisierbar sind, kann der Borel-Funktionalkalkül für diagonalisierbare Operatoren verwendet werden.

3.3 Zerlegung des Spektrums

Für $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ lässt sich das Spektrum $\sigma(T)$ disjunkt zerlegen als $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$. Es ist $\lambda \in \sigma_p(T)$, falls $T - \lambda$ nicht injektiv. Es ist $\lambda \in \sigma_c(T)$, falls $T - \lambda$ injektiv, nicht surjektiv, aber $\mathcal{R}(T - \lambda)$ dicht und $\lambda \in \sigma_r(T)$, falls $T - \lambda$ injektiv, nicht surjektiv und $\mathcal{R}(T - \lambda)$ nicht dicht.

3.3.1 Projektionswertiges Maß und Spektralscharen

Sei $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal, dann definiert $\mathbb{P} : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \ni A \mapsto \chi_{A \cap \sigma(T)}(T) \in P(\mathcal{H})$ ein projektionswertiges Maß ($\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(\mathbb{C}) = 1$, σ-Additivität gilt stop). Im Fall $T = T^*$ ist $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ und es reicht $\lambda \mapsto P_\lambda := \mathbb{P}((-\infty, \lambda])$ zu betrachten, genannt *Spektralschar*. Die Zuordnung $\lambda \mapsto P_\lambda$ ist monoton und rechtsseitig stop-stetig. Wir benutzen sie, um Aussagen über die Zusammensetzung des Spektrums zu zeigen.

3.3.2 Das Spektrum normaler und s.a. Operatoren

Ist $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ normal, dann $\sigma_r(T) = \emptyset$, denn (O.B.d.A $\lambda = 0$, sonst betrachte $\tilde{A} := A - \lambda$ normal) ist $\mathcal{R}(T)$ nicht dicht, dann wegen $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*)$ (denn $\|Tx\| = \|T^*x\|$ für T normal) folgt $\{0\} \neq \mathcal{R}(T)^\perp = \mathcal{N}(T^*) = \mathcal{N}(T)$, also $\lambda = 0$ Eigenwert.
Nun: $T = T^*$, dann $\lambda \mapsto P_\lambda$ auf $\sigma(T)$ strikt monoton wachsend, in $\lambda \in \sigma_c(T)$ beidseitig stop-stetig (deshalb kontinuierlich!), d.h. zusätzlich links-stop-stetig, und mit Sprungstellen in $\lambda \in \sigma_p(T)$. Bild!
Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *approximativer Eigenwert*, falls es Folge (x_n) von Einheitsvektoren gibt mit $\|(T - \lambda)x_n\| \to 0$, insbesondere gilt für die Fourierkoeffizienten: $\langle Tx_n, x_n \rangle \to \lambda$. Das Spektrum eines normalen Operators besteht vollständig aus approximativen Eigenwerten.