Topologie

Sebastian Bechtel

15. April 2015

Filter

Definition. Sei X Menge, $\emptyset \neq \varphi \subseteq \mathcal{P}(X)$. φ heißt Filter auf X gdw.

(1) $X \in \varphi, \emptyset \notin \varphi$

(2) $A \in \varphi$ und $B \in \varphi \implies A \cap B \in \varphi$

(3) $A \in \varphi$ und $B \supseteq A \implies B \in \varphi$

Beispiel 1.

- Aus Folgen gebildete Filter: Elementarfilter
- Für $\emptyset \neq A \subseteq X$: $[A] \coloneqq \{P \subseteq X : PA\}$
- Spezialfall $A = \{a\}$ ist Einpunktfilter $\dot{a} \coloneqq [\{a\}]$ zu a

Definition. X Menge, φ Filter auf X, $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}_0(X)$.

- $\mathfrak{B}$ heißt Basis von φ gdw. $\varphi = \{P \subseteq X : \exists B \in \mathfrak{B} : B \subseteq P\}$
- $\mathfrak{B}$ heißt Subbasis von φ gdw. die Familie aller endlichen Schnitte von Elementen in $\mathfrak{B}$ eine Basis von φ ist.
- φ heißt der von $\mathfrak{B}$ erzeugte Filter $[\mathfrak{B}]$.

Proposition 1. *Sei $\emptyset \neq X$ Menge, $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}_0(X)$.*

(1) $\mathfrak{B}$ ist Filtersubbasis gdw. die endlichen Durchschnitte von Elementen aus $\mathfrak{B}$ sämtlich nicht leer sind.

(2) $\mathfrak{B}$ *ist Filterbasis gdw. zu je endlich vielen* $B_1, \ldots, B_k \in \mathfrak{B}$ *es ein* $B_0 \in \mathfrak{B}$ *gibt, sodass* $B_0 \subseteq \cap_{i=1}^{k} B_i$.

(3) Sind $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *Filterbasen, so ist* $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ *Filtersubbasis gdw. für* $A \in \mathfrak{A}$ *und* $B \in \mathfrak{B}$ *gilt:* $A \cap B \neq \emptyset$.

(4) Ist $\mathfrak{A}$ *eine Filterbasis und* $P \subseteq X$, *sodass für* $A \in \mathfrak{A}$ *gilt:* $P \cap A \neq \emptyset$, *dann ist* $\mathfrak{A} \cup \{P\}$ *Filtersubbasis.*

Definition. X Menge, $d : X \times X \to [0, \infty)$ mit

(1) für $x, y \in X$ gilt $d(x, y) = 0$ gdw. $x = y$.

(2) für $x, y \in X$ gilt $d(x, y) = d(y, x)$.

(3) für $x, y, z \in X$ gilt $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

dann heißt (X, d) metrischer Raum.

Definition. Sei (X, d) metrischer Raum, $x \in X$, $\varepsilon > 0$.

- $U_\varepsilon = U_\varepsilon^d := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ heißt ε-Umgebung von x.
- Eine Teilmenge $O \subseteq X$ heißt offen (bzgl. d), falls es für $x \in O$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $U_\varepsilon(x) \subseteq O$.
- Eine Menge $V \subseteq X$ heißt Umgebung von x, falls es $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $U_\varepsilon(x) \subseteq V$.
- Die Familie aller Umgebungen von x heißt Umgebungsfilter von x: $\underline{U}(x)$
- Eine Folge (x_n) in X konvergiert gegen y, falls es für $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für $m > n_0$ gilt: $d(x_m, y) < \varepsilon$
- Ein Filter φ auf X konvergiert gegen y, falls für $\varepsilon > 0$ gilt: $U_\varepsilon(y) \in \varphi$. Äquivalent: $\underline{U}(y) \subseteq \varphi$

Proposition 2. *In einem metrischen Raum* (X, d) *ist jede* ε*-Umgebung* $U_\varepsilon(x)$ *offen.*

Beweis. Sei $y \in U_\varepsilon(x)$. Wähle $\delta := \varepsilon - d(x, y)$, dann ist $U_\delta(y) \subseteq U_\varepsilon(x)$. □

Proposition 3. *Sei* (X, d) *metrischer Raum,* $O \subseteq X$. *Es sind äquivalent:*

(1) O *ist offen.*

(2) Für jede Folge (x_n) in X, die gegen $y \in O$ konvergiert, gilt: es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für $m > n_0$ gilt: $x_m \in O$.

(3) Für jeden Filter φ auf X, der gegen $y \in O$ konvergiert, gilt $O \in \varphi$.

Beweis. (1) $\implies$ (2): Da O offen ist, gibt es $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon \subseteq O$. Nun gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für $m > n$ gilt: $x_m \in U_\varepsilon(y) \subseteq O$.

(2) $\implies$ (1): Angenommen O ist nicht offen, dann gibt es $y \in O$, sodass für $n \in \mathbb{N}^+$ ein x_m existiert mit $x_m \in U_{1/n}(y) \setminus O$. Widerspruch!

(1) $\implies$ (3): O offen, $\varphi \to y \in O$, dann gibt es $\varepsilon > 0$, sodass $U_\varepsilon(y) \subseteq O$. $U_\varepsilon(y) \in \varphi$, also auch $O \in \varphi$.

(3) $\implies$ (1): Wähle für alle $x \in X$ den Umgebungsfilter von x. □

Lemma 1. *Sei (X, d) metrischer Raum, $\tau_d \coloneqq \{O \subseteq X : O$ offen bzgl. $d\}$. Dann gelten:*

(1) $X \in \tau_d$, $\emptyset \in \tau_d$

(2) $A \in \tau_d$ und $B \in \tau_d \implies A \cap B \in \tau_d$

(3) $\mathfrak{B} \subseteq \tau_d \implies \cup_{B \in \mathfrak{B}} B \in \tau_d$

Definition. Seien $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ metrische Räume, $f : X_1 \to X_2$. f heißt <u>stetig</u>, falls

- es für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für $y \in X_1$ mit $d_1(x, y) < \delta$ folgt: $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$
- Äquivalent: für $x \in X_1$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, sodass $f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$
- Äquivalent: für $x \in X_1$ gilt: $[f(\underline{U}(x))] \supseteq \underline{U}(f(x))$

Lemma 2. *Eine Funktion $f : X_1 \to X_2$ zwischen metrischen Räumen $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ ist stetig gdw. für jede in X_2 offene Menge O das Urbild $f(O)$ offen in X_1 ist.*

Beweis. "$\Rightarrow$": Sei f stetig, $O \subseteq X_2$ offen, $x \in f(0)$. $f(x) \in O$, also gibt es $\varepsilon > 0$, sodass $U_\varepsilon(f(x)) \subseteq O$. Wegen Stetigkeit gibt es $\delta > 0$, sodass $f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x)) \subseteq O$. Somit $U_\delta(x) \subseteq f(O)$, also $f(O)$ offen.

"$\Leftarrow$": Sei $x \in X_1$. Setze $O \coloneqq U_\varepsilon(f(x))$. Dann ist $f(U_\varepsilon(f(x)))$ offen, also gibt es $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subseteq f(U_\varepsilon(f(x)))$, somit $f(U_\delta(x)) \subseteq U_\varepsilon(f(x))$. □

Definition. Sei $X = \mathbb{R}^\mathbb{R}$.

- Eine Folge (f_n) in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ konvergiert punktweise gegen $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, falls für $x \in \mathbb{R}$ gilt $f_n(f) \to g(x)$.
- Ein Filter φ auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ konvergiert punktweise gegen $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, falls für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\varphi(x) \to g(x)$, wobei $\varphi(x) \coloneqq [\{F(x) : F \in \varphi\}]$ und $F(x) \coloneqq \{f(x) : f \in F\}$.

Lemma 3. *Es gibt keine Metrik auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, deren Konvergenz die punktweisen Konvergenz ist.*

Topologische Räume

Definition. Sei X Menge, $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$. τ heißt eine Topologie auf X gdw.

(1) $\emptyset \in \tau, X \in \tau$

(2) $A, B \in \tau \implies A \cap B \in \tau$

(3) $\mathfrak{A} \subseteq \tau \implies \left(\bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A\right) \in \tau$

Die Elemente von τ heißen offene Mengen (bzgl. τ). Das Paar (X, τ) heißt ein topologischer Raum.

- d Metrik, dann ist τ_d Topologie.
- $\tau \coloneqq \mathcal{P}(X)$ (diskrete Topologie).
- $\{\emptyset, X\}$ (indiskrete Topologie)
- X unendliche Menge, dann ist $\tau_{\text{cf}} \coloneqq \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\}$ Topologie.
- X unendlich, dann ist $\tau_{\text{cc}} \coloneqq \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ höchstens abzählbar}\} \cup \{\emptyset\}$ Topologie.
- φ Filter auf X, dann ist $\varphi \cup \{\emptyset\}$ Topologie.

Proposition 4. *Sei (X, τ) topologischer Raum. Äquivalent sind:*

(1) $X \supset O \in \tau$

(2) für $o \in O$ gibt es $U \in \tau$, sodass $o \in U \subseteq O$.

Definition. Der Filter, der von der Basis $\{U \in \tau : x \in U\}$ erzeugt wird, heißt Umgebungsfilter von x: $\underline{U}^{\tau}(x)$.

Definition. $x \in X$, (X, τ) topologischer Raum, φ Filter auf X. φ konvergiert gegen X, falls $\varphi \supseteq \underline{U}(x)$, $\varphi \to x$

Proposition 5. *(X, τ) topologischer Raum. Äquivalent sind:*

(1) $O \subseteq X$ ist offen

(2) für alle Filter φ auf X mit $\varphi \to x \in O$ gilt: $O \in \varphi$.

Bemerkung. $X = \mathbb{R}, \tau = \tau_{\text{cc}}$, dann konvergieren nur Folgen, die irgendwann konstant sind.

Filter und Ultrafilter

X Menge, $\mathfrak{F}(X)$ Menge aller Filter auf X.

Proposition 6. *X Menge, $\underline{C} \subseteq \mathfrak{F}(X)$ total geordnet durch $\subseteq$. Dann ist $\bigcup_{C \in \underline{C}} C$ wieder Filter und ein Supremum von $\underline{C}$ in $\mathfrak{F}(X)$.*

Beweis. totale Ordnung für Schnitte. □

Korollar 1. *X Menge. Zu jedem $\underline{C} \in \mathfrak{F}(X)$ existiert ein maximales Element $\psi \in \mathfrak{F}(X)$ mit $\varphi \subset \psi$.*

Definition. Die maximalen Filter auf X heißen auch Ultrafilter auf X. Familie aller Ultrafilter auf X: $\mathfrak{F}_0(X)$. Die Familie aller Oberfilter von $\varphi \in \mathfrak{F}(X)$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}(\varphi)$. Familie aller Oberultrafilter von φ: $\mathfrak{F}_0(\varphi)$.

Lemma 4. *X Menge, $\varphi \in \mathfrak{F}(X)$. Äquivalent sind:*

- *φ Ultrafilter*
- *$A \subseteq X$, so gilt $A \in \varphi$ oder $X \setminus A \in \varphi$*
- *Für je endlich viele Teilmengen $A_1, \ldots, A_n$ von X folgt aus $(\bigcup_{i=1}^n A_i) \in \varphi$ stets, dass es ein i mit $A_i \in \varphi$ gibt, wobei $1 \leq i \leq n$.*

Beweis. (1) nach (2): Angenommen $A \notin \varphi$, dann gilt für $P \in \varphi : P \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Also ist $\varphi \cup \{X \setminus A\}$ eine Filtersubbasis. Also existiert Ultrafilter ψ mit $\psi \supseteq \varphi \cup \{X \setminus A\}$. Da φ selbst maximal ist, folgt $\varphi = \psi$, somit $(X \setminus A) \in \varphi$.

(2) nach (3): Angenommen für alle $i \in I$ gilt $A_i \notin \varphi$. Dann ist $(X \setminus A_i) \in \varphi$ für alle $i \in I$, also auch $(\bigcap_{i=1}^{n}(X \setminus A_i)) \in \varphi$. Dann gilt auch $X \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \in \varphi$, also $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \notin \varphi$, Widerspruch!

(3) nach (1): Angenommen φ ist nicht maximal, also dass ein $\psi \in \mathfrak{F}_0(X)$ existiert, mit $\psi \neq \varphi$. Also existiert $A \in \psi \setminus \varphi$. Es gilt $A \cup (X \setminus A) \in \varphi$, also nach Annahme $A \in \varphi$ oder $(X \setminus A) \in \varphi$. $A \in \varphi$ kann nicht sein, da $A \in \psi \setminus \varphi$. Wäre $(X \setminus A) \in \varphi$, so auch $(X \setminus A) \in \psi$ im Widerspruch zu $A \in \psi$. Also φ maximal. □

Einpunktfilter sind Ultrafilter, ansonsten nicht konstruierbar.

Proposition 7. *Jeder Filter φ ist gleich dem Durchschnitt aller seiner Oberultrafilter.*

Beweis. Übung! □

Korollar 2. *X Menge, φ Filter auf X, dann gilt:*

$$\mathfrak{F}_0\left(\bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{F}_0(\varphi_i)$$

Beweis. "$\supseteq$": ✓"$\subseteq$": Sei $\psi \in \mathfrak{F}_0\left(\bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i\right)$. Angenommen $\psi \notin \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{F}_0(\varphi_i)$, dann gibt es für jedes $1 \leq i \leq n$ ein $A_i \in \varphi$, sodass $A_i \notin \psi$. Also $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \in (\bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i) \in \psi$. Nach Lemma gibt es dann i_0 mit $A_{i_0} \in \ \psi$, Widerspruch! □

Lemma 5. *Sei X Menge, $\mathfrak{E} \subseteq \mathcal{P}_0(X)$ sei unter endlicher Vereinigung abgeschlossen, $\varphi \in \mathfrak{F}(X)$. Dann gilt: φ enthält ein Element von $\mathfrak{E}$ gdw. jeder Oberultrafilter von φ ein Element von $\mathfrak{E}$ enthält.*

Beweis. "$\Leftarrow$": Sei ψ Oberultrafilter von φ mit $\psi \cap \mathfrak{E} \neq \emptyset$. Angenommen $\varphi \cap \mathfrak{E} = \emptyset$. Betrachte:

$$\mathfrak{B} := \{X \setminus E : E \in \mathfrak{E}\}$$

$\mathfrak{B}$ ist Filtersubbasis, denn X ist nicht durch endliche Schnitte von Elementen in $\mathfrak{E}$ darstellbar.

$\mathfrak{B} \cup \varphi$ ist auch Filtersubbasis, denn für $P \in \varphi$ und $E \in \mathfrak{E}$ gilt $P \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$. Es existiert also Oberultrafilter $\xi \supset \varphi$ mit $\mathfrak{B} \subseteq \xi$, d.h. für $E \in \mathfrak{E}$ gilt $E \notin \xi$, denn $(X \setminus E) \in \xi$, Widerspruch! □