

# Zusammenfassung von Neumann Algebren

Sebastian Bechtel

15. Januar 2017

## 1 Tensorprodukte

### 1.1 algebraische Theorie

Seien  $E, F$  Vektorräume,  $E^*, F^*$  ihre algebraischen Duale. Bezeichne mit  $\text{Bil}(E^*, F^*)$  die bilinearen Funktionale auf  $E^* \times F^*$ . Für  $e \in E, f \in F$  definiere  $e \otimes f \in \text{Bil}(E^*, F^*)$  via  $e \otimes f(e', f') := e'(e)f'(f)$ . Es heißt  $e \otimes f$  *elementarer Tensor* und  $E \otimes F := \text{LH}\{e \otimes f : e \in E, f \in F\}$  heißt das *Tensorprodukt* von  $E$  mit  $F$ . Die Zuordnung  $i : E \times F \ni (e, f) \mapsto e \otimes f \in E \otimes F$  ist bilinear und aus  $0 \neq e \in E, 0 \neq f \in F$  folgt  $e \otimes f \neq 0$ , jedoch ist  $i$  nicht injektiv. Ist  $(e_i)$  Basis von  $E$ ,  $(f_j)$  Basis von  $F$ , dann  $\{e_i \otimes f_j : i \in I, j \in J\}$  Basis von  $E \otimes F$ . Für einen weiteren Vektorraum  $W$  gilt die Isomorphie  $\text{Bil}(E \times F, W) \cong \text{Lin}(E \otimes F, W)$ .

Darstellung eines Tensors ist nicht eindeutig, aber für eine minimale Darstellung (d.h. Anzahl der Summanden ist minimal)  $x = \sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i$  gilt  $\{e_1, \dots, e_n\}$  sowie  $\{f_1, \dots, f_n\}$  l.u. (und umgekehrt, vgl. endlich-Rang Operatoren!) und ist  $0 = \sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i$  und  $\{e_1, \dots, e_n\}$  l.u., so folgt  $f_i = 0$  für alle  $i$ .

#### 1.1.1 Tensorprodukt von linearen Abbildungen

Für  $A \in \text{Lin}(E, E_1), B \in \text{Lin}(F, F_1)$  gibt es eindeutige (universelle Eigenschaft!) lineare Abbildung  $A \boxtimes B : E \otimes F \ni (e, f) \mapsto Ae \otimes Bf \in E_1 \otimes F_1$ . Wir wollen gerne  $A \otimes B$  für  $A \boxtimes B$  schreiben. Dazu identifizieren wir  $\text{Lin}(E, E_1) \otimes \text{Lin}(F, F_1)$  mit einem Unterraum von  $\text{Lin}(E \otimes F, E_1 \otimes F_1)$ . Wegen  $\text{Lin}(E, E_1) \times \text{Lin}(F, F_1) \ni (A, B) \mapsto A \boxtimes B \in \text{Lin}(E \otimes F, E_1 \otimes F_1)$  bilinear gibt es  $\beta : \text{Lin}(E, E_1) \otimes \text{Lin}(F, F_1) \rightarrow \text{Lin}(E \otimes F, E_1 \otimes F_1)$  mit  $\beta(A \otimes B) = A \boxtimes B$ . Man zeigt, dass  $\beta$  injektiv ist und kann dann wie gewünscht  $A \otimes B$  mit  $A \boxtimes B$  identifizieren.

#### 1.1.2 Tensorprodukt von Algebren

Sind  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  Algebren, so gibt es eindeutige Multiplikation auf  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  mit  $x \otimes y \cdot x' \otimes y' = xx' \otimes yy'$ .

### 1.1.3 n-faches Tensorprodukt über Linearformen

Erhalte Einbettung  $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n \hookrightarrow \text{Mult}(E_1^* \times \cdots \times E_n^*, \mathbb{K})$  via  $m(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) := ((e'_1, \dots, e'_n) \mapsto e'_1(e_1) \cdots e'_n(e_n))$ . Dann  $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n \cong m(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n)$ .

### 1.1.4 Tensorprodukt über endlich-Rang Operatoren

Für  $e \in E, f \in F$  definiere  $t_{e,f} : E^* \ni e' \mapsto \langle e, e' \rangle f$ , also  $t_{e,f} \in \text{Lin}(E^*, F)$ . Es ist  $E \times F \ni (e, f) \mapsto t_{e,f}$  bilinear, also gibt es  $\beta : E \otimes F \rightarrow \text{Lin}(E^*, F)$  mit  $\beta(e \otimes f) = t_{e,f}$ , welches injektiv ist, also  $E \otimes F \hookrightarrow \text{Lin}(E^*, F)$ .

Ist  $E \neq E^{**}$ , so ist  $\beta$  sicher nicht surjektiv!

Der Rang eines Tensors  $x \in E \otimes F$  ist gegeben durch  $\text{Rang}(\beta(x))$  und stimmt mit der Länge einer minimalen Darstellung überein.

Betrachte nun  $\beta : E^* \otimes F \rightarrow \mathcal{F}(E^{**}, F)$ . Diese ist nach wie vor injektiv, aber i.A. nicht surjektiv. Wenn wir jedoch  $\beta(e' \otimes f)|_{E \subset E^{**}}$  betrachten, so bleibt die Zuordnung injektiv und wird sogar surjektiv, also  $E^* \otimes F \cong \mathcal{F}(E, F)$ . Wir können also die endlich-Rang Operatoren als Tensorprodukt verstehen! Dies gilt ferner für die topologischen Dualräume.

### 1.1.5 Beispiel: Matrizen als TP und ihre Spur

Betrachte  $(\mathbb{K}^n)^* \otimes \mathbb{K}^m$ . Es ist  $t_{e'_j, e_i} = e_{ij}$ , also  $m \times n$  Matrizen sind Tensorprodukt. Ist  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix mit Zeilen  $a_1, \dots, a_m \in (\mathbb{K}^n)^*$ , so ist  $A = \sum_{j=1}^m a_j \otimes e_j$ , analog: sind  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}^m$  die Spalten von  $A$ , so gilt  $A = \sum_{i=1}^n e_i \otimes b_i$ . Definiere  $(\mathbb{K}^n)^* \times \mathbb{K}^n \ni (x', y) \mapsto \langle y, x' \rangle$  bilinear, diese besitzt Fortsetzung  $\tau : (\mathbb{K}^n)^* \otimes \mathbb{K}^n = M_n \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $\tau(A) = \text{Spur}(A)$ . Nutze dies später, um den Begriff der Spur zu verallgemeinern!