Zusammenfassung von Neumann Algebren

Sebastian Bechtel

3. Februar 2017

1 Erster Kontakt

Eine *-Algebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt *Operatoralgebra*. Ist $\mathcal{M}$ stop-abgeschlossen, so heißt $\mathcal{M}$ *von Neumann Algebra (vNA)*. Durch GNS-Darstellung lässt sich jede C*-Algebra als Operatoralgebra darstellen. Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, da der Schnitt von vNAen wieder vNA ist, existiert kleinste vNA vN$(\mathcal{S})$, die $\mathcal{S}$ enthält. Ist $\mathcal{S}$ Operatoralgebra, so gilt vN$(\mathcal{S}) = \overline{\mathcal{S}}^{stop}$, dies ist aber nicht offensichtlich, da Involution nicht stop-stetig ist!
Für $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist die *Kommutante* gegeben durch $\mathcal{M}' := \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : xy = yx \text{ für all } y \in \mathcal{M}\}$. Es gilt immer $\mathcal{M}'$ stop-abgeschlossen und ist $\mathcal{M}$ Operatoralgebra, so auch $\mathcal{M}'$, somit $\mathcal{M}'$ vNA. Ferner gilt $1_{\mathcal{H}} \in \mathcal{M}'$ und $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'''$ (wegen $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}''$), also gilt für $\mathcal{M}$ Operatoralgebra auch nach Bikommutantensatz (vgl. später) $\mathcal{M}'$ vNA! Aus $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}''$ folgt für $\mathcal{M}$ Operatoralgebra, dass vN$(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}''$. Ist $1_{\mathcal{H}} \in M$, so folgt mit Bikommutantensatz $\mathcal{M}'' \subset \text{vN}(\mathcal{M})'' = \text{vN}(\mathcal{M})$, also $\mathcal{M}'' = \text{vN}(\mathcal{M})$. Ist $\mathcal{M}$ nicht s.a., geht alles schief: Die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ haben als Kommutante $\left(\begin{smallmatrix} b & c \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$, also ist jene nicht s.a., somit folgt wegen $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'''$, dass Bikommutantenbildung keine Selbstadjungiertheit herbeiführt.

1.1 Beispiel: L^∞ ist vNA

Durch $L^\infty \ni g \mapsto M_g \in \mathcal{B}(L^2)$ wird L^∞ als Operatoralgebra dargestellt, vgl. Borel-FK. Ist (Ω, Σ, μ) lokalisierbar, so zerlege $L^2(\Omega)$ in direkte Summe $\oplus_i L^2(\Omega_i)$ mit $\mu(\Omega_i) < \infty$. Zeige dann für einen solchen Summanden, dass er seine eigene Kommutante ist, somit vNA: Sei $T \in L^\infty(\Omega)'$ und setze $f := T(1) \in L^2(\Omega)$. Es gilt für $g \in L^\infty$ nun $T(g) = TM_g(1) = M_g T(1) = gf = M_f(g)$, also $T|_{L^\infty} = M_f|_{L^\infty}$, somit $M_f : L^\infty \subset L^2 \to L^2$ beschränkt. Wäre $f \notin L^\infty$, würde es für $n \in \mathbb{N}$ messbare Mengen $\Omega_n \subset \Omega$ geben mit $|f(\omega)| \geq n$ f.ü. auf Ω_n und $g_n := \chi_{\Omega_n}/\mu(\Omega_n)^{1/2}$ würde Beschränktheit auf L^∞ widersprechen, also $f \in L^\infty$ und $M_f = T$ auf dichter Teilmenge, also $T \in L^\infty$.

2 Tensorprodukte

2.1 algebraische Theorie

Seien E, F Vektorräume, E^*, F^* ihre algebraischen Duale. Bezeichne mit $\mathrm{Bil}(E^*, F^*)$ die bilinearen Funktionale auf $E^* \times F^*$. Für $e \in E, f \in F$ definiere $e \otimes f \in \mathrm{Bil}(E^*, F^*)$ via $e \otimes f(e', f') := e'(e)f'(f)$. Es heißt $e \otimes f$ *elementarer Tensor* und $E \otimes F := \mathrm{LH}\{e \otimes f : e \in E, f \in F\}$ heißt das *Tensorprodukt* von E mit F. Die Zuordnung $i : E \times F \ni (e, f) \mapsto e \otimes f \in E \otimes F$ ist bilinear und aus $0 \neq e \in E, 0 \neq f \in F$ folgt $e \otimes f \neq 0$, jedoch ist i nicht injektiv. Ist (e_i) Basis von E, (f_j) Basis von F, dann $\{e_i \otimes f_j : i \in I, j \in J\}$ Basis von $E \otimes F$. Für einen weiteren Vektorraum W gilt die Isomorphie $\mathrm{Bil}(E \times F, W) \cong \mathrm{Lin}(E \otimes F, W)$.

Darstellung eines Tensors ist nicht eindeutig, aber für eine minimale Darstellung (d.h. Anzahl der Summanden ist minimal) $x = \sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i$ gilt $\{e_1, \ldots, e_n\}$ sowie $\{f_1, \ldots, f_n\}$ l.u. (und umgekehrt, vgl. endlich-Rang Operatoren!) und ist $0 = \sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i$ und $\{e_1, \ldots, e_n\}$ l.u., so folgt $f_i = 0$ für alle i.

2.1.1 Tensorprodukt von linearen Abbildungen

Für $A \in \mathrm{Lin}(E, E_1), B \in \mathrm{Lin}(F, F_1)$ gibt es eindeutige (universelle Eigenschaft!) lineare Abbildung $A \boxtimes B : E \otimes F \ni (e, f) \mapsto Ae \otimes Bf \in E_1 \otimes F_1$. Wir wollen gerne $A \otimes B$ für $A \boxtimes B$ schreiben. Dazu identifizieren wir $\mathrm{Lin}(E, E_1) \otimes \mathrm{Lin}(F, F_1)$ mit einem Unterraum von $\mathrm{Lin}(E \otimes F, E_1 \otimes F_1)$. Wegen $\mathrm{Lin}(E, E_1) \times \mathrm{Lin}(F, F_1) \ni (A, B) \mapsto A \boxtimes B \in \mathrm{Lin}(E \otimes F, E_1 \otimes F_1)$ bilinear gibt es $\beta : \mathrm{Lin}(E, E_1) \otimes \mathrm{Lin}(F, F_1) \to \mathrm{Lin}(E \otimes F, E_1 \otimes F_1)$ mit $\beta(A \otimes B) = A \boxtimes B$. Man zeigt, dass β injektiv ist und kann dann wie gewünscht $A \otimes B$ mit $A \boxtimes B$ identizifieren.

2.1.2 Tensorprodukt von Algebren

Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Algebren, so gibt es eindeutige Multiplikation auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ mit $x \otimes y \cdot x' \otimes y' = xx' \otimes yy'$.

2.1.3 n-faches Tensorprodukt über Linearformen

Erhalte Einbettung $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n \hookrightarrow \mathrm{Mult}(E_1^* \times \cdots \times E_n^*, \mathbb{K})$ via $m(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) := ((e_1', \ldots, e_n') \mapsto e_1'(e_1) \cdot \cdots \cdot e_n'(e_n)$. Dann $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n \cong m(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n)$.

2.1.4 Operatoren endlichen Ranges als Tensorprodukt

Für $e \in E, f \in F$ definiere $t_{e,f} : E^* \ni e' \mapsto \langle e, e' \rangle f$, also $t_{e,f} \in \mathrm{Lin}(E^*, F)$. Es ist $E \times F \ni (e, f) \mapsto t_{e,f}$ bilinear, also gibt es $\beta : E \otimes F \to \mathrm{Lin}(E^*, F)$ mit $\beta(e \otimes f) = t_{e,f}$, welches injektiv ist, also $E \otimes F \hookrightarrow \mathrm{Lin}(E^*, F)$.

Ist $E \neq E^{**}$, so ist β sicher nicht surjektiv!

Der *Rang eines Tensors* $x \in E \otimes F$ ist gegeben durch $\mathrm{Rang}(\beta(x))$ und stimmt mit der Länge einer minimalen Darstellung überein.

Betrachte nun $\beta : E^* \otimes F \to \mathcal{F}(E^{**}, F)$. Diese ist nach wie vor injektiv, aber i.A. nicht surjektiv. Wenn wir jedoch $\beta(e' \otimes f)|_{E \subset E^{**}}$ betrachten, so bleibt die Zuordnung injektiv und wird sogar surjektiv, also $E^* \otimes F \cong \mathcal{F}(E, F)$. Wir können also die endlich-Rang Operatoren als Tensorprodukt verstehen! Dies gilt ferner für die topologischen Dualräume.

2.1.5 Beispiel: Matrizen als TP und ihre Spur

Betrachte $(\mathbb{K}^n)^* \otimes \mathbb{K}^m$. Es ist $t_{e'_j, e_i} = e_{ij}$, also $m \times n$ Matrizen sind Tensorprodukt. Ist A eine $m \times n$-Matrix mit Zeilen $a_1, \ldots, a_m \in (\mathbb{K}^n)^*$, so ist $A = \sum_{j=1}^m a_j \otimes e_j$, analog: sind $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}^m$ die Spalten von A, so gilt $A = \sum_{i=1}^n e_i \otimes b_i$. Definiere $(\mathbb{K}^n)^* \times \mathbb{K}^n \ni (x', y) \mapsto \langle y, x' \rangle$ bilinear, diese besitzt Fortsetzung $\tau : (\mathbb{K}^n)^* \otimes \mathbb{K}^n = M_n \to \mathbb{K}$ mit $\tau(A) = \mathrm{Spur}(A)$. Nutze dies später, um den Begriff der Spur zu verallgemeinern!

2.2 topologische Tensorprodukte

2.2.1 Tensorprodukte von Hilberträumen

Bezeichne mit $\odot$ das algebraische Tensorprodukt. Sind $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ Hilberträume, so gibt es auf $\mathcal{H} \odot \mathcal{K}$ ein eindeutiges Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{HS}$ mit $\langle x \otimes y, x' \otimes y' \rangle_{HS} = \langle x, x' \rangle_{\mathcal{H}} \langle y, y' \rangle_{\mathcal{K}}$. Also ist $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{HS})$ Prähilbertraum. Dessen Vervollständigung heißt *Hilbertraumtensorprodukt* von $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$, schreibe $\mathcal{H} \otimes_{HS} \mathcal{K}$ bzw. $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$. Die induzierte Norm $\| \cdot \|_{HS}$ ist eine *Kreuznorn*, d.h. $\|x \otimes y\|_{HS} = \|x\|_{\mathcal{H}} \|y\|_{\mathcal{K}}$ (somit ist $B : \mathcal{H} \times \mathcal{K} \to W$ bilinear genau dann beschränkt, wenn es $T_B : \mathcal{H} \odot \mathcal{K} \to W$ ist, also erhalten wir eine topologische Version der universellen Eigenschaft für $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$). Außerdem folgt aus $x_i \to x, y_j \to y$, dass $x_i \otimes y_j \to x \otimes y$ und sind $(e_i), (f_j)$ ONBs von $\mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{K}$, so ist $\{e_i \otimes f_j : i \in I, j \in J\}$ ONB von $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$.

Beispiele: 1) Es gilt $l^2(I) \otimes l^2(J) = l^2(I \times J)$ (Dimensionsvergleich!) 2) Sind $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1), (\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume, dann gilt $L^2(\Omega_1 \times \Omega_2) \cong L^2(\Omega_1) \otimes L^2(\Omega_2)$ und der unitäre Operator ist eindeutig mit $U(f_1 \otimes f_2) = f_1(\omega_1) f_2(\omega_2)$ (nutze topologische universelle Eigenschaft!)

Sind $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$, denn gibt es eindeutigen Operator $A \otimes B \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ mit $A \otimes B(x \otimes y) = Ax \otimes By$ und es gilt $\|A \otimes B\| = \|A\| \|B\|$. Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit auf dem dichten algebraischen Tensorprodukt. Zeige $\|A \otimes B\| = \|A\| \|B\|$ auf $\mathcal{H} \odot \mathcal{K}$, dann stetige Fortsetzung. Nutze $A \otimes B = (A \otimes 1_{\mathcal{K}})(1_{\mathcal{H}} \otimes B)$ (denn $((A \otimes 1_{\mathcal{K}})(1_{\mathcal{H}} \otimes B))(x \otimes y) = A \otimes 1_{\mathcal{K}}(x \otimes By) = Ax \otimes By$) und $\|A \otimes 1_{\mathcal{K}}\| \leq \|A\|$. Außerdem gilt $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$.

2.3 Tensorprodukte auf Banachräumen

Seien E, F Banachräume. Auf $E \odot F$ wird durch $\|z\|_\pi := \inf\{\sum_i \|x_i\|_E \|y_i\|_F : z = \sum_i x_i \otimes y_i\}$ eine Kreuznorm definiert, welche *projektive Norm* oder *maximale Norm* heißt. Motivation: Für eine Kreuznorm $\|\cdot\|$ gilt $\|z\| \leq \sum_i \|x_i\|\|y_i\|$ wegen Dreiecksungleichung und Kreuznormeigenschaft. Beachte, dass Supremum keinen Sinn machen würde, da wegen $0 = x \otimes y + (-x) \otimes y$ für $x, y \neq 0$ bereits die Definitheit verletzt wäre.

Wiederum auf $E \odot F$ definieren wir eine weiter Norm, genannt *injektive Norm* oder *ε-Tensornorm*, durch $\|z\|_\varepsilon := \sup\{|e' \otimes f'(z)| : e' \in E_1^*, f' \in F_1^*\}$. Die Kreuznormeigenschaft folgt aus Hahn-Banach: zu $x \in E, y \in F$ gibt es $e' \in E_1^*, f' \in F_1^*$ mit $e'(x) = \|x\|_E, f'(y) = \|y\|_F$, also $\|x \otimes y\|_\varepsilon \geq |e' \otimes f'(x \otimes y)| = \|x\|_E \|y\|_F$.

3 Die vNA $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

3.1 Projektionen

Ein $p \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt *Projektion*, falls $p^2 = p$ gilt und *orthogonale Projektion*, falls p Projektion und $p^* = p$. Man nennt $v \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine *partielle Isometrie*, falls v^*v eine orthogonale Projektion ist (automatisch s.a., Projektion ist zu prüfen). Ist v Isometrie so ist $\mathcal{N}(v)^\perp$ der Anfangsraum von v und $\overline{\mathcal{R}(v)}$ der Zielraum von v. Es ist v^*v orthogonale Projektion auf den Anfangsraum, genannt *initiale Projektion*, und vv^* ist orthogonale Projektion auf den Zielraum, genannt *finale Projektion*. Zwischen Anfangsraum und Zielraum ist eine partielle Isometrie eine Isometrie.

Für $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definieren wir Anfangsraum und Zielraum wie oben und bezeichnen die initiale Projektion als *Rechtsträger* $s_r(x)$ und die finale Projektion als *Linksträger* $s_l(x)$. Für x s.a. definiere den Träger $s(x) := s_l(x) = s_r(x)$ (wegen $\mathcal{N}(x)^\perp = \overline{\mathcal{R}(x^*)} = \overline{\mathcal{R}(x)}$). Es gilt (analog zu den partiellen Isometrien!) $s_l(x) = s(xx^*)$ und $s_r(x) = s(x^*x)$.

3.1.1 polare Zerlegung

Eine komplexe Zahl z lässt sich schreiben als $z = e^{i\varphi}|z|$, also $|z| \geq 0$ und

3.2 Die Spur auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (vgl. Ü.A. 34, 37)

Sei (e_i) ONB von $\mathbb{C}^n$ und $T \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ mit Darstellungsmatrix A. Dann definiert man $\text{Spur}(A) = \sum_i a_{ii}$. Nun gilt aber $\sum_i a_{ii} = \sum_i \langle Te_i, e_i \rangle$. Diese Formel wollen wir auf beliebige Hilberträume verallgemeinern!

Nun sei also $\mathcal{H}$ wieder beliebiger Hilbertraum und (e_i) ONB von $\mathcal{H}$. Ist $0 \leq x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, so ist $\text{tr}(x) := \sum_i \langle xe_i, e_i \rangle \in [0, \infty]$ definiert. Ist $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, so gilt $\text{tr}(x^*x) = \text{tr}(xx^*)$ wegen

$\langle x^*xe_i, e_i\rangle = \langle e_i, xx^*e_i\rangle = \overline{\langle xx^*e_i, e_i\rangle} = \langle xx^*e_i, e_i\rangle$, also für $0 \leq x$ und u unitär: $\mathrm{tr}(u^*xu) = \mathrm{tr}(u^*x^{1/2}x^{1/2}u) = \mathrm{tr}((x^{1/2}u)^*x^{1/2}u) = \mathrm{tr}(x^{1/2}uu^*x^{1/2}) = \mathrm{tr}(x)$, somit ist tr für positive Operatoren basisunabhängig!

Ist nun $x \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$, so können wir x als Linearkombination positiver Endlichrangoperatoren schreiben ($\mathrm{Re}\, x = 1/2(x + x^*) \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ und dann durch Einteilung der Eigenwerte in positive und negative). Existenz der Reihe ist dann klar und wegen Basisunabhängigkeit entspricht tr der Summe der endlich vielen Eigenwerte, also $\mathrm{tr}(x) < \infty$.

Die Basisunabhängigkeit überträgt sich ebenso auf den Fall von Endlichrangoperatoren. Ist $x \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ und $y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (oBdA unitär), so gilt $\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(yx)$, denn $yx \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ und $\mathrm{tr}(xy) = \mathrm{tr}(y^*yxy) = \mathrm{tr}(yx)$.

3.2.1 Bezug zu reinen Zuständen auf M_n (vgl. Ü.A. 58 Spektraltheorie)

Es ist $M_n \times M_n \ni (x, y) \mapsto \mathrm{tr}(y^*x)$ ein Skalarprodukt auf M_n, aus Riesz-Frechet folgt, dass ein Funktional φ auf M_n durch eine Dichtematrix Φ via $\varphi(x) = \mathrm{tr}(\Phi x)$ dargestellt werden kann. Ist $\Phi \geq 0$ und $\mathrm{tr}(\Phi) = 1$, so ist φ ein Zustand. Dieser ist genau dann rein, wenn Φ eine eindimensionale orthogonale Projektion ist.

Man rechnet leicht nach, dass $\mathrm{tr}(xt_{\xi,\eta}) = \mathrm{tr}(t_{\xi,x\eta}) = \langle x\eta, \xi\rangle$ gilt. Ist also $\Phi = t_{\xi,\xi}$ eindimensionale orthogonale Projektion und $x \in M_n$, so gilt $\varphi(x) = \mathrm{tr}(\Phi x) = \mathrm{tr}(x\Phi) = \langle x\xi, \xi\rangle$, also ist φ Vektorzustand!

4 Wichtige Operatorklassen und deren Konstruktion über Tensorprodukte

Wir hatten gesehen, dass $E^* \odot E \cong \mathcal{F}(E, F)$ gilt. Ist $E = \mathcal{H}$ ein Hilbertraum, so würden wir gerne statt $\odot$ auch $\otimes_{HS}$ bilden können (dies wird auf die Klasse der Hilbert-Schmidt-Operatoren führen). Allerdings ist $\mathcal{H}^*$ kein Hilbertraum, wenn man durch die Riesz-Frechet-Identifikation das Skalarprodukt von $\mathcal{H}$ zurückziehen will. Wir statten deshalb $\mathcal{H}^*$ mit einer neuen Skalarmultiplikation und einem geeigneten Skalarprodukt aus, um so $\mathcal{H}^*$ zu einem Hilbertraum zu machen, mit dem $\mathcal{H}^* \times \mathcal{H} \ni (\xi, \eta) \mapsto t_{\xi,\eta}$ bilinear ist.

4.1 Operatoren endlichen Ranges

Ein Operator $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ ist genau dann ein Operator endlichen Ranges, $x \in \mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, wenn es ONSe $\{e_1, \ldots, e_n\}$ in $\mathcal{H}$, $\{f_1, \ldots, f_n\}$ von $\mathcal{K}$ gibt mit $x = \sum_i \lambda_i t_{e_i,f_i}$. Nutze dazu die polare Zerlegung $x = v|x|$, dann ist $|x|$ ebenso Endlichrangoperator und kann nach dem Spektralsatz

der linearen Algebra als $|x| = \sum_i \lambda_i t_{e_i,e_i}$ geschrieben werden. Dann erhält man die gewünschte Darstellung, wenn man das zweite ONS via $f_i := ve_i$ definiert. Aus dieser Äquivalenz ist wegen $t^*_{\xi,\eta} = t_{\eta,\xi}$ auch klar, dass $x \in \mathcal{F}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ genau dann wenn $x^* \in \mathcal{F}(\mathcal{K},\mathcal{H})$.
Daraus folgt auch die sogenannte *Hilbert-Schmidt-Darstellung* eines Tensors: Ist $x = \sum_i \xi_i \otimes \eta_i \in \mathcal{H} \odot \mathcal{K}$, so gibt es ONSe $\{e_1, \dots, e_n\}$ von $\mathcal{H}$, $\{f_1, \dots, f_n\}$ von $\mathcal{K}$ sowie $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ mit $x = \sum_i \lambda_i e_i \otimes f_i$.

4.2 kompakte Operatoren

Für $x \in \mathcal{H} \odot \mathcal{K}$ gilt $\|x\|_\varepsilon = \|\beta(x)\|_{\text{op}}$. Somit folgt $\mathcal{H} \otimes_\varepsilon \mathcal{H} \cong K(\mathcal{H})$.

4.3 Hilbert-Schmidt-Operatoren

Sind $\xi, \eta \in \mathcal{H}^* \odot \mathcal{H}$ und seien $x := \beta(\xi), y := \beta(\eta)$, so gilt $\langle \xi, \eta \rangle_{\text{HS}} = \operatorname{tr}(y^*x)$. Definiere daher via $\|x\|_2 := \operatorname{tr}(x^*x)^{1/2}$ eine Norm auf $\mathcal{F}(\mathcal{H})$, genannt *Hilbert-Schmidt-Norm*.
Für eine Darstellung $x = \sum_i \lambda_i t_{e_i,f_i}$, wobei $(e_i), (f_i)$ ONSe, ist die Hilbert-Schmidt-Norm gegeben durch $\|x\|_{\text{HS}} = \|(\lambda_i)\|_{l^2(I)}$. Daraus folgt auch, dass $\|x\|_2 \geq \|x\|_{\text{op}}$: Es gilt $x^*x = \sum_i |\lambda_i|^2 t_{e_i,e_i}$. Sei k so gewählt, dass $|\lambda_k|^2$ der größte Eigenwert von x^*x ist. Dann folgt mit C*-Eigenschaft: $\|x\|^2 = \|x^*x\| = |\lambda_k|^2 \leq \sum_i |\lambda_i|^2 = \|x\|_2^2$.
Nun können wir die *Hilbert-Schmidt-Operatoren* definieren. Sei β_{HS} die stetige Fortsetzung von β auf $\mathcal{H}^* \otimes_{\text{HS}} \mathcal{H}$. Dann sind die Hilbert-Schmidt-Operatoren gegeben durch $HS(\mathcal{H}) := \beta(\mathcal{H}^* \otimes_{\text{HS}} \mathcal{H}) \subset K(\mathcal{H})$.