

# Zusammenfassung von Neumann Algebren

Sebastian Bechtel

3. Februar 2017

## 1 Erster Kontakt

Eine  $*$ -Algebra  $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  heißt *Operatoralgebra*. Ist  $\mathcal{M}$  stop-abgeschlossen, so heißt  $\mathcal{M}$  *von Neumann Algebra* (*vNA*). Durch GNS-Darstellung lässt sich jede  $C^*$ -Algebra als Operatoralgebra darstellen. Sei  $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , da der Schnitt von vNAen wieder vNA ist, existiert kleinste vNA  $\text{vN}(\mathcal{S})$ , die  $\mathcal{S}$  enthält. Ist  $\mathcal{S}$  Operatoralgebra, so gilt  $\text{vN}(\mathcal{S}) = \overline{\mathcal{S}}^{\text{stop}}$ , dies ist aber nicht offensichtlich, da Involution nicht stop-stetig ist!

Für  $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  ist die *Kommutante* gegeben durch  $\mathcal{M}' := \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : xy = yx \text{ für all } y \in \mathcal{M}\}$ . Es gilt immer  $\mathcal{M}'$  stop-abgeschlossen und ist  $\mathcal{M}$  Operatoralgebra, so auch  $\mathcal{M}'$ , somit  $\mathcal{M}'$  vNA. Ferner gilt  $1_{\mathcal{H}} \in \mathcal{M}'$  und  $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'''$  (wegen  $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}''$ ), also gilt für  $\mathcal{M}$  Operatoralgebra auch nach Bikommutantensatz (vgl. später)  $\mathcal{M}'$  vNA! Aus  $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}''$  folgt für  $\mathcal{M}$  Operatoralgebra, dass  $\text{vN}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}''$ . Ist  $1_{\mathcal{H}} \in \mathcal{M}$ , so folgt mit Bikommutantensatz  $\mathcal{M}'' \subset \text{vN}(\mathcal{M})'' = \text{vN}(\mathcal{M})$ , also  $\mathcal{M}'' = \text{vN}(\mathcal{M})$ . Ist  $\mathcal{M}$  nicht s.a., geht alles schief: Die Matrizen  $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  haben als Kommutante  $\begin{pmatrix} b & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ , also ist jene nicht s.a., somit folgt wegen  $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'''$ , dass Bikommutantenbildung keine Selbstadjungiertheit herbeiführt.

### 1.1 Beispiel: $L^\infty$ ist vNA

Durch  $L^\infty \ni g \mapsto M_g \in \mathcal{B}(L^2)$  wird  $L^\infty$  als Operatoralgebra dargestellt, vgl. Borel-FK. Ist  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  lokalisierbar, so zerlege  $L^2(\Omega)$  in direkte Summe  $\oplus_i L^2(\Omega_i)$  mit  $\mu(\Omega_i) < \infty$ . Zeige dann für einen solchen Summanden, dass er seine eigene Kommutante ist, somit vNA: Sei  $T \in L^\infty(\Omega)'$  und setze  $f := T(1) \in L^2(\Omega)$ . Es gilt für  $g \in L^\infty$  nun  $T(g) = TM_g(1) = M_gT(1) = gf = M_f(g)$ , also  $T|_{L^\infty} = M_f|_{L^\infty}$ , somit  $M_f : L^\infty \subset L^2 \rightarrow L^2$  beschränkt. Wäre  $f \notin L^\infty$ , würde es für  $n \in \mathbb{N}$  messbare Mengen  $\Omega_n \subset \Omega$  geben mit  $|f(\omega)| \geq n$  f.ü. auf  $\Omega_n$  und  $g_n := \chi_{\Omega_n}/\mu(\Omega_n)^{1/2}$  würde Beschränktheit auf  $L^\infty$  widersprechen, also  $f \in L^\infty$  und  $M_f = T$  auf dichter Teilmenge, also  $T \in L^\infty$ .

## 2 Tensorprodukte

### 2.1 algebraische Theorie

Seien  $E, F$  Vektorräume,  $E^*, F^*$  ihre algebraischen Duale. Bezeichne mit  $\text{Bil}(E^*, F^*)$  die bilinearen Funktionale auf  $E^* \times F^*$ . Für  $e \in E, f \in F$  definiere  $e \otimes f \in \text{Bil}(E^*, F^*)$  via  $e \otimes f(e', f') := e'(e)f'(f)$ . Es heißt  $e \otimes f$  *elementarer Tensor* und  $E \otimes F := \text{LH}\{e \otimes f : e \in E, f \in F\}$  heißt das *Tensorprodukt* von  $E$  mit  $F$ . Die Zuordnung  $i : E \times F \ni (e, f) \mapsto e \otimes f \in E \otimes F$  ist bilinear und aus  $0 \neq e \in E, 0 \neq f \in F$  folgt  $e \otimes f \neq 0$ , jedoch ist  $i$  nicht injektiv. Ist  $(e_i)$  Basis von  $E$ ,  $(f_j)$  Basis von  $F$ , dann  $\{e_i \otimes f_j : i \in I, j \in J\}$  Basis von  $E \otimes F$ . Für einen weiteren Vektorraum  $W$  gilt die Isomorphie  $\text{Bil}(E \times F, W) \cong \text{Lin}(E \otimes F, W)$ .

Darstellung eines Tensors ist nicht eindeutig, aber für eine minimale Darstellung (d.h. Anzahl der Summanden ist minimal)  $x = \sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i$  gilt  $\{e_1, \dots, e_n\}$  sowie  $\{f_1, \dots, f_n\}$  l.u. (und umgekehrt, vgl. endlich-Rang Operatoren!) und ist  $0 = \sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i$  und  $\{e_1, \dots, e_n\}$  l.u., so folgt  $f_i = 0$  für alle  $i$ .

#### 2.1.1 Tensorprodukt von linearen Abbildungen

Für  $A \in \text{Lin}(E, E_1), B \in \text{Lin}(F, F_1)$  gibt es eindeutige (universelle Eigenschaft!) lineare Abbildung  $A \boxtimes B : E \otimes F \ni (e, f) \mapsto Ae \otimes Bf \in E_1 \otimes F_1$ . Wir wollen gerne  $A \otimes B$  für  $A \boxtimes B$  schreiben. Dazu identifizieren wir  $\text{Lin}(E, E_1) \otimes \text{Lin}(F, F_1)$  mit einem Unterraum von  $\text{Lin}(E \otimes F, E_1 \otimes F_1)$ . Wegen  $\text{Lin}(E, E_1) \times \text{Lin}(F, F_1) \ni (A, B) \mapsto A \boxtimes B \in \text{Lin}(E \otimes F, E_1 \otimes F_1)$  bilinear gibt es  $\beta : \text{Lin}(E, E_1) \otimes \text{Lin}(F, F_1) \rightarrow \text{Lin}(E \otimes F, E_1 \otimes F_1)$  mit  $\beta(A \otimes B) = A \boxtimes B$ . Man zeigt, dass  $\beta$  injektiv ist und kann dann wie gewünscht  $A \otimes B$  mit  $A \boxtimes B$  identifizieren.

#### 2.1.2 Tensorprodukt von Algebren

Sind  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  Algebren, so gibt es eindeutige Multiplikation auf  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  mit  $x \otimes y \cdot x' \otimes y' = xx' \otimes yy'$ .

#### 2.1.3 n-faches Tensorprodukt über Linearformen

Erhalte Einbettung  $E_1 \otimes \dots \otimes E_n \hookrightarrow \text{Mult}(E_1^* \times \dots \times E_n^*, \mathbb{K})$  via  $m(e_1 \otimes \dots \otimes e_n) := ((e'_1, \dots, e'_n) \mapsto e'_1(e_1) \cdot \dots \cdot e'_n(e_n))$ . Dann  $E_1 \otimes \dots \otimes E_n \cong m(E_1 \otimes \dots \otimes E_n)$ .

#### 2.1.4 Tensorprodukt über endlich-Rang Operatoren

Für  $e \in E, f \in F$  definiere  $t_{e,f} : E^* \ni e' \mapsto \langle e, e' \rangle f$ , also  $t_{e,f} \in \text{Lin}(E^*, F)$ . Es ist  $E \times F \ni (e, f) \mapsto t_{e,f}$  bilinear, also gibt es  $\beta : E \otimes F \rightarrow \text{Lin}(E^*, F)$  mit  $\beta(e \otimes f) = t_{e,f}$ , welches injektiv ist, also  $E \otimes F \hookrightarrow \text{Lin}(E^*, F)$ .

Ist  $E \neq E^{**}$ , so ist  $\beta$  sicher nicht surjektiv!

Der Rang eines Tensors  $x \in E \otimes F$  ist gegeben durch  $\text{Rang}(\beta(x))$  und stimmt mit der Länge einer minimalen Darstellung überein.

Betrachte nun  $\beta : E^* \otimes F \rightarrow \mathcal{F}(E^{**}, F)$ . Diese ist nach wie vor injektiv, aber i.A. nicht surjektiv. Wenn wir jedoch  $\beta(e' \otimes f)|_{E \subset E^{**}}$  betrachten, so bleibt die Zuordnung injektiv und wird sogar surjektiv, also  $E^* \otimes F \cong \mathcal{F}(E, F)$ . Wir können also die endlich-Rang Operatoren als Tensorprodukt verstehen! Dies gilt ferner für die topologischen Dualräume.

### 2.1.5 Beispiel: Matrizen als TP und ihre Spur

Betrachte  $(\mathbb{K}^n)^* \otimes \mathbb{K}^m$ . Es ist  $t_{e'_j, e_i} = e_{ij}$ , also  $m \times n$  Matrizen sind Tensorprodukt. Ist  $A$  eine  $m \times n$ -Matrix mit Zeilen  $a_1, \dots, a_m \in (\mathbb{K}^n)^*$ , so ist  $A = \sum_{j=1}^m a_j \otimes e_j$ , analog: sind  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}^m$  die Spalten von  $A$ , so gilt  $A = \sum_{i=1}^n e_i \otimes b_i$ . Definiere  $(\mathbb{K}^n)^* \times \mathbb{K}^n \ni (x', y) \mapsto \langle y, x' \rangle$  bilinear, diese besitzt Fortsetzung  $\tau : (\mathbb{K}^n)^* \otimes \mathbb{K}^n = M_n \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $\tau(A) = \text{Spur}(A)$ . Nutze dies später, um den Begriff der Spur zu verallgemeinern!

## 2.2 topologische Tensorprodukte

### 2.2.1 Tensorprodukte von Hilberträumen

Bezeichne mit  $\odot$  das algebraische Tensorprodukt. Sind  $\mathcal{H}, \mathcal{K}$  Hilberträume, so gibt es auf  $\mathcal{H} \odot \mathcal{K}$  ein eindeutiges Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{HS}$  mit  $\langle x \otimes y, x' \otimes y' \rangle_{HS} = \langle x, x' \rangle_{\mathcal{H}} \langle y, y' \rangle_{\mathcal{K}}$ . Also ist  $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{HS})$  Prähilbertraum. Dessen Vervollständigung heißt *Hilbertraumtensorprodukt* von  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{K}$ , schreibe  $\mathcal{H} \otimes_{HS} \mathcal{K}$  bzw.  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ . Die induzierte Norm  $\|\cdot\|_{HS}$  ist eine *Kreuznorm*, d.h.  $\|x \otimes y\|_{HS} = \|x\|_{\mathcal{H}} \|y\|_{\mathcal{K}}$  (somit ist  $B : \mathcal{H} \times \mathcal{K} \rightarrow W$  bilinear genau dann beschränkt, wenn es  $T_B : \mathcal{H} \odot \mathcal{K} \rightarrow W$  ist, also erhalten wir eine topologische Version der universellen Eigenschaft für  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ ). Außerdem folgt aus  $x_i \rightarrow x, y_j \rightarrow y$ , dass  $x_i \otimes y_j \rightarrow x \otimes y$  und sind  $(e_i), (f_j)$  ONBs von  $\mathcal{H}$  bzw.  $\mathcal{K}$ , so ist  $\{e_i \otimes f_j : i \in I, j \in J\}$  ONB von  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ .

Beispiele: 1) Es gilt  $l^2(I) \otimes l^2(J) = l^2(I \times J)$  (Dimensionsvergleich!) 2) Sind  $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1), (\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$   $\sigma$ -endliche Maßräume, dann gilt  $L^2(\Omega_1 \times \Omega_2) \cong L^2(\Omega_1) \otimes L^2(\Omega_2)$  und der unitäre Operator ist eindeutig mit  $U(f_1 \otimes f_2) = f_1(\omega_1) f_2(\omega_2)$  (nutze topologische universelle Eigenschaft!)

Sind  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ , dann gibt es eindeutigen Operator  $A \otimes B \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$  mit  $A \otimes B(x \otimes y) = Ax \otimes By$  und es gilt  $\|A \otimes B\| = \|A\| \|B\|$ . Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit auf dem dichten algebraischen Tensorprodukt. Zeige  $\|A \otimes B\| = \|A\| \|B\|$  auf  $\mathcal{H} \odot \mathcal{K}$ , dann stetige Fortsetzung. Nutze  $A \otimes B = (A \otimes 1_{\mathcal{K}})(1_{\mathcal{H}} \otimes B)$  (denn  $((A \otimes 1_{\mathcal{K}})(1_{\mathcal{H}} \otimes B))(x \otimes y) = A \otimes 1_{\mathcal{K}}(x \otimes By) = Ax \otimes By$ ) und  $\|A \otimes 1_{\mathcal{K}}\| \leq \|A\|$ . Außerdem gilt  $(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*$ .

## 2.3 Tensorprodukte auf Banachräumen

Seien  $E, F$  Banachräume. Auf  $E \odot F$  wird durch  $\|z\|_\pi := \inf\{\sum_i \|x_i\|_E \|y_i\|_F : z = \sum_i x_i \otimes y_i\}$  eine Kreuznorm definiert, welche *projektive Norm* oder *maximale Norm* heißt. Motivation: Für eine Kreuznorm  $\|\cdot\|$  gilt  $\|z\| \leq \sum_i \|x_i\| \|y_i\|$  wegen Dreiecksungleichung und Kreuznormeigenschaft. Beachte, dass Supremum keinen Sinn machen würde, da wegen  $0 = x \otimes y + (-x) \otimes y$  für  $x, y \neq 0$  bereits die Definitheit verletzt wäre.

Wiederum auf  $E \odot F$  definieren wir eine weitere Norm, genannt *injektive Norm* oder  $\varepsilon$ -*Tensornorm*, durch  $\|z\|_\varepsilon := \sup\{|e' \otimes f'(z)| : e' \in E_1^*, f' \in F_1^*\}$ . Die Kreuznormeigenschaft folgt aus Hahn-Banach: zu  $x \in E, y \in F$  gibt es  $e' \in E_1^*, f' \in F_1^*$  mit  $e'(x) = \|x\|_E, f'(y) = \|y\|_F$ , also  $\|x \otimes y\|_\varepsilon \geq |e' \otimes f'(x \otimes y)| = \|x\|_E \|y\|_F$ .

## 3 Die vNA $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

### 3.1 Projektionen

Ein  $p \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  heißt *Projektion*, falls  $p^2 = p$  gilt und *orthogonale Projektion*, falls  $p$  Projektion und  $p^* = p$ . Man nennt  $v \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  eine *partielle Isometrie*, falls  $v^*v$  eine orthogonale Projektion ist (automatisch s.a., Projektion ist zu prüfen). Ist  $v$  Isometrie so ist  $\mathcal{N}(v)^\perp$  der Anfangsraum von  $v$  und  $\overline{\mathcal{R}(v)}$  der Zielraum von  $v$ . Es ist  $v^*v$  orthogonale Projektion auf den Anfangsraum, genannt *initiale Projektion*, und  $vv^*$  ist orthogonale Projektion auf den Zielraum, genannt *finale Projektion*. Zwischen Anfangsraum und Zielraum ist eine partielle Isometrie eine Isometrie.

Für  $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  definieren wir Anfangsraum und Zielraum wie oben und bezeichnen die initiale Projektion als *Rechtsträger*  $s_r(x)$  und die finale Projektion als *Linksträger*  $s_l(x)$ . Für  $x$  s.a. definiere den Träger  $s(x) := s_l(x) = s_r(x)$  (wegen  $\mathcal{N}(x)^\perp = \overline{\mathcal{R}(x^*)} = \overline{\mathcal{R}(x)}$ ). Es gilt (analog zu den partiellen Isometrien!)  $s_l(x) = s(xx^*)$  und  $s_r(x) = s(x^*x)$ .

#### 3.1.1 polare Zerlegung

Eine komplexe Zahl  $z$  lässt sich schreiben als  $z = e^{i\varphi}|z|$ , also  $|z| \geq 0$  und