Zusammenfassung von Neumann Algebren

Sebastian Bechtel

3. Februar 2017

1 Erster Kontakt

Eine *-Algebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt *Operatoralgebra*. Ist $\mathcal{M}$ stop-abgeschlossen, so heißt $\mathcal{M}$ *von Neumann Algebra (vNA)*. Durch GNS-Darstellung lässt sich jede C*-Algebra als Operatoralgebra darstellen. Sei $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, da der Schnitt von vNAen wieder vNA ist, existiert kleinste vNA $\mathrm{vN}(\mathcal{S})$, die $\mathcal{S}$ enthält. Ist $\mathcal{S}$ Operatoralgebra, so gilt $\mathrm{vN}(\mathcal{S}) = \overline{\mathcal{S}}^{stop}$, dies ist aber nicht offensichtlich, da Involution nicht stop-stetig ist!
Für $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist die *Kommutante* gegeben durch $\mathcal{M}' := \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : xy = yx \text{ für all } y \in \mathcal{M}\}$. Es gilt immer $\mathcal{M}'$ stop-abgeschlossen und ist $\mathcal{M}$ Operatoralgebra, so auch $\mathcal{M}'$, somit $\mathcal{M}'$ vNA. Ferner gilt $1_{\mathcal{H}} \in \mathcal{M}'$ und $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'''$ (wegen $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}''$), also gilt für $\mathcal{M}$ Operatoralgebra auch nach Bikommutantensatz (vgl. später) $\mathcal{M}'$ vNA! Aus $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}''$ folgt für $\mathcal{M}$ Operatoralgebra, dass $\mathrm{vN}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}''$. Ist $1_{\mathcal{H}} \in M$, so folgt mit Bikommutantensatz $\mathcal{M}'' \subset \mathrm{vN}(\mathcal{M})'' = \mathrm{vN}(\mathcal{M})$, also $\mathcal{M}'' = \mathrm{vN}(\mathcal{M})$. Ist $\mathcal{M}$ nicht s.a., geht alles schief: Die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ haben als Kommutante $\left(\begin{smallmatrix} b & c \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$, also ist jene nicht s.a., somit folgt wegen $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'''$, dass Bikommutantenbildung keine Selbstadjungiertheit herbeiführt.

1.1 Beispiel: L^∞ ist vNA

Durch $L^\infty \ni g \mapsto M_g \in \mathcal{B}(L^2)$ wird L^∞ als Operatoralgebra dargestellt, vgl. Borel-FK. Ist (Ω, Σ, μ) lokalisierbar, so zerlege $L^2(\Omega)$ in direkte Summe $\oplus_i L^2(\Omega_i)$ mit $\mu(\Omega_i) < \infty$. Zeige dann für einen solchen Summanden, dass er seine eigene Kommutante ist, somit vNA: Sei $T \in L^\infty(\Omega)'$ und setze $f := T(1) \in L^2(\Omega)$. Es gilt für $g \in L^\infty$ nun $T(g) = TM_g(1) = M_g T(1) = gf = M_f(g)$, also $T|_{L^\infty} = M_f|_{L^\infty}$, somit $M_f : L^\infty \subset L^2 \to L^2$ beschränkt. Wäre $f \notin L^\infty$, würde es für $n \in \mathbb{N}$ messbare Mengen $\Omega_n \subset \Omega$ geben mit $|f(\omega)| \geq n$ f.ü. auf Ω_n und $g_n := \chi_{\Omega_n}/\mu(\Omega_n)^{1/2}$ würde Beschränktheit auf L^∞ widersprechen, also $f \in L^\infty$ und $M_f = T$ auf dichter Teilmenge, also $T \in L^\infty$.

2 Tensorprodukte

2.1 algebraische Theorie

Seien E, F Vektorräume, E^*, F^* ihre algebraischen Duale. Bezeichne mit $\mathrm{Bil}(E^*, F^*)$ die bilinearen Funktionale auf $E^* \times F^*$. Für $e \in E, f \in F$ definiere $e \otimes f \in \mathrm{Bil}(E^*, F^*)$ via $e \otimes f(e', f') := e'(e)f'(f)$. Es heißt $e \otimes f$ *elementarer Tensor* und $E \otimes F := \mathrm{LH}\{e \otimes f : e \in E, f \in F\}$ heißt das *Tensorprodukt* von E mit F. Die Zuordnung $i : E \times F \ni (e, f) \mapsto e \otimes f \in E \otimes F$ ist bilinear und aus $0 \neq e \in E, 0 \neq f \in F$ folgt $e \otimes f \neq 0$, jedoch ist i nicht injektiv. Ist (e_i) Basis von E, (f_j) Basis von F, dann $\{e_i \otimes f_j : i \in I, j \in J\}$ Basis von $E \otimes F$. Für einen weiteren Vektorraum W gilt die Isomorphie $\mathrm{Bil}(E \times F, W) \cong \mathrm{Lin}(E \otimes F, W)$.
Darstellung eines Tensors ist nicht eindeutig, aber für eine minimale Darstellung (d.h. Anzahl der Summanden ist minimal) $x = \sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i$ gilt $\{e_1, \ldots, e_n\}$ sowie $\{f_1, \ldots, f_n\}$ l.u. (und umgekehrt, vgl. endlich-Rang Operatoren!) und ist $0 = \sum_{i=1}^n e_i \otimes f_i$ und $\{e_1, \ldots, e_n\}$ l.u., so folgt $f_i = 0$ für alle i.

2.1.1 Tensorprodukt von linearen Abbildungen

Für $A \in \mathrm{Lin}(E, E_1), B \in \mathrm{Lin}(F, F_1)$ gibt es eindeutige (universelle Eigenschaft!) lineare Abbildung $A \boxtimes B : E \otimes F \ni (e, f) \mapsto Ae \otimes Bf \in E_1 \otimes F_1$. Wir wollen gerne $A \otimes B$ für $A \boxtimes B$ schreiben. Dazu identifizieren wir $\mathrm{Lin}(E, E_1) \otimes \mathrm{Lin}(F, F_1)$ mit einem Unterraum von $\mathrm{Lin}(E \otimes F, E_1 \otimes F_1)$. Wegen $\mathrm{Lin}(E, E_1) \times \mathrm{Lin}(F, F_1) \ni (A, B) \mapsto A \boxtimes B \in \mathrm{Lin}(E \otimes F, E_1 \otimes F_1)$ bilinear gibt es $\beta : \mathrm{Lin}(E, E_1) \otimes \mathrm{Lin}(F, F_1) \to \mathrm{Lin}(E \otimes F, E_1 \otimes F_1)$ mit $\beta(A \otimes B) = A \boxtimes B$. Man zeigt, dass β injektiv ist und kann dann wie gewünscht $A \otimes B$ mit $A \boxtimes B$ identizifieren.

2.1.2 Tensorprodukt von Algebren

Sind $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Algebren, so gibt es eindeutige Multiplikation auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ mit $x \otimes y \cdot x' \otimes y' = xx' \otimes yy'$.

2.1.3 n-faches Tensorprodukt über Linearformen

Erhalte Einbettung $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n \hookrightarrow \mathrm{Mult}(E_1^* \times \cdots \times E_n^*, \mathbb{K})$ via $m(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) := ((e_1', \ldots, e_n') \mapsto e_1'(e_1) \cdot \cdots \cdot e_n'(e_n)$. Dann $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n \cong m(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n)$.

2.1.4 Tensorprodukt über endlich-Rang Operatoren

Für $e \in E, f \in F$ definiere $t_{e,f} : E^* \ni e' \mapsto \langle e, e' \rangle f$, also $t_{e,f} \in \mathrm{Lin}(E^*, F)$. Es ist $E \times F \ni (e, f) \mapsto t_{e,f}$ bilinear, also gibt es $\beta : E \otimes F \to \mathrm{Lin}(E^*, F)$ mit $\beta(e \otimes f) = t_{e,f}$, welches injektiv ist, also $E \otimes F \hookrightarrow \mathrm{Lin}(E^*, F)$.

Ist $E \neq E^{**}$, so ist β sicher nicht surjektiv!

Der *Rang eines Tensors* $x \in E \otimes F$ ist gegeben durch $\mathrm{Rang}(\beta(x))$ und stimmt mit der Länge einer minimalen Darstellung überein.

Betrachte nun $\beta : E^* \otimes F \to \mathcal{F}(E^{**}, F)$. Diese ist nach wie vor injektiv, aber i.A. nicht surjektiv. Wenn wir jedoch $\beta(e' \otimes f)|_{E \subset E^{**}}$ betrachten, so bleibt die Zuordnung injektiv und wird sogar surjektiv, also $E^* \otimes F \cong \mathcal{F}(E, F)$. Wir können also die endlich-Rang Operatoren als Tensorprodukt verstehen! Dies gilt ferner für die topologischen Dualräume.

2.1.5 Beispiel: Matrizen als TP und ihre Spur

Betrachte $(\mathbb{K}^n)^* \otimes \mathbb{K}^m$. Es ist $t_{e'_j, e_i} = e_{ij}$, also $m \times n$ Matrizen sind Tensorprodukt. Ist A eine $m \times n$-Matrix mit Zeilen $a_1, \ldots, a_m \in (\mathbb{K}^n)^*$, so ist $A = \sum_{j=1}^m a_j \otimes e_j$, analog: sind $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}^m$ die Spalten von A, so gilt $A = \sum_{i=1}^n e_i \otimes b_i$. Definiere $(\mathbb{K}^n)^* \times \mathbb{K}^n \ni (x', y) \mapsto \langle y, x' \rangle$ bilinear, diese besitzt Fortsetzung $\tau : (\mathbb{K}^n)^* \otimes \mathbb{K}^n = M_n \to \mathbb{K}$ mit $\tau(A) = \mathrm{Spur}(A)$. Nutze dies später, um den Begriff der Spur zu verallgemeinern!