

NP-Vollständigkeit wichtiger Probleme

Sebastian Bernauer

25. Februar 2019

Inhalt I

Komplexitätsklassen

Satisfiability Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

NP-Vollständigkeit
wichtiger Probleme

Sebastian
Bernauer

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

Inhalt II

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

NP-Vollständigkeit
wichtiger Probleme

Sebastian
Bernauer

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

Komplexitätsklassen

Aufsteigende Komplexitätsklassen:

1. P - polynomiell lösbar

NP-Vollständigkeit
wichtiger Probleme

Sebastian
Bernauer

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

Komplexitätsklassen

Aufsteigende Komplexitätsklassen:

1. P - polynomiell lösbar
2. NP - nichtdeterministisch polynomiell lösbar

NP-Vollständigkeit
wichtiger Probleme

Sebastian
Bernauer

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

Aufsteigende Komplexitätsklassen:

1. P - polynomiell lösbar
2. NP - nichtdeterministisch polynomiell lösbar
3. NP-schwierig
 $\rightarrow \forall L' \in NP : L' \leq_p L$

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

Aufsteigende Komplexitätsklassen:

1. P - polynomiell lösbar
2. NP - nichtdeterministisch polynomiell lösbar
3. NP-schwierig
 $\rightarrow \forall L' \in NP : L' \leq_p L$
4. NP-vollständig
 $\rightarrow L \in NP$ und $\forall L' \in NP : L' \leq_p L$

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

Aufsteigende Komplexitätsklassen:

1. P - polynomiell lösbar
2. NP - nichtdeterministisch polynomiell lösbar
3. NP-schwierig
 $\rightarrow \forall L' \in NP : L' \leq_p L$
4. NP-vollständig
 $\rightarrow L \in NP$ und $\forall L' \in NP : L' \leq_p L$
 \rightarrow Alle folgenden Probleme sind NP-vollständig

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

Aufsteigende Komplexitätsklassen:

1. P - polynomiell lösbar
2. NP - nichtdeterministisch polynomiell lösbar
3. NP-schwierig
 $\rightarrow \forall L' \in NP : L' \leq_p L$
4. NP-vollständig
 $\rightarrow L \in NP$ und $\forall L' \in NP : L' \leq_p L$
 \rightarrow Alle folgenden Probleme sind NP-vollständig
5. nicht rekursiv

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

Satisfiability Problem

NP-Vollständigkeit
wichtiger Probleme

Sebastian
Bernauer

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

Für natürliche Zahlen n und m seien m Klauseln über n Variablen gegeben. Eine Klausel ist die Disjunktion [Veroderung] von einigen Literalen x_i bzw. $\overline{x_i}$ mit $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Es soll entschieden werden, ob es eine Belegung $a = \{a_1, \dots, a_n\} \in \{0, 1\}^n$ der Variablen x_1, \dots, x_n gibt, so dass alle Klauseln erfüllt sind.

Satisfiability Problem

NP-Vollständigkeit
wichtiger Probleme

Sebastian
Bernauer

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

Für natürliche Zahlen n und m seien m Klauseln über n Variablen gegeben. Eine Klausel ist die Disjunktion [Veroderung] von einigen Literalen x_i bzw. $\overline{x_i}$ mit $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Es soll entschieden werden, ob es eine Belegung $a = \{a_1, \dots, a_n\} \in \{0, 1\}^n$ der Variablen x_1, \dots, x_n gibt, so dass alle Klauseln erfüllt sind.

Fragestellung: Existiert eine Wahrheitsbelegung der Variablen x_1, \dots, x_n , so dass alle Klauseln erfüllt sind?

Satisfiability Problem

NP-Vollständigkeit
wichtiger Probleme

Sebastian
Bernauer

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

Für natürliche Zahlen n und m seien m Klauseln über n Variablen gegeben. Eine Klausel ist die Disjunktion [Veroderung] von einigen Literalen x_i bzw. $\overline{x_i}$ mit $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Es soll entschieden werden, ob es eine Belegung $a = \{a_1, \dots, a_n\} \in \{0, 1\}^n$ der Variablen x_1, \dots, x_n gibt, so dass alle Klauseln erfüllt sind.

Fragestellung: Existiert eine Wahrheitsbelegung der Variablen x_1, \dots, x_n , so dass alle Klauseln erfüllt sind?

→ Satz von Cook: SAT ist NP-vollständig

3-SAT

- ▶ Spezialfall von SAT
- ▶ Jede Klausel enthält 3 Literale
- ▶ Es wurde bewiesen, dass SAT durch 3-SAT abbildbar und damit gleich komplex (NP-vollständig) ist

Clique Problem

In einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ bildet die Knotenmenge $V' \subseteq V$ eine Clique, wenn für alle $v, v' \in V'$ gilt $v, v' \in E$. [1]

Clique Problem

In einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ bildet die Knotenmenge $V' \subseteq V$ eine Clique, wenn für alle $v, v' \in V'$ gilt $v, v' \in E$. [1]

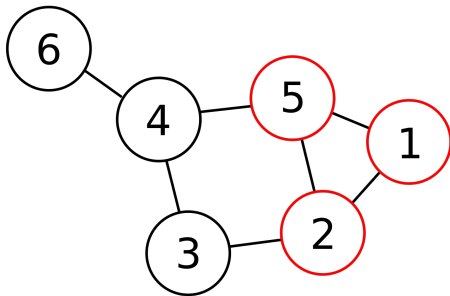


Abbildung: Ein Graph mit einer Clique der Größe 3.

Quelle: [https://de.wikipedia.org/wiki/Clique_\(Graphentheorie\)/#/media/File:6n-graf-clique.svg](https://de.wikipedia.org/wiki/Clique_(Graphentheorie)/#/media/File:6n-graf-clique.svg)

Clique - Beispiel

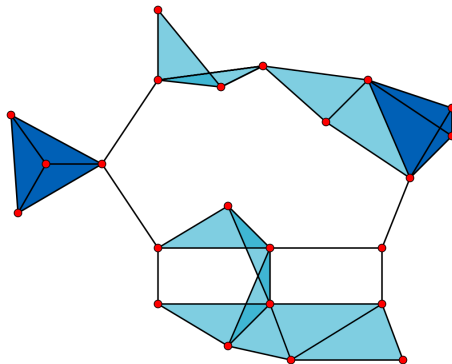


Abbildung: Ein Graph mit 2 Cliques der Größe 4.

Quelle: [https://en.wikipedia.org/wiki/Clique_\(graph_theory\)#/media/File:VR_complex.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/Clique_(graph_theory)#/media/File:VR_complex.svg)

NP-Vollständigkeit
wichtiger Probleme

Sebastian
Bernauer

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

Clique - Fragestellungen

1. Gibt es eine Clique der Größe k ?
→ Entscheidungsproblem

NP-Vollständigkeit
wichtiger Probleme

Sebastian
Bernauer

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

Clique - Fragestellungen

1. Gibt es eine Clique der Größe k ?
→ Entscheidungsproblem
2. Berechne das größte k , so dass eine Clique der Größe k vorhanden ist.
→ Optimale Lösung

Clique - Fragestellungen

1. Gibt es eine Clique der Größe k ?
→ Entscheidungsproblem
2. Berechne das größte k , so dass eine Clique der Größe k vorhanden ist.
→ Optimale Lösung
3. Berechne eine Clique mit dem größten k .
→ Optimierungsproblem

NP-Vollständigkeit
wichtiger Probleme

Sebastian
Bernauer

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

Clique - Beweis

Beweis

NP-Vollständigkeit
wichtiger Probleme

Sebastian
Bernauer

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

Knapsack Problem

Gegeben sind ein Rucksack und n Objekte mit Gewichten $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{N}$ sowie eine Gewichtsschranke G . Zusätzlich seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ die Nutzenwerte für die Objekte. [1]

NP-Vollständigkeit
wichtiger Probleme

Sebastian
Bernauer

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

Knapsack Problem

Gegeben sind ein Rucksack und n Objekte mit Gewichten $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{N}$ sowie eine Gewichtsschranke G . Zusätzlich seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ die Nutzenwerte für die Objekte. [1]

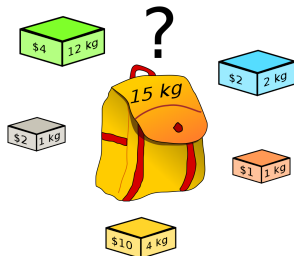


Abbildung: Ein zu befüllender Rucksack.

Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Rucksackproblem#/media/File:Knapsack.svg>

Knapsack - Fragestellungen

1. Gibt es - unter Beachtung des Limits - eine Beladung mit mindestens diesem Nutzwert?
→ Entscheidungsproblem

NP-Vollständigkeit
wichtiger Probleme

Sebastian
Bernauer

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

Knapsack - Fragestellungen

1. Gibt es - unter Beachtung des Limits - eine Beladung mit mindestens diesem Nutzwert?
→ Entscheidungsproblem
2. Berechne den größtmöglichen Nutzwert.
→ Optimale Lösung

Knapsack - Fragestellungen

1. Gibt es - unter Beachtung des Limits - eine Beladung mit mindestens diesem Nutzwert?
→ Entscheidungsproblem
2. Berechne den größtmöglichen Nutzwert.
→ Optimale Lösung
3. Berechne die optimale Beladung.
→ Optimierungsproblem

Knapsack - Beweis

Beweis

NP-Vollständigkeit
wichtiger Probleme

Sebastian
Bernauer

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

Partition Problem

NP-Vollständigkeit
wichtiger Probleme

Sebastian
Bernauer

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

Gegeben sind $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{N}$. Gibt es eine Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, so dass die Summe aller $b_i, i \in I$ gleich der Summe aller $b_i, i \notin I$ ist?
→ Teil eine Menge von Gewichten in 2 gleich schwere Haufen auf.

Partition - Beweis

Beweis

NP-Vollständigkeit
wichtiger Probleme

Sebastian
Bernauer

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

BP Problem

Problem

NP-Vollständigkeit
wichtiger Probleme

Sebastian
Bernauer

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

BP Beweis

Beweis

NP-Vollständigkeit
wichtiger Probleme

Sebastian
Bernauer

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

DHC Problem

Problem

NP-Vollständigkeit
wichtiger Probleme

Sebastian
Bernauer

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

DHC Beweis

Beweis

NP-Vollständigkeit
wichtiger Probleme

Sebastian
Bernauer

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

HC Problem

Problem

NP-Vollständigkeit
wichtiger Probleme

Sebastian
Bernauer

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

HC Beweis

Beweis

NP-Vollständigkeit
wichtiger Probleme

Sebastian
Bernauer

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

TSP Problem

Problem

NP-Vollständigkeit
wichtiger Probleme

Sebastian
Bernauer

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis

TSP Beweis

Beweis

NP-Vollständigkeit
wichtiger Probleme

Sebastian
Bernauer

Komplexitätsklassen

Satisfiability
Problem (SAT)

3-SAT

Clique Problem

Beweis

Knapsack Problem

Beweis

Partition Problem

Beweis

BP

Problem

Beweis

DHC

Problem

Beweis

HC

Problem

Beweis

TSP

Problem

Beweis



Ingo WEGENER. *Theoretische Informatik. Eine algorithmenorientierte Einführung.* Teubner, 2005.