659. Моторная лодка, скорость которой в стоячей воде 15 км/ч, прошла по течению реки 35 км, а против течения — 25 км. По течению она шла столько же времени, сколько против течения. Какова скорость течения реки?

660. Катер, развивающий в стоячей воде скорость 20 км/ч, прошёл 36 км против течения и 22 км по течению, затратив на весь путь 3 ч. Найдите скорость течения реки.

661. В водный раствор соли добавили 100 г воды. В результате концентрация соли в растворе понизилась на 1%. Определите первоначальную массу раствора, если известно, что в нём содержалось 30 г соли.

662. Сплав золота и серебра содержал 40 г золота. После того как к нему добавили 50 г золота, получили новый сплав, в котором содержание золота возросло на 20%. Сколько серебра было в сплаве?

663. При совместной работе двух кранов разгрузку баржи закончили за 6 ч. Сколько времени потребовалось бы каждому крану отдельно для разгрузки баржи, если известно, что первому крану для этого требуется на 5 ч больше, чем второму?

664. Два 3D-принтера разной мощности изготовили за 2 ч 55 мин некоторое количество деталей. За какое время это количество деталей мог бы изготовить первый 3D-принтер, если известно, что ему для этого потребуется на 2 ч больше, чем второму 3D-принтеру?

665. Велосипедист проехал из посёлка до станции с некоторой постоянной скоростью, а возвращался со скоростью, на 5 км/ч большей. Какова была первоначальная скорость велосипедиста, если известно, что его средняя скорость на всём пути следования составляла 12 км/ч?

666. Мотоциклист половину пути проехал с некоторой постоянной скоростью, а затем снизил скорость на 20 км/ч. Какова была скорость мотоциклиста на первой половине пути, если известно, что средняя скорость на всём пути составила 37,5 км/ч?

П

667. Докажите, что:

а) $\frac{1}{11+2\sqrt{30}}+\frac{1}{11-2\sqrt{30}}=22;$ б) $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}+\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=18.$

668. Найдите значение выражения:

а) $\frac{xy}{x+y}$ при $x = 5 + 2\sqrt{6}$, $y = 5 - 2\sqrt{6}$;

б) $\frac{x^2+y^2}{xy}$ при $x = \sqrt{11} + \sqrt{3}$, $y = \sqrt{11} - \sqrt{3}$.

669. Найдите значение q, при котором разность корней уравнения $x^2 - 10x + q = 0$ равна 6.

670. Составьте квадратное уравнение, зная его корни:

а) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$; б) $2 - \sqrt{3}$ и $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$.

Контрольные вопросы и задания

1 Приведите пример целого уравнения и пример дробного рационального уравнения.

2 На примере уравнения $\frac{6}{x^2-1} - 1 = \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+1}$ объясните, как решают дробные рациональные уравнения.

§ 10 УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ

28. Уравнение с двумя переменными и его график

В 7 классе рассматривались уравнения с двумя переменными, имеющие вид $ax + by = c$, где a, b и c — некоторые числа. Такие уравнения, как известно, называются *линейными*. Но уравнения с двумя переменными могут быть и нелинейными. Так, уравнения $x^2 = 4 - y^2$, $xy - 6 = 0$, $5x^3 + y^2 = 9$ линейными не являются.

Решение уравнения с двумя переменными в общем случае определяется так же, как и решение линейного уравнения.

Решением уравнения с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство.

Так, если в уравнение $5x^3 + y^2 = 9$ подставить вместо переменной x число 1, а вместо переменной y число 2, то получится верное равенство $5 \cdot 1^3 + 2^2 = 9$. Пара чисел (1; 2), в которой на первом месте указано значение переменной x, а на втором — значение переменной y, является решением уравнения $5x^3 + y^2 = 9$. Заметим, что уравнение с двумя переменными имеет, как правило, бесконечное множество решений.

Два уравнения, имеющие одно и то же множество решений, называют *равносильными уравнениями*.

Степень целого уравнения с двумя переменными определяется так же, как и степень целого уравнения с одной переменной: если левая часть уравнения с двумя переменными есть многочлен стандартного вида, а правая — число 0, то степень уравнения считают равной степени этого многочлена.

Для того чтобы выяснить, какова степень уравнения с двумя переменными, его заменяют равносильным уравнением, левая часть которого — многочлен стандартного вида, а правая — число 0. Например, уравнение

$$(x^3 + y)^2 = x^6 - 1$$

равносильно уравнению

$$2x^3y + y^2 + 1 = 0$$

и, значит, является уравнением четвёртой степени.

Графиком уравнения с двумя переменными называется множество точек координатной плоскости, координаты которых обращают уравнение в верное равенство.

Из курса алгебры 7 класса известно, что графиком линейного уравнения $ax + by = c$, в котором $a \neq 0$ или $b \neq 0$, является прямая. Например, графики линейных уравнений

$$y + 3{,}5 = 0, \quad y = 0{,}5x + 2{,}5$$

изображены на рисунке 23.

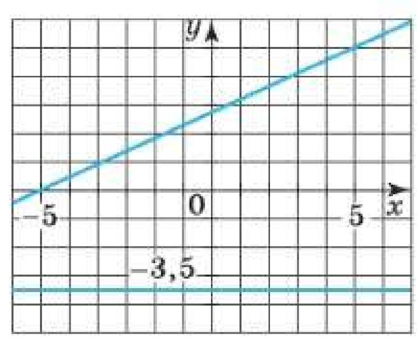


Рис. 23

Вам известны также графики некоторых уравнений второй степени. Например, графиком уравнения $x^2 - 2y = 0$ является парабола, графиком уравнения $xy - 12 = 0$ — гипербола. Эти графики изображены на рисунках 24, *а* и *б*.

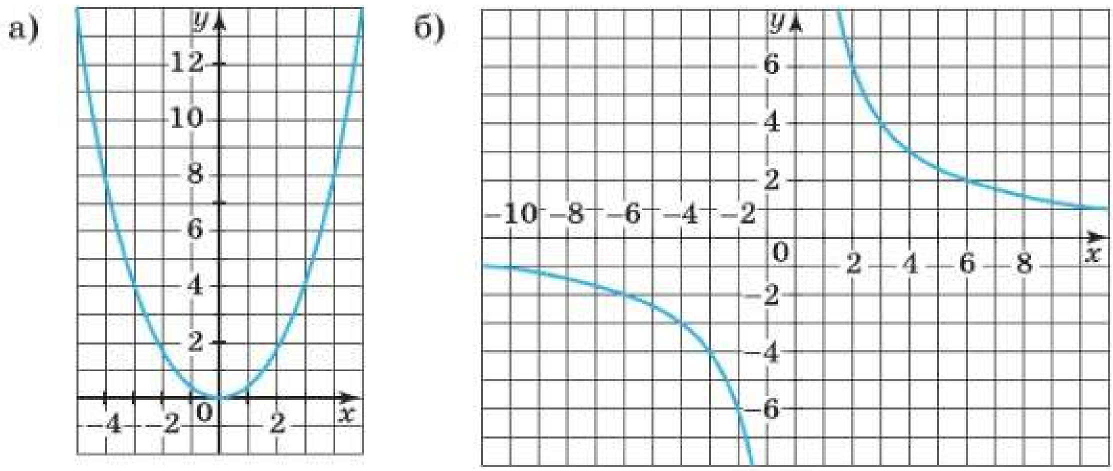


Рис. 24

Вообще графики уравнений с двумя переменными весьма разнообразны. На рисунке 25 изображены кривые, которые названы в честь европейских математиков XVII века Якоба Бернулли и Рене Декарта: лемниската Бернулли (рис. 25, *а*) и декартов лист (рис. 25, *б*).

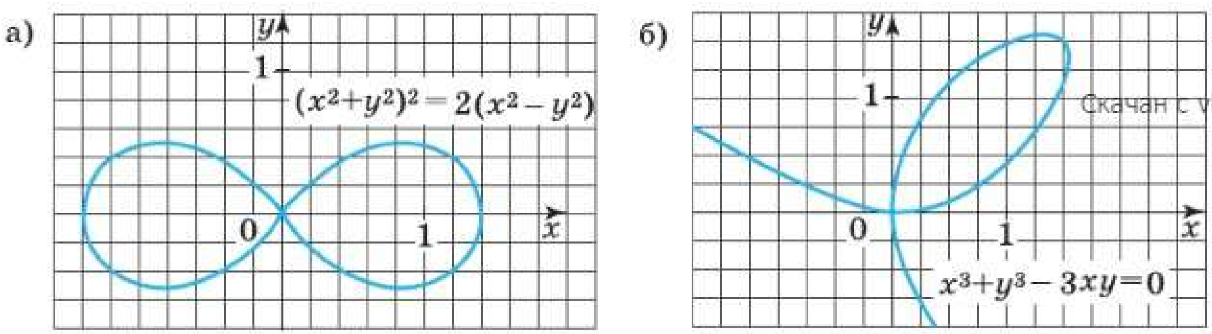


Рис. 25

Упражнения

671. Является ли пара чисел (–1; 3) решением уравнения:

а) $x^2 - y + 2 = 0$; в) $x^2 + y^2 = 10$;

б) $xy + y = 6$; г) $x^2 - y^2 + 8 = 0$?

672. Найдите три каких-нибудь решения уравнения:

а) $x - 2y = 8$; в) $x - xy = 12$;

б) $x + 0y = 10$; г) $(x + y)(y - 2) = 0$.

673. Определите степень уравнения:

а) $x + 4xy = 5$; в) $8x^6 - y^2 = 2x^4(4x^2 - y)$;

б) $x^5 + 8x^3y^3 = 1$; г) $(x - 2y)^2 - x^2 = 4y(y - x) + 5x$.

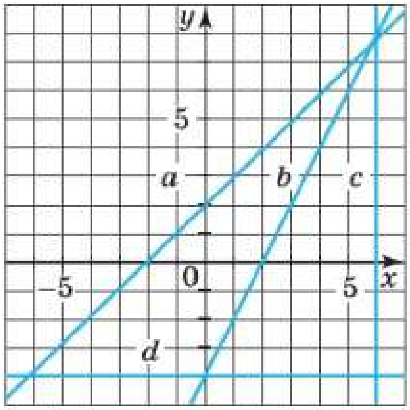


Рис. 26

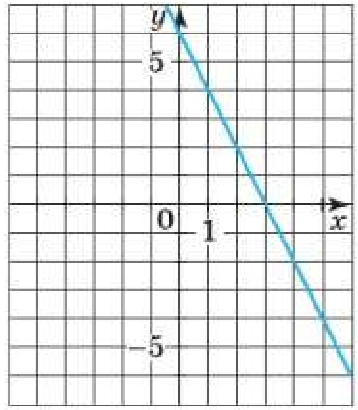


Рис. 27

674. Графики линейных уравнений $2x - y = 4$, $x - y = -2$, $y + 4 = 0$, $x - 6 = 0$ изображены на рисунке 26. Для каждой из прямых, изображённых на этом рисунке, укажите её уравнение.

675. Постройте график уравнения:

а) $3x + 0y = 12$;
б) $0x + y = 1$;
в) $x = 5$;
г) $y = 1{,}5$;
д) $(x - 2)(y - 3) = 0$;
е) $(x + 3)(y + 1) = 0$;
ж) $|x| = 2$;
з) $|y| = 3$.

676. Объясните, почему графиком уравнения $x^2 - y^2 = 0$ является пара прямых $y = x$ и $y = -x$.

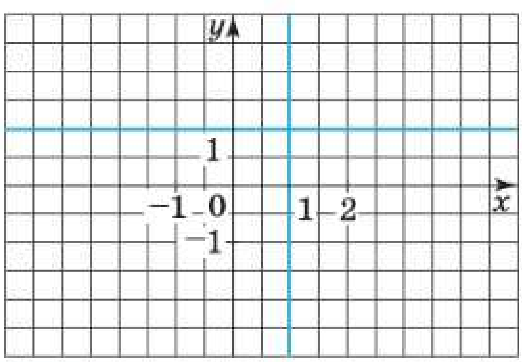
677. Постройте на координатной плоскости график линейного уравнения:

а) $3x - 2y = 5$; б) $x + 2y - 3 = 0$; в) $3x - 4y = -1$.

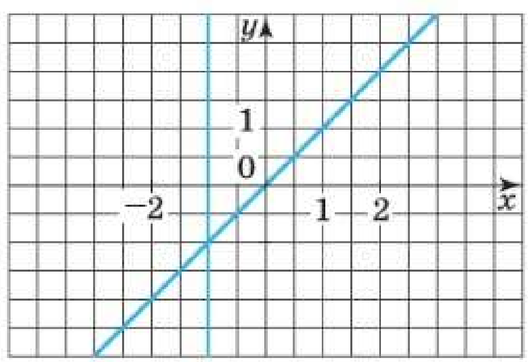
678. На рис. 27 изображён график одного из следующих линейных уравнений: $x - y = -7$, $x - y = 4$, $2x + y = 6$, $x + y = 5$. Укажите это уравнение.

679. Составьте уравнение, графиком которого является пара прямых, изображённых на рисунке 28.

а)



б)



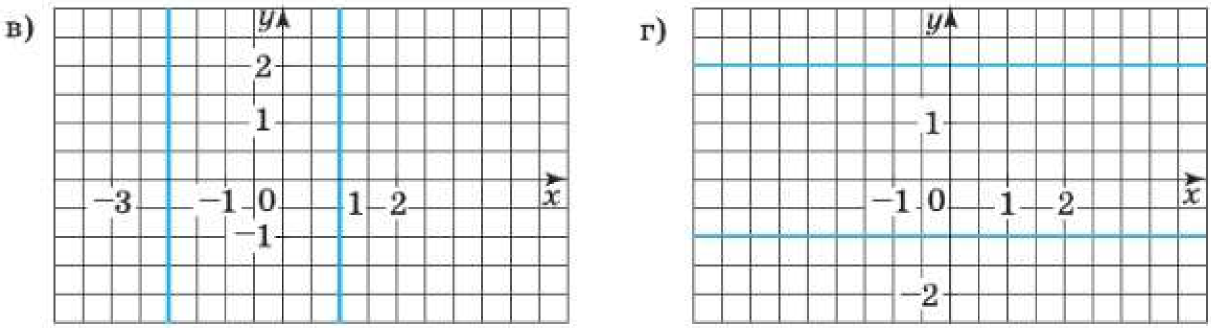


Рис. 28

680. Составьте уравнение с двумя переменными, график которого изображён на рисунке 29.

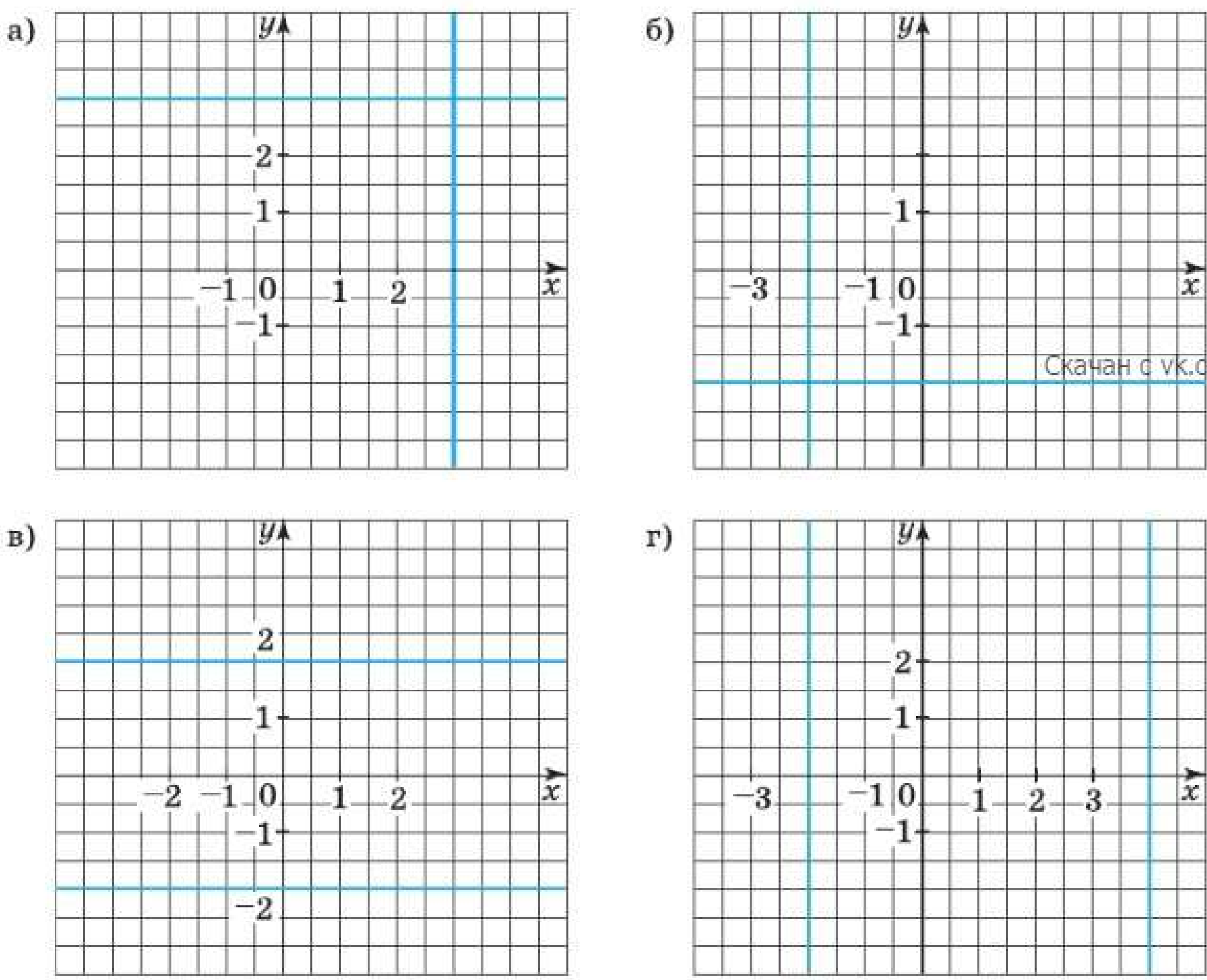


Рис. 29

681. Постройте график уравнения:

а) $y - x^2 = 0$;
б) $y - x^3 = 0$;
в) $0{,}5xy + 1{,}5 = 0$;
г) $y + x^3 = 0$.