

Значит,

$$\frac{3x+2}{3x^2-13x-10} = \frac{3x+2}{(3x+2)(x-5)} = \frac{1}{x-5}.$$



Упражнения

617. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

- а) $3x^2 - 24x + 21$; г) $x^2 - 12x + 20$; ж) $2x^2 - 5x + 3$;
б) $5z^2 + 10z - 15$; д) $-y^2 + 16y - 15$; з) $5y^2 + 2y - 3$;
в) $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$; е) $-t^2 - 8t + 9$; и) $-2n^2 + 5n + 7$.

618. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

- а) $2x^2 - 2x + \frac{1}{2}$; в) $16a^2 + 24a + 9$;
б) $-9x^2 + 12x - 4$; г) $0,25m^2 - 2m + 4$.

619. Разложите на множители квадратный трёхчлен:

- а) $2x^2 + 12x - 14$; в) $3x^2 + 5x - 2$;
б) $-m^2 + 5m - 6$; г) $6x^2 - 13x + 6$.

620. Докажите тождество:

- а) $10x^2 + 19x - 2 = 10(x - 0,1)(x + 2)$;
б) $0,5(x - 6)(x - 5) = 0,5x^2 - 5,5x + 15$.

Скачан с vk.com/material100

621. Можно ли представить квадратный трёхчлен в виде произведения многочленов первой степени:

- а) $-3y^2 + 3y + 11$; в) $x^2 - 7x + 11$;
б) $4b^2 - 9b + 7$; г) $3y^2 - 12y + 12$?

622. Можно ли разложить на множители квадратный трёхчлен, коэффициенты которого равные, отличные от нуля числа?

623. Покажите, что существует квадратный трёхчлен, имеющий корни, коэффициенты которого — натуральные числа вида n , $2n$, $3n$ (расположенные в произвольном порядке). Разложите этот трёхчлен на множители.

624. Сократите дробь:

- а) $\frac{4x+4}{3x^2+2x-1}$; в) $\frac{16-b^2}{b^2-b-12}$; д) $\frac{p^2-11p+10}{20+8p-p^2}$;
б) $\frac{2a^2-5a-3}{3a-9}$; г) $\frac{2y^2+7y+3}{y^2-9}$; е) $\frac{3x^2+16x-12}{10-13x-3x^2}$.

625. Сократите дробь:

- а) $\frac{x^2-11x+24}{x^2-64}$; б) $\frac{2y^2+9y-5}{4y^2-1}$.

626. Найдите значение дроби:

а) $\frac{36 - x^2}{6 - 7x + x^2}$ при $x = -9; -99; -999$;

б) $\frac{4x^2 + 8x - 32}{4x^2 - 16}$ при $x = -1; 5; 10$.

627. Чем различаются графики функций $y = x - 4$ и $y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2}$?



628. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2 - 1}{2} - 11x = 11$;

в) $x - 3 = \frac{1 - x^2}{3}$;

б) $\frac{x^2 + x}{2} = \frac{8x - 7}{3}$;

г) $\frac{2 - x^2}{7} = \frac{x}{2}$.

629. Разложите на множители многочлен:

а) $4x^2 - 6x + 2xy - 3y$; б) $4a^3 + 2b^3 - 2a^2b - 4ab^2$.

630. В какой координатной четверти расположена точка пересечения графиков функций $f(x) = 0,8x + 2,1$ и $g(x) = -0,9x + 3$?

Скачан с vk.com/material100

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение квадратного трёхчлена. Сколько корней может иметь квадратный трёхчлен?
2. Покажите на примере выражения $3x^2 - 12x + 32$, как можно выделить квадрат двучлена из квадратного трёхчлена.
3. Сформулируйте и докажите теорему о разложении на множители квадратного трёхчлена, имеющего корни.

§ 9 ДРОБНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

26. Решение дробных рациональных уравнений

В уравнениях

$$2x + 5 = 3(8 - x),$$

$$x - \frac{5}{x} = -3x + 19,$$

$$\frac{x-4}{2x+1} = \frac{x-9}{x}$$

левая и правая части являются рациональными выражениями. Такие уравнения называют *рациональными уравнениями*.

Рациональное уравнение, в котором и левая, и правая части являются целыми выражениями, называют *целым*. Рациональное уравнение, в котором левая или правая часть является дробным выражением, называют *дробным*.

Так, уравнение

$$2x + 5 = 3(8 - x)$$

целое, а уравнения

$$x - \frac{5}{x} = -3x + 19 \text{ и } \frac{x-4}{2x+1} = \frac{x-9}{x}$$

дробные рациональные.

Пример 1. Решим целое уравнение

$$\frac{x-1}{2} + \frac{2x}{3} = \frac{5x}{6}.$$

- Умножим обе части уравнения на наименьший общий знаменатель входящих в него дробей, т. е. на число 6. Получим уравнение, равносильное данному, не содержащее дробей:

$$3(x-1) + 4x = 5x.$$

Решив его, найдём, что $x = 1,5$. ◀

Скачан с vk.com/material100

Пример 2. Решим дробное рациональное уравнение

$$\frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{x+5}{x(x-5)}. \quad (1)$$

- По аналогии с предыдущим примером умножим обе части уравнения на общий знаменатель дробей, т. е. на выражение $x(x-5)$. Получим целое уравнение

$$x(x-3) + x - 5 = x + 5. \quad (2)$$

Понятно, что каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2). Но уравнение (2) может быть не равносильно исходному, так как мы умножили обе его части не на число, отличное от нуля, а на выражение, содержащее переменную, которое может обращаться в нуль. Поэтому не каждый корень уравнения (2) обязательно окажется корнем уравнения (1).

Упростив уравнение (2), получим квадратное уравнение

$$x^2 - 3x - 10 = 0.$$

Его корни — числа -2 и 5 .

Проверим, являются ли числа -2 и 5 корнями уравнения (1).

При $x = -2$ общий знаменатель $x(x-5)$ не обращается в нуль. Значит, число -2 — корень уравнения (1).

При $x = 5$ общий знаменатель обращается в нуль и выражения $\frac{x-3}{x-5}$ и $\frac{x+5}{x(x-5)}$ теряют смысл. Поэтому число 5 не является корнем уравнения (1).

Итак, корнем уравнения (1) служит только число -2 . \triangleleft

Вообще при решении дробных рациональных уравнений целесообразно поступать следующим образом:

- 1) найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
- 2) умножить обе части уравнения на общий знаменатель;
- 3) решить получившееся целое уравнение;
- 4) исключить из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель.

Пример 3. Решим уравнение $\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} = \frac{4-x}{x^2+2x}$.

► Имеем $\frac{2}{(x-2)(x+2)} - \frac{1}{x(x-2)} = \frac{4-x}{x(x+2)}$.

Скачан с vk.com/material100

Общий знаменатель дробей равен $x(x-2)(x+2)$. Умножив обе части уравнения на общий знаменатель дробей, получим

$$2x - (x+2) = (4-x)(x-2).$$

Отсюда

$$2x - x - 2 = 4x - x^2 - 8 + 2x,$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

$$D = 25 - 24 = 1,$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2},$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2},$$

$$x_1 = 2, x_2 = 3.$$

Если $x = 2$, то $x(x-2)(x+2) = 0$;

если $x = 3$, то $x(x-2)(x+2) \neq 0$.

Значит, корнем исходного уравнения является число 3.

Ответ: 3. \triangleleft

Упражнения

631. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{y^2}{y+3} = \frac{y}{y+3};$

е) $\frac{2y+3}{2y-1} = \frac{y-5}{y+3};$

б) $\frac{x^2}{x^2-4} = \frac{5x-6}{x^2-4};$

ж) $\frac{5y+1}{y+1} = \frac{y+2}{y};$

в) $\frac{2x^2}{x-2} = \frac{-7x+6}{2-x};$

з) $\frac{1+3x}{1-2x} = \frac{5-3x}{1+2x};$

г) $\frac{y^2-6y}{y-5} = \frac{5}{5-y};$

и) $\frac{x-1}{2x+3} - \frac{2x-1}{3-2x} = 0.$

д) $\frac{2x-1}{x+7} = \frac{3x+4}{x-1};$

632. Решите уравнение:

а) $\frac{2x-5}{x+5} - 4 = 0;$

д) $\frac{8}{x} = 3x + 2;$

б) $\frac{12}{7-x} = x;$

е) $\frac{x^2+4x}{x+2} = \frac{2x}{3};$

в) $\frac{x^2-4}{4x} = \frac{3x-2}{2x};$

ж) $\frac{2x^2-5x+3}{10x-5} = 0;$

г) $\frac{10}{2x-3} = x-1;$

з) $\frac{4x^3-9x}{x+1,5} = 0.$

633. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{7x}{x^2+1};$

д) $\frac{x^2+3}{x^2+1} = 2;$

б) $\frac{y^2}{y^2-6y} = \frac{4(3-2y)}{y(6-y)};$

е) $\frac{3}{x^2+2} = \frac{1}{x};$

в) $\frac{x-2}{x+2} = \frac{x+3}{x-4};$

ж) $x+2 = \frac{15}{4x+1};$

г) $\frac{8y-5}{y} = \frac{9y}{y+2};$

з) $\frac{x^2-5}{x-1} = \frac{7x+10}{9}.$

Скачан с vk.com/material100

634. Решите уравнение:

а) $\frac{3x+1}{x+2} - \frac{x-1}{x-2} = 1$;

г) $\frac{4}{x+3} - \frac{5}{3-x} = \frac{1}{x-3} - 1$;

б) $\frac{2y-2}{y+3} + \frac{y+3}{y-3} = 5$;

д) $\frac{3}{x} + \frac{4}{x-1} = \frac{5-x}{x^2-x}$;

в) $\frac{4}{9y^2-1} - \frac{4}{3y+1} = \frac{5}{1-3y}$;

е) $\frac{3y-2}{y} - \frac{1}{y-2} = \frac{3y+4}{y^2-2y}$.

635. При каком значении x :

а) значение функции $y = \frac{2x-1}{x+6}$ равно 5; -3; 0; 2;

б) значение функции $y = \frac{x^2+x-2}{x+3}$ равно -10; 0; -5?

636. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{x-4}{x-5} + \frac{x-6}{x+5} = 2$;

г) $\frac{3}{y-2} + \frac{7}{y+2} = \frac{10}{y}$;

б) $\frac{1}{2-x} - 1 = \frac{1}{x-2} - \frac{6-x}{3x^2-12}$;

д) $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} = 3\frac{1}{3}$;

в) $\frac{7y-3}{y-y^2} = \frac{1}{y-1} - \frac{5}{y(y-1)}$;

е) $\frac{5x+7}{x-2} - \frac{2x+21}{x+2} = 8\frac{2}{3}$.

Скачан с vk.com/material100

637. Найдите значение переменной y , при котором:

а) сумма дробей $\frac{3y+9}{3y-1}$ и $\frac{2y-13}{2y+5}$ равна 2;

б) разность дробей $\frac{5y+13}{5y+4}$ и $\frac{4-6y}{3y-1}$ равна 3;

в) сумма дробей $\frac{y+1}{y-5}$ и $\frac{10}{y+5}$ равна их произведению;

г) разность дробей $\frac{6}{y-4}$ и $\frac{y}{y+2}$ равна их произведению.

638. Решите уравнение:

а) $\frac{5}{y-2} - \frac{4}{y-3} = \frac{1}{y}$;

г) $\frac{10}{y^3-y} + \frac{1}{y-y^2} = \frac{1}{1+y}$;

б) $\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{x+2} = \frac{3}{x+3}$;

д) $1 + \frac{45}{x^2-8x+16} = \frac{14}{x-4}$;

в) $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2-2x} = \frac{8}{x^3-4x}$;

е) $\frac{5}{x-1} - \frac{4}{3-6x+3x^2} = 3$.

639. Решите уравнение:

а) $\frac{10}{(x-5)(x+1)} + \frac{x}{x+1} = \frac{3}{x-5}$;

б) $\frac{17}{(x-3)(x+4)} - \frac{1}{x-3} = \frac{x}{x+4}$;

в) $\frac{4}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2-1} = 0$;

г) $\frac{4}{9x^2-1} + \frac{1}{3x^2-x} = \frac{4}{9x^2-6x+1}$.

640. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{21}{x+1} = \frac{16}{x-2} - \frac{6}{x}$;

б) $\frac{2}{y^2-3y} - \frac{1}{y-3} = \frac{5}{y^3-9y}$;

в) $\frac{18}{4x^2+4x+1} - \frac{1}{2x^2-x} = \frac{6}{4x^2-1}$;

г) $\frac{3(4y^2+10y-7)}{16y^2-9} = \frac{3y-7}{3-4y} + \frac{6y+5}{3+4y}$.

Скачан с vk.com/material100

641. (Для работы в парах.) Решите уравнение:

а) $1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5-x^2}}} = 1\frac{7}{24}$;

б) $1 - \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{10-x^2}}} = \frac{3}{5}$.

1) Обсудите, какие преобразования и в какой последовательности надо выполнить, чтобы найти корни уравнения.

2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто — задание б), и выполните их.

3) Проверьте друг у друга, правильно ли решено уравнение.

642. Решите графически уравнение:

а) $\frac{6}{x} = x$; б) $\frac{6}{x} = -x + 6$.

643. С помощью графиков выясните, сколько корней может иметь уравнение $\frac{1}{x} = ax + b$, где a и b — некоторые числа. Для каждого случая укажите, каким условиям должны удовлетворять числа a и b .



644. Найдите значение выражения $x^2 - 2xy + y^2$ при $x = 3 + \sqrt{5}$, $y = 3 - \sqrt{5}$.
645. Определите, принадлежат ли графику функции $y = x^2 + 2x + 5$ точки $A(1,5; 7,25)$, $B(-3,2; 9)$ и $C(\sqrt{3} - 1; 7)$.
646. Упростите выражение:
- а) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \sqrt{x}$;
- б) $\sqrt{x} - \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.
647. Сравните с нулём значение выражения:
- а) $\frac{3ab}{a^2+b^2}$, где $a > 0$, $b < 0$;
- б) $\frac{5a^3b^2}{a+b}$, где $a < 0$, $b < 0$.

27. Решение задач

Скачан с vk.com/material100

Решение многих задач приводит к дробным рациональным уравнениям.

Задача 1. Моторная лодка прошла 25 км по течению реки и 3 км против течения, затратив на весь путь 2 ч. Какова скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч?

- Пусть x км/ч — скорость лодки в стоячей воде. Тогда скорость лодки по течению $(x + 3)$ км/ч, а против течения $(x - 3)$ км/ч. По течению реки 25 км лодка прошла за $\frac{25}{x+3}$ ч, а против течения 3 км — за $\frac{3}{x-3}$ ч. Значит, время, затраченное на весь путь, равно

$$\left(\frac{25}{x+3} + \frac{3}{x-3} \right) \text{ ч.}$$

По условию задачи на весь путь лодка затратила 2 ч. Следовательно,

$$\frac{25}{x+3} + \frac{3}{x-3} = 2.$$

Решив это уравнение, найдём его корни: $x_1 = 2$ и $x_2 = 12$.

По смыслу задачи скорость лодки в стоячей воде должна быть больше скорости течения. Этому условию удовлетворяет второй корень — число 12 и не удовлетворяет первый.

Ответ: 12 км/ч. ◀

Задача 2. К сплаву меди и цинка, содержащему 10 кг цинка, добавили 20 кг цинка. В результате содержание меди в сплаве уменьшилось на 25%. Какова была первоначальная масса сплава?

► Пусть первоначальная масса сплава была равна x кг. Тогда меди в нём было $(x - 10)$ кг и она составляла

$$\frac{x-10}{x} \cdot 100\%$$

от массы сплава. Масса нового сплава, полученного после добавления 20 кг цинка, оказалась равной $(x + 20)$ кг, а медь в нём составила

$$\frac{x-10}{x+20} \cdot 100\%.$$

По условию задачи содержание меди уменьшилось на 25%. Следовательно,

$$\frac{x-10}{x} \cdot 100\% - \frac{x-10}{x+20} \cdot 100\% = 25\%. \quad \text{Скачан с vk.com/material100}$$

Отсюда

$$\frac{(x-10) \cdot 4}{x} - \frac{(x-10) \cdot 4}{x+20} = 1.$$

Решив это уравнение, найдём, что оно имеет два корня: $x_1 = 20$ и $x_2 = 40$. Оба корня удовлетворяют условию задачи.

Ответ: 20 кг или 40 кг. ◀

Упражнения

648. Знаменатель обыкновенной дроби больше её числителя на 3. Если к числителю этой дроби прибавить 7, а к знаменателю — 5, то она увеличится на $\frac{1}{2}$. Найдите эту дробь.

649. Из города в село, находящееся от него на расстоянии 120 км, выехали одновременно два автомобиля. Скорость одного была на 20 км/ч больше скорости другого, и поэтому он пришёл к месту назначения на 1 ч раньше. Найдите скорость каждого автомобиля.

- 650.** Один из лыжников прошёл расстояние в 20 км на 20 мин быстрее, чем другой. Найдите скорость каждого лыжника, зная, что один из них двигался со скоростью, на 2 км/ч большей, чем другой.
- 651.** Два автомобиля выезжают одновременно из одного города в другой. Скорость первого автомобиля на 10 км/ч больше скорости второго, и поэтому первый автомобиль приезжает на место на 1 ч раньше второго. Найдите скорость каждого автомобиля, зная, что расстояние между городами равно 560 км.
- 652.** Чтобы ликвидировать опоздание на 1 ч, поезд на перегоне в 720 км увеличил скорость, с которой шёл по расписанию, на 10 км/ч. Какова скорость поезда по расписанию?
- 653.** В прошлом году в фермерском хозяйстве собрали 192 ц пшеницы. В этом году благодаря использованию новых технологий удалось повысить урожайность пшеницы на 2 ц с гектара. В результате такой же урожай собрали с площади, на 0,4 га меньшей. Какова была урожайность пшеницы в хозяйстве в прошлом году?
- 654.** На молодёжном карнавале Андрей купил билеты лотереи «Надежда» на 240 р. Если бы он потратил эти деньги на билеты лотереи «Удача», то смог бы купить на 4 билета больше, так как они были на 5 р. дешевле. Сколько стоил билет лотереи «Надежда»?
- 655.** Предприниматель приобрёл акции одинаковой стоимости на 110 000 р. Если бы он отложил покупку на год, то сумел бы приобрести на эту сумму на 20 акций меньше, так как цена одной акции данного вида возросла за этот год на 50 р. Сколько акций приобрёл предприниматель?
- 656.** *Старинная задача.* Несколько человек обедали вместе и по счёту должны были уплатить 175 шиллингов. Оказалось, что у двоих не было при себе денег. Поэтому каждому из остальных пришлось уплатить на 10 шиллингов больше, чем приходилось на его долю. Сколько человек обедало?
- 657.** Сотрудники отдела решили совместно приобрести однокамерный холодильник за 14400 р. Однако трое отказались участвовать в покупке, и остальным пришлось уплатить на 400 р. больше, чем предполагалось. Сколько сотрудников работает в отделе?
- 658.** Турист проплыл на лодке против течения реки 6 км и по озеру 15 км, затратив на путь по озеру на 1 ч больше, чем на путь по реке. Зная, что скорость течения реки равна 2 км/ч, найдите скорость лодки при движении по озеру.

- 659.** Моторная лодка, скорость которой в стоячей воде 15 км/ч, прошла по течению реки 35 км, а против течения — 25 км. По течению она шла столько же времени, сколько против течения. Какова скорость течения реки?
- 660.** Катер, развивающий в стоячей воде скорость 20 км/ч, прошёл 36 км против течения и 22 км по течению, затратив на весь путь 3 ч. Найдите скорость течения реки.
- 661.** В водный раствор соли добавили 100 г воды. В результате концентрация соли в растворе понизилась на 1%. Определите первоначальную массу раствора, если известно, что в нём содержалось 30 г соли.
- 662.** Сплав золота и серебра содержал 40 г золота. После того как к нему добавили 50 г золота, получили новый сплав, в котором содержание золота возросло на 20%. Сколько серебра было в сплаве?
- 663.** При совместной работе двух кранов разгрузку баржи закончили за 6 ч. Сколько времени потребовалось бы каждому крану отдельно для разгрузки баржи, если известно, что первому крану для этого требуется на 5 ч больше, чем второму?
- 664.** Два 3D-принтера разной мощности изготовили за 2 ч 55 мин некоторое количество деталей. За какое время это количество деталей мог бы изготовить первый 3D-принтер, если известно, что ему для этого потребуется на 2 ч больше, чем второму 3D-принтеру?
- 665.** Велосипедист проехал из посёлка до станции с некоторой постоянной скоростью, а возвращался со скоростью, на 5 км/ч большей. Какова была первоначальная скорость велосипедиста, если известно, что его средняя скорость на всём пути следования составляла 12 км/ч?
- 666.** Мотоциклист половину пути проехал с некоторой постоянной скоростью, а затем снизил скорость на 20 км/ч. Какова была скорость мотоциклиста на первой половине пути, если известно, что средняя скорость на всём пути составила 37,5 км/ч?



667. Докажите, что:

а) $\frac{1}{11+2\sqrt{30}} + \frac{1}{11-2\sqrt{30}} = 22;$

б) $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} + \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} = 18.$