RESOLUCIÓN DE EJERCICIO nro. 4 y 5 de MÓDULO 5
De EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA - SEGUNDA CLASE

Resueltos por la profesora Mariela Glassman

4) Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz de una t.l. f: $R^4 \to R^3$.

a) Calcule una base del Nu(f).

b) Clasificar la T.L.

c) ¿$(1;1;1) \epsilon\ Im(f)$?

Resolución:

a) Como tenemos la matriz de la t.l, hallar el núcleo implica resolver el sistema cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Realizando $f_3 + 2.f_2 \to f_3$; queda $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

De donde resulta que x = y = z = 0 y wϵR.

Luego, Nu(f)=$\{(0;0,0;w), w\epsilon R\}$.

Una base posible para el núcleo es $B_{Nu} = \{(0;0;0;1)\}$.

b) Por lo obtenido en a), tenemos que la transformación no es monomorfismo (pues Nu(f)$\neq \overrightarrow{O_{R^4}}$). La dim (Nu)=1; usando el teorema de la dimensión tenemos que:

$$\dim(R^4) = \dim(Nu) + \dim(Im)$$
$$4 = 1 + \dim\ (Im)$$

Luego, dim(Im)=3. Como f: $R^4 \to R^3$, resulta ser f epimorfismo. No es isomorfismo, pues no es monomorfismo.

c) Como es epimorfismo, la imagen es todo R^3, luego $(1;1;1) \epsilon\ Im(f)$.

---

5) Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de una t.l. f: $R^5 \to R^3$.

a) Calcule $f((1;0;-1;0;1))$.

b) Calcule una base de la Im(f).

c) Clasificar la T.L.

Resolución:

a) $f((1;0;-1;0;1))$= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Como tenemos la matriz de la t.l, tenemos que la imagen esta generada por las columnas de la matriz. Quedémonos con un conjunto l.i usando el método corto:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, $B_{Im} = \{(1; -1; 0), (0; 2; 1), (0; 0; 1)\}$

c) Por b) tenemos que dim Im(f)=3, luego como f: $R^5 \to R^3$ tenemos que f es epimorfismo.

Usando el teorema de la dimensión resulta que:

$$\dim(R^5) = \dim(Nu) + \dim(Im)$$
$$5 = \dim(Nu) + 3$$

Luego, dim Nu=2; por lo tanto f no es monomorfismo (pues de ser así, la dimensión del núcleo debería ser 0), y, por lo tanto, no es isomorfismo.