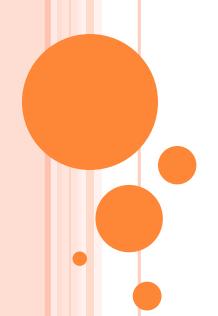
## DETERMINANTE DE UNA MATRIZ





El determinante es una función que al conjunto de matrices cuadradas le asigna un escalar, un número.

$$| = \det(): \mathbb{R}^{nxn} \to \mathbb{R}$$

Si A es una matriz de orden 2, es decir 2x2, el determinante de la matriz A se denotará como det(A) o bien |A| y se calcula haciendo:

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

# Para matrices de orden mayor definiremos previamente algunos conceptos

• El *menor complementario* de un elemento de A  $(a_{ij})$  se define como el determinante de la matriz que se obtiene al suprimir la fila i y la columna j en la que se encuentra dicho elemento  $a_{ij}$ .

 $\circ$  Se representa:  $M_{ij}$ 

#### EJEMPLO DEL MENOR COMPLEMENTARIO

En la matriz 
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
 , los menores complementarios de cada uno de los

elementos de la primera fila son:

Menor complementario de -2:
$$M_{11} = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 14-0=14.$$

Menor complementario de 
$$4:M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 12 + 9 = 21.$$
Menor complementario de  $5:M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 21 = -21.$ 

Menor complementario de 
$$5:M_{13} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = 0-21=-21.$$

- Se llama adjunto del elemento aij y se simboliza Aij al menor complementario anteponiendo:
- + si i+j es par.
- si i+j es impar.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Por ejemplo:

El adjunto del elemento  $a_{21}=2$  se obtiene multiplicando  $(-1)^{2+1}$  a su menor complementario , el determinante (2x2)-(6x1)= - 2

El adjunto de  $a_{21}(A_{21})$  es  $A_{21}$ =-(-2)=2

### FORMAS PARA CALCULAR EL DETERMINANTE

• REGLA DE LAPLACE O DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA FILA O COLUMNA

El determinante de una matriz es igual a la suma del producto de los elementos de una línea cualquiera (fila o columna) elegida, por sus correspondientes adjuntos.

- •Para obtener el determinante por fila i :
- $|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + ... + a_{in} \cdot A_{in}$
- •Para obtenerlo por columna j:

$$lAl = a_{j1} . A_{j1} + a_{j2} . A_{j2} + ... a_{jn} . A_{jn}$$

### EJEMPLO DE UN DETERMINANTE DE UNA MATRIZ DE ORDEN 3

Para la matriz  $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,<br/>aplicando la definición, si elegimos la fila tercera queda:

$$det(A) = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \left( - \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} \right) + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-12 - 35) + 0 \cdot (-(6 - 30)) + 2 \cdot (-14 - 24) = -141 + 0 - 76 = -217$$

Si hubiésemos elegido otra fila o columna, por ejemplo la columna 2, quedaría:

$$det(A) = 4 \cdot \left( - \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) + 7 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \left( - \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= 4 \cdot \left( -(12+9) \right) + 7 \cdot \left( -4 - 15 \right) + 0 \cdot \left( -(6-30) \right) = -84 - 133 + 0 = -217$$

Cualquier fila o columna que elijamos para calcular el determinante, el cálculo arroja el mismo escalar, el mismo número

$$Det(A) = -217$$

 Si se cambian entre si, dos filas o columnas, el determinante es el opuesto.

$$| Det \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = - Det \begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

o Al multiplicar una fila o columna por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número

$$\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k. \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

• Si una fila o columna esta formada por una suma, el determinante de la matriz es igual a la suma de los determinantes de la matriz principal descompuesta en 2 (permaneciendo igual los elementos de la filas/columnas restantes)

- o El determinante de una matriz es cero si:
- · Todos los elementos de una hilera (fila o columna) son nulos

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$$

Posee dos filas o columnas iguales

$$\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ d & d & f \\ g & g & i \end{vmatrix} = 0$$

- o El determinante de una matriz es cero si:
- · Los elementos de una fila o columna son proporcionales a otra

$$Det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ka & kb & kc \end{bmatrix} = k \cdot Det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix} = 0$$
Propiedad Propiedad

•Los elementos de una fila o columna son una combinación de otras

$$\begin{aligned} & \operatorname{Det} \begin{bmatrix} a & b & ka + mb \\ d & e & kd + me \\ g & h & kg + mh \end{bmatrix} = \operatorname{Det} \begin{bmatrix} a & b & ka \\ d & e & kd \\ g & h & kg \end{bmatrix} + \operatorname{Det} \begin{bmatrix} a & b & mb \\ d & e & me \\ g & h & mh \end{bmatrix} = \\ & = k \cdot \operatorname{Det} \begin{bmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ g & h & g \end{bmatrix} + m \cdot \operatorname{Det} \begin{bmatrix} a & b & b \\ d & e & e \\ g & h & h \end{bmatrix} = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

o Si a los elementos de una fila o columna se le suman los elementos de otra (multiplicados por un numero real o no) el determinante no varia

o El determinante de una matriz y su traspuesta son iguales

$$\det(A) = \det(A^{t})$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ p & q & r & s \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & p & x \\ b & 2 & q & y \\ c & 3 & r & z \\ d & 4 & s & t \end{vmatrix}$$

• El determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes

$$\det(A.B) = \det(A).\det(B)$$
$$|A.B| = |A||B|$$

 El determinante del producto de un escalar por una matriz es igual al producto del escalar elevado al orden de la matriz por el determinante de la matriz

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \land k \in \mathbb{R} \longrightarrow \det(k.A) = k^n \det(A)$$

$$|k.A| = k^n |A|$$

 El determinante de la inversa de una matriz es igual al inverso multiplicativo o recíproco del determinante de la matriz

$$\det(A^{-1}) = \left[\det(A)\right]^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$$
$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$$

Nota que el primer exponente -1 refiere a la inversa de una matriz y el segundo -1 al inverso de un número, el determinante de A

o Cuando se trata de una matriz triangular (inferior o superior) existe una manera más sencilla de calcular su determinante. Al ser nulos todos los elementos a un mismo lado de la diagonal principal, se puede calcular su determinante como el producto de los componentes de dicha diagonal.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

El determinante de la matriz A se calcula como: det (A)=  $a_{11} \times a_{22} \times a_{33} \times a_{44}$ 

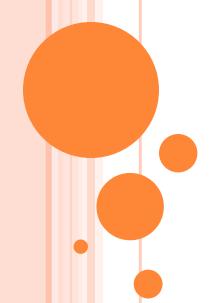
o El determinante de la matriz identidad de cualquier orden es 1

$$\det(I_n) = 1$$

#### Usos y aplicaciones de determinantes

- \*Permiten calcular el rango de una matriz
- \*Permite encontrar si tres puntos son colineales o no armando y resolviendo una tabla de matriz
- \*Se puede calcular áreas y volúmenes utilizando una interpretación geométrica de un determinante
- \*Se utilizan para la resolución de sistemas de ecuaciones
- \*Se pueden utilizar paras codificar o decodificar mensajes





### GRACIAS