Derivada de funciones vectoriales de una variable, trayectorias o curvas paramétricas.
Guía de clase. Com 2. 15/4

Consideremos el caso de

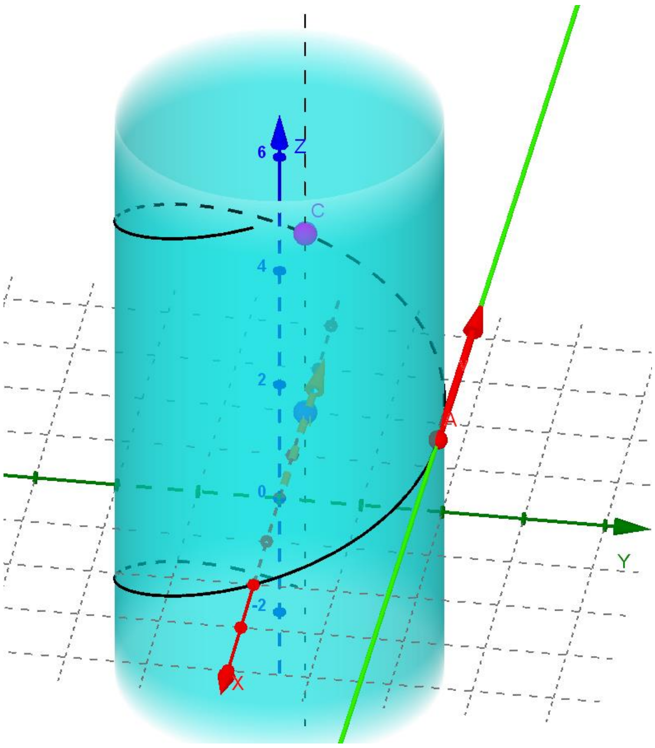
$$\vec{\alpha}: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
$$\vec{\alpha}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

Se define la derivada de $\vec{\alpha}$ como:

$$\vec{\alpha}'(t) = \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big)$$

Derivamos componente a componente

Si $\vec{\alpha}(t)$ parametriza una curva en el plano o en el espacio, y se considera dicha curva como la trayectoria o desplazamiento que describe un objeto, ya sea en el plano o en el espacio, entonces $\vec{\alpha}'(t)$ corresponde al vector velocidad, el cuál será tangente a la curva.



Ecuación de la recta tangente a la curva parametrizada por $\vec{\alpha}$ en el punto A

$$\vec{r}(t) = A + t\,\vec{\alpha}'(t_A)$$

Ejemplo

$C\colon \vec{\alpha}(t) = (2\cos(t)\,, 2\,\mathrm{sen}(t)\,, t) \qquad t \in [-\pi, 2\pi]$

Vector tangente

$$\vec{\alpha}'(t) = \big(x'(t), y'(t), z'(t)\big) = (-2\,\mathrm{sen}(t)\,, 2\cos(t)\,, 1)$$

Recta tangente en $A, t_A \in [-\pi, 2\pi]$

$$\vec{r}(\lambda) = A + \vec{\alpha}'(t_A)\,\lambda = \big(x(A), y(A), z(A)\big) + \lambda\,(-2\,\mathrm{sen}(t_A)\,, 2\cos(t_A)\,, 1)$$

$$\vec{r}(t) = (x(A) - 2\,\mathrm{sen}(t_A)\,\lambda, y(A) + 2\cos(t_A)\;\lambda, z(A) + \lambda) \quad \text{con} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Si $t = \frac{\pi}{4}$, calcular la ecuación de la recta tangente para dicho valor de t.

$$A = \vec{\alpha}(t) = \left(2\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right), 2\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}\right), \tfrac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \tfrac{\pi}{4}\right) = A \quad \text{Posición}$$

$$\vec{\alpha}'\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \left(-2\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}\right), 2\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right), 1\right) = \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1\right) \quad \text{Vector velocidad}$$

Ecuación recta tangente en A

$$\vec{r}(t) = A + t\,\vec{\alpha}'(t_A) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) + t\,\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1\right)$$

$$\vec{r}(t) = \left(\sqrt{2} - t\,\sqrt{2}, \sqrt{2} + t\sqrt{2}, \tfrac{\pi}{4} + t\right) \qquad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

Ecuación del plano normal en A

$$\pi\colon\; (x, y, z) \cdot \vec{N} = A \cdot \vec{N}$$

$$\pi\colon\; (x, y, z) \cdot \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1\right) = A \cdot \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1\right)$$

$$\pi\colon\; -\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,y + z = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\pi\colon\; -\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,y + z = \frac{\pi}{4}$$

Link al applet de geogebra para hélice del ejemplo
https://www.geogebra.org/m/rabkryck