Resolución TP4:

Ejercicio 3. Considere la función

$$f(x,y) = ax^2 + by^2 - xy$$

i) Determine los valores exactos de "a" y "b" para que el plano tangente a la gráfica de la función f en el punto $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (2,1,f(2,1))$ pase por los puntos $A_1 = (-2,3,-4)$ y $A_2 = (1,4,7)$.

Herramientas:

- $F(x,y,z) = f(x,y) - z$ es Diferenciable, $\nabla F(P)$es perpendicular a la superficie de nivel a la que pertenece P
- De un vector normal a un plano podemos obtener su ecuación mediante: $\vec{v} \cdot \vec{x} = \vec{v} \cdot P$. Siendo $\vec{x} = (x,y,z)$ generico.
- Es decir $\nabla F(P) \cdot \vec{x} = \nabla F(P) \cdot P$ ecuación del plano tangente a f(x,y) en P

Resolviendo:

$$\nabla F(x,y,z) = (2ax - y, 2by - x, -1)$$
$$\mathrm{P} = (2,1,f(2,1)) = (2,1,4a + b - 2)$$
$$\nabla F(P) = (4a - 1,2b - 2, -1)$$

El plano de siguiente ecuacion:

$$\nabla F(P) \cdot \vec{x} = \nabla F(P) \cdot P$$
$$(4a - 1,2b - 2, -1) \cdot (x,y,z) = (4a - 1,2b - 2, -1) \cdot (2,1,4a + b - 2)$$
$$(4a - 1)x + (2b - 2)y - z = 8a - 2 + 2b - 2 - 4a - b + 2$$
$$(4a - 1)x + (2b - 2)y - z = 4a\ + b - 2$$

El plano pasa por $A_1 = (-2,3,-4)$:

$$(4a - 1)(-2) + (2b - 2)(3) - (-4) = 4a\ + b - 2$$
$$(-8a + 2) + (6b - 6) - (-4) = 4a\ + b - 2$$
$$-8a + 6b = 4a\ + b - 2$$
$$-12a + 5b = -2$$

El plano pasa por $A_2 = (1,4,7)$:

$$(4a - 1)(1) + (2b - 2)(4) - (7) = 4a\ + b - 2$$
$$(4a - 1) + (8b - 8) - (7) = 4a\ + b - 2$$
$$(4a) + (8b) - 16 = 4a\ + b - 2$$
$$7b = 14$$
$$b = 2$$

$$b = 2 \ \rightarrow -12a + 5(2) = -2$$

$$-12a + 10 = -2$$
$$-12a = -2 - 10$$
$$a = 1$$

Finalmente:

$$(4a - 1)x + (2b - 2)y - z = 4a \ + b - 2$$
$$(4(1) - 1)x + (2(2) - 2)y - z = 4(1) + (2) - 2$$
$$3x + 2y - z = 4$$

$$\mathrm{P} = \big(2{,}1, f(2{,}1)\big) = (2{,}1, 4a + b - 2)$$
$$\mathrm{P} = \big(2{,}1, f(2{,}1)\big) = (2{,}1, 4(1) + (2) - 2)$$
$$\mathrm{P} = \big(2{,}1, f(2{,}1)\big) = (2{,}1, 4)$$

Verificacion:

En $3x + 2y - z = 4$ deben valer $P, A_1 \ y \ A_2$

En P

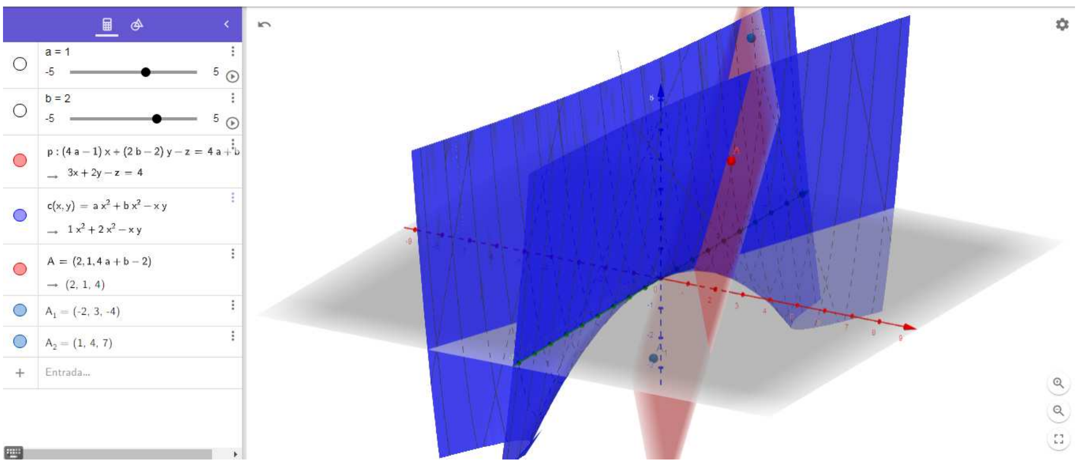
$$3x + 2y - z = 4 \rightarrow \ 3(2) + 2(1) - (4) = 4 \rightarrow 8 - 4 = 4$$

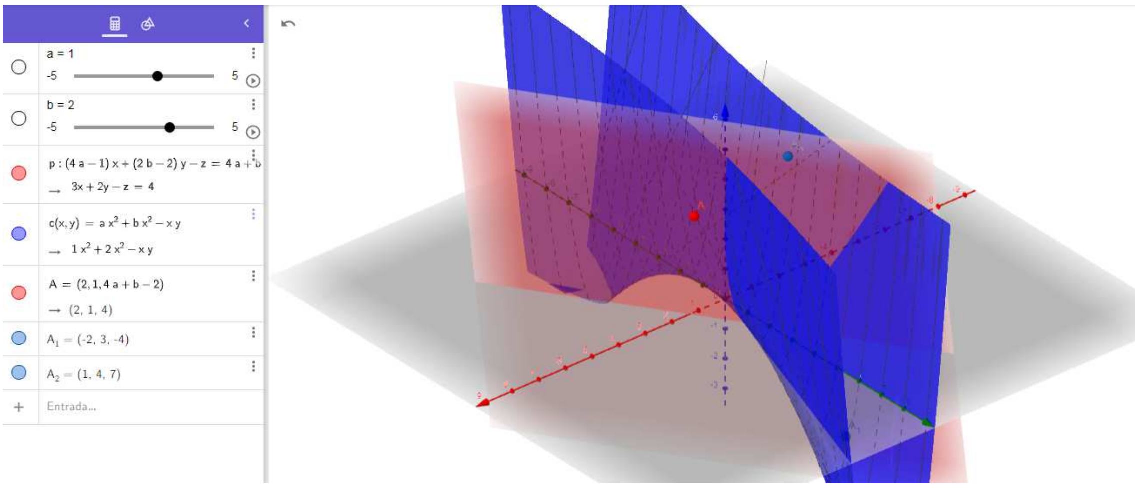
En A_1

$$3x + 2y - z = 4 \rightarrow \ 3(-2) + 2(3) - (-4) = 4 \rightarrow -6 + 6 + 4 = 4$$

En A_2

$$3x + 2y - z = 4 \rightarrow \ 3(1) + 2(4) - (7) = 4 \rightarrow 3 + 8 - 7 = 3 + 1 = 4$$





https://www.geogebra.org/calculator/zzpdvmec

V2 Herramientas:

- $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ es Diferenciable, $\nabla F(P)$es perpendicular a la superficie de nivel a la que pertenece P
- De 3 puntos de un plano, se puede obtener $N = (P - A_1)X(P - A_2)$ que define el plano.
- Es decir $\nabla F(P) = \mathrm{kN}$

Resolviendo:

$$\nabla F(x, y, z) = (2ax - y, 2by - x, -1)$$
$$\mathrm{P} = \big(2,1, f(2,1)\big) = (2,1, 4a + b - 2)$$
$$\nabla F(P) = (4a - 1,2b - 2, -1)$$

El plano pasa por $A_1 = (-2,3, -4)$:

$$= (2,1, 4a + b - 2) - (-2,3, -4) = (4,4,4a + b + 2)$$

El plano pasa por $A_2 = (1,4,7)$:

$$= (2,1, 4a + b - 2) - (1,4,7) = (1, -3,4a + b - 9)$$

Entonces

$N = (P - A_1)X(P - A_2)$

$$N = (\quad)$$

El plano de siguiente ecuacion:

$$\nabla F(P) \cdot \vec{x} = \nabla F(P) \cdot P$$