T P 04 Ej. 27-a

Encontrar una función lineal que aproxime a:

$F(x, y, z) = (x^2 y, z)$ cerca de (1,0,1)

Para resolver este ejercicio debemos utilizar la matriz jacobiana como en el ejercicio anterior, pero a esta matriz hay que multiplicarle una nueva matriz [n x 1] donde n son la cantidad de variables involucradas en el campo.

Para un Campo Vectorial la función lineal que aproxima se forma de la siguiente manera:

$Fl(x, y, z) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}_P + \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ donde y_m son las componentes del campo vectorial.

Donde $\alpha_i = \bar{X} - P$ con P el punto que se está estudiando. Para trabajar más simple, vamos a llamar a las componentes de este vector (h, k, l)

En nuestro ejercicio antes de hacer matriz alguna, debemos dar nombre a las funciones que van a servir para obtener la matriz. Por consecuencia:

$u = u(x, y, z) = x^2 y$

$v = v(x, y, z) = z$

Ahora, si armo la matriz:

$Fl(x, y, z) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_P + \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}_P \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}$ Calculando las respectivas derivadas el Jacobiano queda:

$Fl(x, y, z) = \begin{bmatrix} x^2 y \\ z \end{bmatrix}_{(1,0,1)} + \begin{bmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(1,0,1)} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}$ Reemplazando en el punto dado, queda:

$Fl(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \end{pmatrix}$ Ahora ya queda encontrar las variables k, h y l

$x = h + x_0$
$y = k + y_0$ Para nuestro caso la equivalencia queda
$z = l + z_0$

$x = h + 1$
$y = k + 0$
$z = l + 1$

$$Fl(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \\ z - 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y \\ z - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

Entonces la Función Lineal que aproxima a $F(x, y, z)$ es: $Fl(x, y, z) = (\mathrm{y}, \mathrm{z})$.