Funciones vectoriales. Campos vectoriales

Función vectorial y campo vectorial

La función
$\vec{F}: S \subseteq \mathbb{R}^{n>1} \to \mathbb{R}^{m>1}$,
$(x_1, x_2, .., x_n) \mapsto F(x_1, x_2, .., x_n) = (F_1(x_1, x_2, .., x_n), F_2(x_1, x_2, .., x_n), .., F_m(x_1, .., x_n))$

se llama función vectorial de variable vectorial en $\mathbb{R}^n$ con m componentes o función vectorial de n variables con m componentes.
A las funciones vectoriales de n variables con n componentes se les llama campos vectoriales en $\mathbb{R}^n$. En particular,
$\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ es un campo vectorial en el plano y
$\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$ es un campo vectorial en el espacio.

Por ejemplo:

$\vec{F}(x, y) = (ln(xy), \sqrt{x^2 + y^2 - 1}, \cos x \sin y)$ es una función vectorial con 3 componentes de 2 variables.

$\vec{G}(x, y) = (cos(x + y), sin(xy))$ es un campo vectorial en el plano.

$\vec{H}(x, y, z) = (cos(x + y - z), sin(x - y + z), e^{xyz})$ es un campo vectorial en el espacio.

Así como se ha establecido para las funciones escalares, a menos que se explicite claramente, se considerará al conjunto $dom\,\vec{F}$ como el dominio natural del campo vectorial. Entendiéndose por tal, al conjunto de puntos $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ comunes al dominio natural de las funciones componentes $f_1, \dots, f_m$. Esto es:

$$dom\,\vec{F} = dom\,f_1 \cap \dots \cap dom\,f_m$$

Los campos vectoriales se manifiestan naturalmente en numerosas situaciones de la física. Se pueden mencionar, por ejemplo:

- El campo gravitacional $\vec{F}(x, y, z)$ debido a la fuerza de atracción de una cierta masa M ubicada en la posición (x, y, z) del espacio.

- El campo de fuerza electrostático $\vec{E}(x, y, z)$ que ejerce un objeto eléctricamente cargado sobre una carga unitaria que se encuentra en la posición (x, y, z). Esta fuerza puede ser de atracción o de repulsión.
- El campo de velocidad $\vec{V}(x, y, z)$ de un fluido en movimiento que determina la velocidad de una partícula en movimiento en el punto (x, y, z).
- El gradiente $\nabla f(x, y)$ de la función escalar $f(x, y)$, que ofrece la dirección y sentido de la derivada direccional máxima de esta función en (x, y). En particular, si la función $f(x, y)$ determina la temperatura de una lámina, el gradiente $\nabla f(x, y)$ determina la dirección y sentido del mayor crecimiento de la temperatura f, en el punto (x, y) de ésta.

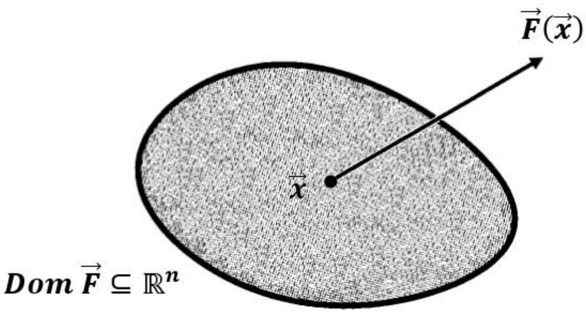

Figura 1. Representación geométrica habitual de un campo vectorial $\vec{F}: Dom\,\vec{F} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1. El dominio natural del campo vectorial

$$\vec{F}(x, y) = \big(f_1(x, y), f_2(x, y)\big) = (-y, x)$$

es $dom\,\vec{F} = \mathbb{R}^2$. Y su representación gráfica es la que se puede ver en la Figura 2.

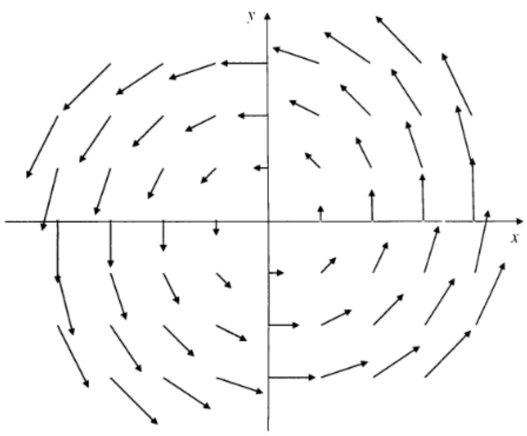

Figura 2. Representación gráfica del campo vectorial $F(x, y) = (-y, x)$.
En este caso se trata del campo de velocidades de un cuerpo rígido girando radialmente respecto del origen.

Ejemplo 2. El campo de fuerza gravitacional $\vec{F}(x,y,z)$ debido a una masa puntual m situada en el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, según la Ley de Newton está dado por

$$\vec{F}(x,y,z) = -\frac{k \cdot m}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{(3/2)}}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$$

donde k es una constante real positiva. En la Figura 3 se muestran algunos vectores en una sección plana del campo vectorial.

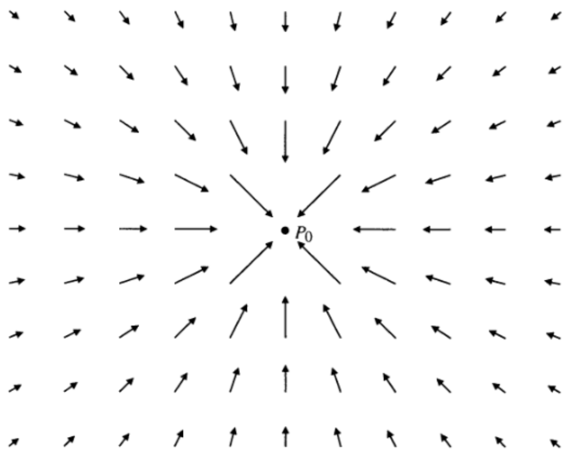

Figura 3. Representación gráfica del campo gravitacional del Ejemplo 9.

Ejemplo 3. Hallar el dominio del siguiente campo vectorial

$\vec{F}(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, ln(4-x^2-y^2))$

Usaremos la propiedad

$$\vec{F} = (F_1, F_2) \Rightarrow dom\,\vec{F} = dom\,F_1 \cap dom\,F_2$$

con las funciones $F_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, y, $F_2(x,y) = ln(4-x^2-y^2)$.

Tenemos

$$dom\,F_1 = \mathbb{R}^2,\ dom\,F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\, x^2+y^2 < 4\}$$

i.e., $dom\,F_1$ es todo el plano, $dom\,F_2$ es la región interior a la circunferencia con centro en el origen y radio 2.

Luego, teniendo en cuenta que $dom\,F_2 \subseteq dom\,F_1$, obtenemos

$$dom\,\vec{F} = dom\,F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\, x^2+y^2 < 4\}$$

Superficies parametrizadas

El contenido de superficies parametrizadas no entra en el primer parcial, puede postergar su estudio hasta llegar a la unidad 9

Un caso particular de funciones vectoriales lo constituyen las superficies parametrizadas bajo la estructura:

$$\vec{\Phi}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 /\, \vec{\Phi}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

Ejemplo 4. Una parametrización para la superficie del paraboloide

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \, z = \frac{x^2 + y^2}{2} \ \wedge \ -1 \leq x \leq 1 \ \wedge \ -1 \leq y \leq 1\right\}$$

Es la que ofrece la función vectorial

$$\vec{\Phi}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 / \vec{\Phi}(u, v) = \left(u, v, \frac{u^2 + v^2}{2}\right)$$

Siendo su dominio paramétrico el cuadrado

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq u \leq 1 \ \wedge \ -1 \leq v \leq 1\}$$

Nótese que en este caso se toma

$$x = x(u, v) = u$$

$$y = y(u, v) = v$$

$$z = z(u, v) = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

Este tipo de parametrización se conoce como *parametrización de Monge*.

Ejemplo 5 La función

$$\vec{\Phi}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 / \, \vec{\Phi}(\,\theta, z) = (2 \cdot \cos(\theta)\,, 2 \cdot \cos(\theta)\,, z)$$

Con dominio paramétrico $D = \{(\,\theta, z) \in \mathbb{R}^2 / \, 0 \leq \theta \leq 2\pi \ \wedge \ 0 \leq z \leq 3\}$, parametriza la superficie cilíndrica

$$S = \{(\,x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \, x^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ 0 \leq z \leq 3\}$$

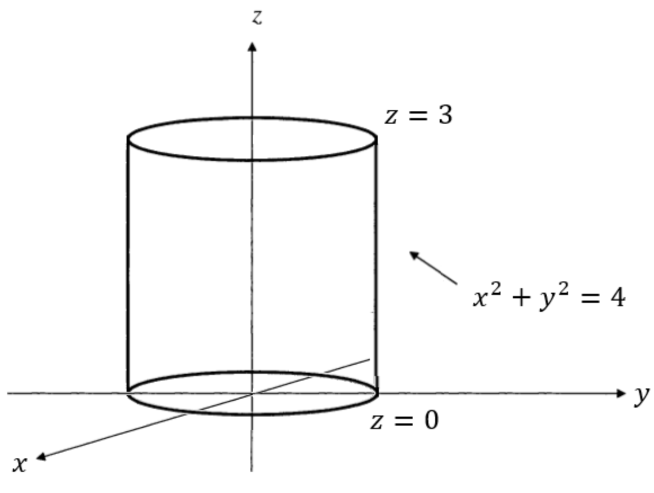

Figura 4. Superficie cilíndrica parametrizada por $\vec{\Phi}(\theta, z)$ del Ejemplo 3.

Ejemplo 6. La función

$$\vec{\Phi}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 / \vec{\Phi}(\,\theta, \varphi) = (2 \cdot \cos(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\varphi)\,, 2 \cdot \operatorname{sen}(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\varphi)\,, 2 \cdot \cos(\varphi))$$

Con dominio paramétrico $D = \{(\,\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq z \leq 3\}$, parametriza la semiesfera

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge z \geq 0\}$$

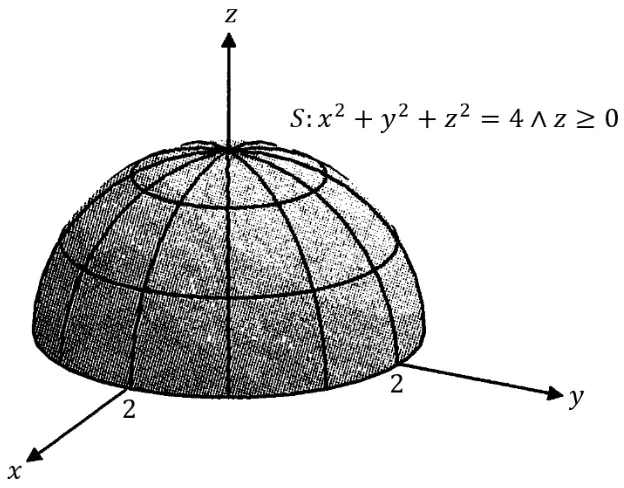

Figura 5. Semiesfera parametrizada por la función vectorial $\vec{\Phi}(\theta, \varphi)$.

Ejemplo 7. La función

$$\vec{\Phi}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 / \vec{\Phi}(\rho, \theta) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \rho \cdot \cos(\theta), \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \rho \cdot \operatorname{sen}(\theta), \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \rho\right)$$

Con dominio paramétrico $D = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq \rho \leq 4 \cdot \sqrt{2} \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, parametriza la superficie cónica

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = \sqrt{x^2 + y^2} \wedge 0 \leq z \leq 4\right\}$$

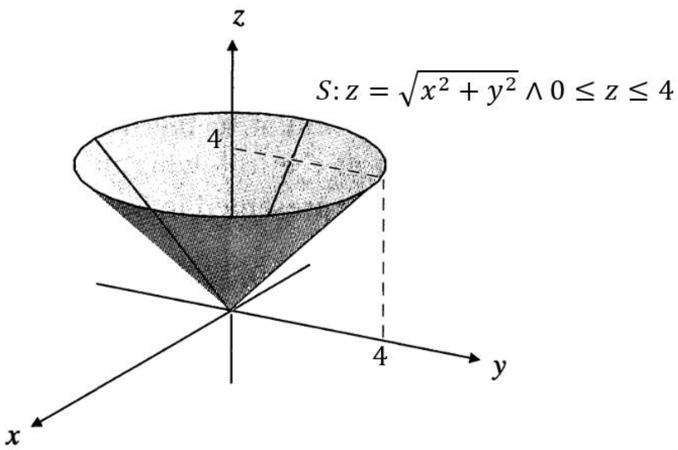

Figura 6. Superficie cónica parametrizada por $\vec{\Phi}(\rho, \theta)$.

Biblioteca digital. Cap 8, p. 348. Cálculo varias variables. W Mora.

Link contenidos pertinentes (Ctrl+Clic mouse para ir al enlace)
Khan Academy
https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/thinking-about-multivariable-function#ways-to-represent-multivariable-functions