ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA 1- DIIT

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2020

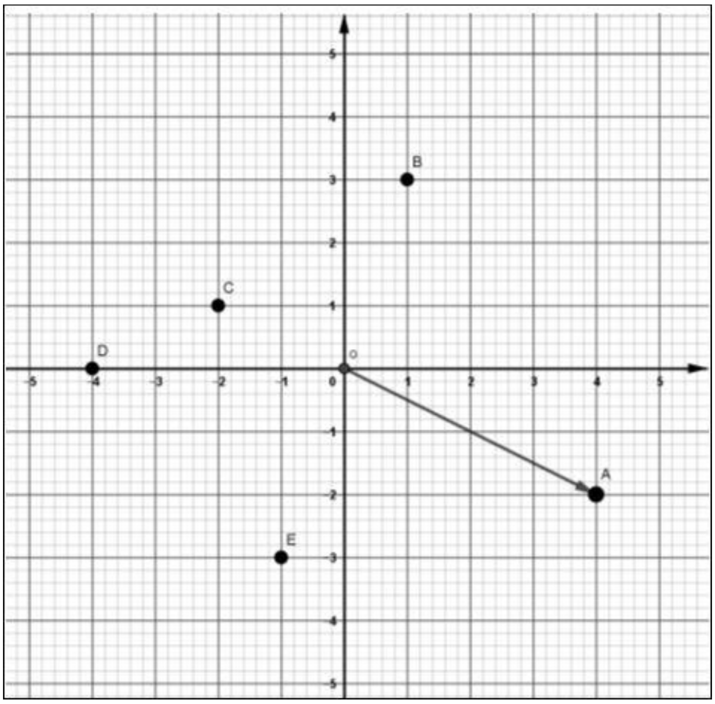
Jefa de cátedra: Lic. Gabriela Ocampo

MÓDULO 2: TRABAJO PRÁCTICO

VECTORES GEOMÉTRICOS EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO

VECTORES en el PLANO

1) a) Graficar los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ y $\overrightarrow{OE}$ en el sistema de ejes siguiente y escribir sus componentes.



b) Ubicar en el gráfico anterior, los puntos P = (-3 ; -5) y Q = (1 ; -2) . Graficar el vector, $\overrightarrow{PQ}$ y el vector $\vec{v}$ equivalente a $\overrightarrow{PQ}$ con origen en O = (0 ; 0) .

c) Graficar los vectores $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EC}$ y $\overrightarrow{AB}$ en el sistema de ejes anterior y escribir sus componentes.

2) Sean $\vec{u} = (2;3)$ y $\vec{v} = (-5;4)$ encontrar gráfica y analíticamente:

a) $3\vec{u}$ b) $\vec{u}+\vec{v}$ c) $\vec{v}-\vec{u}$ d) $2\vec{u}-5\vec{v}$

3) Dados los puntos A y B, en cada caso, expresar al vector $\overrightarrow{AB}$ por sus componentes:

a) $A=(1;2)$ $B=(5;5)$ b) $A=(3;-5)$ $B=(4;7)$

4) Hallar el vector $\vec{v}$ si $\vec{u}=(2;-1)$ y $\vec{w}=(1;2)$

a) $\vec{v}=\frac{1}{2}(3\vec{u}+\vec{w})$ b) $\vec{v}=\vec{u}-2\vec{w}$

5) Encontrar el módulo o norma de los vectores:

a) $\vec{u}$ = $(4;4)$ b) $\vec{v}=-3\breve{i}+4\breve{j}$ c) $\vec{w}=(-4;-4)$ d) $\vec{p}$ $(-1;\sqrt{3})$

e) $\overrightarrow{AB}$ siendo $A=(5;3-\sqrt{7})$, $B=(2;3)$

6) Si $\vec{u}=\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$ y $\vec{v}=(2;3)$ calcular: a) $\|\vec{u}\|$ b) $\|\vec{u}+\vec{v}\|$ c) $\|\vec{v}\|$ d) $\left\|\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right\|$ e) $\left\|\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right\|$ f) $\left\|\dfrac{\vec{u}+\vec{v}}{\|\vec{u}+\vec{v}\|}\right\|$

¿Qué conclusiones puede extraer?

7) Hallar el versor (vector unitario) que tenga dirección y el sentido de $\vec{v}$, en cada caso:

a) $\vec{v}=-3\breve{i}+4\breve{j}$ b) $\vec{v}=\breve{i}+\breve{j}$ c) $\vec{v}=2\breve{i}+3\breve{j}$

8) Hallar un vector de la norma pedida que tenga el sentido opuesto al vector $\vec{v}$, en cada caso:

a) $\vec{v}=\breve{i}+\breve{j}$ con norma 2 b) $\vec{v}=-24\breve{i}+7\breve{j}$ con norma 5

9) Determinar $a\in\mathbb{R}$ y $b\in\mathbb{R}$, en cada caso, si existen, tal que $\vec{v}=a\vec{u}+b\vec{w}$, siendo $\vec{u}=(1;2)$ y $\vec{w}=(1;-1)$ si: a) $\vec{v}=(2;1)$ b) $\vec{v}=(-1;7)$

En caso de que existan los escalares a y b, decimos que $\vec{v}$ es **combinación lineal** de $\vec{u}$ y $\vec{w}$

10) Sean $\vec{u}=-2\breve{i}+5\breve{j}$ y $\vec{v}=\alpha\breve{i}-2\breve{j}$, determinar α perteneciente a los reales tal que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean paralelos.

11) Dados A= (2; –1), B= (5; 0) y C= (3; –1)

a) Obtener **analíticamente** D para que el cuadrilátero **ABCD** sea un paralelogramo (en el orden indicado). Graficarlo.

b) Comprobar que las diagonales se cortan en el punto medio de ellas.

c) Sean U= (1–k; 3) y E = (5; 2k+9), ¿cuáles son los valores reales de k para que $\overrightarrow{AC}$ sea equivalente a $\overrightarrow{UE}$? Indicar E.

d) Indicar un vector $\vec{w}$ que sea paralelo y de sentido contrario de $\overrightarrow{AU}$ pero $\vec{w}\neq-\overrightarrow{AU}$.

12) Dados A =(–6; 1), B= (–3; –2), C= (1; –5) y D= (3; 3).

a) Obtener $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$. Justificar geométricamente el resultado obtenido.

b) Determinar analítica y geométricamente a $\vec{w} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

c) ¿Quién es E si BEDC resulta ser un paralelogramo (*en el orden indicado*)?

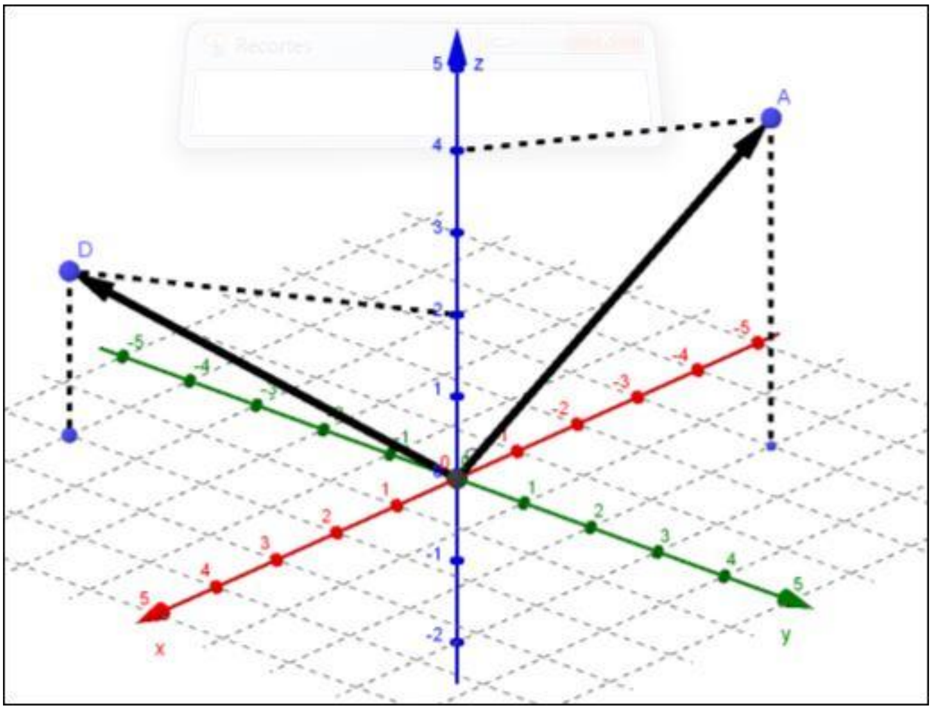
d) Determinar k real para que resulte $\overrightarrow{CF} // \overrightarrow{BD}$ si F= (k–4; –1+2k).

e) Mostrar F y señalar si los vectores paralelos resultan de igual o diferente sentido.

f) ¿Qué puntos W del eje y cumplen con la condición dist (W,D) = 5? Graficar.

VECTORES en el ESPACIO

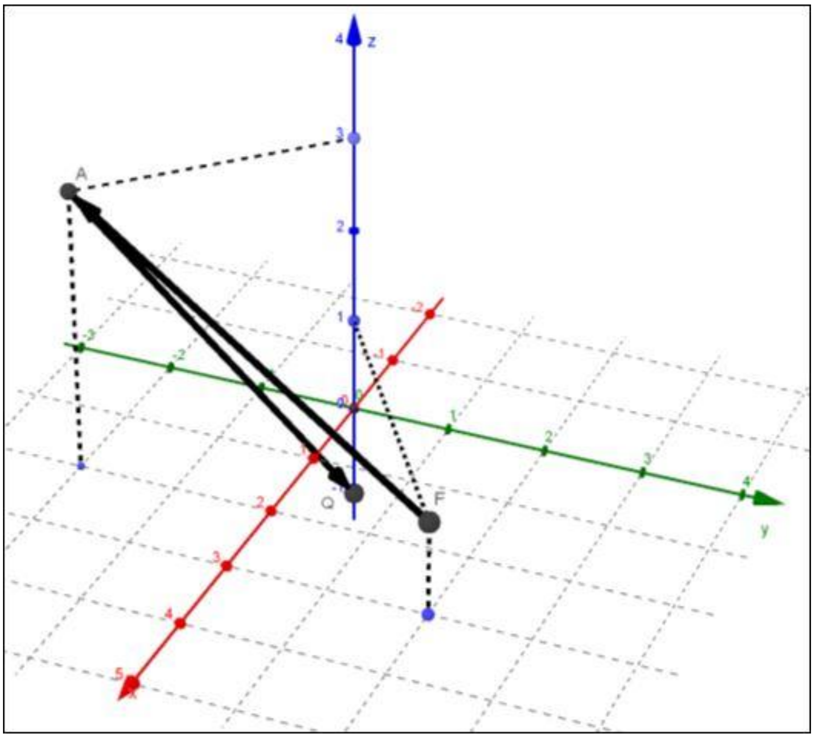
13) Escribir las coordenadas de los puntos A y D y las componentes de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OD}$



14) Dados los puntos A y B expresar al vector $\overrightarrow{AB}$ por sus componentes:

a) $A = (-1; 2; 3)$ $B = (3; 3; 4)$ b) $A = (2; -1; -2)$ $B = (-4; 3; 7)$

15) Escribir las coordenadas de los puntos A, F y Q y las componentes del vector $\overrightarrow{FA}$ y $\overrightarrow{AQ}$



16) Si $\vec{u}=(1;2;3)$, $\vec{v}=(2;2;-1)$ y $\vec{w}=(4;0;-4)$ calcular:

a) $4\vec{v}+2\vec{u}-\vec{w}=$ b) $-3\vec{v}+5\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{w}=$

17) Dados los vectores $\vec{u}=(3;-1;-4)$, $\vec{v}=(-2;4;-3)$ y $\vec{w}=(-1;2;-1)$, hallar:

a) $2\vec{u}-\vec{v}+3\vec{w}$ b) $\|\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}\|$ c) $\|3\vec{u}-2\vec{v}+\vec{w}\|$

d) Un vector unitario (versor) en la dirección y sentido del vector $\vec{v}-\vec{w}$

18) Sea $P=(2;1;4)$ y $Q=(3;-2;8)$. Hallar el vector unitario en la dirección y sentido de $\overrightarrow{PQ}$.

19) Determinar los escalares $a,b,c\in\mathbb{R}$, en cada caso, si existen, tal que $\vec{v}=a\vec{u}+b\vec{w}$, siendo $\vec{u}=(1;2;0)$ y $\vec{w}=(1;-1;2)$ si: a) $\vec{v}=(2;1;2)$ b) $\vec{v}=(-1;7;1)$ c) $\vec{v}=(-1;1;-2)$

En caso de que existan los escalares a y b, se dice que $\vec{v}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{w}$

20) Dado el vector $\vec{v}=(k,-2,3+k)$ determinar todos los valores reales de k si $\|\vec{v}\|=3$

21) Hallar α, β y $\lambda\in\mathbb{R}$, si existen, tal que $\vec{v}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{w}+\lambda\vec{t}$, siendo $\vec{v}=(1;4;2)$, $\vec{u}=(1;2;1)$ y $\vec{w}=(0;2;1)$ $\vec{t}=(2;6;3)$

22) Calcular $k\in\mathbb{R}$ si $\vec{v}=\left(-1;2\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$ $\|k.\vec{v}\|=5$

23) Sean $\vec{u}=(-2;4;k^2+1)$ y $\vec{v}=(-3k;5k+2;15)$, hallar analíticamente todos los valores reales de k, si existen, para que (los ítems se resuelven de manera independiente):

a) los vectores resulten paralelos. Indicar si son de igual o distinto sentido.

b) $\|\vec{v}\|=\sqrt{229}$

PRODUCTO ESCALAR – PROYECCIÓN -ÁNGULO

24) Dados los siguientes pares de vectores, hallar su producto escalar y el ángulo que forman:

a) $\vec{u} = 2\breve{i} + 5\breve{j} \quad \vec{v} = 6\breve{i} - 8\breve{j}$ b) $\vec{u} = \breve{i} + \breve{j} \quad \vec{v} = \breve{i} - \breve{j}$ c) $\vec{u} = 2\breve{i} - \breve{j} \quad \vec{v} = -4\breve{i} + 2\breve{j}$

25) Si $\vec{a} = (4;-1)$, $\vec{b} = (1;-1)$ y $\vec{c} = (0;6)$, calcular:

a) $(\vec{a} + \vec{b}) \bullet \vec{c}$ b) $(3\vec{a} + 4\vec{b}) \bullet 2\vec{c}$ c) $\|b\| b \bullet a$ d) $\|c\|^2 - c \bullet c$

26) Determinar si los siguientes pares de vectores son paralelos, ortogonales o ninguna de las dos condiciones y graficarlos:

a) $\vec{u} = 3\breve{i} + 5\breve{j} \quad \vec{v} = -6\breve{i} - 10\breve{j}$ b) $\vec{u} = 2\breve{i} + 3\breve{j} \quad \vec{v} = -6\breve{i} + 4\breve{j}$

c) $\vec{u} = 2\breve{i} + 3\breve{j} \quad \vec{v} = 6\breve{i} - 4\breve{j}$

27) Sean $\vec{u} = -2\breve{i} + 5\breve{j}$ y $\vec{v} = \alpha\breve{i} - 2\breve{j}$, determinar α tal que:

a) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales. b) $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean paralelos.

c) El ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea ${}^{2\pi}\!/_{3}$ d) El ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea ${}^{\pi}\!/_{3}$

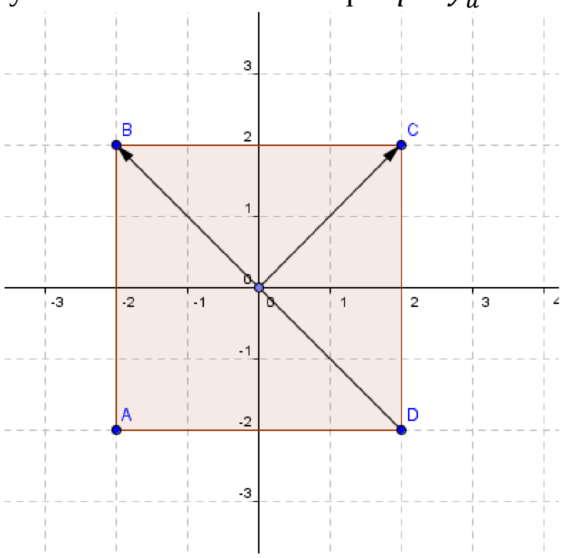
28) Dados los siguientes pares de vectores, hallar gráfica y algebraicamente, la proyección escalar y vectorial de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$

a) $\vec{u} = \breve{i} + \breve{j} \quad \vec{v} = \breve{i} - \breve{j}$ b) $\vec{u} = (\,2\,;-3\,) \quad \vec{v} = (\,1\,;1\,)$ c) $\vec{u} = -5\breve{i} + 4\breve{j} \quad \vec{v} = -\breve{i}$

29) Sean $P = (2;3), Q = (5;7)$, $R = (2;-3)$ y $S = (1;2)$. Calcular la proyección de $\overrightarrow{RS}$ sobre $\overrightarrow{PQ}$ y la proyección de $\overrightarrow{PQ}$ sobre $\overrightarrow{RS}$.

30) a) Graficar el vector proyección de $\overrightarrow{OB}$ sobre $\breve{i}$ y también el vector proyección de $\overrightarrow{OB}$ sobre - $\breve{j}$. Indique, en cada caso, si la proyección escalar es positiva, negativa o cero.

b) Señalar dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ diferentes entre sí tal que $proy_{\vec{u}}\vec{v} = \vec{0}$.



31) Calcular el producto escalar y el ángulo que forman:

a) $\vec{u} = 2\breve{i} - 4\breve{j} + 4\breve{k}$ $\quad \vec{v} = \breve{i} - \breve{k}$

b) $\vec{u} = 2\breve{i} + \breve{j} - 2\breve{k}$ $\quad \vec{v} = \breve{i} - 3\breve{j} + 2\breve{k}$

c) $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}; -3; 1\right)$ $\quad \vec{v} = (\ 6;\ 4\ ;\ 9\ )$

32) Dados los vectores $\vec{u}$= (5,-1,2); $\vec{v}$= (-1, 2,-2).

a) Calcular el ángulo entre ambos vectores.

b) ¿Cuánto tiene que valer k para que el vector $\vec{w}$= (7, 2, k) sea perpendicular al vector $\vec{u}$?

33) Calcular la proyección escalar y vectorial del vector $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, en cada caso:

a) $\vec{u}$= (1, 1, 1) y $\vec{v}$ = (1, 1, 0)

b) $\vec{u} = (-1; 2; 1)$ y $\vec{v} = (1; 2; 3)$.

34) Dados los vectores $\vec{u}$= (3,-2,1); $\vec{v}$= (4, 3, 2); $\vec{w}$= (1, 5, 1), hallar la proyección ortogonal, (escalar y vectorial) de $\vec{u}$ sobre ($\vec{v}$+$\vec{w}$).

35) Hallar todos los valores de k reales tal que $\|proy_{\vec{u}}\ \vec{v}\| = \sqrt{21}$, siendo $\vec{u} = (2; -1; 4)$ y $\vec{v} = (k; k-1; 2-k)$. Para todos los valores de k encontrados, indicar quién es $\vec{v}$.

36) Dados los vectores $\vec{u}$=(1,1,0) y $\vec{v}$=(-2,k,1);

a) Encontrar k tal que el ángulo que forman ambos vectores sea de 150°.

b) Hallar la proyección vectorial de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$, para los valores de k obtenidos

37) Sean en R^3 los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ de igual longitud y que forman un ángulo cuyo coseno vale –0,6. Si sucede que $(4\vec{v} + 3\vec{w}) \bullet (\vec{v} - 2\vec{w}) = 7$, ¿cuánto vale $\|\vec{v}\|$?

38) Dados en R^3 los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ de los cuales se sabe que $\vec{w}$ es unitario; $\vec{v} \perp \vec{w}$; $\|\vec{u}\| = 3$; $\|\vec{v}\| = \frac{4}{3}$; el coseno del ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{w}$ vale $-\frac{2}{3}$.Si sucede que $(\vec{u} + 3\vec{v}) \bullet (2\vec{u} - \vec{w}) = 8$, ¿cuál es el ángulo formado entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$?

39) Si $\vec{u} = -3\breve{i} + \breve{j} - \sqrt[2]{5}\breve{k}$ y $\vec{v} = 2\breve{i} + 4\breve{j} - \sqrt{5}\breve{k}$ expresar $\vec{u}$ como suma de un vector $\vec{m}$ paralelo a $\vec{v}$ y un vector $\vec{n}$ perpendicular a $\vec{v}$.

40)a) Hallar, si existen, los valores de k real tal que los vectores $\vec{u} = (1,1,1)$; $\vec{v} = (k, 2, 1)$ cumplan con la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwartz. b) Interpretar geométricamente el resultado hallado.

PRODUCTO VECTORIAL Y MIXTO

41) Encontrar el vector $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u}\ x\ \vec{v}$ en cada caso: (Usaremos indistintamente "x" o "$\wedge$" para simbolizar el producto vectorial entre vectores)

a) $\vec{u} = (-1,2,1)$ y $\vec{v} = (0,1,2)$ b) $\vec{u} = (3;2;-1)$ $\vec{v} = (0,1,-1)$.

c) $\vec{u} = (1;-1;0)$ $\vec{v} = (2;-1;1)$ d) $\vec{u} = (1;2;4)$ $\vec{v} = (-2;0;5)$

42) Hallar el área del paralelogramo cuyos lados adyacentes están determinados por los vectores $(2;-5;2)$ y $(3;-3;6)$.

43) Dados $\vec{u} = (1;2;-1)$, $\vec{v} = (1;1;-1)$ y $\vec{w} = \breve{i} - \breve{j} + 4\breve{k}$. Calcular

a) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ b) $\vec{u}\ x\ \vec{w}$ c) $\vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w})$ d) $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$ e) $\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{w})$

44) Encontrar el área del triángulo cuyos vértices son H= $(3;2;-1)$, M= $(0;3;0)$ y T= $(4;5;6)$.

45) Hallar dos vectores unitarios ortogonales simultáneamente a $\vec{u} = \breve{i} + \breve{j} + \breve{k}$ y a $\vec{v} = \breve{i} - \breve{j} - \breve{k}$.

46) Utilizando propiedades demostrar que $(\vec{v} + \vec{w}) \wedge (\vec{v} - \vec{w}) = 2\vec{w} \wedge \vec{v}$

47) Dados los vectores $\vec{u} = (1;2;1)$ y $\vec{v} = (2;-1;-1)$. Encontrar un vector de norma 4 ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$. ¿Es único?

48) Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores en R^3 explicar si es posible (o no) efectuar las operaciones indicadas; en caso afirmativo indique si se obtiene un escalar o un vector.

"$\bullet$"corresponde a *producto escalar* entre vectores.

a) $\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{w}$ b) $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w})$ c) $\vec{u} \bullet (\vec{v}\ x\ \vec{w})$ d) $\vec{u} \bullet (\vec{v} \bullet \vec{w})$

e) $(\vec{u} \bullet \vec{v})(\vec{v}\ x\ \vec{w})$ f) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ g) $\vec{u} \wedge (\vec{v} \bullet \vec{w})$

49) Sean los puntos P= (-3;-1; 0), Q= (-2;0;-3) y R= (0;-2;1) Determinar:

a) El perímetro del triángulo PQR.

b) La longitud de la mediana correspondiente al lado $\overline{PQ}$.

c) El área del triángulo PQR.

50) Dados los puntos A=(2;3;-1) B = (1;0;2) C= (3;1;1) hallar $\vec{w} \parallel \overrightarrow{AB}$ tal que $\vec{w}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinen un paralelogramo de área $10\sqrt{2}$

51) Sean los vectores $\vec{u} = (3;2;1)$, $\vec{v} = (1;1;2)$ y $\vec{w} = (1;3;3)$ en R^3, se pide calcular:

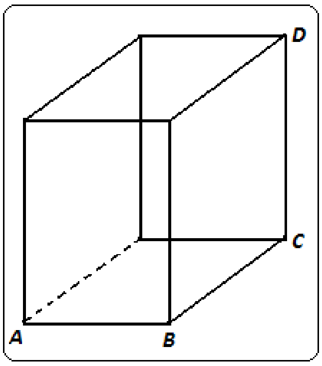
a) El área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$

b) El volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

52) Dados los vectores $\vec{g} = (5;0;1)$, $\vec{u} = (3;-2;0)$ y $\vec{m} = (-4;1;k)$ en R^3 , hallar $k \in \mathbb{R}$ (en cada caso) de modo que :
a) los tres vectores determinen un paralelepípedo de volumen 5.
b) los tres vectores resulten coplanares

53) Sean los puntos A= (1; 0; 1), B= (1; 1; 1) y C= (1; 6; **a**). Resolver utilizando los productos entre vectores estudiados:
a) Determinar, si existen, todos los valores reales de **a** para que A, B y C resulten alineados.
b) Determinar, si existen, todos los valores reales de **a** para que los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\vec{v} = (a; a^2+1; a^2-1)$ resulten coplanares.
c) Determine, si existen, todos los valores reales de *"a"* para que los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\vec{w} = (8; a; a)$ determinen un paralelepípedo de volumen 2.

54) El esquema muestra un paralelepípedo rectángulo en el espacio.
Se sabe que $\overrightarrow{AB} = (-k; 2a-1; -1)$, $\overrightarrow{BC} = (-3; 1; 1+k)$, $\overrightarrow{CD} = (2k; 8-a; 17)$.



a) Encontrar los valores reales de k y a para que el paralelepípedo sea un ortoedro.
b) ¿Cuál es el volumen del cuerpo?
c) ¿Y el área del triángulo ACD?

EJERCITACIÓN EXTRA

55) Dado el cuadrilátero ABCD (en ese orden) con A= (–3; –1), B= (–4; 3), C= (0; 4) y D = (2; –4).
a) Obtener su perímetro.
b) Verificar que es un trapecio , es decir tiene un solo par de lados opuestos paralelos.
c) Si E = (5–k; k+1), ¿cuáles son los valores de k real que determinan que la distancia entre E y B es 13? Indicar los puntos E .
d) Para algún valor de k recién hallado encuentrar todos los vectores de norma uno paralelos al vector $\overrightarrow{BE}$.

56) Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son vectores en R^3 explicar si es posible (o no) efectuar las operaciones indicadas; en caso afirmativo indique si se obtiene un escalar o un vector. "•"corresponde a producto escalar entre vectores.
a) $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} \bullet \vec{u}$ b) $(\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}) \bullet \vec{u}$ c) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) - (\vec{w} \bullet \vec{u}).\vec{v}$ d) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{v} \bullet \vec{w})$
e) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w})$ f) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \bullet (\vec{w} \bullet \vec{w})$

57) Dados los vectores $\vec{u}=(1;3;-2)$ y $\vec{v}=(4;-6;5)$ descomponer el vector $\vec{v}$ en la suma de dos vectores: uno en la misma dirección que $\vec{u}$ y otro en una dirección ortogonal a $\vec{u}$.

58) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores en R^3 tales que $\vec{u}\wedge\vec{v}$ = (1 ; -1 ; -1) y $\vec{u}\bullet\vec{v}$ = -3 . Calcular
a) El área del paralelogramo que determinan los vectores dados.
b) El ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

59) Dados los vectores $\vec{u}=(2;3-k;k-1)$, $\vec{v}=(1;4;-1)$ y $\vec{w}=(3;1;5)$.
a) Obtener todos los valores de k para que volumen del paralelepípedo de lados $\vec{u},\vec{v}\ y\ \vec{w}$ sea 4. Señalar los vectores $\vec{u}$ alcanzados.
b) Determinar la proyección vectorial de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$.
c) Si $\vec{t}$ = (m, n, 0), $\vec{q}$ = (0, m, –n) y $\vec{s}$ = (–1, 2, 1) y con m + n = 1. Probar que $\left(\vec{t}\wedge\vec{q}\right)\bullet\vec{s}=1$ para todos los m y n reales.

60) Determinar la norma de un vector $\vec{v}$ sabiendo que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores del espacio y que satisfacen: $\|\vec{v}\| = 2.\|\vec{u}\|$, el ángulo entre ambos es de 120º y $\left(3\vec{u}+2\vec{v}\right)\bullet\left(-\vec{v}+4\vec{u}\right)=-9$
¿Cuánto vale la proyección escalar de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$? Señalar claramente todas las propiedades que utiliza.

61) Dados $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores no nulos de R^3, explique qué debe suceder para que cada ítem es independiente) :
a) La proyección vectorial de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ sea $\vec{0}$.
b) $\|\vec{u}+\vec{v}\| < \|\vec{u}-\vec{v}\|$
c) $(\vec{u}-2\vec{v})\bullet(\vec{u}+2\vec{v}) = 0$

62) a) Si $\vec{u}=(-3;;\ 4;7)\ y\ \vec{v}=(1;-1;\ 2)$, obtener todos los vectores perpendiculares simultáneamente a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de norma $\sqrt{1580}$.
b) Si C es un punto desconocido en R^3, ¿Cuál es el área triangulo ABC con A= C + $\vec{u}$ y B = C + $\vec{v}$?

63) Si $\vec{u}=(1;;\ -1;0)$ y $\vec{v}=2\hat{\imath}-3\hat{k}$, calcular $\|\vec{u}x\vec{v}\|$ y $\|2.\vec{u}x\ (-1).\vec{v}\|$. ¿Es coherente el resultado obtenido? Justificar usando propiedades

64) Sean $A=(7;3;1), B=(1;2;-3)\ y\ C=(0;2;-1)$:
a) Mostrar que los vectores $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{BC}$ verifican la desigualdad de Cauchy-Schwartz.
b) Encontrar todos los $\vec{u}\in R^3$ que verifiquen simultáneamente: $\vec{u}\perp\overrightarrow{AB},\quad \vec{u}\perp\overrightarrow{BC},\ \|\vec{u}\|=\sqrt{29}$.

65) Clasifique el triángulo ABC en escaleno, isósceles no equilátero o equilátero de acuerdo a la longitud de sus lados y en acutángulo, rectángulo u obtusángulo de acuerdo a la amplitud de sus ángulos interiores, siendo A= (–5, –1, 0), B= (–3, –3, 1) y C = (–6, 1, –2).

66) Dados los vectores $\vec{u} = (1; -2; 3) y\ \vec{v} = (k; 1; -1)$.

a) Encontrar todos los valores reales de k, para que los vectores resulten perpendiculares.

b) Para k=0, verificar que se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

c) Obtener, si existe, k $\in \mathbb{R}$ para que $\vec{u}x\vec{v} = (-1;\ -5;\ 3)$.

d) Determinar, si existe, k $\in \mathbb{R}$ para que el área del paralelogramo delimitado por $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ sea $\sqrt{26}$.

67) a) Encuentre la distancia entre los puntos A= (–3, –5, 1) y B= (1, –7, –4).

b) Muestre un punto C que cumpla dist(A; C) = dist(A; B).

c) Determine el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\vec{v}$ = (–1, –3, 2) y el signo de la $proy.escalar_{\vec{v}}\ \overrightarrow{AB}$

68) Usando producto vectorial, encuentre, si existe, el valor o los valores reales de a para que los vectores $\vec{u}$=(1;-2;3) y $\vec{v}$ = (a-5 ; 3a ; -4a-1) resulten paralelos.

69) Dados los vectores $\vec{a}$= (2k^2; 1; –4k) y $\vec{b}$= (1; 2; 1), vectores no nulos de R^3, se pide:

a) Encontrar el/los valores reales de k, de manera que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ resulten perpendiculares. Indicar $\vec{a}$.

b) Dado $\vec{c}$ = (1; 1; –2), Encontrar el volumen del paralelepípedo que $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ determinan. ¿Son coplanares?

c) ¿Cuáles son los vectores paralelos a $proy_{\vec{b}}\vec{a}$ que tienen norma 6 ?

70) Sean los siguientes puntos en R^3: A=(k;k;3),B=(k;2;k-1), C=(0;1;k+1), D=(1;2;k). Hallar todos los k ∈ R tales que el tetraedro que se forma con los vectores $\overrightarrow{BA}$ $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BD}$ tenga volumen $\frac{2}{3}$.

71) Dados los vectores $\vec{u} = (2; -1; 2) y\ \vec{v} = (0; 3;\ -4)$

a) Verificar que se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwartz

b) Hallar el área del paralelogramo que tiene por lados a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

ALGUNAS RESPUESTAS

Los ejercicios con una R están resueltos en los archivos de Miel.

1) R

2) a) $3\vec{u} = (6; 9)$ b) $\vec{u} + \vec{v} = (-3; 7)$; c) $\vec{v} - \vec{u} = (-7; 1)$ d) $2\vec{u} - 5\vec{v} = (29; -14)$

3) a) $\overrightarrow{AB} = (4; 3)$ b) $\overrightarrow{AB} = (1; 12)$ 4) a) $\vec{v} = \left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ b) $\vec{v} = (0; -5)$

5) a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{32}$ b) $\|\vec{v}\| = 5$; c) $\|\vec{w}\| = \sqrt{32}$; d) $\|\vec{p}\| = 2$; e) $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 4$

6) a) $\|\vec{u}\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ b) $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{\frac{85}{4}}$; c) $\|\vec{v}\| = \sqrt{13}$; d) $\left\|\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right\| = 1$; e) $\left\|\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right\| = 1$;

f) $\left\|\frac{\vec{u}+\vec{v}}{\|\vec{u}+\vec{v}\|}\right\| = 1$ Conclusiones: el módulo de la suma no es igual a la suma de los módulos. La norma de un vector multiplicado por el inverso de su norma es uno

7) a) $\check{v} = \left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$ b) $\check{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; c) $\check{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}};\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

8) R a) $\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$; c) $\left(\frac{24}{5};-\frac{7}{5}\right)$

9) a) $a = 1\ y\ b = 1$; c) $a = 2\ y\ b = -3$

10) R $\alpha = \dfrac{4}{5}$

11) a) D = (0; -2) ; c) k= -3 , d) E= (5 ; 3)

12) a) $\vec{v} = (0;0)$ b) $\vec{w} = (4;1)$; c) E=(-1; 6) d) k= -7 e) F= (-12 ; -10) Diferente signo f) W_1=(0;-1) y W_2=(0;7)

14) a) $\overrightarrow{AB} = (4;1;1)$ b) $\overrightarrow{AB} = (-6;4;9)$

16) a) $(6;12;6)$ b) $(-3;4;20)$

17) a) $(5;0;-8)$; b) $\sqrt{41}$; c) $\sqrt{274}$ d) $\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$

18) $\left(\frac{1}{\sqrt{26}};-\frac{3}{\sqrt{26}};\frac{4}{\sqrt{26}}\right)$

19) a) a= b= 1 b) no existen c) a = 0 , b = -1

20) $k = -1$ ó $k = -2$

21) Hay infinitas soluciones $\begin{cases}\alpha = 1-2\lambda \\ \beta = 1-\lambda \\ \lambda = \lambda\end{cases}$,

22) $k = \pm\dfrac{5}{4}$

23) $a)$ $k = 2$ Igual sentido ; b) $k = 0$ ó $k = -\frac{10}{17}$

24) $a)$ $\vec{u}\cdot\vec{v} = -28$ $\measuredangle:\simeq 121º19'44"$ b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ $\measuredangle: 90\ grados$

$c)$ $\vec{u}\cdot\vec{v} = -10$ $\measuredangle: 180\ grados$

25) $a)$ -12 ; b) -84 ; c) $5\sqrt{2}$; d) 0

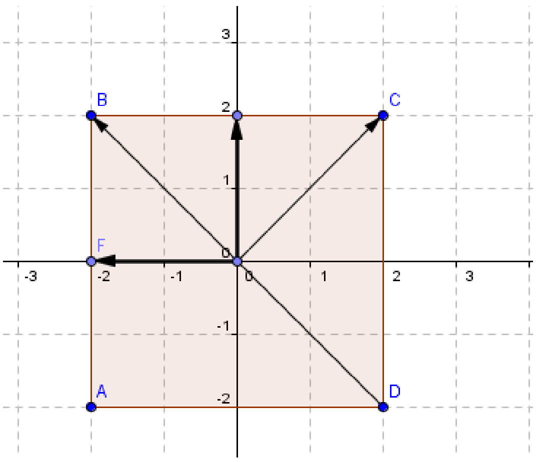
26) a) Paralelos; b) Ortogonales ; c) Ortogonales

27) $a)$ $\alpha = -5$; b) $\alpha = \frac{4}{5}$

28) a) 0 , (0;0) ambas, b) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$, $-\dfrac{\sqrt{13}}{13};\left(-\dfrac{2}{13};\dfrac{3}{13}\right)$ c) 5, (-5;0)); $\frac{5\sqrt{41}}{41}$; $\left(\frac{-25}{41};\frac{20}{41}\right)$

29) $proy_{\overrightarrow{PQ}}\overrightarrow{RS} = \left(\frac{51}{25};\frac{68}{25}\right)$; $proy_{\overrightarrow{RS}}\overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{17}{26};\frac{85}{26}\right)$

30) R



i) La proyección escalar de $\overrightarrow{OB}$ sobre $\check{\imath}$ es negativa (por que los vectores forman un ángulo mayor a 90°) y sobre - $\check{\jmath}$ también es negativa (por que el ángulo que forman es obtuso).

ii) Por ejemplo, $\vec{u} = \overrightarrow{OD}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{CO}$ porque son perpendiculares.

31)R Rta: $a)\ \vec{u}\cdot\vec{v} = -2 \quad \measuredangle: \simeq 104\ grados$; b) $\vec{u}\cdot\vec{v} = -5 \quad \measuredangle: \simeq 116\ grados$
$c)\ \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \quad \measuredangle: 90\ grados$

32) R a) 132° 1' 25,52. , k= - $\frac{33}{2}$

33) R a) $proy\ esc\ _{\vec{v}}\vec{u} = \sqrt{2},\ proy_{\vec{v}}\ \vec{u} = (1;1;0)$ b) b) $proy.esc_{\vec{v}}\ \vec{u} = \frac{6}{\sqrt{14}} \quad proy_{\vec{v}}\ \vec{u} = \left(\frac{3}{7};\frac{6}{7};\frac{9}{7}\right)$

34) R proyección vectorial es: $proy_{\vec{v}+\vec{w}} = \left(\frac{5}{49},\frac{8}{49},\frac{3}{49}\right)$, proyección escalar es: $proy\ esc\ _{\vec{v}+\vec{w}}\ \vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{7}$

35) R $k = -4 \to \overrightarrow{v_1} = (-4;-5;6)$, $k = 10 \to \overrightarrow{v_2} = (10;9;-8)$

36) R a) $k_1 = -1 \ \wedge\ k_2 = -7$ b) $(1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{3},\frac{7}{6},-\frac{1}{6})$

37) R $\|\vec{v}\| = \sqrt{7}$

38) R $\measuredangle: 120\ grados$

39) R $\vec{m} = \frac{3}{25}\left(2,4,-\sqrt{5}\right)$; $\vec{n} = \left(-\frac{81}{25},\frac{13}{25},-\frac{110}{125}\sqrt{5}\right)$

41)R a) $\vec{u}x\vec{v} = (3,2,-1)$ b) (-1;3;3) c) (-1 ; -1 ; 1) d) (10 ; -13; 4)

42) R $\sqrt{693} = 3.\sqrt{77}$

43) a) $\vec{u}\wedge\vec{v}$=(-1;0;-1) b) $\vec{u}\ x\ \vec{w}$ = (7;-5;-3) c) $\vec{u}\bullet\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right)$=-5

d) $\vec{u}\wedge\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right)$= (-9;-1;-11) e) $\vec{u}\wedge\left(\vec{u}\wedge\vec{w}\right)$= (-11;-4;-19)

44) R $\sqrt{150}$

45) R $\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(0;-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

47) R$\pm\frac{4}{35}\sqrt{35}(-1;3;-5)$

48) a) no se puede ; b) Si se puede. Da un escalar ; c) Si se puede. Da un escalar ;
d) no se puede e) Si se puede. Da un vector ; f) Si se puede. Da un vector g) no se puede

49)R Perímetro $2\left(\sqrt{6}+\sqrt{11}\right)$ Longitud de la mediana = $\frac{\sqrt{59}}{2}$ Área del triángulo = $\sqrt{30}$

50) R$(\mp 2;\mp 6;\pm 6)$

51) R a) $\sqrt{35}$,b) 9

52)R a) k= -1 o k= 0 b) k= $-\frac{1}{2}$

53) Ra) a= 1 ; b) a = 1 ó a = 0 ; b) a = $\frac{5}{4}$ ó a = $\frac{3}{4}$

54) $a)\ k = -2\ \ y\ \ a = 3$; b) 330 ; c) $\frac{\sqrt{13530}}{2}$

55) : $a)\ 4\sqrt{17} + \sqrt{34}$; c) $k = 14$ ó $k = -3$ $E = (-9;15)$ ó $E = (8;-2)$;
d) $k = -3$: $\check{v} = \left(\frac{12}{\sqrt{169}};-\frac{5}{\sqrt{169}}\right)\ y\ \check{v} = \left(-\frac{12}{\sqrt{169}};\frac{5}{\sqrt{169}}\right)$

56) a) no se puede ; b) Si se puede. Da un escalar ; c) Si se puede. Da un vector ;
d) no se puede e) Si se puede. Da un escalar ; f) no se puede

57) R $\left(-\frac{12}{7};\frac{36}{7};\frac{24}{7}\right)y\left(\frac{40}{7};-\frac{6}{7};\frac{11}{7}\right)$

58) Área = $\sqrt{3}$ ángulo = $\frac{5\pi}{6}$

59) $a)\ \ k = 11$ ó $k = \frac{25}{3}$; $\vec{u} = (2; -8; 10)$ ó $\vec{u} = \left(2; -\frac{16}{3}; \frac{22}{3}\right)$; b) $proy_{\vec{w}}\vec{v} = \left(\frac{6}{35}; \frac{2}{35}; \frac{2}{7}\right)$

60) $a)\ \ \|\vec{v}\| = 6$; $proy_{\vec{u}}\vec{v} = -\vec{u}$

61)R a) Ambos vectores deben ser ortogonales entre sí. b) El producto escalar entre ellos debe ser negativo ; c) $\|\vec{u}\| = 4\|\vec{v}\|$

62) $a)\ \ (30; 26; -2)\ \ y\ \ (-30; -26; 2)$; b) $\frac{\sqrt{395}}{2}$

63) $a)\ \ \sqrt{22}\ \ y\ \ 2\sqrt{22}$

64) b) $\vec{u} = \frac{1}{3}(-2, 16, -1)\quad \vec{u} = -\frac{1}{3}(-2, 16, -1)$

65) a) long de sus lados: 3, 3, $\sqrt{34}$; amplitud de sus ángulos: $\hat{\alpha} = 152°\ 44'\quad \hat{\beta} = \hat{\gamma} = 13°\ 38'$

66) a) k= 5 ; c) no existe k. d) k= 1 o k= -23/13.

67) a) $\sqrt{45} = 3.\sqrt{5}$ b) Un punto C=(-7, -3, 6) c) $\hat{\alpha} = 108°\ 35'$; el signo es negativo.

68) a= 2

69)R a) k= 1 $\vec{a} = (2, 1, -4)$ b) vol= 3 no son coplanares. c) no existes esos vectores.

70) k= ±2/3

71) $b)\ \sqrt{104}$