Resolución TP10:

Ejercicio 6 - a - Modificado

Dado el campo vectorial F y la superficie S, verificar el cálculo del flujo saliente.

$$F(x, y, z) = (x^2y, xz, y^2z)$$

S: es la superficie del Volumen determinado por la intersección del plano de ecuación $x + y + z = 1$ y los planos coordenados.

Resolviendo:

$$I = \iint_S F \cdot dS = \sum_i \iint_{R_{\Phi_i}} F(\Phi_i) \cdot (\Phi_{iu} X \Phi_{iv}) dudv = \iiint_{V_S} Div(F) dV = \frac{1}{30}$$

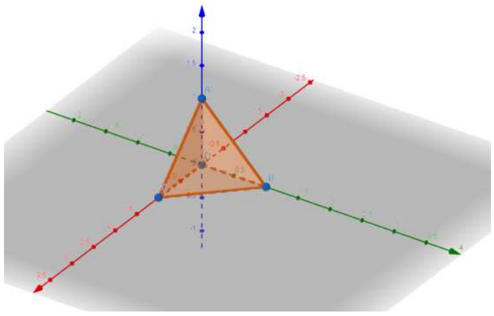
Considerando que se trata solo del triangulo podemos nombrar a la superficie con la siguiente descripción:

Dibujamos calculando las trazas y los vertices:

$$S_1 \xrightarrow{x=0} \begin{cases} y + z = 1 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{y=0} \begin{cases} z = 1 \\ A = (0,0,1) \end{cases}$$

$$S_1 \xrightarrow{y=0} \begin{cases} x + z = 1 \\ x \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{z=0} \begin{cases} x = 1 \\ B = (1,0,0) \end{cases}$$

$$S_1 \xrightarrow{z=0} \begin{cases} x + y = 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{x=0} \begin{cases} y = 1 \\ C = (0,1,0) \end{cases}$$



$$V: \begin{cases} x + y + z \leq 1 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

$$V: \begin{cases} x + y + z \leq 1 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 - x - y \\ 0 \leq y \leq 1 - x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$F(x,y,z) = (x^2y, xz, y^2z)$$

$$Div(F) = 2xy + 0 + y^2$$

$$I = \iint_S F \cdot dS = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (2xy + y^2)dzdydx$$

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} (2xy + y^2)(1 - x - y)dydx$$

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} (2xy + y^2 - 2x^2y - xy^2 - 2xy^2 - y^3)dydx$$

$$I = \int_0^1 \left[xy^2 + \frac{y^3}{3} - x^2y^2 - \frac{xy^3}{3} - \frac{2}{3}xy^3 - \frac{y^4}{4}\right]_0^{1-x} dx$$

$$I = \int_0^1 x(1-x)^2 + \frac{(1-x)^3}{3} - x^2(1-x)^2 - \frac{x(1-x)^3}{3} - \frac{2}{3}x(1-x)^3 - \frac{(1-x)^4}{4} dx$$

$$I = \int_0^1 -\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}dx$$

$$I = \left[-\frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{6} - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x\right]_0^1$$

$$I = -\frac{1}{20} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$$

$$I = \frac{1}{30}$$