T P 04 Ej. 18

Un ingeniero desea construir un ferrocarril que suba la montaña del ejercicio anterior. Subir directamente la montaña es demasiado empinado para la fuerza de las máquinas.

En el punto $(10{,}10)$ ¿En qué direcciones se pueden colocar las vías de modo que suban un 3%, es decir, que formen con el plano horizontal un ángulo cuya tangente es 0, 03?

A partir del ejercicio anterior ya conocemos las características del punto $(10{,}10)$.

Sabemos en qué direcciones crece y decrece con mayor velocidad.

Lo que se pide en este ejercicio es hallar todas las direcciones donde la tasa de crecimiento sea 0,03. Es decir que buscamos las direcciones en las cuales la derivada direccional (tasa de crecimiento en una dirección en particular) sea igual a 0,03.

Del ejercicio 14 sabemos cómo obtener el valor de una derivada direccional de una función diferenciable:

$$f_{\vec{v}}\,(x,y) = \nabla f(x,y)\ \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$$

Es decir que para hallar el valor de la derivada direccional, tomamos el gradiente de la función en el punto y aplicamos producto escalar con el vector $\vec{v}$ normalizado (es decir un vector que tenga la misma dirección y sentido que $\vec{v}$, pero que tenga norma o longitud igual 1).

En el caso de este ejercicio tenemos el resultado de realizar el producto escalar, pero no conocemos cuáles son todos los vectores $\vec{v}$ a través de los cuales se obtiene ese resultado. Por lo tanto nuestras incógnitas van a ser esos vectores.

Vamos a buscar todos los vectores $\vec{v} = (a, b)$ que satisfagan el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f_{\vec{v}}\,(10, 10) = \nabla f(x,y)\ (a,b) = 0{,}03 \\ ||\vec{v}|| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \end{cases}$$

Reemplazamos el gradiente ya calculado en el ejercicio 17.

$$\begin{cases} f_{\vec{v}}\,(10,10) = (-40,-60)\,(a,b) = 0{,}03 \\ \|\vec{v}\| = \sqrt{a^2+b^2} = 1 \end{cases}$$

Ahora resolvemos el sistema.

En la segunda ecuación, elevamos ambos lados al cuadrado (siendo que ambos lados son positivos) para sacar la raíz.

$$\begin{cases} -40\mathrm{a} - 60\mathrm{b} = 0{,}03 \\ a^2+b^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{a} = -\dfrac{0{,}03+60b}{40} \\ a^2+b^2 = 1 \end{cases}$$

Reemplazamos la primera expresión en la segunda

$$\left(-\frac{0{,}03+60b}{40}\right)^2 + b^2 = 1$$

$$\left(-\frac{0{,}03}{40} - \frac{3}{2}b\right)^2 + b^2 = 1$$

$$\left(-\frac{0{,}03}{40}\right)^2 + 2\left(-\frac{0{,}03}{40}\right)\left(-\frac{3}{2}b\right) + \left(-\frac{3}{2}b\right)^2 + b^2 = 1$$

$$\frac{0{,}09}{40^2} + \frac{0{,}09}{40}b + \frac{9}{4}b^2 + b^2 = 1$$

$$\frac{13}{4}b^2 + \frac{0{,}09}{40}b + \left(\frac{0{,}09}{40^2} - 1\right) = 0$$

$$\frac{13}{4}b^2 + \frac{9}{4000}b - \frac{1591}{1600} = 0$$

Resolvemos:

$$\frac{-\frac{9}{4000} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{4000}\right)^2 + 13\frac{1591}{1600}}}{\frac{13}{2}} = \frac{-\frac{9}{4000} \pm \sqrt{\frac{81}{4000^2} + \frac{20683}{1600}}}{\frac{13}{2}} =$$

$$= \frac{-\frac{9}{4000} \pm \sqrt{\frac{81 + 206830000}{4000^2}}}{\frac{13}{2}} = \frac{-\frac{9}{4000} \pm \frac{\sqrt{206830081}}{4000}}{\frac{13}{2}}$$

$$\frac{-\frac{9}{2000} \pm \frac{\sqrt{206830081}}{2000}}{13} = \frac{-9 \pm \sqrt{206830081}}{26000}$$

Tenemos entonces 2 valores posibles para b:

$$b_1 = \frac{-9 + \sqrt{206830081}}{26000}$$

$$b_2 = \frac{-9 - \sqrt{206830081}}{26000}$$

Para uno de los b, una buscamos su correspondiente a:

$$a_1 = -\frac{0{,}03 + 60b_1}{40}$$

$$a_1 = -\frac{0{,}03 + 60\frac{-9 + \sqrt{206830081}}{26000}}{40}$$

$$a_1 = -\frac{0{,}03 + 3\frac{-9 + \sqrt{206830081}}{1300}}{40} = -\frac{39 + 3\left(-9 + \sqrt{206830081}\right)}{52000}$$

$$-\frac{39 - 18 + 3\sqrt{206830081}}{52000} = -\frac{21 + 3\sqrt{206830081}}{52000}$$

Obtuvimos entonces el primer vector $\vec{v}_1 = (a_1, b_1)$:

$$\vec{v}_1 = \left(-\frac{21 + 3\sqrt{206830081}}{52000}, \frac{-9 + \sqrt{206830081}}{26000}\right)$$

Del mismo modo operamos con el segundo b:

Para uno de los b, una buscamos su correspondiente a:

$$a_2 = -\frac{0{,}03 + 60b_2}{40}$$

$$a_2 = -\frac{0{,}03 + 60\,\frac{-9 - \sqrt{206830081}}{26000}}{40}$$

$$a_2 = -\frac{0{,}03 + 3\,\frac{-9 - \sqrt{206830081}}{1300}}{40} = -\frac{39 + 3\left(-9 - \sqrt{206830081}\right)}{52000}$$

$$-\frac{39 - 18 - 3\sqrt{206830081}}{52000} = -\frac{21 - 3\sqrt{206830081}}{52000}$$

$$= \frac{3\sqrt{206830081} - 21}{52000}$$

Obtuvimos entonces el segundo vector $\vec{v}_2 = (a_2, b_2)$:

$$\vec{v}_2 = \left(\frac{3\sqrt{206830081} - 21}{52000}, \frac{-9 - \sqrt{206830081}}{26000}\right)$$