

T P 04 Ej. 5-d

Calcular la derivada direccional de la siguiente función en el punto p y la dirección \vec{v} especificados.

$$f(x, y) = x^4 \ln(xy) \quad P = (1, 1) \quad \vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

Para una explicación del procedimiento que se va a aplicar a continuación, referirse al ejercicio 5-a donde está explicado en detalle.

1. Definir la función $g(t) = f(P + t\vec{v})$:

$$g(t) = f\left((1, 1) + t\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)$$

$$g(t) = f\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}t, 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}t\right)$$

$$g(t) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}t\right)^4 \ln\left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}t\right)\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}t\right)\right]$$

Dejamos esta expresión tal como está porque es sencilla de derivar

2. Derivar la función respecto de su variable: $g'(t)$.

$$g'(t) = 4\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}t\right)^3 \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}t\right)\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}t\right)\right]$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}t\right)^4 \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}t\right)\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}t\right)} \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}t\right) + \frac{2}{\sqrt{5}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}t\right)\right]$$

Dejamos esta expresión tal y como está porque al evaluarla en 0, la mayor parte de los términos se van a anular.

3. Evaluar la función derivada en 0: $g'(0)$.

$$g'(0) = 4\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}0\right)^3 \frac{1}{\sqrt{5}} \ln\left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}0\right)\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}0\right)\right]$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}0\right)^4 \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}0\right)\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}0\right)} \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}0\right) + \frac{2}{\sqrt{5}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}0\right)\right]$$

$$g'(0) = \frac{4}{\sqrt{5}} \ln(1) + 1 \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = 0 + \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$g'(0) = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

Por lo tanto, la derivada direccional de la función f en el punto P en el sentido del vector \vec{v} es

$$f_{\vec{v}}(P) = \frac{3}{\sqrt{5}}$$