Extremos libres, puntos de ensilladura

Definición :. Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una función definida en el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$. Se dice que f posee un máximo (mínimo) local o relativo en $(x_0, y_0) \in A$, sí existe un entorno $U \subseteq A$ de ese punto en el cual se satisface que

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0) \quad \big(f(x,y) \geq f(x_0,y_0)\big)$$

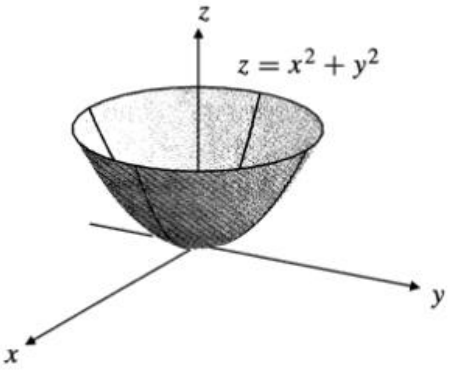
para todo $(x,y) \in U$.

El punto (x_0, y_0) al que se hace referencia en la definición se llama *punto de extremo* (máximo o mínimo, según lo que ocurra) y *extremo* o *valor extremo,* al valor asumido por la función en ese punto.

Ejemplo 1:. La función $f(x,y) = x^2 + y^2$ posee un punto de mínimo, en este caso absoluto, en el origen. Obsérvese pues que

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \geq f(0,0) = 0$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

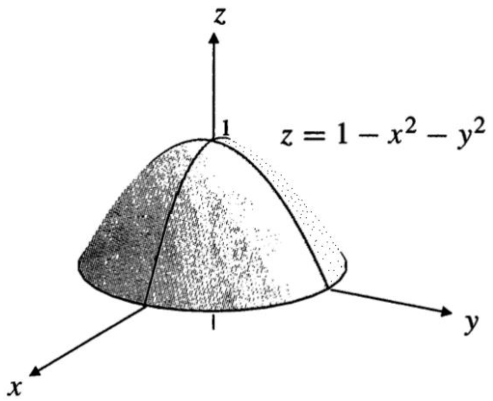


$f(x,y) = x^2 + y^2$ posee un mínimo en (0,0).

Ejemplo 2. La función $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ posee un máximo absoluto en (0,0). En este caso resulta

$$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2 \leq f(0,0) = 1$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.



$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ posee un máximo en (0,0).

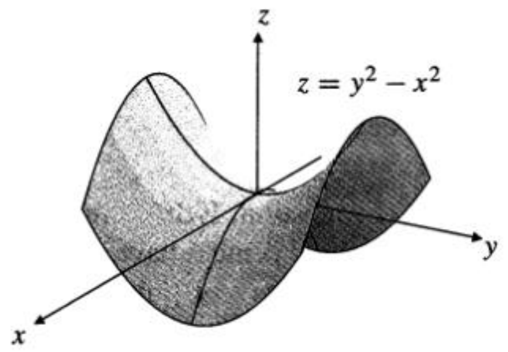
Definición :. Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una función definida en el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$. Se dice que el punto $(x_0, y_0) \in A$, es un *punto crítico* (o *estacionario*) de f, si en ese punto se anulan todas sus derivadas parciales.

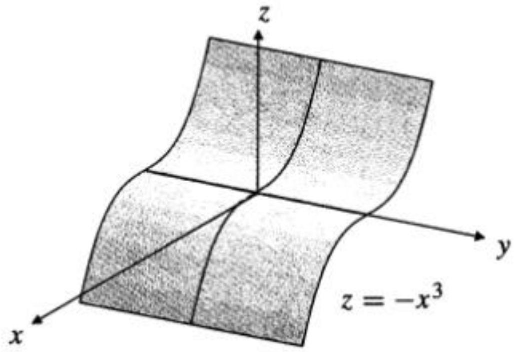
Si se supone que la función f es diferenciable en (x_0, y_0), y que tal punto es estacionario, entonces el plano tangente al gráfico de f en $\left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right)$ es horizontal, $z = cte$.

Nótese que las funciones de los Ejemplos 18 y 19 poseen su único punto crítico en el origen, y que en ese punto poseen el extremo.

Ejemplo 3. La función $f(x,y) = y^2 - x^2$ posee un único punto crítico en (0,0), sin embargo, allí no posee ni máximo ni mínimo. Véase que $f(0,y) \geq f(0,0) = 0$ para cualquier valor de y, mientras que por otra parte $f(x,0) \leq f(0,0) = 0$ para todo x. El gráfico de f es un *paraboloide hiperbólico*. En vista de la forma de esta superficie, se dice que (0,0,0) es un *punto silla* o *punto de ensilladura* de esa superficie, o que (0,0) es un punto silla o punto de ensilladura de f.

Definición :. Un punto crítico de f, que no es ni punto de máximo ni punto de mínimo, se llama *punto silla* o *punto de ensilladura* de f.





$f(x,y) = y^2 - x^2$ posee un punto de ensilladura en (0,0).

$g(x,y) = -x^3$ posee una recta de puntos de ensilladura.

Teorema (de clasificación de puntos críticos). Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una función definida en el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$, tal que existe un entorno $U \subseteq A$ de centro en el punto crítico (x_0, y_0), en el cual f es de clase C^2. Sea además el hessiano de f en (x_0, y_0)

$$Hf(x_0,y_0) = det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

$i)$ Si $Hf(x_0,y_0) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$, entonces f posee un mínimo local en (x_0,y_0).

$ii)$ Si $Hf(x_0,y_0) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$, entonces f posee un máximo local en (x_0,y_0).

$iii)$ Si $Hf(x_0,y_0) < 0$, entonces f posee un punto de ensilladura en (x_0,y_0).

$iv)$ Si $Hf(x_0,y_0) = 0$, no es posible, con tal información, determinar la naturaleza del punto crítico (x_0,y_0)

Ejemplo 4:. Clasificar los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^3 - 3xy + 6y^2$.

En este caso resulta que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3x + 12y$$

Los puntos críticos serán aquellos que satisfagan el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3x + 12y = 0 \end{cases}$$

El cual se puede escribir en la forma

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x - 4y = 0 \end{cases}$$

Combinando ambas ecuaciones, resulta que los únicos dos puntos que satisfacen este sistema son

$$P_1 = (0,0) \qquad P_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$$

Por otra parte, el hessiano, en este caso es:

$$Hf(x_0, y_0) = det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} = 72x - 9$$

P_i	$Hf(P_i)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_i)$	Conclusión	$f(P_i)$
$P_1 = (0,0)$	$\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} = -9 < 0$	----	La función f posee un punto de ensilladura en P_1	$f(0,0) = 0$
$P_2 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$	$\begin{vmatrix} 3/2 & -3 \\ -3 & 12 \end{vmatrix} = 9 > 0$	$\frac{3}{2} > 0$	La función f posee un mínimo local en P_2	$f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right) = -\frac{1}{128}$

Biblioteca digital. Cap 6, p. 221. Cálculo varias variables. W Mora.

Link contenidos pertinentes (Ctrl+Clic mouse para ir al enlace)
Khan Academy
https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/applications-of-multivariable-derivatives#optimizing-multivariable-functions-videos