Resolución TP7:

Ejercicio 19 - b - Modificado

Resolver la integral triple I con él recinto V.

V: es la superficie del Volumen determinado por la intersección del plano de ecuación $x + y + z = 1$ y los planos coordenados.

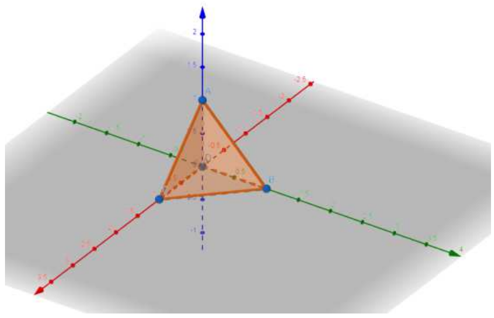
$$I = \iiint_V z(x-1)(y-2)dxdydz$$

Resolviendo:

Considerando que se trata solo del triangulo podemos nombrar a la superficie con la siguiente descripción:

$$V: \begin{cases} x + y + z \leq 1 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

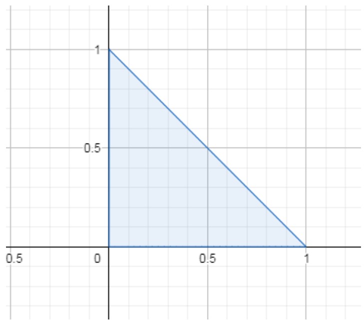
Considerando que se trata solo del triangulo podemos nombrar a la superficie con la siguiente descripción:

<table>
<tr>
<td>Dibujamos calculando las trazas y los vertices:
$S_1 \overset{x=0}{\rightarrow} \begin{cases} y + z = 1 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases} \overset{y=0}{\rightarrow} \begin{cases} z = 1 \\ A = (0,0,1) \end{cases}$
$S_1 \overset{y=0}{\rightarrow} \begin{cases} x + z = 1 \\ x \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases} \overset{z=0}{\rightarrow} \begin{cases} x = 1 \\ B = (1,0,0) \end{cases}$
$S_1 \overset{z=0}{\rightarrow} \begin{cases} x + y = 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \overset{x=0}{\rightarrow} \begin{cases} y = 1 \\ C = (0,1,0) \end{cases}$</td>
<td>
$V: \begin{cases} x + y + z \leq 1 \\ y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$</td>
</tr>
</table>

$$V:\begin{cases} x+y+z\leq 1 \\ y\geq 0 \\ x\geq 0 \\ z\geq 0 \end{cases}$$

$$si\ z=0$$

$$\begin{cases} x+y\leq 1 \\ y\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases}$$



Entonces:

$$V:\begin{cases} x+y+z\leq 1 \\ y\geq 0 \\ x\geq 0 \\ z\geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0\leq z\leq 1-x-y \\ 0\leq y\leq 1-x \\ 0\leq x\leq 1 \end{cases} \quad orden\ dz,dy,dx$$

$$I=\iiint\limits_V z(x-1)(y-2)dxdydz$$

$$I=\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} z(x-1)(y-2)dzdydx$$

$$I=\int_0^1\int_0^{1-x}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-x-y}(x-1)(y-2)dydx$$

$$I=\int_0^1\int_0^{1-x}\left[\frac{(1-x-y)^2}{2}-\frac{0}{2}\right](x-1)(y-2)dydx$$

$$I=\int_0^1\int_0^{1-x}\left[\frac{(1-x-y)^2}{2}\right](x-1)(y-2)dydx$$

$$I=\int_0^1\frac{x-1}{2}\int_0^{1-x}(1-x-y)^2(y-2)dydx$$

$$I = \int_0^1 \frac{x-1}{2} \int_0^{1-x} (y^3 + 2xy^2 - 4y^2 + x^2y - 6xy + 5y - 2x^2 + 4x - 2)\,dy\,dx$$

$$I = \int_0^1 \frac{x-1}{2} \left[\frac{y^4}{4} + \frac{2}{3}xy^3 - \frac{4}{3}y^3 + \frac{x^2y^2}{2} - 3xy^2 + \frac{5}{2}y^2 - 2x^2y + 4xy - 2y \right]_0^{1-x} dx$$

$$I = \int_0^1 \frac{x-1}{2} \left[\frac{(1-x)^4}{4} + \frac{2}{3}x(1-x)^3 - \frac{4}{3}(1-x)^3 + \frac{x^2(1-x)^2}{2} - 3x(1-x)^2 + \frac{5}{2}(1-x)^2 - 2x^2(1-x) + 4x(1-x) - 2(1-x) \right] dx$$

$$I = \int_0^1 \frac{-(1-x)}{2} \left[\frac{(1-x)^4}{4} + \frac{2}{3}x(1-x)^3 - \frac{4}{3}(1-x)^3 + \frac{x^2(1-x)^2}{2} - 3x(1-x)^2 + \frac{5}{2}(1-x)^2 - 2x^2(1-x) + 4x(1-x) - 2(1-x) \right] dx$$

$$I = \int_0^1 -\frac{1}{2} \left[\frac{(1-x)^5}{4} + \frac{2}{3}x(1-x)^4 - \frac{4}{3}(1-x)^4 + \frac{x^2(1-x)^3}{2} - 3x(1-x)^3 + \frac{5}{2}(1-x)^3 - 2x^2(1-x)^2 + 4x(1-x)^2 - 2(1-x)^2 \right] dx$$

$$I = \int_0^1 -\frac{1}{2} \left[\frac{-x^5 - 3x^4 + 22x^3 - 38x^2 + 27x - 7}{12} \right] dx$$

$$I = \int_0^1 \frac{x^5}{24} + \frac{1}{8}x^4 - \frac{11}{12}x^3 + \frac{19}{12}x^2 - \frac{27}{24}x + \frac{7}{24}\,dx$$

$$I = \left[\frac{x^6}{144} + \frac{1}{40}x^5 - \frac{11}{48}x^4 + \frac{19}{36}x^3 - \frac{27}{48}x^2 + \frac{7}{24}x \right]_0^1$$

$$I = \left[\left(\frac{1}{144} + \frac{1}{40} - \frac{11}{48} + \frac{19}{36} - \frac{27}{48} + \frac{7}{24} \right) - 0 \right]$$

$$I = \frac{43}{720}$$