Cambios de base aplicados a ecuaciones cuadráticas.

Ejercicio. En $\mathbb{R}^2$ se considera la base canónica $E = \{(1,0),\ (0,1)\}$ y la base B tal que $C_{BE} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$. Dada la ecuación $9x^2 - 6xy + 17y^2 - 72 = 0$ donde $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ denotan las coordenadas canónicas de un punto (x, y); hallar la ecuación que verifican los mismos puntos pero en coordenadas $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ en base B. En un mismo gráfico, exhibir los dos sistemas de coordenadas y graficar el conjunto de puntos que satisface la ecuación.

Comencemos aclarando la notación: Respecto a las *coordenadas cartesianas* o *coordenadas en base* E tenemos $[(x, y)]_E = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; por otro lado, respecto a las coordenadas en base B tenemos $[(x, y)]_B = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Teniendo presente que $C_{BE}[(x, y)]_B = [(x, y)]_E$ resulta que

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

O, equivalentemente, $\begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{10}}x' - \frac{3}{\sqrt{10}}y' \end{cases}$.

Reemplazando estas identidades en la ecuación $9x^2 - 6xy + 17y^2 - 72 = 0$ tenemos

$$9\left(\frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y'\right)^2 - 6\left(\frac{3}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{\sqrt{10}}y'\right)\left(\frac{1}{\sqrt{10}}x' - \frac{3}{\sqrt{10}}y'\right) + \\ +17\left(\frac{1}{\sqrt{10}}x' - \frac{3}{\sqrt{10}}y'\right)^2 - 72 = 0$$

y manipulando algebraicamente obtenemos

$$8(x')^2 + 18(y')^2 - 72 = 0.$$

Dividiendo por 72 obtenemos

$$\frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{4} - 1 = 0,$$

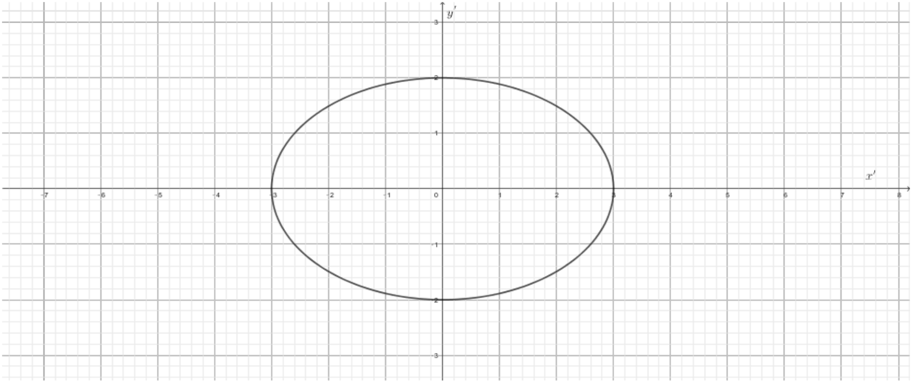
es decir,

$$\frac{(x')^2}{3^2} + \frac{(y')^2}{2^2} = 1.$$

Notemos que

$$\frac{(x')^2}{3^2} + \frac{(y')^2}{2^2} = 1.$$

es la ecuación de una elipse centrada en $(0,0)$ con radio 3 en la dirección del eje x' y radio 2 en la dirección del eje y'. De hecho, asumiendo que los ejes x' e y' son perpendiculares (lo que es correcto en este caso), la representación gráfica de la elipse es

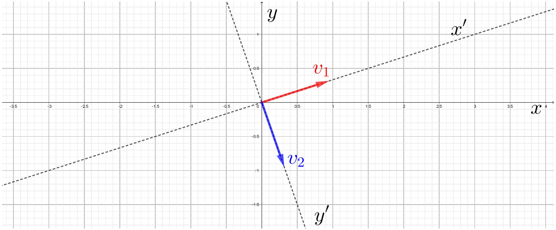


Por otro lado, si escribimos $B = \{v_1, v_2\}$, como $C_{BE} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$ sigue que

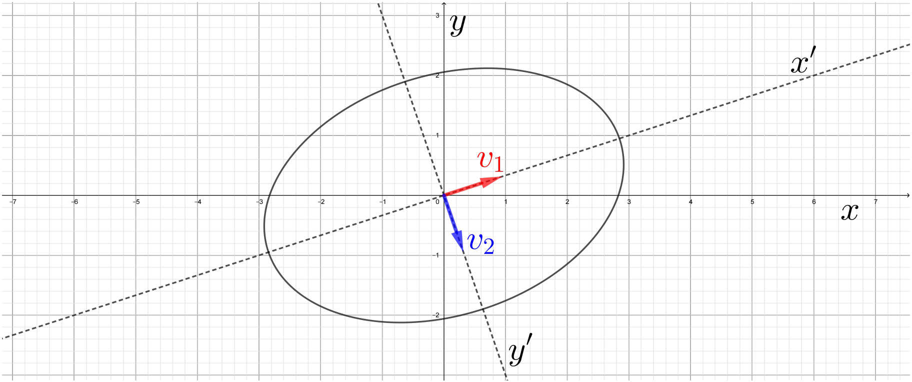
$$\begin{cases} [v_1]_E = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \\ [v_2]_E = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}} \right) \\ v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}} \right) \end{cases}.$$

Una simple inspección permite concluir que v_1 y v_2 son vectores unitarios y perpendiculares entre sí.

El eje x' está determinado por v_1, mientras que el eje y' está determinado por v_2 como hemos representado en la figura.



Finalmente, en la siguiente figura representamos la colección de puntos (x, y) que verifican la ecuación $9x^2 - 6xy + 17y^2 - 72 = 0$; la cual, por cierto, coincide con la colección de puntos (x', y') que verifican la ecuación $\dfrac{(x')^2}{3^2} + \dfrac{(y')^2}{2^2} = 1$ (teniendo cuidado de representar cada colección de puntos en el sistema de ejes correspondiente).



Ejercicio 7 (pág. 10). Dada la ecuación cuadrática $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 = 4\sqrt{3}x - 4y + 4$ en coordenadas canónicas, hallar la nueva ecuación en coordenadas $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ en base B sabiendo que $B = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\}$. En un mismo gráfico, exhibir los dos sistemas de coordenadas y graficar el conjunto de puntos que satisface la ecuación.

Comenzamos nuevamente aclarando la notación: Si E denota la base canónica de $\mathbb{R}^2$ entonces $[(x,y)]_E = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, mientras que $[(x,y)]_B = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Teniendo presente que $C_{BE}[(x,y)]_B = [(x,y)]_E$ resulta

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y' \\ y = -\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \end{cases}.$$

Ahora, reemplazando en la ecuación $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 = 4\sqrt{3}x - 4y + 4$, obtenemos

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right)^2 + 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right)\left(-\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + 3\left(-\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2 =$$
$$= 4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right) - 4\left(-\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) + 4.$$

Manipulando algebraicamente no es difícil ver que el miembro de la izquierda se reduce a $4(y')^2$ mientras que el miembro de la derecha se reduce a $8x' + 4$. Por lo tanto, la ecuación de arriba se escribe

$$4(y')^2 = 8x' + 4$$

o, de manera equivalente,

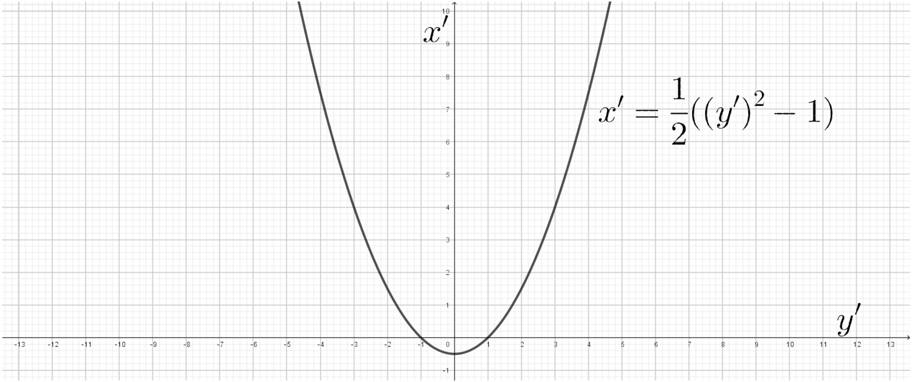
$$x' = \frac{1}{2}(y')^2 - \frac{1}{2}.$$

Notemos que los ejes x' e y' son perpendiculares debido a que

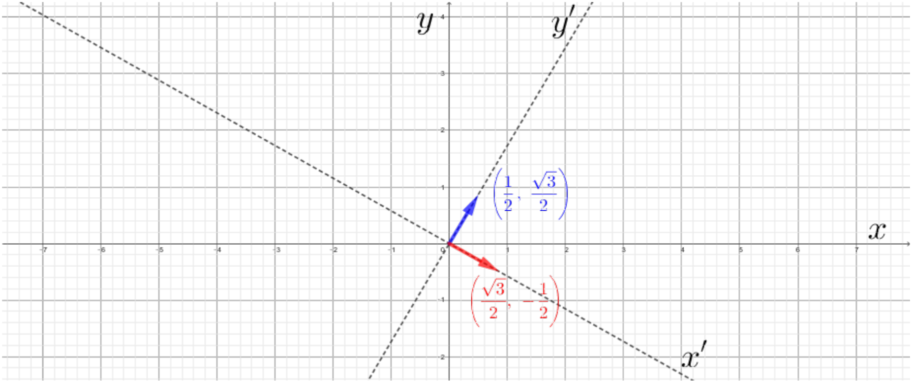
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

y también son unitarios.

Luego, la ecuación cuadrática $x' = \frac{1}{2}(y')^2 - \frac{1}{2}$ tiene como representación gráfica la siguiente parábola



Ahora si representamos los sistemas $x'y'$ y xy en un mismo par de ejes tenemos



Finalmente, combinamos lo visto para representar la colección de puntos $(x', y') : \; x' = \frac{1}{2}(y')^2 - \frac{1}{2}$ en el sistema $x'y'$; o, equivalentemente, la colección de puntos $(x, y) : \; x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 = 4\sqrt{3}x - 4y + 4$ en el sistema xy.