Resolución TP4:

Ejercicio 5 - b

Utilizando regla, calcular para $f(x,y) = x^2 + xy$ su derivada direccional en $P = (1,0) y\ \vec{v} = (2,1)$:

Para empezar:

- Al tratarse de una función de 2 variables $f(x,y)$ posee dos derivadas posibles, una en x y otra en y
  - $f_x(x,y)$
  - $f_y(x,y)$
- $Dom(f) = \mathbb{R}^2$
- Se debe utilizar un vector normalizado $\vec{v} = (a,b)$, es decir $\sqrt{a^2+b^2} = 1$
- La formula por regla es una extencion de la definicion de derivacion direccional:
  - $f_{\vec{v}}(P) = \lim_{t \to 0}\left(\frac{f(x_0+at, y_0+bt) - f(x_0,y_0)}{t}\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{g(t_0+\Delta t) - g(t_0)}{t}\right) = g'(t_0) \overset{\substack{Se\ sabe \\ t_0=0}}{\triangleq} g'(0)$
  - Finalmente: $f_{\vec{v}}(P) = g'(0)$ con $g(t) = f(x_0 + at, y_0 + bt)$

Resolvemos:

Primero se verifica que el vector este normalizado:

$$\vec{v} = (2,1) \to \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Como el vector no esta normalizado podemos utilizar:

$$\vec{w} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Se puede entonces usar el vector tal como probiene del enunciado.

$$f(x,y) = x^2 + xy$$

$$g(t) = f\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}t, 0 + \frac{1}{\sqrt{5}}t\right) = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}t\right)^2 + \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}t\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}t\right)$$

$$g(t) = 1 + \frac{4}{\sqrt{5}}t + \frac{4}{5}t^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}t + \frac{2}{5}t^2$$

$$g(t) = 1 + \frac{5}{\sqrt{5}}t + \frac{6}{5}t^2$$

Derivamos g

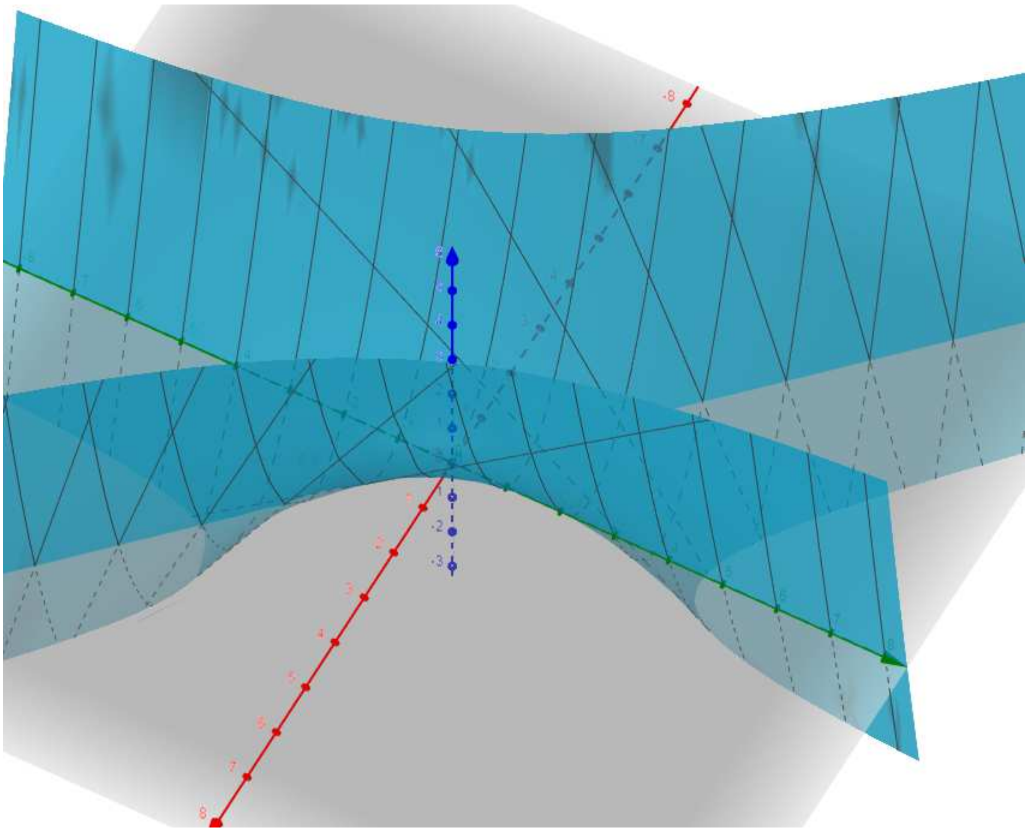
$$g'(t) = 0 - \frac{5}{\sqrt{5}} - \frac{12}{5}t = -\frac{5}{\sqrt{5}} - \frac{12}{5}t$$

Finalmente

$$f_{\vec{v}}(1,0) = g'(0) = -\frac{5}{\sqrt{5}} - \frac{12}{5} \cdot 0 = -\frac{5}{\sqrt{5}} = -\frac{5}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

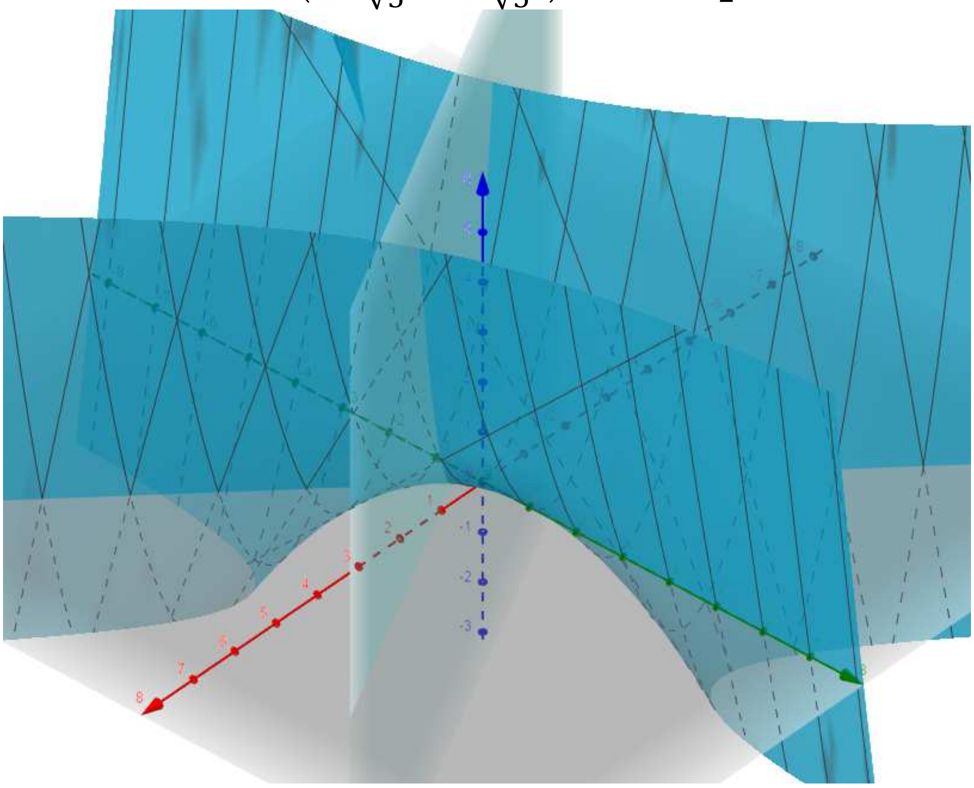
$$f_{\vec{v}}(1,0) = -\sqrt{5}$$

COROLARIO GRAFICO:

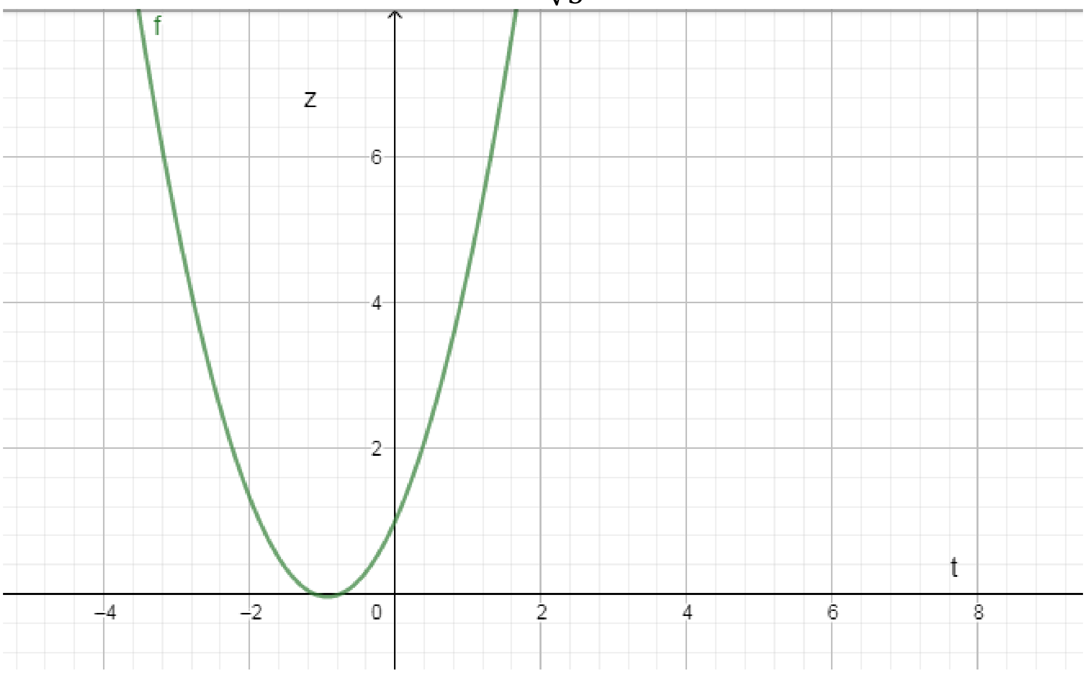


$$\alpha(t)=\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}t,0+\frac{1}{\sqrt{5}}t\right)\rightarrow\begin{cases}x=1+\dfrac{2}{\sqrt{5}}t\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}t\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{(x-1)\sqrt{5}}{2}=t\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{(x-1)\sqrt{5}}{2}\right)=\dfrac{(x-1)}{2}\end{cases}$$

$$\alpha(t)=\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}t,0+\frac{1}{\sqrt{5}}t\right)\rightarrow y=\frac{(x-1)}{2}$$



$$g(t) \ = 1 + \frac{5}{\sqrt{5}}t + \frac{6}{5}t^2$$



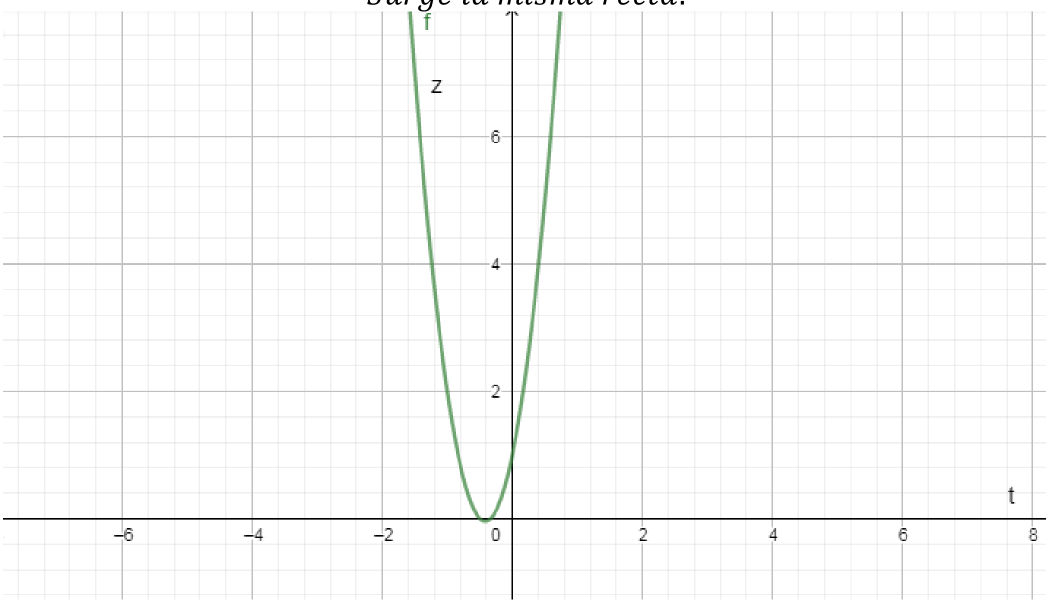
Que hubiera sucedido si:

$$h(t) = \ f(1 + 2t, 0 + 1t) = (1 + 2t)^2 + (1 + 2t)(t)$$

$$h(t) = 1 + 4t + 4t^2 + t + 2t^2 = 1 + 5t + 6t^2$$

$$\beta(t) = (1 + 2t, t) \rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ \ \ y = \ t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)}{2} = t \\ y = \ \left(\dfrac{(x-1)}{2}\right) = \dfrac{(x-1)}{2} \end{cases}$$

$$Surge\ la\ misma\ recta:$$



Sin embargo, se nota que h(t) y g(t) difieren levemente en el amplio de la curva. esto es debido a que h(t) no respeta la misma escala. El hecho de que el vector sea normalizado tiene el impacto de respetar la magnitud de escala de t, respecto de x, y, z.