Clase 11

Práctica sobre

- **Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.**

Ecuación diferencial lineal de primer orden

Problema introductorio. De una curva $C: y = y(x)$ en el plano xy, se sabe que la pendiente de la recta tangente a C en (x, y), es siempre igual al producto de las coordenadas del punto de tangencia.

Esta relación se escribe matemáticamente como

$$y'(x) = x \cdot y(x)$$

O bien

$$y'(x) - x \cdot y(x) = 0 \qquad (1)$$

Esta ecuación es un caso particular de la ecuación diferencial lineal de primer orden completa

$$y'_{(x)} + P(x) \cdot y_{(x)} = Q(x)$$

En la que $y_{(x)}$ es la función incógnita, $y'_{(x)}$ es su derivada, y las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ dos funciones conocidas. Se asume de ahora en más que todas ellas son continuas en algún intervalo de números reales $I \subseteq \mathbb{R}$.

Cuando la función $Q(x)$ es idénticamente nula, se tiene la ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden.

$$y'_{(x)} + P(x) \cdot y_{(x)} = 0$$

En el caso de la ecuación correspondiente al Problema introductorio, o sea

$$y'(x) - x \cdot y(x) = 0$$

se tiene que

$$P(x) = -x \qquad Q(x) = 0$$

Y se trata así de una ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea.

Ejemplo 1 (Familia de soluciones para el Problema introductorio). La solución general de la ecuación diferencial homogénea

$$y\acute{}_{(x)} - x \cdot y_{(x)} = 0$$

Es

$$y(x) = k \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad k \in \mathbb{R}$$

<u>Resolución</u>

$$y\acute{}_{(x)} - x \cdot y_{(x)} = 0$$

$$y\acute{}_{(x)} = x \cdot y_{(x)}$$

En principio se supone que la función incógnita $y_{(x)}$ no se anula en el intervalo de referencia. Luego, se puede escribir

$$y\acute{}_{(x)} = x \cdot y_{(x)}$$

$$\frac{y\acute{}_{(x)}}{y_{(x)}} = x$$

Ahora, se integra respecto de x a ambos lados

$$\int \frac{1}{y_{(x)}} \cdot y\acute{}_{(x)}\, dx = \int x\, dx + c_0$$

$$\ln|y(x)| = \frac{x^2}{2} + c_0$$

$$|y(x)| = e^{\frac{x^2}{2}+c_0} = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{c_0} = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \overbrace{e^{c_0}}^{c_1>0}$$

$$|y(x)| = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot c_1 = c_1 e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$|y(x)| = c_1 e^{\frac{x^2}{2}}$$

Has dos situaciones posibles

$$y_1(x) = +c_1 e^{\frac{x^2}{2}} \qquad\qquad y_2(x) = -c_1 e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y(x) = k \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \qquad k \in \mathbb{R}_{\neq 0}$$

Y en ambos casos c_1 es un número real positivo. Sin embargo, si se tiene en cuenta el valor no considerado para c_1, esto es, $c_1 = 0$, queda

$$y(x) = \pm c_1 e^{\frac{x^2}{2}} = \pm 0 e^{\frac{x^2}{2}} = 0$$

$$y(x) \equiv 0$$

Que también es solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$y'_{(x)} - x \cdot y_{(x)} = 0$$

Esto quiere decir que la familia de soluciones de esta ecuación está dada por

$$y(x) = k \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Nótese que

$$y(x) = k \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \rightarrow y'(x) = k \cdot x e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y'_{(x)} - x \cdot y_{(x)} = k \cdot x e^{\frac{x^2}{2}} - x\, k \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = 0$$

$$y'_{(x)} - x \cdot y_{(x)} = 0$$

También se dan los casos en los que se pide hallar una solución particular que verifica una condición inicial de la forma $y(x_0) = y_0$, que significa que se pide determinar de toda la familia de soluciones, aquella función que satisface la ecuación diferencial inicial cuya gráfica pasa por el punto (x_0, y_0). A este tipo de problema se lo llama "Problema de valor inicial".

Por ejemplo, hallar la solución particular de

$$y'_{(x)} - x \cdot y_{(x)} = 0$$

que verifica la condición $y(0) = 1$.

Se evalúa en la fórmula general para obtener la solución particular requerida

$$y(x) = k \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y(0) = k \cdot e^{\frac{0^2}{2}} = k \cdot e^0 = k = 1 \quad \rightarrow \quad k = 1$$

Entonces, la solución pedida es

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$$

El procedimiento anterior puede aplicarse al caso general de la ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea.

$$y'_{(x)} + P(x) \cdot y_{(x)} = 0$$

$$y'_{(x)} = -P(x) \cdot y_{(x)} \qquad y_{(x)} \neq 0 \; en \; I \subseteq \mathbb{R}$$

$$\int \frac{y'_{(x)}}{y_{(x)}} dx = -\int P(x)\, dx + c_0$$

$$\ln|y(x)| = -\int P(x)\, dx + c_0$$

$$|y(x)| = e^{-\int P(x)dx + c_0} = e^{-\int P(x)dx} \cdot e^{c_0}$$

$$|y(x)| = e^{-\int P(x)dx} \cdot \overbrace{e^{c_0}}^{c_1}$$

$$|y(x)| = c_1 \cdot e^{-\int P(x)dx}, c_1 \in \mathbb{R}_{\neq 0}$$

Si se toma $c_1 = 0$ se obtiene la solución trivial idénticamente nula. De esta manera, se tiene que la solucion general de la ecuación

$$y'_{(x)} + P(x) \cdot y_{(x)} = 0$$

$$y(x) = k \cdot e^{-\int P(x)dx}, \qquad k \in \mathbb{R}$$

Esta fórmula permite obtener la solución inmediatamente, así como se muestra en los siguientes dos ejemplos:

$a)$

$$y'_{(x)} - x \cdot y_{(x)} = 0$$

$$y(x) = k \cdot e^{-\int (-x)dx}, \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = k \cdot e^{\frac{x^2}{2}}, \qquad k \in \mathbb{R}$$

$b)$

$$y'_{(x)} + \frac{1}{x} \cdot y_{(x)} = 0, \quad x > 0$$

$$y(x) = k \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx}, \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = k \cdot e^{-1 * \ln(x)}, \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = k \cdot \left(e^{\ln(x)}\right)^{-1}, \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = k \cdot \frac{1}{e^{\ln(x)}}, \qquad k \in \mathbb{R}$$

Teniendo en cuenta que

$$\ln(x) = \ln(x)$$

$$e^{\ln(x)} = x$$

La solución general de la ecuación homogénea planteada es

$$y(x) = k \cdot \frac{1}{x}, \qquad k \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 2. Hallar la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$y'_{(x)} - x \cdot y_{(x)} = x \qquad (1)$$

Se trata de la ecuación completa. A continuación, se aplica el método sistemático que permite hallar la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden completa

$$y'_{(x)} + P(x) \cdot y_{(x)} = Q(x)$$

En principio se supone que

$$y_{(x)} = u(x) \cdot v(x)$$

Donde se supone que $u(x)$ y $v(x)$ son continuas en el intervalo de validez. Derivando esta expresión, resulta

$$y'_{(x)} = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Reemplazando en

$$y'_{(x)} - x \cdot y_{(x)} = x$$

Queda

$$\overbrace{u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}^{y'(x)} - x \cdot \overbrace{u(x) \cdot v(x)}^{y(x)} = x$$

Esta expresión se puede ordenar del siguiente modo

$$v(x)[u'(x) - x \cdot u(x)] + u(x) \cdot v'(x) = x \qquad (2)$$

Se busca ahora, una función particular no idénticamente nula

$$u = u(x)$$

Tal que

$$u'(x) - x \cdot u(x) = 0 \qquad (3)$$

Que se llama ecuación diferencial homogénea (o reducida) asociada a la ecuación diferencial (1).

Del ejemplo anterior, se sabe que

$$u(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$$

Ahora, esta función particular se reemplaza en (2)

$$v(x)\overbrace{\left[xe^{\frac{x^2}{2}} - x \cdot e^{\frac{x^2}{2}}\right]}^{0} + e^{\frac{x^2}{2}} \cdot v'(x) = x \qquad (2)$$

Luego queda

$$e^{\frac{x^2}{2}} \cdot v'(x) = x$$

$$v'(x) = \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}}$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} \cdot v'(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}} \cdot v'(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

O lo que es lo mismo

$$v'(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (4)$$

Y ahora se trata de hallar "<u>la función $v(x)$ más general posible, que verifique la condición (4)</u>".

Esta es

$$v(x) = \int xe^{-\frac{x^2}{2}}\, dx + h \qquad h \in \mathbb{R}$$

Integrando a partir de método de sustitución, se tiene

$$v(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} + h$$

Y ahora, teniendo en cuenta que

$$y_{(x)} = u(x) \cdot v(x)$$

Resulta entonces que

$$y_{(x)} = u(x) \cdot v(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \left(-e^{-\frac{x^2}{2}} + h\right)$$

Es decir

$$y_{(x)} = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \left(-e^{-\frac{x^2}{2}} + h\right) = -e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + h \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = -1 + \ h \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

O sea

$$y_{(x)} = -1 + \ h \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad h \in \mathbb{R}$$

Y esta es la solución general de la ecuación diferencial (1)

$$y'_{(x)} - x \cdot y_{(x)} = x$$

<u>**Verificación**</u>

$$y_{(x)} = -1 + \ h \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y'_{(x)} = h \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Reemplazando en (1)

$$y'_{(x)} - x \cdot y_{(x)} = x$$

$$\overbrace{h \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}^{y'(x)} - x \cdot \overbrace{\left(-1 + \ h \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\right)}^{y(x)} = \ h \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + x - h \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = x$$

Es decir que

$$y'_{(x)} - x \cdot y_{(x)} = x$$

Como tenía que ser.

También se puede presentar un problema de valor inicial como el que se muestra a continuación.

Ejemplo 3. Determinar la solucion particular de la ecuación diferencial

$$y'_{(x)} - x \cdot y_{(x)} = x \qquad (1)$$

que verifica la condición inicial

$$y(0) = 2$$

Se utiliza la fórmula general de la solucion diferencial (1) obtenida en el Ejemplo 2. Es decir

$$y_{(x)} = -1 + \ h \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$y_{(0)} = -1 + \ h \cdot e^{-\frac{0^2}{2}} = -1 + h = 2 \qquad \rightarrow \qquad h = 3$$

Entonces, la solucion de la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$y'_{(x)} - x \cdot y_{(x)} = x$$

Que verifica la condición inicial

$$y(0) = 2$$

Es la función

$$y_{(x)} = -1 + \ 3 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Ejemplo 4. Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$y' + 2x \cdot y = x^3 + x$$

y luego determinar la solución particular que verifica la condición $y_{(1)} = 0$.

Se propone el formato de solución

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$y'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Luego se efectúa remplazo en la ecuación diferencial inicial

$$y'_{(x)} + 2x \cdot y_{(x)} = x^3 + x$$

$$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) + 2x \cdot u(x) \cdot v(x) = x^3 + x$$

$$v(x)\,\overbrace{[u'(x) + 2x \cdot u(x)]}^{0} + u(x) \cdot v'(x) = x^3 + x$$

Se busca una solución particular no nula de la homogénea asociada

$$u'(x) + 2x \cdot u(x) = 0$$

Una solución particular de esta ecuación es

$$u(x) = e^{-\int P(x)\,dx} = e^{-\int 2x\,dx} = e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}}$$

$$u(x) = e^{-x^2} \rightarrow \; u'(x) = -2xe^{-x^2}$$

Reemplazando en

$$v(x)[u'(x) + 2x \cdot u(x)] + u(x) \cdot v'(x) = x^3 + x$$

Queda

$$v(x)\,\overbrace{\left[-2xe^{-x^2} + 2x \cdot e^{-x^2}\right]}^{0} + e^{-x^2} \cdot v'(x) = x^3 + x$$

Es decir

$$e^{-x^2} \cdot v'(x) = x^3 + x$$

O lo que es lo mismo

$$v'(x) = x^3e^{x^2} + xe^{x^2}$$

Ahora se busca "la función $v(x)$ más general posible, que verifique esta condición". Se trata de la función

$$v(x) = \int \left(x^3 e^{x^2} + x e^{x^2}\right) dx + h \qquad h \in \mathbb{R}$$

Aplicando integración por partes para obtener la primitiva del primer término del integrando **(Ver Ejemplo 3c al final del escrito)**, y aplicando sustitución en el segundo, se obtiene la fórmula que define a la función $v(x)$. Esta es

$$v(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)e^{x^2} + \frac{1}{2}e^{x^2} + h \qquad h \in \mathbb{R}$$

Es decir

$$v(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} + h \qquad h \in \mathbb{R}$$

De este modo, resulta entonces que

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) = e^{-x^2} \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 e^{x^2} + h\right] = \frac{1}{2}x^2 + h \cdot e^{-x^2}$$

Es decir que

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + h \cdot e^{-x^2} \qquad h \in \mathbb{R}$$

Es la solución general de la ecuación diferencial

$$y' + 2x \cdot y = x^3 + x$$

Se busca, ahora, la solución particular que verifica la condición inicial

$$y_{(1)} = 0$$

Se procede del siguiente modo

$$y(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + h \cdot e^{-1^2} = \frac{1}{2} + h \cdot e^{-1} = 0 \;\rightarrow\; h = -\frac{1}{2} \cdot e$$

Así, la solución particular pedida es

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \left(-\frac{1}{2} \cdot e\right) \cdot e^{-x^2}$$

Es decir

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}e^{1-x^2}$$

Esquema de solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$y'_{(x)} + P(x) \cdot y_{(x)} = Q(x) \quad \leftarrow \text{Ecuación diferencial}$$

$$y_{(x)} = u(x) \cdot v(x) \quad \leftarrow \quad \text{Formato de la solución}$$

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx} \quad \leftarrow \quad \text{Solución particular de la homogénea}$$

$$v(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}\, dx + h, h \in \mathbb{R} \quad \leftarrow \text{Fórmula más general de } v(x)$$

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}\, dx + h\right], h \in \mathbb{R} \quad \leftarrow \quad \text{Solución general de la Ec. Dif.}$$

Ejemplo 5. Determinar la solución general de la ecuación diferencial lineal

$$y'_{(x)} + y_{(x)} = e^{x} + e^{2x} + e^{3x}$$

En este caso se presenta la siguiente situación

$$P(x) = 1$$

$$Q(x) = e^{x} + e^{2x} + e^{3x}$$

Se sabe que la solución general es

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx}$$

$$v(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}\, dx + h, \qquad h \in \mathbb{R}$$

En esta situación particular se tiene

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int 1dx} = e^{-x}$$

Es decir

$$u(x) = e^{-x} \quad \to u'(x) = -e^{-x} \quad \to u'(x) + u(x) = 0$$

Por otra parte

$$v(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}\, dx + h = \int (e^{x} + e^{2x} + e^{3x}) \cdot e^{\int 1dx}\, dx + h$$

$$v(x) = \int (e^{x} + e^{2x} + e^{3x}) \cdot e^{x} dx + h = \int (e^{2x} + e^{3x} + e^{4x})\, dx + h$$

Integrando, queda

$$v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{4}e^{4x} + h$$

Entonces, la solución general de la ecuación diferencial

$$y'_{(x)} + y_{(x)} = e^{x} + e^{2x} + e^{3x}$$

Es

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) = e^{-x} \cdot \left[\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{4}e^{4x} + h\right], \qquad h \in \mathbb{R}$$

Es decir

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{3x} + he^{-x}, \qquad h \in \mathbb{R}$$

Ahora, se procede a verificar el resultado

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{3x} + he^{-x}$$

$$y'(x) = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{2}{3}e^{2x} + \frac{3}{4}e^{3x} - he^{-x}$$

$$y'_{(x)} + y_{(x)} = \overbrace{\frac{1}{2}e^{x} + \frac{2}{3}e^{2x} + \frac{3}{4}e^{3x} - he^{-x}}^{y'(x)} + \overbrace{\frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{3x} + he^{-x}}^{y(x)}$$

$$y'_{(x)} + y_{(x)} = \frac{2}{2}e^{x} + \frac{3}{3}e^{2x} + \frac{4}{4}e^{3x}$$

O sea que

$$y'_{(x)} + y_{(x)} = e^{x} + e^{2x} + e^{3x}$$

Tal como se pedía.

Ejemplo 6. Determinar la solución general de la ecuación diferencial lineal

$$y'_{(x)} + y_{(x)} = e^{x}$$

Se propone el formato de solución

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$y'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Reemplazo en la ecuación diferencial inicial

$$y'_{(x)} + y_{(x)} = e^x$$

$$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) + u(x) \cdot v(x) = e^x$$

$$v(x)\,\overbrace{[u'(x) + u(x)]}^{0} + u(x) \cdot v'(x) = e^x$$

Se busca una solución particular no nula de la homogénea asociada

$$u'(x) + u(x) = 0$$

La solución general de esta ecuación es

$$u(x) = k_0 \cdot e^{-\int dx} = k_0 \cdot e^{-x}$$

$$u(x) = k_0 \cdot e^{-x} \quad k_0 \neq 0$$

Verificación

$$u'(x) + u(x) = -k_0 \cdot e^{-x} + k_0 \cdot e^{-x} = 0$$

Se realiza el reemplazo de

$$u(x) = k_0 \cdot e^{-x}$$

En la ecuación

$$v(x)\,\overbrace{[-k_0 \cdot e^{-x} + k_0 \cdot e^{-x}]}^{0} + k_0 \cdot e^{-x} \cdot v'(x) = e^x$$

$$k_0 \cdot e^{-x} \cdot v'(x) = e^x$$

$$v'(x) = \frac{1}{k_0} e^{2x}$$

$$v(x) = \int v'(x)\,dx + h = \int \frac{e^{2x}}{k_0}\,dx + h$$

$$v(x) = \int \frac{e^{2x}}{k_0}\,dx + h$$

$$v(x) = \frac{1}{k_0} \int e^{2x}\,dx + h$$

$$v(x) = \frac{1}{2k_0} e^{2x} + h$$

Entonces

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) = k_0 \cdot e^{-x} \left(\frac{1}{2k_0} e^{2x} + h \right) = \frac{1}{2} e^x + hk_0 \cdot e^{-x}$$

$$y(x) = \frac{1}{2} e^x + \overbrace{hk_0}^{H} \cdot e^{-x}$$

$$y(x) = \frac{1}{2} e^x + H \cdot e^{-x}, \qquad H \in \mathbb{R}$$

Determinar la solución particular que verifica la condición inicial

$$y(1) = 1$$

$$y(1) = \frac{1}{2} e^1 + H \cdot e^{-1} = 1$$

$$H = e - \frac{1}{2} e^2$$

$$H = e - \frac{1}{2} e^2$$

Así, la solución particular pedida es

$$y(x) = \frac{1}{2} e^x + \left(e - \frac{1}{2} e^2 \right) \cdot e^{-x}$$

Ejemplo 7. Determinar la solución general de la ecuación diferencial lineal

$$y'_{(x)} + \frac{1}{x \cdot (x+1)} y_{(x)} = (x+1) \cdot e^x, \quad x > 0$$

Y luego hallar la solución particular que verifica la condición inicial $y_{(1)} = 3$.

<u>**Sugerencia**</u>: Utilizar la identidad

$$\frac{1}{x \cdot (x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

En este caso se presenta la siguiente situación

$$P(x) = \frac{1}{x\cdot(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$Q(x) = (x+1)\cdot e^{x}$$

Se sabe que la solución general es

$$y(x) = u(x)\cdot v(x)$$

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx}$$

$$v(x) = \int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}\,dx + h, \qquad h \in \mathbb{R}$$

En primer lugar, entonces, se tiene

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int \frac{1}{x\cdot(x+1)}dx} = e^{-\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx} = e^{\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)dx}$$

Esto es

$$u(x) = e^{\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)dx}$$

Teniendo en cuenta que

$$\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)dx = \ln(x+1) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

Finalmente ocurre que

$$u(x) = e^{\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)dx} = e^{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)} = \frac{x+1}{x}$$

O sea

$$u(x) = \frac{x+1}{x}$$

Que es una solución particular de la ecuación diferencial homogénea asociada.

El paso siguiente consiste en hallar

$$v(x) = \int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}\,dx + h, \qquad h \in \mathbb{R}$$

En la situación presentada en este ejemplo, resulta ser

$$v(x) = \int (x+1)\cdot e^{x}\cdot e^{\int \frac{1}{x\cdot(x+1)}dx}\,dx + h$$

Calculando primero la integral

$$e^{\int \frac{1}{x\cdot(x+1)}dx} = e^{\int \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx} = e^{\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)} = \frac{x}{x+1}$$

Entonces, se puede escribir

$$v(x) = \int (x+1)\cdot e^{x}\cdot e^{\int \frac{1}{x\cdot(x+1)}dx}\, dx + h$$

$$v(x) = \int (x+1)\cdot e^{x}\cdot \frac{x}{x+1}\, dx + h$$

Es decir

$$v(x) = \int x\cdot e^{x}\, dx + h$$

Y, en definitiva

$$v(x) = (x-1)\cdot e^{x} + h$$

Ahora, sabiendo que

$$y(x) = u(x)\cdot v(x)$$

$$u(x) = \frac{x+1}{x}$$

$$v(x) = (x-1)\cdot e^{x} + h, \qquad h \in \mathbb{R}$$

Se tiene

$$y(x) = u(x)\cdot v(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)\left((x-1)\cdot e^{x} + h\right)$$

$$y(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)\left((x-1)\cdot e^{x} + h\right)$$

Se concluye finalmente que la solución general de la ecuación diferencial

$$y'_{(x)} + \frac{1}{x\cdot(x+1)}y_{(x)} = (x+1)\cdot e^{x}, \quad x > 0$$

Es

$$y(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)\left((x-1)\cdot e^{x} + h\right)$$

Ahora se procede a determinar la solución particular que verifica la condición inicial dada, a saber $y_{(1)} = 3$.

Reemplazando, queda

$$y(1) = \left(\frac{1+1}{1}\right)\left((1-1)\cdot e^1 + h\right) = 2h = 3$$

Esto quiere decir que

$$h = \frac{3}{2}$$

por lo que la solución particular pedida es

$$y(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)\left((x-1)\cdot e^x + \frac{3}{2}\right)$$

Método de integración por partes

Ejemplos

Sean las funciones $u(x)$ y $v(x)$ continuas en un cierto intervalo. Según la regla de derivación del producto, también conocida como Regla de Leibniz, resulta

$$[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

Integrando a ambos lados de la igualdad

$$\int [u(x)\cdot v(x)]'\,dx = \int \left(u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)\right)dx$$

$$u(x)\cdot v(x) = \int u'(x)\cdot v(x)\,dx + \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

O lo que es lo mismo

$$u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx = \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

Es decir

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

El método de integración por partes consiste en aplicar la fórmula precedente para “mejorar el aspecto de la integral inicial” y obtener así una primitiva a partir de calcular una integral de menor dificultad.

Ejemplo 1a. Para calcular la integral

$$\int x \cdot e^x \, dx$$

En principio se escribe

$$\int x \cdot e^x \, dx = \int x \cdot [e^x]' \, dx = \int e^x \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]' \, dx$$

Nótese que al integrando inicial se lo ha escrito como el producto de la función

$$u(x) = x$$

Por la derivada de la función

$$v(x) = e^x$$

Ahora, aplicando la fórmula

$$\int u(x) \cdot v'(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, dx$$

Se tiene

$$\int x \cdot e^x \, dx = \int x \cdot [e^x]' dx = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx$$

O sea

$$\int x \cdot e^x \, dx = x \cdot e^x - \int e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x = (x-1) \cdot e^x$$

Con lo cual

$$\int x \cdot e^x \, dx = (x-1) \cdot e^x + h, \quad h \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 2b. Para calcular la integral

$$\int \ln(x) \, dx$$

En principio se escribe

$$\int \ln(x) \, dx = \int \ln(x) \cdot [x]' \, dx = \int \overbrace{\ln(x)}^{u(x)} \cdot \left[\overbrace{x}^{v(x)}\right]' \, dx$$

Luego, aplicando la fórmula

$$\int u(x) \cdot v'(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, dx$$

Resulta

$$\int \ln(x)\,dx = \int \ln(x)\cdot[x]'\,dx = \int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

$$\int \ln(x)\,dx = \int \ln(x)\cdot[x]'\,dx = \ln(x)\cdot x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = x\cdot\ln(x) - \int dx$$

$$\int \ln(x)\,dx = \int \ln(x)\cdot[x]'\,dx = x\cdot\ln(x) - x$$

Entonces

$$\int \ln(x)\,dx = x\cdot\ln(x) - x + h, \quad h\in\mathbb{R}$$

Ejemplo 3c. Para calcular la integral

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx$$

En principio se escribe

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx = \int \frac{x^2}{2}\cdot 2xe^{x^2}\,dx = \int \frac{x^2}{2}\cdot \overbrace{2xe^{x^2}}^{\left[e^{x^2}\right]'}\,dx = \int \frac{x^2}{2}\cdot\left[e^{x^2}\right]'\,dx =$$

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx = \int \frac{\overbrace{x^2}^{u(x)}}{2}\cdot\left[\overbrace{e^{x^2}}^{v(x)}\right]'\,dx$$

Luego, aplicando la fórmula

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

Queda

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx = \int \frac{\overbrace{x^2}^{u(x)}}{2}\cdot\left[\overbrace{e^{x^2}}^{v(x)}\right]'\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot e^{x^2} - \int x\cdot e^{x^2}\,dx$$

Resulta entonces que

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{2} = \frac{e^{x^2}}{2}\cdot(x^2-1)$$

Esto significa que

$$\int x^3 e^{x^2}\, dx = \frac{e^{x^2}}{2} \cdot (x^2 - 1) + h, \quad h \in \mathbb{R}$$