ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA I

MODULO 1

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (SEL)

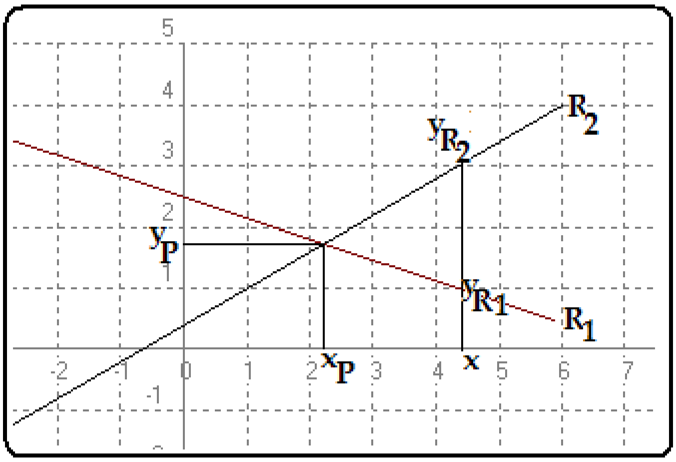
Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas y su geometría

a) Considera las rectas $R_1: y = -x + 2$ y $R_2: 4x + 3y = 3$.

Es sencillo graficarlas (¡hacerlo!) pero nuestra atención es hacia la siguiente cuestión:

¿Existirá algún punto P que pertenezca a ambas rectas?

El esquema siguiente nos da una idea, pero no representa al ejemplo numérico dado.



Se observa que casi siempre tomando un valor x los valores verticales y que corresponden a las rectas son diferentes, o sea $y_{R_1} \neq y_{R_2}$.

Pero sucede que en el punto de intersección de ambas líneas $(x_p; y_p)$ para el valor x_p resulta el valor vertical de ambas idéntico.

En nuestra situación se tendría: $\begin{cases} y_p = -x_p + 2 \\ 4x_p + 3y_p = 3 \end{cases}$

Esto recibe el nombre de ***sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas***.

Se puede resolver sustituyendo en este caso la primera ecuación en la segunda (Método de sustitución).

$$4x_p + 3.(-x_p + 2) = 3 \rightarrow 4x_p - 3x_p + 6 = 3 \rightarrow x_p = 3 - 6 \rightarrow \boxed{x_p = -3}$$

Al regresar a la primera ecuación se obtiene: $y_p = -(-3) + 2 = 5$

Resulta que el punto de intersección es $\boxed{P = (-3;\ 5)}$.

Por seguridad es conveniente verificar la ecuación utilizada para el cálculo de y_p.

Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas donde existe un ***único*** par ordenado $(x; y)$ que las cumple a ambas se denomina ***sistema compatible determinado***. Si no hay ningún par ordenado que las verifique se llama ***sistema incompatible***; si existen infinitos pares que satisfacen a ambas se trata de un ***sistema compatible indeterminado***.

b) Veamos otra situación y otra técnica para llegar a la solución.

Se pretende resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$S\colon \begin{cases} 2x - 3y = 13 \quad \text{ecuación 1} \\ 6\text{x} + 7\text{y} = 23 \quad \text{ecuación 2} \end{cases}$$

¿Cambia el sistema si a la ecuación 1 la multiplicamos por 3?

(a) $S'\colon \begin{cases} 6x - 9y = 39 \quad \text{ecuación 3} \\ 6\text{x} + 7\text{y} = 23 \quad \text{ecuación 2} \end{cases}$

¿Qué ocurre si a la ecuación 2 le restamos la ecuación 3?

Pensar que aquí estamos restando el número 39 (que equivale a $6x - 9y$)

(b) $S''\colon \begin{cases} 6x - 9y = 39 & \text{ecuación 3} \\ 6\text{x} + 7\text{y} - (6\text{x} - 9\text{y}) = 23 - 39 & \text{ecuación 4} \end{cases}$

(c) $S''\colon \begin{cases} 6x - 9y = 39 & \text{ec. 3} \\ 16\text{y} = -16 & \text{ec. 4} \end{cases}$

(d) $S'''\colon \begin{cases} 2x - 3y = 13 & \text{ec. 1} \\ 16\text{y} = -16 & \text{ec. 4} \end{cases}$

[la ec.1 tiene valores más pequeños que facilitan el despeje]

Podemos ver que S'' es <u>*fácilmente resoluble*</u>.

De la ecuación 4 resulta $\boxed{y = -1}$; reemplazando en la ecuación 3 se tiene $2x + 3 = 13 \rightarrow 2x = 10 \rightarrow \boxed{x = 5}$

El par (5; – 1) satisface las ecuaciones de los 4 sistemas: S, S', S'' y S''' (¡hacer las cuentas!).

Las operaciones (a) y (b) son ***operaciones elementales entre ecuaciones***; le podríamos agregar la de permutar el orden en las ecuaciones (c). Además, la ecuación 4 podría pensarse como la suma de la 2 con la 1 multiplicado por (–3).

Los 4 sistemas ejemplificados tienen el mismo conjunto solución: se dice que son ***equivalentes***.

Generalizando lo efectuado en el ejemplo podemos recopilar:

Dado un sistema S con **m** *ecuaciones lineales se consigue un sistema S' equivalente a través de cualquiera de estas tres operaciones elementales entre ecuaciones:*

a) Permutar el orden de dos ecuaciones cualesquiera.

b) A una ecuación multiplicarla por un número diferente de cero.

c) A una ecuación reemplazarla por la suma de ésta por un múltiplo de otra (el factor de multiplicación podría ser cero, pero no sería muy útil ya que S'=S).

Estas operaciones permitirán resolver ecuaciones por el **Método de Gauss** (y de **Gauss-Jordan**) que abordaremos más adelante.

A propósito, se han ordenado los cuatro sistemas escribiendo las variables x e y en ese orden; se podría haber elegido primero y, luego x, pero es fundamental *optar por uno*.

Los coeficientes que acompañan a las variables y los términos independientes (más allá del igual) pueden distribuirse en una ***matriz***.

Vinculado a cada sistema se tiene una serie de matrices, pero por ahora nos focalizaremos en la ***matriz ampliada*** del sistema que llamemos $M, M', M''\ y\ M'''$.

Ellas son:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -3 & \vdots & 13 \\ 6 & 7 & \vdots & 23 \end{bmatrix} \qquad M' = \begin{bmatrix} 6 & -9 & \vdots & 39 \\ 6 & 7 & \vdots & 23 \end{bmatrix}$$

$$M'' = \begin{bmatrix} 6 & -9 & \vdots & 39 \\ 0 & 16 & \vdots & -16 \end{bmatrix} \quad M''' = \begin{bmatrix} 2 & -3 & \vdots & 13 \\ 0 & -16 & \vdots & 16 \end{bmatrix}$$

Esta disposición (dentro de otra) impide la dispersión que pudieran hacer las variables sobre nuestro desarrollo algebraico y de alguna manera *lo automatiza*.

Cada una de las cuatro matrices presentadas tiene *2 filas* y *3 columnas*. Las primeras representan en nuestra situación a *las ecuaciones* y las segundas a *las variables* –ordenadas- y a los términos independientes.

Las operaciones elementales entre ecuaciones pueden pensarse como ***operaciones elementales entre filas***. Ellas nos dirigen a una ***nueva matriz*** que representa a un **sistema equivalente al anterior** o sea que tienen el mismo conjunto solución.

Escribamos las operaciones elementales para las filas de ***una matriz que represente a un sistema lineal*** de ecuaciones:

a) Permutar dos filas entre sí.

b) A una fila multiplicarla por un número diferente de cero.

c) A una fila reemplazarla por la suma de ésta por un múltiplo de otra.

Explicite cuál (es) fue (ron) las *operaciones elementales* que permitieron ir de la matriz M hasta la M''' en el caso anterior.

ESTADO INICIAL (***sistema original***)		PROCESO	ESTADO INICIAL (***sistema equivalente***)	
$\begin{bmatrix} 2 & -3 & \vdots & 13 \\ 6 & 7 & \vdots & 23 \end{bmatrix}$	$\begin{pmatrix} ecuac.1 \\ ecuac\ 2 \end{pmatrix}$	$\rightarrow$	$\begin{pmatrix} ecuac.3 \\ ecuac\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times ecuac.1 \\ ecuac\ 2 \end{pmatrix}$	$\rightarrow \begin{bmatrix} 6 & -9 & \vdots & 39 \\ 6 & 7 & \vdots & 23 \end{bmatrix}$

… terminar con el proceso

Si tuviésemos el sistema $\begin{cases} 2x - y + 4z = 13 \\ 3y - z = 4 \\ 10z = 50 \end{cases}$ resulta una matriz ampliada de 3 filas y 4 columnas; esta es $M = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 13 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 50 \end{array}\right)$.

La solución del sistema es $\boxed{z = 5}$; $3y - 5 = 4 \rightarrow \boxed{y = 3}$; $2x - 3 + 20 = 13 \rightarrow \boxed{x = -2}$.

Evidentemente podemos resolver el sistema desde las ecuaciones iniciales pero la matriz con tantos ceros y estratégicamente ubicados facilita la resolución. Es por eso por lo que se nos hace necesario un tratamiento individual y más profundo.

Expresión matricial de un sistema de ecuaciones

Anteriormente, se planteó el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$S: \begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 6\text{x} + 7\text{y} = 23 \end{cases}$ cuya solución fue $(x, y) = (5; -1)$

Veamos que dichas ecuaciones tienen varias interpretaciones:

(a) Cada ecuación corresponde a una recta y cuando uno está frente a un sistema pretende conocer el punto (si existiera) donde las rectas se intersecan. Es una ***visión geométrica***.

(b) A todo sistema de ecuaciones lineales se le puede asociar una ***formalización matricial***.

Definimos una matriz A como *matriz del sistema*, de tamaño mxn donde m es el número de ecuaciones y n el número de incógnitas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$; una *matriz X de incógnitas* –que es un vector columna- de $n \times 1$ y una *matriz B de términos independientes* –también vector columna- de $m \times 1$.

Si el sistema S fuera

$$S:\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = b_m \end{cases}$$

las matrices serían $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

de tal forma que S puede escribirse como $A.X = B$ que es la *forma matricial* de un sistema de ecuaciones.

También suele definirse otra matriz M, *matriz ampliada del sistema* y es de orden $m \times (n+1)$. Su forma es $M = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ donde el separador es sólo un recurso visual para recordar que allí debe estar el signo igual[1].

En nuestro caso particular tendríamos que $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 13 \\ 23 \end{bmatrix}$ y por ende la forma matricial del sistema de ecuaciones es $A.X = B \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 23 \end{bmatrix}$

Observemos que $(5; -1)$ es solución del sistema pues al efectuar el producto (y que usaremos como matriz columna) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ obtenemos $\begin{bmatrix} 13 \\ 23 \end{bmatrix}$.

En cambio $(-3;\ 2)$ no es solución pues $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -4 \end{bmatrix}$ y como el resultado *no es* la matriz $\begin{bmatrix} 13 \\ 23 \end{bmatrix}$ entonces $(-3;\ 2)$ no es una solución del sistema S.

Sistema de ecuaciones lineales con 3 o más incógnitas. Método de resolución de Gauss y de Gauss-Jordan.

Abordaremos la resolución de sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas a través de los métodos de Gauss y Gauss-Jordan.

Ejemplo

En $\mathbb{R}^3$ una ecuación lineal en $x, y \wedge z$ la podemos interpretar como la ecuación de un **plano** (en el módulo 3 se justificará esto).

[1] El sistema se resolverá por aplicación de operaciones elementales entre filas.

Tomemos el problema de determinar si hay (o no) intersección entre los siguientes cinco planos:

Π_1: 2x + y – z = 1 Π_2: 3x – 2y – 4z = 11 Π_3: –x + 4y + 2z = 1

Π_4: –5x – y + 6z = –26, Π_5: 3y + 2z = –7

Un punto (x, y, z) pertenecerá a los cinco planos si satisface las cinco ecuaciones que ordenamos a *nuestro gusto* en una matriz ampliada M de coeficientes.

$$M = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 11 \\ -5 & -1 & 6 & -26 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{array}$$

Recordemos que entre ecuaciones y las filas de la matriz son ***lícitas*** las siguientes operaciones elementales:

a) Permutar el orden de dos ecuaciones cualesquiera.

b) A una ecuación multiplicarla por un número diferente de cero.

c) A una ecuación reemplazarla por la suma de ésta y un múltiplo de otra[2].

Unifiquemos criterios para la resolución:

a) En el paso siguiente anotaremos en la fila que vamos a modificar qué operación le hemos realizado a las anteriores. Así si en la tercera hilera apareciera $2f_1 + f_3$ debemos entender que la nueva *fila 3* (que llamaremos f_3 por abuso de notación) se obtiene de efectuar el doble de la *fila 1* adicionado a la fila 3 del paso inmediatamente precedente.

b) La intención del método es por medio de las operaciones elementales llegar a una **matriz escalonada** por filas. Esto sucede si:

i) Cualquier fila que se componga enteramente por ceros se ubica en la parte inferior.

ii) En cada renglón diferente de cero, la primera entrada no nula (llama ***entrada principal*** o ***pivote o elemento distinguido***) se localiza en una columna a la izquierda de cualquier entrada principal debajo de ella (o equivalentemente, a medida "que bajamos" por la matriz los pivotes aparecen a la derecha).

Al proceso lo llamaremos ***triangulación*** (si la matriz es cuadrada) o ***escalonamiento***.

Los siguientes esquemas muestran algunas <u>*matrices triangulares superiores o escalonadas*</u> en situaciones de resolución de sistemas de ecuaciones lineales (por eso el punteado dentro de la

[2] Si a la ecuación que es sumada se la multiplica por cero no se adiciona nada a la ecuación original pero la operación elemental sigue siendo válida y por lo tanto se mantiene su aplicación. Esto será de utilidad al trabajar con sistemas con parámetros.

matriz) y convengamos que "#" representa un número real no nulo y "•" uno cualquiera (incluyendo el 0).

Ejemplo

1. $\left[\begin{array}{cc|c} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & \# & \bullet \end{array}\right]$ puesto que:

este es el primer pivote

$$\left[\begin{array}{cc|c} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & \# & \bullet \end{array}\right]$$

este valor debe ser cero

este es el segundo pivote

2. $\left[\begin{array}{cc|c} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \# \end{array}\right]$:

este es el primer pivote

$$\left[\begin{array}{cc|c} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \# \end{array}\right]$$

segundo pivote

este valor debe ser cero

este valor es cero pero podría no serlo

3. $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & \# & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$:

este valor es cero pero podría no serlo

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & \# & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

este es el primer pivote

las filas nulas van al final

4. $\left[\begin{array}{cc|c} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$:

este es el primer pivote

$$\left[\begin{array}{cc|c} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

si no es cero es el segundo pivote pero ....

si fuera cero el elemento "ovalado" ésta posición sería el seguno pivote

las filas nulas se acumulan al final de la matriz

5. $\left[\begin{array}{cccc|c} \# & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$:

este valor es cero pero podría no serlo

primer pivote

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \# & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

segundo pivote

puede o no ser tercer pivote dependiendo si es o no distinto de cero

entonces estos valores deben anularse

ya que es nulo el elemento de arriba se tienen que anular

deben ser cero

es cero pero si el elemento superior es nulo podría ser distinto de cero.

es cero pero podría no serlo

Otras situaciones son:

6. $\begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 7. $\begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 8. $\begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & \# & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 9. $\begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \# & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \# & \bullet \end{bmatrix}$,

10. $\begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \# & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \# & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \end{bmatrix}$, 11. $\begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$:

*M*ostrar que en cada matriz se cumple que es triangular superior ($m_{ij} = 0\ para\ i > j$).

c) La intención es que m_{11} sea diferente de cero y todos los demás elementos de la primera columna que están debajo de él se anulen.

Luego nos corremos una columna hacia la derecha y una fila hacia abajo y ese elemento debe ser diferente de cero; para lograrlo podemos permutar filas.

Además, los restantes valores debajo de ese elemento ser nulos; si no pudiéramos conseguirlo nos corremos una columna más a la derecha (como aquí $\begin{bmatrix} 0 & \# & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$)

d) El objetivo del método de Gauss es llegar a la solución del sistema resolviendo de atrás hacia delante al terminar la triangulación o escalonamiento, o sea comenzar con lo que se obtiene en la última fila y seguir con las superiores.

El *método de Gauss-Jordan* prosigue triangulando hacia arriba, tratando de dejar solamente los elementos diagonales, con el fin que la respuesta sea directa, aunque el precio a pagar es una mayor cantidad de pasos en el proceso de escalonamiento.

En el *método de Gauss-Jordan* la matriz debe llevarse a la forma ***escalonada reducida por filas*** esto significa que además de ser una matriz escalonada, los pivotes o elementos distinguidos deben ser 1 (unos) y estos son los únicos distintos de cero en su columna.

El método de Gauss Jordan lo utilizaremos para la obtención de la inversa de una matriz.

<u>Sí</u> estimamos conveniente que en cada situación *quien resuelve* analice qué operaciones elementales (y trucos) se pueden usar.

Ejemplo

Resolvamos el sistema: $S: \begin{cases} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \\ \Pi_4 \\ \Pi_5 \end{cases} \equiv S': \begin{cases} \Pi_3 \\ \Pi_5 \\ \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_4 \end{cases} \rightarrow \quad S': \begin{cases} -x + 4y + 2z = 1 \\ 3y + 2z = -7 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - 2y - 4z = 11 \\ -5x - y + 6z = -26 \end{cases}$

$$M = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 & 11 \\ -5 & -1 & 6 & -26 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{array}$$

ya que el m_{11} es un –1 lo usamos de pivote y a través de él tratamos de anular los valores restantes de la primera columna. Ese –1 apareció pues al armar la matriz M a *nuestro gusto* el mismo no fue azaroso.

Tener un 1 o –1 suele ser conveniente, pero no determinante; si en alguna matriz los elementos de la columna fueran 6, –3, 3, 12 y 15 tanto el 3 como el –3 serían óptimos para desarrollar el proceso de triangulación.

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 9 & 3 & 3 \\ 0 & 10 & 2 & 14 \\ 0 & -21 & -4 & -31 \end{array}\right] \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ 2f_1 + f_3 \\ 3f_1 + f_4 \\ -5f_1 + f_5 \end{array}$$

siempre usamos $+f_i$ –la *fila i* es la que cambiamos-

Nuestra atención se dirige a la submatriz que nos queda al ir a la fila y columna siguientes:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 9 & 3 & 3 \\ 0 & 10 & 2 & 14 \\ 0 & -21 & -4 & -31 \end{array}\right]$$

y aquí vemos que tanto los coeficientes de las filas 2 y 3 son múltiplos de 3 y 2 respectivamente; por lo tanto, los hacemos más pequeños usando la operación elemental b).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \\ 0 & 21 & 4 & 31 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ f_3 \div 3 \\ f_4 \div 2 \\ -f_5 \end{array} \rightarrow$$

el 3 en m_{22} será nuestro pivote; ¿cómo hacemos para conseguir un 0 donde hay un 5?

Debemos a f_4 sumarle k veces f_2, pero con cual k:

$3.k + 5 = 0 \rightarrow k = -\dfrac{5}{3}$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -7/3 & 56/3 \\ 0 & 0 & -10 & 80 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ -f_2+f_3 \\ -5/3\, f_2+f_4 \\ -7f_2+f_5 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{8} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-7/3} & \mathbf{56/3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-10} & \mathbf{80} \end{array}\right]$$

Ahora nos focalizamos en la submatriz que se obtiene al "bajar" a una nueva fila y desplazarnos un lugar hacia la derecha.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -7 & 56 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \\ 3f_4 \\ f_5 \div 10 \end{array}$$

Hemos multiplicado por 3 la f_4 por comodidad en las cuentas.

$$\to \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \\ -7f_3+f_4 \\ -f_3+f_4 \end{array}$$

Se ha **triangulado** –o escalonado- nuestro sistema de ecuaciones llegando a una matriz triangular superior. Las últimas dos ecuaciones ya no nos son útiles pues representan una tautología:

es siempre cierto que 0.x + 0.y + 0.z = 0 para cualquier terna x, y, z de números reales.

Podemos ahora encontrar la solución del sistema yendo desde el final al principio:

$-z = 8 \to z \boxed{= -8}$

$3y + 2.(-8) = -7 \to 3y = -7 + 16 \to \boxed{y = 3}$

$-x + 4.3 + 2.(-8) = 1 \to -x = 1 - 12 + 16 \to \boxed{x = -5}$

El sistema resultó ser ***compatible determinado*** o sea tiene solución única $\{\boxed{(-5;\ 3;\ -8)}\}$.

Allí se intersecan los 5 planos.

Comentarios

a) La forma escalonada por renglones de una matriz no es única. Podríamos haber permutado al principio el -5 de la f_5 y usarlo de pivote. No serían muy lindas las cuentas, pero la triangulación sirve igual.

b) Podemos continuar desde la matriz escalonada para llegar a la solución sin resolver hacia atrás "a mano". Es la esencia del ***método de Gauss-Jordan***.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A partir del -1 en la tercera fila buscamos conseguir ceros arriba de dicho coeficiente; podemos olvidarnos de las últimas dos filas para la resolución de nuestro sistema de ecuaciones.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 17 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} 2f_3 + f_1 \\ 2f_3 + f_2 \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ f_2 \div 3 \\ -f_3 \end{array}$$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{c} -4f_2 + f_1 \\ \\ \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{c} -f_1 \\ \\ \end{array}$; de aquí se tiene $x = -5, y = 3, z = -8$

c) A veces puede ser útil presentar las incógnitas en otro orden.

Nuestra matriz M presupone un orden por columna $x; y; z$ pero en alguna ocasión puede ser que convenga permutar.

Si en $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \\ 0 & 21 & 4 & 31 \end{array}\right)$ permutamos la columna y por z y tenemos $\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{x} & \underline{z} & \underline{y} & \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 21 & 31 \end{array}\right)$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{x} & \underline{z} & \underline{y} & \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 21 & 31 \end{array}\right) f_2 \leftrightarrow f_3 \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \underline{x} & \underline{z} & \underline{y} & \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 21 & 31 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ -2f_2 + f_3 \\ -f_2 + f_4 \\ -4f_2 + f_5 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} \underline{x} & \underline{z} & \underline{y} & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 9 & 27 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ -1/3\, f_3 \\ 1/2\, f_4 \\ 1/9\, f_5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} \underline{x} & \underline{z} & \underline{y} & a \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ f_4 - f_3 \\ f_5 - f_3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|c} \underline{x} & \underline{z} & \underline{y} & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

podemos eliminar las dos últimas filas pues están repetidas y despejar y, z y x (en ese orden). Aquí el permutar columnas facilitó un poco las cuentas (*no* usamos fracciones).

Otro Ejemplo

Resolver el sistema de ecuaciones de 3 x 4 S: $\begin{cases} x+3y-5z+w=4 \\ 2x+5y-2z+4w=6 \\ -x-2y-3z-3w=-2 \end{cases}$

Armamos la matriz M de los coeficientes, ampliada con los términos independientes.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 & -3 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ f_2 - 2f_1 \rightarrow f_2 \\ f_3 + f_1 \rightarrow f_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ f_3 + f_2 \rightarrow f_3 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Reescribimos el sistema $\begin{cases} x+3y-5z+w=4 \\ \quad -y+8z+2w=-2 \end{cases}$ y despejamos de abajo hacia arriba.

$y=8z+2w+2$ Reemplazamos en la primera ecuación y despejamos x en función de z y w

$x+3(8z+2w+2)-5z+w=4 \quad \rightarrow \quad x \; + \; 2\;4 \; w\; 6+ \; -6z \; 5 \quad \rightarrow \quad x+19z+7w+6=4$
$\rightarrow \quad x=-19z-7w-2$

Resultando $\begin{cases} x=-19z-7w-2 \\ y=8z+2w+2 \end{cases}$

$S=\{(x;y;z;w)=(-19z-7w-2;8z+2w+2;z;w) \wedge z \in R \wedge w \in R\}$

Con "z " y "w" cualquier par de números reales. El sistema es ***compatible indeterminado***.

Las variables "x" e "y" que corresponden a las posiciones de los pivotes suele llamárselas ***variables principales*** y las variables "z " y "w" son las ***variables libres o independientes.***
De acuerdo a los infinitos valores que pueden tomar las variables libres se van obteniendo el correspondiente valor para cada variable principal.

¿Qué hubiera ocurrido si al escalonar se llegara a la matriz $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 8 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$?

La misma está triangulada (escalonada) y la cuarta ecuación se interpreta así:

0.x+ 0.y +0.z + 0.w = 3   0 = 3

La misma no tiene solución. El sistema es ***incompatible***.

Rango fila de una matriz

Dada una matriz de $m \times n$ se denomina *rango fila* de ella a la cantidad de filas no nulas luego de haber triangulado (escalonado) la matriz.

Pensamos a la matriz formada por *m vectores* de n componentes y los triangulamos: ***sólo los vectores no nulos cuentan*** para el rango fila de la matriz.

Ejemplo

Busquemos el rango de las matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & -7 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

(I) $rgf\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & -7 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} = rgf\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ -2f_1+f_2 \\ 3f_1+f_3 \\ -5f_1+f_4 \end{matrix} = rgf\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ f_2 \div 3 \\ \\ f_4 \div 5 \end{matrix} =$

$rgf\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ -f_2+f_3 \\ -f_2+f_4 \end{matrix} = 2$

(II) $rgf\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} = 4$ [ya está triangulada]

Comentarios:

Si consideramos a las columnas como vectores de ***m* componentes** –de arriba hacia abajo, por ejemplo, la columna 1 del ejemplo I es $(1, 2, -3, 5)$– podemos definir el *rango columna* de una matriz como la cantidad de vectores columnas no nulos que sobreviven al triangularlos.

Más adelante se verá que el rango fila y el rango columna son ***idénticos*** y al dar un mismo número se habla directamente del ***rango de una matriz***.

La noción de rango fila está íntimamente ligada al ***concepto de independencia y dependencia lineal*** volveremos con este tema, más adelante

Teorema de Rouche-Fröbenius

Vamos a vincular el rango fila de una matriz con la posibilidad de existencia de solución a un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

Un sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ puede escribirse matricialmente como A.X = B

donde A es la **matriz de coeficientes** del sistema ($m \times n$), X la **matriz columna de incógnitas** ($n \times 1$) y B la **matriz columna de términos independientes** ($m \times 1$).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix};$$

Asimismo, tenemos a M, **matriz ampliada** del sistema de dimensión $m \times (n+1)$:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{pmatrix}$$

Analicemos algunos casos particulares para ver si ciertos resultados pueden ser generalizados ("#" representa un número real no nulo y "•" uno cualquiera o sea que puede anularse).

Ejemplo

a) ¿Qué sucede si tuviéramos un sistema con $n = 2$ incógnitas de este tipo $\begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & \# & \bullet \end{bmatrix}$?

De la segunda obtendríamos x_2 y luego sustituyendo en la primera saldría x_1; el sistema es compatible determinado (SCD).

Veamos los rangos de las matrices $A = \begin{bmatrix} \# & \bullet \\ 0 & \# \end{bmatrix}$ y $M = \begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & \# & \bullet \end{bmatrix}$.

Al estar ambas trianguladas tenemos $rgf(A) = 2$ y $rgf(M) = 2$; $n = 2$.

b) $A = \begin{bmatrix} \# & \bullet \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $M = \begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \# \end{bmatrix}$.

El sistema es incompatible pues la segunda ecuación significa $0.x_1 + 0.x_2 = \#$ (SI).

Aquí $rgf(A) = 1, rgf(M) = 2, n = 2$.

c) $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \# & \bullet \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; el sistema es compatible indeterminado (SCI); x_1 queda en función de x_2; $rgf(A) = 1, rgf(M) = 1, n = 2$.

Cuestión: ¿Podríamos asegurar que x_2 se puede poner en función de x_1?

d) $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 0 & \# & \bullet \\ 0 & 0 & \# \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; SI; nos imaginamos a A y tenemos: $rgf(A) = 1, rgf(M) = 2, n = 2$.

e) $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \# & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \# & \bullet \end{bmatrix}$; SCD; $rgf(A) = 4, rgf(M) = 4, n = 4$.

f) $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \# & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \# & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \# \end{bmatrix}$; SI; $rgf(A) = 3, rgf(M) = 4, n = 4$.

g) $\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \# & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \# & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; SCI; $rgf(A) = 2, rgf(M) = 2, n = 4$.

El teorema de Rouche-Fröbenius da un marco teórico a lo ejemplificado.

Tabulemos lo obtenido –tener en cuenta que $rgf(A) \leq rgf(M)$ pues M se obtiene agregando una columna adicional a A-.

Ejemplo	**Rango A**	**Rango M**	**n**	**Tipo de solución**
(a)	2	2	2	SCD
(b)	1	2	2	SI
(c)	1	1	2	SCI
(d)	1	2	2	SI
(e)	4	4	4	SCD
(f)	3	4	4	SI
(g)	2	2	4	SCI

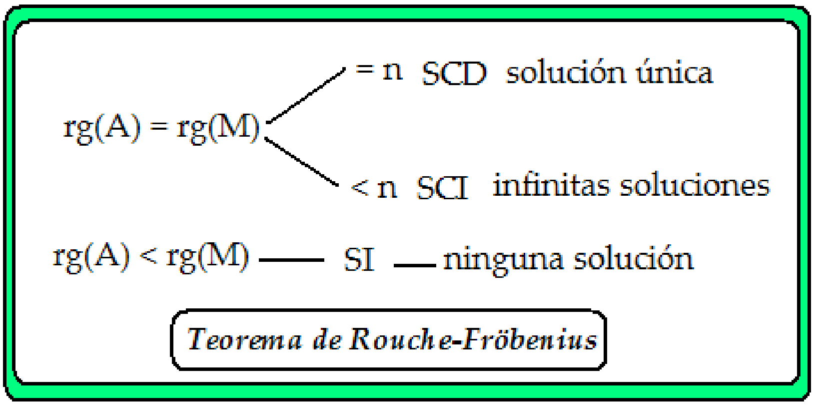
Si $\boldsymbol{rg(A) = rg(M)}$ hay solución:

a) **única si $\boldsymbol{rg(A) = rg(M) = n}$**

b) **infinitas si $\boldsymbol{rg(A)} = \boldsymbol{rg(M)} < n$** y la diferencia entre n y el $rg(A)$ indica. La cantidad de variables libres que deben usarse para expresar la solución.

Recordar que los rangos filas y columnas coinciden; el número de columnas está dado por el número de incógnitas y por eso $\boldsymbol{rgA} \leq \boldsymbol{n}$ en cualquier caso.

Si $\boldsymbol{rg(A)} < rg(M)$ no tenemos solución.



Resolver los ejercicios 10 al 13 del archivo llamado "MÓDULO 1, TRABAJO PRÁCTICO Y APLICACIONES"

Videos de la cátedra que pueden ayudarte a comprender los temas:

3.1 Método de Gauss y Gauss Jordan

https://www.youtube.com/watch?v=nnyFXuxcrGM

3.2 Método de Gauss y Gauss Jordan

https://www.youtube.com/watch?v=DDJEycKwGyc

3.3 Teorema de Rouche Fröbenius

https://www.youtube.com/watch?v=-HY_Ugv30v0

Clasificacion de sistemas. Teorema de Rouche Fröbenius

https://www.youtube.com/watch?v=1iyv5f14trM