RESOLUCIÓN DE EJERCICIO nro. 6 de MÓDULO 5
De EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA PRIMERA CLASE

Resuelto por la profesora Mariela Glassman

6) Sea la T. L. $f: R^{2x2} \to R$ definida por $f\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right) = x + z$. Encontrar una base del núcleo de f.

Resolución:

Por definición, el núcleo está formado por las matrices $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ que verifican que $f\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right) = 0$. Luego $x + y = 0$, por lo tanto $x = -y$. Así, un elemento genérico del núcleo será de la forma

$\begin{pmatrix} -y & y \\ z & w \end{pmatrix} = y.\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + w.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Luego, $Nu\,(f) = \langle\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\rangle$. Por método corto, se verifica que las 3 matrices forman un conjunto l.i.
Luego $B_{Nu} = \left\{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$. Y dim (Nu (f)) = 3