T P 08 Ej. 18-a

Verificar el teorema de Green para el campo y el camino dado.

$F(x,y) = (3x + 2y, x - y)$

C está definida por $\bar{r}: [0, 2\pi] \rightarrow \boldsymbol{R}^2, con\ \bar{r}(t) = (\cos t\,, sen\ t)$

En este ejercicio se pide verificar el teorema de Green, por lo que podemos empezar por repasar su enunciado:

$$\oint_C P\,dx + Q dy = \iint_R \left[Q_x - P_y\right] dx\,dy$$

Donde R es la región encerrada por la curva c y la curva es recorrida en sentido positivo.

Es decir que calcular la integral de línea del campo vectorial $F(x,y) = (P,Q)$ a lo largo de la curva c, da el mismo resultado que calcular la integral doble sobre la región R de $Q_x - P_y$.

Por lo tanto, para verificar el teorema lo que debemos hacer es calcular ambas integrales, la doble y la de línea, y comprobar que ambos resultados son iguales.

Comenzamos con la integral de línea. Una integral de línea sobre un campo vectorial se calcula del siguiente modo:

$$\int_a^b F(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)\,dt$$

Donde a y b son los límites de variación de la variable t.

Construimos entonces cada una de las expresiones que precisamos para la integral.

$$\bar{r}(t) = (\cos t\,, sen\ t)$$

$$\bar{r}'(t) = (-\text{sen}\, t\,, cos\ t)$$

$$F(\bar{r}(t)) = (3\cos t + 2\ sen\ t, \cos t - sen\ t)$$

$$a = 0$$

$$b = 2\pi$$

Por lo tanto:

$$\int_a^b F(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (3\cos t + 2\,sen\,t, \cos t - sen\,t) \cdot (-\text{sen}\,t\,, cos\,t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -3\cos t\,sen\,t - 2\,sen^2 t + \cos^2 t - sen\,t\,cos\,t\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -4\cos t\,sen\,t - 2\,sen^2 t + \cos^2 t\;\,dt$$

$$= -4\int_0^{2\pi} \cos t\,sen\,t\,dt - 2\int_0^{2\pi} sen^2 t\,dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t\;\,dt$$

Para resolver la primera integral aplicamos la siguiente sustitución:

$$\int sen\,t\;\cos t\;\,dt$$

$$u = sen\,t$$

$$du = \cos t\;\,dt$$

Por lo que nos queda

$$\int u\,du = \frac{u^2}{2} = \frac{sen^2 t}{2}$$

Para la segunda integral consideramos la igualdad trigonométrica

$$sen^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$$

Por lo que la integral queda:

$$\int \frac{1 - \cos(2t)}{2}\,dt = \int \frac{1}{2} - \frac{cos(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}t - \frac{cos(2t)}{4}$$

Para la segunda integral consideramos la igualdad trigonométrica

$$cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$$

Por lo que la integral queda:

$$\int \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = \int \frac{1}{2} + \frac{cos(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{cos(2t)}{4}$$

Reemplazamos los resultados que obtuvimos en los cálculos auxiliares en las integrales definidas:

$$= -4\int_0^{2\pi} \cos t\, sen\ t\ dt\ -2\int_0^{2\pi} sen^2 t\ dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t\ \ dt =$$

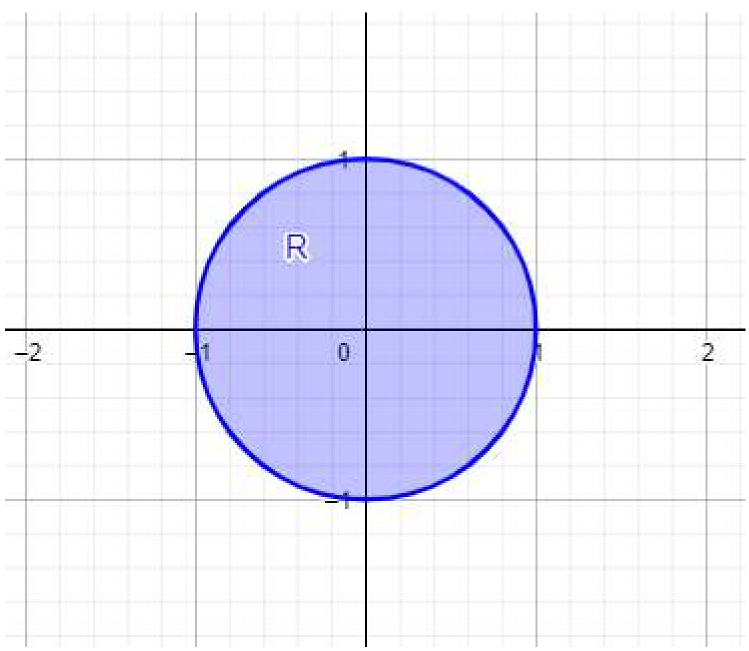
$$= -4\left(\frac{sen^2 t}{2}\Big|_0^{2\pi}\right) -2\left(\frac{1}{2}t - \frac{cos(2t)}{4}\Big|_0^{2\pi}\right) + \left(\frac{1}{2}t + \frac{cos(2t)}{4}\Big|_0^{2\pi}\right) =$$

Tanto $sen^2 t$, como $cos(2t)$ toman el mismo valor al ser evaluadas en 0 y en 2π, por lo tanto todos esos términos se anulan, quedándonos sólo los términos lineales.

$$= -2\left(\frac{1}{2}(2\pi - 0)\right) + \left(\frac{1}{2}(2\pi - 0)\right) = -2\pi + \pi = \boldsymbol{-\pi}$$

Con eso completamos el cálculo de la integral de línea. Como la parametrización dada recorre la curva en sentido positivo, como lo pide el teorema, el resultado debería coincidir con la integral doble sobre el recinto encerrado por la curva.

Como ya se vio en ejercicios anteriores, $\bar{r}: [0, 2\pi] \to \boldsymbol{R}^2, con\ \bar{r}(t) = (\cos t\,, sen\ t)$ describe una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1, recorrida en sentido positivo.



El integrando que vamos a utilizar es $Q_x - P_y$, por lo que debemos calcularlos.

$$P(x,y) = 3x + 2y$$

$$Q(x,y) = x - y$$

Por lo que:

$$P_y(x,y) = 2$$

$$Q_x(x,y) = 1$$

Y:

$$Q_x - P_y = 1 - 2 = -1$$

Entonces la integral que debemos calcular es:

$$\iint_R -1\, dxdy \quad R = \{(x,y) \in R^2 / \, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Como la región sobre la cual debemos integrar es una circunferencia, es conveniente hacer un cambio a coordenadas polares.

Sabemos que:

$$x = r\cos(\theta)$$

$$y = r\, sen(\theta)$$

Por lo que el jacobiano es:

$$|J| = r$$

Y como queremos recorrer toda la circunferencia, las nuevas variables van a variar de la siguiente manera:

$$0 \leq r \leq 1$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Reescribimos la integral utilizando las nuevas variables:

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{1} -1r\,dr\right)d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi}\left(-\frac{r^2}{2}\bigg|_0^1\right)d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\right)d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\theta\bigg|_0^{2\pi} = -\frac{1}{2}(2\pi - 0) = -\boldsymbol{\pi}$$

Finalmente notamos que ambas integrales nos dan $-\boldsymbol{\pi}$, verificando el teorema de Green.