DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

Universidad Nacional de La Matanza

El determinante es una función que al conjunto de matrices cuadradas le asigna un escalar, un número.

$$| \ | = \det(\ ) : \mathbb{R}^{nxn} \rightarrow \mathbb{R}$$

Si A es una matriz de orden 2, es decir 2x2, el determinante de la matriz A se denotará como det(A) o bien |A| y se calcula haciendo:

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Para matrices de orden mayor definiremos previamente algunos conceptos

- El *menor complementario* de un elemento de A (a_{ij}) se define como el determinante de la matriz que se obtiene al suprimir la fila *i* y la columna *j* en la que se encuentra dicho elemento a_{ij} .

- Se representa: M_{ij}

Ejemplo del menor complementario

En la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, los menores complementarios de cada uno de los elementos de la primera fila son:

Menor complementario de -2: $M_{11} = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ =14-0=14.

Menor complementario de 4: $M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ =12+9=21.

Menor complementario de 5: $M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$ =0-21=-21.

- Se llama adjunto del elemento aij y se simboliza Aij al menor complementario anteponiendo:

+ si i+j es par.

- si i+j es impar.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \, . \, M_{ij}$$

Por ejemplo:

El adjunto del elemento $a_{21} = 2$ se obtiene multiplicando $(-1)^{2+1}$ a su menor complementario , el determinante (2x2)-(6x1)= - 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \boxed{2} & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$$

El adjunto de a_{21} (A_{21}) es A_{21}=-(-2)=2

FORMAS PARA CALCULAR EL DETERMINANTE

- REGLA DE LAPLACE O DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA FILA O COLUMNA

El determinante de una matriz es igual a la suma del producto de los elementos de una línea cualquiera (fila o columna) elegida, por sus correspondientes adjuntos.

- Para obtener el determinante por fila i :

$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots a_{in} \cdot A_{in}$

- Para obtenerlo por columna j :

$|A| = a_{j1} \cdot A_{j1} + a_{j2} \cdot A_{j2} + \ldots a_{jn} \cdot A_{jn}$

Ejemplo de un determinante de una matriz de orden 3

Para la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,aplicando la definición, si elegimos la fila tercera queda:

$$det(A) = 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \left(- \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} \right) + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-12 - 35) + 0 \cdot (-(6 - 30)) + 2 \cdot (-14 - 24) = -141 + 0 - 76 = -217$$

Si hubiésemos elegido otra fila o columna, por ejemplo la columna 2, quedaría:

$$det(A) = 4 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) + 7 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \left(- \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= 4 \cdot (-(12 + 9)) + 7 \cdot (-4 - 15) + 0 \cdot (-(6 - 30)) = -84 - 133 + 0 = -217$$

- Cualquier fila o columna que elijamos para calcular el determinante, el cálculo arroja el mismo escalar, el mismo número

$$\text{Det}\,(A) = -217$$

PROPIEDADES DEL DETERMINANTE

- **Si se cambian entre si, dos filas o columnas, el determinante es el opuesto.**

$$\text{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\text{Det}\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

- **Al multiplicar una fila o columna por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número**

$$\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k.\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

PROPIEDADES DEL DETERMINANTE

- **Si una fila o columna esta formada por una suma, el determinante de la matriz es igual a la suma de los determinantes de la matriz principal descompuesta en 2 (permaneciendo igual los elementos de la filas/columnas restantes)**

$$\mathrm{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+j & h+k & i+l \end{vmatrix} = \mathrm{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \mathrm{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ j & k & l \end{vmatrix}$$

PROPIEDADES DEL DETERMINANTE

- **El determinante de una matriz es cero si:**
- **Todos los elementos de una hilera (fila o columna) son nulos**

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$$

- **Posee dos filas o columnas iguales**

$$\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ d & d & f \\ g & g & i \end{vmatrix} = 0$$

PROPIEDADES DEL DETERMINANTE

- **El determinante de una matriz es cero si:**

- **Los elementos de una fila o columna son proporcionales a otra**

$$\mathrm{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ka & kb & kc \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad}}{=} k \cdot \mathrm{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad}}{=} 0$$

- **Los elementos de una fila o columna son una combinación de otras**

$$\mathrm{Det}\begin{vmatrix} a & b & ka+mb \\ d & e & kd+me \\ g & h & kg+mh \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad}}{=} \mathrm{Det}\begin{vmatrix} a & b & ka \\ d & e & kd \\ g & h & kg \end{vmatrix} + \mathrm{Det}\begin{vmatrix} a & b & mb \\ d & e & me \\ g & h & mh \end{vmatrix} =$$

$$= k \cdot \mathrm{Det}\begin{vmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ g & h & g \end{vmatrix} + m \cdot \mathrm{Det}\begin{vmatrix} a & b & b \\ d & e & e \\ g & h & h \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad}}{=} 0 + 0 = 0$$

PROPIEDADES DEL DETERMINANTE

- **Si a los elementos de una fila o columna se le suman los elementos de otra (multiplicados por un numero real o no) el determinante no varia**

$$\mathrm{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+ka & h+kb & i+kc \end{vmatrix} = \mathrm{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

PROPIEDADES DEL DETERMINANTE

- **El determinante de una matriz y su traspuesta son iguales**

$$\det(A) = \det\left(A^t\right)$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ p & q & r & s \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & p & x \\ b & 2 & q & y \\ c & 3 & r & z \\ d & 4 & s & t \end{vmatrix}$$

PROPIEDADES DEL DETERMINANTE

- **El determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes**

$$\det(A.B) = \det(A).\det(B)$$

$$|A.B| = |A||B|$$

- **El determinante del producto de un escalar por una matriz es igual al producto del escalar elevado al orden de la matriz por el determinante de la matriz**

$$A \in \mathbb{R}^{nxn} \wedge k \in \mathbb{R} \rightarrow \det(k.A) = k^n \det(A)$$

$$|k.A| = k^n |A|$$

PROPIEDADES DEL DETERMINANTE

- **El determinante de la inversa de una matriz es igual al inverso multiplicativo o recíproco del determinante de la matriz**

$$\det(A^{-1}) = \left[\det\left(A\right)\right]^{-1} = \frac{1}{\det\left(A\right)}$$

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$$

Nota que el primer exponente -1 refiere a la inversa de una matriz y el segundo -1 al inverso de un número, el determinante de A

PROPIEDADES DEL DETERMINANTE

- **Cuando se trata de una matriz triangular (inferior o superior) existe una manera más sencilla de calcular su determinante. Al ser nulos todos los elementos a un mismo lado de la diagonal principal, se puede calcular su determinante como el producto de los componentes de dicha diagonal.**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

El determinante de la matriz A se calcula como:
det (A)= a_{11} x a_{22} x a_{33} x a_{44}

PROPIEDADES DEL DETERMINANTE

- **El determinante de la matriz identidad de cualquier orden es 1**

$$\det(I_n) = 1$$

Usos y aplicaciones de determinantes

*Permiten calcular el rango de una matriz

*Permite encontrar si tres puntos son colineales o no armando y resolviendo una tabla de matriz

*Se puede calcular áreas y volúmenes utilizando una interpretación geométrica de un determinante

*Se utilizan para la resolución de sistemas de ecuaciones

*Se pueden utilizar paras codificar o decodificar mensajes

Universidad Nacional
de La Matanza

GRACIAS