T P 7 Ej 26 d

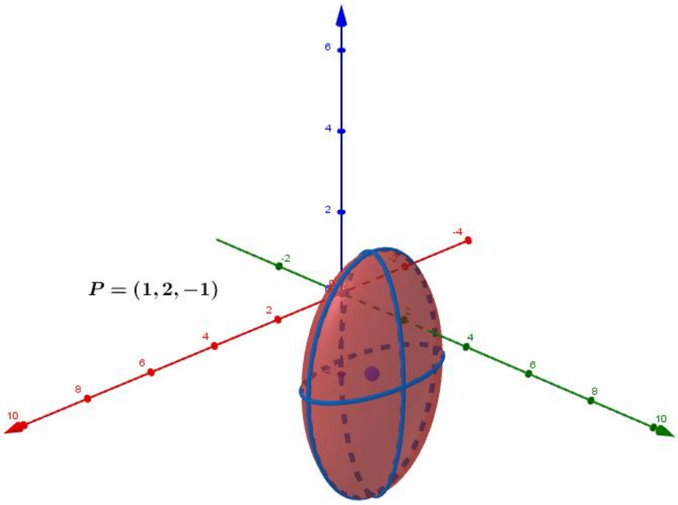
Si V es una región del espacio, su volumen se calcula con la integral

$$\iiint_V dxdydz$$

Calcular el volumen del solido limitado por la superficie:

$$\frac{(x-1)^2}{4} + (y-2)^2 + \frac{(z+1)^2}{9} = 1$$

El sólido sería un elipsoide.



Queremos evaluar la integral triple limitada por la elipse genérica

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$

Teniendo en cuenta las coordenadas polares para regiones elípticas, podemos aplicar el cambio de variable como:

$$\begin{cases} x = a \cdot \rho \cdot \cos(\theta) + h \\ y = b \cdot \rho \cdot sen(\theta) + k \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{array}{c} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}$$

Cuyo jacobiano es:

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)} = a \cdot b \cdot \rho$$

Por lo tanto, el cambio de variables a la ecuación original del Elipsoide:

$$\begin{cases} x = 2 \cdot \rho \cdot \cos(\theta) + 1 \\ y = \rho \cdot sen(\theta) + 2 \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{array}{c} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}$$

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)} = 2\rho$$

Para hallar la variación de z reemplazamos el cambio de variable en la ecuación original del Elipsoide y despejamos esta variable.

$$\frac{(2\cdot\rho\cdot\cos(\theta)+1-1)^2}{4}+\frac{(\rho\cdot sen(\theta)+2-2)^2}{1}+\frac{(z+1)^2}{9}=1$$

$$\frac{(2\cdot\rho\cdot\cos(\theta))^2}{4}+\frac{\left(\rho\cdot sen(\theta)\right)^2}{1}+\frac{(z+1)^2}{9}=1$$

$$\frac{4\cdot\rho^2\cdot\cos^2(\theta)}{4}+\rho^2\cdot sen^2(\theta)+\frac{(z+1)^2}{9}=1$$

$$\rho^2\cdot\left(\underbrace{\cos^2(\theta)+sen^2(\theta)}_{1}\right)+\frac{(z+1)^2}{9}=1$$

$$\rho^2\cdot\left(\underbrace{\cos^2(\theta)+sen^2(\theta)}_{1}\right)+\frac{(z+1)^2}{9}=1$$

$$\rho^2+\frac{(z+1)^2}{9}=1$$

De donde obtenemos el valor entre los que varia z.

$$-1-3\cdot\sqrt{-\rho^2+1}\leq z\leq\ -1+3\cdot\sqrt{-\rho^2+1}$$

Por los tanto, la integral queda definida como

$$\iiint\limits_V dxdydz=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-1-3\cdot\sqrt{-\rho^2+1}}^{-1+3\cdot\sqrt{-\rho^2+1}} 2\rho\ dzd\rho d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_{-1-3\cdot\sqrt{-\rho^2+1}}^{-1+3\cdot\sqrt{-\rho^2+1}} 2\rho\ \ dz\right)d\rho\right)d\theta$$

Resolvemos la integral respecto de z

$$\int_{-1-3\cdot\sqrt{-\rho^2+1}}^{-1+3\cdot\sqrt{-\rho^2+1}} 2\rho\ \ dz=2\rho z\Big|_{-1-3\cdot\sqrt{-\rho^2+1}}^{-1+3\cdot\sqrt{-\rho^2+1}}=2\rho\left(-1+3\sqrt{-\rho^2+1}-\left(-1-3\sqrt{-\rho^2+1}\right)\right)=$$

$$=12\rho\sqrt{-\rho^2+1}$$

Reemplazar en la integral original

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(12\rho\sqrt{-\rho^2+1}\right)d\rho\right)d\theta$$

Resolvemos la integral respecto de ρ

$$\int_{0}^{1} \left(12\rho\sqrt{-\rho^2 + 1}\right) d\rho$$

Resolvemos esta integral aplicando el método de sustitución, tomando $t = -\rho^2 + 1$

$$\int_{0}^{1} \left(12\rho\sqrt{-\rho^2 + 1}\right) d\rho = -4 \cdot \sqrt{(-\rho^2 + 1)^2}\Big|_0^1 = 4$$

Reemplazando en la integral original, finalmente:

$$\int_{0}^{2\pi} 4\, d\theta = 4\theta|_0^{2\pi} = 8\pi$$