Resolución TP6:

Ejercicio de parcial

Hallar los puntos críticos para $f(x,y) = 2xy + x^2y - 2xy^2$. Además determinar si son máximos, mínimos o ensilladura

Para empezar:

- El dominio de la función es todo $\mathbb{R}^2$ por lo que tenemos restricción alguna para los puntos que hallaremos

Primeras Derivadas:

$$f_x = 2y + 2xy - 2y^2$$
$$f_y = 2x + x^2 - 4xy$$

Segundas Derivadas:

$$f_{xx} = 2y$$
$$f_{xy} = 2 + 2x - 4y$$
$$f_{yx} = 2 + 2x - 4y$$
$$f_{yy} = -4\mathrm{x}$$

Matriz Hessiana:

$$H\big(f(x,y)\big) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{y} & 2 + 2x - 4y \\ 2 + 2x - 4y & -4\mathrm{x} \end{pmatrix}$$

Buscando Puntos Críticos:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Longrightarrow f_x(x,y) = 0 \ \wedge f_y(x,y) = 0$$

Entonces aplicado a este caso:

$$2y + 2xy - 2y^2 = 0 \ \wedge 2x + x^2 - 4xy = 0$$

$$y(2 + 2x - 2y) = 0 \ \wedge x(2 + x - 4y) = 0$$

$$(y = 0 \vee 2 + 2x - 2y = 0) \wedge (x = 0 \ \vee 2 + x - 4y = 0)$$

Entonces:

$$(y = 0 \wedge x = 0)$$
$$\vee$$
$$(y = 0 \ \wedge 2 + x - 4y = 0)$$
$$\vee$$
$$(2 + 2x - 2y = 0 \wedge \ x = 0)$$
$$\vee$$
$$(2 + 2x - 2y = 0 \wedge 2 + x - 4y = 0)$$

Obtenemos los siguientes Pc:

$(y = 0 \wedge x = 0) \Longrightarrow Pc_1 = (0,0)$

$(y = 0 \wedge 2 + x - 4y = 0) \Longrightarrow 2 + x = 0 \Longrightarrow x = -2 \Longrightarrow Pc_2 = (-2,0)$

$(2 + 2x - 2y = 0 \wedge \ x = 0) \Longrightarrow 2 - 2y = 0 \Longrightarrow y = 1 \Longrightarrow Pc_3 = (0,1)$

$(2 + 2x - 2y = 0 \wedge 2 + x - 4y = 0) \Longrightarrow y = 1 + x \ \wedge y = \dfrac{2 + x}{4} \Longrightarrow$
$4 + 4x = 2 + x \Longrightarrow 3x = -2 \Longrightarrow x = -\frac{2}{3} \Longrightarrow y = \frac{1}{3} \Longrightarrow Pc_4 = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$

Clasificando:

$$H(Pc_1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$de\,t\big(H(Pc_1\,)\big) = -\,4$$

Dado el criterio de clasificación $de\,t\big(H(Pc_1\,)\big) < 0$ el punto es ensilladura

$$H(Pc_2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$de\,t\big(H(Pc_2\,)\big) = -\,4$$

Dado el criterio de clasificación $de\,t\big(H(Pc_2\,)\big) < 0$ el punto es ensilladura

$$H(Pc_3) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$de\,t\big(H(Pc_3\,)\big) = -\,4$$

Dado el criterio de clasificación $de\,t\big(H(Pc_3\,)\big) < 0$ el punto es ensilladura

$$H(Pc_4) = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/2 \\ -2/3 & 8/3 \end{pmatrix}$$

$$de\,t\big(H(Pc_4\,)\big) = 4/3$$

Dado el criterio de clasificación $de\,t\big(H(Pc_4\,)\big) > 0$ y $f_{xx}(Pc_4) > 0$ el punto es mínimo local