T P 04 Ej. 2-a

Derivadas parciales

Para resolver este ejercicio, debemos considerar que una derivada parcial de una función de varias variables, es la derivada de cada una de esas variables manteniendo a las otras como constantes.

Esto simplifica el problema a la resolución (al igual que el cálculo de derivada en una variable) de un límite simple de la forma:

$$\dot{f}_x(x_0\ ,\ y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0\ , y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h\ , y_o) - f(x_0\ , y_0)}{h}$$

$$\dot{f}_y(x_0\ , y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0\ , y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0\ \ , y_0+h) - f(x_0\ , y_0)}{h}$$

En el caso de funciones de 2 variables, que son las que nos competen, la gráfica de la misma representa una superficie en R^3. El cálculo de la derivada parcial con respecto al eje x en un punto (x_0, y_0) representa (sí existe) la pendiente de la recta tangente a la curva que resulta de la intersección de la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ con un plano paralelo al plano ZX que pasa por y_0, es decir un plano de ecuación $\pi_1: y = y_0$.

Análogamente, la derivada parcial con respecto a y que pasa por (x_0, y_0) representa (sí existe) la pendiente de la recta tangente a la curva que resulta de la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ en el punto de R^3 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)$ con un plano paralelo al plano ZX que pasa por x_0,es decir el plano de ecuación $\pi_2: x = x_0$

2) Utilizando la definición, calcular (sí existen) las derivadas parciales de las siguientes funciones escalares en los puntos indicados.

Ejercicio

Utilizando la definición, calcular (si existen) las derivadas parciales de la siguiente función en el punto indicado:

$$\boldsymbol{f(x, y) = \sqrt[3]{x.y} \qquad en\ (x_0\ , y_0) = (0\ , 0)}$$

$$Dom\ f(x, y) = R^2$$

Por otra parte, sabemos que:

$$\dot{f}_x(x_0\ ,\ y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0\ , y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h\ , y_o)-f(x_0\ ,y_0)}{h}$$

$$\dot{f}_y(x_0\ , y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0\ , y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0\ \ ,y_0+h)-f(x_0\ ,y_0)}{h}$$

Entonces:

$$\dot{f}_x(0\ , 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0\ , 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h\ \ ,\ \ 0)-f(0\ ,0)}{h}$$

$$\dot{f}_x(0\ , 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0\ , 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h\ \ ,0)-f(0\ ,0)}{h}$$

$$\dot{f}_x(0\ , 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0\ , 0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h\ .0}-\ \sqrt[3]{0\ .0}}{h}$$

$$\dot{f}_x(0\ , 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0\ , 0) = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h}$$

$$\boldsymbol{\dot{f}_x(0\ , 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0\ , 0) = 0}$$

$$\dot{f}_y(0\ , 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0\ , 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0\ \ ,y_0+h)-f(x_0\ ,y_0)}{h}$$

$$\dot{f}_y(0\ , 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0\ , 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0\ \ ,0+h)-f(0\ ,0)}{h}$$

$$\dot{f}_y(0\ , 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0\ , 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\ 0\ ,h)-f(0\ ,0)}{h}$$

$$\dot{f}_y(0\ , 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0\ , 0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{0\ .h}-\ \sqrt[3]{0\ .0}}{h}$$

$$\dot{f}_y(0\ , 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0\ , 0) = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h}$$

$$\boldsymbol{\dot{f}_y(0\ , 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0\ , 0) = 0}$$

Como se puede apreciar, ambas derivadas parciales existen en (0,0) y son nulas.