Resolución TP7:

Ayudas Ejercicio 14

Usando integrales dobles calcular el volumen de las siguientes regiones.

$a)\ V\colon\{(x,y,z)\epsilon R^3/\ \ x^2+y^2+z^2\leq 4\}$

$b)\ V\colon\{(x,y,z)\epsilon R^3/\ \ x^2+y^2\leq 1\ \wedge 0\leq z\leq 2\}$

$c)\ V\colon\{(x,y,z)\epsilon R^3/\ \ x^2+y^2\leq z^2\ \ \wedge 0\leq z\leq 4\}$

$d)\ V\colon\{(x,y,z)\epsilon R^3/\ \ \ 0\leq x\wedge 0\leq y\wedge\ 0\leq z\leq 6-3x-2y\}$

$e)\ V\colon\{(x,y,z)\epsilon R^3/\ \ x^2+y^2+z^2\leq 9\ \ \wedge\ x^2+y^2\leq z\}$

Resolucion:

Si f(x,y) esta definida en una region R del plano donde f(x,y)>0, entonces el volumen debajo de dicha imagen se puede resolver como:

$$V=\iint_R f(x,y)dxdy$$

Si f(x,y) esta definida en una region R del plano donde f(x,y)<0, entonces el volumen debajo de dicha imagen se puede resolver como:

$$V=-\iint_R f(x,y)dxdy$$

Si una superficie se puede describir con 2 funciones, $techo(x,y)$ y $piso(x,y)$ esta definida en una region R del plano entonces se define:

$$f(x,y)=techo(x,y)-piso(x,y)$$

entonces su volumen se puede resolver como:

$$V=\iint_R techo(x,y)-piso(x,y)dxdy$$

Si el piso fuera una funcion negativa, queda salvada. Segun el caso R se puede describir como la interseccion entre el techo y el piso.

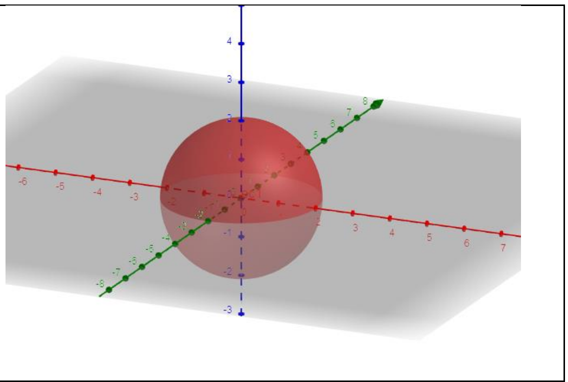
Ejercicio a)

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$$

$$z^2 \leq 4 - (x^2 + y^2)$$

$$-\sqrt{4 - (x^2 + y^2)} \leq z \leq \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$$

$$techo(x, y) = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$$
$$piso(x, y) = -\sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$$



Buscamos R:

$$z_t = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$$

$$z_p = -\sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$$

Por sumas y restas $(1)z_t + (1)z_p$:

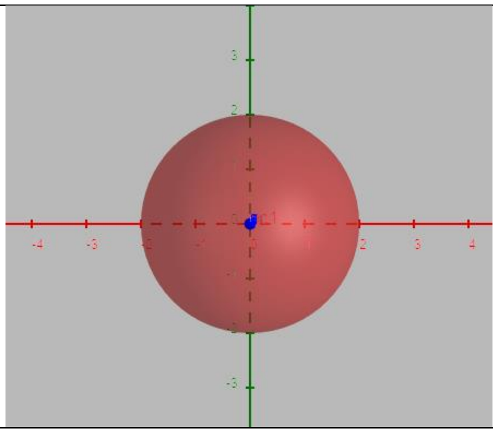
$$2z = 0 \rightarrow z = 0$$

Entonces:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \rightarrow x^2 + y^2 \leq 4$$

La proyeccion resulta ser el recinto de integracion

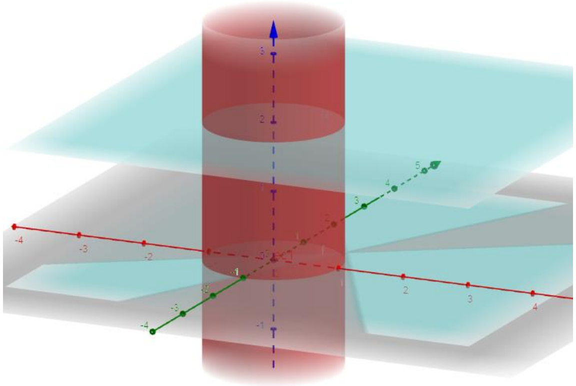
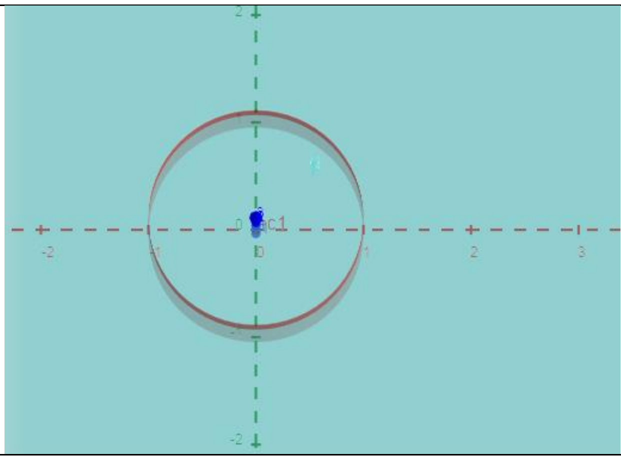
$$R = \{(x, y) \epsilon \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 4\}$$



$$V_a = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} 2\sqrt{4 - (x^2 + y^2)}\, dxdy$$

Ejercicio b)

$$0 \le z \le 2$$

$techo(x,y) = 2$ $piso(x,y) = 0$	
La proyeccion resulta ser la enunciada $R = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 \;/\; x^2 + y^2 \le 1\}$	

$$V_b = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} 2\, dxdy$$

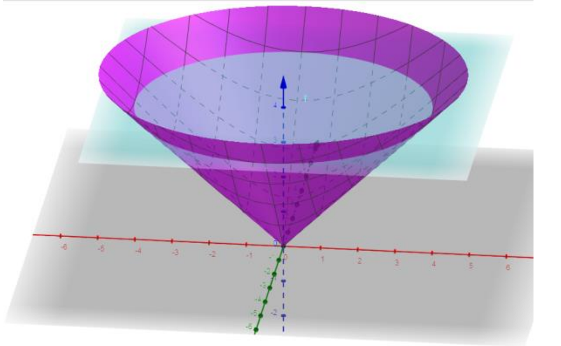
Ejercicio c)

$$x^2 + y^2 \leq z^2 \ \wedge 0 \leq z \leq 4$$

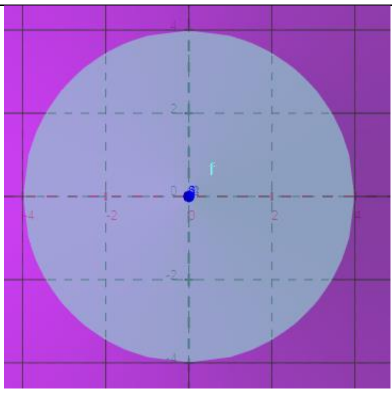
$$x^2 + y^2 \leq z^2$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq |z|$$

Si $z > 0$ $$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z$$ Junto $$0 \leq z \leq 4$$ Por transitividad $$0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 4$$	Si $z < 0$ $$\sqrt{x^2 + y^2} \leq -z$$ $$z \leq -\sqrt{x^2 + y^2}$$ No coincide en $0 \leq z \leq 4$

$$techo(x, y) = 4$$ $$piso(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$	

Buscamos R:

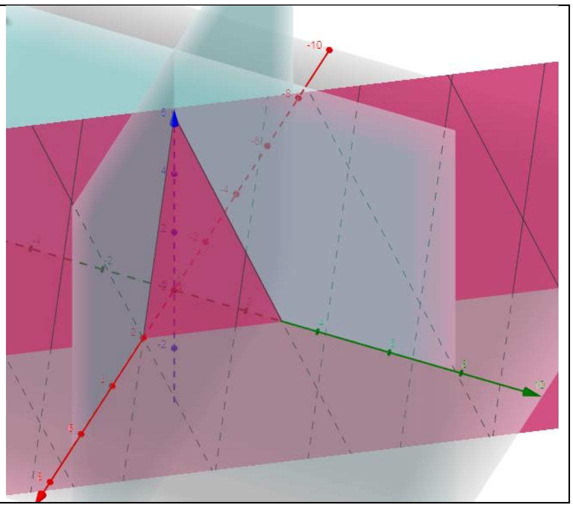
Por transitividad $$0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 4$$ $$\sqrt{x^2 + y^2} \leq 4$$ $$x^2 + y^2 \leq 16$$ La proyeccion resulta ser la enunciada $$R = \{(x, y)\epsilon\mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 16\}$$	

$$V_c = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 16} 4 - \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$$

Ejercicio d)

$$0 \leq x \wedge 0 \leq y \wedge \ 0 \leq z \leq 6 - 3x - 2y$$

$$techo(x, y) = 6 - 3x - 2y$$
$$piso(x, y) = 0$$



Buscamos R:

$$0 \leq z \leq 6 - 3x - 2y$$

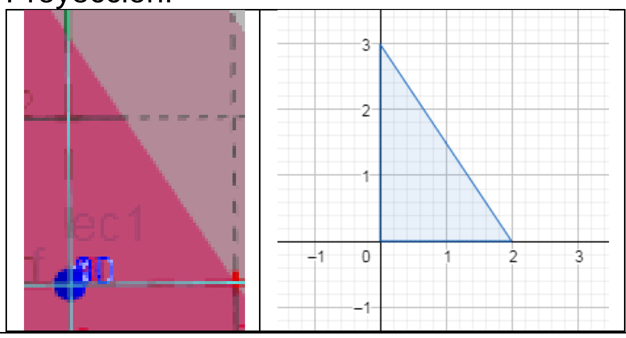
por transitibidad

$$0 \leq 6 - 3x - 2y$$

$$y \leq 3 - \frac{3}{2}x$$

$$R = \left\{ \begin{matrix} (x, y)\epsilon\mathbb{R}^2 \ / \\ 0 \leq y \leq 3 - \frac{3}{2}x \\ 0 \leq x \leq 2 \end{matrix} \right\}$$

Proyeccion:



$$V_d = \iint\limits_{\substack{0 \leq y \leq 3 - \frac{3}{2}x \\ 0 \leq x \leq 2}} 6 - 3x - 2y \ dxdy$$

Ejercicio e)

$$x^2+y^2+z^2 \leq 9 \ \wedge \ x^2+y^2 \leq z$$

$$z^2 \leq 9-(x^2+y^2)$$

$$-\sqrt{9-(x^2+y^2)} \leq z \leq \sqrt{9-(x^2+y^2)}$$

$x^2+y^2 \leq z$ implica $0 \leq z$ (que z es positivo)

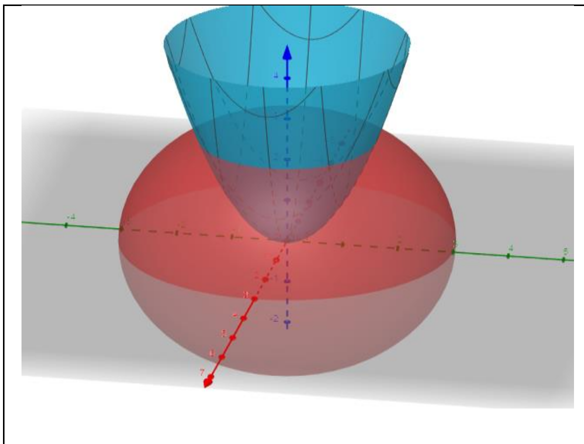
por lo que solo vale $z \leq \sqrt{9-(x^2+y^2)}$

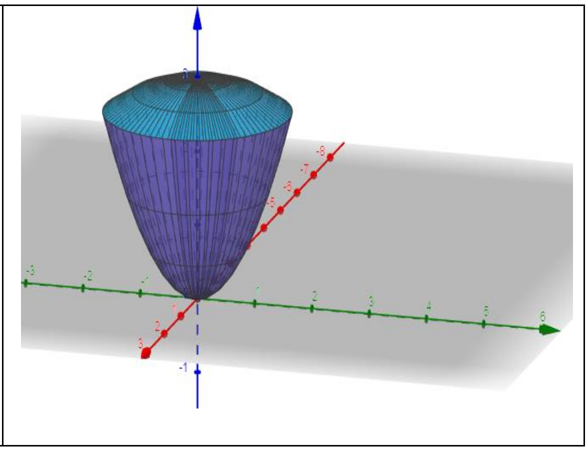
por transitividad

$$x^2+y^2 \leq z \leq \sqrt{9-(x^2+y^2)}$$

$$techo(x,y) = \sqrt{9-(x^2+y^2)}$$

$$piso(x,y) = x^2+y^2$$





Buscando R:

Tomando la interseccion:

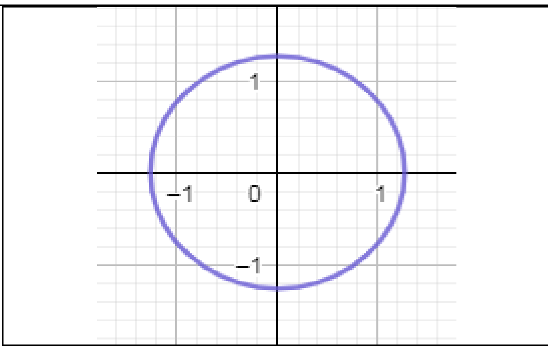
$$x^2+y^2+z^2 = 9 \ \wedge \ x^2+y^2 = z$$

$$z+z^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{\sqrt{37}-1}{2} \\ z_2 = \dfrac{-\sqrt{37}-1}{2} \end{cases}$$

$x^2+y^2 = z$ indica que z es positivo por lo que vale solo $z_1 = \frac{\sqrt{37}-1}{2}$

por transitibidad tomamos el recinto

$R: x^2+y^2 \leq \frac{\sqrt{37}-1}{2}$



$$V_e = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq \frac{\sqrt{37}-1}{2}} \sqrt{9-(x^2+y^2)} - (x^2+y^2)\,dxdy$$