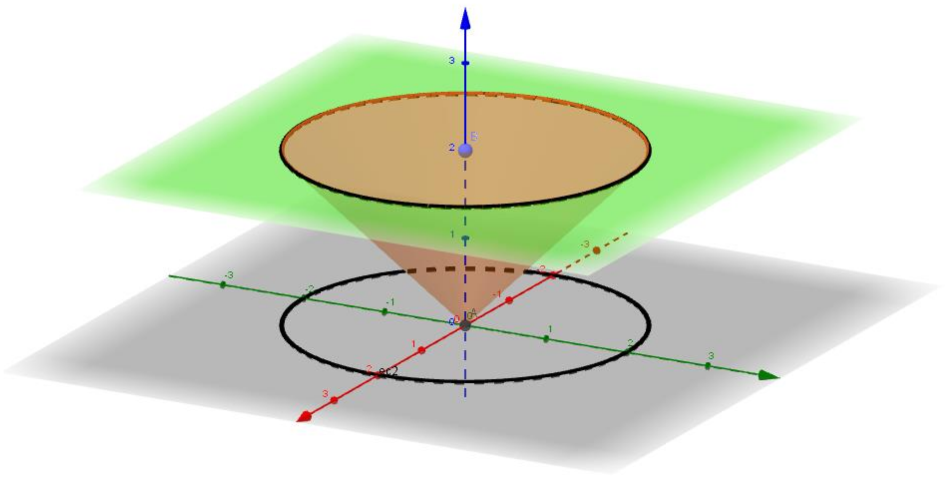
T P 7 Ej 23 b

Calcular la integral:

$$\iiint_S (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$$

$S\ \ es\ el\ solido\ limitado\ por\ el\ plano\ z = 2\ \ y\ la\ sperficie\ z^2 = x^2 + y^2$

En principio representamos el sólido al cual debemos calcularle el volumen.



En este caso observamos que podemos usar coordenadas cilíndricas.

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos(\theta) \\ y = \rho \cdot sen(\theta) \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{array}{c} 0 \le \rho < +\infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}$$

Al realizar el cambio de coordenadas, debemos multiplicar la integral por el Jacobiano, en este caso: ρ

Del dibujo determinamos los extremos de integración

$$0 < \theta < 2\pi$$

$$0 < \rho < 2$$

$$\rho \le z \le 2$$

Con lo cual, la integral triple queda definida como:

$$\int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 \left[\int_\rho^2 [(\rho \cdot sen\theta)^2 + z^2] \cdot \rho\ \ dz \right] d\rho \right] d\theta$$

Resolvemos la primera integral respecto de z

$$\int_\rho^2 [(\rho \cdot sen\theta)^2 + z^2] \cdot \rho\ \ dz = z\rho^3 sen^2(\theta) + \frac{\rho}{3} z^3 \Big|_{z=\rho}^2$$

$$2\rho^3 sen^2(\theta) + \frac{8}{3}\rho - \rho^4 \left(sen^2(\theta) + \frac{1}{3} \right)$$

Reemplazando en la integral original nos queda

$$\int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 2\rho^3 sen^2(\theta)+\frac{8}{3}\rho-\ \rho^4\left(sen^2(\theta)+\frac{1}{3}\right)d\rho\right]d\theta$$

Ahora se resuelve la integral respecto de la variable ρ

$$\int_0^2 2\rho^3 sen^2(\theta)+\frac{8}{3}\rho-\ \rho^4\left(sen^2(\theta)+\frac{1}{3}\right)d\rho=$$

$$\frac{1}{2}\rho^4 sen^2(\theta)+\frac{4}{3}\rho^2-\frac{\rho^5}{5}\left(sen^2(\theta)+\frac{1}{3}\right)\Bigg|_{\rho=0}^{2}=8sen^2(\theta)+\frac{16}{3}-\frac{32}{5}sen^2(\theta)-\frac{32}{15}$$

$$\frac{8}{5}sen^2(\theta)+\frac{16}{5}$$

Reemplazando en la integral nos queda simplemente calcularla respecto de la variable θ

$$\int_0^{2\pi}\frac{8}{5}sen^2(\theta)+\frac{16}{5}d\theta$$

Sabiendo que

$$\int senx\ dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}sen(2x)$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{8}{5}sen^2(\theta)+\frac{16}{5}d\theta=\frac{8}{5}\left(\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{4}sen(2\theta)\right)+\frac{16}{5}\Bigg|_{\theta=0}^{2\pi}$$

$$\frac{8}{5}(\pi-0)+\frac{16}{5}\cdot 2\pi=\frac{8}{5}\pi+\frac{32}{5}\pi=8\pi$$