PROPIEDAD ASOCIATIVA DEL PRODUCTO DE MATRICES

1) $\boldsymbol{A}.(\boldsymbol{B}.\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}).\boldsymbol{C}$ [Asociativa]

Para probar la propiedad debemos ver que un elemento genérico del lado izquierdo coincide con el correspondiente elemento genérico del lado derecho.

Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times p}, C \in \mathbb{R}^{p\times q}$

$[A.(B.C)]_{ij} = [(A.B).C]_{ij}$

Según se vio al definir producto de matrices, vale (tomar lápiz y papel):

$$[A.(B.C)]_{ij} = A_i.(B.C)^j = A_i.\begin{bmatrix} : & : & B_1.C^j & : \\ : & : & B_2.C^j & : \\ : & : & : & : \\ : & : & B_n.C^j & : \end{bmatrix} = a_{i1}.B_1C^j + a_{i2}.B_2C^j \ldots + a_{in}.B_nC^j \quad (1)$$

$$[(A.B).C]_{ij} = (A.B)_i.C^j = \begin{bmatrix} .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \\ A_i.B^1 & A_i.B^2 & .. & A_i.B^p \\ .. & .. & .. & .. \end{bmatrix}. \; C^j = A_iB^1.c_{1j} + A_iB^2.c_{2j} + \ldots + A_iB^p.\mathrm{c_{pj}} \quad (2)$$

Partiendo de (1) lleguemos a (2).

$$(1) = a_{i1}.[b_{11} \;\; b_{12} \;\; \ldots. b_{1p}].\begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ : \\ c_{pj} \end{bmatrix} + \ldots + a_{in}.[b_{n1} \;\; b_{n2} \;\; \ldots. b_{np}].\begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ : \\ c_{pj} \end{bmatrix} =$$

(ubicamos en fila para facilitar la comprensión)

$$= a_{i1}.[\, b_{11}\,c_{1j} + b_{12}\,c_{2j} + \ldots. + b_{1p}\,c_{pj}] + \ldots + a_{in}.[\, b_{n1}\,c_{1j} + b_{n2}\,c_{2j} + \ldots. + b_{np}\,c_{pj}]$$

$$= a_{i1}.\,b_{11}\,c_{1j} + a_{i1}.b_{12}\,c_{2j} + \ldots. + a_{i1}.b_{1p}\,c_{pj} + \ldots + a_{in}.b_{n1}\,c_{1j} + a_{in}.b_{n2}\,c_{2j} + \ldots. + a_{in}.b_{np}\,c_{pj}$$

(si observamos a los primeros términos encolumnados –y los segundos, hasta p–)

$$(a_{i1}.\,b_{11} + \cdots + a_{in}.b_{n1}).c_{1j} + (a_{i1}.b_{12} + \ldots + a_{in}.b_{n2}).c_{2j} + \ldots. + (a_{i1}.b_{1p} + \ldots + \ldots\, a_{in}.b_{np}).c_{pj} =$$

$$[A_i.B^1 + A_i.B^2 + \ldots + A_i.B^p].C^j \quad (2)$$

Entonces los elementos genéricos son iguales : $[A.(B.C)]_{ij} = [(A.B).C]_{ij}$

Resulta entonces: $\boldsymbol{A}.(\boldsymbol{B}.\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}).\boldsymbol{C}$ Se cumple la propiedad asociativa del producto de matrices