T P 08 Ej. 22-iv

Calcular el área de la siguiente región del plano:

$$R = \{(x,y)/1 \leq x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 4\}$$

Para resolver este ejercicio debemos utilizar el teorema de Green donde R sea una región del plano cuya frontera es el camino cerrado C.

C se define de la siguiente manera: $r: [a,b] \to R^2$ con $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$.

Considerando el campo F(x,y)=(0,x), vale lo siguiente:

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_C xdy = \int_a^b x(t)y'(t)dt$$

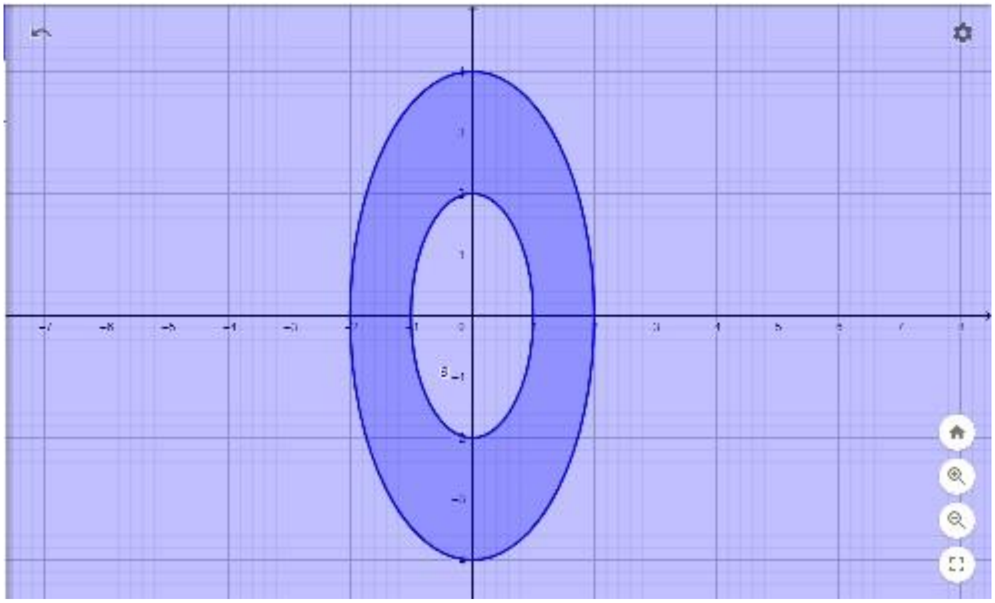
Usando el teorema de Green, como $Q_x = 1$ y $P_y = 0$, entonces:

$$\int_a^b x(t)y'(t)dt = \iint_R \left[Q_x - P_y\right]dxdy = \iint_R \; dxdy = \text{área de R}$$

Volviendo al ejercicio:

$$A=\int_a^b x(t)y'(t)dt$$

El recinto queda de la siguiente manera:



Este recinto obliga a calcular el área recorriendo la curca exterior en sentido positivo y la segunda curva en sentido negativo, por lo tanto el cálculo del área queda:

$$A=\int_{\alpha_1} x(t)y'(t)dt - \int_{\alpha_2} x(t)y'(t)dt \qquad (1)$$

Ahora queda parametrizar las dos curvas:

$\alpha_1: [0,2\pi] \rightarrow R^2$ con $\overrightarrow{\alpha_1}(t) = (2cost, 4sent)$; $\overrightarrow{\alpha_1}'(t) = (-2sent, 4cost)$

$\alpha_2: [0,2\pi] \rightarrow R^2$ con $\overrightarrow{\alpha_2}(t) = (cost, 2sent)$; $\overrightarrow{\alpha_1}'(t) = (-sent, 2cost)$

Reemplazamos en (1).

$$A=\int_{\alpha_1} 2\cos(t)4\cos(t)dt - \int_{\alpha_2} \cos(t)2\cos(t)dt$$

$$A=\int_0^{2\pi} 8cos^2(t)dt - \int_0^{2\pi} 2cos^2(t)dt$$

$$A=6\int_0^{2\pi} cos^2(t)dt$$

$$A=6\left(\frac{t+sen(t)\cos(t)}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$A=6\pi$$