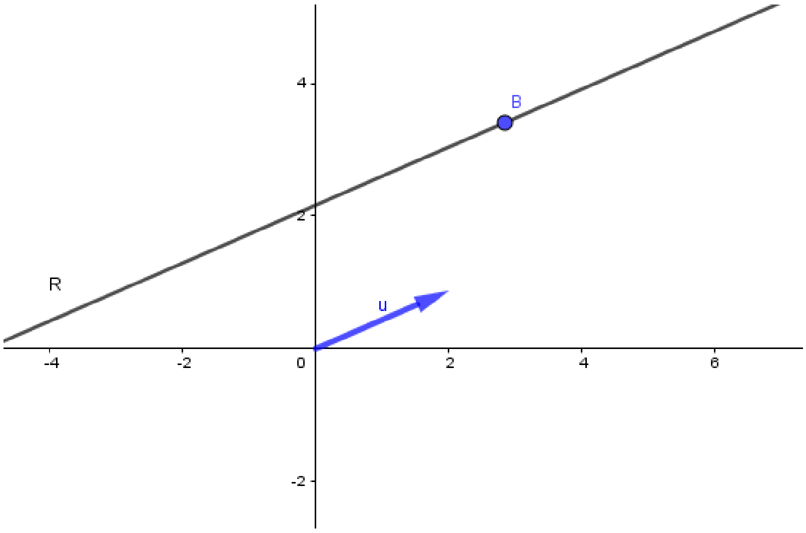
Funciones vectoriales de una variable. Trayectorias.

Guía de clase 02. Com 02-(08/04)

El caso más simple es el de una **trayectoria rectilínea**, usaremos la formulación vectorial que nos permitrá manejar este caso de manera similar tanto en el plano $(\mathbb{R}^2)$, como en el espacio $(\mathbb{R}^3)$. Bastará entonces para definir una recta, un punto y un vectorque le dará su dirección.



La ecuación vectorial de la recta R viene dada por la expresión

$$R(\lambda) = B + \lambda\,\vec{u} \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

A la variable λ la denominaremos *parámetro*

Si $B = (b_1, b_2)$, y, $\vec{u} = (u_1, u_2)$, resultará:

$$R(\lambda) = (b_1 + \lambda\,u_1, b_2 + \lambda\,u_2) = \big(x(\lambda), y(\lambda)\big) \qquad (1)$$

Les dejo el link al applet de geogebra para poder interactuar dinámicamente con B , $\vec{u}$ y λ

https://www.geogebra.org/m/e4skumqk

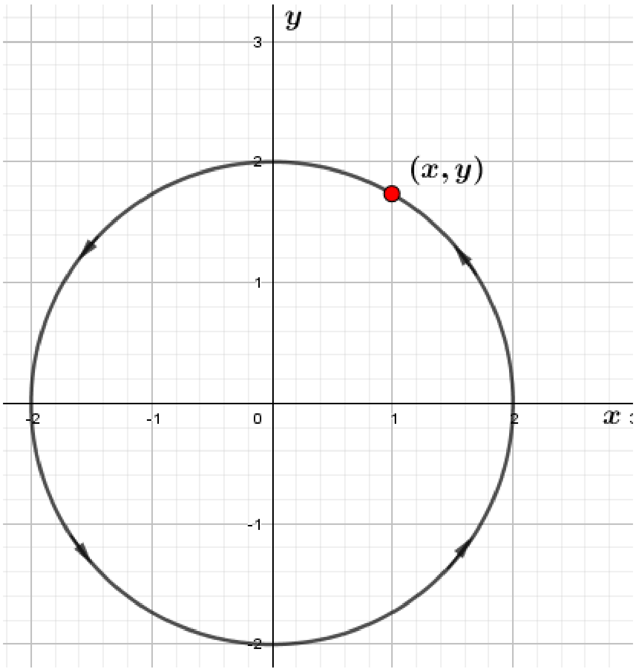
Si la (1) la escribimos como

$$\begin{cases} x = x(\lambda) = b_1 + \lambda\,u_1 \\ y = y(\lambda) = b_2 + \lambda\,u_2 \end{cases}$$

Despejando λ de una de las dos ecuaciones (siempre que sea posible) y reemplazándola en la otra ecuación, obtendremos la ecuación cartesiana de la recta.

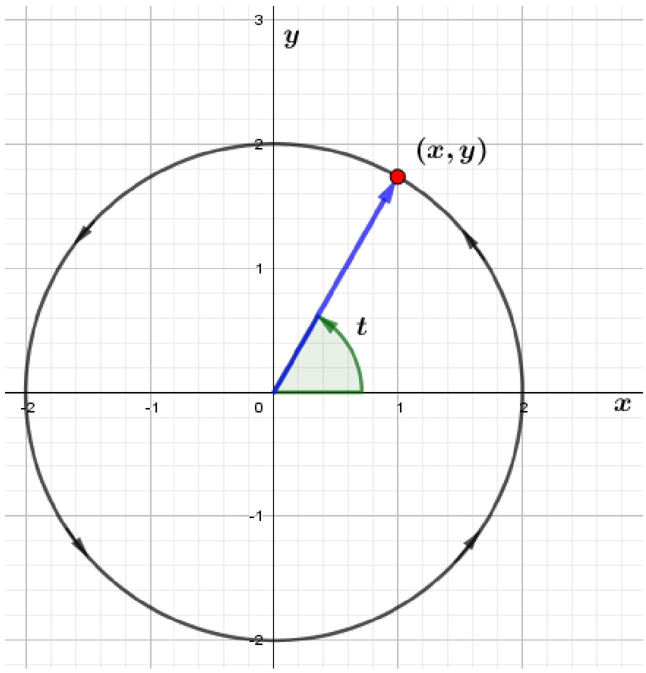
Veamos ahora el caso de una trayectoria circular

Considermos un objeto puntual que se mueve sobre una superficie plana describiendo una trayectoria circular de radio 2, recorrida en sentido antihorario como se muestra en la figura.



Si ubicamos esta trayectoria en el plano coordenado rectangular y el centro de dicha trayectoria lo hacemos coincidir con el origen de coordenadas, tendríamos lo que muestra la figura de la derecha.

¿Cómo podemos describir mediante una fórmula, la posición (x, y) del objeto puntual con respecto al tiempo transcurrido?



Si trazamos un vector posición desde el origen de coordenadas $\big((0,0)\big)$ hasta el punto (x, y) y llamamos t al arco en radianes, tenemos las siguientes relaciones entre x, y, t

$$\begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 2\,sen(t) \end{cases}$$

De esta manera podemos construir la siguiente fórmula:

$$(x, y) = (2\cos(t), 2\,sen(t))$$

Dónde x e y son funciones de la variable t. A la variable t se la denomina *parámetro*.

La fórmula

$$\vec{r}(t) = \big(2\cos(t), 2\,sen(t)\big)$$

es una *parametrización* de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$

Esta relación también puede verse como una combinación entre expresiones algebraicas y trigonométricas:

$$x^2 + y^2 = 4 \quad (1)$$

$$\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) = 1$$

Entonces

$$2^2\ \cos^2(t) + 2^2 \operatorname{sen}^2(t) = 4$$

$$\Big(\underbrace{2\operatorname{sen}(t)}_{x}\Big)^2 + \Big(\underbrace{2\cos(t)}_{y}\Big)^2 = 4 \qquad (2)$$

esto sugiere de (1) y (2) las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} x = 2\cos(t) \\ y = 2\,sen(t) \end{cases}$$

De esta manera llegamos a la misma fórmula:

$$(x, y) = (2\cos(t), 2\,sen(t))$$

Tenemos entonces una relación entre una variable t, que puede representar al tiempo, y la posición (x, y) del objeto puntual. Esta relación funcional puede expresarse como:

$$\vec{r}(t) = (x, y) = \big(x(t), y(t)\big) = (2\cos(t), 2\,sen(t))$$

$$\vec{r}: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

A este tipo de funciones las llamaremos **vectoriales de una variable**, considerando al par (x, y) como el vector posición.

Ampliando esta idea al espacio tridimensional se tiene:

$$\vec{r}: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad \vec{r}(t) = (x, y, z) = (x(t), y(t), z(t))$$

Resultará entonces de interés, el estudio de funciones vectoriales de una variable, también conocidas como parametrizaciones de una variable o trayectorias.

Link al applet de geogebra para visualizar dinámicamente el caso de la circunferencia tratado recientemente
https://www.geogebra.org/m/qdgbeaau

Ejercicio 1 (tarea)

Dada la curva $\mathcal{C}$ por la parametrización

$$\vec{r}(t) = (2\ \text{sen}(t)\,, 3\ \cos(t)) \qquad con \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Realizar el gráfico de la curva $\mathcal{C}$, indicar el punto inicial y el punto final, el sentido de recorrido y hallar la expresión cartesiana
https://www.geogebra.org/m/qdgbeaau

Ejercicio 2 (tarea aptativa)

Dada la curva $\mathcal{C}$ por la parametrización

$$\vec{r}(t) = (2\ \cos(t)\,, 2\ \text{sen}(t)\,, t) \qquad con \qquad 0 \leq t \leq \pi$$

Realizar un gráfico aproximado y luego identificar los extremos inicial y final, y el sentido de recorrido

Funciones vectoriales de varias variables

Corresponde al caso más general de funciones

$$\vec{F}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad \vec{F}(x_1, \dots, x_n) = \left(f_1(x_1, \dots, x_n)\,, \dots \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\right)$$

Los casos más usuales para nosotros serán:

De puntos del plano en vectores del plano

$$\vec{F}: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{F}(x, y) = \left(f_1(x, y)\,, f_2(x, y)\right)$$

De puntos del espacio en vectoresdel espacio

$$\vec{F}: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x,y,z) = \left(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)\right)$$

La interpretación gráfica de este tipo de funciones las veremos en la segunda mitad de la cursada, sin embargo, ahora las trabajaremos analíticamente.
Por ejemplo, para calcular su dominio y para hacer composiciones

Ejemplo 3

Dada la función $\vec{F}(x,y) = \left(\sqrt{4 - x^2 - y^2}, \ln(x\,y)\right)$

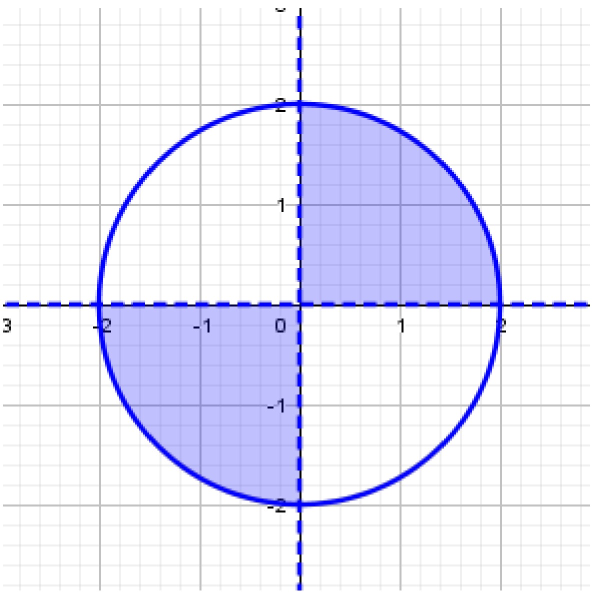
El dominio de $\vec{F}$ resultará del dominio común entre el dominio de la expresión $\sqrt{4 - x^2 - y^2}$, y el dominio de la expresión $\ln(x\,y)$.

Esto significa que se deben cumplir a la vez

$$(4 - x^2 - y^2 \geq 0) \wedge (xy > 0)$$

Escribimos

$$(x^2 + y^2 \leq 4) \wedge (x\,y > 0)$$



Composición de funciones

En análisis matemático de una variable, se ha visto que dadas dos funciones f y g, bajo ciertas condiciones, tiene sentido por ejemplo, usar a la función g como variable de entrada para la función f, lo que se indica como $f \circ g$, y se dice g compuesta con f. Con más detalle,

Si $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, y, $g: B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si la imagen de g está contenida en A, $imag\ g \subseteq A$, entonces tiene sentido la relación $f \circ g.\ f[g(x)]$

Pasemos ahora al caso de composición de funciones de varias variables escalares, trayectorias y vectoriales.

1) Caso de composición entre una trayectoria y una función escalar

Sean el campo escalar $f(x, y) = 6 - x - y$,
y la trayectoria en el plano $\vec{\alpha}: [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 / \vec{\alpha}(t) = (2cos\ t, 2sin\ t)$.

Hacer la composición de $\vec{\alpha}$ con f.

Primeramente, hallamos el dominio de $f \circ \vec{\alpha}$

$$dom\ f \circ \vec{\alpha} = \{t \in dom\ \vec{\alpha} / \vec{\alpha}(t) \in dom\ f\} = \{t \in [0; 2\pi] / (2cos\ t, 2sin\ t) \in R^2\} = [0; 2\pi]$$

ya que $(2\cos t, 2\sin t) \in \mathbb{R}^2$ es una proposición verdadera.

Ahora, hallamos $f \circ \vec{\alpha}$

$f \circ \vec{\alpha}: dom\ f \circ \vec{\alpha} \rightarrow \mathbb{R} / f \circ \vec{\alpha}(t) = f[\vec{\alpha}(t)]$,

Pero, $f[\vec{\alpha}(t)] = f(2cos\ t, 2sin\ t) = 6 - 2cos\ t - 2sin\ t$.
Luego

$$f \circ \vec{\alpha}: [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{R} / f \circ \vec{\alpha}(t) = 6 - 2cos\ t - 2sin\ t$$

2) <u>Caso de composición entre una trayectoria y una función vectorial</u>

Dados el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$,

y la trayectoria en el plano $\vec{\omega}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 / \vec{\omega}(t) = (t,t)$.

Hallar la función compuesta $\vec{F} \circ \vec{\omega}$.

Hallamos el dominio de $\vec{F} \circ \vec{\omega}$

$$dom\ \vec{F} \circ \vec{\omega} = \{t \in dom\ \vec{\omega} / \ \vec{\omega}(t) \in dom\ \vec{F}\} = \{t \in \mathbb{R} / (t,t) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}$$

porque $(t,t) \in \mathbb{R}^2$ es una proposición verdadera.

Hallamos $\vec{F} \circ \vec{\omega}$

$$\vec{F} \circ \vec{\omega}: dom\ \vec{F} \circ \vec{\omega} \to \mathbb{R}^2 / \ \vec{F} \circ \vec{\omega}(t) = \vec{F}[\vec{\omega}(t)]$$

Pero, $\vec{F}[\vec{\omega}(t)] = \vec{F}(t,t) = (t^2 - t^2, 2tt) = (0, 2t^2)$. Entonces

$$\vec{F} \circ \vec{\omega}: R \to \mathbb{R}^2 / \vec{F} \circ \vec{\omega}(t) = (0, 2t^2)$$

3) <u>Caso de composición entre una trayectoria y una función vectorial</u>

Sean el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$,

y la trayectoria en el espacio $\vec{\mu}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 / \ \vec{\mu}(t) = (t,t,4)$.

Hallar $\vec{F} \circ \vec{\mu}$.

Hallamos el dominio del campo vectorial $\vec{F}$

$$dom\ \vec{F} \ = \ \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ (x,y) \neq (0,0)\} = \mathbb{R}^3 - \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y) = (0,0)\}$$

$$dom\ \vec{F} = \ \mathbb{R}^3 - \{(0,0,z) / z \in R\}$$

Podemos ver claramente que $dom\ \vec{F}$: espacio - eje z.

Hallamos el dominio de $\vec{F} \circ \vec{\mu}$

$$dom\ \vec{F} \circ \vec{\mu}\ =\ \{t \in dom\ \vec{\mu} /\ \vec{\mu}(t) \in dom\ \vec{F}\} = \{t \in \mathbb{R}/\ (t, t, 4) \in dom\ \vec{F}\}$$

$$dom\ \vec{F} \circ \vec{\mu} =\ \{t \in \mathbb{R}/t \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

Hallamos $\vec{F} \circ \vec{\mu}$

$$\vec{F} \circ \vec{\mu}: dom\ \vec{F} \circ \vec{\mu} \to \mathbb{R}^3/\vec{F} \circ \vec{\mu}(t) = \vec{F}[\vec{\mu}(t)]$$

Pero, $\vec{F}[\vec{\mu}(t)] = \vec{F}(t, t, 4) = \left(-\frac{t}{t^2+t^2}, \frac{t}{t^2+t^2}, 0\right) = \left(-\frac{1}{2t}, \frac{1}{2t}, 0\right)$. Luego

$$\vec{F} \circ \vec{\mu}: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}^3/\ \vec{F} \circ \vec{\mu}(t) = \left(-\frac{1}{2t}, \frac{1}{2t}, 0\right)$$