UNIDAD 5. Espacios Euclídeos.

VECTORES ORTOGONALES

Sea $(E ; <,>)$ esp. con producto interno, u es ortogonal a $v \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$
$\forall u \in E \ \forall v \in E$

PROP: $\forall u \in E$, u es ortogonal a 0_E

PRODUCTO INTERNO DE MATRICES

$(\mathbb{R}^{2\times 2}, \langle A,B\rangle = tr(A \cdot B^t))$ espacio euclídeo

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

$\langle A,B \rangle = tr\left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\right] = tr\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = 0 \therefore A$ y B son ortogonales

$\langle A,B \rangle = tr\begin{pmatrix} \underline{1.(-1)+3.2} & 1(-3)+3.5 \\ 0.(-1)+(-1).2 & \underline{0(-3)+(-1)5} \end{pmatrix}$

$\langle B,C \rangle = (-1).2 + 2(-1) + (-3).5 + 5.4 = 1$

$\langle B.C \rangle = tr\left[\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\right] = tr\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -11 & 5 \end{pmatrix} = 1$

Normalización de un vector no nulo

$\langle (x_1, x_2); (y_1; y_2) \rangle = 2x_1 \cdot y_1 + 3x_2 y_2$ $\qquad (\mathbb{R}^2; <;>) \rightarrow \|(0,1)\| = \sqrt{\langle (0,1); (0,1)\rangle} = \sqrt{3}$

$\langle (x_1, x_2); (y_1; y_2) \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$ $\qquad (\mathbb{R}^2; <;>) \rightarrow \|(0,1)\| = \sqrt{0+1} = 1$

$(0,1)$ es un vector unitario en el segundo E.E.

PROP: El vector normalizado es un vector unitario. $\left(\hat{x} = \dfrac{x}{\|x\|}\right)$ $\qquad \begin{cases} \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \\ \|x\|^2 = \left(\sqrt{\langle x, x\rangle}\right)^2 \\ \|x\|^2 = \langle x, x \rangle \end{cases}$

dem) $\langle \hat{x}, \hat{x} \rangle = \left\langle \dfrac{x}{\|x\|}, \dfrac{x}{\|x\|} \right\rangle = \dfrac{1}{\|x\|^2} \langle x, x \rangle = \dfrac{1}{\|x\|^2} \cdot \|x\|^2 = 1$

$\sqrt{\langle \hat{x}, \hat{x} \rangle} = \sqrt{1} = 1$, q.d.

$(E, <;>)$ esp. euc.
$S = \{v_1, v_2, \dots v_k\}$
$S' = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$

S es un conj. ortog $\Leftrightarrow \forall v_i \forall v_j \in S$; $\langle v_i, v_j \rangle = 0$; $i \neq j$

S' es un conj ortonormal $\Leftrightarrow \forall u_i \forall u_j \in S'$; $\langle u_i, u_j \rangle = 0 \ \ i \neq j$; $\langle u_i, u_j \rangle = 1 \ \ i = j$

ej: $S = \{(-1,1,2); (2,0,1)\}$, S es conj. ortogonal $\qquad \langle(-1,1,2);(2,0,1)\rangle = 0$
$(\mathbb{R}^3, <;> = \text{prod. escalar})$ $\qquad S$ no es ortonormal pues $\langle(-1,1,2);(-1,1,2)\rangle = 1+1+4 = 6$

Complemento ortogonal

$(E, <;>)$
S es subespacio
$\dim E = n$ (dim finita)
$\dim S = k \ (k \leq n)$
$B_S = \{b_1, b_2, \dots b_k\}$

$S^\perp = \{x \in E \,/ \langle x, b_1 \rangle = 0; \langle x, b_2 \rangle = 0; \langle x, b_3 \rangle = 0; \dots \langle x, b_k \rangle = 0\}$
↳ subespacio COMPLEMENTO ORTOGONAL de S

i) $S \cap S^\perp = \{0_E\}$
ii) $\dim S + \dim S^\perp = \dim E$
iii) $B_S \cup B_{S^\perp} = B_E$

$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$

EJEMPLO

Sea $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + 3z = 0\}$, hallar $W^\perp$ en el esp. euclídeo
$(\mathbb{R}^3, \langle (x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1 x_2 + y_1 \cdot y_2 + (y_1 + z_1) \cdot (y_2 + z_2))$

$B_W = \{(1,2,0); (0,3,1)\}$; $\dim W = 2$ $\qquad 2x - y + 3z = 0$; $2x + 3z = y$ $\qquad (x, 2x+3z, z)$

$\begin{cases} \langle (a,b,c); (1,2,0) \rangle = 0 \\ \langle (a,b,c); (0,3,1) \rangle = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} a + 2b + (b+c) \cdot 2 = 0 \\ 0 + 3b + (b+c) \cdot (4) = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} a + 2b + 2b + 2c = 0 \\ 3b + 4b + 4c = 0 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{matrix} a = \frac{2}{7}c \\ b = -\frac{4}{7}c \end{matrix}$

$F_2 \rightarrow \frac{1}{7} \cdot F_2$ $\qquad 2 - \frac{16}{7} = -\frac{2}{7}$

$W^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = \frac{2}{7}z \wedge y = -\frac{4}{7}z\}$; $\left(\frac{2}{7}z, -\frac{4}{7}z, z\right) \in W^\perp$

$B_{W^\perp} = \{(2, -4, 7)\}$; $\dim W^\perp = 1$

$W \cap W^\perp = \{(0,0,0)\}$

$B_E = \{(1,2,0); (0,3,1); (2,-4,7)\}$; $\qquad (2,-4,7) = \alpha(1,2,0) + \beta(0,3,1)$

$\begin{cases} \alpha = 1 \\ 2\alpha + 3\beta = -4 \\ \beta = 7 \end{cases} \rightarrow 2.1 + 3.7 \neq -4$
$24 \neq -4$
$\nexists \alpha \nexists \beta$

CONCLUSIÓN: $\left.\begin{matrix} B_E \text{ es l.i.} \\ \text{tiene 3 vectores de } \mathbb{R}^3 \end{matrix}\right\}$ es base de $\mathbb{R}^3$