T P 04 Ej. 4-c

Calcular las derivadas parciales de la siguiente función en los puntos indicados.

$$f(x,y) = \ln\left(\sqrt{1+\mathrm{xy}}\right) \qquad en\ (1,1)\ y\ (0,0)$$

En este ejercicio vamos a resolver las derivadas parciales en el punto de las dos formas conocidas: por definición y por propiedades.

Empezamos con el punto $(\mathbf{1},\mathbf{1})$:

Por definición

$$\boldsymbol{f_x(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

$$f_x(1,1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\sqrt{1+(1+\mathrm{h})}\right) - \ln\left(\sqrt{1+1}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\sqrt{2+\mathrm{h}}\right) - \ln\left(\sqrt{2}\right)}{h}$$

$$(Aplicando\ L'Hopital) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{2+\mathrm{h}}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{2+\mathrm{h}}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\boldsymbol{f_y(x_0,y_0)} = \lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}$$

$$f_y(1,1) = \lim_{h\to k}\frac{f(1,1+\mathrm{k})-f(1,1)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{\ln\left(\sqrt{1+(1+\mathrm{k})}\right) - \ln\left(\sqrt{1+1}\right)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{\ln\left(\sqrt{2+\mathrm{k}}\right) - \ln\left(\sqrt{2}\right)}{k}$$

$$(Aplicando\ L'Hopital) = \lim_{k\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{2+\mathrm{k}}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{2+\mathrm{k}}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}$$

Por propiedades

$$f_x(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{xy}}}\right)\left(\frac{y}{2\sqrt{1+\mathrm{xy}}}\right) = \frac{y}{2xy+2}$$

$$\boldsymbol{f_x(1,1)} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

$$f_y(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{xy}}}\right)\left(\frac{x}{2\sqrt{1+\mathrm{xy}}}\right) = \frac{x}{2xy+2}$$
$$\boldsymbol{f_y(1,1)} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

Finalmente con el punto $(\mathbf{0},\mathbf{0})$

Por definición

$$\boldsymbol{f_x(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$
$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\sqrt{1+0*(0+\mathrm{h})}\right) - \ln\left(\sqrt{1+0}\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(\sqrt{1}\right) - \ln(1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1) - \ln(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

$$\boldsymbol{f_y(x_0,y_0)} = \lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}$$
$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+\mathrm{k})-f(0,0)}{k}$$
$$= \lim_{k\to 0}\frac{\ln\left(\sqrt{1+0*(0+\mathrm{k})}\right) - \ln\left(\sqrt{1+0}\right)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{\ln\left(\sqrt{1}\right) - \ln(1)}{k}$$
$$= \lim_{k\to 0}\frac{\ln(1) - \ln(1)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0}{k} = 0$$

Por propiedades

$$f_x(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{xy}}}\right)\left(\frac{y}{2\sqrt{1+\mathrm{xy}}}\right) = \frac{y}{2xy+2}$$
$$\boldsymbol{f_x(0,0)} = \frac{0}{0+2} = 0$$

$$f_y(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{xy}}}\right)\left(\frac{x}{2\sqrt{1 + \mathrm{xy}}}\right) = \frac{x}{2xy + 2}$$

$$\boldsymbol{f_y(0, 0)} = \frac{0}{0 + 2} = 0$$