Resolución TP7:

Ejercicio 4 - d

Graficar la región de integración R y resolver la integral I.

$$R: \{(x, y) \epsilon R^2 / \ |x| + |y| \leq 1\}$$

$$I = \iint_R e^{x+2y} dxdy$$

En base a la definición de la función modulo:

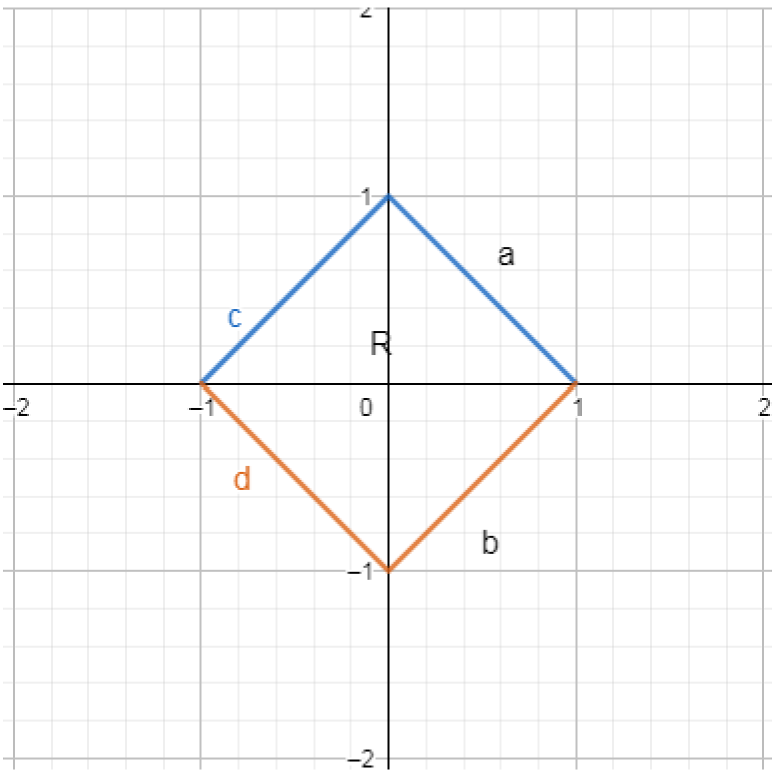
$$|a| = \begin{cases} a & si\, a \geq 0 \\ -a & si\, a < 0 \end{cases}$$

Si x≥0 e y≥0➔$x + y \leq 1$ (a)

Si x≥0 e y<0➔$x - y \leq 1$ (b)

Si x<0 e y≥0➔$-x + y \leq 1$ (c)

Si x<0 e y<0➔ $-x - y \leq 1$ (d)

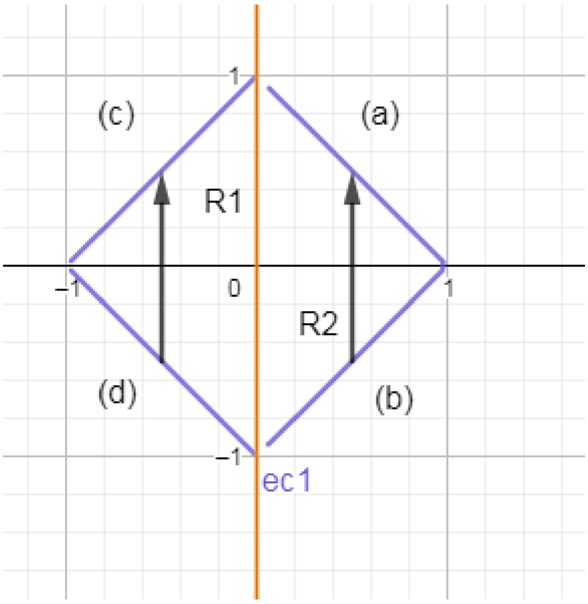


Resolviendo la Integral.

Primero, debemos expresar el orden de integración que vamos a tomar. En este caso será de Tipo I (y dependiente de x).

Segundo se debe expresar el recinto para que pueda ser operable en la formula de integral.

Obsérvese que no hay manera de expresar los limites que posee y en un solo recorrido del recinto. Por lo que se ve necesario hacer la suma de la integral en 2 recintos derivados.



$$I = \iint_R e^{x+2y}dxdy = \iint_{R1} e^{x+2y}dxdy + \iint_{R2} e^{x+2y}dxdy$$

$$R\colon \{\ |x| + |y| \le 1 ==> \begin{array}{l} R1\colon \begin{cases} -1 \le x \le 0 \\ -1 - x \le y \le 1 + x \end{cases} \\ R2\colon \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ -1 + x \le y \le 1 - x \end{cases} \end{array}$$

$$I_1 = \iint_{R1} e^{x+2y}dxdy = \int_{x=-1}^{x=0}\int_{y=-1-x}^{y=1+x} e^{x+2y}dydx$$

$$I_1 = \int_{x=-1}^{x=0}\left[\frac{1}{2}e^{x+2y}\right]_{y=-1-x}^{y=1+x} dx$$

$$I_1 = \int_{x=-1}^{x=0}\frac{1}{2}e^{x+2(1+x)} - \frac{1}{2}e^{x+2(-1-x)}dx$$

$$I_1 = \int_{x=-1}^{x=0}\frac{1}{2}e^{3x+2} - \frac{1}{2}e^{-x-2}dx$$

$$I_1 = \left[\frac{1}{6}e^{3x+2} + \frac{1}{2}e^{-x-2}\right]_{x=-1}^{x=0}$$

$$I_1 = \left(\frac{1}{6}e^{2} + \frac{1}{2}e^{-2}\right) - \left(\frac{1}{6}e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-1}\right)$$

$$I_1 = \frac{1}{6}e^{2} - \frac{2}{3}e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-2}$$

$$I_2 = \iint\limits_{R2} e^{x+2y} dxdy = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=-1+x}^{y=1-x} e^{x+2y} dydx$$

$$I_2 = \int_{x=0}^{x=1} \left[\frac{1}{2} e^{x+2y}\right]_{y=-1+x}^{y=1-x} dx$$

$$I_2 = \int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{2} e^{x+2(1-x)} - \frac{1}{2} e^{x+2(-1+x)} dx$$

$$I_2 = \int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{2} e^{-x+2} - \frac{1}{2} e^{3x-2} dx$$

$$I_2 = \left[-\frac{1}{2} e^{-x+2} - \frac{1}{6} e^{3x-2}\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$I_2 = \left(-\frac{1}{2} e^{1} - \frac{1}{6} e^{1}\right) - \left(-\frac{1}{2} e^{2} - \frac{1}{6} e^{-2}\right)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} e^{2} - \frac{2}{3} e^{1} + \frac{1}{6} e^{-2}$$

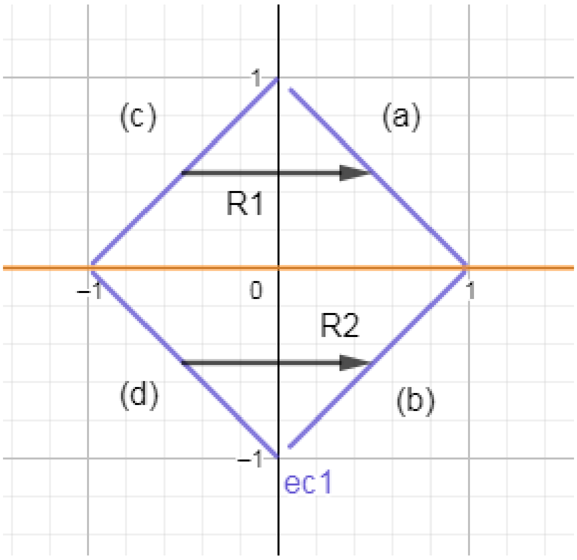
$$I = I1 + I2 = \frac{1}{6} e^{2} - \frac{2}{3} e^{-1} + \frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} e^{2} - \frac{2}{3} e^{1} + \frac{1}{6} e^{-2}$$

$$I = \frac{2}{3} e^{2} - \frac{2}{3} e^{1} - \frac{2}{3} e^{-1} + \frac{2}{3} e^{-2} = \frac{2}{3} (e^{2} - e - e^{-1} + e^{-2})$$

$$I = \iint_R e^{x+2y} dxdy = \frac{2}{3} (e^{2} - e - e^{-1} + e^{-2})$$

Verificando la Integral (Aplicando Teorema de Fubbini).

Segun el teorema, el resultado de la integral es el mismo aplicando el orden Tipo I (y dependiente de x) o el orden Tipo II (x dependiente de y).



$$I = \iint_{R} e^{x+2y} dxdy = \iint_{R1} e^{x+2y} dxdy + \iint_{R2} e^{x+2y} dxdy$$

$$R: \{\ |x| + |y| \leq 1 ==> \begin{array}{l} R1: \begin{cases} y-1 \leq x \leq -y+1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \\ R2: \begin{cases} -y-1 \leq x \leq y+1 \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

$$I_1 = \iint_{R2} e^{x+2y} dxdy = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=y-1}^{x=-y+1} e^{x+2y} dxdy$$

$$I_1 = \int_{y=0}^{y=1} [e^{x+2y}]_{x=y-1}^{x=-y+1} dx$$

$$I_1 = \int_{y=0}^{y=1} e^{-y+1+2y} - e^{y-1+2y} dx$$

$$I_1 = \int_{y=0}^{y=1} e^{1+y} - e^{3y-1} dx$$

$$I_1 = \left[e^{1+y} - \frac{1}{3}e^{3y-1}\right]_{y=0}^{y=1}$$

$$I_1 = \left(e^2 - \frac{1}{3}e^2\right) - \left(e^1 - \frac{1}{3}e^{-1}\right)$$

$$I_1 = \frac{2}{3}e^2 - e^1 + \frac{1}{3}e^{-1}$$

$$I_2 = \iint_{R2} e^{x+2y} dxdy = \int_{y=-1}^{y=0} \int_{x=-y-1}^{x=y+1} e^{x+2y} dxdy$$

$$I_2 = \int_{y=-1}^{y=0} [e^{x+2y}]_{x=-y-1}^{x=y+1} dx$$

$$I_2 = \int_{y=-1}^{y=0} e^{y+1+2y} - e^{-y-1+2y} dx$$

$$I_2 = \int_{y=-1}^{y=0} e^{1+3y} - e^{y-1} dx$$

$$I_2 = \left[\frac{1}{3} e^{1+3y} - e^{y-1}\right]_{y=-1}^{y=0}$$

$$I_2 = \left(\frac{1}{3} e^{1} - e^{-1}\right) - \left(\frac{1}{3} e^{-2} - e^{-2}\right)$$

$$I_2 = \frac{1}{3} e^{1} - e^{-1} + \frac{2}{3} e^{-2}$$

$$I = I1 + I2 = \frac{2}{3} e^{2} - e^{1} + \frac{1}{3} e^{-1} + \frac{1}{3} e^{1} - e^{-1} + \frac{2}{3} e^{-2}$$

$$I = \frac{2}{3} e^{2} - \frac{2}{3} e^{1} - \frac{2}{3} e^{-1} + \frac{2}{3} e^{-2} = \frac{2}{3} (e^{2} - e - e^{-1} + e^{-2})$$

$$I = \iint_{R} e^{x+2y} dxdy = \frac{2}{3} (e^{2} - e - e^{-1} + e^{-2})$$