Resolución TP8:

Ejercicio 16-c

Verificar que el siguiente campo es conservativo y hallar su función potencial:

$$F(x,y) = (3e^{xy} + 3xye^{xy}\ , 3x^2e^{xy})$$

Preparación:

si $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$

entonces

$$P(x,y) = 3e^{xy} + 3xye^{xy}$$

$$Q(x,y) = 3x^2e^{xy}$$

Verificación:

Si Existe $f(x,y)$ tal que $\nabla f(x,y) = F(x,y)$ entonces

$$f_x = P \ \ f_y = Q$$

$$f_{xy} = P_y \ \ f_{yx} = Q_x$$

Por lo que el teorema de Swarchz aplica de la siguiente manera

$$f_{xy} = f_{yx} \to P_y = Q_x$$

En este caso:

$$P(x,y) = 3e^{xy} + 3xye^{xy} \to P_y = 3xe^{xy} + 3x(e^{xy} + xye^{xy}) = 6xe^{xy} + 3x^2ye^{xy}$$

$$Q(x,y) = 3x^2e^{xy} \to Q_x = 3(2xe^{xy} + x^2ye^{xy}) = 6xe^{xy} + 3x^2ye^{xy}$$

Se verifica que $\nabla f(x,y) = F(x,y)$

Función Potencial

Dado que la integral de Q parece más simple elegimos:

Método II: $f(x,y) = k(x,y) + \varphi(x)\ con \begin{cases} g(x,y) = \int Q(x,y)dy \\ \varphi'(x) = P(x,y) - g_x(x,y) \end{cases}$

Función Potencial, Método II:

$$g(x,y) = \int Q(x,y)dy$$

$$g(x,y) = \int (3x^2e^{xy})dy = 3x\int (xe^{xy})dy = 3xe^{xy}$$

$$g_x(x,y) = 3(e^{xy} + xye^{xy}) = 3e^{xy} + 3xye^{xy}$$

$$\varphi'(x) = P(x,y) - g_x(x,y)$$

$$\varphi'(x) = 3e^{xy} + 3xye^{xy} - (3e^{xy} + 3xye^{xy}) = 0$$

$$\varphi(x) = \int 0dx = k$$

$$f(x,y) = g(x,y) + \varphi(x)$$

$$f(x,y) = 3xe^{xy} + k$$