UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA MATANZA

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA II - Ejercicio resuelto

TEMA: **TRANSFORMACIONES LINEALES - MATRIZ DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL.**

Ejercicio 1 Verificar que es posible definir una transformación lineal (o morfismo) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{P}_3[\mathbb{R}]$ que satisfaga simultáneamente las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} T(1,2,1,2) = X^3 - X^2, \\ T(4,3,2,1) = 2X^3 - 5X + 1, \\ T(0,5,2,7) = 2X^3 - 4X^2 + 5X - 1, \\ dim(Im(T)) = 2 + dim(Nu(T)) \end{cases} \tag{1}$$

a. Defina algún morfismo (transformación lineal en este caso) T que cumpla (1) y calcule $T(1,1,1,1)$ y $T(1,6,3,8)$.

b. Clasificar toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{P}_3[\mathbb{R}]$ que cumpla la última condición de (1).

c. Determinar la matriz de T en las respectivas bases canónicas.

Ejercicio 2 Dado $a \in \mathbb{R}$ un número real fijo, considerar la función T sobre $\mathcal{P}_n[\mathbb{R}]$ que para cada polinomio, consiste en evaluarlo en a y obtener el resultado numérico de las operaciones que el polinomio indica (suma algebraica de potencias de la variable multiplicadas por escalares), lo notamos:

$$\forall p[X] \in \mathcal{P}_n[\mathbb{R}] : \; T(p[X]) = p(a)$$

a. ¿Cuál es el espacio vectorial de llegada?

b. Mostrar que es una transformación lineal.

Ejercicio 3 Sea $T : \mathcal{P}_2[\mathbb{R}] \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal cuya matriz en las bases $\mathcal{B} = \{X^2 - X,\ X^2 - 1,\ X + 1\}$ y $B = \{(1,1),\ (1,0)\}$ es $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

a. Asumiendo que $T(p(X)) = (p(a), p(b))$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$; determinar los valores de a y b.

b. Si $L : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$ es una transformación lineal que cumple $M_{\mathcal{B}}(L \circ T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

I. Clasificar el endomorfismo $L \circ T$ (un *endomorfismo* es una transformación lineal cuyo dominio y codominio son el mismo espacio vectorial).

II. Calcular $L(3,1)$.
(*Sugerencia*: buscar $[p(X)]_{\mathcal{B}}$ para $p \in \mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$ tal que $[T(p(X))]_B = [(3,1)]_B$ y pensar un poco...)

RESOLUCIÓN

Ejercicio 1

Verificar que es posible definir una transformación lineal que cumpla (1)

Cuando tenemos algunas imágenes de una función y queremos ver si es posible a partir de ellas determinar la transformación lineal, debemos recordar que una transformación lineal queda biunívocamente determinada cuando se tienen las imágenes de los vectores de una base del espacio vectorial de partida (se apela al *Teorema Fundamental de las Transformaciones Lineales*).
En este caso, el espacio de partida es $\mathbb{R}^4$ cuya dimensión es 4. Se tienen las imágenes de tres cuaternas. Para verificar si es posible hallar una transformación que cumpla la condición del ejercicio pueden darse las siguientes dos situaciones:

- Si son lineamente independientes podrán formar parte de una base y entonces habrá que analizar la segunda condición sobre las dimensiones.
- si no son linealmente independientes, debemos comprobar que la misma dependencia lineal que se da entre las cuaternas también se da entre los polinomios que son sus imágenes. Si esto último no sucede no es posible definir una transformación lineal con estos datos.

En primer lugar veamos entonces si los vectores de $\mathbb{R}^4$, cuyos transformados conocemos, son linealmente independientes o no:

$$a(1,2,1,2) + b(4,3,2,1) + c(0,5,2,7) = (0,0,0,0)$$

Dando lugar al sistema:

$$\begin{cases} a + 4b & = & 0 \\ 2a + 3b + 5c & = & 0 \\ a + 2b + 2c & = & 0 \\ 2a + b + 7c & = & 0 \end{cases}$$

Cuya solución es $a = -4c$, $b = c$ y $c \in \mathbb{R}$, por lo que las cuaternas no resultan linealmente independientes. Entonces estas cuaternas no podrán conformar una base. Observemos que:

$$(0,5,2,7) = 4(1,2,1,2) + (-1)(4,3,2,1)$$

Para continuar el análisis de la posibilidad de definir una transformación lineal, debemos tener en cuenta que entre las imágenes debe darse la misma dependencia lineal ya que debería cumplirse que:

$$T(0,5,2,7) = 4T(1,2,1,2) + (-1)T(4,3,2,1)$$

comprobemos esto:

$$\begin{aligned} 4T(1,2,1,2) + (-1)T(4,3,2,1) &= 4(X^3 - X^2) + (-1)(2X^3 - 5X + 1) \\ &= 2X^3 - 4X^2 + 5X - 1 \\ &= T(0,5,2,7) \end{aligned}$$

El conjunto de las tres cuaternas de dato es linealmente dependiente, de él se extrae el siguiente conjunto linealmente independiente: $B_1 = \{(1,2,1,2),(4,3,2,1)\}$. Para conformar una base de $\mathbb{R}^4$, deberíamos considerar dos vectores linealmente independientes con ellos (dejamos al lector la comprobación de la independencia lineal). En este caso, consideramos que $B = \{(1,2,1,2),(4,3,2,1),(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$ sobre la cual se definirá la transformación T.
Queda corroborar que el dato sobre las dimensiones es coherente con lo hecho hasta el momento. Para ello, recordar que $dim(\mathbb{R}^4) = dim(Im(T)) + dim(Nu(T))$ por *Teorema de las dimensiones*. Luego, usando las condición del ejercicio y reemplazando obtenemos:

$$\begin{aligned} 4 &= dim(Im(T)) + dim(Nu(T)) \\ &= 2 + dim(Nu(T)) + dim(Nu(T)) \\ 2 &= 2\,dim(Nu(T)) \\ 1 &= dim(Nu(T)) \end{aligned}$$

y entonces la $dim(Im(T)) = 3$.

Sabemos que $T(1,2,1,2) = X^3 - X^2$ y $T(4,3,2,1) = 2X^3 - 5X + 1$ y como se comprueba que estos polinomios son linealmente independientes (a cargo del lector), definimos una transformación lineal de la siguiente manera:

$$\begin{cases} T(1,2,1,2) = X^3 - X^2, \\ T(4,3,2,1) = 2X^3 - 5X + 1, \\ T(1,0,0,0) = X - 1, \quad \text{elegido arbitrariamente} \\ T(0,1,0,0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Verifiquemos que de esta forma garantizamos que se cumpla la última de las condiciones dadas en (1). Como $\{(1,2,1,2),(4,3,2,1),(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$ es una base del espacio vectorial de salida, entonces

$$Im(T) = gen\{T(1,2,1,2), T(4,3,2,1), T(1,0,0,0), T(0,1,0,0)\}$$

Queda comprobar la independencia lineal de las imágenes[1]:

$$a(X^3 - X^2) + b(2X^3 - 5X + 1) + c(X - 1) = 0X^3 + 0X^2 + 0X + 0.$$

Resultando el siguiente sistema:

[1]Por una cuestión obvia se omite el vector nulo correspondiente a la cuarta imágen

$$\begin{cases} a+2b &= 0 \\ -a &= 0 \\ -5b+c &= 0 \\ b-c &= 0 \end{cases}$$

La única solución de este sistema es que $a=0$, $b=0$, $c=0$ por lo que las imágenes son linealmente independientes. Por lo tanto, una base de $Im(T)$ es:

$$B_{Im(T)} = \{X^3 - X^2, 2X^3 - 5X + 1, X - 1\}$$

Entonces, el vector con el que completemos la base de $\mathbb{R}^4$ para definir la transformación lineal según el *Teorema fundamental de las transformaciones lineales*, debe ser un vector que genere el núcleo, por ello una base del $Nu(T)$ es:

$$B_{Nu(T)} = \{(0,1,0,0)\}$$

a. Definir una transformación lineal que cumpla la condición dada

Para la base $B_{\mathbb{R}^4} = \{(1,2,1,2),(4,3,2,1),(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$, toda cuaterna $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4$ se escribe como combinación lineal de la base dada:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = a(1,2,1,2) + b(4,3,2,1) + c(1,0,0,0) + d(0,1,0,0),$$

dando lugar al siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 = a + 4b + c \\ x_2 = 2a + 3b + d \\ x_3 = a + 2b, \\ x_4 = 2a + b, \end{cases}$$

Cuya solución única (fijados x_i) es:

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 \\ b = \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\ c = x_1 - \frac{7}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 \\ d = x_2 - \frac{4}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \end{cases}$$

La transformación lineal se define por:

$$\begin{aligned} T(x_1,x_2,x_3,x_4) &= T(a(1,2,1,2) + b(4,3,2,1) + c(1,0,0,0) + d(0,1,0,0)) \\ T(x_1,x_2,x_3,x_4) &= a\,T(1,2,1,2) + b\,T(4,3,2,1) + c\,T(1,0,0,0) + d\,T(0,1,0,0) \\ T(x_1,x_2,x_3,x_4) &= (-\frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4)(X^3 - X^2) + (\frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4)(2X^3 - 5X + 1) + \\ &= (x_1 - \frac{7}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4)(X-1) + (x_2 - \frac{4}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4)\,\mathbf{0} \\ \\ T(x_1,x_2,x_3,x_4) &= x_3\,X^3 + (\frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4)\,X^2 + (x_1 - \frac{17}{3}x_3 + \frac{7}{3}x_4)\,X + (-x_1 + 3x_3 - x_4) \end{aligned}$$

Calcular imágenes de vectores prefijados

$$T(1,1,1,1) = 1X^3 + (\frac{1}{3}\cdot 1 - \frac{2}{3}\cdot 1)\,X^2 + (1 - \frac{17}{3}\cdot 1 + \frac{7}{3}\cdot 1)\,X + (-1 + 3\cdot 1 - 1) = X^3 - \frac{1}{3}X^2 - \frac{7}{3}\,X + 1$$

$$T(1,6,3,8) = 3\,X^3 + (\frac{1}{3}\cdot 3 - \frac{2}{3}\cdot 8)\,X^2 + (1 - \frac{17}{3}\cdot 3 + \frac{7}{3}\cdot 8)\,X + (-1 + 3\cdot 3 - 8) = 3\,X^3 - \frac{13}{3}\,X^2 + \frac{8}{3}\,X$$

b. Clasificar toda transformación lineal que cumpla la condición (1)

Anteriormente vimos que toda transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{P}_3$ que cumple (1) es tal que:

$$dim(Nu(T)) = 1 \text{ y } dim(Im(T)) = 3$$

Por lo tanto, la transformación no es ni monomorfismo ni epimorfismo.

c. Determinar la matriz de T en las respectivas bases canónicas

La base canónica de $\mathbb{R}^4$ es $C_1 = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ y la de $\mathcal{P}_3$ es $C_2 = \{X^3, X^2, X, 1\}$ para armar la matriz $MT_{C_1C_2}$ hay que transformar cada vector de la base C_1 y escribir a cada transformado como combinación lineal de los vectores de la base C_2. Usando la expresión hallada en a), se tiene que:

$$\begin{cases} T(1,0,0,0) = & X-1 \\ T(0,1,0,0) = & 0 \\ T(0,0,1,0) = & X^3 + \frac{1}{3}X^2 - \frac{17}{3}X + 3 \\ T(0,0,0,1) = & -\frac{2}{3}X^2 + \frac{7}{3}X - 1 \end{cases}$$

Luego,

$$[T(1,0,0,0)]_{C_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad [T(0,1,0,0)]_{C_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [T(0,0,1,0)]_{C_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{17}{3} \\ 3 \end{pmatrix} \quad [T(0,0,0,1)]_{C_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} \\ 3 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$MT_{C_1C_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{17}{3} & \frac{7}{3} \\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2

a. Espacio vectorial de llegada

Al evaluar cada polinomio en un número real, se obtiene un número real como resultado de las operaciones, así si el polinomio se escribe en forma genérica:

$$p[X] = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots a_1X + a_0,$$

entonces

$$T(p) = a_n \cdot a^n + a_{n-1} \cdot a^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot a + a_0.$$

de modo que en la función *evaluación de un polinomio* el espacio de llegada es siempre $\mathbb{R}$, el cual es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

b. T es transformación lineal

Corroboremos que se trata de una transformación lineal. Para ello tenemos que probar que se cumplen las dos condiciones que siguen:

1) $\forall p[X], q[X] \in \mathcal{P}_n[\mathbb{R}]$, $T(p[X]+q[X]) = T(p[X]) + T(q[X])$

2) $\forall p[X] \in \mathcal{P}_n[\mathbb{R}]$ y $\forall k \in \mathbb{R}$, $T(k \cdot p[X]) = k \cdot T(p[X])$

Veamos 1)
Sean $p, q \in \mathcal{P}_n$:

$$p[X] = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots a_1 X + a_0,$$

$$q[X] = b_n X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \dots b_1 X + b_0$$

su suma queda expresada como:

$$p[X] + q[X] = (a_n + b_n)X^n + (a_{n-1} + b_{n-1})X^{n-1} + \dots (a_1 + b_1)X + (a_0 + b_0)$$

Luego, se tiene que:

$$\begin{aligned} T(p[X] + q[X]) &= (a_n + b_n)a^n + (a_{n-1} + b_{n-1})a^{n-1} + \dots (a_1 + b_1)a + (a_0 + b_0) \\ &= (a_n\, a^n + a_{n-1}\, a^{n-1} + \dots a_1\, a + a_0) + (b_n\, a^n + b_{n-1}\, a^{n-1} + \dots b_1\, a + b_0) \\ &= T(p[X]) + T(q[X]) \end{aligned}$$

Veamos 2)
Sean $p \in \mathcal{P}_n$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces:

$$k \cdot p[X] = (ka_n)X^n + (ka_{n-1})X^{n-1} + \dots (ka_1)X + (ka_0)$$

Luego, se tiene que

$$\begin{aligned} T(k \cdot p[X]) &= (ka_n)a^n + (ka_{n-1})a^{n-1} + \dots (ka_1)a + (ka_0) \\ &= k(a_n a^n) + k(a_{n-1}a^{n-1}) + \dots k(a_1 a) + ka_0, \text{ asociativa en cada término} \\ &= k(a_n \cdot a^n + a_{n-1} \cdot a^{n-1} + \dots + a_1 \cdot a + a_0) \\ &= k \cdot T(p[X]) \end{aligned}$$

Como probamos que se cumplen las condiciones 1) y 2) podemos concluir que T es una transformación lineal.

Ejercicio 3

a. Si $T(p[X]) = (p(a), p(b))$, hallar a y b

Se asume que la transformación $T : \mathcal{P}_2[\mathbb{R}] \to \mathbb{R}^2$ es una evaluación en cada coordenada. Los términos de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ indican cómo se escriben los transformados de los vectores de la base $\mathcal{B}$ en base B de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llll} T(X^2 - X) = & (a^2 - a, b^2 - b) = & 2(1,1) + 0(1,0) & = (2,2) \\ T(X^2 - 1) = & (a^2 - 1, b^2 - 1) = & 0(1,1) + 3(1,0) & = (3,0) \\ T(X + 1) = & (a+1, b+1) = & 0(1,1) + 3(1,0) & = (3,0) \end{array}$$

Se obtiene el siguiente sistema no lineal.

$$\begin{cases} a^2 - a = 2 & b^2 - b = 2 \\ a^2 - 1 = 3 & b^2 - 1 = 0 \\ a + 1 = 3 & b + 1 = 0 \end{cases}$$

De las últimas ecuaciones resulta que $a = 2$ y $b = -1$ que también satisfacen las dos anteriores (comprobación a cargo del lector), luego esos valores son solución del sistema. Entonces

$$T(p[X]) = (p(2), p(-1)).$$

b. Dada $M_{\mathcal{B}}(L \circ T)$, siendo $L : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2$

I. Clasificar el endomorfismo $L \circ T$.

Si $L : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$ es una transformación lineal que cumple $M_{\mathcal{B}}(L \circ T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$L \circ T$ denota la composición entre las dos transformaciones lineales y actúa de la siguiente manera: Para todo elemento del espacio de partida de T, es decir de $\mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$, se busca primero el transformado $T(p[X])$; luego, dado que este vector resultante pertenece al dominio de L (que es $\mathbb{R}^2$) es posible aplicarle L y esta nueva imagen pertenece al conjunto de llegada de L, es decir a $\mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$. Simbólicamente:

$$L \circ T : \mathcal{P}_2[\mathbb{R}] \to \mathcal{P}_2[\mathbb{R}] : \; L \circ T(p[X]) = L(T(p[X])).$$

Se prueba que la composición de dos transformaciones lineales también es una transformación lineal, por lo que $L \circ T$ lo es. Observemos también que $L \circ T$ es endomorfismo pues el espacio de salida y de llegada son el mismo: $\mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$, el cual es de dimensión 3, por eso es que la matriz $M_{\mathcal{B}}$ es de 3×3.

Para clasificar $L \circ$T se calcula núcleo e imagen mediante la matriz.

Cálculo del núcleo y la imagen de $L \circ T$

Sea $p \in \mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$ un vector del núcleo de $L \circ T$ y consideremos de forma genérica que que $[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Luego,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solución del sistema lineal es $S = \{(a, b, c) : a = 0, b = 0, c = 0\}$ es decir que

$$Nu(L \circ T) = \{0X^2 + 0X + 0\} = \{\mathbf{0}\}.$$

Por lo tanto, la transformación $L \circ T$ resulta **monomorfismo**.
Para obtener información sobre $Im(L \circ T)$ basta usar el Teorema de la dimensión.

$$\begin{aligned} dim(\mathcal{P}_2[\mathbb{R}]) &= dim(Nu(L \circ T)) + dim(Im(L \circ T)) \\ 3 &= 0 + dim(Im(L \circ T)) \end{aligned}$$

Como $Im(L \circ T) \subseteq \mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$ y $dim(Im(L \circ T)) = dim(\mathcal{P}_2[\mathbb{R}])$ se tiene que $Im(L \circ T) = \mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$ y entonces, la transformación es **epimorfismo**.
Luego, la transformación $L \circ T$ es un **isomorfismo**.

Observación

La transformación T va de un espacio de dimensión 3 en un espacio de dimensión 2. Es por ello que, usando el teorema de las dimensiones, podemos afirmar que no se trata de un monomorfismo.

De forma similar, como L va de un espacio de dimensión 2 a un espacio de dimensión 3 podemos afirmar que no es epimorfismo, pues es necesario que se cumpla el teorema de la dimensión.

La composición $L \circ T$ resulta ser monomorfismo y epimorfismo.

II. Calcular $L(3,1)$

Sobre L no tenemos información directa que nos permita operar. Veamos si podemos usar la matriz dada de la composición para calcular la imagen pedida.
Si $(3,1)$ fuera imagen de algún polinomio por T, entonces $(3,1) = T(p[X])$ y en ese caso se tendría que $L(3,1) = L(T(p[X]))$.
Usando la matriz de T del enunciado, veamos si $(3,1) \in Im(T)$. Para ello sería necesario ver si la siguiente ecuación tiene solución:

$$MT_{\mathcal{B}B} \cdot [p]_{\mathcal{B}} = [(3,1)]_B$$

Siendo $[p]_{\mathcal{B}}$ la incógnita asociada.
Hallemos primero $[(3,1)]_B$. Para ello, escribimos al vector $(3,1)$ en combinación lineal de los vectores de la base B y resolvemos:

$$(3,1) = \alpha(1,1) + \beta(1,0) \Rightarrow [(3,1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Luego, si consideramos que $[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

El conjunto solución es $S = \{(a,b,c) : a = \frac{1}{2}, b = \frac{2}{3} - c, c \in \mathbb{R}\}$, entonces los polinomios cuya imagen es el $(3,1)$ son de la forma:

$$p \in \mathcal{P}_2[\mathbb{R}] : p[X] = \frac{1}{2}(X^2 - X) + (\frac{2}{3} - c)(X^2 - 1) + c(X+1).\ c \in \mathbb{R}$$

O bien

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ (\frac{2}{3} - c) \\ c \end{pmatrix}$$

Corroboremos las soluciones halladas evaluando en la expresión de T hallada:

$$T(\frac{1}{2}(X^2 - X) + (\frac{2}{3} - c)(X^2 - 1) + c(X+1)) = (p(2), p(-1)) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}(2^2 - 2) + (\frac{2}{3} - c)(2^2 - 1) + c(2+1), \frac{1}{2}((-1)^2 - (-1)) + (\frac{2}{3} - c)((-1)^2 - 1) + c(-1+1)\right) = (3,1)$$

Como existen infinitos polinomios que comparten la misma imagen $(3,1)$. Es decir, el conjunto

$$\{p \in \mathcal{P}_2[\mathbb{R}] : p[X] = \frac{1}{2}(X^2 - X) + (\frac{2}{3} - c)(X^2 - 1) + c(X+1).\ c \in \mathbb{R}\}$$

es el conjunto de las preimágenes de $(3,1)$. Para hallar $L(3,1)$ se busca la imagen por la composición sobre cualquiera de los polinomios p hallados, es decir:

$$\begin{aligned} L(3,1) &= (L \circ T)(p) \\ L(3,1) &= L\left(T\left(\frac{1}{2}(X^2-X)+(\frac{2}{3}-c)(X^2-1)+c(X+1)\right)\right), \text{ algún } c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Podemos usar la matriz de la composición con coordenadas:

$$[L(3,1)]_{\mathcal{B}} = [(L \circ T)(p)]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}(L \circ T)[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ (\frac{2}{3}-c) \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \\ \frac{5}{3} \\ \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Luego

$$L(3,1) = \frac{1}{2}(X^2-X)+\frac{5}{3}(X^2-1)+\frac{8}{3}(X+1).$$

$$L(3,1) = \frac{13}{6}X^2+\frac{13}{6}X+1.$$

AUTOEVALUACIÓN

SOBRE EL TEMA TRANSFORMACIÓN LINEAL Y MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN LINEAL.

Para resolver esta evaluación, realizar las guías de estudio y leer atentamente la resolución de los ejercicios de este documento.
Cada ejercicio tiene un valor de 1 punto.

1. Elegir la o las opciones correctas para la siguiente situación y justificar.

   Sean V y W dos espacios vectoriales tales que $dimV = m$ $dimW = n$, donde $m, n \in \mathbb{N}$ y $m < n$. Dada una transformación lineal $f : V \to W$.

   a) f no puede ser isomorfismo.
   b) f puede ser monomorfismo.
   c) f no puede ser monomorfismo.
   d) f no puede ser epimorfismo.

2. Para las siguiente afirmación verdadera, elegir la justificación más adecuada.

   Dados V y W espacios vectoriales, sean B_1 B_2 bases de V y G_1 G_2 bases de W. Para toda transformación lineal $f : V \to W$, entonces las matrices $Mf_{B_1G_1}$ y $Mf_{B_2G_2}$ tienen igual rango.

   - Elegidas las bases, el rango de cualquier matriz que represente a f en esas bases coincide con la dimensión de la $Im(f)$. Luego $rg(Mf_{B_1G_1}) = rg(Mf_{B_2G_2}) = dimIm(f)$

   - Como vale la relación: $Mf_{B_1G_1} = C_{G_2G_1}Mf_{B_2G_2}C_{B_1B_2}$ y las matrices de cambio de coordenadas son inversibles, entonces si $det(Mf_{B_1G_1}) \neq 0$ se tendría que $det(Mf_{B_2G_2}) \neq 0$ y por lo tanto coinciden sus rangos.

3. Dados vectores v, w, u en el espacio vectorial V y vectores r, s, t en el espacio vectorial W, tales que $u = \alpha v+\beta w$ (con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). ¿Siempre es posible definir una transformación lineal $f : V \to W$ tal que $f(v) = r$, $f(w) = s$, $f(u) = t$? Explicar.

4. Dados vectores v, w, u en el espacio vectorial V y vectores r, s, t en el espacio vectorial W, tales que u, v, w son linealmente independientes. ¿Siempre es posible definir una transformación lineal $f : V \to W$ tal que $f(v) = r$, $f(w) = s$, $f(u) = t$? Explicar.

5. Para la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{P}_3[\mathbb{R}]$ del Ejercicio 1, decidir cuáles de las siguientes opciones son correctas (pueden también ser ambas o ninguna). Si corresponde, modificar las que no son correctas para que sí lo sean.

   a) $T(-1, 2, 1, -1) = X^3 + X^2 - \frac{27}{3}X + 5$
   b) $T(0, 1, 2, 0) = (2, \frac{2}{3}, -\frac{34}{3}, 6)$

6. Considerar la transformación T del Ejercicio 1. Hallar la matriz de T asociada a las bases $B_1 = \{(-1, 2, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ y $B_2 = \{X^3 - X, 2X, X^2 + 1, -2\}$.

7. Sean V y W dos espacios vectoriales y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B' = \{w_1, w_2.w_3\}$ dos bases respectivas. Si $f : V \to W$ una transformación lineal tal que $Mf_{BB'} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, indicar cuáles son las opciones correctas. Si no lo son, modificarlas para que lo sean sin cambiar los datos de las condiciones.

   a) $dimNu(f) = 1$

   b) Si $B'' = \{u_1, u_2, u_3\}$ es otra base de V tal que:

   $v_1 = u_1 - 2u_2 + u_3 \qquad v_2 = u_2 + u_3 \qquad v_3 = u_1 - u_3 + u_2$

   Entonces se cumple que:

$$Mf_{B''B'} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Considerar $f : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal definida por la matriz de $Mf_{\mathcal{B}B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, siendo $\mathcal{B}$ y B las bases dadas en el Ejercicio 3. Decidir si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones, justificando en cada caso.

   a) $Nuf = gen\{(3, 3, -1)\}$

   b) $Mf_{C_1C_2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ siendo C_1 y C_2 las bases canónicas de los espacios vectoriales de salida y llegada respectivamente.

9. Para el Ejercicio 3, ¿cuáles son los pares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ para los cuáles es posible hallar $L(x, y)$ con los datos dados? Indicar el procedimiento para hallar estas imágenes.

10. Considerar $f_1 : \mathcal{P}_2[\mathbb{R}] \to \mathbb{R}^2$ y $f_2 : \mathcal{P}_2[\mathbb{R}] \to \mathbb{R}^2$ tales que:

$$f_1(p[X]) = (a_2 - a_0, a_1 + a_2 + a_0) \quad \text{y} \quad f_2(p[X]) = (p(0), p(-1)).$$

   a) Mostrar que f_1 y f_2 son transformaciones lineales y que $f_1 \neq f_2$.

   b) ¿Existirán bases B_1, B_2 de $\mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$ y G_1 G_2 de $\mathbb{R}^2$ tales que $Mf_{1B_1G_1} = Mf_{2B_2G_2}$. Justificar.