Resolución TP5:

Ejercicio 11 - Regla Nemotécnica

Tomando el sistema conformado por:

$$\begin{cases} 3x = u + v + w \\ x^2 + y^2 = u^2 + v^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3u^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F(x,y,z,u,v,w) = 0 \\ G(x,y,z,u,v,w) = 0 \\ H(x,y,z,u,v,w) = 0 \end{cases} \quad respectivamente$$

a- Probar que el sistema define funciones implícitas$u = u(x,y,z)$,

$v = v(x,y,z)\ y\ w = w(x,y,z)\ en\ P = (1,1,1,1,1,1)$ y si es así determinar sus derivadas parciales.

Herramientas:

- Se deben formular las 3 condiciones del teorema usando regla de la cadena.
- Una vez que sabemos el funcionamiento de regla de la cadena podemos utilizar una regla Nemotécnica

Para empezar:

$$\begin{cases} 3x = u + v + w \\ x^2 + y^2 = u^2 + v^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3u^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - u - v - w = 0 \\ x^2 + y^2 - u^2 - v^2 = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 - 3u^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x,y,z,u,v,w) = 3x - u - v - w = 0 \\ G(x,y,z,u,v,w) = x^2 + y^2 - u^2 - v^2 = 0 \\ H(x,y,z,u,v,w) = x^3 + y^3 + z^3 - 3u^3 = 0 \end{cases}$$

Derivamos:

$$\boxed{F(x,y,z,u,v,w) = 3x - u - v - w = 0}$$

$F_x = 3$ $F_y = 0$ $F_z = 0$ $F_u = -1$ $F_v = -1$ $F_w = -1$	$F_x(P) = 3$ $F_y(P) = 0$ $F_z(P) = 0$ $F_u(P) = -1$ $F_v(P) = -1$ $F_w(P) = -1$

$$\boxed{G(x,y,z,u,v,w) = x^2 + y^2 - u^2 - v^2 = 0}$$

$G_x = 2x$ $G_y = 2y$ $G_z = 0$ $G_u = -2u$ $G_v = -2v$ $G_w = 0$	$G_x(P) = 2$ $G_y(P) = 2$ $G_z(P) = 0$ $G_u(P) = -2$ $G_v(P) = -2$ $G_w(P) = 0$

$$\boxed{H(x,y,z,u,v,w) = x^3 + y^3 + z^3 - 3u^3 = 0}$$

$H_x = 3x^2$ $H_y = 3y^2$ $H_z = 3z^3$ $H_u = -9u^2$ $H_v = 0$ $H_w = 0$	$H_x(P) = 3$ $H_y(P) = 3$ $H_z(P) = 3$ $H_u(P) = -9$ $H_v(P) = 0$ $H_w(P) = 0$

a- Sacamos las siguientes condicionesnemotécnicamente, se cumple TFI enel sistema del enunciado:

1) El punto pertenece a los conjuntos de nivel solicitados.

- $F(P) = 0,\ G(P) = 0,\ H(P) = 0$

2) Las derivadas parciales son continuas en el entorno del punto P

- Las derivadas$F_x F_y F_z F_u F_v F_w G_x G_y G_z G_u G_v G_w$ y $H_x H_y H_z H_u H_v H_w$ son continuas en el entorno del punto.

3) El jacobiano de las variables dependientes es distinto de 0

- Variables dependientes son u, v, w
- $\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}(P) = \begin{vmatrix} F_u & F_v & F_w \\ G_u & G_v & G_w \\ H_u & H_v & H_w \end{vmatrix}_P \neq 0$

si se cumple TFI existen$u = u(x, y, z), v = v(x, y, z)\ y\ w = w(x, y, z)$en un entorno de$P = (1,1,1,1,1,1)$ y el valor de la derivada de una variable dependiente en base a una variable independiente en el punto $P' = (1,1,1)$?consiste en la formula siguiente, donde en el numerador se reemplaza el jacobiano del sistema por un jacobiano similar, cuya variable dependiente buscada se sustituye por la variable independiente (por) respecto de la cual se deriva.

$$\frac{\partial V_d}{\partial V_i}(P') = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial\left(\begin{bmatrix} V_i\ si\ x=V_d \\ x\ si\ x\neq V_d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} V_i\ si\ y=V_d \\ y\ si\ y\neq V_d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} V_i\ si\ z=V_d \\ z\ si\ z\neq V_d \end{bmatrix}\right)}(P)}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(P)}$$

$u_x(p) = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,v,w)}(P)}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}(P)}$	$u_y(p) = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(y,v,w)}(P)}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}(P)}$	$u_z(p) = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(z,v,w)}(P)}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}(P)}$
$v_x(p) = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,x,w)}(P)}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}(P)}$	$v_y(p) = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,w)}(P)}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}(P)}$	$v_z(p) = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,z,w)}(P)}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}(P)}$
$w_x(p) = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,x)}(P)}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}(P)}$	$w_y(p) = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,y)}(P)}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}(P)}$	$w_z(p) = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,z)}(P)}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}(P)}$

TFI-Condición 1) se cumple en F, se cumple en G y se cumple en H

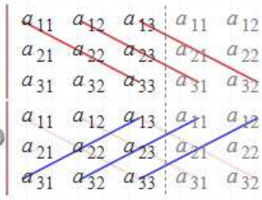
TFI-Condición 2)
Las derivadas parciales de F son funciones constantes por lo tanto son continuas y se cumple la condición en F.
Las derivadas parciales de G son funciones lineales por lo tanto son continuas y se cumple la condición en G.
Las derivadas de H son funciones polinómicas por lo tanto son continuas y se cumple la condición en H.

TFI-Condición 3)

- $\frac{J(F,G,H)}{J(u,v,w)}(P) = \begin{vmatrix} F_u & F_v & F_w \\ G_u & G_v & G_w \\ H_u & H_v & H_w \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -9 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11} \times a_{22} \times a_{33} + a_{12} \times a_{23} \times a_{31} + a_{13} \times a_{21} \times a_{32}$$

$$-a_{13} \times a_{22} \times a_{31} - a_{11} \times a_{23} \times a_{32} - a_{12} \times a_{21} \times a_{33} (?)$$



$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -9 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \times (-2) \times 0 + (-1) \times 0 \times (-9) + (-1) \times (-2) \times 0 - (-9) \times (-2) \times (-1) - 0 \times 0 \times (-1) - 0 \times (-2) \times (-1) = 18$$

El determinante es distinto de 0 por lo que se cumple la condición.

Se cumple TFI por lo tanto:

$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,v,w)}(P) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(y,v,w)}(P) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(z,v,w)}(P) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$
$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,x,w)}(P) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -9 & 3 & 0 \end{vmatrix}$	$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,y,w)}(P) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -9 & 3 & 0 \end{vmatrix}$	$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,z,w)}(P) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -9 & 3 & 0 \end{vmatrix}$
$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,x)}(P) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \\ -9 & 0 & 3 \end{vmatrix}$	$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,y)}(P) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ -9 & 0 & 3 \end{vmatrix}$	$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,z)}(P) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ -9 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

$u_x(p) = -\frac{(-6)}{18} = \frac{1}{3}$	$u_y(p) = -\frac{(-6)}{18} = \frac{1}{3}$	$u_z(p) = -\frac{(-6)}{18} = \frac{1}{3}$
$v_x(p) = -\frac{(-12)}{18} = \frac{2}{3}$	$v_y(p) = -\frac{(-12)}{18} = \frac{2}{3}$	$v_z(p) = -\frac{(6)}{18} = -\frac{1}{3}$
$w_x(p) = -\frac{(-36)}{18} = 2$	$w_y(p) = -\frac{(18)}{18} = -1$	$w_z(p) = -\frac{(0)}{18} = 0$