Resolución TP10:

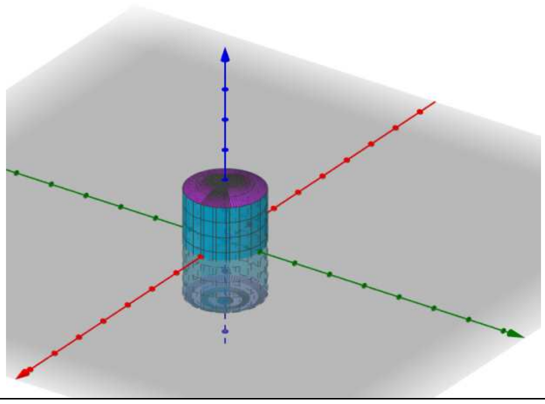
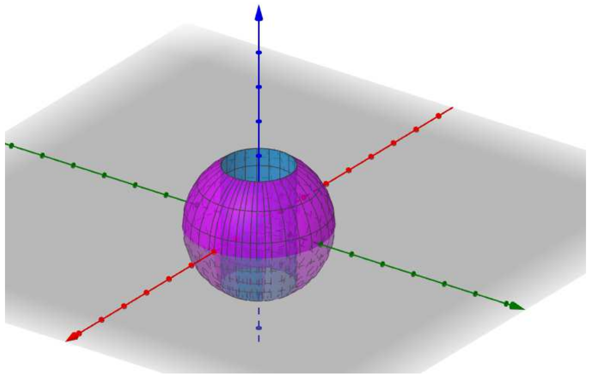
Ejercicio 6 - c - Aplicando Divergencia

Dado el campo vectorial F y la superficie S, calcular el flujo entrante.

$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

S: la superficie limitada por $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

Advertencia: El enunciado puede ser considerado de las siguientes formas.

Vamos a utilizar la primera.

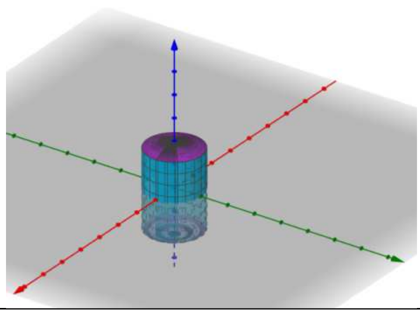
Resolviendo:

Para flujo saliente

$$I = \iint_S F \cdot dS = \iint_{R_\Phi} F(\Phi) \cdot (\Phi_u X \Phi_v) du dv = \iiint_{V_S} Div(F) dV_S$$

Para flujo entrante

$$I = \iint_S F \cdot dS = \iint_{R_\Phi} F(\Phi) \cdot (\Phi_u X \Phi_v) du dv = -\iiint_{V_S} Div(F) dV_S$$

	$V_S\!: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ -\sqrt{4 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2} \end{cases}$

$$Div(F) = 3$$

$$I = \iint_S F \cdot dS = -\iiint_{V_S} Div(F) dV_S$$

$$I = -\iiint_{V_S} 3\, dxdydz$$

Aplicando Transformación cilíndrica

$$I = \iiint_{V_S} 3dxdydz = \iiint_{V\prime} 3|J| d\rho d\theta d\mathrm{z}$$

$$V\!: \begin{cases} TL(\rho, \theta, \mathrm{z}) = (\rho\cos(\theta)\,, \rho\,\mathrm{sen}(\theta)\,, z) \\ V'\!: \begin{cases} 0 \leq \theta < 2\pi \\ -\sqrt{4-\rho^2} \leq \mathrm{z} < \sqrt{4-\rho^2} \\ 0 \leq \ \rho \leq 1 \end{cases} \\ |J| = \rho \end{cases}$$

$$I = -3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho\ dzd\rho d\theta$$

$$I = -3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 [\rho z]_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho d\theta$$

$$I = -3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 2\rho\sqrt{4-\rho^2} d\rho d\theta$$

usando sustitucion $4 - \rho^2 = t \to\ -2\rho d\rho = dt \to 2\rho d\rho = -dt$

$$I = 3 \int_0^{2\pi} \int_{\rho=0}^{\rho=1} \sqrt{t} dt d\theta$$

$$I = 3 \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_{\rho=0}^{\rho=1}\ d\theta$$

$$I = 2 \int_0^{2\pi} \left[\sqrt{t^3}\right]_{\rho=0}^{\rho=1}\ d\theta$$

$$I = 2\int_0^{2\pi}\left[\sqrt{(4-\rho^2)^3}\right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta$$

$$I = 2\int_0^{2\pi}\sqrt{(4-1^2)^3} - \sqrt{(4-0^2)^3}\, d\theta$$

$$I = 2\int_0^{2\pi}\sqrt{(3)^3} - \sqrt{(4)^3}\, d\theta$$

$$I = 2\int_0^{2\pi} 3\sqrt{3} - 4\sqrt{4}\, d\theta$$

$$I = 2\int_0^{2\pi} 3\sqrt{3} - 8\, d\theta$$

$$I = 2(3\sqrt{3} - 8)\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$I = 2\left(3\sqrt{3} - 8\right)2\pi$$

$$I = 12\sqrt{3}\pi - 32\pi$$

$$FlujoEntrante = 12\sqrt{3}\pi - 32\pi \simeq -35.23$$

Corolario.

Que el flujo entrante resulte negativo significa que en realidad el flujo sobre la superficie es saliente