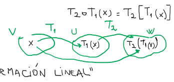
Composición de Transformaciones Lineales.

$T_2 \circ T_1(x) = T_2[T_1(x)]$



Sean $T_1 : V \to U$ y $T_2 : U \to W$ transf. lineales.

La función $T_2 \circ T_1 : V \to W$ se define como $T_2[T_1(x)]$

PROP. 1 " La composición de transf. lineales es TRANSFORMACIÓN LINEAL"

TESIS a) $T_2 \circ T_1(x+y) = T_2 \circ T_1(x) + T_2 \circ T_1(y)$ ✓

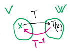
b) $T_2 \circ T_1(\lambda x) = \lambda . T_2 \circ T_1(x)$ ✓

DEMOSTRACIÓN

a) $T_2 \circ T_1(x+y) \underset{\text{def. de fc. compuesta}}{=} T_2[T_1(x+y)] \underset{T_1 \text{ es t.l.}}{=} T_2[T_1(x) + T_1(y)] \underset{\text{distributividad de las fc.}}{=} T_2[T_1(x)] + T_2[T_1(y)] \underset{\text{def. de fc. compuesta}}{=} T_2 \circ T_1(x) + T_2 \circ T_1(y)$

b) $T_2 \circ T_1(\lambda x) \underset{\text{def. de fc. compuesta}}{=} T_2[T_1(\lambda x)] \underset{T_1 \text{ es t.l.}}{=} T_2[\lambda\, T_1(x)] \underset{\text{prop. de el prod. de escalar por fc.}}{=} \lambda . T_2[T_1(x)] = \lambda\, T_2 \circ T_1(x)$

TRANSFOMACIÓN LINEAL NO SINGULAR , sea $T : V \to W$



T es una transformación lineal no singular $\Leftrightarrow \exists\, T^{-1} / T^{-1} \circ T = I \wedge T \circ T^{-1} = I \wedge T^{-1}$ es la t.l. inversa

PROP. 2 " La inversa de una transf. lineal no singular ES UNA TRANSF. LINEAL"

TESIS a) $T^{-1}(w_1 + w_2) = T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2)$ ✓

b) $T^{-1}(\lambda w_1) = \lambda . T^{-1}(w_1)$

DEMOSTRACIÓN

Considerar w_1 y w_2 en W . T es biyectiva (T es inyectiva y T es sobrey.)

$T(x_1) = w_1$
$T(x_2) = w_2$
x_1 y x_2 únicos tales que $T^{-1}(w_1) = x_1$, $T^{-1}(w_2) = x_2$

a) $T^{-1}(w_1 + w_2) \underset{\text{por def. de T}}{=} T^{-1}[T(x_1) + T(x_2)] \underset{\text{T es t.l}}{=} T^{-1}[T(x_1 + x_2)] \underset{\text{def. de fc. compuesta}}{=} T^{-1} \circ T(x_1 + x_2) \underset{\text{por ser la t.l. I}}{=} x_1 + x_2 =$

$= T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2)$

b) $T^{-1}(\lambda w_1) \underset{\text{def. de T}}{=} T^{-1}[\lambda\, T(x_1)] \underset{\text{T es t.l}}{=} T^{-1}[T(\lambda x_1)] \underset{\text{fc. compuesta}}{=} T^{-1} \circ T(\lambda x_1) \underset{\text{Id.}}{=} \lambda x_1 =$

$= \lambda\, T^{-1}(w_1)$.

$\therefore T^{-1}$ es transf. lineal

CONSECUENCIA : Sea $T : V \to W$ existe $T^{-1} : W \to V$, cuando

1) $\dim V = \dim W$

2) T es inyectiva , $Nu(T) = \{0_V\}$; $\dim Nu(T) = 0 \Rightarrow \dim Im(T) = \dim W \Rightarrow$ T es sobreyectiva ,

finalmente T es biyectiva ó T es ISOMORFISMO

Buscamos la fórmula para T^{-1} .

EJEMPLO : Sea $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ / $T(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Decidir si existe T^{-1}

b) En caso de existir, hallar la fórmula de T^{-1}

a) $\dim \mathbb{R}^{2\times 2} = 4$ ✓

Nu(T) : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} a+b = 0 \to a = 0 \\ b = 0 \\ c+d = 0 \to c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$

$Nu(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

luego T es MONOMORFISMO ; $\dim Im(T) = 4$, T es EPIMORFISMO , T es ISOMORF.

$\therefore$ existe T^{-1}

b) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de V , base del esp. vect. de salida

$T(B) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

y T(B) es una base de Im T porque $\begin{cases} \text{T es inyectiva} \\ \text{B es base de V} \end{cases}$

Asignación de imágenes para T^{-1}

$T^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $T^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_3 + \alpha_4 & \alpha_4 \end{pmatrix} \to \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x \to \alpha_1 = x - y \\ \alpha_2 = y \\ \alpha_3 + \alpha_4 = z \to \alpha_3 = z - t \\ \alpha_4 = t \end{cases}$

$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (x-y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (z-t)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $T^{-1}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = T^{-1}\left[(x-y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots\right]$

$= T^{-1}(x-y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + T^{-1}\, y \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots$

$= (x-y)\, T^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots$

$T^{-1}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = (x-y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (z-t)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$T^{-1}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y & y \\ z-t & t \end{pmatrix}$ ley de asignación

TAREA : Ej 8 pág 12
3.2 Ejerc. adicionales pág 15 → 1 , 3 (pág 16)