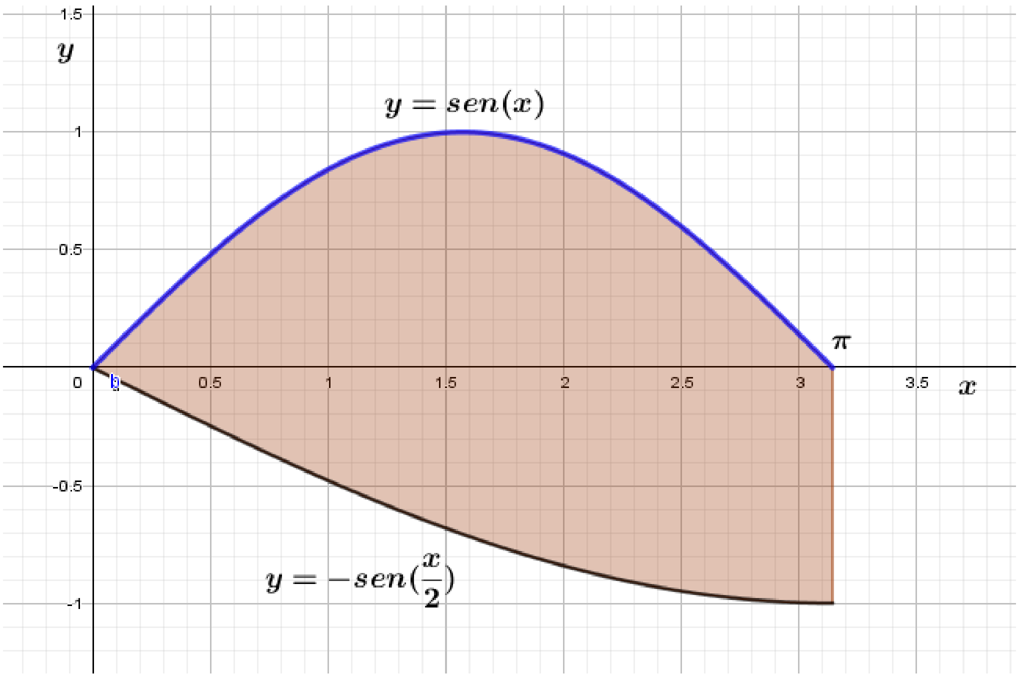
T P 07 Ej 5-e

$$I = \int_{x=0}^{\pi} \int_{y=-\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}^{\operatorname{sen}(x)} f(x,y)\, dy\, dx =$$

Gráfico del recinto de integración

$$-\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \leq y \leq \operatorname{sen}(x)$$

$$0 \leq x \leq \pi$$



Geogebra: TP 7-5-e.ggb

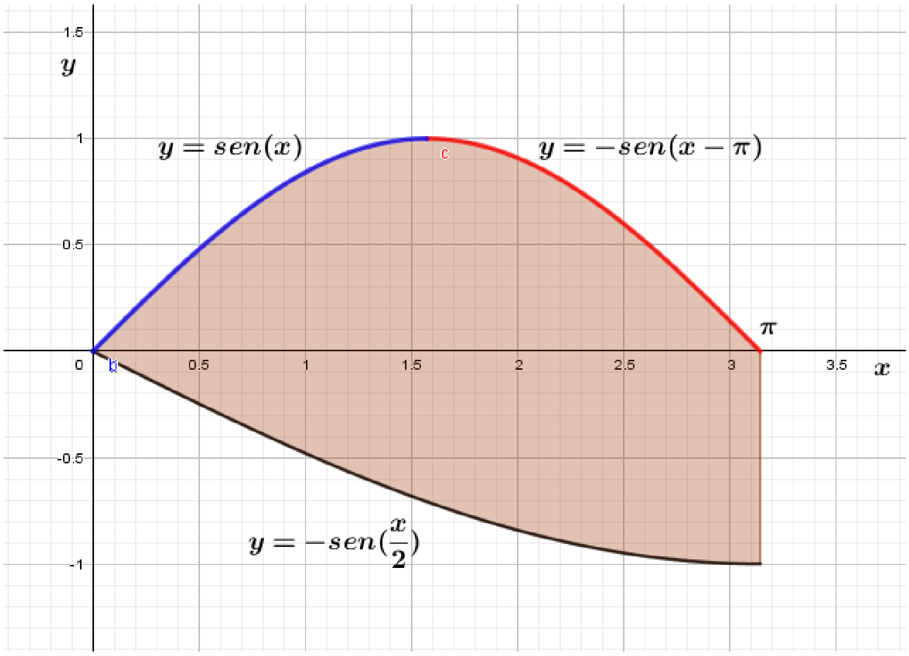
Para describirlo algebraicamente como tipo 2, notemos que en el intervalo $[0, \pi]$, la función

$y = \operatorname{sen}(x)$ no es inyectiva, esto nos obliga a tener que considerar la porción de curva correspondiente a $y = \operatorname{sen}(x)$ en dos partes, por un lado conservamos $y = \operatorname{sen}(x)$ para el intervalo $\left[0. \frac{\pi}{2}\right]$, y por otro lado, si consideramos al origen de coordenadas el punto $(\pi, 0)$, podemos observar que la curva $y = \operatorname{sen}(x)$ sería algo así como $y = -\operatorname{sen}(u)$, como $u = x - \pi$, resultará $y = -\operatorname{sen}(x - \pi)$, que en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ es inyectiva y podemos expresarla como

$$x = arcsen(-y) + \pi = \pi - arcsen(y)$$

$$y = -\operatorname{sen}(x - \pi) = -(sen\, x \underbrace{\cos \pi}_{-1} - \cos x \underbrace{sen\, \pi}_{0}) = sen\, x$$

Así se vería el gráfico



De esta manera la parte del recinto que está desde el eje x hacia arriba resulta

$$arcsen(y) \leq x \leq \pi - arcsen(y)$$
$$0 \leq y \leq 1$$

Y la parte del recinto por debajo del eje x es

$$-2\,arcsen(y) \leq x \leq \pi$$
$$-1 \leq y \leq 0$$

Así las cosas, la integral dada con el cambio de oren de integración es

$$I = \int_{x=0}^{\pi} \int_{y=-\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)}^{\operatorname{sen}(x)} f(x,y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_{y=-1}^{0} \int_{x=-2arcsen(y)}^{\pi} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{y=0}^{1} \int_{x=arcsen(y)}^{\pi-arcsen(y)} f(x,y)\,dy\,dx =$$