Álgebra y Geometría analítica II

Primer cuatrimestre de 2020

¿Cuántas formas tenemos para definir a una Transformación Lineal?

3 FORMAS

Expresión ó Fórmula General

Matriz de la T.L. en determinadas bases

Definir a la T.L. sobre una base del conjunto de partida

¿Cómo pasar de una forma a otra?

TEOREMA (Teorema fundamental de las transformaciones lineales)

Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales, sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$ y $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\} \subset \mathbb{W}$. Entonces existe una única transformación lineal $T: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ que verifica

$$\begin{cases} T(v_1) = w_1 \\ T(v_2) = w_2 \\ \quad\vdots \\ T(v_n) = w_n \end{cases}$$

EJEMPLO 1:

a) Definir, de ser posible, una Transformación Lineal $f: R^{2x2} \rightarrow P_2$, que cumpla lo siguiente:

- $f\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2x - 3$
- $Nu\ f = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R^{2x2}\ /\ a - 2b = d + c = 0 \right\}$

b) Dar la expresión general de f

Ejemplo Teorema Fundamental TL

¿Existirá una TL que cumpla con lo pedido?

Me fijo: Los datos que me dan son contradictorios?
¿Contradice el teorema de la Dimensión?

Analizo si con los datos dados, puedo prever las dimensiones del Núcleo e Imagen y ver si encuentro alguna contradicción

TL: $f: R^{2x2} \rightarrow P_2$

- $f\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2x - 3$ ⇒ $\boxed{\dim Im\, f \geq 1}$
- $Nu\ f = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R^{2x2} \ /\ a - 2b = d + c = 0 \right\}$ ⇒ Puedo hallar una base y dar su dimensión

Ejemplo Teorema Fundamental TL

TL: $f: R^{2x2} \rightarrow P_2$

- $f\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2x - 3$ ➡ $\boxed{\dim Im\, f \geq 1}$

- $Nu\, f = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R^{2x2} \,/\, a - 2b = d + c = 0 \right\}$ ➡ Puedo hallar una base y dar su dimensión

$$a = 2b \;\; y \;\; d = -c$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & b \\ c & -c \end{pmatrix} = b.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Nu\, f = gen \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$ ➡ Solo 2 vectores, no son múltiplos, por lo tanto son LI

$$B_{Nu\, f} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$ $\boxed{\dim Nu\, f = 2}$

¿Existirá una TL que cumpla con lo pedido?

Me fijo: Los datos que me dan son contradictorios?
¿Contradice el teorema de la Dimensión?

Analizo si con los datos dados, puedo prever las dimensiones del Núcleo e Imagen y ver si encuentro alguna contradicción

TL: $f: R^{2x2} \to P_2$

$\boxed{\dim Im\ f \geq 1}$

$\boxed{\dim Nu\ f = 2}$

Teorema de la dimensión:

$$\boxed{\underset{4}{\dim R^{2x2}} = \underset{2}{\dim Nu\ f} + \underset{\boxed{2}}{\dim Im\ f}}$$

Los datos no contradicen esto ya que dicen: $\dim Im\ f \geq 1$

Ejemplo Teorema Fundamental TL

Existirá una TL que cumpla con lo pedido

¿Cómo definir a f sobre una base?

Elegir una base del Conjunto de Partida

Dar las imágenes de los vectores de la base elegida

TL: $f: R^{2x2} \to P_2$

- $f\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2x - 3$
- $Nu\ f = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R^{2x2} \ / \ a - 2b = d + c = 0\right\}$

Ejemplo Teorema Fundamental TL

Elegir una base del Conjunto de Partida

Dar las imágenes de los vectores de la base elegida

TL: $f: R^{2x2} \to P_2$ $\quad f\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2x - 3$ $\quad B_{Nu\,f} = \left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{cases} f\left(\qquad \right) = \\ f\left(\qquad \right) = \\ f\left(\qquad \right) = \\ f\left(\qquad \right) = \end{cases}$$

$f\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2x - 3$ DATO

$f\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0x^2 + 0x + 0$ DATO

$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0x^2 + 0x + 0$ DATO

$f\left(\qquad \right) =$

Como dim $Im\ f = 2$ entonces debo agregar un vector LI a la primera imagen

Agrego un vector del conjunto de partida, que sea LI con los demás para formar la base

Ejemplo Teorema Fundamental TL

$$f\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 2x-3$$ DATO

$$f\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = 0x^2+0x+0$$ DATO

$$f\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix} = 0x^2+0x+0$$ DATO

$$f\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \boxed{= x^2}$$

Como dim $Im\ f = 2$ entonces debo agregar un vector LI a la primera imagen

$Por\ ej. x^2$

Agrego un vector del conjunto de partida, que sea LI con los demás para formar la base

$$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[F2+F1\to F2]{} \begin{pmatrix}-2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1} \rightarrow \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

EJEMPLO 1:

a) Definir, de ser posible, una Transformación Lineal $f: R^{2x2} \rightarrow P_2$, que cumpla lo siguiente:

- $f\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2x - 3$
- $Nu\ f = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R^{2x2} \ / \ a - 2b = d + c = 0\right\}$

$$f\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2x - 3$$

$$f\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0x^2 + 0x + 0$$

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0x^2 + 0x + 0$$

$$f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x^2$$

Definimos a la T.L. sobre una base del conjunto de partida

b) Dar la expresión general de f

Sea $f: R^{2x2} \rightarrow P_2$ / $\begin{cases} f\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2x - 3 \\ f\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0x^2 + 0x + 0 \\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0x^2 + 0x + 0 \\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x^2 \end{cases}$

¿Cómo dar la expresión o fórmula general de f ?

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f\left[\alpha_1.\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_4.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \rightarrow \begin{cases} -2\alpha_1 + 2\alpha_2 = a \\ \alpha_1 + \alpha_2 = b \\ \alpha_3 = c \\ \alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4 = d \end{cases}$$

Usando las propiedades de la T L

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha_1.f\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2.f\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3.f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_4.f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo Teorema Fundamental TL

Sea $f: R^{2x2} \to P_2$ / $\begin{cases} f\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2x - 3 \\ f\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0x^2 + 0x + 0 \\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0x^2 + 0x + 0 \\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x^2 \end{cases}$

¿Cómo dar la expresión o fórmula general de f ?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha_1.\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_4.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2\alpha_1 + 2\alpha_2 = a \\ \alpha_1 + \alpha_2 = b \\ \alpha_3 = c \\ \alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_4 = d \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{4}(2b - a) \qquad \alpha_2 = \frac{1}{4}(a + 2b)$$

$$\Rightarrow \alpha_3 = c \qquad \alpha_4 = \frac{1}{4}(a - 2b) + c + d$$

Ejemplo Teorema Fundamental TL

DATOS

$\alpha_1 = \frac{1}{4}(2b - a)$

$\alpha_2 = \frac{1}{4}(a + 2b)$

$\alpha_3 = c$

$\alpha_4 = \frac{1}{4}(a - 2b) + c + d$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha_1 . \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 . \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_4 . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha_1 . f\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 . f\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 . f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_4 . f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} f\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2x - 3 \\ f\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0x^2 + 0x + 0 \\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0x^2 + 0x + 0 \\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x^2 \end{cases}$$

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(2b - a).(2x - 3) + \frac{1}{4}(a + 2b).(0) + c.(0) + \left(\frac{1}{4}(a - 2b) + c + d\right).x^2$$

$$\boxed{f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4}(a - 2b) + c + d\right)x^2 + \left(b - \frac{1}{2}a\right)x + \frac{3}{4}(a - 2b)}$$

Ejemplo Teorema Fundamental TL

$$\begin{cases} f\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2x - 3 \\ f\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0x^2 + 0x + 0 \\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0x^2 + 0x + 0 \\ f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x^2 \end{cases}$$

LA TL ESTÁ DEFINIDA SOBRE UNA BASE DEL CONJUNTO DE PARTIDA

$$\boxed{f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4}(a-2b) + c + d\right)x^2 + \left(b - \frac{1}{2}a\right)x + \frac{3}{4}(a-2b)}$$

EXPRESIÓN GENERAL O FÓRMULA DE LA TL

Puedo verificar si se cumplen todos los datos que me dieron para estar seguros de haber calculado bien la expresión general