ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA I

MODULO 1

MATRICES

Definición de Matriz

Una matriz es una tabla de números dispuestos en filas (líneas horizontales) y columnas (líneas verticales). Sus **elementos** son números reales o complejos.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ : & : & \boldsymbol{a_{ij}} & : \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En donde a_{ij} representa cada número ubicado en la matriz, donde i es el número de fila y j es el número de columna.

Se puede escribir empleando paréntesis ( ) o corchetes [ ].

Orden

Se denomina **dimensión**, **tamaño** u **orden** a la cantidad de filas y de columnas que posee.

En este caso A es una matriz de $m \times n$.

A las matrices las simbolizaremos con letras mayúsculas

Ejemplo:

Sea: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & \sqrt{5} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$ esta es una matriz de *2 filas* y *3 columnas*, los *elementos o entradas* son *números reales*, se expresa de la siguiente manera $A \in \mathbb{R}^{2\times3}$.

Otra forma de presentar la matriz A es: $[a_{ij}]_{\boldsymbol{Orden}\ 2\times3} \wedge a_{ij} \in \mathbb{R}$

$A \in \mathbb{R}^{2\times3}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} i = fila & 1 \le i \le 2 \\ j = columna & 1 \le j \le 3 \end{cases}$

El elemento que aparece en la *fila i* y la *columna j* de la matriz A se le nombra como $\boxed{a_{ij}}$. Por ejemplo, $a_{12} = -1$ y $a_{21} = 3$.

Ejercicio:

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & \sqrt{5} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$ Indicar cuál es el valor asignado a cada una de las entradas de la matriz A detalladas en la siguiente tabla

a_{11}=………………	a_{12}=………………	a_{13}=………………
a_{21}=………………	a_{22}=………………	a_{23}=………………

La matriz A $= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & \sqrt{5} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}_{2\times 3}$ decimos que es rectangular; en cambio B = $\begin{bmatrix} 2^5 & -7 \\ 7 & 1{,}2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ es de igual cantidad de filas que de columnas y se denomina cuadrada (se abrevia cuadrada de orden 2, no hace falta especificarla de 2×2); como los coeficientes son números reales se dice que $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Una matriz $B \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ tendría la siguiente forma general:

$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{bmatrix} = [c_{i,j}] \;/\; 1 \le i \le 4;\; 1 \le j \le 2$ en donde cualquier c_{ij} es un número real.

En general, una matriz de orden $n \times m$ es un arreglo así

$$D= \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \bullet & \bullet & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \bullet & \bullet & d_{2m} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ d_{n1} & d_{n2} & \bullet & \bullet & d_{nm} \end{bmatrix} = [d_{i,j}] \;/\; 1 \le i \le n; 1 \le j \le m$$

Ejemplo:

Explicitar la matriz A∈ R^{3x2} tal que $a_{ij} = (-1)^{i+j}.\, i$

La matriz A genérica es $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ debemos considerar la condición $a_{ij} = (-1)^{i+j}.\, i$ para i desde 1 a 3 (porque la matriz tiene 3 filas) y j desde 1 a 2 porque tiene 2 columnas. Calculamos los 6 valores

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ Para calcular a_{11} , i=j=1 reemplazando en $a_{ij} = (-1)^{i+j}.\, i$,

$$a_{11} = (-1)^{1+1}.\,1 = (-1)^2 \,.\, 1 = 1 \,.\, 1 = 1$$

a_{12} , i=1 y j=2 usamos $a_{ij} = (-1)^{i+j}.\, i$, $a_{12} = (-1)^{1+2}.\,1 = (-1)^3 \,.\, 1 = -1 \,.\, 1 = -1$

a_{21} , i=2 y j=1 resulta , $a_{21} = (-1)^{2+1}.\,2 = (-1)^3 \,.\, 2 = -1 \,.\, 2 = -2$

a_{22} , i=2 y j=2 resulta , $a_{22} = (-1)^{2+2}.\,2 = (-1)^4 \,.\, 2 = 1 \,.\, 2 = 2$

a_{31} , i=3 y j=1 resulta , $a_{31} = (-1)^{3+1}.\,3 = (-1)^4 \,.\, 3 = 1 \,.\, 3 = 3$

a_{32} , i=3 y j=2 resulta , $a_{32} = (-1)^{3+2}.\,3 = (-1)^5 \,.\, 3 = -1 \,.\, 3 = -3$

Colocando estos valores en la matriz, resulta $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

Ejercitación:

a) Escribir matrices reales de los siguientes órdenes: 3x4; 4x3; 2x1; 1x2 y 3x3

b) Explicitar La matriz B Є R^{4x4} si $b_{ij} = i^2 - 3j$ Los valores i y j son indicadores de la posición de los elementos b_{ij} en la matriz B.

Igualdad entre matrices

Dos matrices U y V son iguales si teniendo la misma dimensión (mxn), se verifica que, los valores en posiciones correspondientes en cada una de las matrices son iguales

$$U = V \quad \leftrightarrow \quad u_{i,j} = v_{i,j} \quad \text{con} \quad 1 \le i \le m; \quad 1 \le j \le n.$$

Esto significa que los valores en posiciones idénticas tienen que ser iguales.

Ejemplo:

Si $U = V$ con $U = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ y $V = \begin{bmatrix} a+b & 1-b & 1 \\ -7 & c+a & b+a-c \end{bmatrix}$ debe ocurrir que:

$$\begin{cases} 2 = a + b \\ -4 = 1 - b \\ 1 = 1 \\ -7 = -7 \\ -1 = c + a \\ 0 = b + a - c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ \boxed{b = 5} \\ 1 = 1 \\ -7 = -7 \\ c + a = -1 \\ c = a + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + 5 = 2 \\ b = 5 \\ 1 = 1 \\ -7 = -7 \\ c + a = -1 \\ c = a + 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boxed{a = -3} \\ b = 5 \\ 1 = 1 \\ -7 = -7 \\ c + a = -1 \\ c = a + 5 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \boxed{a = -3} \\ b = 5 \\ 1 = 1 \\ -7 = -7 \\ c - 3 = -1 \\ c = -3 + 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 5 \\ 1 = 1 \\ -7 = -7 \\ \boxed{c = 2} \\ \boxed{c = 2} \end{cases}$$

Comprobación:

$$\begin{cases} V = \begin{bmatrix} a+b & 1-b & 1 \\ -7 & c+a & b+a-c \end{bmatrix} \\ a = -3 \\ b = 5 \\ c = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V = \begin{bmatrix} -3+5 & 1-5 & 1 \\ -7 & 2+(-3) & 5+(-3)-2 \end{bmatrix} \\ a = -3 \\ b = 5 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} V = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -7 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ a = -3 \\ b = 5 \\ c = 2 \end{cases}$$ la matriz V entonces es igual a la matriz $U = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ que es lo propuesto en el ejercicio.

Clasificación De Matrices

Una matriz se llama **matriz columna** si es de orden mx1.

Mostrar 3 ejemplos de matrices columna de diferente tamaño; de diferente cantidad de filas.

A las **matrices columna** se las suele llamar **vector columna**

¿Se podrá hablar de **matrices fila**?

¿A cuál tipo de matriz se denominará **vector fila**?

Mostrar 3 ejemplos de matrices fila con diferente cantidad de columnas.

Se llama **matriz Nula** o **Cero** (**N** o **O**) a una matriz con todas sus entradas o elementos iguales a **0**.

¿Cuáles son las matrices nulas para 2x5 y 4x4?

La siguiente matriz G es de orden 3x5: $G = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -4 \\ 8 & 3{,}2 & -2 & -0{,}3 & 5 \end{bmatrix}$

Los elementos g_{ii} se llaman **elementos diagonales** de la matriz G.

¿Qué valores puede tomar i en este caso? ¿Cuáles son los elementos diagonales?

La matriz G puede pensarse como formada por tres vectores filas $G_1, G_2\ y\ G_3$. Escribirlos.

Se acostumbra a anotar a $G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} G_1 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots) \\ G_2 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots). \\ G_3 = (\cdots \quad \cdots \quad \cdots) \end{cases}$

De forma similar se reconocen 5 vectores columnas G^1, G^2, G^3, G^4, G^5 de forma tal que es $G = [G^1 \quad G^2 \quad G^3 \quad G^4 \quad G^5] \rightarrow$

$$\rightarrow G^1 = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}, G^2 = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}, G^3 = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}, G^4 = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}, G^5 = \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}.$$

Se llama **traza** de una matriz a la suma de los elementos diagonales.

Una matriz cuadrada se denomina **triangular superior** si todas las entradas por debajo de la diagonal principal se anulan; **triangular inferior** si todas las entradas por encima de la diagonal principal son nulos.

Brindar ejemplos de ambas en R^{2x2}, R^{3x3} y R^{4x4}.

¿La matriz nula cuadrada de *orden n* es triangular superior?

Una matriz cuadrada, que a la vez es triangular superior y triangular inferior se llama matriz diagonal, dicho de otra forma:

Una matriz cuadrada cuyas entradas no diagonales son nulas se llama **matriz diagonal**.

Escriba una de orden 2 y otra de orden 4.

¿Es la matriz $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ una matriz diagonal?

¿Cuál es la forma general de una matriz diagonal de orden 3?

$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$ usar # para indicar números diferentes de cero y $*$ si la entrada es cero.

Una **matriz diagonal** tal que sus elementos de la diagonal principal sean idénticos se llama **matriz escalar**.

Dar 2 ejemplos de matrices escalares de diferente orden.

Una matriz *escalar* con unos (1) en la diagonal se llama **matriz identidad,** se simboliza I_n, siendo n el orden de la matriz.

Escribir I_2 y I_3 . $\quad \boldsymbol{I_2} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{I_3} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

Traspuesta de una matriz

Si H es una matriz de mxn se defina ***traspuesta*** de H (se anota H^T o H^t) a la matriz de dimensión nxm tal que los vectores fila de H son los vectores columnas de H^T. O simbólicamente:

$$[H^T]_{i,j} = [H]_{j,i} \text{ con } 1 \leq i \leq n \,,\, 1 \leq j \leq m$$

Escribir las transpuestas de las siguientes matrices:

$$H = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix}; \; H' = \begin{bmatrix} \sqrt[4]{11} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}; \; H'' = \begin{bmatrix} 3 & -5,5 & \sqrt{17} \\ \frac{1}{4} & 0 & -12 \\ 5^2 & 4 & -9 \\ 7 & 0,45 & -4 \\ 1 & -9 & 59 \end{bmatrix}; \; H''' = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ -9 & 10 \end{bmatrix}.$$

Luego de las operaciones entre matrices, volveremos a la traspuesta para hablar de sus propiedades.

Una matriz cuadrada se llama **simétrica** si es igual a su transpuesta.

$$S \text{ es simétrica} \Leftrightarrow S = S^t \quad \text{Debe cumplir } [S]_{i,j} = [S]_{j,i}$$

$$S = \begin{bmatrix} 7 & \mathbf{1} & -3 \\ \mathbf{1} & 2 & \mathbf{9} \\ -3 & \mathbf{9} & 0 \end{bmatrix}$$ S es una matriz simétrica

Ejemplificar tres matrices simétricas de diferente dimensión.

Indicar una regla en lenguaje coloquial para decidir si una matriz cuadrada es o no simétrica.

Una matriz <u>*cuadrada*</u> L se llama **antisimétrica** si $[L]_{i,j} = -[L]_{j,i}$.

$$L = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ -4 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$ L es una matriz antisimétrica

$$L \text{ es antisimétrica} \Leftrightarrow L = -L^t \quad \text{Debe cumplir } [L]_{i,j} = -[L]_{j,i}$$

Dar 3 ejemplos de matrices antisimétricas. Dar una regla en lenguaje coloquial.

OPERACIONES ENTRE MATRICES

1) **Suma de matrices**

Solo podemos definir la ***suma*** para matrices del *mismo orden*.

Sean A y B $\in R^{mxn}$; se define una matriz suma S así: $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Por ejemplo:

$$A+B=\begin{bmatrix}-2 & 10 & 2 & \pi\\ 1 & -3 & 4 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -10 & 7 & -6\\ 23 & 0 & -3{,}2 & \sqrt{17}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-2)+3 & 10+(-10) & 2+7 & \pi-6\\ 1+23 & -3+0 & 4-3.2 & 0+\sqrt{17}\end{bmatrix}$$

$$\boxed{A+B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 9 & \pi-6\\ 24 & -3 & 0{,}8 & \sqrt{17}\end{bmatrix}}$$

Propiedades de la suma de matrices

La suma de matrices cumple las siguientes propiedades:

1) Para toda A y B perteneciente a R^{mxn} resulta que A + B también pertenece a R^{mxn} a esta propiedad se la conoce como **ley de composición interna ó ley de cierre.**

2) Para toda A y B perteneciente a R^{mxn} resulta que **A+ B = B + A** [**conmutatividad**]

3) Para toda A , B y C perteneciente a R^{mxn} resulta que **(A+ B)+C = A + (B + C)** [**asociatividad**]

4) Existe un elemento N perteneciente a R^{mxn} tal que para toda matriz A perteneciente a R^{mxn} resulta **A+N = N + A**. [**existencia de elemento neutro,** la matriz nula]

5) Toda matriz A tiene una matriz –inversa aditiva u **opuesta-** denotada - A que cumple que **A + (-A) = - A + A** [**elemento simétrico respecto a la suma**]

2) **Producto de un escalar por una matriz**

Si $A \in R^{mxn}$ y $k \in R$ definimos la matriz [k.A] como $[kA]_{ij} = k.\,[A]_{ij}$

$$(-4).A=(-4).\begin{bmatrix}-2 & 10 & 2 & \pi\\ 1 & -3 & 4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 10 & 2 & \pi\\ 1 & -3 & 4 & 0\end{bmatrix}.(-4)$$

$$=\begin{bmatrix}(-4)\times(-2) & (-4)\times 10 & (-4)\times 2 & (-4)\times\pi\\ (-4)\times 1 & (-4)\times(-3) & (-4)\times 4 & (-4)\times 0\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}8 & -40 & -8 & -4\pi\\ -4 & 12 & -16 & 0\end{bmatrix}}$$

Propiedades del producto de un escalar por una matriz

El producto de un escalar por una matriz cumple las siguientes propiedades:

1) $\forall \alpha \in R \wedge \forall A \in \mathrm{R}^{mxn} \Rightarrow \alpha.A \in \mathrm{R}^{mxn}$ **[ley externa]**

2) $\forall \alpha, \beta \in R \wedge \forall A \in \mathrm{R}^{mxn} \Rightarrow$ resulta que α.(β.A) = (α. β).A [**asociativa mixta**]

3) $\forall \alpha, \beta \in R \wedge \forall A \in \mathrm{R}^{mxn} \Rightarrow$ (α+β).A = α.A+ β.A [**producto distributivo respecto a la suma de escalares** (números)]

4) $\forall \alpha \in R \wedge \forall A$,B$\in \mathrm{R}^{mxn} \Rightarrow$ α.(A+B)= α.A + α.B [**·distributivo respecto a la suma de matrices**]

5) La unidad del "cuerpo" de los números reales es elemento neutro para este producto.

$\forall A \in \mathrm{R}^{mxn}$ resulta que 1. A=A [**elemento unidad**]

Resta de matrices

Habiéndose definido las operaciones ("suma de matrices **y** producto de una matriz por un escalar) podemos pensar a la **resta** como una combinación de ambas:

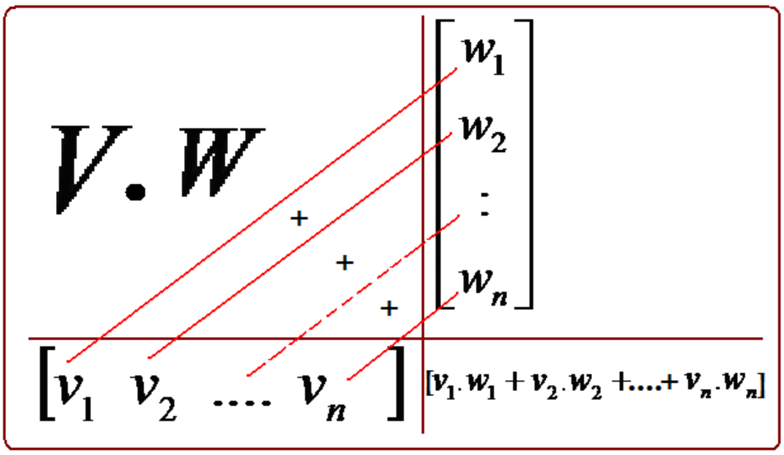
$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-1).\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B}).$$

3) **Producto entre matrices**

Primero vamos a definir el producto entre una matriz fila y una matriz columna en este orden.

Sea V€R^{1xn} y W€R^{nx1} el resultado de V.W es un número real obtenido al realizar la cuenta $v_1.w_1 + v_2.w_2 + v_3.w_3 + \ldots + v_{n-1}.w_{n-1} + v_n.w_n$ donde $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{bmatrix}$ y $W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$

El siguiente esquema puede usarse como facilitador gráfico.



Ejercicio:

Efectuar el producto de las matrices $A\epsilon\mathbb{R}^{1x3}\ y\ B\epsilon\mathbb{R}^{3x1}$, para obtener $A.B$

Si $A = [6 \quad -3 \quad -8]$ y $B = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$

Producto de matrices	**Matriz que pos-multiplica**
Matriz que pre-multiplica	**Matriz Producto**

Producto de matrices	$\boldsymbol{B}$
$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A.B}$

Producto de matrices	$\begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$
$[6 \quad -3 \quad -8]$	$\mathbf{6 \times (-1) + (-3) \times (-6) + (-8) \times 0}$=[12]

Resulta que A.B = [12]

Ponemos la respuesta entre corchetes pues el resultado es una **matriz de 1x1**.

Producto

Producido el primer paso se puede intentar la generalización del producto de $V\in R^{mxn}$ y $W\in R^{pxq}$.

Se piensa a V considerando m vectores filas de n elementos, $V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & .. & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & .. & v_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ v_{m1} & v_{m2} & .. & v_{mn} \end{bmatrix}$

y a W como q vectores columnas de p elementos $W = \begin{bmatrix} W^1 & W^2 & .. & W^q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & .. & w_{1q} \\ w_{21} & w_{22} & .. & w_{2q} \\ .. & .. & .. & .. \\ w_{p1} & w_{p2} & .. & w_{pq} \end{bmatrix}$

La siguiente disposición nos facilitará la compresión de lo que se pretende inducir.

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} W^1 & W^2 & & W^q \end{array} \\
V.W & \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & -- & w_{1q} \\ w_{21} & w_{22} & -- & w_{2q} \\ -- & -- & -- & -- \\ w_{p1} & w_{p2} & -- & w_{pq} \end{bmatrix} \\
\hline
\begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{array} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & .. & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & .. & v_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ v_{m1} & v_{m2} & .. & v_{mn} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} V_1.W^1 & V_1.W^2 & \vdots & V_1.W^q \\ V_2.W^1 & V_2.W^2 & \vdots & V_2.W^q \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ V_m.W^1 & V_m.W^2 & \vdots & V_m.W^q \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Para llenar cada celda se debe efectuar el producto de una matriz fila por una correspondiente columna donde ambas tengan la misma cantidad de componentes. <u>Por lo tanto **n** debe ser igual a **p**. O sea, sólo se puede multiplicar matrices donde la primera tenga igual cantidad de columnas que tiene por filas la segunda</u>.

Además, el orden de la matriz producto es: $\boxed{\boldsymbol{Orden}(V.W) = m \times q}$

Ejemplo

Sean las matrices $U = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}_{Orden\ 3\times 2}$, $Z = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}_{Orden\ 2\times 3}$, efectuar el producto $U.Z$

Primero: se analiza la dimensión de las matrices $U \ y \ Z$, verificando que la **cantidad de columnas** de la *la matriz U* sea igual a la **cantidad de filas** de *la matriz Z.*

Orden de la matriz $Orden(U) = 3 \times \mathbf{2}$ $\quad Orden(Z) = \mathbf{2} \times 3$

Conclusión la operación $U \times Z$ se pueden realizar.

La matriz producto tendrá por dimensión u orden la cantidad de filas de la matriz que pre-multiplica (U) y la cantidad de columnas de la que pos-multiplica (Z).

La dimensión u orden de la matriz $Orden(U \times Z) = 3 \times 3$

Usando el esquema para la operación producto de matrices se calcula $U \times Z$

$Producto\ de\ (U.Z)$	$\begin{bmatrix} -1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} (-3)\times(-1)+(-2)\times 0 & (-3)\times 5+(-2)\times 1 & (-3)\times(-7)+(-2)\times(-4) \\ 4\times(-1)+0\times 0 & 4\times 5+0\times 1 & 4\times(-7)+0\times(-4) \\ (-1)\times(-1)+5\times 0 & (-1)\times 5+5\times 1 & (-1)\times(-7)+5\times(-4) \end{bmatrix}$

$$\boxed{U.Z = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-17} & \mathbf{29} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{20} & \mathbf{-28} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-13} \end{bmatrix}}$$

Ejercicio

Sean U $= \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, Z $= \begin{bmatrix} -1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$, T= $[8 \quad -8 \quad -3]$, R $= \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

a) ¿Cuál de los siguientes productos están definidos?

$U.Z;\ \ Z.U;\ \ U.T;\ \ T.U;\ Z.T;\ \ Z.R;\ \ R.Z;\ U.R;\ R.U;\ T.R;\ \ R.T$

Conviene escribir las dimensiones de ambas matrices en el orden del producto y comparar número de columna con número de fila.

$U.Z$: $3x\mathbf{2} \bullet \mathbf{2}x3 \rightarrow 3x3$ $\qquad$ $Z.U$: $2x\mathbf{3} \bullet \mathbf{3}x2 \rightarrow 2x2$
$U.T$: $3x2 \bullet 1x3$ *no se puede* $\qquad$ $T.U$: $1x\mathbf{3} \bullet \mathbf{3}x2 \rightarrow 1x2$
$Z.T$: $2x3 \bullet 1x3$ *no se puede* $\qquad$ $Z.R$: $2x3 \bullet 3x1 \rightarrow 2x1$
$R.Z$: ……………………………… $\qquad$ $U.R$: ………………………….
$R.U$: ……………………………… $\qquad$ $T.R$: …………………………
$R.T$: ……………………………..

Completar las restantes.

b) Realicemos el producto $Z.U = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$; $\quad Z.U = \begin{bmatrix} 30 & -33 \\ 8 & -20 \end{bmatrix}$

Z.U	$\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} -1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3+20+7 & 2+0-35 \\ 0+4+4 & 0+0-20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{30} & \mathbf{-33} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-20} \end{bmatrix}$

Sean, U $= \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, Z $= \begin{bmatrix} -1 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{U.Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-17} & \mathbf{29} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{20} & \mathbf{-28} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-13} \end{bmatrix}$ y $\boldsymbol{Z.U} = \begin{bmatrix} \mathbf{30} & \mathbf{-33} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-20} \end{bmatrix}$

¿El producto de las matrices ***U y Z*** es conmutativo? ……………

c) Completar los productos dados en a) que sean posibles de resolver.

Notar que con los primeros ejemplos surge que la propiedad conmutativa no se cumple: existiendo $A.B$ puede no existir $B.A$ o existir $B.A$ y ser de diferente tamaño o no coincidir con $A.B$.

Mostrar ejemplos con las tres posibilidades.

Dar un ejemplo donde se cumpla la conmutatividad del producto. Si no encuentras, puedes investigar en Internet, ejemplos de matrices que conmuten**.**

Propiedades del producto entre matrices

El producto entre matrices cumple las siguientes propiedades:

1- **A.(B.C)=(A.B).C** [Asociativa]

La demostración de esta propiedad la puedes leer en el archivo “TEORIA- PROPIEDAD ASOCIATIVA DEL PRODUCTO DE MATRICES” Es opcional

Realizaremos un ejemplo para evidenciar que no importa como asociemos, agrupemos, llegamos al mismo resultado como producto:

Ejemplo:

Sean las matrices: A= $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ B = $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ C = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Realizaremos (A . B) . C por un lado, y A. (B . C) por otro

$$(A . B) . C = \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \right) . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -7 & -7 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -7 & -7 \end{bmatrix}$$

$$A. (B . C) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} . \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -7 & -7 \end{bmatrix}$$

Las dos formas arrojan el mismo resultado.
(A . B) . C = A. (B . C) esto es una muestra de que la propiedad se cumple, **no es una demostración.**

Al cumplirse la propiedad asociativa, es posible escribir los dos productos sin paréntesis:
A . B . C = (A . B) . C = A. (B . C)

2- **A.(B + C) =A.B + A.C** [Distributiva respecto a la suma por izquierda]

3- **(B + C).A = B.A + C.A** [Distributiva respecto a la suma por derecha]

4- **α.(A.B) = (α .A).B = A. (α . B)** [Asociativa respecto al producto por un escalar]

5- Para *matrices cuadradas* **A** de orden n, la matriz identidad $\mathbf{I_n}$ es el elemento neutro para la multiplicación, es decir, se cumple: $\mathbf{A.I_n} = \mathbf{I_n.A = A}$

Otras propiedades de la Traspuesta

Luego de haber visto las operaciones entre matrices, podemos agregar algunas propiedades de la traspuesta.

1) $\left(A^t\right)^t = A$ La traspuesta de la traspuesta es la matriz original

2) $\left(A+B\right)^t = A^t + B^t$ La traspuesta de una suma, es la suma de las traspuestas. La traspuesta es distributiva con respecto a la suma.

3) $\left(\alpha A\right)^t = \alpha A^t$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. La traspuesta de una constante por una matriz es igual a la constante por la traspuesta de la matriz.

4) $\left(A.B\right)^t = B^t.A^t$ La traspuesta de un producto de matrices, es el producto de las traspuestas **en el orden inverso.**

Analiza las dimensiones de las matrices en esta última propiedad.

Resolver los ejercicios 1 al 9 del archivo llamado "MÓDULO 1-TRABAJO PRÁCTICO Y APLICACIONES"

Videos:

Con ejercicio de demostraciones de propiedades de matrices simétricas y antisimétricas:

https://www.youtube.com/watch?v=vretXdAIDmI