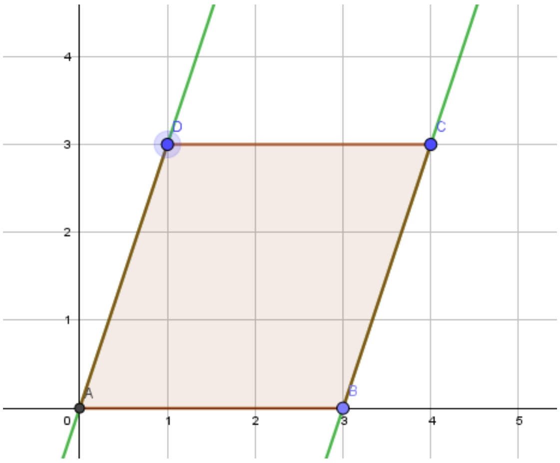
T P 7 Ej 4 f

Dibujar las regiones de integración y calcular la integral:

$$\iint_S 2x^2y^3\,dxdy \qquad S\ es\ el\ paralelogramo\ de\ vertices\ (0,0),(3,0),(1,3)\ y\ (4,3)$$

Veamos el recinto de integración S



Obsérvese que los valores de x estan definidos entre las dos rectas paralelas de ecuaciones $y = 3x$ e $y = 3x - 9$, mientras que los valores de y son aquellosque se ubican entre 0 y 3.

Vemos que en este caso la región de integración a utilizar es de TIPO 2. Por lo tanto, necesitamos tener la variable x en funcion de y. Lo cual con un simple despeje obtenemos las dos ecuaciones de las rectas dadas por:

$$x = \frac{1}{3}y \qquad y \qquad x = \frac{1}{3}y + 3$$

De esta manera, el recinto S, queda determinado de la siguiente manera:

$$S = \left[\frac{1}{3}y, \frac{1}{3}y + 3\right] \times [0,3]$$

Al ser una región del tipo 2, debemos integrar primero respecto de la variable x. Por lo tanto, la integral está dada como

$$\int_{y=0}^{3} \left(\int_{x=\frac{1}{3}y}^{\frac{1}{3}y+3} 2x^2y^3\,dx \right) dy$$

Resolvemos la integral que está dentro del paréntesis.

$$\int_{x=\frac{1}{3}y}^{\frac{1}{3}y+3} 2x^2y^3\,dx = \frac{2}{3}x^3y^3\Big|_{x=\frac{1}{3}y}^{\frac{1}{3}y+3} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}y + 3\right)^3 \cdot y^3 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}y\right)^3 \cdot y^3$$

$$2\left(\frac{(y+9)^3}{81}\right) \cdot y^3 - \frac{2}{3} \cdot \frac{y^3}{27} \cdot y^3 = 2y^3 \cdot \left(\frac{(y+9)^3}{81} - \frac{y^3}{81}\right) = \frac{2}{81}y^3 \cdot ((y+9)^3 - y^3)$$

Desarrollando el cubo dentro del paréntesis, y reemplazando en la integral original, tenemos:

$$\frac{2}{81}\int_{y=0}^{3} y^3 \cdot (27y^2 + 243y\ 729)dy = \frac{2}{81}\frac{27}{6}y^6 + \frac{243}{5}y^5 + \frac{729}{4}y^4\Big|_0^3$$

$$\frac{2}{81}\left(\frac{6561}{2} + \frac{59049}{5} + \frac{59049}{4}\right) = \frac{7371}{10}$$