Resolución TP5:

Ejercicio 11 - Regla Nemotécnica

Tomando el sistema conformado por:

$$\begin{cases} 3x = u + v + w \\ x^2 + y^2 = u^2 + v^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3u^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F(x,y,z,u,v,w) = 0 \\ G(x,y,z,u,v,w) = 0 \\ H(x,y,z,u,v,w) = 0 \end{cases} \quad respectivamente$$

b- ¿Es posible que x, y, z sean funciones de u, v, w en un entorno del mismo punto P?

Herramientas:

- Se deben formular las 3 condiciones del teorema usando regla de la cadena.
- Una vez que sabemos el funcionamiento de regla de la cadena podemos utilizar una regla Nemotécnica

Para empezar:

$$\begin{cases} 3x = u + v + w \\ x^2 + y^2 = u^2 + v^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3u^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - u - v - w = 0 \\ x^2 + y^2 - u^2 - v^2 = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 - 3u^3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x,y,z,u,v,w) = 3x - u - v - w = 0 \\ G(x,y,z,u,v,w) = x^2 + y^2 - u^2 - v^2 = 0 \\ H(x,y,z,u,v,w) = x^3 + y^3 + z^3 - 3u^3 = 0 \end{cases}$$

Derivamos:

$$\boxed{F(x,y,z,u,v,w) = 3x - u - v - w = 0}$$

$F_x = 3$ $F_y = 0$ $F_z = 0$ $F_u = -1$ $F_v = -1$ $F_w = -1$	$F_x(P) = 3$ $F_y(P) = 0$ $F_z(P) = 0$ $F_u(P) = -1$ $F_v(P) = -1$ $F_w(P) = -1$

$$\boxed{G(x,y,z,u,v,w) = x^2 + y^2 - u^2 - v^2 = 0}$$

$G_x = 2x$ $G_y = 2y$ $G_z = 0$ $G_u = -2u$ $G_v = -2v$ $G_w = 0$	$G_x(P) = 2$ $G_y(P) = 2$ $G_z(P) = 0$ $G_u(P) = -2$ $G_v(P) = -2$ $G_w(P) = 0$

$$\boxed{H(x,y,z,u,v,w) = x^3 + y^3 + z^3 - 3u^3 = 0}$$

$H_x = 3x^2$ $H_y = 3y^2$ $H_z = 3z^3$ $H_u = -9u^2$ $H_v = 0$ $H_w = 0$	$H_x(P) = 3$ $H_y(P) = 3$ $H_z(P) = 3$ $H_u(P) = -9$ $H_v(P) = 0$ $H_w(P) = 0$

b- Sacamos las siguientes condiciones nemotécnicamente, se cumple TFI en un sistema del enunciado:

1) El punto pertenece a los conjuntos de nivel solicitados.

- $F(P) = 0,\ G(P) = 0,\ H(P) = 0$

2) Las derivadas parciales son continuas en el entorno del punto P

- Las derivadas $F_x F_y F_z F_u F_v F_w G_x G_y G_z G_u G_v G_w$ y $H_x H_y H_z H_u H_v H_w$ son continuas en el entorno del punto.

3) El jacobino de las variables dependientes es distinto de 0

- Variables dependientes son x, y, z
- $\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(P) = \begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}_P \neq 0$

TFI-Condición 1) ya vimos que se cumple en F, se cumple en G y se cumple en H

TFI-Condición 2) ya vimos que se cumple en F, se cumple en G y se cumple en H

TFI-Condición 3)

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(P) = \begin{vmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}_P = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$$

El determinante es distinto de 0 por lo que se cumple la condición.

Se cumple TFI por lo tanto existen$x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$ y $z = z(u,v,w)$ en$P = (1,1,1,1,1,1)$.

Además, podríamos calcular sus derivadas parciales en el punto $P' = (1,1,1)$ consiste en la formula nemotécnica siguiente

$$\frac{\partial V_d}{\partial V_i}(P') = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial\left(\begin{bmatrix} V_i & si & x=V_d \\ x & si & x\neq V_d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} V_i & si & y=V_d \\ y & si & y\neq V_d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} V_i & si & z=V_d \\ z & si & z\neq V_d \end{bmatrix}\right)}(P)}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(P)}$$

Reemplazos

$$\partial\left(\begin{bmatrix} V_i & si & x = V_d \\ x & si & x \neq V_d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} V_i & si & y = V_d \\ y & si & y \neq V_d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} V_i & si & z = V_d \\ z & si & z \neq V_d \end{bmatrix}\right)$$

$$\frac{\partial V_d}{\partial V_i}(P') = -\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial\left(\begin{bmatrix} V_i & si & x=V_d \\ x & si & x\neq V_d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} V_i & si & y=V_d \\ y & si & y\neq V_d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} V_i & si & z=V_d \\ z & si & z\neq V_d \end{bmatrix}\right)}(P)}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,y,z)}(P)}$$