EJERCICIOS DE ALGEBRA II - **PRIMER CUATRIMESTRE 2015**

Ejercicio 3) Práctica de autovalores y autovectores

Para un endomorfismo f: $\mathbb{V} \to \mathbb{V}$ se define conjunto propio correspondiente a un autovalor λ al conjunto formado por todos los autovectores de autovalor λ junto con el vector nulo $\vec{0}$ del espacio vectorial.

Compruebe que se trata de un subespacio al que se llama subespacio propio o autoespacio correspondiente a λ denotado por E $(f)_\lambda$. La dimensión del autoespacio de autovalor se llama **multiplicidad geométrica de** λ

El conjunto de los autovectores de autovalor de f son E $(f)_\lambda = \left\{\vec{v} \in V / f(\vec{v}) = \lambda\, \vec{v}\right\}$ y a este conjunto se le agrega el $\vec{0}$

Ver que es subespacio de $\mathbb{V}$ es facil

a) $\vec{0} \in$ E $(f)_\lambda$

b) sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que pertenecen a E $(f)_\lambda$, luego $f(\vec{u}) = \lambda\, \vec{u}$; $f(\vec{v}) = \lambda\, \vec{v}$, ¿que pasa con $\vec{u}+\vec{v}$?. Veamos f$(\vec{u}+\vec{v})$=f$(\vec{u})$+f$(\vec{v})$=$\lambda\, \vec{u} + \lambda\, \vec{v} = \lambda\, (\vec{u} + \vec{v})$, luego $\vec{u}+\vec{v} \in$ E $(f)_\lambda$

c) sea $\vec{u}$ que pertenece a E $(f)_\lambda$ y k$\in$ K (cuerpo). Luego f$(\overrightarrow{ku})$=kf$(\vec{u})$=k$(\lambda\, \vec{u}) = \lambda\, (k\vec{u})$ luego $\overrightarrow{ku} \in$E $(f)_\lambda$

Está demostrado. **El autoespacio o subespacio propio en mi barrio suelen llamarlo *subespacio invariante* (ante la transformación f**).

Ejercicio 4) misma práctica

Dado un endomorfismo f: $\mathbb{V} \to \mathbb{V}$ con autovalor λ y *i* es el endomorfismo identidad o sea *i*$(\vec{v})$=$\vec{v}$, $\forall \vec{v} \in \mathbb{V}$

a) describir como actúa la transformación (f- αi) para $\alpha \in$ R

Para todos los vectores se cumplirá que (f- αi)$\vec{v}$ = f$(\vec{v})$ - $\alpha\vec{v}$

Si $\vec{v}$ **pertenece al subespacio propio de f con autovalor** λ el resultado será f$(\vec{v})$ - $\alpha\vec{v} = \lambda\vec{v} - \alpha\vec{v} = (\lambda - \alpha)\vec{v}$

b) Mostrar que el subespacio propio o autoespacio o subespacio invariante (el barrio quiere estar presente) de $\lambda \in R$ es el núcleo de la transformación lineal (f- λ*i)* , es decir E $(f)_\lambda$ = Nu(f - λ*i*)

Del apartado anterior surge que si reemplazamos α con λ entonces resulta f$(\vec{v})$ - $\lambda\vec{v} = \lambda\vec{v} - \lambda\vec{v} = (\lambda - \lambda)\vec{v} = \vec{0}$, luego los autovectores con autovalor λ de f son el núcleo de (f- λ*i)*

Esto no es novedad. Tomemos por ejemplo una matriz como la siguiente:

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Si buscamos su polinomio característico resulta ser $X^3 - 5X^2 + 3X + 9$ cuyas raíces son 3 (doble) y -1 (simple)

Si hacemos A-λI y reemplazamos con los autovalores resulta

Para = 3

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ que obviamente es diferente de A , por lo tanto representa a otra transformación , en este caso $(f - 3i)$

Si nos detenemos a analizar la matriz representativa vemos que tiene dimensión 1 , por lo tanto su imagen tendrá esa dimensión y el Nucleo de $(f - 3i)$ será de dimensión 2.

Si buscamos los autovectores correspondientes al autovalor (doble) 3 , veremos que genera un plano en R^3 (que contiene al origen) que es el núcleo de $(f - 3i)$.

Lo mismo con el otro autovalor que generará una recta (que contiene al origen) en R^3 .

En definitiva lo que el ejercicio quiere decir es eso.

Ejercicio 7) misma práctica.

a) si $\vec{v}$ es un autovector de autovalor λ entonces f($\vec{v}$) $= \lambda\ \vec{v}$

Si expresamos el vector $\vec{v}$ en la base B y multiplicamos a sus coordenadas por la matriz que representa a f partiendo de B y llegando a B , tenemos que recordar el concepto de matriz de una T.L.

Era la matriz que multiplicando las coordenadas de un vector en la base de salida nos da las coordenadas del vector transformado por f en la base de llegada.

Luego el transformado de $\vec{v}$ es $\lambda\ \vec{v}$, por lo tanto al hacer M_{BB}(f)$[\vec{v}]_B = \lambda[\vec{v}]_B$

b) si se quiere representar a la matriz I en la base B se podría expresar de la siguiente manera

$C_{EB} I\ C_{BE} = C_{EB}\ C_{BE} = I$

O sea que la identidad en la base B se expresa como I. Pues $I_{BB}[\vec{v}]_B = [\vec{v}]_B$

c) El núcleo correspondiente a M_{BB}(f- αi) cuando $\alpha = \lambda$ es el subespacio propio de M_{BB}(f) generado por los autovectores de autovalor λ.

d) utilizando M_{BB}(f- λi)$[\vec{v}]_B = \vec{0}$, entendiendo a $[\vec{v}]_B$ como las coordenadas genéricas de un vector en la base B.

e) Si λ es autovalor de f , entonces se cumple M_{BB}(f- λi)$[\vec{v}]_B = \vec{0}$ siendo $\vec{v} \neq \vec{0}$ (por definición de autovector), por lo tanto el sistema homogéneo de ecuaciones que se genera es compatible indeterminado y para ello el rango de la matriz de coeficientes (que coincide en este caso con la ampliada) es menor que el número de incógnitas (las coordenadas del vector) y por lo tanto el rango de la matriz no es n y por ello su determinante es nulo.Al calcular el determinante nos queda entonces un polinomio en grado n en λ igualado a 0.

f)i) si paso de una base a otra lo único que tengo que hacer es el respectivo cambio de base

ii) ejercicio resuelto en clase (independencia del polinomio característico)

Ejercicio 10 - misma práctica

c) no necesariamente . Si el autovalor tiene multiplicidad algebraica doble (por ejemplo) y genera un subespacio propio de dimensión 2 (un plano en R^3) , podremos elegir en dicho plano dos vectores que son L.I y que corresponden al mismo autovalor.

d) la prueba rigurosa de esta afirmación puede ser la siguiente

Si A es una matriz , sabemos que una matriz B es semejante a A si B = T^{-1} A T , donde T es obviamente una matriz inversible

Ahora supongamos que A tenga un autovalor λ_0 (de cierta multiplicidad algebraica $m_a(\lambda_0)$) el cual genera un subespacio de autovectores de multiplicidad geométrica $m_g(\lambda_0)$=r.

Luego podemos tener r vectores que son base de ese subespacio $\left\{\vec{t_1}, \vec{t_2}, \vec{t_3}, \ldots. \vec{t_r}\right\}$, que obviamente cumplen $A(\vec{t_i}) = \lambda_0 \vec{t_i}$, para i =1,..,r

Podemos ampliar la base del subespacio (en el caso que r<n) a una base de todo el espacio vectorial T=$\left\{\vec{t_1}, \vec{t_2}, \vec{t_3}, \ldots. \vec{t_r}, \overrightarrow{t_{r+1}}, \overrightarrow{t_{r+2}}, \ldots \vec{t_n}\right\}$

Como los vectores agregados (que son L.I. con los anteriores) no son autovectores , entonces $A(\vec{t_i}) = \vec{y_i}$, para i =r+1, ...,n

Construimos la matriz T =$\left[\vec{t_1} \;\; \vec{t_2} \;\; \vec{t_3} \ldots. \vec{t_r} \;\; \overrightarrow{t_{r+1}} \;\; \overrightarrow{t_{r+2}} \ldots \vec{t_n}\right]$, en la cual las columnas son los vectores $\vec{t_i}$

Calculemos B = T^{-1} A T , partiendo de A T =

$$\left[A\vec{t_1} \;\; A\vec{t_2} \;\; A\vec{t_3} \ldots A\vec{t_r} \;\; A\overrightarrow{t_{r+1}} \;\; A\overrightarrow{t_{r+2}} \ldots A\vec{t_n}\right] = \left[\lambda_0\vec{t_1} \;\; \lambda_0\vec{t_2} \;\; \lambda_0\vec{t_3} \ldots \lambda_0\vec{t_r} \;\; \overrightarrow{y_{r+1}} \;\; \overrightarrow{y_{r+2}} \ldots \vec{y_n}\right]$$

que es lo mismo que multiplicar

$$\left[\vec{t_1} \;\; \vec{t_2} \;\; \vec{t_3} \ldots. \vec{t_r} \;\; \overrightarrow{t_{r+1}} \;\; \overrightarrow{t_{r+2}} \ldots \vec{t_n}\right] \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & d & e & f \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & g & h & i \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 & 0 & j & k & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_0 & m & n & o \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & \epsilon & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta & \eta & \theta \end{pmatrix}$$

donde la segunda matriz tiene dimensión nxn , teniendo una submatriz diagonal λ_0 de dimensión rxr, otra submatriz nula rx(n-r)

otra submatriz C señalizada con letras del alfabeto de dimensión (n-r)xr y otra submatriz D con letras del alfabeto griego de dimensión (n-r)x(n-r)

O sea quedaría A. T = $\left[\vec{t_1} \;\; \vec{t_2} \;\; \vec{t_3} \ldots. \vec{t_r} \;\; \overrightarrow{t_{r+1}} \;\; \overrightarrow{t_{r+2}} \ldots \vec{t_n}\right] \begin{pmatrix} \lambda_0 I_r & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ donde con la segunda matriz sintetizamos lo expresado en el párrafo anterior.

ahora si B = T^{-1} A T , entonces A.T = T T^{-1} A T = T.B

Pero por lo que hemos logrado si A. T = $\left[\vec{t_1} \;\; \vec{t_2} \;\; \vec{t_3} \ldots. \vec{t_r} \;\; \overrightarrow{t_{r+1}} \;\; \overrightarrow{t_{r+2}} \ldots \vec{t_n}\right] \begin{pmatrix} \lambda_0 I_r & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ y la primer matriz del lado derecho de la igualdad es T , entonces surge que

B = $\begin{pmatrix} \lambda_0 I_r & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$

Si buscamos el polinomio característico de B (que es el mismo que el de A , recordar la invariabilidad del mismo) , resulta

$$\lambda I_n - B = \begin{pmatrix} (\lambda-\lambda_0)I_r & -C \\ 0 & \lambda I_{n-r} - D \end{pmatrix}$$

y $\det(\lambda I_n - B) = \det\begin{pmatrix} (\lambda-\lambda_0)I_r & -C \\ 0 & \lambda I_{n-r} - D \end{pmatrix} = (\lambda-\lambda_0)^r.\det(\lambda I_{n-r} - D)$

como A y B tienen las mismas multiplicidades geométricas para λ_0 que es m$_g(\lambda_0)$ y a λ_0 le queda la posibilidad de ser también autovalor de D nadie le impide ello), entonces resulta que m$_a(\lambda_0)\geq$m$_g(\lambda_0)$

Q.**E**.**D**. (locución latina "*Quod erat demonstrandum*" que significa "*lo que se quería demostrar*")

Puede ser que en otro barrio se demuestre de otra forma.

ejercicio 11) misma práctica

a) si λ es autovalor de A , entonces para ciertos vectores A$\vec{v} = \lambda\vec{v}$

Ahora A$^2\vec{v}$ = A(A$\vec{v}$)=A($\lambda\ \vec{v}$)=$\lambda^2\vec{v}$

Repitiendo resulta A$^n\vec{v} = \lambda^n\vec{v}$

b) Si A es inversible tiene rango n y por lo tanto el núcleo de la transformación asociada tiene por único vector el nulo , por lo tanto no existen otros autovectores con autovalor nulo.

A la inversa , si la matriz no tiene autovalores nulos , entonces el núcleo de la transformación asociada es el vector nulo y por lo tanto es un endomorfismo y monomorfismo , por lo tanto es isomorfismo y entonces tiene inversa.

c) si A es inversible y $\lambda \neq \vec{0}$ es autovalor , entonces λ^{-1} es autovalor de A^{-1}

A$\vec{v}$ =$\lambda\vec{v}$ $\rightarrow$ A^{-1}A$\vec{v}$ = A$^{-1}\lambda\vec{v}$ $\rightarrow$ $\vec{v} = \lambda$ A$^{-1}\vec{v} \rightarrow \lambda^{-1}\vec{v}$ = A$^{-1}\vec{v}$