ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA I

MODULO 1

CÁLCULO DE DETERMINANTES

MENOR COMPLEMENTARIO

Dada A una matriz cuadrada de orden n, definimos ***menor complementario*** M_{ij} de un elemento a_{ij} de A como el determinante que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j donde se encuentra dicho elemento a_{ij}.

Ejemplo:

$Si\ A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ obtenemos los nueve menores complementarios, uno por cada de sus elementos:

$M_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 6 = 1$ ya que hemos suprimido la fila 1 y la columna 1 como muestra el esquema:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 42 = -42$, $M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 35 = 35$ pues se ha eliminado respectivamente:

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Siguiendo,

$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$, $M_{22} = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 14 = 10$, $M_{23} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 4 - 14 = -10$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2$, $M_{32} = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -24 - 0 = -24$ y $M_{33} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 20 - 0 = 20$.

Si B = $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 9 & -2 \\ 11 & -3 & -5 & 2 \\ 0 & -5 & -0{,}4 & 6 \\ 7 & -1 & -9 & 1 \end{bmatrix}$ hay 16 menores complementarios; M_{23} es $\begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ –que por ahora no tenemos su resultado; - (1)-

ADJUNTO O COFACTOR DE UN ELEMENTO

Dada una matriz cuadrada A de orden n, se define el **adjunto o cofactor** de un elemento a_{ij} de A como el número real

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij}}$$

Para nuestra matriz A tenemos:

$A_{22} = (-1)^{2+2}. M_{22} = 1. 10 = 10;$
$A_{32} = (-1)^{3+2}. M_{32} = -1. (-24) = 24,$
y así con los otros 7 cofactores.

Comentarios

a) Al cofactor le "antepone" "**un uno"** o **"un menos uno"** al menor complementario de acuerdo a cual posición ocupa en la matriz. Por ejemplo en una matriz 3x3 los signos que se multiplican a cada menor complementario son:

$$\begin{pmatrix} +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

b) El resultado puede ser positivo, negativo o cero. Que los ejemplificados fueran positivos es una coincidencia.

REGLA DE LAPLACE O DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA LÍNEA.

Si A es una matriz cuadrada de orden n, se define su **determinante** como la suma del producto de cada uno de los elementos de una línea cualquiera elegida de la matriz por su correspondiente **adjunto o cofactor**. La línea puede ser una **fila** o una **columna**.

Si A= $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ y, por ejemplo, desarrollamos por la columna 2,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{12}.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}.(-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{32}.(-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Det(A) = $a_{12}.A_{12} + a_{22}.A_{22} + a_{32}.A_{32}$

Ejemplo:

Regresemos a nuestra matriz $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ y hallemos su determinante.

Primero hagámoslo por la fila 2 y luego por la columna 3 para visualizar la coincidencia de ambos resultados y analizar si en alguno de los dos casos tuvimos alguna ventaja operativa.

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ \boxed{0 \quad -5 \quad 6} \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det(A)} = 0.\ (-1)^{2+1}.\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-5).\ (-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 6.(-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}$$

Det (A) = 0 – 5.(–4 + 14) –6 . (4 – 14) = –50 +60 = 10.

Usando la tercera columna:

$$|A| = -2.\ (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 6.\ (-1)^{2+3}.\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 1.\ (-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$$

$|A|$ =–2. 35 – 6. (–10) + 1. 20 = –70 + 60 + 20 = 10.

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & \boxed{-2} \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Comentarios:

1) Si una columna –o fila– tiene algún o algunos ceros es más sencillo desarrollar por allí pues el término correspondiente se anula sin importar el valor del cofactor, y sin necesidad de calcularlo.

2) En la página 2 –(1)– debíamos el valor M_{23} que era $\begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 6 \\ 7 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ y que como hemos visto vale 10.

3) Si tenemos una matriz de orden 4 el determinante se consigue a través de cuatro sumandos que involucran determinantes de orden 3 que como hemos visto podemos obtener.

Para una matriz de 5x5 se precisarían hallar 5 determinantes de 4x4 que por lo antedicho puede alcanzarse –a pesar de lo engorroso de las cuentas- y así siguiendo para cualquier matriz de orden n.

4) Si una matriz cuadrada es triangular superior, triangular inferior o diagonal su determinante resulta tener una expresión muy sencilla.

Obtenerla si $T_S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$, $T_i = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$

5) Se aconseja no utilizar la regla de Sarrus pues la misma es válida solamente para determinantes de orden 3 (si no la conoce mejor).

Combinación de la regla de Laplace y Propiedades de determinante (Mix)

Podemos ir alternando el uso de las dos herramientas ya abordadas.
Recalculemos el determinante anterior para mostrar la técnica.

det(T) = det$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$ = det$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$ a la fila 2 le restamos 3 veces la fila 1 y a la fila 3 le sumamos la fil 1 , al hacer esto, el determinante no cambia.

y luego desarrollamos por la columna 1: det(T) = 1.$\begin{vmatrix} -6 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

con t_{31}=1 y a través de columnas vamos a obtener dos ceros adicionales.

$C_1.(-1) + C_2 \to C_2$, $C_1.(-2) + C_3 \to C_3$: det(T)= $\begin{vmatrix} -6 & 11 & 13 \\ 3 & -4 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

y desarrollando por la tercera fila

$$\det(T) = 1.\,(-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} 11 & 13 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = (-33 + 52) = 19$$

Obtención de la matriz inversa por la Adjunta

Dada una matriz $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{\mathbf{nxn}}$, llamemos M_{ij} a la matriz (n–1) x(n–1) que resulta de eliminar la i-ésima fila y la j-ésima columna de A. Podemos hallar el determinante de M_{ij}, dado que es una matriz cuadrada; dicho determinante se lo llama **menor** de a_{ij}.

Se llama cofactor A_{ij} de a_{ij} a la siguiente expresión = $(-1)^{i+j}.\det(M_{ij})$ (o sea el producto del menor por (–1) elevado a la suma de los índices de la fila y la columna eliminadas)

Se denomina ***matriz de cofactores*** a la matriz calculada por la siguiente expresión:

$$C_A = \left[\ (-1)^{i+j}\left|M_{i,j}\right|\ \right]_{1\le i\le N,1\le j\le N}$$

La adjunta de una matriz cuadrada A es la matriz de cofactores transpuesta.

$$\mathrm{Adj}(A) = \left(C_A\right)^t$$

La adjunta nos habilita a conseguir la matriz inversa de una matriz A pues:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{Adj}(A)$$

Ejemplo

Afiancemos todo lo visto para $U=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\det(U) = \det\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{3+2}.\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -\ (-10+2) = 8$$

La matriz de cofactores es $C_U = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ y la $\mathrm{Adj}(U) = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$U^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} -5 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}{8} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{8} & -\frac{2}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{2}{8} & -\frac{4}{8} & \frac{6}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{2}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$
; puede comprobarse que $U.U^{-1} = I$.

Resolver los ejercicios 31 al 33, 36, 37, 41 al 43, 45 y 46 del archivo llamado "MÓDULO 1, GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS Y APLICACIONES"

Comienza a resolver los ejercicios de la EJERCITACIÓN EXTRA

Videos de la cátedra:

Ejercicios de Inversibilidad de matrices y uso de determinantes

https://www.youtube.com/watch?v=bAmP0mMXyfA