Ecuaciones Diferenciales

EJEMPLO 1

Hallar la solución general de la siguiente ecuación diferencial de primer orden no homogénea.

$$y' - 3y = -9x$$

Solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea.

Dada

$$y' + P_{(x)}y = Q_{(x)}$$

La solución estará dada por:

$$y_{(x)} = u(x) \cdot v(x)$$

Siendo

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx}$$

$$v(x) = \int \frac{Q(x)}{u(x)} dx + h$$

Entonces:

$$y' - 3y = -9x$$

Donde $P(x) = -3$ y $Q(x) = -9x$

Hallamos $u(x)$ y $v(x)$.

$$u(x) = e^{-\int -3dx}$$

Al resolver la integral del exponente:

$$-\int -3\, dx = \int 3\, dx = 3x$$

Por lo tanto.

$$u(x) = e^{3x}$$

Por lo tanto, podemos hallar $v(x)$ dado por

$$v(x) = \int \frac{Q(x)}{u(x)} dx + h$$

$$v(x) = \int \frac{-9x}{e^{3x}} dx + h$$

$$v(x) = -9 \int x \cdot e^{-3x}\, dx + h$$

Para hallar $v(x)$, debemos resolver la integral

$$\int x \cdot e^{-3x}\, dx$$

Utilizaremos en este caso el método de integración por parte:

$$\int u\ dv = u \cdot v - \int v\ du$$

Teniendo en cuenta esto, tomamos los términos como:

$$u = x \qquad\qquad dv = e^{-3x} dx$$

$$\frac{du}{dx} = 1 \qquad\qquad v = \int e^{-3x}\, dx$$

$$du = dx$$

Ahora, para aplicar el método de integración por partes debemos resolver la integral

$$\int e^{-3x}\, dx$$

Para determinar el termino v. En este caso, tomando $t = -3x$, esta integral queda definida como:

$$\int e^{-3x}\, dx = \int e^t \frac{dt}{-3} = -\frac{1}{3} \int e^t\, dt$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\int e^{-3x}\, dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} = v$$

Reemplazando en el método de integración por partes:

$$\int x \cdot e^{-3x} dx = x \cdot \left(-\frac{1}{3} e^{-3x}\right) - \int -\frac{1}{3} e^{-3x} dx$$

$$\frac{1}{3}\int e^{-3x}\,dx$$

$$\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)$$

$$\int x\cdot e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x}$$

Por lo tanto,

$$v(x) = -9\int x\cdot e^{-3x}\,dx + h$$

$$v(x) = -9\left(-\frac{x}{3}e^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x}\right) + h$$

$$v(x) = 3xe^{-3x} + e^{-3x} + h$$

De esta manera, la solución para la ecuación diferencial

$$y' - 3y = -9x$$

Dada por $y_{(x)} = u(x)\cdot v(x)$ es:

$$y_{(x)} = (e^{3x})\cdot(3xe^{-3x} + e^{-3x} + h)$$

$$y_{(x)} = 3x + 1 + he^{3x}$$

Solución general.

Si bien no existe un método general para dar respuesta exacta a todas las ecuaciones diferenciales de primer orden no homogéneas. Los métodos existentes son aplicables a ciertos tipos de ED. En este caso, de la forma

$$y' + P_{(x)}y = Q_{(x)}$$

Donde P y Q son funciones de x. Esta podría resolverse, si expresamos el lado izquierdo como la derivada de un solo termino, para esto, agregamos el **factor integrante.**

El siguiente procedimiento nos dará una forma de resolver el tipo de ecuaciones diferenciales antes mencionadas.

Multiplicamos la ecuación por la función $\mu_{(x)}$

$$\mu_{(x)}y' + \mu_{(x)}P_{(x)}y = \mu_{(x)}Q_{(x)}$$

Sabemos que: $[\mu_{(x)}y]' = \mu_{(x)}y' + \mu'_{(x)}y$

Comparando esta expresión con el lado izquierdo de la anterior

Para que $[\mu_{(x)}y]' = \mu_{(x)}y' + \mu_{(x)}P_{(x)}y$

Tiene que pasar que $\mu'_{(x)} = \mu_{(x)}P_{(x)}$

Esta expresión puede reacomodarse como:

$$\mu'_{(x)} - \mu_{(x)}P_{(x)} = 0$$

La cual es una ED de primer orden lineal homogénea, para la cual conocemos su solución, por lo tanto

$$\mu_{(x)} = ke^{\int P_{(x)}dx}$$

Llamado **factor integrante**.

Con la ayuda de dicho factor integrante podemos expresar la ecuación

$$y' + P_{(x)}y = Q_{(x)}$$

Como

$$\mu_{(x)}y' + \mu_{(x)}P_{(x)}y = \mu_{(x)}Q_{(x)}$$

$$[\mu_{(x)}y]' = \mu_{(x)}Q_{(x)}$$

$$\mu_{(x)}y = \int \mu_{(x)}Q_{(x)}dx + C$$

$$y = \frac{1}{\mu_{(x)}}\left[\int \mu_{(x)}Q_{(x)}dx + C\right]$$

Estamos en condiciones de resolver la ecuación diferencial

$$y' - 3y = -9x$$

Tenemos que $P_{(x)} = -3$ y $Q_{(x)} = -9x$

Entonces

$$\mu_{(x)} = ke^{\int P_{(x)}dx}$$

$$\mu_{(x)} = ke^{\int -3dx}$$

Tomamos $k = 1$

$$\mu_{(x)} = e^{-3x}$$

Por lo tanto, la solución general estará dada por

$$y = \frac{1}{\mu_{(x)}}\left[\int \mu_{(x)}Q_{(x)}dx + C\right]$$

$$y = \frac{1}{e^{-3x}}\left[\int e^{-3x} \cdot (-9x)dx + C\right]$$

Debemos resolver esta integral

$$\int e^{-3x} \cdot (-9x)dx$$

Recordemos los pasos de resolución

$$-9\int x \cdot e^{-3x}dx$$

Centrémonos en la expresión

$$\int x \cdot e^{-3x}dx$$

Utilizaremos en este caso el método de integración por parte:

$$\int u\ dv = u \cdot v - \int v\ du$$

Teniendo en cuenta esto, tomamos los términos como:

$$u = x \qquad\qquad dv = e^{-3x}dx$$

$$\frac{du}{dx} = 1 \qquad\qquad v = \int e^{-3x}\,dx$$

$$du = dx$$

Ahora, para aplicar el método de integración por partes debemos resolver la integral

$$\int e^{-3x}\,dx$$

Para determinar el termino v. En este caso, tomando $t = -3x$, esta integral queda definida como:

$$\int e^{-3x}\,dx = \int e^{t}\,\frac{dt}{-3} = -\frac{1}{3}\int e^{t}\,dt$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\int e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}e^{-3x}$$

Reemplazando en el método de integración por partes:

$$\int x \cdot e^{-3x}dx = x \cdot \left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) - \int -\frac{1}{3}e^{-3x}dx$$

$$\frac{1}{3}\int e^{-3x}\,dx$$

$$\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right)$$

$$\int x \cdot e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x}$$

Pero recordemos que esta integral estaba multiplicada por -9

$$-9\int x \cdot e^{-3x}dx = -9\left(-\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x}\right)$$

$$= 3xe^{-3x} + e^{-3x}$$

$$e^{-3x}(3x+1)$$

Recordemos la solución dada por la ecuación diferencial

$$y = \frac{1}{e^{-3x}}\left[\int e^{-3x} \cdot (-9x)dx + C\right]$$

$$y = e^{3x} \cdot [e^{-3x}(3x+1) + C]$$

Solución general:

$$y = 3x + 1 + C \cdot e^{3x}$$

Hallar la solución particular sujeta a la condición

$$y(2) = 13$$

Es decir, que hallaremos C, sabiendo que $(x_0, y_0) = (2,13)$, tenemos de esta manera:

$$13 = 3 \cdot 2 + 1 + C \cdot e^{3\cdot 2}$$

$$13 = 3 \cdot 2 + 1 + C \cdot e^{3\cdot 2}$$

$$6 = C \cdot e^{6}$$

$$\frac{6}{e^{6}} = C$$

$$6 \cdot e^{-6} = C$$

Solución particular:

$$y = 3x + 1 + C \cdot e^{3x}$$

$$y = 3x + 1 + 6 \cdot e^{-6} \cdot e^{3x}$$

$$y = 6 \cdot e^{3x-6} + 3x + 1$$

EJEMPLO 2

Hallar la solución general de la siguiente ecuación diferencial de primer orden no homogénea.

$$(x+1)\cdot y' + y = 5x^2(x+1)$$

Teniendo en cuenta el procedimiento establecido anteriormente, procedemos de la misma manera, es decir, tenemos:

$P_{(x)} = \frac{1}{x+1}$

$Q_{(x)} = 5x^2$

$$\mu_{(x)} = ke^{\int \frac{1}{x+1}dx}$$

$$\mu_{(x)} = ke^{\ln|x+1|}$$

Recordemos que $e^{\ln(x)} = x$

$$\mu_{(x)} = k|x+1|$$

$$\mu_{(x)} = k|x+1| = \begin{cases} k(x+1) & si\ x+1 > 0 \\ -k(x+1) & si\ x+1 < 0 \end{cases}, \mu_{(x)} = C_1(x+1), ahora\ se\ toma\ C_1 = 1$$

$$\mu(x) = x+1$$

$$y = \frac{1}{\mu_{(x)}}\left[\int \mu_{(x)}Q_{(x)}dx + C\right]$$

$$y = \frac{1}{x+1}\left[\int (x+1)\cdot 5x^2 dx + C\right]$$

Primero resolvemos

$$\int 5x^3 + 5x^2 dx = \frac{5}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3$$

$$\int 5x^3\, dx = 5\int x^3\, dx = 5\cdot\frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{5}{4}x^4$$

Solución general:

$$y = \frac{1}{x+1}\left(\frac{5}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + C\right)$$

Hallar la solución particular sujeta a la condición

$$y(2) = 3$$

Es decir, que hallaremos C, sabiendo que $(x_0, y_0) = (2,3)$, tenemos de esta manera:

$$3 = \frac{1}{2+1}\left(\frac{5}{4}(2)^4 + \frac{5}{3}(2)^3 + C\right)$$

$$3 \cdot 3 = 20 + \frac{40}{3} + C$$

$$9 = \frac{100}{3} + C$$

$$-\frac{73}{3} = C$$

Solución particular:

$$y = \frac{1}{x+1}\left(\frac{5}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{73}{3}\right)$$

EJEMPLO 3

Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y' - \frac{4}{x}y = x^5 e^x$$

$P(x) = -\frac{4}{x}$ $\quad Q(x) = x^5 e^x$

$$\mu(x) = k \cdot e^{\int P(x)dx}$$

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \cdot \left[\int \mu(x) \cdot Q(x)dx + C\right]$$

Entonces:

$$\mu(x) = k \cdot e^{\int P(x)dx} = k \cdot e^{\int -\frac{4}{x}dx}$$

$$\mu(x) = k \cdot e^{-4\ln|x|} = \frac{k}{x^4}$$

Tomando $k = 1$

$$\mu(x) = \frac{1}{x^4} = x^{-4}$$

La solución general estará dada por:

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \cdot \left[\int \mu(x) \cdot Q(x)dx + C\right]$$

$$y = \frac{1}{x^{-4}} \cdot \left[\int \frac{1}{x^4} \cdot x^5 e^x dx + C\right]$$

$$y = x^4 \left[\int x \cdot e^x \, dx + C\right]$$

Resolviendo la integral

$$\int x \cdot e^x \, dx = xe^x - e^x$$

$$y = x^4[xe^x - e^x + C]$$

$$y = x^5 e^x - x^4 e^x + x^4 C$$

Hallar la solución particular sujeta a la condición

$$y(1) = 2$$

Es decir, que hallaremos C, sabiendo que $(x_0, y_0) = (1,2)$, tenemos de esta manera:

$$y = x^5e^x - x^4e^x + x^4C$$

$$2 = 1^5e^1 - 1^4e^1 + 1^4C$$

$$2 = e - e + C$$

$$2 = C$$

Solución particular:

$$y = x^5e^x - x^4e^x + 2x^4$$

EJEMPLO 4

$$y' + \left(tg(x)\right)y = cos(x)$$

Teniendo en cuenta el procedimiento establecido anteriormente, procedemos de la misma manera, es decir, tenemos:

$P_{(x)} = tg(x)$

$Q_{(x)} = cos(x)$

$$\mu_{(x)} = ke^{\int tg(x)dx}$$

$$\mu_{(x)} = ke^{-\ln|cos(x)|}$$

$$\mu_{(x)} = k\frac{1}{|cos(x)|}$$

$$\mu_{(x)} = k\frac{1}{|cos(x)|} = \begin{cases} \dfrac{k}{\cos x} & si\ \cos x > 0 \\ -\dfrac{k}{\cos x} & si\ \cos x < 0 \end{cases}, \mu_{(x)} = \frac{C_1}{\cos x}, ahora\ se\ toma\ C_1 = 1$$

$$\mu(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$y = cos(x)\left[\int \frac{1}{cos(x)} \cdot cos(x)dx + C\right]$$

$$y = cos(x)\left[\int 1dx + C\right]$$

$$y = cos(x)(x + C)$$

Hallar la solución particular sujeta a la condición

$$y(\pi) = 1$$

Es decir, que hallaremos C, sabiendo que $(x_0, y_0) = (\pi, 1)$, tenemos de esta manera:

$$y = cos(x)(x + C)$$

$$1 = cos(\pi)(\pi + C)$$

$$1 = -1(\pi + C)$$

$$1 = -\pi - C$$

$$C = -1 - \pi$$

Solución particular:

$$y = cos(x)(x + C)$$

$$y = cos(x)(x - 1 - \pi)$$