Ejercicio 8 - c. Determinar si la función

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

es diferenciable en $(x,y)=(0,0)$.

Resolución. En principio téngase en cuenta la definición de diferenciabilidad.

Definición. Sea $f: A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definida en el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$ y el punto $(x_0,y_0)\in A$. Se dice que f es *diferenciable* en (x_0,y_0), si existen las dos constantes reales A_1 y A_2, y la función escalar *resto* $R(x-x_0,y-y_0)$, definida en algún entorno D de (x_0,y_0), de modo tal que se verifica la relación

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+A_1(x-x_0)+A_2(y-y_0)+R(x-x_0,y-y_0)$$

y tal que, en D, la función resto $R(x-x_0,y-y_0)$ satisface la *propiedad*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{R(x-x_0,y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$$

Según las consecuencias de la diferenciabilidad, las constantes A_1 y A_1 de las que se habla en la definición no pueden ser si no, las derivadas parciales en el punto de diferenciabilidad. En concreto, se cumple

$$A_1=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\qquad A_2=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Esto quiere decir que la existencia de las derivadas parciales en el punto de estudio es una condición necesaria para la diferenciabilidad. Por tal razón, el primer paso en la resolución del ejercicio consiste en calcular las derivadas parciales en el punto de referencia.

En el caso de la derivada parcial respecto de x en el origen, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\left[\frac{h^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2}}\right)}{h}\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\left[h\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2}}\right)\right]$$

Teniendo en cuenta que $\varphi(h)=h$ es un infinitésimo en $h=0$, esto es

$$\lim_{h \to 0} h = 0$$

y que

$$\psi(h) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2}}\right)$$

Es una función acotada dado que

$$\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2}}\right)\right| \leq 1$$

Resulta de este modo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0) = \lim_{h \to 0}\left[h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2}}\right)\right] = 0$$

O sea que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0) = 0$$

Procediendo de manera similar, se concluye que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0{,}0) = 0$$

Esto significa que en el origen existen las dos derivadas parciales de la función f y ambas valen cero.

Una vez asegurada la existencia de las derivadas parciales en el punto de estudio, el siguiente paso consiste en determinar si se cumple la propiedad del resto, es decir

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{R(x - x_0, y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

Que también se puede escribir en función de los incrementos del siguiente modo

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{R(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Si este límite se cumple, se concluye que la función es diferenciable en el punto de estudio, de lo contrario, la función no posee esta propiedad en el punto de referencia.

Recuérdese además que la expresión del resto en la escritura de variables se obtiene según

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) + R(x - x_0, y - y_0)$$

Y que, en la escritura de incrementos, según

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0\,,y_0)k+R(h,k)$$

Tomando esta última escritura para el caso analizado, queda

$$f(0+h,0+k)=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)k+R(h,k)$$

$$f(h,k)=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)k+R(h,k)$$

Es definitiva

$$(h^2+k^2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)=0+0\cdot h+0\cdot k+R(h,k)$$

Esto quiere decir que la expresión del resto en término de los incrementos es

$$R(h,k)=(h^2+k^2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)$$

Interesa ahora, determinar si el límite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{R(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{(h^2+k^2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Existe y vale cero.

Para calcular el límite doble

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{(h^2+k^2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

se escribe del siguiente modo

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{(h^2+k^2)}{\sqrt{h^2+k^2}}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)$$

Y teniendo en cuenta que

$$\frac{(h^2+k^2)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{(h^2+k^2)}{\sqrt{h^2+k^2}}\frac{\sqrt{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{(h^2+k^2)}{(h^2+k^2)}\sqrt{h^2+k^2}=\sqrt{h^2+k^2}$$

Resulta

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{(h^2+k^2)}{\sqrt{h^2+k^2}}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\sqrt{h^2+k^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)$$

Ahora, sabiendo que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2} = 0$$

Y que

$$\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right)\right| \leq 1$$

Se concluye de esta manera que el límite doble en cuestión existe y vale cero. Es decir

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2}\,\operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) = 0$$

O sea, verdaderamente, se cumple la propiedad del resto, esto es

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Con lo cual, se demuestra que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es diferenciable en $(x,y) = (0,0)$.

Observación. Para calcular el valor del límite doble, se utilizó el resultado que se establece en el siguiente teorema, que se suele llamar "Regla del infinitésimo por la función acotada".

Teorema. Sean las funciones

$$\varphi: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

y

$$\psi: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

ambas definidas sobre el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$, y sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto de acumulación de A. Si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varphi(x,y) = 0$$

y si existe algún entorno reducido D' de centro en (x_0, y_0) tal que $D' \cap A \neq \emptyset$ y un número real positivo M tal que

$$|\psi(x,y)| \leq M$$

para todo $(x, y) \in D' \cap A$, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varphi(x, y) \cdot \psi(x, y) = 0$$
