T P 7 Ej 2 e

Calcular la integral:

(a) Integrando primero respecto de $x$.

(b) Integrando primero respecto de $y$.

$$\iint_R \left(\frac{x}{2}-y\right) cosx\; dxdy \qquad\qquad R=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,1]$$

(a) Integrando primero respecto de $x$.

$$\iint_R \left(\frac{x}{2}-y\right) cosxdxdy = \int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{2}-y\right) cosx\, dx\right) dy$$

Resolvemos primero la integral que se encuentra dentro del paréntesis.

$$\int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{2}-y\right) cosx\, dx = \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2} cosx\, dx - y\int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} cosx\, dx$$

Resolviendo la primera integral mediante el método de integración por partes, y ya que la segunda es una integral inmediata, nos queda:

$$\int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2} cosx\, dx - y\int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} cosx\, dx = \frac{1}{2}(x\cdot senx + cosx) - y\cdot senx\Big|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right)-y-\left(\frac{1}{2}(0+1)-y\cdot 0\right)=\frac{\pi}{4}-y-\frac{1}{2}$$

Ahora reemplazamos este resultado en la integral doble inicial.

$$\int_{y=0}^{1}\frac{\pi}{4}-y-\frac{1}{2}dy=\frac{\pi}{4}y-\frac{y^2}{2}-\frac{1}{2}y\,\Big|_{y=0}^{1}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}-1$$

(b) Integrando primero respecto de $y$.

$$\iint_R \left(\frac{x}{2}-y\right) cosxdxdy = \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{y=0}^{1}\left(\frac{x}{2}-y\right) cosx\, dy\right) dx$$

Resolvemos primero la integral que se encuentra dentro del paréntesis.

$$\int_{y=0}^{1}\left(\frac{x}{2}-y\right)cosx\,dy = \int_{y=0}^{1}\frac{x}{2}\cdot cosx - y\cdot cosx\,dy = y\cdot\frac{x}{2}\cdot cosx - \frac{y^2}{2}\cdot cosx\Big|_{y=0}^{1} = \frac{x}{2}cosx - \frac{1}{2}cosx$$

Ahora reemplazamos este resultado en la integral doble inicial.

$$\int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{2}cosx - \frac{1}{2}cosxdx = \frac{1}{2}\int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} x\cdot cosx - cosxdx$$

Aplicando la propiedad de la suma de integrales, resolviendo la primera integral mediante el método de integración por partes, y ya que la segunda es una integral inmediata, nos queda:

$$\frac{1}{2}\big((x\cdot senx + cosx) - senx\big)\Big|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right) - \frac{1}{2}(0+1-0) = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}-1$$