Funciones como modelos matemáticos

El aplicar la Matemática a los problemas de la vida real comprende tres etapas. Primero se traduce el problema a términos matemáticos, entonces decimos que tenemos un modelo matemático. Justamente un modelo matemático es una descripción matemática (a menudo por una función o ecuación) de un fenómeno del mundo real, como el tamaño de la población, la demanda de un producto, la velocidad de un objeto, etc. La finalidad de un modelo es comprender el fenómeno y quizás sacar conclusiones sobre el mismo o predecir comportamientos futuros. Para formular este modelo debemos identificar las variables independientes y dependientes que intervienen y establecer suposiciones que usualmente simplifican el tratamiento matemático del mismo.
Una vez que tenemos el modelo, aplicamos la Matemática que conocemos para obtener la solución del problema. Por último, en la tercera etapa, interpretamos esta respuesta matemática en términos del problema original.
En este apunte nuestra atención se enfocará a la determinación de la función o las funciones que involucran los problemas verbales, dados por tablas o por gráficos.
La facultad para describir las relaciones funcionales que aparecen en un problema es una habilidad matemática que importa desarrollar. Por esta razón mostraremos algunos ejemplos tomados en diferentes campos.

Ejemplo 1

Un estacionamiento en la ciudad cobra $20.00 por la primera hora y $10.00 por cada hora adicional. Expresar la cuota de estacionamiento como una función del número de horas estacionadas.

Solución:

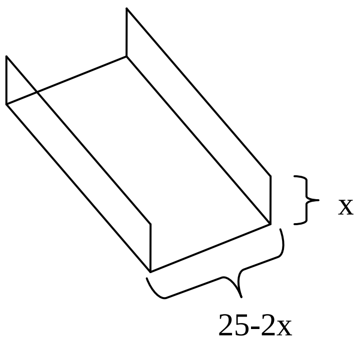
Si x representa el número de horas estacionadas, entonces la cuota de estacionamiento E estará dada por la fórmula $E(x) = 20 + 10\ (x-1)$, donde x es un entero positivo. Si pensamos en el dominio de esta función, serán los números naturales del 1 al 24. Usualmente los estacionamientos tienen un concepto que llaman “estadía” para que la persona que estaciona por muchas horas no pague tanto dinero. Por ejemplo: en este estacionamiento se estableció que la estadía es de 60$ ¿Cómo plantearíamos la función que relaciona la cantidad de horas estacionadas con el importe que hay que pagar en este caso?

Ejemplo 2

De una larga pieza de hoja de lata de 25 cm de ancho se va a hacer una canaleta para la lluvia, doblando hacia arriba sus orillas para formar sus lados. Expresar la cantidad de material que se necesita para hacerla y el volumen de agua que puede soportar en función de la altura.

Solución:

Hagamos un dibujo de la canaleta según los datos del problema



No conocemos la longitud de la canaleta, le daremos un nombre: L. Entonces si queremos saber la cantidad de material que tenemos que utilizar, debemos pensar que tenemos el área de tres rectángulos: dos son los laterales, que tienen la misma área: L.x, el otro es el rectángulo base de la canaleta, que tiene área: (25-2x). L, si sumamos los tres tenemos el área total: A(x) = 2 L x + (25-2x) L = 25. L

Para el volumen será: superficie de la base x altura, entonces: V(x) = (25-2x).L.x

¿Cuál es el dominio de esta función V? ¿Y la imagen? ¿Para qué valor de x este volumen es el máximo que puede tomar la canaleta?

<u>Ejemplo 3</u>

Se sabe que 100 gramos de granos secos de soja contienen 35 gr. de proteínas y 100 gr. de lentejas secas contienen 26 gr. de proteínas. Los hombres de talla media que viven en un clima moderado necesitan 70 gr. de proteínas en su alimentación diaria. Supongamos que un hombre quiere conseguir esos 70 gr. de proteínas comiendo soja y/o lentejas. Sea x la cantidad de soya e y la cantidad de lentejas diarias (x e y medidas en gr.) ¿Cuál es la relación entre x e y?

Solución:

Si 100 grs. de soja tiene 35 grs. de proteínas, x gramos de soja tendrán $\frac{35x}{100}$ proteínas. Lo mismo para las lentejas, y gramos de lentejas tendrán $\frac{26y}{100}$ proteínas. Si un hombre necesita 70 gramos de proteínas por día, entonces la relación entre la cantidad de gramos de soja y gramos de lentejas que tiene que comer está dada por:

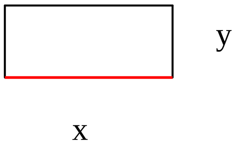
$\frac{35x}{100} + \frac{26y}{100} = 70$ o $3{,}5x + 2{,}6y = 70$ (función dada en forma implícita)

¿Cuál es el dominio y la imagen de esta función?

<u>Ejemplo 4</u>

Un lote rectangular va a cercarse en tres de sus lados. Si el área del lote es de 30 metros cuadrados, exprese la longitud de la cerca como una función de la longitud del lado no cercado.

Solución



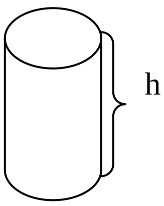
Supongamos que el lado en color rojo es el que no está cercado. La longitud de la cerca será: x + 2y **(1)** Como queremos que quede expresada en función de x (lado no cercado), tenemos que usar el dato: x .y = 30. De aquí despejamos y, obteniendo: $y = \frac{30}{x}$ **(2)**. Reemplazando **(2)** en **(1)** hallamos la función pedida $L(x) = x + \frac{60}{x}$.

¿Cuál es el dominio de la función en el contexto del problema? ¿Cuánto mide el lado no cercado si se utilizó 70 m de material?

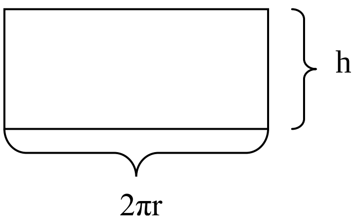
<u>Ejemplo 5</u>

Se desea construir un recipiente con la forma de cilindro circular sin tapa con un volumen de 24π centímetros cúbicos. El precio del material que se usa para el fondo es el triple que el del material que se usa para la parte curva. Exprese el costo del recipiente en función del radio de la base del cilindro.

Solución



El volumen del cilindro es $V = \pi r^2 h$, donde r es el radio y h la altura. Sabemos que este volumen vale 24π, es decir: $\pi r^2 h = 24\pi \Rightarrow r^2 h = 24$ **(3)**
Supongamos que el precio de construir la parte curva es P por metro cuadrado. Esa parte es un rectángulo como mostramos a continuación:



Entonces, como el área es 2π r h, el precio total será: 2π r h P. Si dejamos todo en función del radio, teniendo en cuenta **(3)**: $C1(r) = 2\pi r \frac{24}{r^2} P = \frac{48\pi P}{r}$

Ahora analicemos el costo de la base, que por ser el triple por metro cuadrado que el anterior será de 3P por metro cuadrado. La superficie de la base es πr^2, luego el costo es de $C2(r) = \pi r^2 3P$.

El costo total, entonces será la suma de los dos: $C(r) = \frac{48\pi P}{r} + 3\pi \mathrm{Pr}^2$

<u>Ejemplo 6:</u>

Una compañía de autobuses ha adoptado la siguiente política de precios para los grupos que deseen alquilar autobuses. A los grupos que contengan un máximo de 40 personas se les cobrará una suma fija de $2.400 (40 veces $60). En grupos que contengan entre 40 y 80 personas, cada una pagará $60 menos 50 centavos por cada persona que pase de las 40. La tarifa más baja de la compañía de $40 por persona se ofrecerá a grupos que contengan 80 miembros o más. Exprese los ingresos de la compañía de autobuses como una función del tamaño del grupo.

Solución

Vamos a escribir los ingresos de la compañía (que llamaremos I) en función de la cantidad de miembros del grupo que llamaremos x. Tenemos tres casos:

1) Si $x \leq 40$ I(x) = 2400
2) Si $40 < x < 80$, cada persona pagará $60 - 0.5(x - 40) = 80 - \frac{x}{2}$, por lo que el total de ingreso en este caso es: $I(x) = \left(80 - \frac{x}{2}\right)x$
3) En el tercer caso $I(x) = 40x$

Luego podemos resumir todo en una función definida por trozos:

$$I(x) = \begin{cases} 2400 & 0 < x \leq 40 \\ \left(80 - \frac{x}{2}\right)x & 40 < x < 80 \\ 40x & x \geq 80 \end{cases}$$