Álgebra y Geometría analítica II

Primer cuatrimestre de 2020

Sea $S = \{p \in P_3[R] \,/\, p(1) = p(-1) + p(0)\}$ un subconjunto de $P_3[R]$

a) Probar que S es subespacio de $P_3[R]$

b) Dar dos bases distintas de S y su dimensión.

a) Probar que S es subespacio de $P_3[R]$

$$S = \{p \in P_3[R] \ / \ p(1) = p(-1) + p(0)\}$$

Recordemos:

- $i)\ S \neq \emptyset$ ó bien $\vec{0}_V \in S$
- $ii)\ \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in S: (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \in S$
- $iii) \forall k \in R\ , \forall \vec{v} \in S: (k.\vec{v}) \in S$

$$S = \{p \in P_3[R] \,/\, p(1) = p(-1) + p(0)\}$$ donde $p(x) = ax^3 + \mathrm{b}x^2 + cx + d$

Primero analicemos la condición:

$$p(1) = a.1^3 + \mathrm{b}.1^2 + c.1 + d \quad = a + \mathrm{b} + c + d$$
$$p(-1) = a.(-1)^3 + \mathrm{b}.(-1)^2 + c.(-1) + d \quad = -a + \mathrm{b} - c + d$$
$$p(0) = a.0^3 + \mathrm{b}.0^2 + c.0 + d \quad = d$$

$$a + \mathrm{b} + c + d = -a + \mathrm{b} - c + d + d$$

$$\boxed{2a + 2c = d}$$

$$S = \{p \in P_3[R] \,/\, p(1) = p(-1) + p(0)\}$$ donde $$p = ax^3 + \mathrm{b}x^2 + cx + d$$

$i)\ S \neq \emptyset$ Veré que: $\vec{0}_V \in S$ $\quad \vec{0}_V = \vec{0}_{P_3[R]} = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$

Me pregunto: ¿ $\vec{0}_{P_3[R]} = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \in \boldsymbol{S}$?

Cumple con la condición $2a + 2c = d$ **?**

$$\vec{0}_{P_3[R]} = 0.x^3 + 0.x^2 + 0.x + 0$$

$$a = b = c = d = 0 \Rightarrow \boxed{2.0 + 2.0 = 0}$$ ✓

$\boxed{\textbf{Cumple } \boldsymbol{i})}$

$$S = \{p \in P_3[R] \,/\, p(1) = p(-1) + p(0)\}$$ donde $$p = ax^3 + \mathrm{b}x^2 + cx + d$$

$$ii)\ \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in S : (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \in S$$

$$\vec{v}_1 = ax^3 + \mathrm{b}x^2 + cx + d \quad \in S \ \Rightarrow \ \boxed{2a + 2c = d}$$

$$\vec{v}_2 = a'x^3 + \mathrm{b}'x^2 + c'x + d' \in S \ \Rightarrow \ \boxed{2a' + 2c' = d'}$$

Hipótesis

Me pregunto: ¿$(\boldsymbol{\vec{v}_1} + \boldsymbol{\vec{v}_2}) \in \boldsymbol{S}$?
Cumple con la condición?

$$(\boldsymbol{\vec{v}_1} + \boldsymbol{\vec{v}_2}) = (a + a')x^3 + (\mathrm{b} + b')x^2 + (c + c')x + d + d'$$

$$¿\,2(a + a') + 2(c + \mathrm{c}') = d + d'?$$

$\boxed{2a + 2c = d}$

$\boxed{2a' + 2c' = d'}$

Hipótesis

$$¿\,2(a + a') + 2(c + c') = d + d'?$$

$$2(a + a') + 2(c + c') = 2a + 2a' + 2c + 2c'$$

Distribuyo para poder usar las hipótesis

$$2(a + a') + 2(c + c') = \underbrace{2a + 2c}_{d} + \underbrace{2a' + 2c'}_{d'}$$

Reordeno para usar las hipótesis

$$\boxed{2(a + a') + 2(c + c') = d + d'}$$

Cumple *ii*)

$$S = \{p \in P_3[R] \;/\; p(1) = p(-1) + p(0)\}$$ donde $$p = ax^3 + \mathrm{b}x^2 + cx + d$$

$$iii) \forall k \in R \,, \forall \vec{v} \in S : (k.\vec{v}) \in S$$

$$\vec{v} = ax^3 + \mathrm{b}x^2 + cx + d \quad \in S \quad \Rightarrow \quad \boxed{2a + 2c = d}$$ **Hipótesis**

Me pregunto: ¿ $(\boldsymbol{k}.\vec{\boldsymbol{v}}) \in \boldsymbol{S}$?
Cumple con la condición?

$$\boldsymbol{k}.\vec{\boldsymbol{v}} = kax^3 + \mathrm{kb}x^2 + kcx + kd$$

$$¿\, 2ka + 2\mathrm{kc} = kd?$$

$2a + 2c = d$

Hipótesis

$¿\, 2ka + 2\mathrm{kc} = kd?$

$2ka + 2\mathrm{kc} = \mathrm{k}.\,\underbrace{(2a + 2c)}$

Saco factor común para poder usar la hipótesis

$2ka + 2\mathrm{kc} = k.\,d$

Uso hipótesis

$\boxed{2ka + 2\mathrm{kc} = kd}$ ✓

Cumple *iii*)

Finalmente, puedo decir que S es un subespacio de $P_3[R]$

b) Dar dos bases distintas de S y su dimensión.

$$S = \{p \in P_3[R] \; / \; p(1) = p(-1) + p(0)\}$$

<u>**Recordemos:**</u>

- GENERADORES
- INDEPENDENCIA LINEAL

$$S = \{p \in P_3[R] \,/\, p(1) = p(-1) + p(0)\}$$

GENERADORES

A cualquier elemento de S lo podré escribir como c.l. de sus generadores

$$p = ax^3 + \mathrm{b}x^2 + cx + d \quad \in \mathrm{S} \;\Leftrightarrow\; 2a + 2c = d$$

Entonces la condición es: $\boxed{d = 2a + 2c}$

$$p = ax^3 + bx^2 + cx + d \ \in S \iff 2a + 2c = d$$

$a(x^3+2)+b(x^2)+c(x+2)$

$$p = ax^3 + bx^2 + cx + 2a + 2c$$

$$p = a(x^3 + 2) + b(x^2) + c(x + 2)$$

A cualquier elemento de W lo podré escribir como c.l. de sus generadores

$$\boxed{S = gen\,\{x^3 + 2\,;\ x^2\,;\ x + 2\}}$$

Serán Linealmente independientes?

En este caso, por ser más de dos elementos los generadores encontrados, **NO** podemos ver que como uno no es múltiplo del otro, son LI. LO PROBAREMOS POR DEFINICIÓN

Veamos cómo lo demuestro por Definición:

$$\boxed{S = gen\,\{x^3 + 2\,;\; x^2\,;\; x + 2\}}$$

Combinación lineal de los generadores igualada al vector nulo

$$\alpha_1(x^3 + 2) + \alpha_2(x^2) + \alpha_3(x + 2) = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$$

Igualamos término a término para decidir si los escalares son necesariamente 0.

$$\begin{cases} x^3 : \alpha_1 = 0 \\ x^2 : \alpha_2 = 0 \\ x : \alpha_3 = 0 \\ T.I.: 2\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Todos los escalares son necesariamente 0.

Los generadores son L.I.

$$\boxed{S = gen\,\{x^3 + 2\,;\ x^2\,;\ x + 2\}}$$

Los generadores son L.I.

$$\boxed{B_S = \{x^3 + 2\,;\ x^2\,;\ x + 2\}}$$

$$\boxed{\dim S = 3}$$

$$\boxed{B'_S = \{x^3 + 2\,;\ x + 2; x^2\}}$$

Sea $S = \{p \in P_3[R] \,/\, p(1) = p(-1) + p(0)\}$ un subconjunto de $P_3[R]$

a) Probar que S es subespacio de $P_3[R]$ ✓

b) Dar dos bases distintas de S y su dimensión.

$\boxed{B_S = \{x^3 + 2\,;\; x^2\,;\; x + 2\}}$

$\boxed{B'_S = \{x^3 + 2\,;\; x + 2; x^2\}}$

$$\boxed{\dim S = 3}$$