Clase 28 de octubre 2020- Autovalores y autovectores de matrices.

Resolución de ejercicios 11, 19 y 4(adicional) de la práctica.

1. (a) Probar que si λ es autovalor de la matriz A entonces λ^n es autovalor de A^n.

   Si λ es autovalor de A es autovalor del endomorfismo asociado a A, llamémoslo T. Es decir existe $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$. Si volvemos a aplicar la transformación nuevamente, es decir a componer $T \circ T$, se tiene:

   $$T(T(v)) = T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda(\lambda v) = \lambda^2 \, v.$$

   Es decir que v es autovector de T^2 de autovalor λ^2. Si nuevamente volvemos a aplicar T en ambos miembros:

   $$T(T(T(v))) = T(\lambda^2 \, v) = \lambda^2 T(v) = \lambda^2(\lambda v) = \lambda^3 \, v.$$

   Y así siguiendo. En general por argumento inductivo vale que $T^n(v) = \lambda^n \, v$. Como vemos el autovector de T de autovalor λ sigue siendo autovector de T^n pero de autovalor λ^n.
   Ahora, trabajando con la matriz, concluimos que: $A^n \, v = \lambda^n v$. y entonces λ^n es autovalor de A^n

   (b) Probar que A es inversible si y sólo si no tiene autovalores nulos.

   Un enunciado equivalente es:
   A no inversible si y s'olo si tiene algún autovalor nulo.

   Veamos la implicación directa: A no es inversible $\Rightarrow$ tiene algún autovalor nulo.
   A es no inversible, es la matriz de un endomorfismo T. Luego la transformación es no inversible y entonces no es inyectiva. Luego el $Nu(T) \neq \{0\}$ y existe un vector $v \neq 0$ en el núcleo tal que $T(v) = 0 = 0 \cdot v$, así que el 0 es autovalor de la transformaicón y por lo tanto 0 es autovalor de la matriz.

   Veamos la implicación recíproca: Si A tiene algún autovalor nulo $\Rightarrow$ A no es inversible.
   Si A tiene algún autovalor nulo, la transformación T asociada a A tiene autovalor 0, es decir existe $v \neq 0$ tal que $T(v) = 0\, v$. Luego $T(v) = 0$ el vector nulo y entonces $v \in Nu(T)$. El nucleo es no trivial y entonces T no es inyectiva por lo que no puede ser isomorfismo, por lo tanto, la matriz A asociada a T no es inversible.
   Esto significa que uno puede darse cuenta de si la matriz es o no inversible mirando sus autovalores.

   Observación: 0 puede ser autovalor de una matriz, incluso de una matriz diagonalizable, pero no puede ser autovalor de una matriz inversible.

   (c) Probar que si A es inversible y $\lambda \neq 0$ es autovalor de A, entonces λ^{-1} es autovalor de A^{-1}

   A es inversible, por lo que dijimos en el item anterior todos sus autovalores son no nulos. Si λ es autovalor de A, entonces tiene inverso multiplicativo $\frac{1}{\lambda}$: $A \cdot [v]_B = \lambda \, [v]_B$. Luego multiplicando ambos miembros A^{-1}

   $$A^{-1} \cdot (A \cdot [v]_B) = A^{-1} \cdot \lambda \, [v]_B = \lambda A^{-1} \cdot [v]_B.$$

   Pues el número λ puede conmutar con la matriz. Vemos que ene le miembro izquierdo queda la identidad.

   $$A^{-1} \cdot (A \cdot [v]_B) = I[v]_B = [v]_B = \lambda A^{-1} \cdot [v]_B.$$

   Ahora multiplicando ambos miembros por el inverso multiplicativo $\frac{1}{\lambda}$, se tiene:

   $$\frac{1}{\lambda}[v]_B = A^{-1} \cdot [v]_B.$$

   Esto nos dice que $[v]_B$ es autovector de la matriz A^{-1} y que $\frac{1}{\lambda}$ es su autovalor.
   Vemos que A^{-1} conservó el mismo autovector de A, solo que el autovalor cambió, es el inverso.

Como corolario de este resultado, podemos decir que si A es **diagonalizable e inversible** entonces:

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \Rightarrow A^{-1} = P \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

2. La transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en base canónica está representada por la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

   (a) Diagonalizar A, si es posible. A tiene dos autovalores 1 y -1. El autovalor $\lambda_1 = 1$ es de multiplicidad algebraica 2 y su multiplicidad geométrica también es 2.

   $$E_{\lambda_1=1} = \{\}; \quad E_{\lambda_1=-1} = \{\}.$$

   La matriz A es diagonalizable:

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Como vemos la matriz diagonal D corresponde a la matriz estándar de la simetria respecto a un plano. El plano debería ser el generado por los primeros dos autovectores:$\pi : gen\{(0,1,0),(2,0,1)\}$. La condición geométrica de la simetría dice que el tercer vector, de autovalor -1, debería ser el vector normal al plano, es decir perpendicular a ambos vectores generadores del mismo. En este caso verificamos con el producto escalar que:

   $$(2,0,1) \cdot (1,0,1) = 3 \neq 0.$$

   Luego, si bien la matriz D es igual a la matriz estandar de la simetría, en este caso NO se trata de una simetría de plano pues no verifica la condición geométrica de la simetría.

   (b) Decir si se trata de una simetría respecto a un plano.

3. Sea $M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -8 & 0 & -4 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ (a) Probar que M es diagonalizable. M es diagonalizable pues tiene tres autovalores distintos y por lo tanto tiene tres autovectores linealmente independientes que conforman una base del espacio que es de dimensión 3.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) Hallar una base de autovectores asociada a M:

Las coordenadas de una base de autovectores asociada a M conforman la matriz $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) ¿Es M^8 diagonalizable?, en caso afirmativo, ¿cuáles son los autovalores y los autovectores de M^8?

Todo autovalor de M da lugar a un autovalor de M^8. Por ejercicio realizado arriba los autovalores de M^8 son los de M elevados a la 8 entonces los autovalores de M^8 son: $\beta_1 = 1^8$, $\beta_2 = (-1)^8$, $\beta_3 = 2^8$. Al elevar a un exponente par $\beta_1 = \beta_2$, ¿qué sucede con la multiplicidad geométrica?. También vimos en el mismo ejercicio que los autovectores se conservan, con lo cual la multiplicidad geométrica del autovalor 1 de M^8 es también dos y su autoespacio está conformado por los vectores: $E_1(M^8) = gen\{(\frac{1}{2},1,0),(0,-1,1)\}$, y $E_{2^8}(M^8) = gen\{(-\frac{1}{2},0,1)\}$. Por lo tanto M^8 es diagonalizable y su factorización es:

$$M^8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^8 & 0 & 0 \\ 0 & 1^8 & 0 \\ 0 & 0 & 2^8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$