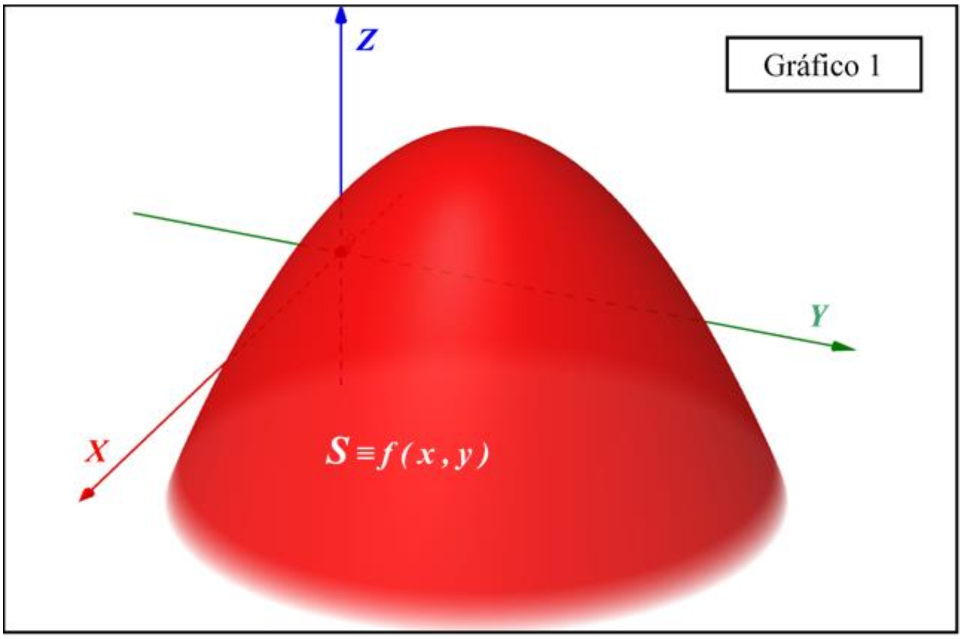
Diferencial Total de una Función:

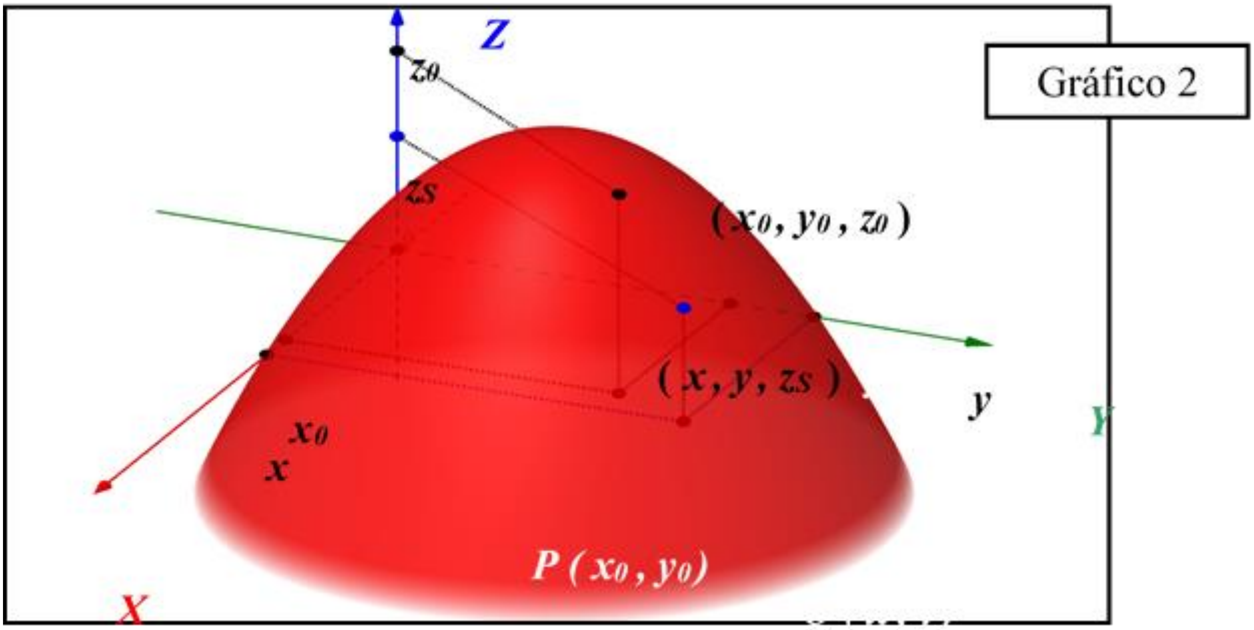
Vamos a considerar: $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $z = f(x, y)$, diferenciable para todo punto(x, y) interior del conjunto A.

En $\mathbb{R}^3$, la gráfica de $f_{(x,y)}$ representa la superficie S (color rojo en el Gráfico 1).



Además, vamos a considerar el punto: $P_{(x_0,y_0)}$, centro de nuestro estudio y el punto: $Q_{(x,y)}$, un punto genérico distinto a $P_{(x_0,y_0)}$, ambos, puntos interiores de A.

Los puntos $P_{(x_0,y_0)}$, $Q_{(x,y)}$ y sus imágenes a través de $f_{(x,y)}$ generan puntos sobre la superficie S: (x_0, y_0, z_0) y (x, y, z_S), siendo respectivamente: $z_0 = f_{(x_0,y_0)}$ y $z_S = f_{(x,y)}$ (Gráfico 2) .

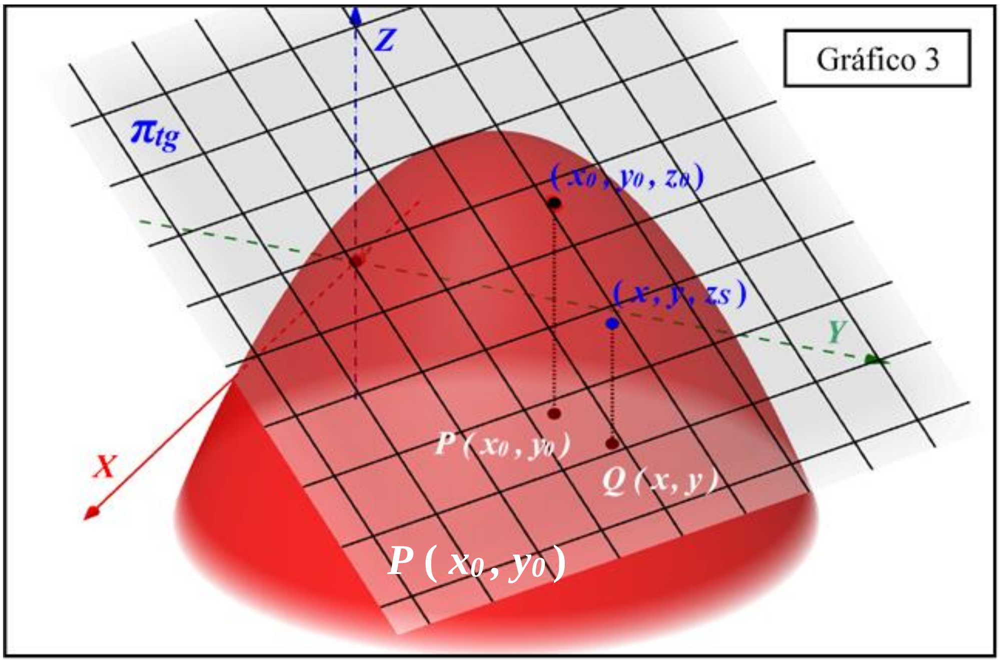


Por último, vamos a considerar el plano π_{tg} tangente a la superficie S (gráfica de $f_{(x,y)}$) en el punto (x_0, y_0, z_0) cuya expresión, de acuerdo con lo ya visto es:

$$\pi_{tg} \equiv z = f_{(x_0,y_0)} + f'_{x\,(x_0,y_0)} \cdot \ (x - x_0) + f'_{y\ (x_0,y_0)} \ \cdot (y - y_0) \ \textbf{(a)}$$

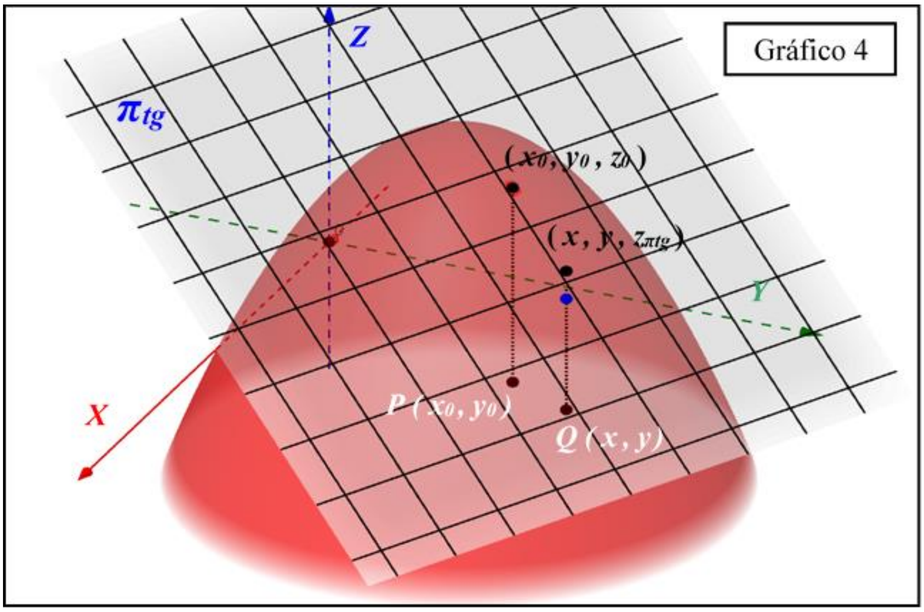
Nota I : Recuérdese que la condición de diferenciabilidad exigida a $f_{(x,y)}$, implica la existencia del plano tangente a la gráfica de $f_{(x,y)}$ en el punto (x_0, y_0, z_0) , siendo este plano tangente una buena aproximación lineal a $f_{(x,y)}$ en cercanías del punto $P_{(x_0,y_0)}$.

Se puede ver al plano π_{tg} en color gris en el Gráfico 3:



Por otro lado, el punto genérico $Q_{(x,y)}$ y su imagen a través de la ecuación del plano tangente π_{tg} (ver **(a)**) genera un punto genérico $\left(x, y, z_{\pi_{tg}}\right)$ sobre este plano, siendo según **(a)**:

$z_{\pi_{tg}} = f_{(x_0,y_0)} + f'_{x\,(x_0,y_0)} \cdot \ (x - x_0) + f'_{y\ (x_0,y_0)} \ \cdot (y - y_0)$, (ver Gráfico 4):



Con todo esto vamos a ponernos a trabajar:

Vamos a restar los valores de las imágenes (valores de z) de $f_{(x,y)}$ y del plano tangente π_{tg}, en el punto genérico $Q_{(x,y)}$.

$$\begin{cases} z_S = f_{(x,y)} \\ z_{\pi_{tg}} = f_{(x_0,y_0)} + f'_{x\ (x_0,y_0)} \cdot (x - x_0) + f'_{y\ (x_0,y_0)} \cdot (y - y_0) \end{cases}$$

$$z_S - z_{\pi_{tg}} = f_{(x,y)} - \left[f_{(x_0,y_0)} + f'_{x\ (x_0,y_0)} \cdot (x - x_0) + f'_{y\ (x_0,y_0)} \cdot (y - y_0) \right]$$

operando

$$z_S - z_{\pi_{tg}} = f_{(x,y)} - f_{(x_0,y_0)} - f'_{x(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0) - f'_{y(x_0,y_0)} \cdot (y - y_0) \quad \textbf{(b)}$$

Ahora, recurriremos al límite de diferenciabilidad el cual se cumple por haberse exigido que $f_{(x,y)}$ sea diferenciable en el punto $P_{(x_0,y_0)}$.

$$\underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{Lím} \frac{\left| f_{(x,y)} - f_{(x_0,y_0)} - f'_{x(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0) - f'_{y(x_0,y_0)} \cdot (y - y_0) \right|}{\| (x,y) - (x_0,y_0) \|} = 0$$

Como ya hemos analizado oportunamente, este límite posee una indeterminación del tipo 0/0, este tipo de indeterminación corresponde conceptualmente, a un cociente de infinitésimos cuya tendencia es 0.

En consecuencia, podemos afirmar que para que se verifique esta tendencia, el infinitésimo del numerador:

$$\left| f_{(x,y)} - f_{(x_0,y_0)} - f'_{x(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0) - f'_{y(x_0,y_0)} \cdot (y - y_0) \right|$$

deberá ser de orden superior al infinitésimo del denominador:

$$\| (x,y) - (x_0, y_0) \|$$

es decir que la expresión del numerador, a medida que $(x,y) \to (x_0, y_0)$, estará mas cerca de 0 que lo que estará el denominador. **(c)**

Por otro lado, recurriendo a una propiedad de límites $\left(\lim\limits_{x\to x_0} |f_{(x)}| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to x_0} f_{(x)} = 0\right)$, podemos decir que:

si $\lim\limits_{x\to x_0} \left| f_{(x,y)} - f_{(x_0,y_0)} - f'_{x(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0) - f'_{y(x_0,y_0)} \cdot (y - y_0) \right| = 0 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} \left(f_{(x,y)} - f_{(x_0,y_0)} - f'_{x(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0) - f'_{y(x_0,y_0)} \cdot (y - y_0) \right) = 0$$

Por lo que $\left(f_{(x,y)} - f_{(x_0,y_0)} - f'_{x(x_0,y_0)}\,(x - x_0) - f'_{y(x_0,y_0)}\,(y - y_0)\right)$ será también un infinitésimo de orden superior al infinitésimo del denominador:

$$\| (x,y) - (x_0, y_0) \|$$

Si repasamos lo ya analizado, podemos ver que este infinitésimo: $\left(f_{(x,y)} - f_{(x_0,y_0)} - f'_{x(x_0,y_0)}\,(x - x_0) - f'_{y(x_0,y_0)}\,(y - y_0)\right)$ es idéntico a la expresión **(b)** obtenida anteriormente, la cual es la diferencia de las imágenes (valores de z) de $f_{(x,y)}$ y del plano tangente π_{tg}, en el punto genérico $Q_{(x,y)}$.

También podemos ver que el infinitésimo del denominador de este cociente de Infinitésimos es la norma del vector $\overrightarrow{[(x,y)-(x_0,y_0)]}$, es decir la distancia entre los puntos $Q_{(x,y)}$ y $P_{(x_0,y_0)}$.

Reuniendo todo lo dicho podemos concluir en el siguiente enunciado:

Cuando $(x,y) \to (x_0, y_0)$, la diferencia entre los valores de z (Imágenes) de $f_{(x,y)}$ y del plano tangente π_{tg} en el punto genérico $Q_{(x,y)}$ distinto al $P_{(x_0,y_0)}$, esta mucho mas cerca de 0 (infinitésimo de orden superior) que la distancia entre los puntos $P_{(x_0,y_0)}$ y $Q_{(x,y)}$ (infinitésimo de orden inferior).

Esto justifica considerar despreciable la diferencia con 0 de:

$$f_{(x,y)} - f_{(x_0,y_0)} - f'_{x(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0) - f'_{y(x_0,y_0)} \cdot (y - y_0)$$

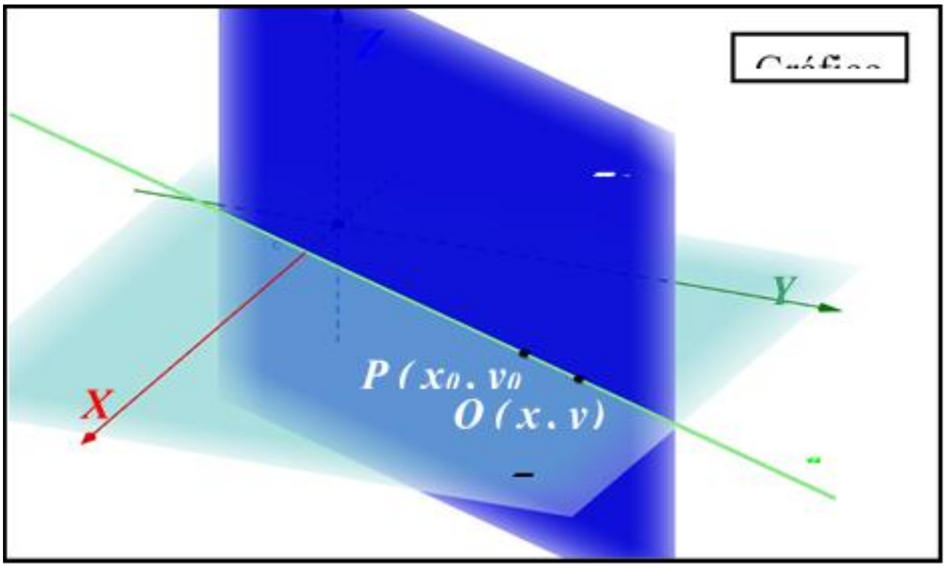
Es decir, podemos aceptar que:

$$f_{(x,y)} - f_{(x_0,y_0)} - f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) - f'_y(x_o, y_0) \cdot (y - y_0) = 0 \quad \textbf{(d)}$$

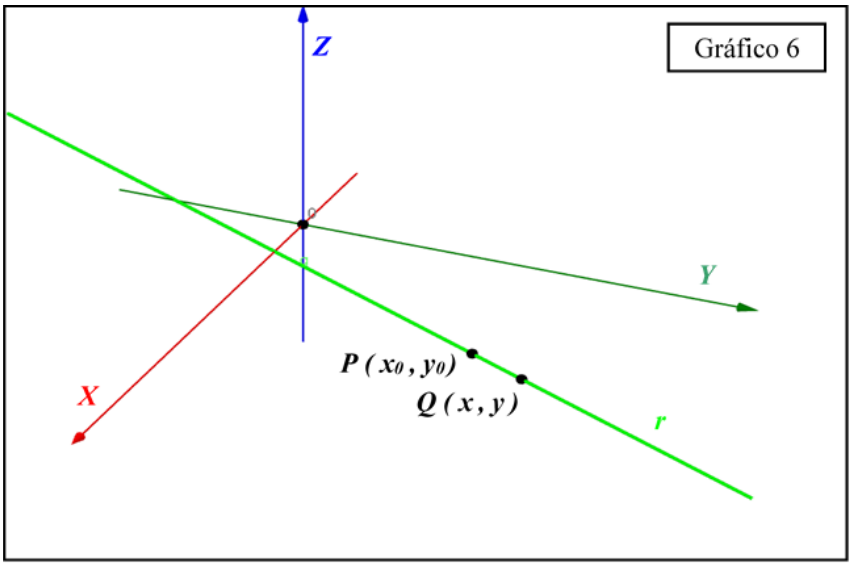
mientras que $\| \ (x, y) - (x_0, y_0) \ \|$ es un valor que tiende a 0, pero no 0.

Estas conclusiones a la que hemos llegado podemos verlas gráficamente de la siguiente forma:

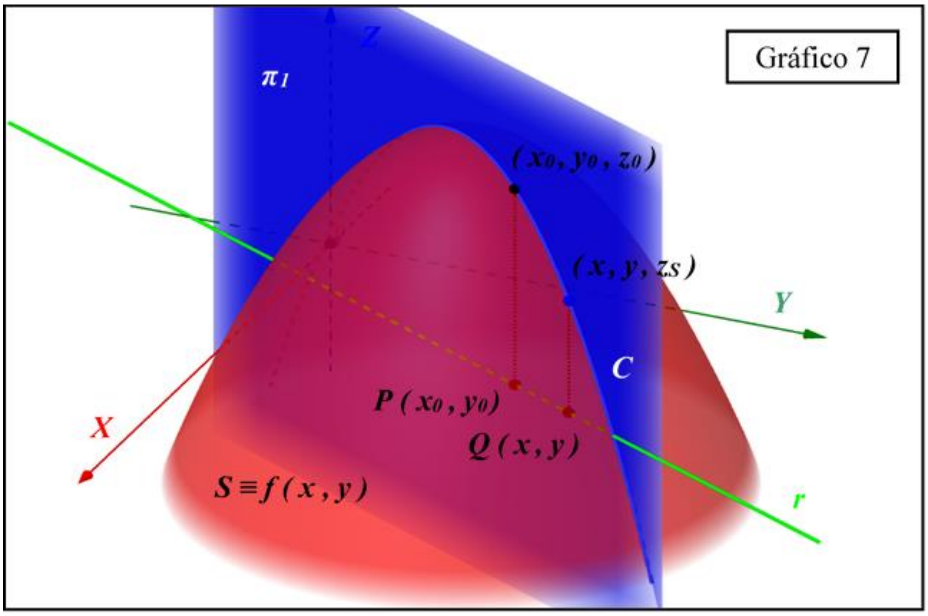
Vamos a interceptar el plano π_1, paralelo al eje z que contiene a los puntos $P_{(x_0,y_0)}$ y $Q_{(x,y)}$ (de color azul en Gráfico 5), con el plano coordenado π_{xy} (de color verde en el Gráfico 5). Esta intersección genera la recta r (de color verde más claro en el Gráfico 5).



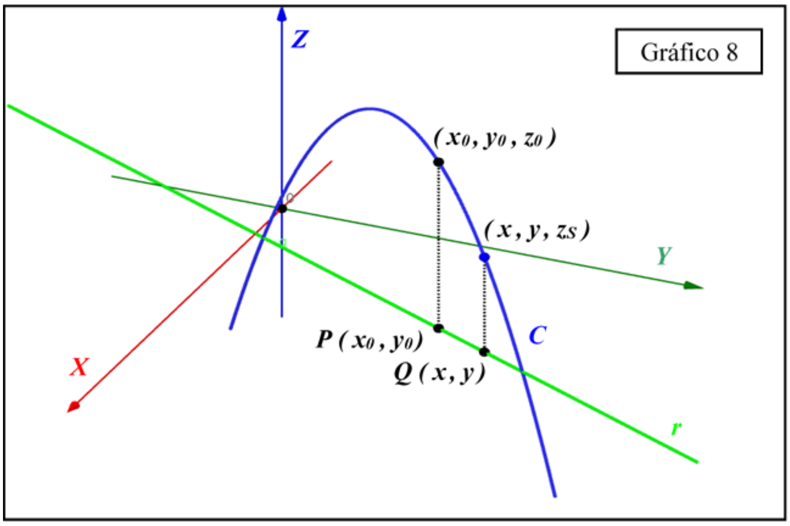
Nos quedaremos solamente con la recta r (Gráfico 6):



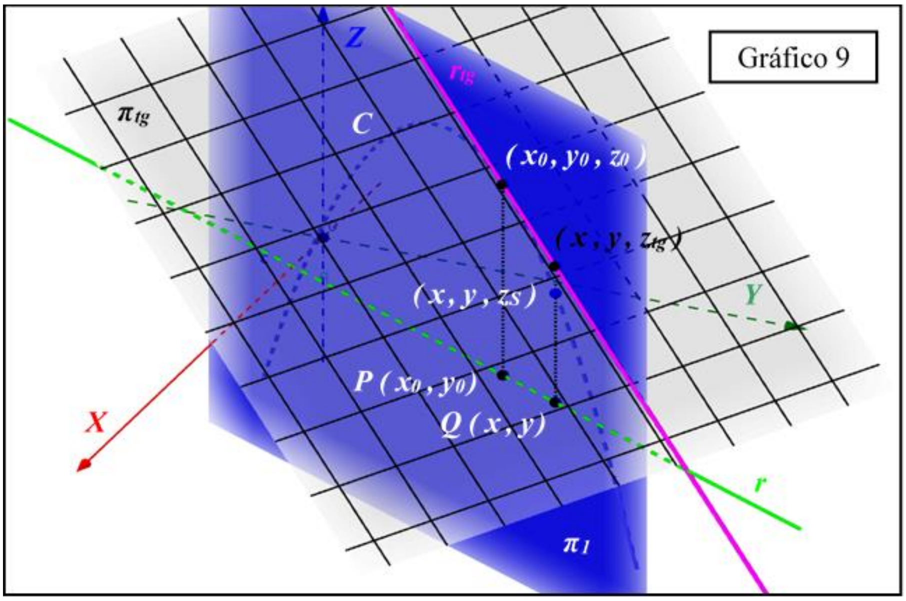
Ahora, vamos a interceptar al plano π_1 con la superficie S (gráfica de $f_{(x,y)}$ y de color rojo en el Gráfico), esto genera la curva C (de color azul más claro en el Gráfico 7):



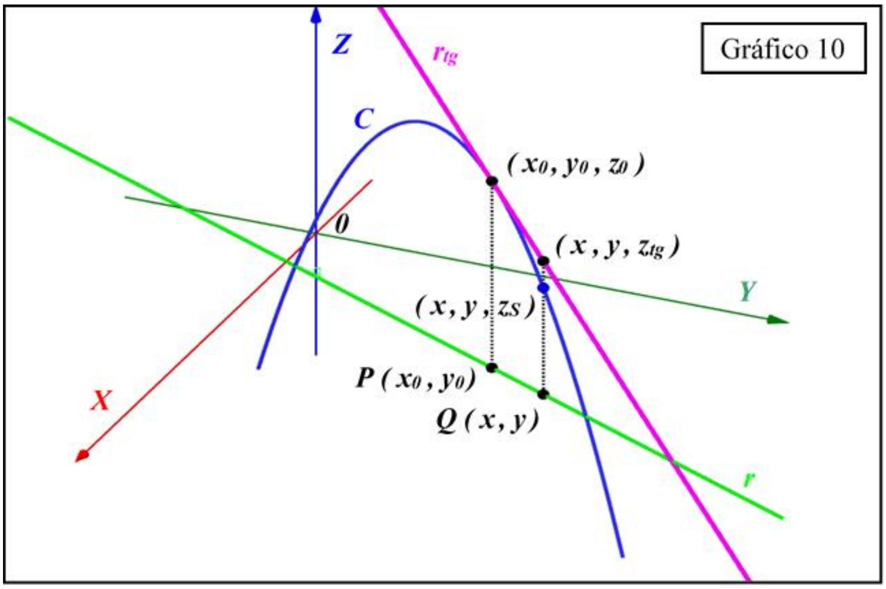
De igual forma que en la propuesta anterior, nos quedaremos con la curva C (de color azul claro en el Gráfico 8).



Finalmente, vamos a interceptar al plano π_1 con el plano tangente π_{tg} a $f_{(x,y)}$ en el punto (x_0, y_0, z_0) (de color gris en el Gráfico 9). De esta intersección resultará la recta r_{tg} que, por pertenecer al plano tangente, es tangente también a la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0) (de color fucsia en el Gráfico 9):



También en este caso nos quedaremos con la r_{tg} (Gráfico 10):



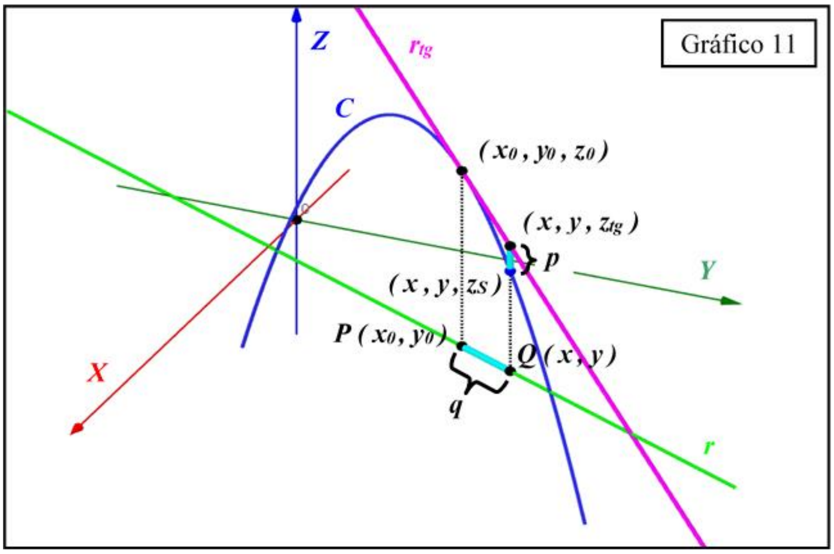
Las rectas r y r_{tg} y la curva C están todas contenidas en un mismo plano, el plano π_1.

En el Gráfico 11, podemos ver dos **segmentos p** y **q**, de color celeste:

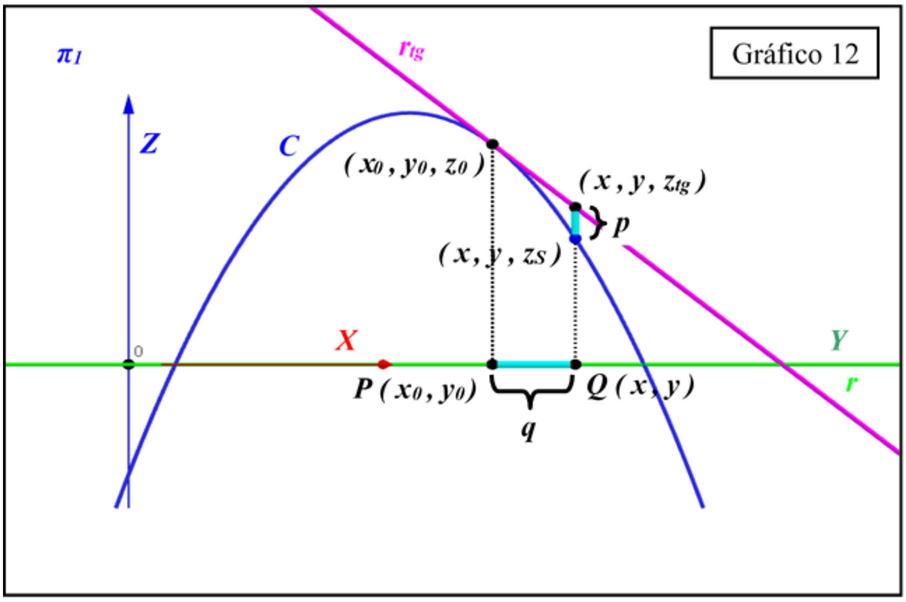
segmento p: su longitud corresponde a:
$\left| f_{(x,y)} - f_{(x_0,y_0)} - f'_{x(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0) - f'_{y(x_0,y_0)} \cdot (y - y_0) \right|$, infinitésimo de orden superior, según **(c)**.

segmento q: su longitud corresponde a: $\| (x, y) - (x_0, y_0) \|$, infinitésimo de orden inferior, también según **(c)**.

Se puede apreciar gráficamente que, aunque ambos tienden a 0, cuanto más grande es el **segmento q** con respecto al **segmento p**, como puede observarse en el Gráfico 11.



Además, tengamos en cuenta que en el Gráfico 11, mientras el **segmento p** está en verdadera magnitud (no está deformado por la perspectiva), el **segmento q** se lo ve más corto de lo que es en realidad por culpa de la vista en perspectiva.
Si miramos a las rectas r y r_{tg} y a la curva C de frente al plano π_1 que las contiene a todas ellas, las veríamos sin ninguna deformación, como se puede apreciar en el Gráfico 12.
En este gráfico se puede comprobar en verdadera magnitud los **segmentos p** y **q** constatando lo dicho anteriormente respecto a ellos.



Ahora, volvamos a la expresión **(d)**:

$f_{(x,y)} - f_{(x_0,y_0)} - f'_{x(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0) - f'_{y(x_o,y_0)} \cdot (y - y_0) = 0$ **(d)**

operando …

$f_{(x,y)} - f_{(x_0,y_0)} = f'_{x(x_0,y_0)} \cdot (x - x_0) + f'_{y(x_o,y_0)} \cdot (y - y_0)$ **(e)**

Y recordando que a la expresión **(d)** llegamos aceptando que: $(x, y) \to (x_0, y_0)$ y recurriendo al concepto del **diferencial** que se estudió en **Análisis Matemático I**, podemos decir que:

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(f_{(x,y)} - f_{(x_0,y_0)}\right) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (z_S - z_0) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \Delta z = dz \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (x - x_0) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \Delta x = dx \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (y - y_0) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \Delta y = dy \end{array}\right\} \textbf{(f)}$$

Entonces, reemplazando **(f)** en **(e)** tenemos que:

$$dz = f'_{x(x_0,y_0)} \cdot dx + f'_{y(x_o,y_0)} \cdot dy \ \textbf{(g)}$$

La expresión **(g)** es a la que se llama **diferencial de z** (o de la variable dependiente) en el punto $P_{(x_0,y_0)}$.

Siendo $z = f_{(x,y)}$, podemos también expresar:

$$df_{(x,y)} = f'_{x(x_0,y_0)} \cdot dx + f'_{y(x_o,y_0)} \cdot dy \ \textbf{(h)}$$

La expresión **(h)** podemos mencionarla como: **diferencial total de la función $\boldsymbol{f_{(x,y)}}$** en el punto $P_{(x_0,y_0)}$.

Una inmediata aplicación del concepto del **diferencial total** es la siguiente:
Aceptando que: $(x, y) \to (x_0, y_0)$ y haciendo uso del primer renglón de las afirmaciones enunciadas en **(f)**:

$f_{(x,y)} - f_{(x_0,y_0)} = z_S - z_0 = \Delta z \cong dz$ **(i)**

Uniendo el primer y último término de esta cadena de igualdades obtenemos:

$$\boxed{f_{(x,y)} - f_{(x_0,y_0)} \cong dz \quad \Rightarrow \quad f_{(x,y)} \cong f_{(x_0,y_0)} + dz} \ \textbf{(j)}$$

A través de **(j)** podemos calcular en forma muy aproximada el incremento de $\boldsymbol{f}_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}$ al pasar del punto $P_{(x_0,y_0)}$ al punto $Q_{(x,y)}$ y el valor de $\boldsymbol{f}_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}$ en el punto $Q_{(x,y)}$ próximo al punto $P_{(x_0,y_0)}$, respectivamente .

También, podemos extender el concepto del **diferencial total** a funciones escalares de más de dos variables independientes:

Dada una $f_{(\vec{X})}: A \subset \Re^n \to \Re$, siendo $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3, \ \dots \ , x_n)$, diferenciable para todo punto $\vec{X} \in A$, interior del conjunto A y dos puntos : $\vec{X}_0 = \left(x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}, \ \dots \ , x_{n_0}\right)$

y $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3, \ \dots \ , x_n)$, distintos e interiores de A.

Entonces:

$$\boxed{df_{(\vec{X})} = f'_{x_1\,(\vec{X}_0)} \cdot dx_1 + f'_{x_2\,(\vec{X}_0)} \cdot dx_2 + f'_{x_3\,(\vec{X}_0)} \cdot dx_3 + \ldots + f'_{x_n\,(\vec{X}_0)} \cdot dx_n} \quad \textbf{(k)}$$

Expresión general del **diferencial total** de una función escalar.

Ejercitación:

Vamos a resolver algunos ejercicios de los puntos **10.-** y **11.-** del **TRABAJO PRÁCTICO Nº 4** de la **GUIA DE TRABAJOS PRACTICOS** de **ANALISIS MATEMATICO II**:

10.- Calcular **el incremento** y el **diferencial** de las siguientes funciones, para los puntos e incrementos dados. Comparar:

(i) $f_{(x,y)} = x^2 \ y$ en: (1; 2); Δx = 0,1; Δy = 0,2.

Aceptamos que: (1,1; 2,2) → (1; 2), entonces es válido el uso del **diferencial total**, por lo tanto: Δx = dx = 0,1 y Δy = dy = 0,2.

$$f'_{x\ (x,y)} = 2xy \quad \Rightarrow \quad f'_{x\ (1,2)} = 2.1.2 = 4$$

$$f'_{y\ (x,y)} = x^2 \quad \Rightarrow \quad f'_{y\ (1,2)} = 1^2 = 1$$

Según **(g)**:

$$dz = f'_{x(1,2)}.\,dx + f'_{y(1,2)}.\,dy = 4.0{,}1 + 1.0{,}2 = \boxed{0{,}600}$$

Según **(i)**:

$$\Delta z = f_{(1,1;2,2)} - f_{(1;2)} = 1{,}1^2 \cdot 2{,}2 - 1^2 \cdot 2 = \boxed{0{,}662}$$ (Valor exacto del **incremento**)

Según **(i)**:

$$\Delta z \cong dz \quad \Rightarrow \quad \boxed{0{,}662 \cong 0{,}600}$$

(iv) $f_{(x,y)} = x^y$ en: (3; 2); Δx = 0,1; Δy = - 0,1.

Aceptamos que: (3,1; 1,9) → (3; 2), entonces es válido el uso del **diferencial total**, por lo tanto: Δx = dx = 0,1 y Δy = dy = - 0,1.

$$f'_{x\ (x,y)} = y \cdot x^{y-1} \quad \Rightarrow \quad f'_{x\ (3;2)} = 2 \cdot 3^{2-1} = \quad 6$$

$$f'_{y\ (x,y)} = x^y \cdot Ln\ x \quad \Rightarrow \quad f'_{y\ (3;2)} = 3^2 \cdot Ln\ 3 = 9 \cdot Ln\ 3$$

Según **(g)**:

$$dz = f'_{x\,(3;2)} \cdot dx + f'_{y\,(3;2)} \cdot dy = 6 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot \text{Ln}\,3 \cdot (-0{,}1) \cong \boxed{-0{,}3888}$$

Según **(i)**:

$$\Delta z = f_{(3,1;1,9)} - f_{(3;2)} = 3{,}1^{1,9} - 3^2 = \boxed{-0{,}4180}$$ (Valor exacto del incremento)

Según **(i)**:

$$\Delta z \cong dz \quad \Rightarrow \quad -0{,}4180 \cong -0{,}3888$$

11.- Aplicar **diferenciales** para calcular en forma aproximada el valor de las siguientes expresiones:

(i)

$$\frac{0{,}97}{\sqrt{15{,}05 + \sqrt[3]{0{,}98}}} =$$

Vamos a proponer la siguiente función: $f_{(x,y,z)} = \frac{x}{\sqrt{y+\sqrt[3]{z}}}$, de esta forma el calculo propuesto corresponderá al valor de esta función para el punto: (0,97; 15,05; 0,98).

Para aprovechar el concepto del **diferencial total** será necesario elegir un punto cercano al punto mencionado y para el cual sea sencillo el cálculo de la función $f_{(x,y,z)}$, esté punto conveniente puede ser el punto: (1; 15; 1).

En base a lo que hasta el momento hemos establecido, debemos calcular los **incrementos**: Δx = - 0,03, Δy = 0,05 y Δz = - 0,02.

Como aceptamos que (0,97; 15,05; 0,98) → (1, 15, 1), entonces podemos aceptar también, que: Δx = dx = - 0,03, Δy = dy = 0,05 y Δz = dz = - 0,02 y entonces poder usar el concepto del **diferencial total** en su expresión generalizada para calcular: $f_{(0{,}97;15{,}05;0{,}98)}$ (ver **(k)**)

> **Nota II:** A pesar de que las variables "x" y "z" deberán adoptar el mismo valor en el cálculo pedido, con lo cual se podría pensar en fusionarlas en una sola variable, es necesario diferenciarlas como variables distintas porque los **incrementos** a utilizar para ambas variables son distintos.

$$f'_{x\ (x,y,z)} = \frac{1}{\sqrt{y+\sqrt[3]{z}}} \quad \Rightarrow \quad f'_{x\ (1;15;1)} = \frac{1}{\sqrt{15+\sqrt[3]{1}}} = \frac{1}{4}$$

$$f'_{y\ (x,y,z)} = -\frac{x}{2\cdot\left(y+\sqrt[3]{z}\right)\cdot\sqrt{y+\sqrt[3]{z}}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f'_{y\ (1,15,1)} = -\frac{1}{2\cdot\left(15+\sqrt[3]{1}\right)\cdot\sqrt{15+\sqrt[3]{1}}} = -\frac{1}{128}$$

$$f'_{z\ (x,y,z)} = -\frac{x}{6\cdot\left(y+\sqrt[3]{z}\right)\cdot\sqrt{y+\sqrt[3]{z}}\cdot\sqrt[3]{z^2}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f'_{z\ (1;15;1)} = -\frac{1}{6\cdot\left(15+\sqrt[3]{1}\right)\cdot\sqrt{15+\sqrt[3]{1}}\cdot\sqrt[3]{1^2}} = -\frac{1}{384}$$

Según **(k)**:

$$df = f'_{x\ (1;15;1)}\cdot dx + f'_{y\ (1;15;1)}\cdot dy + f'_{z\ (1;15;1)}\cdot dz$$

$$df = \frac{1}{4}(-0{,}03) - \frac{1}{128}\cdot 0{,}05 - \frac{1}{384}(-0{,}02) \cong -0{,}0078$$

Finalmente, según **(j)**:

$$f_{(0,97;15,05;0,98)} = f_{(1;15;1)} + df \cong \frac{1}{\sqrt{15+\sqrt[3]{1}}} + (-0,0078) \cong \quad 0,2422$$

****