

EJERCICIO RESUELTO DE SEL CON DOS PARÁMETROS

Resuelto por el Profesor Marcelo Denenberg

Dado el sistema
$$\begin{cases} (5-a)x - 2y - z = 1 \\ -2x + (2-a)y - 2z = 2 \\ -x - 2y + (5-a)z = b \end{cases}$$
 analizar si el sistema es SCD, SCI o SI según los valores de los parámetros a y b .

Resolución:

Dada la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones analizamos el tipo de solución para las posibles combinaciones de los parámetros a y b .

$$S_2: \left(\begin{array}{ccc|c} 5-a & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2-a & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 5-a & b \end{array} \right) \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix}; \text{reordenamos con } f_3, f_2, f_1.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 5-a & b \\ -2 & 2-a & -2 & 2 \\ 5-a & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 5-a & b \\ 0 & 6-a & -12+2a & 2-2b \\ 0 & -12+2a & (5-a)^2-1 & (5-a)b+1 \end{array} \right) \begin{matrix} -2f_1 + f_2 \\ (5-a)f_1 + f_3 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 5-a & b \\ 0 & 6-a & -12+2a & 2-2b \\ 0 & 0 & (5-a)^2-1-24+4a & (5-a)b+1+4-4b \end{array} \right) \begin{matrix} \\ 2f_2 + f_3 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 5-a & b \\ 0 & 6-a & -12+2a & 2-2b \\ 0 & 0 & a^2-6a & (5-a)b+5-4b \end{array} \right)$$

Si $(6-a)$ y (a^2-6a) son diferentes de cero ($a \neq 6$ y $a \neq 0$) ocurre que $\text{rg}(A) = \text{rg}(M) = n = 3$ y el sistema es compatible determinado.

$$\text{Si } a=6 \text{ queda } \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 2-2b \\ 0 & 0 & 0 & 5-5b \end{array} \right) \text{ que tiene solución solamente si } b=1.$$

O sea si $a=6 \wedge b=1$ SCI ($\text{rg}(A)=\text{rg}(M)=1, n=3$); si $a=6 \wedge b \neq 1$ el sistema es incompatible.

Si $a = 0$ resulta $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 5 & b \\ 0 & 6 & -12 & 2-2b \\ 0 & 0 & 0 & b+5 \end{array} \right)$; para $b = -5$ es $\text{rg}(A) = \text{rg}(M) = 2 < n = 3$ y hay infinitas soluciones; si $b \neq -5$ el sistema es incompatible.

En fin:

$a \backslash b$	$R - \{1, -5\}$	1	-5
$R - \{0, 6\}$	SCD		
6	SI	SCI	SI
0	SI		SCI