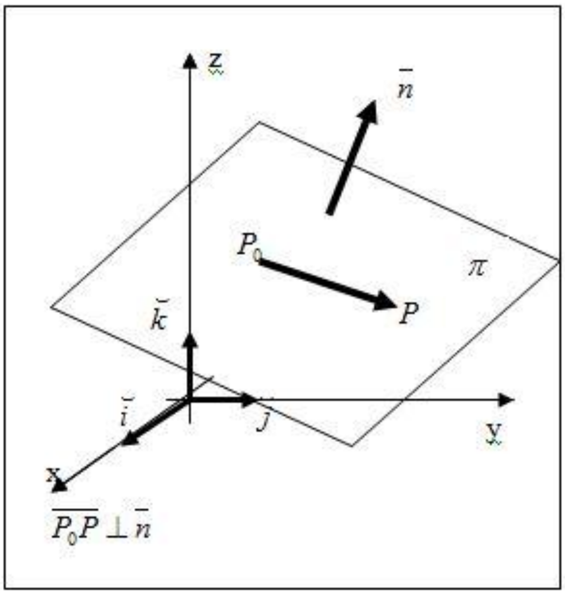
ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA I

MÓDULO 3- GEOMETRÍA ANALÍTICA - SEGUNDA CLASE

EL PLANO EN R^3

ECUACIÓN IMPLÍCITA O GENERAL DEL PLANO

Los elementos necesarios para determinar un plano en el espacio tridimensional son un punto y un vector normal al plano, que no sea el vector nulo.



Sean $P_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi \quad \wedge \quad \bar{n} = (n_x, n_y, n_z)$ perpendicular al plano π ; observamos que cualquier punto $P(x, y, z)$ perteneciente al plano, determina con P_0 un vector $\overline{P_0P}$ contenido en el plano y por lo tanto paralelo a él, de donde se deduce que será perpendicular al vector normal $\bar{n}$; entonces el producto interior entre $\overline{P_0P} \bullet \bar{n}$ debe ser igual a cero, es decir:

$$\pi: \quad \overline{P_0P} \bullet \bar{n} = 0$$

que se denomina **ecuación vectorial del plano.**

Reemplazando cada vector por sus componentes, resulta:

$\pi: \ [(x - x_0), (y - y_0), (z - z_0)] \bullet (n_x, n_y, n_z) = 0$, efectuando el producto interior:

$\pi: \ n_x.(x - x_0) + n_y.(y - y_0) + n_z.(z - z_0) = 0$ efectuando el producto y distribuyendo

$$\pi: n_x.x + n_y.y + n_z.z + \left[-\left(n_x.x_0 + n_y.y_0 + n_z.z_0\right)\right] = 0$$

como $n_x, n_y, n_z, x_0, y_0, z_0$ son números reales, podemos cambiar su nomenclatura y hacer:

$$n_x = A\,; \quad n_y = B\,; \quad n_z = C \quad \wedge \quad (-n_x.x_0 - n_y.y_0 - n_z.z_0) = D$$

resultando así **la ecuación implícita o general del plano**

$$\boxed{A.x + B.y + C.z + D = 0}$$

Nota que D es el opuesto del producto escalar ente el vector normal y el vector $\overline{OP_0}$
$D = -\overline{n} \bullet \overline{OP_0}$

Ejemplo:

Encontrar la ecuación del plano que es perpendicular al vector $\overline{u} = (2, -1, -4)$ y contiene al punto $P_0(2, -5, 6)$

En la ecuación implícita del plano los coeficientes A, B y C son las componentes de un vector normal al plano, entonces armamos la ecuación:
$2.x - y - 4.z + D = 0$
El punto $P_0(2, -5, 6)$ debe pertenecer al plano, y por lo tanto verificar la ecuación, lo usaremos para determinar D:

$$2.2 - (-5) - 4.\ 6 + D = 0 \ \Rightarrow\ 4 + 5 - 24 + D = 0 \Rightarrow\ -15 + D = 0 \ \Rightarrow\ D{=}15$$
Por lo que la ecuación del plano resulta: $2.x - y - 4.z + 15 = 0$

En https://www.geogebra.org/classic/cxewtr7f puedes ver la representación gráfico del plano

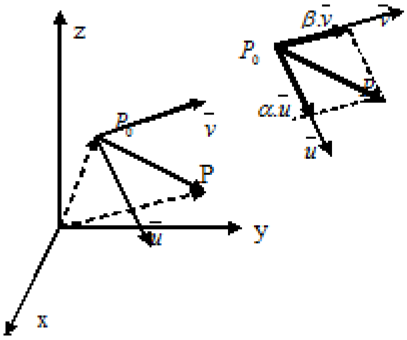
Existen otros tipos de ecuaciones del plano, como veremos ahora:

ECUACIONES PARAMÉTRICAS DEL PLANO

También es posible determinar un plano si se conoce un punto que pertenece a él y se sabe que es paralelo a dos vectores dados, no nulos y no paralelos entre sí.

Hallaremos la ecuación del plano que contiene a $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es paralelo a dos vectores no nulos ni paralelos entre sí $\overline{u} = (u_x, u_y, u_z)$ y $\overline{v} = (v_x, v_y, v_z)$

Si consideramos un punto cualquiera del plano $P(x,y,z)$ podemos definir el vector $\overline{OP}=\overline{OP_0}+\overline{P_0P}$, además el vector $\overline{P_0P}$ es coplanar con los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$, por lo que son tres vectores linealmente dependientes.



Entonces el vector $\overline{P_0P}$ puede expresarse como una combinación lineal de los vectores $\bar{u}$ y $\bar{v}$
Por lo que existen α y β reales, tal que $\overline{P_0P}=\alpha.\bar{u}+\beta.\bar{v}$

$\overline{OP}=\overline{OP_0}+\overline{P_0P} = \overline{OP_0} + \alpha.\bar{u}+\beta.\bar{v}$
Que resulta ser la ecuación paramétrica vectorial del plano

$$\pi:\overline{OP}=\overline{OP_0}+\alpha.\bar{u}+\beta.\bar{v}$$

Reemplazando por las componentes:

$$\pi:(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+[\alpha.(u_x,u_y,u_z)+\beta.(v_x,v_y,v_z)] \quad \forall\alpha,\beta\in R$$

Si ahora operamos vectorialmente e igualamos componentes, se verifica que:

$$\pi:\begin{cases} x=x_0+\alpha.u_x+\beta.v_x \\ y=y_0+\alpha.u_y+\beta.v_y \quad \forall\alpha,\beta\in R \\ z=z_0+\alpha.u_z+\beta.v_z \end{cases}$$

llamadas **ecuaciones paramétricas cartesianas del plano.**

Ejemplo:
Encontrar las ecuaciones del plano que contiene al punto $P_0(2,3,-1)$ y es paralelo a los vectores $\bar{u}=(1,2,-3)$ y $\bar{v}=(-1,-1,2)$

En https://www.geogebra.org/3d/kcjhbjuw puedes ver la representación gráfico del plano pedido.

Los vectores dados no son paralelos ya que ……………………………………………………
Por lo que los datos dados son suficientes para determinar un plano

Según lo visto:

$$\pi : \overline{OP} = \overline{OP_0} + \alpha.\overline{u} + \beta.\overline{v}$$

$$\pi : (x, y, z) = (2,3,-1) + \alpha.(1,2,-3) + \beta.(-1,-1,2) \qquad \forall \alpha, \beta \in R$$

Que es la ecuación paramétrica vectorial del plano.
Operando e igualando componentes resulta:

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + \alpha.1 + \beta.(-1) \\ y = 3 + \alpha.2 + \beta.(-1) \\ z = -1 + \alpha.(-3) + \beta.2 \end{cases} \forall \alpha, \beta \in R$$

que son las **ecuaciones paramétricas cartesianas del plano.**

Trabajando con estas ecuaciones podemos llegar a la ecuación general del plano:

$$\pi : \begin{cases} x - 2 = \alpha.1 + \beta.(-1) \\ y - 3 = \alpha.2 + \beta.(-1) \\ z + 1 = \alpha.(-3) + \beta.2 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x-2 \\ 2 & -1 & y-3 \\ -3 & 2 & z+1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x-2 \\ 0 & 1 & y-3-2(x-2) \\ 0 & -1 & z+1+3(x-2) \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x-2 \\ 0 & 1 & y-2x+1 \\ 0 & -1 & z+3x-5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x-2 \\ 0 & 1 & y-2x+1 \\ 0 & 0 & z+y+x-4 \end{array}\right)$$

$F_2 \to F_2 - 2F_1$ $\qquad$ $F_3 \to F_3 + F_2$

$F_3 \to F_3 + 3F_1$

Los puntos $P(x, y, z)$ que pertenecen al plano son aquellos para los que el sistema anterior es compatible, por lo que el rango de la matriz de los coeficientes debe ser igual al rango de la matriz ampliada, *r(A) = r(A') = 2* y eso se cumple para aquellos puntos en los que *z + y + x - 4 = 0* que es la ecuación implícita o general del plano en cuestión.

Verifica que el plano anterior cumple las condiciones pedidas:
Contiene a $P_0(2,3,-1)$ ……………………………………………………………………..

es paralelo a los vectores $\overline{u} = (1,2,-3)$ y $\overline{v} = (-1,-1,2)$ (utiliza para esto un vector normal al plano) …………………………………………..……………………………
…………………………………………………………………………………………………

Otra Forma

También es posible obtener la ecuación implícita o general del plano obteniendo un vector normal al plano que los vectores dados determinan, para eso basta realizar el producto vectorial entre ellos:

$$\bar{u}\times\bar{v}=\begin{vmatrix}\breve{i} & \breve{j} & \breve{k}\\ 1 & 2 & -3\\ -1 & -1 & 2\end{vmatrix}=1\breve{i}+1\breve{j}+1\breve{k}=(1;1;1)$$

Significa que (1;1;1) es un vector normal al plano, reemplazando en los coeficientes de la ecuación, resulta:

1 x + 1 y + 1 z + D = 0 ,   x + y + z + D = 0

Para determinar el valor de D utilizamos el punto dado $P_0(2,3,-1)$; que debe pertenecer al plano y por lo tanto cumplir su ecuación

2 + 3 + (-1) + D = 0   4 + D = 0   D = -4   entonces la ecuación resulta :

Recuerda que también es posible calcular **D** haciendo: $D=-\bar{n}\bullet\overline{OP_0}$

PLANO DETERMINADO POR TRES PUNTOS NO ALINEADOS

Para la geometría euclideana, por tres puntos no alineados en R^3 pasa uno y sólo un plano.

Dados tres puntos A, B y C no alineados es posible encontrar la ecuación del plano que ellos determinan.
Mostraremos con un ejemplo como obtenerla.

Encontrar la ecuación del plano π que contiene a los puntos:
A(3 ; 1 ; 1) , B (1 ; 0 ; 1) y C (0 ; 1 ; 2)

A partir de los tres puntos construimos dos vectores, por ejemplo, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ que son paralelos al plano buscado.
$\overline{AB}$ = (1 ; 0 ; 1) - (3 ; 1 ; 1) = (-2 ; -1 ; 0)
$\overline{AC}$ = (0 ; 1 ; 2) - (3 ; 1 ; 1) = (-3 ; 0 ; 1)

Para construir la ecuación general necesitamos un vector normal al plano π entonces efectuando el producto vectorial $\overline{AB}\times\overline{AC}$ para obtener un vector $\bar{n}$

$$\bar{n} = \overline{AB} \ \text{x} \ \overline{AC} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ -2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1\breve{i} + 2\breve{j} - 3\breve{k} = (\,-1\,;\,2\,;\,-3\,)$$

Significa que (-1 ; 2 ; -3) es un vector normal al plano, reemplazando en los coeficientes de la ecuación, resulta:

$$-x + 2y - 3z + D = 0\ ,$$

Para determinar el valor de D utilizamos alguno de los puntos dados, por ejemplo el punto B = (1 ; 0 ; 1) que debe pertenecer al plano y por lo tanto cumplir su ecuación:

-1 + 2 . 0 – 3 . 1 + D = 0   - 4 + D = 0   D = 4   entonces la ecuación resulta

$-x + 2y - 3z + 4 = 0$ que es la ecuación general del plano pedido.

Verifiquemos la ecuación obtenida, comprobando que los otros dos puntos A y C también pertenecen a él.

A(3 ; 1 ; 1) :   - 3 + 2 . 1 – 3 . 1 + 4 = 0 A pertenece a π

C (0 ; 1 ; 2) :   0 + 2 . 1 – 3 . 2 + 4 = 0 C pertenece a π

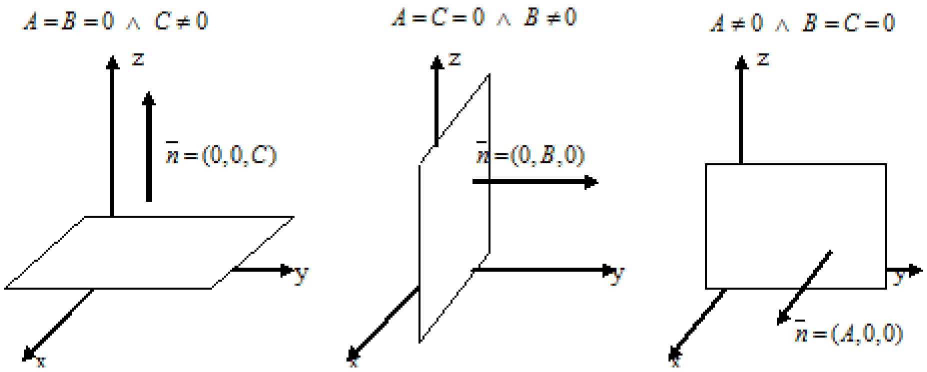
Piensa, si los puntos *A, B y C* hubieran estado alineados en qué parte del desarrollo nos hubiéramos dado cuenta?

……………………………………………………………………………………………..

ALGUNOS CASOS PARTICULARES

Analizando la ecuación general del plano, observamos que A, B, C, D son coeficientes, es decir números reales, siendo A,B,C las componentes del vector normal al plano, por lo tanto dada la ecuación: $\pi : A.x + B.y + c.z + D = 0$ automáticamente tenemos las componentes del vector normal al plano $\bar{n} = (A, B, C) = A.\breve{i} + B.\breve{j} + C.\breve{k}$ En todos los casos A,B, y C no pueden ser simultáneamente nulos, pero si uno o dos de ellos lo son , el plano resulta paralelo a un eje coordenado o a un plano coordenado.

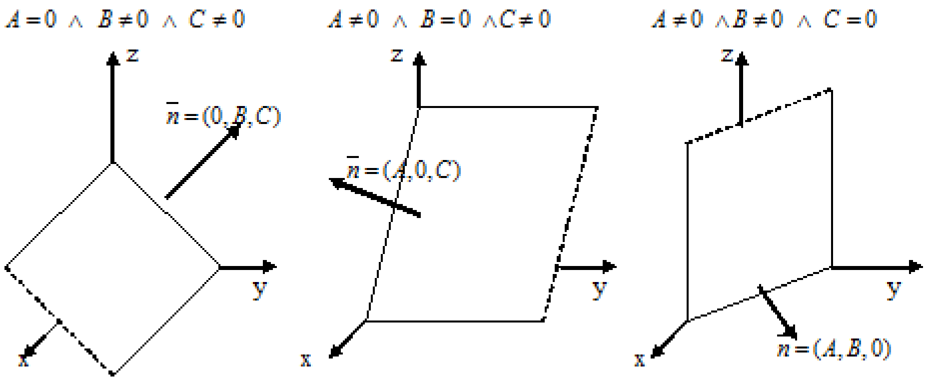
Paralelo a un plano coordenado:



Por ejemplo, el plano $3y - 5 = 0$, o de otra forma $y = \frac{5}{3}$ es paralelo al plano coordenado *x,z* y corta al eje y en $\frac{5}{3}$, es perpendicular al eje y

¿Cuáles son las ecuaciones de los planos coordenados?
Plano (x;y)……………………….plano (y ; z)…………………plano (x ; z) ………………..

Paralelo a un eje coordenado:



Por ejemplo, el plano $x + z - 4 = 0$, tiene como vector normal $\overline{n} = (1,0,1)$ normal al $\breve{j} = (0,1,0)$ y paralelo al eje de coordenadas y

POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS
INTERSECCIÒN DE PLANOS

Dos planos en el espacio pueden ser paralelos, (coincidentes o no), o ser secantes, su intersección es una recta, pudiendo ser en este caso ortogonales o no.

Analizaremos algunos ejemplos partiendo de las ecuaciones generales de los planos.

Ejemplo 1: Dados los planos $\pi_1 : 3x - 5.y + z + 4 = 0$ y $\pi_2 : -6.x + 10.y - 2.z + 3 = 0$

Sus vectores normales son $\overline{n_1} = (3,-5,1)$ y $\overline{n_2} = (-6,10,-2)$

Los planos π_1 y π_2 serán paralelos si y sólo sí sus normales son paralelas y para ello debe suceder que $\overline{n_1}$ sea múltiplo escalar de $\overline{n_2}$

$\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} // \overline{n_2} \wedge \overline{n_1} // \overline{n_2} \Leftrightarrow \overline{n_1} = \lambda.\overline{n_2}$

Para que exista ese número real λ, las componentes de los vectores deben ser proporcionales

$$\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \frac{3}{-6} = \frac{-5}{10} = \frac{1}{-2} = \lambda = -\frac{1}{2}$$

En este caso se cumple la proporcionalidad, entonces los planos son paralelos.

Para determinar si son coincidentes o su intersección es vacía, observamos que pasa con los términos independientes de las dos ecuaciones, si respetan la proporcionalidad el plano es el mismo, son coincidentes, en caso contrario son paralelos.

En el ejemplo:

$\frac{D_1}{D_2} = \frac{4}{3} \neq -\frac{1}{2} = \lambda$ lo que significa que no es el mismo plano.

Los dos planos dados son paralelos no coincidentes, su intersección es vacìa.

$\pi_1 // \pi_2$ y $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$

Otra forma de determinar si se trata del mismo plano es encontrar las coordenadas de un punto que pertenezca a uno de los planos y establecer si ese punto pertenece al otro (si cumple la ecuación) . Si pertenece al otro plano, entonces los planos dados son coincidentes (ya que dos planos paralelos que tienen un punto en común, tienen todos son puntos en común, son coincidentes). En cambio si un punto de uno de ellos no pertenece al otro, entonces son paralelos no coincidentes.

La representación gráfica de los dos planos la puedes visualizar en el enlace:
https://www.geogebra.org/3d/wcycw9qr

Escribe ahora una ecuación de un plano π_2 coincidente con $\pi_1 : 3x - 5.y + z + 4 = 0$

…………………………………………………………………………………..

Ejemplo 2: Dados los planos $\pi_1 : x + y - z + 3 = 0$ y $\pi_2 : x + 2.y + 3z - 9 = 0$

Sus vectores normales son $\overline{n_1} = (1,1,-1)$ y $\overline{n_2} = (1,2,3)$

Evidentemente los planos π_1 y π_2 no son paralelos, sus normales no son paralelas, $\overline{n_1}$ no es múltiplo escalar de $\overline{n_2}$

Las componentes de los vectores no son proporcionales

$$\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{-1}{3} \Rightarrow \pi_1 \text{ no } // \pi_2$$

Es decir que los planos son secantes, su intersección es una recta. Pueden ser perpendiculares o no.

Para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares sus respectivos vectores normales deben serlo, y su producto escalar debe ser 0.

Es decir $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \perp \overline{n_2} \Leftrightarrow \overline{n_1} \bullet \overline{n_2} = 0$

En este caso: $\overline{n_1} \bullet \overline{n_2} = (1,1,-1) \bullet (1,2,3) = 1 + 2 - 3 = 0$

Es decir que los planos son perpendiculares.

Podemos ahora hallar la ecuación de la recta intersección entre ellos resolviendo el sistema con las dos ecuaciones

$\begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ x + 2y + 3z - 9 = 0 \end{cases}$ Es un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que por lo analizado recién es compatible indeterminado, su conjunto solución es el conjunto formado por los infinitos puntos de la recta que tienen en común.

Resolvemos por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 9 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

$$F_2 \to F_2 - F_1$$

Comparemos los rangos r(A) = r (A’) =2 < n = 3

El sistema tiene una variable libre, esa variable corresponderá al parámetro de la ecuación de la recta solución.

$\begin{cases} x + y - z = -3 \\ \quad y + 4z = 12 \end{cases}$ $y = -4z + 12$ sustituyendo en la primera ecuación

$$x + (-4z + 12) - z = -3 \;\Rightarrow\; x - 5z = -15 \;\Rightarrow\; x = 5z - 15$$

Entonces el conjunto solución es

$r:(x,y,z)=(5z-15,-4z+12,z)=(-15,12,0)+\lambda.(5,-4,1)$

La recta anterior, que pasa por el punto (-15,12,0) y tiene como vector director al (5,-4,1) es la intersección entre los planos dados.

Verificación:

Comprobemos que el punto de la recta pertenece a los dos planos:

(-15,12,0) $\in \pi_1$, ya que $-15+12-0+3=0$

(-15,12,0) $\in \pi_2$ ya que $-15+2.12+3.0-9=0$

Y que el vector director (5,-4,1) es normal a los vectores normales a los planos, su producto escalar debe ser 0

(5,-4,1) $\bullet(1,1,-1)=5-4-1=0$

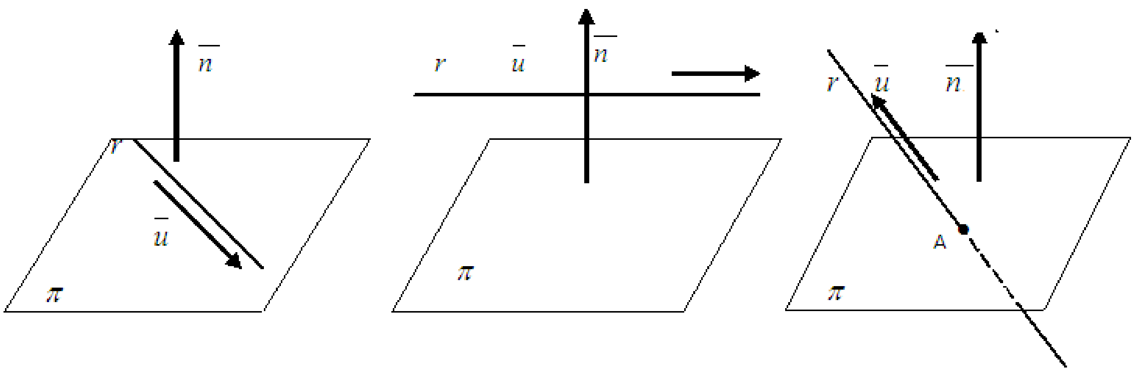
(5,-4,1) $\bullet(1,2,3)=5-8+3=0$

La recta está incluida en ambos planos, es la recta intersección entre ellos.

La representación gráfica de los dos planos la puedes visualizar en el siguiente link:
https://www.geogebra.org/3d/bvjgwd8f

POSICIONES RELATIVAS DE RECTA Y PLANOS

Podemos pensar ahora qué posiciones relativas pueden tener una recta y un plano en el espacio.



En el diagrama anterior se presentan tres posibilidades.

1) La recta está incluida en el plano.

2) La recta y el plano son paralelos, de modo que no tienen puntos en común,

3) La recta y el plano se cortan en un punto. Su intersección es un punto.

Sean: $r:(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)+\lambda.(u_x,u_y,u_z)\ \ \forall\lambda\in R$ y $\pi: A.x+B.y+c.z+D=0$, la recta y el plano.

Indica què condiciones deben cumplirse entre el vector director de la recta $\overline{u}=(u_x,u_y,u_z)$ y el vector normal al plano $\overline{n}=(A,B,C)$ en cada caso:

1)………………………………………………………………………………

2)………………………………………………………………………………

3)………………………………………………………………………………

Tanto en el caso 1 como en el 2, el vector director de la recta y el vector normal del plano deben ser perpendiculares, su producto escalar debe ser 0.

Como podemos discriminar estas dos situaciones?
Intenta en este ejemplo.

Ejemplo 1: Como se encuentran ubicados en el espacio el plano $\pi: 5.x-3.y-z-6=0$ y la recta $r:(x,y,z)=(3,2,3)+\lambda.(2,3,1)$

El vector director de la recta es, en esta oportunidad, $\overline{u}=(2,3,1)$ y el vector normal al plano es $\overline{n}=(5,-3,-1)$

El producto escalar entre ellos es $\overline{u}\bullet\overline{n}=(2,3,1)\bullet(5,-3,-1)=10-9-1=0$ lo que significa que $\overline{n}\perp\overline{u}$

Puede suceder que la recta esté contenida en el plano o la intersección entre ambos sea vacía.

Para ello basta considerar cualquier punto de la recta, si este pertenece al plano significa que la recta está incluida en el plano. Si el punto no pertenece al plano significa que la recta y el plano son paralelos y su intersección es vacía.

Podemos trabajar con el punto dado en la ecuación de la recta: $P_0(3,2,3)$
Comprobamos si pertenece o no al plano, reemplazando en la ecuación del plano.

5.3 - 3. 2- 3 - 6= 15 – 6 – 3 – 6 = 0 significa que el punto pertenece también al plano, entonces todos los puntos de la recta pertenecen al plano.
La recta está contenida en el plano

OTRA FORMA

Para decidir la posición entre la recta y el plano, podemos proceder a buscar la intersección entre ellos, resolviendo el sistema de ecuaciones formado por la ecuación general del plano y las ecuaciones de la recta.

En este ejemplo: $\begin{cases} x = 3 + \lambda.2 \\ y = 2 + \lambda.3 \\ z = 3 + \lambda \\ 5.x - 3y - z - 6 = 0 \end{cases}$

Reemplazamos x, y, z en la ecuación del plano y despejamos λ

$$5.(3 + \lambda.2) - 3(2 + \lambda.3) - (3 + \lambda) - 6 = 0$$
$$15 + 10\lambda - 6 - 9\lambda - 3 - \lambda - 6 = 0$$
$$10\lambda - 9\lambda - \lambda = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0\lambda = 0$$

La ecuación resultante tiene solución para cualquier valor de λ, entonces todos los puntos de la recta son solución del sistema.
La intersección entre el plano y la recta es la misma recta, lo que significa que la recta está incluida en el plano.

Ejemplo 2

Indica cuál es la posición relativa entre la recta y el plano, siendo:
$r : (x, y, z) = (2,1,4) + \lambda.(3,-1,6) \ \ \forall \lambda \in R$ y $\pi : \ x - 3.y - 6z = 35$

El vector director de la recta es, ahora, $\bar{u} = (3,-1,6)$ y el vector normal al plano es $\bar{n} = (1,-3,-6)$
El producto escalar entre ellos es $\bar{u} \bullet \bar{n} = (3,-1,6) \bullet (1,-3,-6) = 3 + 3 - 36 = -30 \neq 0$ lo que significa que $\bar{n}$ no es perpendicular a $\bar{u}$.
Significa entonces que la recta y el plano se cortan en un punto, para encontrarlo resolvemos el sistema

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda.3 \\ y = 1 + \lambda.(-1) \\ z = 4 + \lambda.6 \\ x - 3y - 6z = 35 \end{cases}$$

Reemplazamos x, y, z en la ecuación del plano y despejamos λ

$$2+3.\lambda-3(1-\lambda)-6(4+6\lambda)=35$$
$$2+3.\lambda-3+3\lambda-24-36\lambda=35$$
$$-30\lambda-25=35 \quad \Rightarrow \quad \lambda=-\frac{60}{30}=-2$$

Reemplazando el valor obtenido del parámetro en la ecuación de la recta, obtenemos el punto intersección:

$$(x,y,z)=(2,1,4)-2.(3,-1,6)=(-4,3,-8)$$

Significa entonces que:

Como el punto lo obtuvimos reemplazando el parámetro en la ecuación de la recta, falta comprobar que efectivamente pertenece al plano, verificamos que cumple la ecuación:

$$-4-3.3-6(-8)=-4-9+48=35$$

Resolver los ejercicios 20 al 35 del archivo llamado "MÓDULO 3, GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS"

Videos de la cátedra que pueden ayudarte con estos temas:

Ecuaciones de planos

1- Ecuaciones de planos
https://www.youtube.com/watch?v=5D_u93nHfew

2- Armado de ecuaciones de planos, varios ejemplos
https://www.youtube.com/watch?v=ABrjp1O1Y8E

3- Ejercicio de Ecuaciones de planos y rectas
https://www.youtube.com/watch?v=0o1lY_Yl_Sc&list=PLrIBAgsbPZH2FouIVFZ_Lbv-7aDHTtkDU&index=2

4 - Relación entre planos . Paralelismo
https://www.youtube.com/watch?v=iFKOvA4dQRE

5- Relación entre rectas y planos
https://www.youtube.com/watch?v=-UhMJAGXLs0

6 – Ejemplo de planos con parámetros
https://www.youtube.com/watch?v=q2WbOLieQYs

7 – Construir un Cuadrado incluido en un plano
https://www.youtube.com/watch?v=_Yid8hBJgv8