UNIDAD 5

Dado un conjunto de vectores no nulos de un espacio euclídeo, probar que si los vectores pertenecientes a él son ortogonales de a dos, entonces es un conjunto linealmente independiente.

HIPOTESIS) $\{v_1, v_2, \dots v_k\}$; $v_1 \neq 0$; $v_2 \neq 0$; $v_k \neq 0$

$v_1 \perp v_2$; $v_1 \perp v_3$; $v_2 \perp v_3$, …

TESIS) $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \quad \wedge \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$

DEM) Por propiedad $\langle 0_E, v_1 \rangle = 0$ pues $\langle 0.u, v_1 \rangle = 0 \langle u, v_1 \rangle = 0$

$\langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k , v_1 \rangle = 0$

$\langle \alpha v_1, v_1 \rangle + \underbrace{\langle \alpha_2 v_2, v_1 \rangle}_{0} + \dots + \underbrace{\langle \alpha_k v_k, v_1 \rangle}_{0} = 0$

$\alpha_1 \langle v_1, v_1 \rangle = 0 \qquad v_1 \neq 0_E \rightarrow \alpha_1 = 0$

$i \neq j$, $\langle v_i, v_j \rangle = 0$

$i = j$ $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0 \quad \therefore \quad \alpha_i = 0$

$\Rightarrow$ el conjunto es L.I.

En el espacio euclídeo (E,<,>) de dimensión finita, suponga que tiene una base ortogonal$\{ v_1, v_2, \dots v_n\}$. Mostrar cómo obtiene las coordenadas de cualquier vector v, haciendo uso del producto interno.

HIPÓTESIS) $B = \{v_1, v_2, \dots v_m\}$ base ortonormal ; $v \in E \rightarrow [v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$

TESIS) $\alpha_1 = \langle v, v_1 \rangle$; $\alpha_2 = \langle v, v_2 \rangle$; $\alpha_m = \langle v, v_m \rangle$

DEM) Sea $v \in E$, entonces $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m$

Luego $\langle v, v_1 \rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m , v_1 \rangle$

$\langle v, v_1 \rangle = \langle \alpha_1 v_1, v_1 \rangle + \underbrace{\langle \alpha_2 v_2, v_1 \rangle}_{0} + \underbrace{\dots}_{0} + \underbrace{\langle \alpha_m v_m, v_1 \rangle}_{0}$

$\langle v, v_1 \rangle = \alpha_1 \langle v_1, v_1 \rangle \qquad v_1 \neq 0_E$

$\dfrac{\langle v, v_1 \rangle}{\underbrace{\langle v_1, v_1 \rangle}_{1}} = \alpha_1 \Longrightarrow \alpha_1 = \langle v, v_1 \rangle$

$\alpha_i = \langle v, v_i \rangle$

EJERCICIO 1

$(\mathbb{R}^{2\times 2}, \langle A;B \rangle)$ $\qquad \langle A;B \rangle = tr\ A \cdot B^T$

$S = \{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} / A^T = -A \}$

a) Hallar una base ortogonal de S

b) Hallar una base ortogonal de $S^\perp$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

$\begin{cases} a = -a \\ c = -b \\ b = -c \\ d = -d \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}$ antisimétrica

$2d = 0$
$d = 0$

a) $S = gen \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$; $B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ base ortogonal

b) $S^\perp$ $\left\langle \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$; $\cancel{x.0} - y.1 + z.1 + \cancel{t.0} = 0$

$z = y$

$\begin{pmatrix} x & y \\ y & t \end{pmatrix} \in S^\perp$

$B_{S^\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

BASE ORTOGONAL de $S^\perp$:

$B_{S^\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

EJERCICIO 2

Dada $B = \left\{ x, \frac{4}{5}x^2 + \frac{3}{5}, -\frac{3}{5}x^2 + \frac{4}{5} \right\}$ base de $P_2[\mathbb{R}]$; $(P_2[\mathbb{R}], \langle a_2x^2 + a_1x + a_0, b_2x^2 + b_1x + b_0 \rangle = a_2 \cdot b_2 + a_1 b_1 + a_0 b_0)$

Hallar las coordenadas del vector $t(x) = 3x^2 - 2x + 7$ respecto de la base B, usando el producto interno dado.

1°) necesito una base ortogonal

$\langle x, \frac{4}{5}x^2 + \frac{3}{5} \rangle = 0 \cdot \frac{4}{5} + 1.0 + 0 \cdot \frac{3}{5} = 0$

$\langle x, -\frac{3}{5}x^2 + \frac{4}{5} \rangle = 0 \cdot \frac{4}{5} + 1.0 + 0 \left(-\frac{3}{5}\right) = 0$

$\langle \frac{4}{5}x^2 + \frac{3}{5}, -\frac{3}{5}x^2 + \frac{4}{5} \rangle = \frac{12}{25} + 0.0 + \left(-\frac{12}{25}\right) = 0$

B es base ortogonal / ortonormal

B es un conjunto ortogonal

B es una base ortogonal

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{0.0 + 1.1 + 0.0} = 1$

$\|\frac{4}{5}x^2 + \frac{3}{5}\| = \sqrt{\langle \frac{4}{5}x^2 + \frac{3}{5}, \frac{4}{5}x^2 + \frac{3}{5} \rangle} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{9}{25}} = 1$

$\|-\frac{3}{5}x^2 + \frac{4}{5}\| = 1$

B es base ORTONORMAL.

2°) $3x^2 - 2x + 7 = \alpha (x) + \beta \left(\frac{4}{5}x^2 + \frac{3}{5} \right) + \gamma \left(-\frac{3}{5}x^2 + \frac{4}{5} \right)$

$\alpha = \dfrac{\langle 3x^2 - 2x + 7, x \rangle}{\langle x, x \rangle} = 3.0 + (-2).1 + 7.0 = -2$

$\beta = \dfrac{\langle 3x^2 - 2x + 7, \frac{4}{5}x^2 + \frac{3}{5} \rangle}{\langle \frac{4}{5}x^2 + \frac{3}{5}, \frac{4}{5}x^2 + \frac{3}{5} \rangle} = 3 \cdot \frac{4}{5} - 2.0 + 7 \cdot \frac{3}{5} = \frac{33}{5}$

$\gamma = \dfrac{\langle 3x^2 - 2x + 7, -3/5\, x^2 + \frac{4}{5} \rangle}{\langle -\frac{3}{5}x^2 + \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}x^2 + \frac{4}{5} \rangle} = 3\left(-\frac{3}{5}\right) + (-2).0 + 7 \cdot \frac{4}{5} = \frac{19}{5}$

$[t(x)]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{33}{5} \\ \frac{19}{5} \end{pmatrix}$