T P 04 Ej. 27-b

Encontrar una función lineal que aproxime a:

$F(x,y,z,w) = (xy, sen\ z,\ w+z)$ cerca de $\left(0,0,\frac{\pi}{2},1\right)$

Para resolver este ejercicio debemos utilizar la matriz jacobiana como en el ejercicio anterior, pero a esta matriz hay que multiplicarle una nueva matriz [n x 1] donde n son la cantidad de variables involucradas en el campo.

Para un Campo Vectorial, la función lineal que aproxima se forma de la siguiente manera:

$Fl(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}_{(x_0,y_0,z_0,w_0)} + \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0,z_0,w_0)} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ donde y_m son las componentes del campo vectorial.

Donde $\alpha_i = \bar{X} - P$ con P el punto que se está estudiando. Para trabajar más simple, vamos a llamar a las componentes de este vector (h, k, l, s)

En nuestro ejercicio antes de hacer matriz alguna, debemos dar nombre a las funciones que van a servir para obtener la matriz. Por consecuencia:

$u = u(x,y,z,w) = xy$

$v = v(x,y,z,w) = sen\ z$

$r = r(x,y,z,w) = w + z$

Función lineal aproximante:

$$Fl(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ r \end{bmatrix}_{\left(0,0,\frac{\pi}{2},1\right)} + JF\left(0,0,\frac{\pi}{2},1\right) \begin{bmatrix} h \\ k \\ l \\ s \end{bmatrix}$$

$JF(x,y,z,w) \begin{bmatrix} h \\ k \\ l \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & u_w \\ v_x & v_y & v_z & v_w \\ r_x & r_y & r_z & r_w \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \\ s \end{pmatrix}$ Calculando las respectivas derivadas el Jacobiano queda:

$Fl(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} x\,y \\ \mathrm{sen}(z) \\ w+z \end{bmatrix}_{\left(0,0,\frac{\pi}{2},1\right)} + \begin{bmatrix} y & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos z & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \\ s \end{pmatrix}$ Reemplazando en el punto dado, queda:

$Fl(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\pi}{2}+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \\ l \\ s \end{pmatrix}$ Ahora ya queda encontrar las variables k, h, l y s

$$\begin{aligned} x &= h + x_0 \\ y &= k + y_0 \\ z &= l + z_0 \\ w &= s + w_0 \end{aligned}$$ Para nuestro caso la equivalencia queda $$\begin{aligned} x &= h + 0 \\ y &= k + 0 \\ z &= l + \tfrac{\pi}{2} \\ w &= s + 1 \end{aligned}$$

$$Fl(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\pi}{2}+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - \dfrac{\pi}{2} \\ w-1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\pi}{2}+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z + w - \dfrac{\pi}{2} - 1 \end{bmatrix}$$

Entonces la Función Lineal que aproxima a $F(x,y,z,w)$ cerca de $\left(0,0,\frac{\pi}{2},1\right)$ es:

$$Fl(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ z+w \end{bmatrix}$$