<u>**Curso Semipresencial de Álgebra y Geometría Analítica II – 2do Cuatrimestre 2017**</u>

<u>**Guía de Estudio Nº 9**</u>

- <u>**Libro**</u>: Álgebra Lineal. Una introducción moderna. (Poole, D.) <u>**Capítulo 5**</u>: Páginas: 389-397
- <u>**Temas**</u>: **Práctica 5** – Complemento ortogonal. Proyección ortogonal y distancia

<u>**Guía de estudio y preguntas**</u>:

1. **Página 389**
   - ✓ Leer la definición de complemento ortogonal de un subespacio. ¿Qué cumplen los vectores que pertenecen al complemento ortogonal de un subespacio W?
   - ✓ Si estoy en R^2 con el producto interno usual, y quisiera encontrar el complemento ortogonal de $W = gen\{(1,1)\}$, qué cuentas debería hacer? ¿Obtendré un solo vector que pertenezca al complemento de W o infinitos? Si son infinitos, podré dar un generador? ¿Qué dimensión tendrá el complemento ortogonal de W en este caso? ¿El vector nulo pertenecerá al complemento de W?
   - ✓ Pensar el ítem anterior si estoy en R^3

2. **Página 390**
   - ✓ Leer el Teorema 5.9. Corroborar algunas de las respuestas dadas en los puntos del ítem 2. Leer y comprender la demostración del ítem a) del teorema.
   - ✓ ¿Qué puedo decir hasta ahora sobre las dimensiones de W y de su complemento ortogonal? ¿Hay alguna relación?
   - ✓ Leer y comprender el ítem d).

3. **Página 392**
   - ✓ Tomar el ejemplo 5.10 (sin ver la resolución) y tratar de pensar qué debo pedir para hallar el complemento ortogonal de W. Si tomo un vector v genérico $v \in W^{\perp}$, cómo debe ser este vector con los vectores dados? ¿Cómo debe ser el producto interno entre v y los vectores de W?
   - ✓ Realizar esos productos con un vector genérico de R^5 y ver qué condiciones obtengo sobre el vector que estoy buscando $v \in W^{\perp}$. ¿Cuántos generadores obtengo? ¿Puedo relacionar las dimensiones de W y su complemento?

4. **Página 393**
   - ✓ Antes de la definición, dice que a cualquier vector v del espacio euclídeo, se puede escribir como $v = proy_W v + perp_W v$. Nosotros, en la práctica llamamos $proy_{W^{\perp}} v = perp_W v$. Para visualizar la descomposición de un vector en suma de otros dos, trabajar en el espacio R^2 con el producto usual. Tomar dos rectas que pasen por el origen, perpendiculares entre sí (una de ellas podría llamarla W, y la otra $W^{\perp}$, ya que una es el complemento ortogonal de la otra). Dibujar ahora un vector cualquiera que no pertenezca a ninguna de las dos rectas. Dibujar las proyecciones del vector, una sobre W, y la otra $W^{\perp}$, y verificar que $v = proy_W v + proy_{W^{\perp}} v$ con la regla del paralelogramo.
   - ✓ ¿A qué subespacio pertenece $proy_W v$? ¿a qué subespacio pertenece $proy_{W^{\perp}} v$?
   - ✓ Leer la definición de proyección ortogonal. Observar que esta fórmula **sólo** sirve cuando tenemos una base ortogonal del subespacio W. Sin base ortogonal, hay otras formas de calcular la proyección. Algunas veremos al final de esta guía.
   - ✓ Observar que el vector $proy_W v$ se escribe como combinación lineal de una base de W. Corroborar entonces, la respuesta dada en el "tilde 2".
   - ✓ Con el dibujo hecho anteriormente, ¿Cómo podríamos definir la distancia de v a W? Y la distancia de v a $W^{\perp}$?
   - ✓ **Ejemplo recomendado: Pág. 394-395: Ejemplo 5.11.**

5. **Página 395-397**
   - ✓ Leer el Teorema 5.11. ¿Qué nos dice en palabras este teorema? ¿Según lo visto en el ítem anterior, quiénes serían los vectores w y $w^{\perp}$?
   - ✓ Leer el Corolario 5.12. Aplicar este teorema con los subespacios W y $W^{\perp}$ elegidos en el ítem anterior (rectas) y verificar que se cumple.
   - ✓ Leer el Teorema 5.13. ¿Para qué me sirve este teorema a la hora de los ejercicios? ¿Qué pasaría si tengo en $(P_2[R], \langle\ ,\ \rangle)$ un subespacio W de dimensión 2? ¿Cuál sería la dimensión de $W^{\perp}$?

- ✓ Observar además, que vimos anteriormente, que $W \cap W^{\perp} = \{\overline{0}_V\}$, entonces usando esto, y el teorema 5.13, podemos decir que $W \oplus W^{\perp} = V$

Otra forma de hallar la proyección ortogonal de un vector v sobre un Subespacio W.

Si no tenemos una base ortogonal del espacio, eso quiere decir que las coordenadas del vector no tienen la forma dada en la definición del libro. Entonces tenemos dos opciones.

Supongamos que nos dan un espacio euclídeo $(E, \langle\, , \rangle)$, $\dim E = n$, un Subespacio $W \subset E$, una base $B = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ de W y un vector $v \in E$. Nos piden calcular $proy_W v$.

1) Si la base B dada es una base ortogonal, el libro nos indicó la fórmula para hallar la proyección.
2) Si la base B dada NO es una base ortogonal, tenemos dos opciones:
   i) Podríamos hallar una base ortogonal de W usando el método Gramm Schmidt, y sobre esa nueva base hallar la proyección como nos indica el libro.
   ii) Podemos hallar el complemento ortogonal de W, es decir, hallar una base de $W^{\perp}$ que sabemos que tendrá $n-k$ vectores (Por ej. $B' = \{v_{k+1}, v_{k+2}, ..., v_n\}$. Entonces uniendo las bases de W y $W^{\perp}$, formaremos una base del espacio total E. Esto me dice que puedo escribir a v en combinación lineal de esta base formada por las bases de W y $W^{\perp}$. O sea, $v = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + ... + \alpha_k.v_k + \alpha_{k+1}.v_{k+1} + ... + \alpha_n.v_n$. Cuando hallemos los escalares de esta combinación lineal, sabremos que, como $v = w + w^{\perp} = proy_W v + proy_{W^{\perp}} v$, entonces:

$$proy_W v = \alpha_1.v_1 + \alpha_2.v_2 + ... + \alpha_k.v_k \quad \text{y} \quad proy_{W^{\perp}} v = \alpha_{k+1}.v_{k+1} + ... + \alpha_n.v_n$$