T P 7 Ej 2 b

Calcular la integral:

(a) Integrando primero respecto de x.

(b) Integrando primero respecto de y.

$$\iint_R xy(x+y)dxdy \qquad\qquad R=[0,2]\times[-1,1]$$

Utilizaremos lo que se conoce como resolución iterada de integrales dobles.

Integrales iteradas.

Siendo f una función de dos variables que es integrable sobre el rectángulo $R=[a,b]\times[c,d]$. Se usa la notación $\int_c^d f(x,y)dy$ para indicar que x se mantiene fija y $f(x,y)$ se integra respecto a y a partir de $y=c$ hasta $y=d$. Este procedimiento se llama integración parcial respecto de y.

$$A(x)=\int_{y=c}^{d} f(x,y)\,dy$$

Si ahora se integra la función A con respecto a x

$$\int_{x=a}^{b} A(x)\,dx=\int_{x=a}^{b}\left(\int_{y=c}^{d} f(x,y)\,dy\right)dx$$

Análogamente podemos indicar que y esta fija y $f(x,y)$ se integra respecto a x:

$$B(x)=\int_{x=a}^{b} f(x,y)\,dx$$

Obteniendo

$$\int_{y=c}^{d} B(x)\,dx=\int_{y=c}^{d}\left(\int_{x=a}^{b} f(x,y)\,dx\right)dy$$

Por lo tanto, para integrar sobre el rectángulo R tenemos

$$\iint_R f(x,y)dxdy=\int_{y=c}^{d}\left(\int_{x=a}^{b} f(x,y)\,dx\right)dy=\int_{x=a}^{b}\left(\int_{y=c}^{d} f(x,y)\,dy\right)dx$$

Retomando el ejercicio en el cual se pide:

(a) Integrando primero respecto de x.

$$\iint_R xy(x+y)dxdy = \int_{y=-1}^{1} \left(\int_{x=0}^{2} xy(x+y)\,dx \right) dy$$

Resolvemos primero la integral que se encuentra dentro del paréntesis.

$$\int_{x=0}^{2} x\,dx = 3x|_{x=0}^{2} = 6$$

Ahora reemplazamos este resultado en la integral doble inicial.

$$\int_{y=0}^{2} 6dy = 6y|_{y=0}^{2} = 12$$

(b) Integrando primero respecto de y.

$$\iint_R 3dxdy = \int_{x=0}^{2} \left(\int_{y=0}^{2} 3\,dy \right) dx$$

Resolvemos primero la integral que se encuentra dentro del paréntesis.

$$\int_{y=0}^{2} 3\,dy = 3y|_{y=0}^{2} = 6$$

Ahora reemplazamos este resultado en la integral doble inicial.

$$\int_{x=0}^{2} 6dx = 6x|_{x=0}^{2} = 12$$