Álgebra y Geometría analítica II

Primer cuatrimestre de 2020

1) Sea en R^2, la base canónica $E = \{(1,0)\ ;\ (0,1)\}$ y la base $B = \{v_1\ ; v_2\}$, donde v_1 es vector director de la recta $L: x - 2y = 0$ y v_2 es perpendicular a v_1.

Tomar vectores cualesquiera de la recta L y dar sus coordenadas en base canónica y sus coordenadas en base B. ¿Que observas? ¿Cual será la ecuación de la recta L en coordenadas (x', y') de la base B?

Práctica Nº 2 Ej 1 Aplicaciones – Transf. De Ecuaciones

¿Cuál es la idea de las aplicaciones geométricas en cambio de coordenadas?

Tendremos la ecuación de una curva o figura geométrica en el plano o espacio, la cual estará expresada en coordenadas canónicas (x, y). Las coordenadas en base canónica de cualquier vector es él mismo, por eso las llamaremos así.

Vamos a querer obtener la ecuación de la misma curva o figura geométrica pero en otro sistema de coordenadas, desde otro punto de referencia (ya no en los ejes cartesianos que genera la base canónica) sino en otro sistema dado por otra base $B = \{v_1 ; v_2\}$

¿Cuál es la idea? Obtener una ecuación más simple de la misma curva o figura geométrica y que sea más sencilla a la hora de graficarla.

Práctica Nº 2 Ej 1 Aplicaciones – Transf. De Ecuaciones

1) Sea en R^2, la base canónica $E = \{(1,0) \,;\, (0,1)\}$ y la base $B = \{v_1 \,; v_2\}$, donde v_1 es vector director de la recta $L: x - 2y = 0$ y v_2 es perpendicular a v_1.

RECORDEMOS: Vector director de la recta es cualquier vector que está en la dirección de ella

$$L: x - 2y = 0 \quad \Longrightarrow x = 2y \quad \Longrightarrow L: (x; y) = (2y; y) = y.(2; 1) + (0; 0)$$

L es una recta con vector director $v = (2; 1)$ y pasa por el Origen

Práctica Nº 2 Ej 1 Aplicaciones – Transf. De Ecuaciones

L es una recta con vector director $v = (2;1)$ y pasa por el Origen

IMPORTANTE: Como la base B será un nuevo sistema de referencia, y los nuevos vectores representarán a los nuevos ejes, deberán ser PERPENDICULARES ENTRE SÍ Y UNITARIOS, así como lo son los de la base canónica

$$v_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

v_2 es perpendicular a v_1 ⇒

Hay infinitos! Cuál nos conviene elegir cuando estamos trabajando con aplicaciones geométricas?

Práctica Nº 2 Ej 1 Aplicaciones – Transf. De Ecuaciones

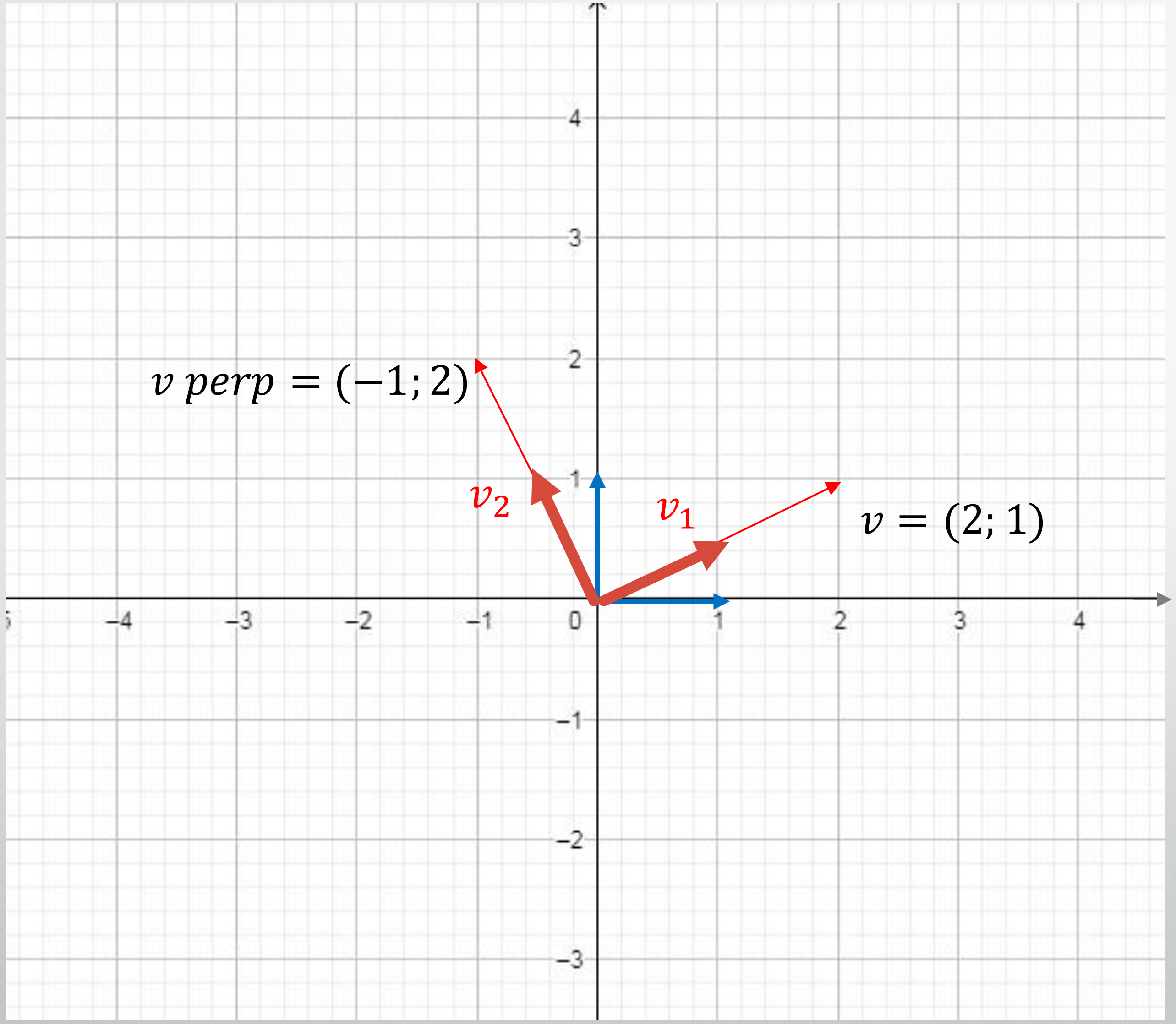
$$v_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

v_2 perpendicular a v_1

$$v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

ó

$$v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$



$E = \{(1,0)\ ;\ (0,1)\}$

Representa la dirección del Eje x y el sentido positivo del mismo

Representa la dirección del Eje y y el sentido positivo del mismo

$$B = \left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right);\left(-\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}$$

Representa la dirección del Eje x' y el sentido positivo del mismo

Representa la dirección del Eje y' y el sentido positivo del mismo

1) Sea en R^2, la base canónica $E = \{(1,0)\ ;\ (0,1)\}$ y la base $B = \{v_1\ ; v_2\}$, donde v_1 es vector director de la recta $L: x - 2y = 0$ y v_2 es perpendicular a v_1.

$$\boxed{B = \left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right);\left(-\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}}$$

Tomar vectores cualesquiera de la recta L y dar sus coordenadas en base canónica y sus coordenadas en base B. ¿Que observas? ¿Cual será la ecuación de la recta L en coordenadas (x', y') de la base B?

Práctica Nº 2 Ej 1 Aplicaciones – Transf. De Ecuaciones

Tomar vectores cualesquiera de la recta L y dar sus coordenadas en base canónica y sus coordenadas en base B. ¿Que observas? ¿Cual será la ecuación de la recta L en coordenadas (x', y') de la base B?

$$E = \{(1{,}0)\,;(0{,}1)\} \qquad B = \left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right);\left(-\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}$$

Tomamos vectores de la recta dada (es decir, todos múltiplos del vector director que hallamos previamente

$$v_3 = (2;1) \qquad v_4 = (4;2) \qquad v_5 = (-2;-1) \qquad v_6 = (6;3)$$

$$[v_3]_E = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \quad [v_4]_E = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} \quad [v_5]_E = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} \quad [v_6]_E = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} \Rightarrow [(x,y)]_E = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$[v_3]_B = \begin{pmatrix}\sqrt{5}\\0\end{pmatrix} \quad [v_4]_B = \begin{pmatrix}2\sqrt{5}\\0\end{pmatrix} \quad [v_5]_B = \begin{pmatrix}-\sqrt{5}\\0\end{pmatrix} \quad [v_6]_B = \begin{pmatrix}3\sqrt{5}\\0\end{pmatrix} \Rightarrow [(x,y)]_B = \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

Por como armamos la base B , si el vector pertenece a la recta dada, siempre obtenemos la segunda coordenada igual a 0

$$\Rightarrow \boxed{y' = 0}$$

Práctica Nº 2 Ej 1 Aplicaciones – Transf. De Ecuaciones

Dibujemos la recta:

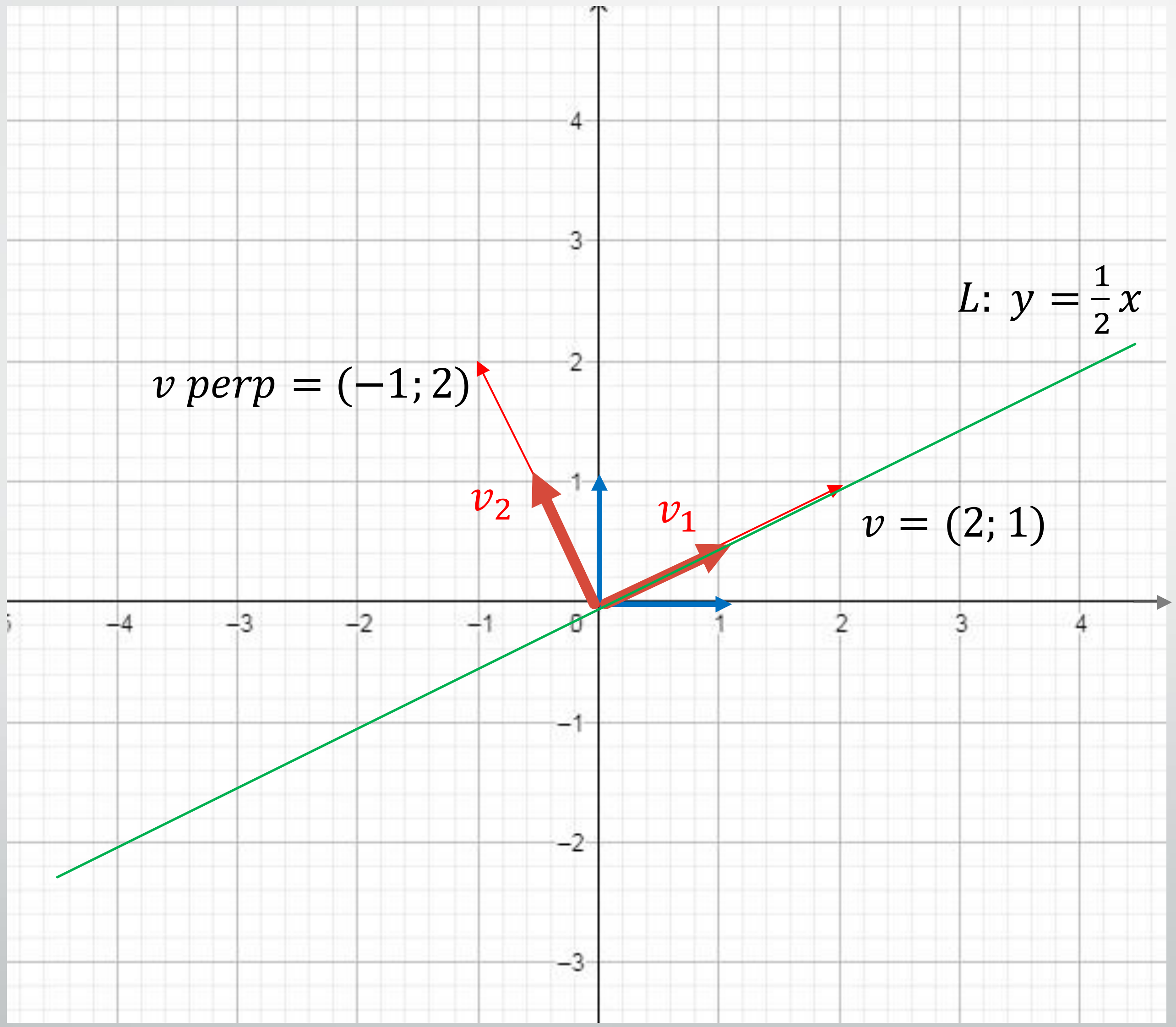
$$L:\ x - 2y = 0$$

$$\boxed{L:\ y = \frac{1}{2}x}$$

La recta coincide con el Eje x'

La recta es constante en este sistema nuevo de coordenadas

$$\boxed{y' = 0}$$



Práctica Nº 2 Ej 1 Aplicaciones – Transf. De Ecuaciones

Tomar vectores cualesquiera de la recta L y dar sus coordenadas en base canónica y sus coordenadas en base B. ¿Que observas? ¿Cual será la ecuación de la recta L en coordenadas (x', y') de la base B?

$$E = \{(1,0)\,;(0,1)\} \qquad B = \left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right);\left(-\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}$$

$$[(x,y)]_E = \binom{x}{y} \qquad [(x,y)]_B = \binom{x'}{y'}$$

$$\boxed{y' = 0}$$

Esta será la nueva ecuación de la recta L en coordenadas (x', y') de la base B

Práctica Nº 2 Ej 1 Aplicaciones – Transf. De Ecuaciones

Ahora veamos cómo llegar a la nueva ecuación de la recta pero en vez de gráficamente, analíticamente usando Cambio de coordenadas

$L: x - 2y = 0$ $\quad E = \{(1,0)\,;(0,1)\}$ $\quad B = \left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right);\left(-\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}$

$[(x,y)]_E = \binom{x}{y}$

$[(x,y)]_B = \binom{x'}{y'}$

C_{BE} ó C_{EB}

$\boxed{C_{BE}.[v]_B = [v]_E}$

$$C_{BE} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} . \binom{x'}{y'} = \binom{x}{y}$$

Práctica Nº 2 Ej 1 Aplicaciones – Transf. De Ecuaciones

$$L\colon\ x - 2y = 0$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y' = x \\ \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' = y \end{cases}$$

Una vez hecho el cambio de coordenadas reemplacemos en la ecuación de la recta para transformar su ecuación en las nuevas coordenadas (x', y')

$$L\colon\ x - 2y = 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y' - 2.\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) = 0$$

$$-\frac{5}{\sqrt{5}}y' = 0 \Rightarrow \boxed{y' = 0}$$