T P 04 Ej. 19-a

Calcular la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie dada:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad en\ \vec{P}_0 = (1\ ,0\ ,0)$$

La siguiente ecuación representa geométricamente en R^3 una superficie esférica. Sí a la misma la reescribimos de la siguiente manera, tenemos:

$F(x, y, z)$: $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

Con lo cual:

$$\boldsymbol{\pi}: \vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{F}(\vec{\boldsymbol{P}}_{\mathbf{0}}).(\vec{\boldsymbol{P}} - \vec{\boldsymbol{P}}_{\mathbf{0}}) = \mathbf{0}$$

Representa la ecuación del Plano Tangente a la superficie dada en el punto $\vec{P}_0$.

Siendo:

$\vec{\nabla}F(\vec{P}_0)$: $el\ vector\ normal\ a\ la\ superficie\ en\ \vec{P}_0$.

$\vec{P} = (x, y, z)\ punto\ genérico\ de\ R^3$.

$\vec{P}_0 = (x_0\ , y_0, z_0)\ punto\ en\ estudio\ de\ la\ función$.

Entonces:

$$\vec{\nabla}F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (2.x\ ;\ 2.y\ ;\ 2.z) \qquad \rightarrow$$

$$\vec{\nabla}F(\vec{P}_0) = \vec{\nabla}F(1\ ,0\ ,0) = (2\ ,0\ ,0)$$

Finalmente tenemos:

$$\pi: \vec{\nabla}F(\vec{P}_0).(\vec{P} - \vec{P}_0) = 0 \quad \rightarrow$$

$$\pi: \vec{\nabla}F(1,0,0) \circ [(x, y, z) - (1,0,0)] = 0$$

$$\pi: (2\ ,0\ ,0) \circ (x - 1\ , y - 0\ , z - 0) \rightarrow$$

$$\pi: 2.(x - 1) + 0.y + 0.z = 0 \rightarrow$$

$$\pi: 2.x - 2 = 0 \rightarrow$$

$$\boldsymbol{\pi}: \boldsymbol{x} = \mathbf{1}$$

Por otra parte, la ecuación de la Recta Normal que pasa por $\vec{P}_0$ es:

$$\mathbb{L}: \boldsymbol{\vec{\nabla} F(\vec{P}_0).t + \vec{P}_0}$$

Siendo:

$\vec{\nabla} F(\vec{P}_0)$: *el vector director de la recta* $\mathbb{L}$ *en* $\vec{P}_0$.

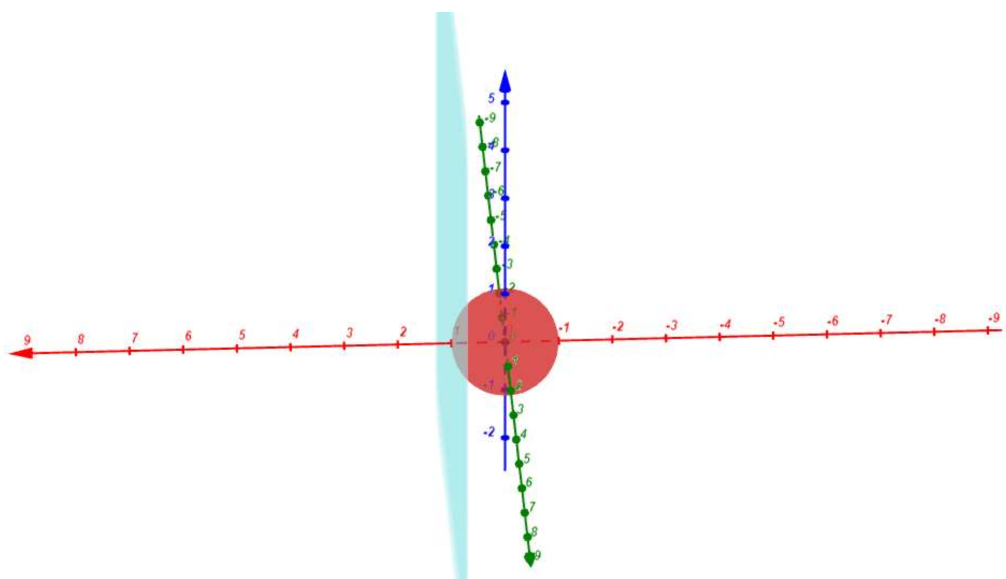
$\vec{P}_0 = (x_0\,, y_0, z_0)$ *punto en estudio de la función*.

Entonces:

$$\mathbb{L}: \vec{\nabla} F(\vec{P}_0).t + \vec{P}_0 \rightarrow$$

$$\mathbb{L}: \vec{\nabla} F(1\,,0\,,0).t + (1\,,0\,,0) \rightarrow$$

$$\mathbb{L}: \boldsymbol{(2\,,0\,,0).t + (1\,,0\,,0)}$$



En el gráfico se puede observar la representación geométrica de la esfera de radio $r = 1$ y el plano tangente a esta en el punto $\vec{P}_0 = (1\,,0\,,0)$. Se puede apreciar que el plano de ecuación $\pi: x = 1$ es un plano paralelo al plano conformado por lo ejes coordenados YZ (eje X en color rojo, eje Y en color verde, eje Z color azul).

Finalmente, la recta normal a la superficie esférica en $\vec{P}_0 = (1\,,0\,,0)$, resulta coincidir con el eje coordenado X (color rojo).