UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA MATANZA
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA E INV. TECNOLOGICAS
ALGEBRA Y GEOMETRIA ANALITICA II / MATEMATICA DISCRETA II
AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Vamos a partir de una pregunta general que podemos hacernos respecto a una transformación lineal.

Sea T:$\mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformacion lineal que va de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ al mismo espacio vectorial $\mathbb{V}$.

¿Será posible encontrar un vector $\vec{v} \in \mathbb{V}$, tal que T($\vec{v}$) $= \lambda\vec{v}$? O sea , ¿será posible encontrar un vector perteneciente a $\mathbb{V}$, tal que el transformado del mismo sea un vector múltiplo de él? (Dejando el lado el vector nulo que sería una solución obvia)

Probemos con un ejemplo en particular

Sea T:$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $T(x,y) = (\frac{8}{3}x - \frac{1}{3}y;\ -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}y)$

Lo que estamos buscando es (al menos) un vector tal que $T(x,y) = \lambda(x,y)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$,

o sea $(\frac{8}{3}x - \frac{1}{3}y;\ -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}y) = \lambda(x,y)$, o lo que es lo mismo $((\frac{8}{3} - \lambda)x - \frac{1}{3}y;\ -\frac{2}{3}x + (\frac{7}{3} - \lambda)y) = (0,0)$

Esta última ecuaciòn constituye un sistema homogéneo de ecuaciones lineales con dos incógnitas en primer grado.

$$\begin{pmatrix} \frac{8}{3} - \lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

Como sabemos un sistema de tal tipo es siempre compatible , pero en este caso vamos a solicitar que sea compatible indeterminado , caso contrario la solución sería $(x,y) = (0,0)$, que como planteamos anteriormente es una solución obvia que no deseamos.

Luego , para que dicho sistema sea incompatible es necesario que las ecuaciones no sean independientes , o lo que es lo mismo pedir que la matriz de los coeficientes tenga determinante igual a cero.

Luego $\begin{vmatrix} \frac{8}{3} - \lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} - \lambda \end{vmatrix} = 0$ (**2**) , lo que equivale a $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ (**3**)

Por lo tanto partimos de la condiciòn (**1**) que establece condiciones sobre los vectores (x,y) para arribar a la condición (**2**) que fija condiciones sobre los posibles valores del parámetro λ a través de un polinomio en λ.(**3**).

Debemos hallar las posibles soluciones de esta ecuación de segundo grado: las mismas son $\lambda = 3$ y $\lambda = 2$

Sabemos entonces que para que se cumpla (**1**) los únicos valores posibles de λ son 2 y 3.Debemos hallar ahora los vectores relacionados con estos valores

Si $\lambda = 3$ reemplazando en (**1**) , resulta

$$\begin{pmatrix} \frac{8}{3}-3 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3}-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y \\ -\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, lo que da por resultado dos ecuaciones lineales en primer grado en x e y que dependen una de otra (lo que era esperable de acuerdo a lo solicitado).

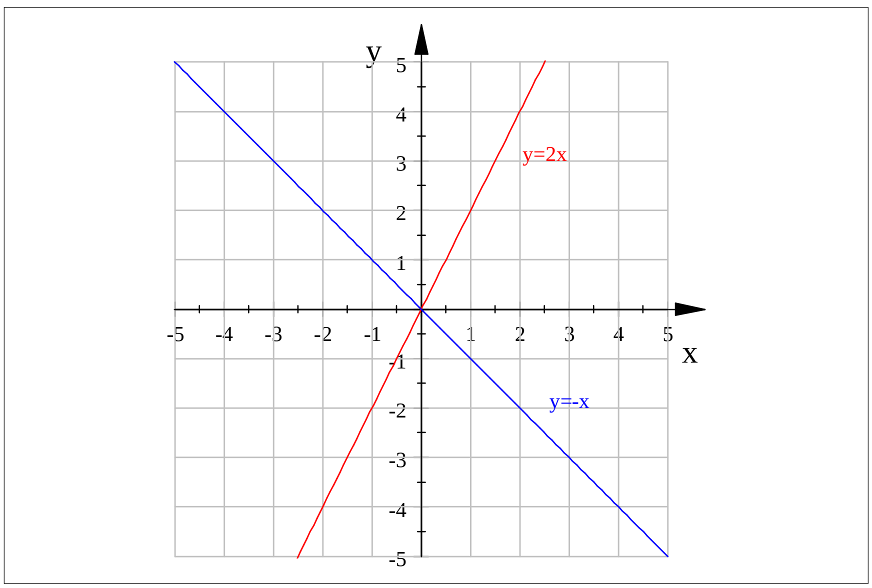
Las solución es $y=-x$, por lo tanto los vectores que cumplen la condición (**1**) para $\lambda=3$, son de la forma $(x,-x)$ o sea que el conjunto de vectores está generado por el $(1,-1)$.

Si $\lambda=2$ reemplazando en (1) , resulta

$$\begin{pmatrix} \frac{8}{3}-2 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3}-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y \\ \frac{1}{3}y-\frac{2}{3}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, lo que da por resultado dos ecuaciones lineales en primer grado en x e y que dependen una de otra (lo que era esperable de acuerdo a lo solicitado).

Las solución es $y=2x$, por lo tanto los vectores que cumplen la condición (**1**) para $\lambda=2$, son de la forma $(x,2x)$ o sea que el conjunto de vectores está generado por el $(1,2)$.

Podemos representar en el plano a los vectores que hemos hallado.



Los vectores que cumplen con la condición (**1**) se llaman **autovectores** (o **vectores propios** o **eigenvectores**) de la transformación lineal T , y los valores del parámetro λ , que hemos hallado se denominan **autovalores** (o **valores propios** o **eigenvalores**) de la transformaciòn lineal T. El polinomio (**3**) se denomina **polinomio característico** de la transformación lineal T.

Podemos demostrar que (en el caso de existir) los autovectores correspondientes a un autovalor de una transformaciòn lineal T conforman un subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathbb{V}$

Proposición

Los autovectores correspondientes a un autovalor de una transformación lineal T forman un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$

Hipótesis: Sea T:$\mathbb{V} \to \mathbb{V}$, una transformación lineal , sea λ_1 un autovalor y sea S = $\left\{\vec{v} \in \mathbb{V}/T(\vec{v}) = \lambda_1\vec{v}\right\}$

Tesis : S es un subespacio vectorial de $\mathbb{V}$

Demostración :

Como sabemos , para demostrar que un conjunto es un subespacio debemos demostrar que:

1) S $\neq \varnothing$, o bien que $\vec{0} \in$ S

Pero T($\vec{0}$)=$\vec{0}$ por condicion de T.L. , luego se cumple que T($\vec{0}$)=$\lambda\vec{0}$ para cualquier λ , en particular para λ_1 , por lo que $\vec{0} \in$ S

2) sean $\vec{u}$ y $\vec{v} \in$ S , tenemos que probar que $\vec{u}+\vec{v} \in$ S

Que $\vec{u} \in$ S significa que $T(\vec{u}) = \lambda_1\vec{u}$ y que $\vec{v} \in$ S significa que $T(\vec{v}) = \lambda_1\vec{v}$.

Ahora $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = \lambda_1\vec{u} + \lambda_1\vec{v} = \lambda_1(\vec{u} + \vec{v})$, por lo que $\vec{u}+\vec{v} \in$ S

3) sean $\vec{u} \in$ Sy $k \in \mathbb{K}$, tenemos que probar que $k.\vec{u} \in$ S

Que $\vec{u} \in$ S significa que $T(\vec{u}) = \lambda_1\vec{u}$, luego T($k.\vec{u}) = k.T(\vec{u}) = k.\lambda_1\vec{u} = \lambda_1(k\vec{u})$. Por lo tanto $k.\vec{u} \in$. S

Los subespacios formados por los autovectores de una transformación lineal se denominan **subespacios invariantes** ante esa transformación , porque al aplicársele la misma a un vector de dicho subspacio , da por resultado como vector transformado otro vector perteneciente al mismo subespacio. Luego el subespacio no varía ante la aplicación de la transformación T.

Ahora podemos señalar los subespacios invariantes de la trasnformación del ejemplo anterior.

Los mismos son

$\mathbb{E}_{\lambda_1}= \left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^2/T(\vec{v}) = 3.\vec{v}\right\}=\left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^2/\vec{v} = k.(1,-1)\right\}$

$\mathbb{E}_{\lambda_2}= \left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^2/T(\vec{v}) = 2.\vec{v}\right\}=\left\{\vec{v} \in \mathbb{R}^2/\vec{v} = k.(1,2)\right\}$

¿Podremos siempre encontrar autovalores y autovectores de una T.L.?

Supongamos tener el caso siguiente

$T(x,y) = (\frac{23}{5}x - \frac{1}{5}y, \frac{9}{5}x + \frac{17}{5}y)$

La representación matricial , en la base canónica , sería:

$$\begin{pmatrix} \frac{23}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{9}{5} & \frac{17}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{5}x - \frac{1}{5}y \\ \frac{9}{5}x + \frac{17}{5}y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{9}{5} & \frac{17}{5} \end{pmatrix}$$, eigenvalues: 4

$$\begin{pmatrix} \frac{23}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{9}{5} & \frac{17}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{5}x - \frac{1}{5}y \\ \frac{9}{5}x + \frac{17}{5}y \end{pmatrix}$$

Para hallar el polinomio característico planteamos

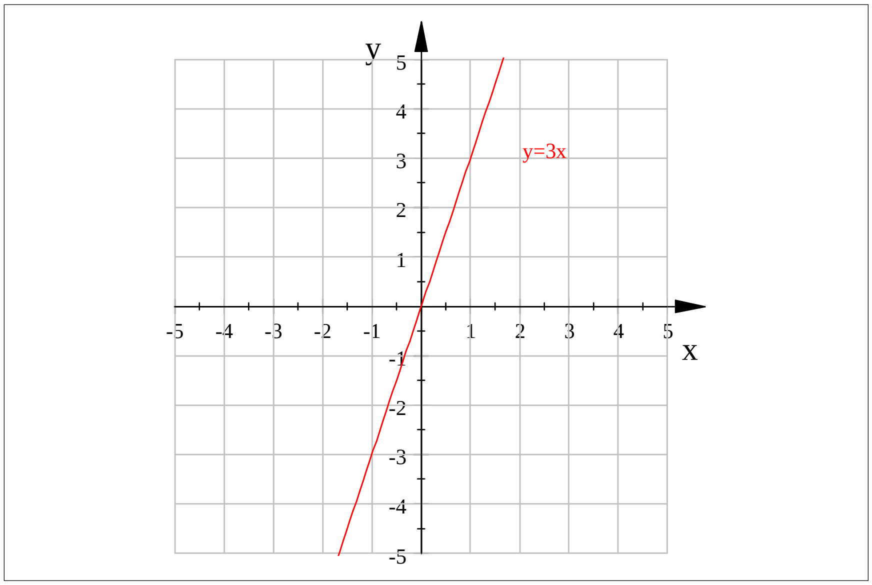
$\begin{vmatrix} \frac{23}{5} - \lambda & -\frac{1}{5} \\ \frac{9}{5} & \frac{17}{5} - \lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 - 8\lambda + 16$. Las soluciones son $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ (única solución real)

Para hallar los autovectores debemos plantear

$$\begin{pmatrix} \frac{23}{5} - 4 & -\frac{1}{5} \\ \frac{9}{5} & \frac{17}{5} - 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{9}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}y \\ \frac{9}{5}x - \frac{3}{5}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De donde surge que el subespacio de autovectores está generado por el vector $(1,3)$

Si lo representamos



Si en cambio trabajamos con la transformación
$T(x,y) = (2x+y,-2x+4y)$

cuya representación matricial en la base canónica es
$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ -2x+4y \end{pmatrix} =$
Para hallar el polinomio característico planteamos
$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$,cuyas soluciones son $\lambda_1 = 3+i$ y $\lambda_2 = 3-i$
Por lo tanto al no tener raíces reales , no posee autovalores reales y por consiguiente tampoco tiene autovectores reales.

INDEPENDENCIA LINEAL DE LOS AUTOVECTORES CORRESPONDIENTES A AUTOVALORES DIFERENTES
Vamos a demostrar una proposición importante.
Los autovectores correspondientes a autovalores diferentes son linealmente independientes.
Hipótesis) Sea T: $\mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una T.L.. Sean $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ dos autovectores (distintos del vector nulo) correspondientes a los autovalores λ_1 y λ_2 con $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Tesis) $\{\vec{v_1},\vec{v_2}\}$ son linealmente independientes
Demostración) Sabemos que T($\vec{v_1}$)=$\lambda_1\vec{v_1}$ y T($\vec{v_2}$)=$\lambda_2\vec{v_2}$
Planteamos una C.L. de los vectores $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ y la igualamos al vector nulo
$\alpha\vec{v_1} + \beta\,\vec{v_2} = \vec{0}$ (*) ; por lo tanto T($\alpha\vec{v_1} + \beta\,\vec{v_2}$)=$\vec{0}$, luego T($\alpha\vec{v_1}$)+T(β $\vec{v_2}$)=αT($\vec{v_1}$)+βT($\vec{v_2}$)=$\alpha\lambda_1\vec{v_1} + \beta\lambda_2\vec{v_2} = \vec{0}$. Luego de (*)
$\alpha\lambda_1\vec{v_1}$ - $\alpha\lambda_2\vec{v_1} = \alpha\vec{v_1}(\lambda_1 - \lambda_2) = \vec{0}$
Como $\vec{v_1} \neq \vec{0}$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2$, la única posibilidad es que $\alpha = 0$
Reemplazando este valor en (*) resulta $\beta\,\vec{v_2} = \vec{0}$. Luego repitiendo el razonamiento resulta $\beta = 0$.
Entonces la única solución de la C.L. expresada en (*) es que ambos coeficientes sean nulos , lo que implica que los autovectores $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ son linealmente independientes.

Si la transformación lineal T tuviese n autovalores diferentes , repitiendo el procedimiento anterior tomando los autovectores de a dos , inductivamente se puede demostrar la independencia lineal de los n autovectores.

Esta demostración tiene una aplicación importante en la representación matricial de las transformaciones lineales.

Sea T: $\mathbb{V} \to \mathbb{V}$ con dim($\mathbb{V}$)=n. Sean $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ n autovalores diferentes. Luego existen $\left\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\right\}$ autovectores que , por lo demostrado anteriormente son L.I. y por lo tanto forman una base B$'$ del espacio vectorial $\mathbb{V}$.

Luego

$$
\begin{aligned}
T(\vec{v_1}) &= \lambda_1\vec{v_1} = \lambda_1\vec{v_1} + 0.\vec{v_2} + 0.\vec{v_3} + \ldots\ldots + 0.\vec{v_n}\\
T(\vec{v_2}) &= \lambda_2\vec{v_2} = 0.\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + 0.\vec{v_3} + \ldots\ldots + 0.\vec{v_n}\\
T(\vec{v_3}) &= \lambda_3\vec{v_3} = 0.\vec{v_1} + 0.\vec{v_2} + \lambda_3\vec{v_3} + \ldots\ldots + 0.\vec{v_n}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
T(\vec{v_n}) &= \lambda_n\vec{v_n} = 0.\vec{v_1} + 0.\vec{v_2} + 0.\vec{v_3} + \ldots\ldots + \lambda_n\vec{v_n}
\end{aligned}
$$

Podemos escribir la $M_{B'B'}$(T) ya que tenemos la forma en que los transformados de los vectores de la base de partida se escriben como combinación lineal de la base de llegada (que en este caso es la misma)

$$
M_{B'B'}(T)=\begin{pmatrix}
\lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0\\
0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & \ldots & 0\\
0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n
\end{pmatrix}
$$

O sea que en la base de autovectores la matriz que representa la transformación lineal es diagonal.

DIAGONALIZACION DE MATRICES

Con lo demostrado en el apartado anterior es posible diagonalizar en $\mathbb{R}$ a una transformación lineal si la misma tiene n autovalores reales diferentes.

Dada la matriz en una base B podemos encontrar $M_{B'B'}$(T) = $C_{BB'}$.M_{BB}(T).$C_{B'B}$ donde B$'$ es la base de autovectores de T.

Ejemplo

Sea T:$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y sea la M_{EE}(T)=$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3}\end{pmatrix}$ (la matriz de la transformación representada tomando como base de partida y llegada la base canónica de $\mathbb{R}^3$)

Buscamos los autovalores planteando:

$$
\begin{vmatrix}
0-\lambda & 1 & -1\\
-\frac{1}{3} & \frac{8}{3}-\lambda & \frac{1}{3}\\
-\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3}-\lambda
\end{vmatrix} = 0 = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 6 = 0
$$

Buscamos las soluciones del polinomio característico$-\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 6 = 0.$ Las mismas son $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$.

Buscamos ahora los autovectores que corresponden a cada autovalor

Para $\lambda_1 = 3$

$$\begin{pmatrix} 0-3 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{8}{3}-3 & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3}-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -3x+y-z \\ -\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z \\ -\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}y-\frac{5}{3}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si buscamos la solución haciendo operaciones elementales de fila en la matriz de coeficientes , encontramos que:

$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$, se transforma en $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con lo que se cumple $x = 0$, $y-z = 0$ o sea $z = y$. Por lo tanto los autovectores correspondientes al autovalor $\lambda_1 = 3$ están generados por $(0, 1, 1)$.

Para $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} 0-2 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{8}{3}-2 & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3}-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -2x+y-z \\ -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z \\ -\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}y-\frac{2}{3}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si buscamos la solución haciendo operaciones elementales de fila en la matriz de coeficientes , encontramos que:

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$,se transforma en $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$con lo que se cumple $x = y = -z$. Por lo tanto los autovectores correspondientes al autovalor $\lambda_2 = 2$ están generados por $(1, 1, -1)$.

Para $\lambda_3 = -1$

$$\begin{pmatrix} 0-(-1) & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{8}{3}-(-1) & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3}-(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x+y-z \\ -\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}y+\frac{1}{3}z \\ -\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}y+\frac{7}{3}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si buscamos la solución haciendo operaciones elementales de fila en la matriz de coeficientes , encontramos que:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$, se transforma en $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con lo que se cumple $x = z$ e $y = 0$.

Por lo tanto los autovectores correspondientes al autovalor $\lambda_3 = -1$ están generados por $(1,0,1)$.

Por lo tanto la base de autovectores es B$' = \{(0,1,1);(1,1,-1);(1,0,1)\}$. Por lo tanto la matriz de cambio de base es

C$_{B'E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, y su inversa C$_{EB'} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Luego la M$_{B'B'}$(T)$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

AUTOVALORES REPETIDOS

Ahora podemos preguntarnos ¿que pasa si los autovalores no son todos diferentes? , o sea ¿que pasa si el polinomio característico tiene alguna raíz múltiple (doble , triple , etc)?

Supongamos que una de las raíces (λ_1) es raíz múltiple (de orden k) del polinomio característico.

Cuando planteamos la ecuación de autovectores T$(\overrightarrow{v_1}) = \lambda_1\overrightarrow{v_1}$ o lo que es lo mismo T$(\overrightarrow{v_1}) - \lambda_1\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{0}$, obtenemos como solución las ecuaciones de un subespacio de $\mathbb{V}$. Ahora si el subespacio que se genera con ese autovalor tiene dimensión k , será posible elegir k autovectores linealmente independientes en dicho subespacio , por lo que se puede generar una base con esos k vectores mas los otros autovectores generados por los restantes autovalores. Luego en ese caso la matriz de la transformación se podrá diagonalizar en dicha base. O sea si la dimensión del subespacio generado por cada autovalor coincide con la multiplicidad de dicho autovalor como raíz , será posible diagonalizar la matriz representativa de la transformación lineal.

Ejemplos

a) Sea T:$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, representada por

$$M_{EE}(T)=\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Si calculamos su polinomio caracaterístico , resulta

$$\begin{vmatrix} \frac{8}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3}-\lambda & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3}-\lambda \end{vmatrix} = 0 = -\lambda^3+3\lambda^2-4 = 0$$

Las soluciones son $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1.$

Como 2 es una raíz múltiple (en este caso de orden 2) debemos analizar el subespacio de autovectores que genera.

$$\begin{pmatrix} \frac{8}{3}-2 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{3}-2 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3}-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z \\ \frac{5}{3}x-\frac{7}{3}y-\frac{2}{3}z \\ \frac{1}{3}x-\frac{5}{3}y-\frac{4}{3}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Efectuando operaciones elementales de fila con la matriz que representa el sistema lineal:

$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$ da como resultado $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, lo que indica que $x = -z$ e $y = -z$, con lo que el subespacio correspondiente al autovalor doble tiene dimensión 1 y está generado por el vector $(1,1,-1)$. En consecuencia la matriz que representa a la transformación no podrá ser diagonalizada.

b) Sea T:$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, representada por

$$M_{EE}(T)=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 4 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 4 \\ 4 & 5-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 = -\lambda^3+7\lambda^2-15\lambda+9 = 0$$

Y las soluciones son $\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$

Luego , buscando el subespacio que corrresponde al autovalor de multiplicidad 2:

$$\begin{pmatrix} -1-3 & -2 & 4 \\ 4 & 5-3 & -4 \\ 0 & 0 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -4x-2y+4z \\ 4x+2y-4z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo que da por resultado $y = -2x + 2z$; por lo que el subespacio tiene dimensión 2 y está generado por los vectores $\{(1,-2,0);(0,2,1)\}$. Por consiguiente al tener igual dimensión que la multiplicidad de la raíz , se cumple que la matriz podrá ser diagonalizada tomando como base de diagonalización a estos dos autovectores mas el que surja del otro autovalor.

MATRICES SEMEJANTES

Se llaman matrices semejantes a las que se obtienen al realizar un cambio de coordenadas como el siguiente:

$$A_{BB} = C_{B'B} A_{B'B'} C_{BB'}$$

donde A_{BB} y $A_{B'B'}$ son semejantes.

Cumplen una propiedad importante:

$|A_{BB}| = \left|C_{B'B} A_{B'B'} C_{BB'}\right| = \left|C_{B'B}\right| \left|A_{B'B'}\right| \left|C_{BB'}\right| = \left|A_{B'B'}\right|$, ya que $C_{B'B}$ y $C_{BB'}$ son inversas entre sí , por lo tanto el valor del determinante de una es el inverso multiplicativo de la otra . Ademàs el determinante de las mismas no puede anularse (¿porque?)

Luego al transformar a la matriz que representa a una transformación lineal en otra matriz que es diagonal , lo que estamos haciendo es trabajar con matrices semejantes.

INVARIANCIA DEL POLINOMIO CARACTERÍSTICO

Para calcular el polinomio característico debemos conocer a la matriz que representa a la transformación lineal y hallar el determinante de la matriz resultante de restarle a la primera el parámetro λ a cada elemento de la diagonal e igualarlo a cero.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Si se desarrolla un determinante de esta forma , da como resultado un polinomio en la variable λ de grado n (la dimensión de la matriz)

Una pregunta interesante es la siguiente :si calculamos el polinomio característico de una transformación lineal a partir de la matriz que representa a la misma en una base B , el polinomio calculado a partir de la matriz que representa a la transformación lineal en otra base B', ¿será el mismo que el anterior o cambiará?

Si la matriz que representa a la T.L en la base B es A_{BB} y la que la representa en la base B' es $A_{B'B'}$, entonces

$A_{B'B'} = C_{BB'}A_{BB}C_{B'B}$

Para hallar el polinomio característico debemos calcular:

$\left|A_{B'B'} - \lambda I\right| = 0,$ o sea el determinante de la matriz a la cual se le resta el parámetro λ en cada elemento diagonal igualado a cero.

$\left|A_{B'B'} - \lambda I\right| =.\left|C_{BB'}A_{BB}C_{B'B} - \lambda I\right|$, pero sabiendo que $C_{BB'}C_{B'B} = I$, podemos reemplazar la identidad y resulta:

$\left|A_{B'B'} - \lambda I\right| =.\left|C_{BB'}A_{BB}C_{B'B} - \lambda I\right| = \left|C_{BB'}A_{BB}C_{B'B} - \lambda IC_{BB'}C_{B'B}\right| = \left|C_{BB'}A_{BB}C_{B'B} - C_{BB'}\lambda IC\right.$

$\left|C_{BB'}(A_{BB} - \lambda I)C_{B'B}\right| = \left|C_{BB'}\right| \left|(A_{BB} - \lambda I)\right| \left|C_{B'B}\right| = \left|(A_{BB} - \lambda I)\right| = 0$, que es el polinomio característico calculado en la base B. Por lo tanto no interesa en que base esté expresada la matriz , el polinomio característico que se obtiene es siempre el mismo , de tal forma que los autovalores (las raíces del polinomio) son las mismas.

UNA APLICACIÓN DE LA DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

Supongamos que $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ es una matriz que puede ser diagonalizada. Sea B la matriz diagonal semejante a A , o sea que existen C y C' (con $C' = C^{-1}$), tal que $B = C.A.C'$, o lo que es lo mismo $A = C'B.C$

Luego $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{11} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$

Supongamos que deseamos hallar A^k(o sea la potencia k-èsima de A)

$A^k = (C'B.C)(C'B.C)(C'B.C)...(C'B.C)$ k veces.

Reagrupando resulta

$A^k = C'B.(CC')B.(CC')B.(C...C')B.C = C'B.(I)B.(I)B.(C...C')B.C = C'B^k.C$, sabiendo que

$$B^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$