Resolución TP5:

Ejercicio 4 - b

Tomando $F(x,y,z) = z\,arctg(1-z^2) + 3x + 5z - 8y^3 = 0$
Determinar si la ecuación dada define una función implícita $z = f(x,y)$ en $P = (1{,}1{,}1)$y si es así calcular sus derivadas parciales.

Herramientas:

- Se deben cumplir las 3 condiciones del teorema para $F(x,y,z) = 0$ e $z = f(x,y)$
  - $P \epsilon F(x,y,z) = 0$
  - Las derivadas F_x , F_yy F_z son continuas en el entorno del punto.
  - $F_z(P) \neq 0$
- Si se cumple TFI entonces existe $z = f(x,y)$ y valen:
  - $f_x(x_0,y_0) = -\frac{F_x(P)}{F_z(P)}$
  - $f_y(x_0,y_0) = -\frac{F_y(P)}{F_z(P)}$

Para empezar:

- Damos por hecho teóricamente el trabajo de obtener las condiciones y formular por medio de regla de la cadena.
- $arctg(x)$ es continua por lo que el dominio de F es $\mathbb{R}^3$

Resolviendo para $F(x,y,z) = z\,arctg(1-z^2) + 3x + 5z - 8y^3 = 0$ en $P = (1{,}1{,}1)$

- $¿P \epsilon F(x,y,z) = 0?$

$$z\,arctg(1-z^2) + 3x + 5z - 8y^3 = 0$$
$$1\,arctg(1-(1)^2) + 3(1) + 5(1) - 8(1)^3 = 0$$
$$1 \cdot 0 + 3 + 5 - 8 = 0$$

Se cumple el primer enunciado.

- ¿Son F_x , F_yy F_z continuas en R^3?

$$F_x = 3$$
$$F_y = 24\mathrm{y}^2$$
$$F_z = arctg(1-z^2) + \frac{z \cdot (-2z)}{1+(1-z^2)^2} + 5 = arctg(1-z^2) - \frac{2z^2}{1+(1-z^2)^2} + 5$$

$$Dom(F_x) = Dom(F_y) = Dom(F_z) = \{(x,y,z)\epsilon\mathbb{R}^3 \;/\; 1+(1-z^2)^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^3$$

Al ser funciones trigonométricas son continuas y se cumple el segundo enunciado.

- $¿F_z(P) \neq 0?$

$$F_z(\mathrm{P}) = arctg(1-(1)^2) - \frac{2(1)^2}{1+(1-(1)^2)^2} + 5$$
$$F_z(\mathrm{P}) = arctg(0) - \frac{2}{1+0} + 5$$
$$F_z(\mathrm{P}) = 0 - 2 + 5$$
$$F_z(\mathrm{P}) = 3$$

Al ser $F_z(\mathrm{P}) = 3$ se cumple el tercer enunciado.

Se cumple TFI por lo tanto existe $z = f(x,y)$ y las derivadas son:

$$f_x(x_0,y_0) = -\frac{F_x(P)}{F_z(P)} \text{ e } f_y(x_0,y_0) = -\frac{F_y(P)}{F_z(P)}$$

$$F_x(\mathrm{P}) = 3$$
$$F_y(\mathrm{P}) = 24(1)^2 = 24$$

$$f_x(1,1) = -\frac{F_x(P)}{F_z(P)} \text{ e } f_y(1,1) = -\frac{F_y(P)}{F_z(P)}$$
$$f_x(1,1) = -\frac{3}{3} \text{ e } f_y(1,1) = -\frac{24}{3}$$
$$f_x(1,1) = -1 \text{ e } f_y(1,1) = -8$$

Corolario:

En base a que se cumple TFI podemos calcular

$$\nabla z(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) = \left(-\frac{F_x(P)}{F_z(P)}, -\frac{F_y(P)}{F_z(P)}\right)$$

$$\nabla z(1,1) = \nabla f(1,1) = (-1,-8)$$