RESOLUCIÓN DE EJERCICIO nro. 4 y 5 de MÓDULO 5
De EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA - SEGUNDA CLASE

Resueltos por la profesora Mariela Glassman

8) Sea f: $R^3 \to R^4$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2; -x_2 + 2x_3; -x_1 + x_2 - x_3; 2x_2 - 4x_3)$.
a) Hallar la matriz M(f) asociada a la transformación y a partir de ella bases del núcleo y de la imagen.
b) Clasificar f y demostrar que es una transformación lineal.
c) Suministre un vector $\vec{v} \neq (1; 0; 0)$ que satisfaga la condición $f(\vec{v}) = f(1; 0; 0)$. *Justifique*.

Resolución:
a) Aplicando f a la base canónica del espacio de partida (R^3) tenemos que:
$f\big((1;0;0)\big) = (2;0;-1;0),\ f\big((0,1;0)\big) = (-1;-1;1;2),\ f\big((0;0;1)\big) = (0;2;-1;-4)$

Luego $M(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Busquemos *base del núcleo*:

Por definición, $Nu(f) = \left\{ (x;y;z) \epsilon R^3 \ tal\ que\ M(f).\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, luego, lo que nos queda por resolver para hallar el núcleo es un sistema homogéneo que tiene la siguiente matriz ampliada (resolvemos con el método de Gauss):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f_1 \leftrightarrow f_3 \\ f_4 + 2f_2 \to f_4}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 + 2f_1 \to f_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[f_3 - f_2 \to f_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Queda el sistema $\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases}$, de donde de la última ecuación tenemos que $y = 2z$ y reemplazando esta información en la primera ecuación resulta que $x = z$.
Entonces un elemento genérico del núcleo es de la forma:

$$(x;y;z)_{Nu(f)} = (z;2z;z) = z.(1;2;1)$$

Así vemos que el núcleo esta generado por $\{(1;2;1)\}$ y como es un solo vector no nulo el conjunto resulta l.i, teniendo que $B_{Nu(f)} = \{(1;2;1)\}$.
Busquemos *base de la imagen*:
Por el teorema de la dimensión, tenemos que:

$$\dim\big(Nu(f)\big) + \dim\big(Im(f)\big) = \dim(R^3) \to 1 + \dim\big(Im(f)\big) = 3 \to \dim\big(Im(f)\big) = 2$$

Como tenemos la matriz de la t.l, sabemos que sus columnas generan la imagen.

$$Im(f) = gen\{(2;0;-1;0),(-1;-1;1;2),(0;2;-1;-4)\}$$

Como $\dim\big(Im(f)\big) = 2$ sabemos que la base está formado por dos vectores que están en la imagen y que resulten l.i, por ejemplo, tomamos $B_{Im(f)} = \{(2;0;-1;0),(0;2;-1;-4)\}$.

b) No es monomorfismo, pues $Nu(f) \neq \{(0;0;0)\}$; y no es epimorfismo por que $Im(f) \neq R^4$. Por lo tanto, no es isomorfismo.

Veamos que $f\, es\, una\, transformación\, lineal$:

Sea $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, definimos a $f(X) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Debe pasar que:

- Si $X\ y\ X' \epsilon R^{3x1} \to f(X+X') = f(X) + f(X')$
$$f(X+X') = A.(X+X') =_{(1)} A.X + A.X' = f(X) + f(X')$$
$$(1): distributiva\ del\ producto\ de\ matrices\ respectoa\ la\ suma\ por\ izquierda$$
- $X \epsilon R^{3x1}\ y\ \alpha \epsilon R \to f(\alpha X) = \alpha . f(X)$
$$f(\alpha X) = A.(\alpha X) = (A.\alpha).X = \alpha.(A.X) = \alpha.f(X)$$

Como f cumple las dos condiciones resulta ser t.l.

c) Buscamos un vector $\vec{v} \neq (1;0;0)$ que satisfaga la condición $f(\vec{v})$ = f (1; 0; 0).

Como $f\big((1;0;0)\big) = (2;0;-1;0)$, $\vec{v} = (x;y;z)$ debe cumplir que $M(f).\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Luego lo que queda por resolver es un sistema que tiene la siguiente matriz ampliada (y que resolveremos con Gauss):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_4+2f_2\to f_4]{f_1\leftrightarrow f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3+2f_1\to f_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow[f_3-f_2\to f_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Queda el sistema $\begin{cases} -x + y - z = -1 \\ \quad -y + 2z = 0 \end{cases}$, de donde de la última ecuación tenemos que $y = 2z$ y reemplazando esta información en la primera ecuación resulta que $x = z + 1$.

Así $\vec{v} = (x;y;z) = (z+1;2z;z), z\epsilon R$. Hay infinitos $\vec{v}$ que cumplen lo pedido, como nos piden uno tomamos por ejemplo $z = 1 \Rightarrow \vec{v} = (2;2;1)$.

Nota

De $\vec{v} = (x;y;z) = (z+1;2z;z) = (z;2z;z) + (1;0;0) = z.(1;2;1) + (1;0;0)$ se observa que cualquier vector es un múltiplo del (1; 2; 1) sumado a otro –en este caso el (1,0,0)–; pero el vector (1; 2; 1) es una base del núcleo. Esto NO es una coincidencia.

Si nosotros debiéramos hallar TODOS los vectores $\vec{v}$ tal que f($\vec{v}$) = f($\vec{w}$) con $\vec{w}$ un vector dado resulta que f($\vec{v}$) - f($\vec{w}$)= 0 → f($\vec{v}$ - $\vec{w}$)= 0 → **$\vec{v}$ - $\vec{w}$ es un vector del núcleo**.

Si, por ejemplo, una base del núcleo fuera $\{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\}$ entonces tendríamos:
$\vec{v} = \vec{w} + a.\overrightarrow{n_1} + b.\overrightarrow{n_2} \rightarrow f(\vec{v}) = f(\vec{w} + a.\overrightarrow{n_1} + b.\overrightarrow{n_2}) = f(\vec{w}) + f(a.\overrightarrow{n_1}) + f(b.\overrightarrow{n_2})$ por ser f una TL;
$f(\vec{v}) = f(\vec{w}) + a.f(\overrightarrow{n_1}) + b.f(\overrightarrow{n_2}) = f(\vec{w}) + a.\vec{0} + b.\vec{0} = f(\vec{w})$

---

9) La transformación lineal **f**: $R^2 \rightarrow R^3$ tiene asociada la siguiente matriz:
M(f) = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
a) Establezca la expresión de f.
b) Determine bases de Nu(f) y de Im(f) y clasifique a f.
c) Hallar todos los **k**∈R que verifiquen f(**k**, 1) $= \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Resolución:

a) Como **M**(f) = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, por cómo se define la matriz asociada a una t.l resulta que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ -x+y \\ 2y \end{pmatrix}$, por lo tanto $f\big((x;y)\big) = (2x+y; -x+y; 2y)$.

b) <u>Base del Núcleo:</u>

Como $Nu(f) = \{(x;y)\epsilon R^2 tal\ que\ f\big((x;y)\big) = (0;0;0)\}$, resulta que $f\big((x;y)\big) = (2x+y; -x+y; 2y) = (0;0;0) \rightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ -x+y=0 \\ 2y=0 \end{cases}$, de donde resolviendo este sistema sale que $x=0, y=0$. Luego $Nu(f) = \{(0;0)\}$ y *no tiene base*.

<u>Base de la Imagen:</u>

Como tenemos la matriz asociada de f sabemos que sus columnas generan la imagen, luego $Im(f) = gen\{(2;-1;0),(1;1;2)\}$ y como los vectores son no nulos y no son múltiplos entre sí sabemos que el conjunto es l.i, entonces $B_{Im(f)} = \{(2;-1;0),(1;1;2)\}$.
Clasifiquemos… Como $Nu(f) = \{(0;0)\}$ es f monomorfismo, pero no es epimorfismo pues la imagen debería ser todo R^3 y la $\dim\big(Im(f)\big) = 2$. Luego no es isomorfismo.

c) Se debe verificar que: f(**k**, 1) $= \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2k+1 \\ -k+1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$
$\begin{cases} 2k+1=5 \\ -k+1=-1 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{k} = 2$

---

10) Se tiene la TL. f: $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^4$ que verifica:
f(2, 0) = (–2; 2; 0; 6)   y   f(2, –1) = (–4; 2; 1; 6)
a) Utilizando propiedades de TL halle la expresión de f y su matriz asociada M(f).
b) Hallar Nu(f) e Im(f) y clasificar a la TL.
c) Hallar todos los **v** εR^2 para los cuales se verifica que f(**v**) = f(–1; 0).

Resolución:

a) Para hallar la matriz asociada a la t.l necesitamos los transformados de la base canónica del espacio de salida. Nos piden que usemos las propiedades de una t.l. Recordemos entonces que si f: $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^4$ es t.l entonces:
i) $f(k.\vec{v}) = k.f(\vec{v}),\ con\ k\,\epsilon R, \vec{v}\ \epsilon R^2$
ii) $f(\vec{v}+\vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w});\ \vec{v},\vec{w}\epsilon\epsilon R^2$

- Como $(2;0) = 2.(1;0)$, aplicando f a esta igualdad tenemos que…

$$f\big((2;0)\big) = f\big(2.(1;0)\big) =_{i)} 2.f\big((1;0)\big) \Rightarrow$$
$$(-2;2;0{,}6) = 2.f\big((1{,}0)\big) \Rightarrow$$
$$\tfrac{1}{2}.(-2;2;0{,}6) = f\big((1{,}0)\big) \Rightarrow$$
$$(-1;1;0;3) = f((1;0))$$

- Como $(2;-1) = 2.(1;0) + (-1).(0;1)$, aplicando f a esta igualdad resulta que…

$$f\big((2;-1)\big) = f\big(2.(1;0) + (-1).(0;1)\big) =_{ii)} f\big(2.(1;0)\big) + f\big((-1).(0;1)\big)$$
$$=_{i)} 2.f\big((1;0)\big) + (-1).f((0;1))$$

Reemplazando los datos tenemos que…

$$(-4;2;1;6) = 2.(-1;1;0;3) + (-1).f((0;1))$$
$$(-4;2;1;6) = (-2;2;0;6) - f((0;1))$$
$$(-4;2;1;6) - (-2;2;0;6) = -f((0;1))$$
$$(-2;0;1;0) = -f((0;1))$$
$$(2;0;-1;0) = f((0;1))$$

Así, como $(x;y) = x.(1;0) + y.(0;1)$, aplicando f a esta igualdad tenemos que…

$$f\big((x;y)\big) = f\big(x.(1;0) + y.(0;1)\big) =_{ii)} f\big(x.(1;0)\big) + f\big(y.(0;1)\big) =_{i)} x.f\big((1;0)\big) + y.f\big((0;1)\big)$$
$$=$$
$$= x.(-1;1;0;3) + y.(2;0;-1;0) = (-x;x;0;3x) + (2y;0;-y;0) = (-x+2y;x;-y;3x)$$

Luego, la expresión de f es $f\big((x;y)\big) = (-x+2y;x;-y;3x)$ y la matriz asociada resulta

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Como tenemos la matriz asociada de f sabemos que sus columnas generan la imagen, luego $Im(f) = gen\{(-1;1;0;3),(2;0;-1;0)\}$ y como los vectores son no nulos y no son múltiplos entre sí sabemos que el conjunto es l.i, entonces $B_{Im(f)} = \{(-1;1;0;3),(2;0;-1;0)\}$.

Por el teorema de la dimensión tenemos que:

$$\dim\big(Nu(f)\big) + dim\big(Im(f)\big) = \dim(R^2) \rightarrow \dim\big(Nu(f)\big) + 2 = 2 \rightarrow \dim\big(Nu(f)\big) = 0$$

Entonces $Nu(f) = \{(0;0)\}$.

Como $Nu(f) = \{(0;0)\}$, f es monomorfismo; pero como $Im(f) \neq R^4$ f no es epimorfismo; por lo tanto tampoco es isomorfismo.

c) Buscamos todos los vector $\vec{v} = (x;y)\ \epsilon R^2$ para los cuales se verifica que:

$f(\vec{v}) = f\big((-1;0)\big) \rightarrow f\big((x;y)\big) = f((-1;0))$, y si aplacamos la definición de f resulta…

$$(-x+2y;x;-y;3x) = (1;-1;0;-3) \rightarrow \begin{cases} -x+2y = 1 \\ x = -1 \\ -y = 0 \\ 3x = -3 \end{cases} \rightarrow x = -1, y = 0$$

Luego $\vec{v} = (-1;0)$ y es único.

Verifique el lector que esto es consistente con la nota que le hemos dejado en el ejercicio 8.