RESOLUCIÓN DE EJERCICIO nro. 2 de MÓDULO 5
De EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA PRIMERA CLASE

2) Indicar cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales, para aquellas que lo sean, demostrarlo y para las que no , proporcionar un contraejemplo.

a) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f((x;y;z)) = x - y + z$.

b) $T_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, T_1\big((x;\ y)\big) = \ (2x - 3y\ ;\ -y\ + 4x\ ;\ -y)$

c) $T_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, T_2\big((x;\ y)\big) = (2x - y\ ;\ -y\ ;\ x^2)$

d) $T_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, T_1\big((x;\ y)\big) = \ (x + 2y\ ;\ xy\ ;\ -x)$

e) $T_2: \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^2, T_2\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right) = \ (2x + y + w\ ;\ y - x)$

Resolución:

a) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f((x;y;z)) = x - y + z$.

Primero veamos que $f(M+N) = f(M) + f(N)$. Sean $M = (x;y;x), N = (u;v;w)$…

$$f(M+N) = f\big((x;y;z) + (u;v;w)\big) =_1 f\big((x+u;y+v;z+w)\big) =_2$$
$$= (x+u) - (y+v) + (z+w) =_3 (x - y + z) + (u - v + w) =_2$$
$$= f\big((x;y;z)\big) + f\big((u;v;w)\big) = f(M) + f(N)$$

Veamos que $f(k.N) = k.f(N)$:

$$f(k.N) = f\big(k.(u;v;w)\big) =_4 f\big((k.u;k.v;k.w)\big) =_2$$
$$= k.u - k.v + k.w =_5 k.(u - v + w) =_2 k.f\big((u;v;w)\big) = k.f(N)$$

Luego, f es T.L.

b) $T_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, T_1\big((x;\ y)\big) = \ (2x - 3y\ ;\ -y\ + 4x\ ;\ -y)$

Tiene que verificar las dos propiedades:

$$T(v+w) = T(v) + T(w)$$
$$T(kv) = kT(v)$$

Sean: $v = (a,b), w = (c,d)$

Entonces:

$$v + w = (a+c;b+d)$$
$$T(v+w) = T\big((a+c;b+d)\big) = (2(a+c) - 3(b+d); -(b+d) + 4(a+c); -(b+d))$$
$$T(v+w) = (2a + 2c - 3b - 3d\ ;\ -b - d + 4a + 4c\ ;\ -b - d)$$
$$T(v+w) = (2a - 3b\ ;\ -b + 4a\ ;\ -b) + (2c - 3d\ ;\ -d + 4c\ ;\ -d) = T(v) + T(w)$$

Por lo que se verifica la primera propiedad.

Sean: $v = (a,b)$ y $k \in \mathbb{R}$

Entonces:

$$kv = (ka\ ;\ kb)$$

$$T(kv) = T\big((ka\ ;\ kb)\big) = (2(ka) - 3(kb);\ -(kb) + 4(ka); -(kb))$$
$$T(kv) = (2ka - 3kb;\ -kb + 4ka; -kb)$$
$$T(kv) = \big(k(2a - 3b;\ -b + 4a; -b)\big) = kT(v)$$

Por lo que se verifica la segunda propiedad y al verificarse ambas, se comprueba que es una transformación lineal

c) $T_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, T_2\big((x;\ y)\big) = \ (2x - y\ ;\ -y\ ;\ x^2)$

Para mostrar que no es una transformación lineal, buscamos un contraejemplo que muestre que alguna de las dos propiedades falla.

Ejemplo:

Sean: $v = (1,1), w = (1,-1)$ y $v + w = (2; 0)$

Entonces:

$$\begin{cases} T(v) + T(w) = T\big((1,1)\big) + T\big((1,-1)\big) = (1; -1; 1) + (3; 1; 1) = \boxed{(4; 0; 2) = T(v) + T(w)} \\ T(v + w) = T\big((2,0)\big) = \boxed{(4; 0; 4) = T(v + w)} \end{cases}$$

Como dan resultados diferentes, no verifica la primera propiedad y no es una TL

d) $T_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, T_1\big((x;\ y)\big) = \ (x + 2y\ ;\ xy\ ;\ -x)$

Tiene que verificar las dos propiedades:

$$T(v + w) = T(v) + T(w)$$
$$T(kv) = kT(v)$$

Pero para $v = (1,2)$ y $k = 2$:

$$T(kv) = T\big(2(1; 2)\big) = T\big((2; 4)\big) = (10; 8; -2)$$
$$kT(v) = 2.T\big((1; 2)\big) = 2.(5; 2; -1) = (10; 4; -2)$$

Resulta $T(kv) \neq kT(v)$ y muestra que no verifica la segunda propiedad, por lo que no es una transformación lineal.

e) $T_2: \mathbb{R}^{2\text{x}2} \to \mathbb{R}^2, T_2\left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right) = \ (2x + y + w\ ;\ y - x)$

Tiene que verificar las dos propiedades:

$$T(v + w) = T(v) + T(w)$$
$$T(kv) = kT(v)$$

Sean $v = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix}; w = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ z_2 & w_2 \end{pmatrix} \ \to v + w = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 & z_1 + z_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} T(v) = (2x_1 + y_1 + w_1\ ;\ y_1 - x_1) \\ T(w) = (2x_2 + y_2 + w_2\ ;\ y_2 - x_2) \\ \\ \boxed{T(v) + T(w) = (2x_1 + y_1 + w_1 + 2x_2 + y_2 + w_2\ ;\ y_1 - x_1 + y_2 - x_2)} \\ \\ T(v + w) = \big(2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (w_1 + w_2)\ ;\ (y_1 + y_2) - (x_1 + x_2)\big) \\ \boxed{T(u + w) = (2x_1 + y_1 + w_1 + 2x_2 + y_2 + w_2\ ;\ y_1 - x_1 + y_2 - x_2)} \end{cases}$$

Por lo que se verifica la primera propiedad.

Sean: $v = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ z_1 & w_1 \end{pmatrix}$ y $k \in \mathbb{R}$

$$T(v) = (2x_1 + y_1 + w_1\ ;\ y_1 - x_1) \ \rightarrow T(kv) = (2kx_1 + ky_1 + kw_1\ ;\ ky_1 - kx_1)$$

$$\rightarrow T(kv) = \big(k(2x_1 + y_1 + w_1)\ ;\ k(y_1 - x_1)\big) = k(2x_1 + y_1 + w_1\ ;\ y_1 - x_1) = kT(v)$$

Por lo que se verifica la segunda propiedad y al verificarse ambas, se comprueba que es una transformación lineal