Campo conservativo.

Ejemplo 1

Dado el siguiente campo vectorial

$$F(x,y) = (2xy + y^{-2}, x^2 - 2xy^{-3}) \quad para\; y > 0$$

Determinar si se trata de un campo conservativo.

Teorema (de condición suficiente para que un campo vectorial sea conservativo). Sea el campo vectorial

$$F: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$$

De clase C^1 en el conjunto $abierto\; simplemente\; conexo\; U$ de $\mathbb{R}^2$. Si se cumple la condición de integrabilidad

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y)$$

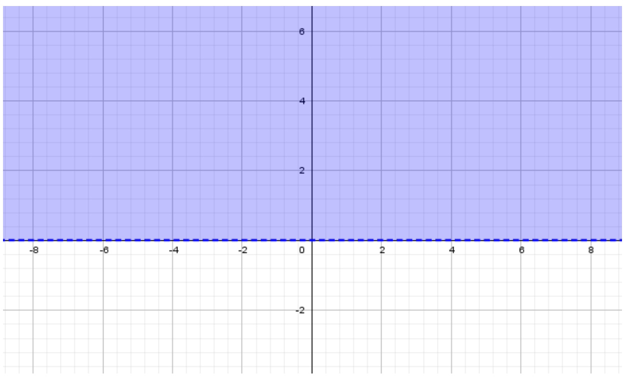
En todo U, entonces el campo vectorial F es un campo conservativo en U.

Veamos que es de clase C^1

$$F(x,y) = (2xy + y^{-2}, x^2 - 2xy^{-3})$$

$$P_x = 2y \qquad P_y = 2x - \frac{2}{y^3} \qquad Q_x = 2x - \frac{2}{y^3} \qquad Q_y = \frac{6}{y^4}$$

$Dom(F) = \{(x,y) \in \mathbb{R} : y > 0\}$ que es simplemente conexo.



Se cumple la condición de integrabilidad

$$P_y = 2x - \frac{2}{y^3} = Q_x$$

Ejemplo 2

Calcular la integral de línea

$$\int_C \vec{F} d\alpha$$

Donde $\vec{F}(x,y) = (3 + 2xy, x^2 - 3y^2)$ y C es la curva definida por $\alpha(t) = (e^t \cdot sen(t), e^t \cdot \cos(t))$ con $0 \leq t \leq \pi$.

En principio, determinemos si el campo $\vec{F}$ es conservativo.

$\vec{F}$ es de clase C^1 para cualquier conjunto $U \in \mathbb{R}^2$

El dominio de $\vec{F}$ es todo $\mathbb{R}^2$ que es simplemente conexo.

Debe verificarse la regla que P y Q tengan derivadas continuas de primer orden y se verifique la igualdad

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

En este caso $P(x,y) = 3 + 2xy$ y $Q(x,y) = x^2 - 3y^2$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Por lo tanto, el campo $\vec{F}$ es conservativo y puede hallarse su función potencial $f(x,y)$ tal que $\nabla f = \vec{F}$. Y de esta manera calcular la integral de línea mediante:

$$\int_C \vec{F} d\alpha = \int_A^B \vec{F} d\alpha = f(x,y)\Big|_A^B = f(B) - f(A)$$

Búsqueda de la función potencial.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y) = 3 + 2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y) = x^2 - 3y^2$$

Integrando $\frac{\partial f}{\partial x}$ respecto de x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y) = 3 + 2xy$$

$$f(x,y) = \int 3 + 2xydx \quad + g(y)$$

$$f(x,y) = 3x + x^2y + g(y)$$

Derivando esta expresión respecto de y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y) = Q(x,y)$$

Comparando

$$x^2 - 3y^2 = x^2 + g'(y)$$

$$g'(y) = -3y^2$$

$$\frac{dg}{dy} = -3y^2$$

Integrando esta expresión respecto de y

$$g(y) = \int -3y^2\, dy$$

$$g(y) = -y^3$$

Al sustituir $g(y)$ en la expresión $f(x,y) = 3x + x^2y + g(y)$, tenemos que la función potencial está dada por:

$$f(x,y) = 3x + x^2y - y^3$$

$$\int_C \vec{F} d\alpha = \int_A^B \vec{F} d\alpha = f(x,y)\Big|_A^B = f(B) - f(A)$$

Pasamos a calcular la integral.

Teniendo la función potencial del campo $\vec{F}$, debemos tener en cuanta los extremos inicial y final de la curva

$$\alpha(t) = (e^t \cdot sen(t)\,, e^t \cdot \cos(t)) \;\; 0 \leq t \leq \pi$$

$$A = \alpha(0) = (e^0 \cdot sen(0)\,, e^0 \cdot \cos(0)) = (0,1)$$

$$B = \alpha(\pi) = (e^\pi \cdot sen(\pi)\,, e^\pi \cdot \cos(\pi)) = (0,-e^\pi)$$

Por lo tanto,

$$\int_C \vec{F}\, d\alpha = \int_{A=(0,1)}^{B=(0,-e^\pi)} \vec{F}\, d\alpha = f(x,y)\,\Big|_{A=(0,1)}^{B=(0,-e^\pi)} = f(0,-e^\pi) - f(0,1)$$

$$\int_C \vec{F}\, d\alpha = \int_{A=(0,1)}^{B=(0,-e^\pi)} \vec{F}\, d\alpha = 3x + x^2y - y^3\,\Big|_{A=(0,1)}^{B=(0,-e^\pi)}$$

$$\int_C \vec{F}\, d\alpha = 3x + x^2y - y^3\,\Big|_{A=(0,1)}^{B=(0,-e^\pi)}$$

$$\int_C \vec{F}\, d\alpha = 3(0) + (0)^2(-e^\pi) - (-e^\pi)^3 - [3(0) + (0)^2(1) - (1)^3]$$

$$\int_C \vec{F}\, d\alpha = e^{3\pi} + 1$$

Ejemplo 3

Calcular la integral de línea para el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y) = \left(2xe^{x^2+y^2} + y, 2ye^{x^2+y^2} + x + 2y\right)$$

Sobre la curva C, la semicircunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ con $y \geq 0$ recorrida desde $(1,0)$ hasta $(-1,0)$.

Verifiquemos si es conservativo

$\vec{F}$ es de clase C^1.

El dominio de $\vec{F}$ es todo $\mathbb{R}^2$, que es simplemente conexo.

Se cumple la condición de integrabilidad

Siendo

$$P(x,y) = 2xe^{x^2+y^2} + y$$

$$Q(x,y) = 2ye^{x^2+y^2} + x + 2y$$

$$P_y = 4xye^{x^2+y^2} + 1$$

$$Q_x = 4xye^{x^2+y^2} + 1$$

$$P_y = Q_x$$

Por lo tanto, el campo es conservativo y existe función potencial.

Sabemos que $f(x,y)$, la función potencial buscada, tiene derivadas parciales

$$f_x = P(x,y) = 2xe^{x^2+y^2} + y \qquad f_y = Q(x,y) = 2ye^{x^2+y^2} + x + 2y$$

Integrando f_x respecto de x

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2} + y$$

$$f(x,y) = \int 2xe^{x^2+y^2} + y\,dx + g(y)$$

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2} + xy + g(y)$$

Derivando esta expresión respecto de y.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 2ye^{x^2+y^2} + x + g'(y)$$

Sabiendo que

$$f_y = Q(x,y) = 2ye^{x^2+y^2} + x + 2y$$

Podemos comparar estas expresiones

$$2ye^{x^2+y^2} + x + g'(y) = 2ye^{x^2+y^2} + x + 2y$$

$$g'(y) = 2y$$

$$g(y) = y^2$$

Entonces, siendo

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2} + xy + g(y)$$

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2} + xy + y^2$$

Por lo tanto, la integral de línea la podemos calcular:

$$\int_C \vec{F} d\alpha = \int_A^B \vec{F} d\alpha = f(x,y)\Big|_A^B = f(B) - f(A)$$

Siendo $A = (1,0)$ y $B = (-1,0)$

$$\int_C \vec{F} d\alpha = f(-1,0) - f(1,0) = e - e = 0$$

Ejemplo 4

Calcular la integral de línea para el campo $\vec{F}(x,y) = (e^x - 2y^2, 3y^2 - 4xy)$ para la curva $y = ln(x)$, con $e^{-1} \leq x \leq e$.

Siendo

$$f_x = P(x,y) = e^x - 2y^2 \qquad f_y = Q(x,y) = 3y^2 - 4xy$$

Verificamos si se cumple la condición de integrabilidad.

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y)$$

Vemos que

$$P_y(x,y) = -4y$$

$$Q_x(x,y) = -4y$$

Podemos asegurar que el campo $\vec{F}$ es conservativo, para el cual podemos calcular la integral de línea utilizando la función potencial.

Búsqueda de función potencial

Integramos

$$f(x,y) = \int P(x,y)\,dx = \int e^x - 2y^2\,dx = e^x - 2xy^2$$

$$f(x,y) = \int Q(x,y)\,dy = \int 3y^2 - 4xy\,dy = y^3 - 2xy^2$$

Entonces, la función que buscamos es:

$$f(x,y) = e^x - 2y^2x + y^3$$

Necesitamos ahora, el punto inicial y final de la trayectoria $y = ln(x)$, con $e^{-1} \leq x \leq e$

Cuya parametrización está dada por

$$C{:}\, \alpha(t) = (t, \ln(t)) \qquad e^{-1} \leq t \leq e$$

Punto inicial: $(e^{-1}, -1)$

Punto final: $(e, 1)$

Entonces, la integral de línea estará dada

$$f(e,1) - f(e^{-1},-1) = e^e - 2e + 1 - \left[e^{e^{-1}} - 2e^{-1} - 1\right] = e^e - 2e + 1 - e^{e^{-1}} + 2e^{-1} + 1$$

$$\int_C \vec{F} d\alpha = e^e - 2e - e^{e^{-1}} + 2e^{-1} + 2$$

Ejemplo 5

Calcular la integral de línea del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y) = (xe^x + 2y, e^y + 2x)$$

A lo largo de la curva

$$C: \alpha(t) = (2 - sen(t), 2 + \cos^2(t)) \qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$\vec{F}$ es de clase C^1.

El dominio de $\vec{F}$ es todo $\mathbb{R}^2$, que es simplemente conexo.

Se cumple la condición de integrabilidad

$$P_y = 2 = Q_x$$

Buscamos la función potencial, y por lo tanto integramos.

$$\int P(x,y)\, dx = \int xe^x + 2y\, dx = (x-1)e^x + 2xy$$

$$\int Q(x,y)\, dy = \int e^y + 2x\, dy = e^y + 2xy$$

Por lo tanto, la función potencial es:

$$f(x,y) = (x-1)e^x + 2xy + e^y$$

$$\int_C \vec{F} d\alpha = f(B) - f(A)$$

De la curva

$$C: \alpha(t) = (2 - sen(t), 2 + \cos^2(t)) \qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Tenemos que $A = (2,3)$ y $B = (1,2)$

$$f(B) - f(A) = (4 + e^2) - (e^2 + 12 + e^3) = -e^3 - 8$$

$$I = \int_C \vec{F} d\alpha = -e^3 - 8$$