TRANSFORMACIONES LINEALES

Vamos a trabajar con transformaciones entre espacios vectoriales. O sea con relaciones que toman a un elemento de un conjunto de un espacio vectorial de partida (dominio) y nos dan como resultado un elemento de un espacio vectorial de llegada (codominio).

Esas relaciones **deben ser funciones** por lo tanto deben cumplir dos condiciones:

i) deben aplicarse sobre todos los elementos del dominio

ii) a cada elemento del dominio le corresponderá uno y solo un elemento del codominio. Sí es posible que a dos elementos del dominio le corresponda el mismo elemento del codominio.

Para T (que va de un espacio vectorial V a uno W) una transformación lineal , además de las consideraciones anteriores utilizamos las dos operaciones ($+$, .) que caracterizan a un espacio vectorial. Luego T debe cumplir las siguientes condiciones:

i) T($\vec{u}+\vec{v}$)=T($\vec{u}$)+T($\vec{v}$) , $\forall \vec{u},\vec{v} \in V$

Teniendo en cuenta que la suma que está en el término de la izquierda ($\vec{u}+\vec{v}$) se realiza en V mientras que la de la derecha T($\vec{u}$)+T($\vec{v}$) se realiza en W (son los elementos transformados)

ii) T(k.$\vec{v}$)=k.T($\vec{v}$) , $\forall \vec{v} \in V; \forall k \in K$ (cuerpo sobre el que están definidos los espacios vectoriales V y W)

Nuevamente el primer producto se realiza en V mientras que el segundo se realiza en W.

PROPIEDADES

1) A partir de la definición de una transformación lineal podemos ver que si T lo es , entonces transformará siempre el elemento nulo de V en el elemento nulo de W.

Podemos escribir $\overrightarrow{0_V} = 0.\vec{v}, \vec{v} \in V$

Luego T($\overrightarrow{0_V}$)=T($0.\vec{v}$)=0.T($\vec{v}$)=0.$\vec{w}$=$\overrightarrow{0_W}$. Donde sabemos que el transformado de $\vec{v}$ nos dará un elemento $\vec{w}$ de W y que éste multiplicado por cero nos dará el elemento nulo de W , y donde hemos aplicado la condición ii) que deben cumplir las transformaciones lineales.

Luego tenemos la implicación "Si T es transformación lineal (T.L.) $\Rightarrow$T($\overrightarrow{0_V}$)=$\overrightarrow{0_W}$"

Luego vale la contrarecíproca , a saber

"Si T($\overrightarrow{0_V}$)$\neq$ $\overrightarrow{0_W}$ $\Rightarrow$ T no es transformación lineal". Lo que nos da una herramienta rápida para analizar si una transformación es lineal o no. **ATENCIÓN** , si cumple T($\overrightarrow{0_V}$)=$\overrightarrow{0_W}$ no nos asegura que es T.L. y debemos analizar las condiciones i) y ii).

2) Aplicando la misma propiedad podemos demostrar que T($-\vec{v}$)= -T($\vec{v}$), $\forall \vec{v} \in V$

Si hacemos k=-1 nos resulta T($k.\vec{v}$)=T($-1.\vec{v}$)=(-1).T($\vec{v}$)=-T($\vec{v}$)

EJEMPLO

1) Sea T:$R^4 \to R^3$, T(x,y,z,w)=(x-y+z,2x-z+w,y+2z-w)

Aquí la transformación está dada en forma explícita , o sea nos dicen como se transforman las componentes de cualquier vector de partida y nos la fórmula para hallar el vector de llegada.

Veamos si T($\overrightarrow{0_V}$)=$\overrightarrow{0_W}$

T(0,0,0,0)=(0-0+0,2.0-0+0,0+2.0-0)=(0,0,0). Lo cumple. Debemos analizar las propiedades

i) ¿T($\vec{u}$+$\vec{v}$)=T($\vec{u}$)+T($\vec{v}$) , $\forall \vec{u}, \vec{v} \in R^4$?

Para probarlo necesitamos trabajar con dos vectores genéricos de R^4

Sean (x,y,z,w) y (x’,y’,z’,w’)

Hacemos (x,y,z,w) + (x’,y’,z’,w’)=(x+x’,y+y’,z+z’,w+w’)

Le aplicamos la transformación siguiendo la fórmula explícita

T(x+x’,y+y’,z+z’,w+w’)=(x+x’-(y+y’)+z+z’,2(x+x’)-(z+z’)+w+w’,y+y’+2(z+z’)-(w+w’))=

(x+x’-y-y’+z+z’,2x+2x’-z-z’+w+w’,y+y’+2z+2z’-w-w’) y separando los términos nos queda

(x-y+z,2x-z+w,y+2z-w)+(x’-y’+z’,2x’-z’+w’,y’+2z’-w’)=

T(x,y,z,w)+T(x’,y’,z’,w’). Luego cumple la primer condición

ii) ¿T(k.$\vec{v}$)=k.T($\vec{v}$) , $\forall \vec{v} \in R^4; \forall k \in R$?

Aquí trabajamos con un solo vector genérico de partida y con k representamos a cualquier número real. Obviamente el escalar debe ser como mucho real porque si no R^4 no cumpliría la primer condición de los espacios vectoriales respecto al producto por un escalar.

k.(x,y,z,w)=(kx,ky,kz,kw)

Aplicamos T(kx,ky,kz,kw)=(kx-ky+kz,2kx-kz+kw,ky+2kz-kw)=

k(x-y+z,2x-z+w,y+2z-w)=k.T(x,y,z,w). También la cumple

Luego T:$R^4 \to R^3$, T(x,y,z,w)=(x-y+z,2x-z+w,y+2z-w) es una transformación lineal de R^4 en R^3.

Ya vimos que T($\overrightarrow{0_V}$)=$\overrightarrow{0_W}$. Podemos preguntarnos si habrá otros elementos de R^4 que al aplicarle la transformación nos de como resultado el vector nulo de R^3.

Los elementos (x,y,z,w) deberán cumplir:

x-y+z=0

2x-z+w=0

y+2z-w=0

Este es un sistema de ecuaciones homogéneo que puede ser resuelto de diferentes formas. Sabemos de entrada que será compatible (determinado o indeterminado)

Si lo planteamos en forma de matriz (donde no colocamos los elementos independientes porque son todos nulos)

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, Sabemos que el rango de esta matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada y no puede ser superior a 3 , mientras tenemos 4 incógnitas. Luego ya sabemos que el compatible indeterminado.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} (-2)f1 + f2 \to f2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} (-2)f3 + f2 \to f2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} (-\tfrac{1}{7})f2 \to f2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\tfrac{3}{7} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} (-3)f2 + f1 \to f1; (-2)f2 + f3 \to f3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \tfrac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\tfrac{3}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\tfrac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Con lo cual resulta $x = -\frac{2}{7}w; y = \frac{1}{7}w; z = \frac{3}{7}w$, los elementos (x,y,z,w) serán de la forma $(-\frac{2}{7}w; \frac{1}{7}w; \frac{3}{7}w, w) = w(-\frac{2}{7}; \frac{1}{7}; \frac{3}{7}, 1)$

O sea que todos los múltiplos de $(-\frac{2}{7}; \frac{1}{7}; \frac{3}{7}, 1)$ (entre ellos el (0,0,0,0)) se transforman en el vector nulo de R^3.

Por ejemplo si le aplicamos la transformación al $(-2; 1; 3, 7)$ nos queda

T$(-2; 1; 3, 7) = (-2 - 1 + 3, -4 - 3 + 7, 1 + 6 - 7) = (0, 0, 0)$

Al conjunto de vectores del espacio vectorial de partida que se convierten en el vector nulo del espacio vectorial de llegada cuando se le aplica la transformación T se le llama **NÚCLEO DE T**

Nu(T)=$\left\{ \vec{v} \in V / T(\vec{v}) = \overrightarrow{0_w} \right\}$

En el sector demostraciones al final de este apunte se demuestra que el **Nu**(**T**) **es subespacio de V**. En el ejemplo anterior es un subespacio de dimensión 1 (está generado por un vector de R^4) [1]

También podemos preguntarnos cuales son los vectores de R^3 alcanzados por la transformación

Los elementos alcanzados son de la forma

(x-y+z,2x-z+w,y+2z-w)=(x,2x,0)+(-y,0,y)+(z,-z,2z)+(0,w,-w)=

x(1,2,0)+y(-1,0,1)+z(1,-1,2)+w(0,1,-1)

Luego,los elementos alcanzados son generados por la combinación de estos cuatro vectores. Obviamente que estos cuatro vectores no pueden ser linealmente independientes en R^3 , luego analizamos cuales lo son.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ (esta matriz es la transpuesta de la anterior)

$$f1+f2 \to f2; f3-f1 \to f3 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} (-2)f4+f1 \to f1; (-2)f4+f2 \to f2; 3f4+f3 \to f3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} 2f3+f1 \to f1; 3f3+f2 \to f2;\ f4-f3 \to f4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nos quedan tres vectores linealmente independientes en R^3 , son una base de R^3 y por lo tanto los elementos alcanzados son generados por una base de R^3 y coinciden con todo el espacio vectorial de llegada.

A los vectores del espacio vectorial de llegada alcanzados por la aplicación de la transformación a todos los elementos del espacio vectorial de partida se los denominan **IMAGEN DE T**

Img (T)=$\left\{\vec{w} \in W / \exists \vec{v} \in V \wedge T(\vec{v}) = \vec{w}\right\}$, o sea que es el conjunto que está conformado por los elementos $\vec{w}$ de W para los cuales existe (al menos) un elemento $\vec{v}$ de V tal que al aplicarle a éste la transformación el resultado es $\vec{w}$.

En la sección al final de apunte se demuestra que la I**mg**(**T**) **es un subespacio del espacio vectorial de llegada W**.[2]

En el ejemplo anterior la dim Img(T)=3 y concuerda con R^3.

EJEMPLO

2) Supongamos que tenemos una traslación de R^2 en R^2 generada por el vector (a,b) ,

dada en su fórmula explícita por T(x,y)=(x+a,y+b) , con a y b números reales cualesquiera.

Veamos que pasa si le aplicamos la transformación al (0,0)

T(0,0)=(a,b) que en general es diferente del (0,0) (salvo que a y b sean nulos y la transformación sería la identidad). Luego las traslaciones no son transformaciónes lineales.

TEOREMA DE LA DIMENSIÓN DEL NÚCLEO Y LA IMAGEN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Sea T:**V** $\to W$, **una transformación lineal** , **entonces se cumple dim** V=**dim Nu**(**T**)+**dim Img**(**T**)

Lo que nos indica es que la suma de las dimensiones del núcleo y la imagen es igual a la dimensión del **espacio vectorial de partida**.

Este teorema se demuestra en la parte final del apunte.[3]

Si lo aplicamos en el ejemplo anterior resulta dim R^4=dim Nu(T)+dim Img(T)=1+3=4

OTRAS PROPIEDADES DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

3) La imagen de una combinación lineal de dos vectores del dominio V es igual a la combinación lineal con los mismos coeficientes , de las imágenes de los vectores en W.

Sea T :$V \to W$ una T.L. Si $\vec{u}$ y $\vec{v} \in V$ y hacemos una combinación lineal a$\vec{u}$+b$\vec{v}$ (con a y b escalares pertenecientes al cuerpo numérico sobre el cual está definido V) entonces $T(a\vec{u}+b\vec{v}) = T(a\vec{u})+T(b\vec{v}) = aT(\vec{u})+bT(\vec{v})$

En la demostración lo que se han utilizado son las propiedades de una transformación lineal.

4) Si generalizamos la propiedad anterior resulta $T(\sum_{i=1}^{n} a_i\vec{v_i}) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(\vec{v_i})$

Este resultado será utilizado en demostraciones posteriores.

En particular si $\{\vec{v_1},\vec{v_2},\ldots\vec{v_n}\}$ es una base de V, entonces cualquier vector $\vec{v} \in V$ se puede escribir como combinación lineal única de los vectores de esa base (con coordenadas a_i) y $T(v) = (\sum_{i=1}^{n} a_i\vec{v_i}) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(\vec{v_i})$ **por lo que la Imagen de T será generada por los transformados** $T(\vec{v_i})$. Esos transformados podrán ser linealmente independientes o no. Si lo aplicamos al ejemplo anterior tomando como base de partida la canónica de R4.

T(1,0,0,0)= (1,2,0)

T(0,1,0,0)= (-1,0,1)

T(0,0,1,0)= (1,-1,2)

T(0,0,0,1)= (0,1,-1)

Ya hemos analizado este conjunto de vectores. El resultado es que tres de estos vectores serán linealmente independientes y que generan la Imagen de T , luego la dimensión de la Img(T) es 3.

OTRAS FORMAS DE DEFINIR A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

A) **A PARTIR DE COMO ACTUA SOBRE UNA BASE DE PARTIDA**

Como la fórmula explícita que teníamos vale para cualquier vector de R^4 ,es posible aplicársela a los vectores que conformen una base de R^4

Sea la base B $= \{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0)\}$. Nos dan como dato entonces que:

T(1,1,1,1)=(1,2,2)

T(1,1,1,0)=(1,1,3)

T(1,1,0,0)=(0,2,1)

T(1,0,0,0)=(1,2,0)

O sea que pueden definirnos a la transformación lineal diciendo como actúa sobre una base de partida y no darnos la fórmula explícita.

A partir de la propiedad 4) anteriormente citada , sabemos que los vectores transformados generan la imagen de T. Nuevamente tenemos cuatro vectores transformados en R^3 y por lo tanto si analizamos cuales son linealmente independientes , hallaremos la dimensión y la imagen de T.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} f2-f1 \to f2; f4-f1 \to f4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} 2f2+f1 \to f1; 2f2+f3 \to f3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$3f4+f3 \to f3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, nos quedan tres vectores L.I. (por ejemplo $\{(1,2,2),(1,1,3),(1,2,0)\}$ o cualquier grupo de tres de los vectores originales) y nuevamente la dimensión Img(T)=3. Cualquier conjunto de tres vectores linealmente independientes que tomemos será base de la Img T.(en particular podemos tomar la canónica de R^3)

Aplicando el teorema de la dimensión se llega a que dim Nu(T)=1. Pero ¿cómo lo hallamos?

a) Una forma es encontrar la fórmula explícita. De paso vemos como obtener la fórmula explícita.

Como tenemos una base B , podemos expresar cualquier vector genérico de R^4 como combinación de la base

$(x,y,z,w) = a(1,1,1,1) + b(1,1,1,0) + c(1,1,0,0) + d(1,0,0,0) =$
$\begin{pmatrix} a+b+c+d & a+b+c & a+b & a \end{pmatrix}$

Reemplazando , vamos a hallar las coordenadas de ese vector genérico en esa base.

$a = w$
$a+b = z \to b = z-a = z-w$
$a+b+c = y \to c = y-a-b = y-w-(z-w) = y-z$
$a+b+c+d = x \to d = x-a-b-c = x-w-(z-w)-(y-z) = x-y$

Corroboramos

$w(1,1,1,1) + (z-w)(1,1,1,0) + (y-z)(1,1,0,0) + (x-y)(1,0,0,0) = \begin{pmatrix} x & y & z & w \end{pmatrix}$

Aplicamos la transformación

$T(x,y,z,w) = T(w(1,1,1,1) + (z-w)(1,1,1,0) + (y-z)(1,1,0,0) + (x-y)(1,0,0,0)) =$
$wT(1,1,1,1) + (z-w)T(1,1,1,0) + (y-z)T(1,1,0,0) + (x-y)T(1,0,0,0)) =$
$w(1,2,2) + (z-w)(1,1,3) + (y-z)(0,2,1) + (x-y)(1,2,0) =$
$\begin{pmatrix} x-y+z & w+2x-z & y-w+2z \end{pmatrix}$

Obviamente volvemos a recuperar la fórmula explícita original y a partir de ella ya calculamos el Nu(T) siendo generado (por ejemplo) el vector (-2,1,3,7) (o cualquier múltiplo del mismo)

b) Otra forma sería plantear una combinación lineal genérica de la base de partida, aplicarle la transformación y pedir que el resultado sea el vector nulo de R^3.

Luego

$a(1,1,1,1) + b(1,1,1,0) + c(1,1,0,0) + d(1,0,0,0)$ y pedimos que

$T(a(1,1,1,1)+b(1,1,1,0)+c(1,1,0,0)+d(1,0,0,0)) \; = (0,0,0)$

Aplicando las propiedades de transformación lineal

$aT(1,1,1,1)+bT(1,1,1,0)+cT(1,1,0,0)+dT(1,0,0,0) =$

$a(1,2,2)+b(1,1,3)+c(0,2,1)+d(1,2,0) =$

$\begin{pmatrix} a+b+d & 2a+b+2c+2d & 2a+3b+c \end{pmatrix} = (0,0,0)$

Resolvemos representando las ecuaciones en una matriz y no colocando los términos independientes porque son nulos.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, por reducción de filas (cada uno puede llegar a resultados similares) se llega a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Sistema compatible indeterminado (solución correcta porque teníamos una matriz de rango a lo sumo 3 y cuatro incógnitas)

Luego $a = -\frac{7}{3}d, b = \frac{4}{3}d; c = \frac{2}{3}d$

Y recordando que a,b,c y d son las coordenadas de los vectores del núcleo expresados en la base B , el núcleo estará generado por:

$-\frac{7}{3}d(1,1,1,1)+\frac{4}{3}d(1,1,1,0)+\frac{2}{3}d(1,1,0,0)+d(1,0,0,0) =$

$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}d & -\frac{1}{3}d & -d & -\frac{7}{3}d \end{pmatrix} = d(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-1,-\frac{7}{3})$ donde tenemos infinitas soluciones.

Si ponemos d=-3 , recuperamos el vector (-2,1,3,7) que es una de ellas y la habíamos usado antes. Nuevamente dim Nu(T)=1 y una base es $\{(-2,1,3,7)\}$

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

Podemos preguntarnos si definir una transformación a partir de como actúa sobre una base de partida , la define como transformación lineal y además en forma unívoca , es decir , no hay otra transformación lineal que actúe igual que la anterior.

Para ello vamos a enunciar el teorema siguiente (que se demuestra al final del apunte)[4]

Sean los espacios vectoriales V y W de dimensión finita (**observación importante**)

Sea B=$\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\ldots,\overrightarrow{v_n}\}$ **una base de V y A**=$\{\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2},\ldots,\overrightarrow{w_n}\}$ **una colección de n vectores en el espacio vectorial W (no son necesariamente una base y además no se hacen consideraciones sobre las dimensiones de V y W**)

Entonces existe una única transformación lineal $T : V \to W$ que cumple $T(\overrightarrow{v_i}) = \overrightarrow{w_i}$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$

Este teorema nos asegura que al definir una transformación lineal sobre una base de partida y expresando cuales son los vectores transformados de los mismos , tenemos una transformación lineal (nos asegura que lo es) y además es única. Por lo tanto queda bien definida.

B) MATRIZ QUE REPRESENTA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

También podemos definir a una T.L. dando una matriz que la representa (en este caso debemos señalar cuales son las bases de partida y llegada en las cuales está calculada)

Usaremos la misma transformación con la base de partida B = $\{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0)\}$ y la base de llegada $B' = (1,1,1);(1,1,0);(1,0,0)$.

Escribimos luego los vectores transformados como combinación lineal de B'.

$T(1,1,1,1) = (1,2,2) = a(1,1,1) + b(1,1,0) + c(1,0,0) = \begin{pmatrix} a+b+c & a+b & a \end{pmatrix}$

$T(1,1,1,0) = (1,1,3)$

$T(1,1,0,0) = (0,2,1)$

$T(1,0,0,0) = (1,2,0)$

Podríamos hacer lo mismo con los otros vectores transformados poniendo otras coordenadas (d,e,...) pero en definitiva las ecuaciones no cambian sino que solo varían los términos independientes. Podemos entonces generar una matriz de tal forma que sintetice a todos los casos (en las tres primeras columnas ponemos los coeficientes de las ecuaciones y en las restantes los valores resultantes de transformar los vectores de la base) y lo resolvemos globalmente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f2 - f3 \to f2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} f1 - f2 - f3 \to f1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} f1 \Leftrightarrow f3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{corroboramos}$$

$(2)(1,1,1) + (0)(1,1,0) +)(-1)(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$(3)(1,1,1) + (-2)(1,1,0) +)(0)(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$(1)(1,1,1) + (1)(1,1,0) +)(-2)(1,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$(0)(1,1,1) + (2)(1,1,0) +)(-1)(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Luego podemos escribir

$T(1,1,1,1) = (1,2,2) = (2)(1,1,1) + (0)(1,1,0) + (-1)(1,0,0)$

$T(1,1,1,0) = (1,1,3) = (3)(1,1,1) + (-2)(1,1,0) +)(0)(1,0,0)$

$T(1,1,0,0) = (0,2,1) = (1)(1,1,1) + (1)(1,1,0) +)(-2)(1,0,0)$

$T(1,0,0,0) = (1,2,0) = (0)(1,1,1) + (2)(1,1,0) +)(-1)(1,0,0)$

A partir de esas igualdades podemos construir una matriz colocando en forma de columnas las coordenadas de los vectores transformados expresadoe en la base de llegada.

$$M(T)_{BB'} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz representará a la transformación partiendo de la base B y llegando a la base B'.

Tiene tantas filas como dimensión del espacio de llegada y tantas columnas como dimensión del espacio de partida.

Como en las columnas figuran las coordenadas de los vectores transformados expresados en la base de llegada , significa que las columnas linealmente independientes tendrán las coordenadas de los vectores que forman una base de la imagen de T. (Recordar que las coordenadas están referidas a la base B'). **Luego la cantidad de columnas linealmente independientes será igual a la dimensión de la imagen de T**. Pero la cantidad de columnas linealmente independientes es igual al rango de la matriz (recordar que al mismo se lo puede calcular tanto por columnas como por filas ¡y da igual!). **Por lo tanto el rango de la matriz nos da la dim** (**Img**(**T**)) **y las columnas independientes que elijamos nos darán las coordenadas** (**en la base** B') **de una base de Img**(**T**).

Si queremos calcular el núcleo podemos utilizar esta matriz poniendo

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+3b+c \\ c-2b+2d \\ -a-2c-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si resolvemos

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$, por reducción de fila $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Luego $a = -\frac{7}{3}d; b = \frac{4}{3}d; c = \frac{2}{3}d$

Tenemos los coeficientes , ¿a que base se los aplicamos?. Estamos partiendo de la base B , luego se lo aplicamos a la misma

$-\frac{7}{3}d(1,1,1,1) + \frac{4}{3}d(1,1,1,0) + \frac{2}{3}d(1,1,0,0) + d(1,0,0,0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}d & -\frac{1}{3}d & -d & -\frac{7}{3}d \end{pmatrix}$ y volvemos a recuperar al generador del núcleo.

¿Existirá alguna diferencia en trabajar con esta representación matricial?

Por ejemplo podemos ver que si le aplicamos la transformación al vector (1,2,-1,3) (utilizando la fórmula explícita) nos da

T(x,y,z,w)=(x-y+z,2x-z+w,y+2z-w)→ $T(1,2,-1,3) = (-2,6,-3)$

Si recordamos algo de Algebra I , allí trabajábamos con la matriz de la transformación partiendo de la canónica y llegando a la canónica.

En ese caso la matriz sería $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y multiplicando por las coordenadas de un vector en V nos da el transformado en W.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

¿Como usamos la matriz $M(T)_{BB'} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$?

La matriz actuará sobre las coordenadas de un vector en la base B y nos dará las coordenadas del transformado en B'.

Luego tendremos que expresar al (1,2,-1,3) en la base B. Pero ya habíamos encontrado las ecuaciones correspondiente

$(1,2,-1,3) = a(1,1,1,1) + b(1,1,1,0) + c(1,1,0,0) + d(1,0,0,0) =$
$\begin{pmatrix} a+b+c+d & a+b+c & a+b & a \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, por reducción de filas $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Corroboramos

$(3)(1,1,1,1) + (-4)(1,1,1,0) + (3)(1,1,0,0) + (-1)(1,0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Aplicamos la transformación

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix}$$

El resultado son las coordenadas del transformado en la base B'. Luego si planteamos
$(-3)(1,1,1) + (9)(1,1,0) + (-8)(1,0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}$ y obtenemos el mismo vector transformado expresado en la base canónica. Esto es así porque si bien hemos utilizado las coordenadas del transformado obtenidas para la base B' , cuando hacemos la combinación lineal estamos escribiendo los vectores de B' en la base canónica , luego el resultado está en canónica.

Luego podemos sintetizar esta otra forma de representar a una transformación

lineal

i) está dada por una matriz que tiene tantas filas como dimensión del espacio vectorial de partida y tantas columnas como dimensión del espacio vectorial de llegada y depende de las bases que elijamos en cada uno de dichos espacios vectoriales.

ii) la construimos con las coordenadas de los transformados de la base de partida expresados en la base de llegada y puestas en forma de columna

iii) el rango de la matriz nos da la dimensión de la imagen de la transformación

iv) la matriz actúa sobre las coordenadas de un vector expresado en la base de partida y nos da las coordenadas del transformado en la base de llegada.

Todo esto está demostrado en un teorema al final de apunte $[\mathbf{5}]$

UTILIZACIÓN DE LA MATRIZ QUE REPRESENTA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL Y LAS MATRICES DE CAMBIO DE COORDENADAS

Supongamos que nos dan la matriz que representa a una transformación lineal en bases de partida y llegada y queremos tener la representación matricial en otras bases.

Por ejemplo nos dan $M(T)_{BB'} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y las bases de partida y llegada son respectivamente $B = \{(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0)\}$ y $B' = (1,1,1);(1,1,0);(1,0,0)$.

Queremos obtener por ejemplo la matriz de T en las bases canónicas de ambos espacios vectoriales. Entonces

$M_{EE'}(T) = C_{B'E'}.M(T)_{BB'}.C_{EB}$

La primer matriz que actúa C_{EB} "lee" las coordenadas de un vector en la base canónica de partida y nos da las coordenadas del mismo vector en la base B

La segunda matriz que actúa $M(T)_{BB'}$ "lee" las coordenadas del vector en la base B y nos da las coordenadas del vector transformado en la base B'

Y la tercer matriz que actúa $C_{B'E'}$ "lee" las coordenadas del vector transformado en la base B' y nos da las coordenadas del mismo vector en la base E'.

Veamos nuestro ejemplo

$C_{B'E'}$ es la matriz más fácil de calcular porque debemos poner directamente las coordenadas de los vectores de B’ en la canónica E.

$$C_{B'E'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para hallar C_{EB} podemos escribir C_{BE} y hallar la inversa

$$C_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow C_{EB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$ que es la misma que habíamos hallado antes

Si hacemos $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+z \\ 2x-z+w \\ y+2z-w \end{pmatrix}$

CLASIFICACIÓN DE TRANSFORMACIONES LINEALES

Al igual que con las funciones (ellas también los son) las transformaciones lineales se pueden clasificar.

Monomorfismo (equivale a la inyectividad)

Una T.L. es monomorfismo (inyectiva) si cumple $T(\vec{u}) = T(\vec{v}) \rightarrow \vec{u} = \vec{v}$ o su contrarecíproca Si $\vec{u} \neq \vec{v} \rightarrow T(\vec{u}) \neq T(\vec{v})$

Un teorema nos da una herramienta rápida para saber si una T.L. es monomorfismo

T es monomorfismo $\Leftrightarrow Nu(T) = \left\{\overrightarrow{0_V}\right\}$ (demostración al final del apunte)[6]

Epimorfismo (equivale a la suryectividad o sobreyectividad)

Una T.L. es epimorfismo si cubre a todo el codominio , o sea que todo elemento de W es alcanzado por la transformación aplicada al menos a un elemento de V.

Una T.L. es epimorfismo $\Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im}g(T)) = \dim W$

Isomorfismo (equivale a la biyectividad)

Una T.L. es isomorfismo ⇔ es monomorfismo y epimorfismo

DEMOSTRACIONES

[1]. **El Nu(T) es subespacio de V**

i) El $\overrightarrow{0_V}$ pertenece al Nu(T) pues T($\overrightarrow{0_V}$)=$\overrightarrow{0_W}$

ii) sean dos vectores del Nu(T) , $\vec{u}$ y $\vec{v}$, luego T($\vec{u}$)=T($\vec{v}$)=$\overrightarrow{0_W}$

¿$\vec{u}+\vec{v}$ pertenece al Nu(T)?¿que pasa con T($\vec{u}+\vec{v}$)?

T($\vec{u}+\vec{v}$)=T($\vec{u}$) +T($\vec{v}$)=$\overrightarrow{0_W} + \overrightarrow{0_W} = \overrightarrow{0_W}$

Luego $\vec{u}+\vec{v}$ pertenece al Nu(T)

iii) Sea $\vec{u}$ un vector del Nu(T) y k un escalar , luego T($\vec{u}$)=$\overrightarrow{0_W}$

T(k.$\vec{u}$)=k.T($\vec{u}$)=k.$\overrightarrow{0_W} = \overrightarrow{0_W}$

Luego k$\vec{u}$ pertenece al Nu(T)

[2]. **La Img(T) es un subespacio de W**

i) $\overrightarrow{0_W}$ pertenece a la imagen de T pues existe al menos un vector (el $\overrightarrow{0_V}$) que al transformarse se convierte en él.

ii) Sean dos vectores $\vec{w}$ y $\vec{s}$ de W que pertenecen a la imagen de T. Eso significa que existen (al menos) dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en V tal que T($\vec{u}$)=$\vec{w}$ y T($\vec{v}$)=$\vec{s}$

¿$\vec{w}+\vec{s}$ pertenece a Img(T)?

$\vec{w}+\vec{s}$ =T($\vec{u}$)+T($\vec{v}$)=T($\vec{u}+\vec{v}$)=T($\vec{r}$) ; con $\vec{r}=\vec{u}+\vec{v}$ un vector perteneciente a V. Luego existe (al menos) un vector de V que al aplicarle la transformación da por resultado $\vec{w}+\vec{s}$ y por lo tanto $\vec{w}+\vec{s}$ pertenece a la Img(T)

iii) Sea $\vec{w}$ un vector de la imagen de T y k un escalar. ¿k.$\vec{w}$ pertenece a la Img(T)?

k.$\vec{w} = k.$T($\vec{u}$)=T(k.$\vec{u}$)=T($\vec{m}$) donde $\vec{m}$ es un vector de V que resulta de multiplicar k.$\vec{u}$
Luego existe (al menos) un vector de V que al aplicarle la transformación da como resultado k.$\vec{w}$ y entonces k.$\vec{w}$ pertenece a la Img(T)

[3].**Sea T:V → W , una transformación lineal , entonces se cumple dim V=dim Nu(T)+dim Img(T)**

Sea dim V=n y sea C=$\left\{\vec{v_1},\vec{v_2},\ldots\vec{v_k}\right\}$ una base del Nu(T) con $k \leq n$

Podemos extender C a una base de V agregándole vectores linealmente independientes hasta obtener un conjunto de n vectores de ese tipo.

B=$\left\{\vec{v_1},\vec{v_2},\ldots\vec{v_k},\overrightarrow{v_{k+1}},\overrightarrow{v_{k+2}},\ldots,\vec{v_n}\right\}$

Vamos a probar que $\left\{T(\overrightarrow{v_{k+1}}),T(\overrightarrow{v_{k+2}}),\ldots,T(\vec{v_n})\right\}$ es una base de la Img(T)

Probaremos entonces que genera la Img(T) y que son linealmente independientes (en W)

i) generan Img(T)

Sea $\vec{v}$ un vector cualquiera de V , si $\vec{w}$ pertenece a Img(T) entonces se cumple $\vec{w}$=T($\vec{v}$). Ahora $\vec{v}$ puede ser expresado como una combinación lineal (única) en la base B

$\vec{v}=a_1\vec{v_1}+a_2\vec{v_2}+\ldots..+a_k\vec{v_k}+a_{k+1}\overrightarrow{v_{k+1}}+\ldots.+a_n\vec{v_n}$

$\vec{w} = T(\vec{v}) = T(a_1\vec{v_1}+a_2\vec{v_2}+\ldots..+a_k\vec{v_k}+a_{k+1}\overrightarrow{v_{k+1}}+\ldots.+a_n\vec{v_n}) =$

$T(a_1\vec{v_1})+T(a_2\vec{v_2})+\ldots..+T(a_k\vec{v_k})+T(a_{k+1}\overrightarrow{v_{k+1}})+\ldots.+T(a_n\vec{v_n}) =$

$a_1T(\vec{v_1})+a_2T(\vec{v_2})+\ldots..+a_kT(\vec{v_k})+a_{k+1}T(\overrightarrow{v_{k+1}})+\ldots.+a_nT(\vec{v_n}) = a_{k+1}T(\overrightarrow{v_{k+1}})+\ldots.+a_nT(\vec{v_n})$

pues los vectores $\left\{\vec{v_1},\vec{v_2},\ldots\vec{v_k}\right\}$ están en el núcleo de T y solo sobreviven los transformados de los vectores linealmente independientes agregados para conformar la base B.

Luego $\vec{w}=\sum_{i=k+1}^{n} a_iT(v_i)$ y esto señala que un vector de la Img(T) se escribe como combinación lineal de $\left\{T(\overrightarrow{v_{k+1}}),T(\overrightarrow{v_{k+2}}),\ldots,T(\vec{v_n})\right\}$ y por lo tanto es un sistema generador de Img(T)

ii) $\left\{T(\overrightarrow{v_{k+1}}),T(\overrightarrow{v_{k+2}}),\ldots,T(\vec{v_n})\right\}$ es linealmente independiente.

Planteamos

$b_{k+1}T(\overrightarrow{v_{k+1}})+b_{k+2}T(\overrightarrow{v_{k+2}})+\ldots+b_nT(\vec{v_n}) = \overrightarrow{O_w}$

Luego

$T(b_{k+1}.\overrightarrow{v_{k+1}}) + T(b_{k+2}.\overrightarrow{v_{k+2}}) +\ldots+T(b_n.\overrightarrow{v_n}) = \overrightarrow{O_w} \rightarrow T(b_{k+1}.\overrightarrow{v_{k+1}} + b_{k+2}.\overrightarrow{v_{k+2}} +\ldots+b_n.\overrightarrow{v_n}) = \overrightarrow{O_w}$

Luego $b_{k+1}.\overrightarrow{v_{k+1}} + b_{k+2}.\overrightarrow{v_{k+2}} +\ldots+b_n.\overrightarrow{v_n}$ pertenece al Nu(T) y se podrá expresar como una combinación lineal de $\left\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\ldots\overrightarrow{v_k}\right\}$

$a_1.\overrightarrow{v_1} + a_2.\overrightarrow{v_2} +\ldots+a_k.\overrightarrow{v_k} = b_{k+1}.\overrightarrow{v_{k+1}} + b_{k+2}.\overrightarrow{v_{k+2}} +\ldots+b_n.\overrightarrow{v_n}$

$a_1.\overrightarrow{v_1} + a_2.\overrightarrow{v_2} +\ldots+a_k.\overrightarrow{v_k} - b_{k+1}.\overrightarrow{v_{k+1}} - b_{k+2}.\overrightarrow{v_{k+2}} -\ldots-b_n.\overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0_V}$

Pero el conjunto $\left\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\ldots\overrightarrow{v_k},\overrightarrow{v_{k+1}},\overrightarrow{v_{k+2}},\ldots,\overrightarrow{v_n}\right\}$ es linealmente independiente , por lo tanto una combinación lineal de dichos vectores igualada al vector nulo , tiene por única solución todos los coeficientes nulos , entonces

$a_i = 0, \forall i = 1,\ldots,k$

$b_j = 0, \forall j = k+1, k+2,\ldots,n$

Y la segunda condición nos asegura que los vectores $\left\{T(\overrightarrow{v_{k+1}}), T(\overrightarrow{v_{k+2}}),\ldots,T(\overrightarrow{v_n})\right\}$ son linealmente independientes.

Luego la dimensión de la Img(T) es n-k y se cumple

n=**dim** V=**dim Nu**(**T**)+**dim Img**(**T**)=**n**+(**n**-**k**)=**n**

[4].**Sean los espacios vectoriales** V **y** W **de dimensión finita** (**observación importante**)

Sea B=$\left\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\ldots,\overrightarrow{v_n}\right\}$ **una base de** V **y A**=$\left\{\overrightarrow{w_1},\overrightarrow{w_2},\ldots,\overrightarrow{w_n}\right\}$ **una colección de n vectores en el espacio vectorial** W (**no son necesariamente una base y además no se hacen consideraciones sobre las dimensiones de V y W**)

Entonces existe una única transformación lineal $T : V \rightarrow W$ **que cumple** $T(\overrightarrow{v_i}) = \overrightarrow{w_i}$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$

Sea $\vec{v}$ perteneciente a V , entonces $\vec{v}$ se puede escribir como combinación lineal única de los vectores de la base B

$\vec{v} = a_1.\overrightarrow{v_1} + a_2.\overrightarrow{v_2} +\ldots+a_n.\overrightarrow{v_n}$

Definimos una función $T : V \rightarrow W$ tal que T($\vec{v}$)=$\sum_{i=1}^{n} a_i.\overrightarrow{w_i}$

Probaremos primero que es una transformación lineal

Sean $\vec{u}$ y $\vec{t}$ pertenecientes a V tal que $\vec{u}$=$\sum_{i=1}^{n} a_i.\overrightarrow{v_i}$ y $\vec{t}$=$\sum_{i=1}^{n} b_i.\overrightarrow{v_i} \rightarrow \vec{u} + \vec{t} = \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i.)\overrightarrow{v_i}$

T($\vec{u}$+$\vec{t}$)=$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i.)\overrightarrow{w_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i.\overrightarrow{w_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i.\overrightarrow{w_i} = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

k.$\vec{u}$=k.$\sum_{i=1}^{n} a_i.\overrightarrow{v_i} = \sum_{i=1}^{n}(k.a_i).\overrightarrow{v_i}$

T(k.$\vec{u}$)=$\sum_{i=1}^{n}(k.a_i).\overrightarrow{w_i} = k.\sum_{i=1}^{n} a_i.\overrightarrow{w_i} = k.T(\vec{u})$

Por lo tanto T es una transformación lineal

Ahora demostraremos que es única.

Supongamos que existe otra transformación lineal $F : V \rightarrow W$ tal que $F(\overrightarrow{v_i}) = \overrightarrow{w_i}$, $\forall i = 1,2,\ldots,n$

$\forall \vec{u} \in V \to \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i . \vec{v_i}$

Luego $F(\vec{u}) = F(\sum_{i=1}^{n} a_i . \vec{v_i}) = \sum_{i=1}^{n} a_i . F(\vec{v_i}) = \sum_{i=1}^{n} a_i . \vec{w_i} = T(\vec{u})$

[5].**MATRIZ REPRESENTATIVA DE UNA TRANSFORMACION LINEAL**

Sea T:$V \to W$ una transformación lineal , sean **B**$=\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ y **B**'$=\{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \ldots, \vec{w_m}\}$ respectivamente bases de V y W.Aplicamos la transformación a los vectores de B

$T(\vec{v_1}) = \vec{t_1}; T(\vec{v_2}) = \vec{t_2}, \ldots, T(\vec{v_n}) = \vec{t_n}$

Los vectores $\{\vec{t_1}, \vec{t_2}, \ldots, \vec{t_n}\}$ pueden ser expresados cada uno de ellos como combinación lineal única de los vectores $\{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \ldots, \vec{w_m}\}$

$T(\vec{v_1}) = \vec{t_1} = a_{11}\vec{w_1} + a_{21}\vec{w_2} + a_{31}\vec{w_3} + \ldots\ldots + a_{m1}\vec{w_m}$

$T(\vec{v_2}) = \vec{t_2} = a_{12}\vec{w_1} + a_{22}\vec{w_2} + a_{32}\vec{w_3} + \ldots\ldots + a_{m2}\vec{w_m}$

$T(\vec{v_3}) = \vec{t_3} = a_{13}\vec{w_1} + a_{23}\vec{w_2} + a_{33}\vec{w_3} + \ldots\ldots + a_{m3}\vec{w_m}$

....

$T(\vec{v_n}) = \vec{t_n} = a_{1n}\vec{w_1} + a_{2n}\vec{w_2} + a_{3n}\vec{w_3} + \ldots\ldots + a_{mn}\vec{w_m}$

Donde hemos colocado los coeficientes (las coordenadas de los vectores $\vec{t_i}$ en la base $B\prime$) como elementos de columnas de una matriz. Dicha matriz representa a laa transformación T entre las bases B y B’.

Veamos como trabaja

Sea $\vec{v} \in V \to \vec{v} = k_1 . \vec{v_1} + k_2 . \vec{v_2} + \ldots + k_n . \vec{v_n}$

T($\vec{v}$)=T($k_1 . \vec{v_1} + k_2 . \vec{v_2} + \ldots + k_n . \vec{v_n}$) $= k_1 . T(\vec{v_1}) + k_2 . T(\vec{v_2}) + \ldots + k_n . T(\vec{v_n}) =$

$k_1 . \vec{t_1} + k_2 . \vec{t_2} + \ldots + k_n . \vec{t_n} = k_1 . (a_{11}\vec{w_1} + a_{21}\vec{w_2} + a_{31}\vec{w_3} + \ldots\ldots + a_{m1}\vec{w_m}) +$

$k_2 . (a_{12}\vec{w_1} + a_{22}\vec{w_2} + a_{32}\vec{w_3} + \ldots\ldots + a_{m2}\vec{w_m}) +$

$k_3 . (a_{13}\vec{w_1} + a_{23}\vec{w_2} + a_{33}\vec{w_3} + \ldots\ldots + a_{m3}\vec{w_m}) + \ldots +$

$k_n . (a_{13}\vec{w_1} + a_{23}\vec{w_2} + a_{33}\vec{w_3} + \ldots\ldots + a_{m3}\vec{w_m})$

$= \underbrace{(k_1 a_{11} + k_2 a_{12} + k_3 a_{13} + \ldots + k_n a_{1n})}_{b_1}\vec{w_1} + \underbrace{(k_1 a_{21} + k_2 a_{22} + k_3 a_{23} + \ldots + k_n a_{2n})}_{b_2}\vec{w_2} +$

$\underbrace{(k_1 a_{31} + k_2 a_{32} + k_3 a_{33} + \ldots + k_n a_{3n})}_{b_3}\vec{w_3} + \ldots\ldots + \underbrace{(k_1 a_{m1} + k_2 a_{m2} + k_3 a_{m3} + \ldots + k_n a_{mn})}_{b_m}\vec{w_m}$

Ahora al transformar T($\vec{v}$) obtenemos un vector de la Img(T) , por lo tanto los coeficientes encerrados entre paréntesis en la última expresión , son las coordenadas b_i de un vector de la Img(T) expresado en la base B’.

Entendemos entonces como actúa la matriz que hemos construidos

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Luego la matriz que hemos construido (que representa a la transformación entre las bases B y B') actúa de esta manera: multiplicandola por las coordenadas de un vector $\vec{v}$ de V (expresado en la base B) nos da por resultado las coordenadas del vector transformado T($\vec{v}$) en la base B'.

La matriz así definida es , en general , rectangular. Solo será cuadrada cuando la transformación vaya de una espacio vectorial a otro de igual dimensión , o sea un endomorfismo , o sea una transformación de un espacio vectorial en sí mismo.

Además los vectores $\vec{t_i}$ generan la imagen porque son los transformados de los vectores de la base de partida. Por lo tanto las columnas de la matriz son las coordenadas de los vectores que generan la imagen de T. Luego las columnas linealmente independientes serán las coordenadas de los vectores que forman una base de Img(T). Por ello , el rango de la matriz nos da la dimensión de la Img(T).

Luego podemos sintetizar:

i) **está dada por una matriz que tiene tantas filas como dimensión del espacio vectorial de partida y tantas columnas como dimensión del espacio vectorial de llegada y depende de las bases que elijamos en cada uno de dichos espacios vectoriales**.

ii) **la construimos con las coordenadas de los transformados de la base de partida expresados en la base de llegada y puestas en forma de columna**

iii) **el rango de la matriz nos da la dimensión de la imagen de la transformación**

iv) **la matriz actúa sobre las coordenadas de un vector expresado en la base de partida y nos da las coordenadas del transformado en la base de llegada**.

$[6]$.**T es monomorfismo** ⇔ $Nu(T) = \left\{\overrightarrow{0_V}\right\}$

⇒)**T es monomorfismo** → $Nu(T) = \left\{\overrightarrow{0_V}\right\}$

Si $\vec{v} \in Nu(T) \to T(\vec{v}) = \overrightarrow{0_w} = T(\overrightarrow{0_V})$ y como es monomorfismo si dos elementos del dominio tienen la misma imagen , entonces necesariamente deber ser iguales y $\vec{v}=\overrightarrow{0_V}$

⇐) Si $Nu(T) = \left\{\overrightarrow{0_V}\right\}$ →T es monomorfismo

Sea T($\vec{u}$)=T($\vec{v}$)→ $T(\vec{u} - \vec{v}) = \overrightarrow{0_V} \to (\vec{u} - \vec{v}) \in Nu(T) \to (\vec{u} - \vec{v}) = \overrightarrow{0_V} \to \vec{u} = \vec{v}$

Luego si $Nu(T) = \left\{\overrightarrow{0_V}\right\}$ la transformación aplicada a dos elementos del dominio tienen la misma imagen necesariamente esos elementos tienen que ser iguales y la transformación es un monomorfismo.