Unidad 8
Teorema de Green
Guía de clase. Com 02

Este teorema se caracteriza por vincular una integral de línea de un campo vectorial del plano sobre una curva cerrada con una integral doble sobre el recinto delimitado por dicha curva.

Dado el campo vectorial

$$\vec{F}: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

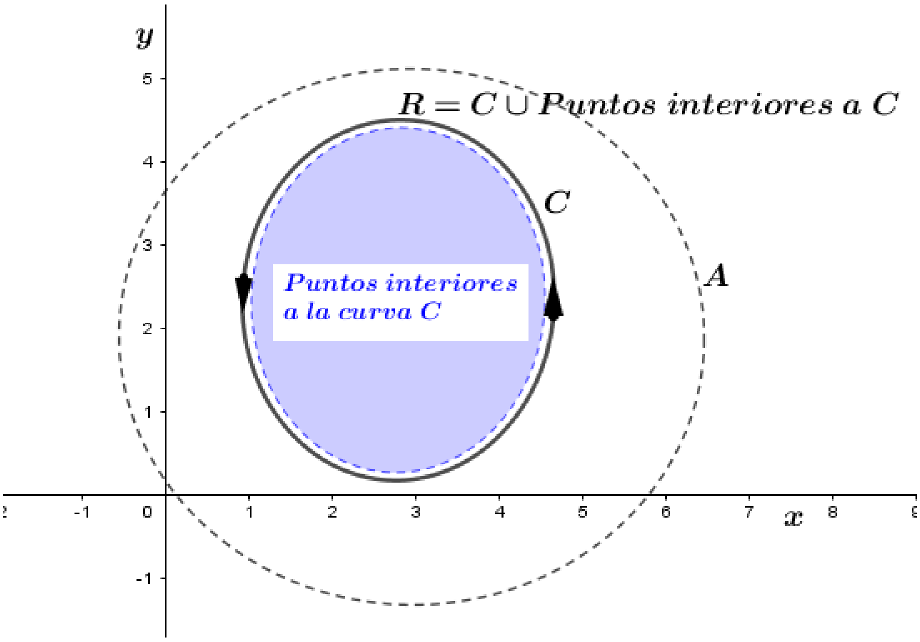
$$\vec{F}(x,y) = \left(P(x,y), Q(x,y)\right)$$

A es un conjunto abierto y conexo y $\vec{F} \in C^1$.

Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada contenida en A, de manera que los puntos interiores a $\mathcal{C}$ también estén contenidos en A (para el caso de A simplemente conexo), identificaremos con R al conjunto de puntos del plano formado por la curva $\mathcal{C}$ y los puntos interiores a $\mathcal{C}$. Considerando a $\mathcal{C}$ recorrida en sentido positivo (antihorario), entonces

$$\oint_{\mathcal{C}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_R \left(Q_x(x,y) - P_y(x,y)\right)\,dx\,dy$$

El símbolo $\oint$ se utiliza para resaltar que se trata de una curva cerrada o contorno



Curva $\mathcal{C}$ recorrida en sentido positivo $\mathcal{C}: C^+$

Curva $\mathcal{C}$ recorrida en sentido negativo $\mathcal{C}: C^-$

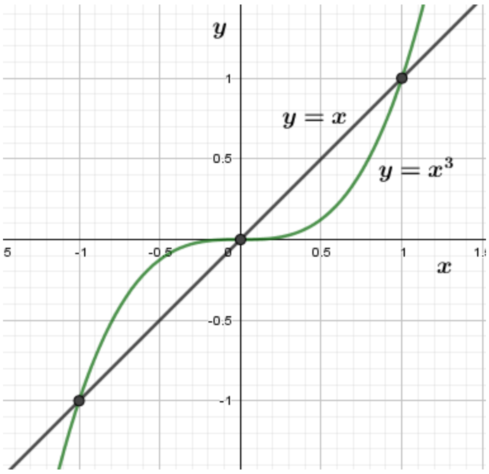
$$\oint_{\mathcal{C}^+} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_R \left(Q_x(x,y) - P_y(x,y)\right)\,dx\,dy$$

$$\oint_{C^-} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\iint_R \left(Q_x(x,y) - P_y(x,y)\right)\,dx\,dy$$

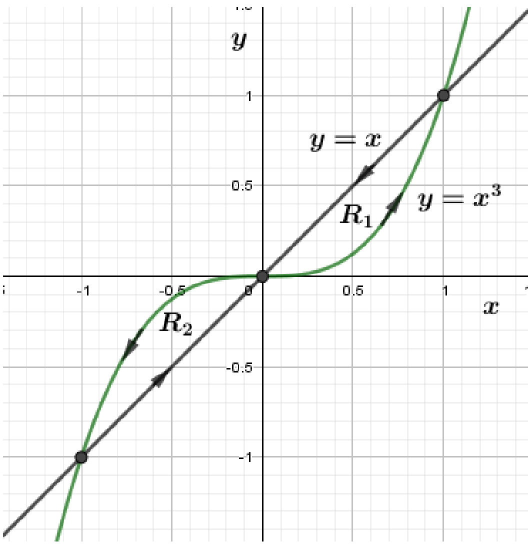
Ejercicio

Calcular la integral de línea para el campo $\vec{F}(x,y) = (x + y^2, 2x - y)$ y el recinto delimitado por $y = x$, y, $y = x^3$, para $-1 \le x \le 1$, recorrida la frontera en sentido positivo

Resolución



Se observan dos regiones de integración, se indicará para cada región, el sentido positivo de recorrido de su curva frontera



Recinto R_1 y su frontera (curva cerrada simple)

$$R_1: \begin{cases} x^3 \le y \le x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \qquad Frontera\ R_1\ (\partial R_1): \begin{cases} \vec{r}_1(t) = (t, t^3) & 0 \le t \le 1 \\ \vec{r}_2(t) = (1-t, 1-t) & 0 \le t \le 1 \quad * \end{cases}$$

* Cambio de sentido: si $\vec{r}(t)$ es una parametrización con $a \le t \le b$ de la curva $\mathcal{C}$, entonces la parametrización $\vec{r}_1(t) = \vec{r}(a+b-t)$ con $a \le t \le b$, parametriza la curva $\mathcal{C}$ en sentido contrario.

[$(1-t, 1-t) = (1,1) + t(-1,-1)$ o $r(t) = (t,t)$ sentido negativo]

Recinto R_2 y su frontera

$$R_2: \begin{cases} x \le y \le x^3 \\ -1 \le x \le 0 \end{cases} \qquad Frontera\ R_2\ (\partial R_2): \begin{cases} (+)\ \vec{r}_3(t) = (t, t) & -1 \le t \le 0 \\ (+)\ \vec{r}_4(t) = \left(\underbrace{-1-t}_{x}, \underbrace{(-1-t)^3}_{-(1+t)^3}\right) & -1 \le t \le 0 \end{cases}$$

O también:

$$(-)\ \ \vec{r}_4(t) = \left(t, \underbrace{t^3}\right) \quad -1 \le t \le 0 \ \text{ Sentido contrario al requerido para el teorema de Green}$$

De $\vec{F}(x,y) = (x + y^2, 2x - y)$, resultan

$$P_y(x,y) = 2y$$

$$Q_x(x,y) = 2$$

Integral doble sobre R_1

$$R_1: \begin{cases} x^3 \le y \le x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$\iint\limits_{R_1} \left(Q_x(x,y) - P_y(x,y)\right)\, dx\, dy = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^3}^{x} (2 - 2y)\, dy\, dx = \frac{13}{42}$$

Integral de línea sobre la frontera de R_1

($\vec{F}(x,y) = (x+y^2, 2x-y), \vec{r}_1(t) = (t, t^3), \vec{r}_2(t) = (1-t, 1-t)$, ambas parametrizaciones con $0 \le t \le 1$)

$$\oint\limits_{\mathcal{C}} P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy = \int_{t=0}^{1} \vec{F}[\vec{r}_1(t)] \cdot \vec{r}_1{}'(t)\, dt + \int_{t=0}^{1} \vec{F}[\vec{r}_2(t)] \cdot \vec{r}_2{}'(t)\, dt \overset{*}{=}$$

$$\vec{F}[\vec{r}_1(t)] = (t + t^6, 2t - t^3)$$

$$\vec{r}_1{}'(t) = (1, 3t^2)$$

$$\vec{F}[\vec{r}_1(t)] \cdot \vec{r}_1{}'(t) = (t + t^6, 2t - t^3) \cdot (1, 3t^2)$$

$$\vec{F}[\vec{r}_2(t)] = (1-t+(1-t)^2, 2(1-t)-(1-t)\,)$$
$$\vec{r}_2'(t) = (-1,-1)$$
$$\vec{F}[\vec{r}_2(t)]\cdot\vec{r}_2'(t) = (1-t+(1-t)^2, 2(1-t)-(1-t)^3)\cdot(-1,-1)$$
$$\overset{*}{=} \int_{t=0}^{1} (t+t^6, 2t-t^3)\cdot(1,3t^2)\,dt + \int_{t=0}^{1} (1-t+(1-t)^2, 2(1-t)-(1-t)^3\,)\cdot(-1,-1)\,dt$$
$$= \frac{13}{42}$$

Integral doble sobre R_2

$$R_2 : \begin{cases} x \le y \le x^3 \\ -1 \le x \le 0 \end{cases}$$

$$\iint_{R_2} \left(Q_x(x,y) - P_y(x,y)\right)\,dx\,dy = \int_{x=-1}^{0}\int_{y=x}^{x^3} (2-2y)\,dy\,dx = \frac{29}{42}$$

Integral de línea sobre la frontera de R_2

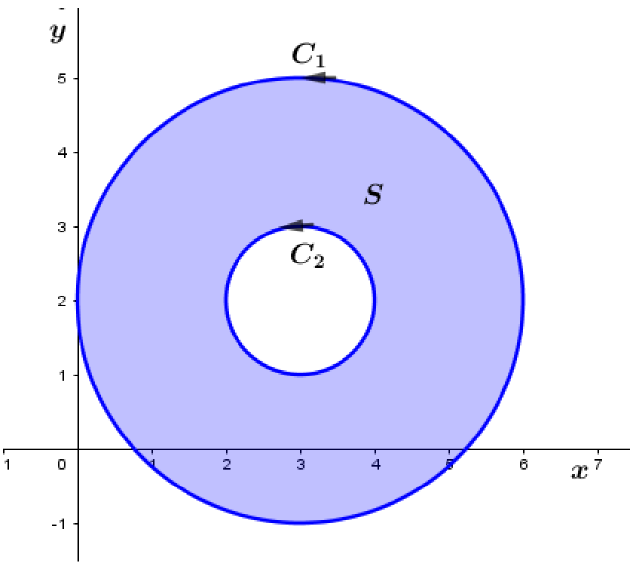
$(\vec{F}(x,y) = (x+y^2, 2x-y), \vec{r}_3(t) = (t,t), \vec{r}_4(t) = (-1-t, -(1+t)^3)$ con $-1 \le t \le 0)$

$$\oint_{C} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{t=-1}^{0} \vec{F}[\vec{r}_3(t)]\cdot\vec{r}_3'(t)\,dt + \int_{t=-1}^{0} \vec{F}[\vec{r}_4(t)]\cdot\vec{r}_4'(t)\,dt \overset{*}{=}$$
$$\vec{F}[\vec{r}_3(t)] = (t+t^2, 2t-t) = (t+t^2, t)$$
$$\vec{r}_3'(t) = (1,1)$$
$$\vec{F}[\vec{r}_4(t)] = \left(-1-t+(-(1+t)^3)^2, 2(-1-t)-(-(1+t)^3)\right)$$
$$\vec{r}_4'(t) = (-1, -3(1+t)^2)$$

$$\overset{*}{=} \int_{t=-1}^{0} (t+t^2, t)\cdot(1,1)\,dt + \int_{t=-1}^{0} (-1-t+(1+t)^6, -2-2t+(1+t)^3\,)\cdot(-1,-3(1+t)^2)\,dt$$
$$= \frac{29}{42}$$

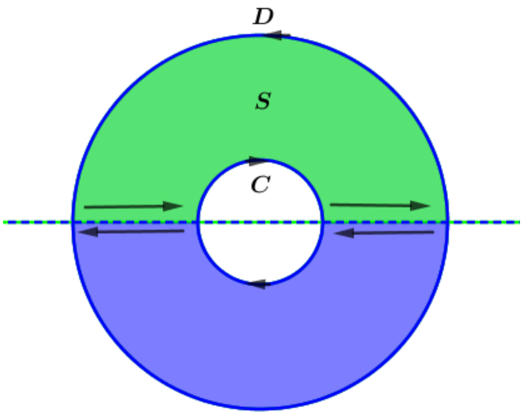
Extensión del teorema de Green a regiones múltiplemente conexas

Si $\vec{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$, es un campo de clase C^1 definido sobre un conjunto abierto que contiene a la región sombreada S, entonces vale



$$\iint\limits_{S} \left(Q_x(x,y) - P_y(x,y)\right)\, dx\, dy = \oint\limits_{C_1} P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy - \oint\limits_{C_2} P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy$$

Recorrido positivo para el teorema de Green del recinto de arriba

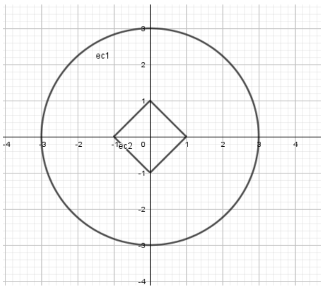


TP 8 Ej 21 c. Calcular aplicando la extensión del teorema de Green a recintos múltiplemente conexos.

$$\vec{F}(x,y) = (x+y, 2x-y)$$
$$C_1: x^2+y^2=9$$
$$C_2: |x|+|y|=1$$

$$I = \iint_S \left(Q_x(x,y) - P_y(x,y)\right)\,dx\,dy = \oint_{C_1} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy - \oint_{C_2} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

$$Q_x - P_y = 2-1 = 1$$



$$I = \iint_S \left(Q_x(x,y) - P_y(x,y)\right)\,dx\,dy = \iint_S 1\,dx\,dy = \text{Área}(S) =$$
$$= \text{Área}(x^2+y^2=9) - \text{Área}(|x|+|y|=1) = \boxed{9\pi - 2} =$$
$$= \oint_{C_1} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy - \oint_{C_2} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

Cálculo de áreas planas mediante la aplicación del teorema de Green

Sea el campo

$$\vec{F}(x,y) = (0,x) \text{ (Un campo vectorial particular!)}$$

Sea C una curva cerrada parametrizada por $\vec{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$

Aplicando el teorema de Green para esta situación resulta

$$\oint_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{t=a}^{b} \vec{F}\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \vec{r}'(t)\,dt =$$

$$= \int_{t=a}^{b} x(t)\ \underbrace{y'(t)\,dt}_{dy} \underbrace{=}_{\substack{Teorema \\ Green}} \iint_R \underbrace{1}_{Q_x - P_y}\ dx\,dy = Área(R)$$

$$y = f(x) \qquad y = y(t)$$

$$dy = f'(x)\,dx \qquad dy = y'(t)\,dt$$

$$\vec{F}(x,y) = (-y,0) \text{ Otro campo posible para el cálculo de áreas}$$

$$Q_x - P_y = 1$$

Otrocampo para el cálculo de áreas es

$$\vec{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$$

$$Q_x - P_y = 1$$

Ejemplo

Calcular el área delimitada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Recinto a calcular el área

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$$

Una parametrización de la elipse es

$$\vec{r}(t) = (\underbrace{a\cos(t)}_{x}, \underbrace{b\,\mathrm{sen}(t)}_{y}) \quad con \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Usando el campo

$$\vec{F}(x,y) = (0,x) *$$
$$\vec{r}\,'(t) = (-a\,\mathrm{sen}(t)\,, b\cos(t))$$

$$Área(R) = \iint\limits_{R} dx\,dy \overset{*}{=} \oint\limits_{C} \vec{F}\big(\vec{r}(t)\big)\cdot \vec{r}\,'(t)\,dy = \int\limits_{t=0}^{2\pi} (0, a\cos(t))\cdot(-a\,\mathrm{sen}(t)\,, b\cos(t))\,dt =$$
$$= \int\limits_{t=0}^{2\pi} ab\cos^2(t)\;dt$$

O también:

$$Área(R) = \oint\limits_{C} 0\,dx + \underbrace{x(t)}_{Q[\vec{r}]=x(t)}\;\underbrace{y'(t)\,dt}_{dy} = \int\limits_{t=0}^{2\pi} ab\cos^2(t)\;dt =$$
$$= ab\int\limits_{t=0}^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt = ab\,\pi$$

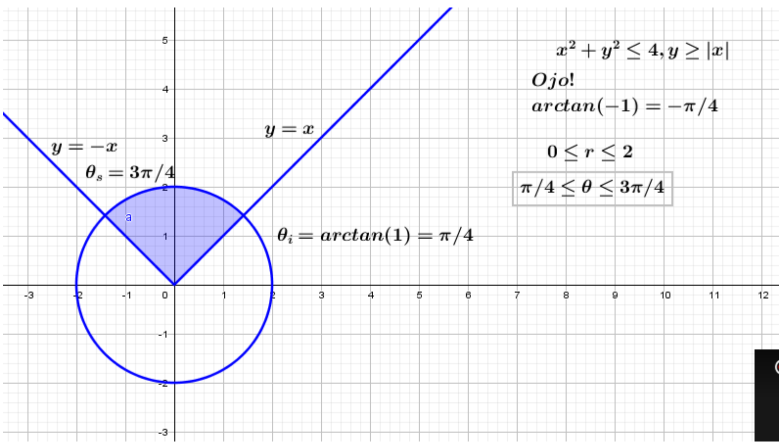
Ejercicio resuelto por teorema de Green

Dado el campo vectorial

$$\vec{F}_{(x,y)} = (x - x\,y, x^2 + y^2)$$

Calcular la integral de línea de $\vec{F}$ sobre la curva frontera del recinto delimitado por $x^2 + y^2 \leq 4,\; y \geq |x|,$ indicando el sentido de recorrido tal que la integral sea positiva.

Res: $\vec{F} \in C^1$ en $\mathbb{R}^2$, como la curva dada es cerrada y recorrida en sentido positivo, es válido aplicar el teorema de Green.



$$P_{(x,y)} = x - x\,y, \quad P_y = -x$$

$$Q_{(x,y)} = x^2 + y^2, \quad Q_x = 2x$$

$$Q_x - P_y = 2\,x - (-x) = 3\,x$$

$$I = \int_C P_{(x,y)}\,dx + Q_{(x,y)}\,dy = \iint_R \left(Q_{\,x(x,y)} - P_{y(x,y)}\right) dx\,dy$$

con $R = \{x^2 + y^2 \leq 4, y \geq |x|\}$

En coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,sen\,\theta \end{cases} \qquad |J| = r \qquad R' = \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ \dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{3}{4}\,\pi \end{cases}$$

$$I = \iint_R 3\,x\;\;dx\,dy = \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \int_{r=0}^{2} (3\,r\,cos\,\theta)\,r\,dr\,d\theta = \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (r^3 cos\theta)\Big]_{r=0}^{2}\,d\theta =$$

$$\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (8\,cos\theta)\,d\theta = (8\,sen\,\theta)\Big]_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

Bibliografía digital MIeL, Cálculo en Varias Variables, W Mora, Cap 9, pag 412.