T P 04 Ej. 14-a

Empleando el gradiente, calcular las derivadas direccionales, y en cada caso indicar cuál es la dirección de máximo crecimiento de las funciones dadas en los puntos indicados.

$$\boldsymbol{f(x,y) = x^4 \,.\, Ln(x\,.\,y) \qquad en\ P_0 = (e\,,1)\ \ en\ la\ direcci\acute{o}n\ \vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$$

Si la función es diferenciable, como es el caso de los ítems de este ejercicio, la derivada direccional de una función en un punto dado en una determinada dirección, será:

$$\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(x_0,y_0) = \dot{f}_v(x_0,y_0) = \vec{\nabla} f(x_0,y_0) \circ \breve{v}}$$

Siendo:

$\boldsymbol{\breve{v}}$: **el vesor director, entonces** $\boldsymbol{\|\breve{v}\| = 1}$

En el caso que el vector director en el cual se quiere calcular la derivada direccional no este normalizado (no sea versor), utilizaremos la expresión indicada:

$$\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = \dot{f}_v(x_0,y_0) = \vec{\nabla} f(x_0,y_0) \circ \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}}$$

Por otra parte, como se vio en los apuntes teóricos, la dirección de máximo crecimiento de una función en un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ de estudio será:

$$\boldsymbol{\vec{u}(x_0,y_0) = \frac{\vec{\nabla} f(x_0,y_0)}{\left\|\vec{\nabla} f(x_0,y_0)\right\|}}$$

Y la de mínimo crecimiento:

$$\boldsymbol{\vec{u}(x_0,y_0) = -\frac{\vec{\nabla} f(x_0,y_0)}{\left\|\vec{\nabla} f(x_0,y_0)\right\|}}$$

Aplicado a este ejercicio:

Verificamos sí el vector director dado es de norma 1, entonces:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{5}{5}} = 1$$

Por lo tanto, emplearemos la expresión:

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(x_0, y_0) = \dot{f}_v(x_0, y_0) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \circ \breve{v}$$

Ahora bien:

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4. x^3. Ln(x. y) + x^4. \frac{1}{x. y}. y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4. x^3. Ln(x. y) + x^3 \rightarrow$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x^3. [4. Ln(x. y) + 1]}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(e, 1) = e^3. [4. Ln(e. 1) + 1] \rightarrow$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}(e, 1) = 5. e^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cancel{0. Ln(x. y)} + x^4. \frac{1}{\cancel{x}. y}. \cancel{x} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^4}{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(e, 1) = \frac{e^4}{1} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y}(e, 1) = e^4}$$

Finalmente:

$$\vec{\nabla} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{e},\mathbf{1}) = \left(\frac{\boldsymbol{\partial f}}{\boldsymbol{\partial x}}(\boldsymbol{e},\mathbf{1}), \frac{\boldsymbol{\partial f}}{\boldsymbol{\partial y}}(\boldsymbol{e},\mathbf{1})\right) = (\mathbf{5}.\boldsymbol{e}^{\mathbf{3}}\ , \boldsymbol{e}^{\mathbf{4}})$$

Entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(e,1) = \dot{f}_v(e,1) = \vec{\nabla} f(e,1) \circ \breve{v} = (5.e^3, e^4) \circ \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(e,1) = \dot{f}_v(e,1) = \frac{5.e^3}{\sqrt{5}} + \frac{2.e^4}{\sqrt{5}} = \frac{e^3.(5+2.e)}{\sqrt{5}} \quad \rightarrow$$

$$\frac{\boldsymbol{\partial f}}{\boldsymbol{\partial \breve{v}}}(\boldsymbol{e},\mathbf{1}) = \dot{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{e},\mathbf{1}) = \frac{\boldsymbol{e}^{\mathbf{3}}.(\mathbf{5}+\mathbf{2}.\boldsymbol{e})}{\sqrt{\mathbf{5}}}$$

<u>La dirección de máximo crecimiento será:</u>

$$\vec{u}(x_0,y_0) = \frac{\vec{\nabla} f(x_0,y_0)}{\left\|\vec{\nabla} f(x_0,y_0)\right\|} \quad \rightarrow$$

$$\vec{u}(e,1) = \frac{\vec{\nabla} f(e,1)}{\left\|\vec{\nabla} f(e,1)\right\|} = \frac{(5.e^3,e^4)}{\sqrt{(5.e^3)^2+(e^4)^2}} = \frac{(5.e^3,e^4)}{\sqrt{25.e^6+e^8}} = \frac{(5.e^3,e^4)}{\sqrt{e^6.(25+e^2)}}$$

$$\vec{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{e},\mathbf{1}) = \frac{(\mathbf{5}.\boldsymbol{e}^{\mathbf{3}}\ ;\ \boldsymbol{e}^{\mathbf{4}})}{\boldsymbol{e}^{3}.\sqrt[2]{\mathbf{25}+\boldsymbol{e}^{\mathbf{2}}}}$$