UNIDAD 3. TRANSFORMACIONES LINEALES.

definición $(\mathbb{V}, +, \mathbb{R}, \cdot)$

$(\mathbb{W}, +, \mathbb{R}, \cdot)$

$f: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es función

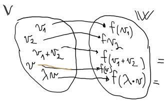
$\forall v \in \mathbb{V}, \exists f(v) \in \mathbb{W}$

$f(v) = w_1 \wedge f(v) = w_2 \Rightarrow w_1 = w_2$

f es Transf. lineal $\Leftrightarrow$

a) $f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2)$

b) $f(\lambda v) = \lambda . f(v)$



ejemplo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \;/\; f(x, y) = (x, x+y, y)$

$\underbrace{f(3, -1)}_{\in \mathbb{R}^2} = \underbrace{(3, 2, -1)}_{\in \mathbb{R}^3}$; $f(0,0) = (0, 0, 0)$

propiedades

1) Si f es t.l. entonces $\Rightarrow$ $f(0_V) = 0_W$ dem) $f(0_V) = f(0 . v) = 0 . f(v) = 0_W$

2) Si f es t.l entonces $\Rightarrow$ $f(-v) = -f(v)$ dem) $f(-v) = f(-1 . v) = -1 . f(v) = -f(v)$

3) Si f es t.l. se preservan las combinaciones lineales

$$f \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} f \alpha_i v_i$$

Clasificación

1) Si f transf. lineal es inyectiva es MONOMORFISMO, elementos distintos imágenes distintas

2) " " " " sobreyectiva es EPIMORFISMO las imágenes completan el conj. de llegada

3 " " " " " biyectiva es ISOMORFISMO $\therefore$ f es MONOMORFISMO y EPIMORFISMO.

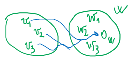
TRANSFORMACIONES LINEALES ESPECIALES

1) TL. IDENTIDAD

$f: V \to V \;/\; f(v) = v$

2) T.L. NULA

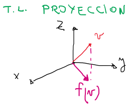
$f: V \to W \;/\; f(v) = 0_W$



f no es MONOMOR.

f no es epimorfismo

3) T.L. PROYECCION EN $\mathbb{R}^3$ sobre el plano x y



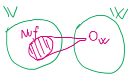
$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \;/\; f(x, y, z) = (x, y, 0)$

CONJUNTOS ESPECIALES

NÚCLEO DE UNA T.L.

$f: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$; 1) $Nu(f) \subset \mathbb{V}$

$Nu(f) = \{ v \in \mathbb{V} \;/\; f(v) = 0_W \}$



2) $Nu(f) \neq 0$ porque $0_V \in Nu(f)$

3) $v_1 \in Nu(f) \wedge v_2 \in Nuf \Rightarrow v_1 + v_2 \in Nuf$

dem) $v_1 \in Nu(f) \wedge v_2 \in Nuf \Rightarrow f(v_1) = 0_W \wedge f(v_2) = 0_W$

$\Rightarrow f(v_1) + f(v_2) = 0_W + 0_W$

$\Rightarrow f(v_1 + v_2) = 0_W \;\therefore\; v_1 + v_2 \in Nu(f)$

4) $v \in Nu(f) \wedge \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda . v \in Nuf$

dem) $v \in Nu(f) \wedge \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow f(v) = 0_W$

$\lambda . f(v) = \lambda . 0_W$

$f(\lambda v) = 0_W \;\therefore\; \lambda v \in Nu(f)$

CONCLUSIÓN: El $Nu(f)$ es subespacio de $\mathbb{V}$

IMAGEN DE LA T.L

$Im(f) = \{ w \in \mathbb{W} \;/\; \exists v \in \mathbb{V} \wedge f(v) = w \}$

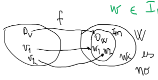
$Im(f)$ es un subespacio de $\mathbb{W}$

$\to$ $Im(f) \subset \mathbb{W}$ por def.

$Im(f) \neq \emptyset$ $0_W \in Im(f)$, $f(0_V) = 0_W$

$w_1 \in Im(f) \wedge w_2 \in Im(f) \Rightarrow w_1 + w_2 \in Im(f)$

$w \in Im(f) \wedge \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda w \in Im(f)$



es monomorf.

no epimorfismo

$\therefore$ f será epimorfismo cuando $Im(f) = \mathbb{W}$