ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA I
MÓDULO 4 – ESPACIOS VECTORIALES – SEGUNDA CLASE

Lee las páginas 237 a 244 de Apunte III TEJIENDO EL ÁLGEBRA LINEAL.

Realiza todos los ejercicios y actividades propuestas en esas páginas.

En este apunte encontrarás otras explicaciones y ejemplos correspondientes a estos temas.

También en el archivo llamado M4.SEGUNDA CLASE.EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA están propuestos otros ejercicios y actividades.

Videos de la cátedra que pueden ayudarte con estos temas:

1 Subespacio de matrices. Escribir el sistema de ecuaciones
https://www.youtube.com/watch?v=2zc8AAs5UM8

2. Independencia lineal por definición.
https://www.youtube.com/watch?v=oL7AUkke10E

COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES (C.L.)

Dado un espacio vectorial V y un subconjunto finito $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$, se dice que el vector v es combinación lineal de los vectores $\{v_1, ..., v_n\}$ si existen escalares $k_1, k_2 ...., k_n \in \mathbb{R}$ tales que $v = k_1.v_1 + k_2.v_2 + ... + k_n v_n$

Ejemplo 1

Dados $v_1 = (2,0)$ y $v_2 = (0,1)$ de R^2, el vector $(2,3)$ resulta ser combinación lineal de v_1 y v_2 pues

$$(2,3) = 1(2,0) + 3(0,1).$$

Más aún, todo vector de R^2 es combinación lineal de v_1y v_2.

$$(x, y) = \frac{x}{2}(2,0) + y(0,1)$$

Es posible construir un subconjunto S de V formado por todos los vectores v de V que pueden escribirse de la forma $v = k_1.v_1 + ... + k_n v_n$ para ciertos escalares.

Dicho conjunto siempre es un subespacio de V, la prueba es similar a lo desarrollado en el ejemplo 14, de la clase anterior, se dice que S es el subespacio generado por $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ y también que $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es un conjunto de generadores de V.

Se simboliza S = $< v_1, v_2, ..., v_n >$ o S = gen $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ o S = $\overline{\{v_1, v_2, ..., v_n\}}$

Ejemplo 2

Sean $v_1, v_2, v \in R^2$: $v_1 = (1,2)$, $v_2 = (2,4)$, $v = (-5,-10)$.

El vector v es combinación lineal de v_1 y v_2 ya que: $(-5,-10) = -1(1,2) - 2(2,4)$.

Pero, por ejemplo, el vector $(2,2)$ no es combinación lineal de v_1 y v_2;

Tratemos de determinar si existen s y $t \in R$ tales que $(2,2) = s(1,2) + t(2,4)$.

Entonces obtenemos el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 2 = s + 2t \\ 2 = 2s + 4t \end{cases}$

Multiplicando la primera ecuación por 2 y restándola a la segunda, se obtiene: 2 = 0

Esto significa que el sistema es incompatible, no existen los escalares s y t buscados, entonces (2;2) no es combinación lineal de v_1 y v_2 .

Es posible que un vector v sea combinación lineal de $\{v_1, ..., v_n\}$ de varias formas distintas, en el sentido de que los escalares $k_1, k_2, ..., k_n$ no estén unívocamente determinados; en el ejemplo 2, el vector (-5; 10) también puede escribirse como $(-5,-10) = -5(1,2) + 0(2,4)$; en realidad, en este ejemplo hay infinitas formas de escribir a (-5,-10) como combinación lineal de (1,2) y (2,4); veamos cómo es esto.

Si $(-5,-10) = s(1,2) + t(2,4)$ entonces

$$\begin{cases} -5 = s + 2t \\ -10 = 2s + 4t \end{cases}$$

Si a la segunda ecuación le restamos el doble de la primera obtenemos:

$0 = 0$

Esta identidad nos indica que ambas ecuaciones son equivalentes, es un sistema SCI, con lo cual podemos eliminar una y el sistema se reduce a:

$-5 = s + 2t$

La última ecuación tiene infinitas soluciones, y para cada una una de ellas le corresponde una expresión de v como combinación lineal de v_1 y v_2.

INDEPENDENCIA Y DEPENDENCIA LINEAL (L.I. o L.D.)

La diferencia esencial entre el ejemplo 1 y el ejemplo 2 es que en el segundo caso los vectores v_1 y v_2 son múltiplos entre sí, con lo cual ambos están ubicados sobre la misma recta que pasa por el origen y por lo tanto uno de ellos "sobra" a la hora de buscar combinaciones lineales de ellos, o sea que los vectores que son combinaciones lineales de v_1 y v_2 son los mismos que los que son combinación lineal de v_1 (o de v_2).

La idea es que si, dado el conjunto de vectores $\{v_1,...,v_n\}$, alguno de ellos, supongamos el v_1, es combinación de los restantes, entonces los vectores que sean combinación lineal de los $\{v_1,...,v_n\}$ son los mismos que los que son combinación lineal de los vectores $\{v_2,...,v_n\}$.
En cambio, en el ejemplo 1, v_1 y v_2, no son múltiplos entre sí, con lo cual el conjunto de combinaciones lineales de v_1 y v_2 será "más grande" que el de cada uno de ellos por separado. Todo esto motiva la siguiente definición.

Un conjunto de vectores $\{v_2,...,v_n\}$ es **linealmente independiente** si y sólo si la única combinación lineal entre ellos cuyo resultado es el vector nulo, es la que tiene todos los escalares iguales a cero

$$\{v_2,...,v_n\} \text{ es } \mathbf{LI} \quad \Leftrightarrow \quad \left(k_1.v_1 + k_2.v_2 + ... + k_n v_n = \vec{0} \ \Rightarrow \forall i:\ k_i = 0 \right)$$

No sea posible escribir al vector nulo como combinación lineal de los $\{v_1,...,v_n\}$ sin que todos los escalares sean 0, equivale a decir que la única combinación lineal de los $\{v_1,...,v_n\}$ que da el vector nulo es aquélla donde todos los escalares son 0:

Ejemplo 3
Sean ***i***=(1,0,0), ***j***=(0,1,0), ***k***=(0,0,1). Verifiquemos que estos vectores son linealmente independientes:
$(0,0,0) = s_1.(1,0,0) + s_2(0,1,0) + s_3(0,0,1)$ entonces
$(0,0,0) = (s_1, s_2, s_3)$ de donde
$s_1 = s_2 = s_3 = 0$

La negación de la definición independencia lineal nos lleva a la definición de dependencia lineal

Un conjunto de vectores $\{v_2,...,v_n\}$ es **linealmente dependiente** si y sólo si existe una combinación lineal entre ellos cuyo resultado es el vector nulo, y tiene alguno de los escalares distinto de cero.

$$\{v_2,...,v_n\} \text{ es } \mathbf{LD} \quad \Leftrightarrow \quad \left(k_1.v_1 + k_2.v_2 + ... + k_n v_n = \vec{0} \ \wedge \exists i /\ k_i \neq 0 \right)$$

Podemos escribir al vector nulo como combinación lineal de los $\{v_1,...,v_n\}$ sin que todos los escalares involucrados sean 0, al menos alguno puede ser distinto de 0.

Ejemplo 4
Verificar que los vectores: $v_1 = (1,2,0,1)$, $v_2 = (0,1,1,1)$, $v_3 = (1,0,0,1)$ son linealmente independientes.
Formamos una combinación lineal igualada al vector nulo

$(0,0,0,0)=a(1,2,0,1)+b(0,1,1,1)+c(1,0,0,1)=(a+c\ ,\ 2a+b,\ b\ ,\ a+b+c)$

De la última identidad se obtiene el sistema

$$\begin{cases} a+c=0, \\ 2a+b=0 \\ b=0 \\ a+b+c=0 \end{cases}$$

Ahora resolvemos el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\begin{cases} a+c=0, \\ b-2c=0 \\ 2c=0 \end{cases}$ el sistema es SCD entonces tiene única solución y es homogéneo.

Las únicas soluciones son $a=0,\ \ b=0,\ \ c=0$

Los vectores son linealmente independientes.

Siempre que analizamos dependencia o independencia lineal resulta un sistema homogéneo, recordemos que siempre es compatible.
Si es SCD la única solución es la que tiene todos los escalares iguales a cero y entonces los vectores son L.I.
Si es SCI tiene infinitas soluciones, además de la posibilidad de que los escalares valgan cero, hay otras, los vectores son L.D.

Ejemplo 5

Verificar que los vectores $v_1=(1,2,0),\ \ v_2=(0,1,1),\ \ v_3=(1,4,2)$ son linealmente dependientes.

Formamos una combinación lineal igualada a cero

$(0,0,0)=a(1,2,0)+b(0,1,1)+c(1,4,2)=(a+c,2a+b+4c,b+2c)$

De la última identidad se obtiene el sistema

$$\begin{cases} a+c=0, \\ 2a+b+4c=0 \\ b+2c=0 \end{cases}$$

Resolvemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema resultante es compatible indeterminado, infinitas soluciones, entonces los vectores son linealmente dependientes.

Además de la posibilidad de que todos los escalares sean ceros, existen otras.

Ejemplo 6
Analizar si los vectores (2,3,1), (1,2,3) y (0,1,1) son linealmente independientes. Lo pensaremos de otra forma.

En este caso, como se trata de 3 vectores de R^3, el hecho de que sean independientes equivale al hecho de que no sean coplanares, es decir, que los tres vectores no pertenezcan a un mismo plano.
Esto puede verificarse con ayuda del producto mixto que se vio en el capítulo dedicado a vectores geométricos.
El módulo del producto mixto nos da el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores, por lo cual, si el resultado es 0, significa que el volumen es 0 y por lo tanto los vectores serán coplanares y linealmente dependientes; caso contrario, serán independientes.
Calculemos entonces, por medio de un determinante, el producto mixto:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2.(2-3) - 1(3-1) = 2.(-1) - 1.2 = -4 \neq 0$$

Por lo tanto los vectores son independientes.
Para resolver este problema dado que tratamos con vectores de R^3 hemos utilizado argumentos de tipo geométrico. El problema también se puede resolver con las técnicas algebraicas como se muestra en otros ejemplos.

PROPIEDADES DE LA DEPENDENCIA O INDEPENDENCIA LINEAL

1) Todo conjunto de vectores al que pertenece el vector nulo es L.D.

Pensemos que si el conjunto es $\{v_1, v_2, .., \vec{0}, .., v_n\}$ y armamos la combinación lineal

$k_1.v_1 + k_2.v_2 + ... + k_i.\vec{0} + ... + k_n v_n = \vec{0}$ el escalar k_i que multiplica al vector nulo puede ser cualquier número que al multiplicarlo por el vector nulo da por resultado vector nulo (Propiedad a) de E.V.) entonces puede existir $\exists i / k_i \neq 0$ entonces el conjunto de vectores es L.D

2) Un conjunto unitario formado por un único vector no nulo es L.I.
$\{v_1\}$ con $v_1 \neq \vec{0}$ armamos la combinación lineal que da el vector nulo
$k_1 \overrightarrow{v_1} = \vec{0}$ de acuerdo a la propiedad d) de E.V. como $\overrightarrow{v_1} \neq \vec{0}$ entonces $k_1 = 0$ entonces el conjunto es L.I.

3) Dado un espacio vectorial V y un subconjunto finito de vectores $\{v_1, ..., v_n\}$, son L.D. si existe i, $1 \leq i \leq n$ tal que v_i es combinación lineal de los v_j restantes, para $j \neq i$.
Esto significa que si los vectores son linealmente dependientes, entonces podemos escribir para algún i con $1 \leq i \leq n$ tal que:

$$v_i = s_1 v_1 + s_2 v_2 + ... + s_n v_n \qquad s_i \in R.$$

Por definición, si los vectores son LD , se cumple

$\{v_1, v_{2,} ..., v_i, ..., v_n\}$ es **LD** $\Leftrightarrow$ $k_1.v_1 + k_2.v_2 + .. + k_i.v_i + ... + k_n v_n = \vec{0} \ \wedge \ \exists i / \ k_i \neq 0$

Hay algún escalar distinto de cero, supongamos k_i

Podemos despejar el término que tiene v_i

$\Rightarrow \quad k_i.v_i = \vec{0} - k_1.v_1 - k_2.v_2 - ... - k_n v_n \ \wedge \ k_i \neq 0$

Como $k_i \neq 0$ existe su inverso $\dfrac{1}{k_i}$, multiplicamos ambos miembros para despejar $\vec{v_i}$ y resulta :

$$\Rightarrow \quad v_i = -\frac{k_1}{k_i}.v_1 - \frac{k_2}{k_i}.v_2 - ... - \frac{k_n}{k_i}v_n \qquad k_i \neq 0$$

Llamando s a los cocientes $s_j = -\dfrac{k_j}{k_i}$, $k_i \neq 0$

Resulta la tesis $v_i = s_1 v_1 + s_2 v_2 + ... + s_n v_n \quad s_i \in$ Uno de los vectores es C.L. de los restantes

Ejemplo 7

Sean los vectores de R^3 $a = (1,2,1)$, $b = (2,-1,0)$ y $c = (4,3,2)$. Estos vectores son linealmente dependientes pues $2a + b - c = (0,0,0)$

4) La proposición contraria a la 3) Un conjunto de vectores es L.I. si y solo si ninguno de ellos es combinación lineal de los restantes.

5) Todo conjunto de vectores que incluya un subconjunto L.D. es L.D.

Otros Ejemplos:

Dados los vectores de R^4 u=(2,-1,3,2), v=(1,-1,2,1) y w=(7,-5,m,7) , hallar los valores de m para los cuales {u,v,w} forma un conjunto de vectores linealmente dependiente .

Expresamos al vector nulo como combinación lineal de los vectores u,v y w:

$$(0,0,0,0) = s_1(2,-1,3,2,) + s_2(1,-1,2,1) + s_3(7,-5,m,7)$$

Entonces
$$\begin{cases} 0 = 2s_1 + s_2 + 7s_3 \\ 0 = -s_1 - s_2 - 5s_3 \\ 0 = 3s_1 + 2s_2 + xs_3 \\ 0 = 2s_1 + s_2 + 7s_3 \end{cases}$$

Debemos resolver el sistema lineal obtenido, que por ser homogéneo es compatible; si fuera determinado, tendría una única solución y por ser homogéneo ésta debería ser la solución nula, o sea, todos los escalares serían cero y entonces nuestros vectores serían independientes; por lo tanto, debemos exigir que el sistema sea compatible indeterminado. Apliquemos Gauss:

$$\begin{array}{r} \\ F_2´=F_1+2F_2 \\ F_3´=3F_1-2F_3 \\ F_4´=F_4-F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 7 & 0 \\ -1 & -1 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & m & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{r} \\ \\ F_3´=F_3-F_2 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 21-2m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 24-2m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Para que el sistema sea compatible indeterminado tiene que ser

24 – 2m=0 de donde resulta $m=12$.

Ejemplo

Analizar si los vectores (2,1),(3,2) y (-1,3) son linealmente independientes

Planteamos la igualdad

$$(0,0)=s_1(2,1)+s_2(3,2)+s_3(-1,3)$$

Luego

$$\begin{aligned} 0&=2s_1+3s_2-s_3 \\ 0&=s_1+2s_2+3s_3 \end{aligned}$$

Aplicando Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \quad F_2´=F_1-2F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema resulta ser indeterminado, por lo cual los vectores son linealmente dependientes. Sin embargo, esto podía deducirse más fácilmente analizando que, como se trata de tres vectores de R^2, el sistema resultante debe tener tres incógnitas y dos ecuaciones, y por ser homogéneo, tiene que ser compatible, pero no puede ser determinado si tiene más incógnitas que ecuaciones, por lo tanto será indeterminado y por lo tanto los vectores involucrados serán dependientes.

De esta idea se deduce la siguiente.

NO DEJES DE LEER EN “TEJIENDO EL ÁLGEBRA LINEAL” LA FORMA CORTA PARA DETERMINAR SI UN CONJUNTO DE VECTORES ES L.I. o L.D.

CONJUNTO DE GENERADORES

En el ejemplo 1 de combinación lineal vimos que todo vector (x,y) es expresable como combinación lineal de los vectores (2,0) y (0,1); por otro lado, en el ejemplo 2 se ve que eso no sucede con los vectores (1,2) y (2,4); en realidad, los vectores que pueden expresarse como combinación lineal de éstos son aquellos que están en la recta a la que pertenecen ambos. En el primer caso, decimos que los vectores generan al espacio vectorial R^2, o bien, que son un sistema o conjunto de generadores de R^2; en el segundo caso, decimos que generan a la recta de ecuación (x,y) = t(1,2).

Definición
Dado un conjunto de vectores $\{v_1,...,v_n\}$ en un espacio vectorial V, diremos que generan a V si todo vector de V es combinación lineal de los vectores $\{v_1,...,v_n\}$. Es decir, si existen escalares $k_1,k_2....,k_n \in \mathbb{R}$ tales que para todo $v \in V$ se verifica $v = k_1.v_1 + k_2.v_2 + ... + k_n v_n$

Si los vectores $\{v_1,...,v_n\}$ pertenecen a un subespacio S de V de tal manera que todo vector de S es combinación lineal de $\{v_1,...,v_n\}$, entonces decimos que este conjunto de vectores genera el subespacio S, es un conjunto de generadores de S.

Se simboliza S = $< v_1, v_2,....,v_n >$ o S = gen $\{v_1, v_2,....,v_n\}$ o S = $\overline{\{v_1, v_2,....,v_n\}}$

Ejemplo
El espacio vectorial R^2 está generado por los vectores (1,0) y (0,1); sin embargo, también puede estar generado por otros subconjuntos de vectores; por ejemplo, verifiquemos que {(1,2), (2,3)} constituye un sistema de generadores de R^2.
Planteamos

$$(x, y) = s(1,2) + t(2,3)$$

de donde resulta:

$$\begin{cases} x = s + 2t \\ y = 2s + 3t \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 2 & 3 & y \end{array}\right) F_2{}' = 2F_1 - F_2$$

En términos de matrices:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 2x-y \end{array}\right)$$

Este sistema claramente es compatible para todo valor de x y de y , de donde para todo vector (x,y) se puede hallar s,t tal que se satisfaga la igualdad original, con lo cual los vectores (1,2) y (2,3) forman un sistema de generadores de R^2.

En realidad, cualquier par de vectores de R^2 linealmente independiente será un conjunto de generadores de R^2; cada vector por separado genera una recta y como los vectores son linealmente independientes, entonces no son múltiplos y las rectas tendrán distinta dirección, con lo cual cualquier vector de R^2 se puede ver como suma de un vector de cada recta, o lo que es lo mismo, como combinación lineal de los vectores originales.

Ejemplo

El conjunto de vectores $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ (versores canónicos) forma un sistema de generadores de R^3, pues podemos escribir a todo vector (x,y,z) de R^3 en la forma $(x,y,z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

Ejemplo

Los vectores (1,2,-1),(2,1,0) y (3,1,1) son un sistema de generadores de R^3:

Para demostrarlo, planteamos

$(x,y,z) = s(1,2-1) + t(2,1,0) + u(3,1,1)$

o

$$\begin{cases} x = s + 2t + 3u \\ y = 2s + t + u \\ z = -s + u \end{cases}$$

Resolviendo:

$$\begin{array}{l} F_2 = 2F_1 - F_2 \\ F_3 = F_1 + F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 2 & 1 & 1 & y \\ -1 & 0 & 1 & z \end{array}\right)$$

$$F_3 = 2F_2 - 3F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 3 & 5 & 2x-y \\ 0 & 2 & 4 & x+z \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 3 & 5 & 2x-y \\ 0 & 0 & -2 & x-2y-3z \end{array}\right)$$

El sistema es compatible para todo vector (x,y,z) de R^3, con lo cual los vectores dados generan R^3. Verifique que los vectores son linealmente independientes.

Ejemplo

Demostrar que los vectores $(0,1,2)$, $(1,0,1)$,$(0,0,1)$, $(1,1,1)$ son generadores de R^3 .

Hay que ver que cualquier vector de R^3 se puede expresar como combinación lineal de estos vectores. Es decir, tenemos que plantear

$(x, y, z) = a(0,1,2) + b(1,0,1) + c(0,0,1) + d(1,1,1)$.

Igualando componente a componente resulta el sistema:

$$\begin{cases} b + d = x \\ a + d = y \\ 2a + b + c + d = z \end{cases}$$

Si los vectores son generadores el sistema tiene que tener solución para todo x, y, z

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 & 1 & y \\ 2 & 1 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x \\ 2 & 1 & 1 & 1 & z \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & -1 & z-2y \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & z-2y-x \end{array}\right)$$

Entonces

Rango de la matriz del sistema = 3

Rango de la matriz ampliada = 3

El sistema resulta compatible para cualquier (x, y, z). Verifique que los vectores son linealmente dependientes.

Hemos planteado:

1) El conjunto de soluciones de un sistema lineal y homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas es un subespacio de R^n.

2) Sea V un espacio vectorial real, y $v_1, v_2, ...v_n$ elementos de V; el conjunto W constituido por todas las combinaciones lineales de $v_1, v_2, ...v_n$, es un subespacio de V.

W es el subespacio generado por $v_1, v_2, ...v_n$. El conjunto $\{v_1, v_2, ...v_n\}$ se denomina **sistema de generadores** de W y se denota: W=$<v_1, v_2, ...v_n>$

Hemos encontrado dos maneras de caracterizar un subespacio:

i) Dando un sistema de ecuaciones lineales homogéneas, cuyo conjunto solución es el **subespacio** dado.
ii) Dando un **sistema de generadores** del mismo.

Se plantean entonces dos problemas:

a) Dado el sistema lineal homogéneo, hallar un sistema de generadores del subespacio.
b) Dado un sistema de generadores, obtener un sistema lineal homogéneo que sea satisfecho por los elementos del subespacio y sólo por ellos.

a) Ejemplo

Sea $V = R^3$ y $S = \{(x, y, z) / z = x + y\}$ que es claramente un subespacio de R^3, pues se trata de un plano que contiene al origen. Tratemos de hallar un conjunto de generadores de S.

Si un vector (x, y, z) pertenece a S, entonces debe satisfacer la ecuación:

$z = x + y$

Entonces los vectores que pertenezcan a S serán de la forma

$(x, y, x+y) = (x,0,x) + (0,y,y) \ = x(1,0,1) + y(0,1,1)$

de donde deducimos que {(1,0,1);(0,1,1)} es un sistema de generadores de S

b) Ejemplo

Encontrar las ecuaciones del subespacuo de R^3 generado por { (2,4,1) ; (1,2,-2) }

Planteamos:

$(x, y, z) = s(2,4,1) + t(1,2,-2)$

$$\begin{cases} x = 2s + t \\ y = 4s + 2t \\ z = s - 2t \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} F_2 = 2F_1 - F_2 \\ F_3 = F_1 - 2F_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 4 & 2 & y \\ 1 & -2 & z \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} F_2 = F_3 \\ F_3 = F_2 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 0 & 0 & 2x - y \\ 0 & 5 & x - 2z \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & x \\ 0 & 5 & x - 2z \\ 0 & 0 & 2x - y \end{array}\right)$$

Dado que el sistema es incompatible para todo vector con 2x – y $\neq 0$ los vectores no generan R^3. Sin embargo, estos vectores siempre generan un subespacio, a saber, el subespacio de ecuación $2x - y = 0$.

Ejemplo

Hallar las ecuaciones del subespacio de R^4 generado por los vectores (3,-1,2,0) y (1,2,1,-1)

Primero, procedemos a escribir una combinación lineal genérica de estos vectores y luego intentaremos ver cual es el sistema de ecuaciones que satisfacen estos vectores.

$(x, y, z, w) = s(3,-1,2,0) + t(1,2,1,-1)$

$$\begin{cases} x = 3s + t \\ y = -s + 2t \\ z = 2s + t \\ w = -t \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} F_2 = F_1 + 3F_2 \\ F_3 = 2F_1 - 3F_3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & x \\ -1 & 2 & y \\ 2 & 1 & z \\ 0 & -1 & w \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} F_3 = F_2 + 7F_3 \\ F_4 = F_2 + 7F_4 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & x \\ 0 & 7 & x+3y \\ 0 & -1 & 2x-3z \\ 0 & -1 & w \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & x \\ 0 & 7 & x+3y \\ 0 & 0 & 15x+3y-21z \\ 0 & 0 & x+3y+7w \end{array} \right)$$

Los vectores del subespacio dado son aquellos (*x*,*y*,*z*,*w*) para los cuales el sistema tiene solución *s*, t. De aquí deducimos que debe cumplirse que:

$15x + 3y - 21z = 0$

$x + 3y + 7w = 0$

y éstas son las ecuaciones que determinan el subespacio generado por los vectores (3,-1,2,0) y (1,2,1,-1).