Resolución TP4:

Ejercicio 23

Determinar en qué dirección la derivada direccional es igual a cero para $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2+y^2}$

Herramientas:

- Si $f(x,y)$ es Diferenciable en su Dominio vale la formula de derivada direccional $f_{\vec{v}}(x,y) = \frac{\nabla f(x,y)\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$.
- Se pide $f_{\vec{v}}(x,y) = \frac{\nabla f(x,y)\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$=0.

Resolviendo:

$Dom(f) = \{x^2 + \ y^2 \ \neq 0\} = R^2 - \{(0,0)\}$

$$usando \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f_x = \frac{2x(x^2+y^2) - (x^2 - \ y^2)2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_x = \frac{2x(x^2+y^2 - x^2 + \ y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_x = \frac{2x(\ \ 2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_x = \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{-2y(x^2+y^2) - (x^2 - \ y^2)2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{-2y(x^2+y^2 + x^2 - \ y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{-2y(\ \ 2x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$Dom(f_x) = Dom\left(f_y\right) = R^2 - \{(0,0)\} => f(x,y) es\ C^1 en\ R^2 - \{(0,0)\}$$

Por lo que es diferenciable y vale $\frac{\nabla f(x,y)\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Siempre que $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$

$$f_x a + f_y b = 0$$
$$b = -\frac{f_x}{f_y}\ a$$

Sobre $\frac{f_x}{f_y} = \frac{\frac{4xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}}{\frac{-4yx^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}} = \frac{4xy^2}{-4yx^2} = -\frac{y}{x}$

$$b = \frac{y}{x}\ a$$
$$v = \pm\ \left(a, \frac{y}{x}\ a\right) = \pm\ \frac{a}{x}(x, y)$$

Como lo que nos interesa solo es la direccion

$$v = \pm\ (x, y)$$

En fin, esto se normaliza.

En resumen:

$f_{\vec{v}}(x, y) = 0$ para $\begin{cases} v1 = (x, y) \\ v2 = (-x, -y) \end{cases}$

Probemos en (1,1) $\begin{cases} v1 = (1,1) \\ v2 = (1,1) \end{cases}$

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-4yx^2}{(x^2 + y^2)^2}\right)$$
$$\nabla f(1,1) = \left(\frac{4 * 1 * (1)^2}{((1)^2 + (1)^2)^2}, \frac{-4(1)(1)^2}{((1)^2 + (1)^2)^2}\right) = (2, -2)$$

Para (1,1) $\begin{cases} v1 = (1,1) \\ v2 = (-1, -1) \\ \nabla f(1,1) = (2, -2) \end{cases}$

$$\begin{cases} v1 = (1,1) ==> f_{\vec{v}} = \dfrac{(2, -2) * (1,1)}{\sqrt{2}} = 0 \\ v2 = (-1, -1) ==> f_{\vec{v}} = \dfrac{(2, -2) * (-1, -1)}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases}$$