Álgebra y Geometría analítica II

Primer cuatrimestre de 2020

DEFINICIÓN:

Sea $(E, \langle\ ;\ \rangle)$ un espacio euclídeo con un producto interno definido. Sea S un subespacio de E tal que $B = \{v_1; v_2; \dots; v_k\}$ una base de S.

Diremos que:

B es una **base ortogonal** de S sí y sólo sí:

$$\langle v_i; v_j \rangle = 0\ \forall i \neq j\ ;\ i, j: 1 \dots k$$

B es una **base ortonormal** de S sí y sólo sí:

$$\langle v_i; v_j \rangle = 0\ \forall i \neq j\ ;\ i, j: 1 \dots k$$

$$\|v_i\| = 1\ \forall i\ ;\ i: 1 \dots k$$

MÉTODO DE GRAMM SCHMIDT PARA ORTOGONALIZAR BASES:

Sea $(E, \langle\, ; \rangle)$ un espacio euclídeo con un producto interno definido. Sea S un subespacio de E tal que $B_S = \{v_1; v_2; \dots; v_k\}$ una base de S.

Si buscamos otra base de S , tendrá la misma cantidad de vectores que B_S

¿Cómo hallamos una base ortogonal de S a partir de la base dada de dato?

Llamemos Base ortogonal de S a: $B = \{w_1; w_2; \dots; w_k\}$

$$w_1 = v_1$$

$w_2 = v_2 + \alpha . w_1 \Rightarrow$ Debo pedir que: $\langle w_2 ; w_1 \rangle = 0 \Rightarrow$

$$\langle v_2 + \alpha . w_1 ; w_1 \rangle = 0$$

$$\langle v_2 ; w_1 \rangle + \alpha \langle w_1 ; w_1 \rangle = 0$$

$$\boxed{\alpha = -\frac{\langle v_2 ; w_1 \rangle}{\langle w_1 ; w_1 \rangle}}$$

$$\boxed{w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2 ; w_1 \rangle}{\langle w_1 ; w_1 \rangle} . w_1}$$

MÉTODO DE GRAMM SCHMIDT PARA ORTOGONALIZAR BASES:

Sea $(E, \langle\ ;\ \rangle)$ un espacio euclídeo con un producto interno definido. Sea S un subespacio de E tal que $B_S = \{v_1; v_2; \dots; v_k\}$ una base de S.

Llamemos Base ortogonal de S a: $B = \{w_1; w_2; \dots; w_k\}$

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2; w_1\rangle}{\langle w_1; w_1\rangle}.w_1 \qquad \langle w_2\,; w_1\rangle = 0$$

$$w_3 = v_3 + \alpha_1.w_1 + \alpha_2.w_2$$ ⇨ Debo pedir que: $\langle w_3\,; w_1\rangle = 0 \qquad \langle w_3\,; w_2\rangle = 0$

$$\boxed{w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3; w_1\rangle}{\langle w_1; w_1\rangle}.w_1 - \frac{\langle v_3; w_2\rangle}{\langle w_2; w_2\rangle}.w_2}$$

MÉTODO DE GRAMM SCHMIDT PARA ORTOGONALIZAR BASES:

Sea $(E, \langle\, ; \,\rangle)$ un espacio euclídeo con un producto interno definido. Sea S un subespacio de E tal que $B_S = \{v_1; v_2; \dots; v_k\}$ una base de S.

Llamemos Base ortogonal de S a: $B = \{w_1; w_2; \dots; w_k\}$

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2; w_1\rangle}{\langle w_1; w_1\rangle}.w_1$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3; w_1\rangle}{\langle w_1; w_1\rangle}.w_1 - \frac{\langle v_3; w_2\rangle}{\langle w_2; w_2\rangle}.w_2$$

Y así sucesivamente…

EJEMPLO 1:

Sea en $(P_2; \langle\ ;\ \rangle)$ con $\langle a_2x^2 + a_1x + a_0\ ; b_2x^2 + b_1x + b_0 \rangle = a_2b_2 + a_1\, b_1 + a_0\, b_0$

Sea $S = \{p \in P_2\ /\ p(-1) = -2p(0)\}$ un subespacio. Dar una base ortonormal de S

Primero debo dar una base cualquiera del subespacio para, a partir de ella, ortogonalizar la base

$$p(x) = ax^2 + bx + c\ \ /\ a - b + c = -2c \Rightarrow \boxed{a = b - 3c}$$

$$p(x) = (b - 3c)x^2 + bx + c \Rightarrow S = gen\,\{x^2 + x\,; -3x^2 + 1\}$$

Los generadores son LI ya que son dos y no son múltiplos uno del otro

$$B_S = \{x^2 + x\,; -3x^2 + 1\}$$

Es una base ortogonal?

$$\langle x^2 + x; -3x^2 + 1\rangle = 1.(-3) + 1.0 + 0.1 = -3 \neq 0$$

NO es una base ortogonal

Bases ortogonales – Método de Gramm Schmidt

$$\boxed{B_S = \{x^2 + x\,; -3x^2 + 1\}}$$

$$B_{ortogonal} = \{w_1; w_2\}$$

$$\boxed{\langle a_2x^2 + a_1x + a_0\,; b_2x^2 + b_1x + b_0\rangle = a_2b_2 + a_1\,b_1 + a_0\,b_0}$$

MÉTODO DE GRAMM SCHMIDT

$$w_1 = v_1 \Rightarrow \boxed{w_1 = x^2 + x}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2; w_1\rangle}{\langle w_1; w_1\rangle}.w_1 \Rightarrow w_2 = -3x^2 + 1 - \frac{\langle -3x^2+1; x^2+x\rangle}{\langle x^2+x; x^2+x\rangle}.(x^2 + x)$$

$$w_2 = -3x^2 + 1 - \frac{(-3)}{2}.(x^2 + x) \Rightarrow \boxed{w_2 = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1}$$

$$\boxed{B_{ortogonal} = \{x^2 + x; -3x^2 + 3x + 2\}}$$

Bases ortogonales – Método de Gramm Schmidt

$$\boxed{B_S = \{x^2 + x\,; -3x^2 + 1\}}$$

$$\boxed{B_{ortogonal} = \{x^2 + x; -3x^2 + 3x + 2\}}$$

$$\boxed{\langle a_2x^2 + a_1x + a_0\,; b_2x^2 + b_1x + b_0\rangle = a_2b_2 + a_1\,a_1 + a_0\,a_0}$$

$$\boxed{B_{ortonormal} = \left\{\frac{1}{\|x^2 + x\|}(x^2 + x); \frac{1}{\|-3x^2 + 3x + 2\|}(-3x^2 + 3x + 2)\right\}}$$

$$\|x^2 + x\| = \sqrt{2} \qquad \|-3x^2 + 3x + 2\| = \sqrt{22}$$

$$\boxed{B_{ortonormal} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(x^2 + x); \frac{1}{\sqrt{22}}(-3x^2 + 3x + 2)\right\}}$$

EJEMPLO 2:

Sea en $(R^{2x2}; \langle\ ;\ \rangle)$ con $\langle A\ ; B\ \rangle = tr(A.B^t)$

Sea W $= \{A \in R^{2x2}\ /\ a_{12} - 2a_{21} = a_{11}\}$ un subespacio. Dar una base ortogonal de W

Primero debo dar una base cualquiera del subespacio para, a partir de ella, ortogonalizar la base

$$A = \begin{pmatrix} a_{12} - 2a_{21} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow W = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Realizando el método corto,
DEBO DEMOSTRAR QUE SON LI

$$B_w = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Bases ortogonales – Método de Gramm Schmidt

$$\boxed{B_w = \left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-2 & 0\\1 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}}$$

$$B_{ortogonal} = \{w_1; w_2; w_3\}$$

$$\boxed{\langle A\,;B\,\rangle = tr(A.B^t)}$$

MÉTODO DE GRAMM SCHMIDT

$$w_1 = v_1 \Rightarrow \boxed{w_1 = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2; w_1\rangle}{\langle w_1; w_1\rangle}.w_1 \Rightarrow w_2 = \begin{pmatrix}-2 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} - \frac{\left\langle\begin{pmatrix}-2 & 0\\1 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\right\rangle}.\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix}-2 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} - \frac{(-2)}{2}.\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{w_2 = \begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}}$$

Bases ortogonales – Método de Gramm Schmidt

$$\boxed{B_w = \left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-2 & 0\\1 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}}$$

$$B_{ortogonal} = \{w_1; w_2; w_3\}$$

$$\boxed{\langle A\,;B\,\rangle = tr(A.B^t)}$$

MÉTODO DE GRAMM SCHMIDT

$$\boxed{w_1 = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}}$$

$$\boxed{w_2 = \begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3; w_1\rangle}{\langle w_1; w_1\rangle}.w_1 - \frac{\langle v_3; w_2\rangle}{\langle w_2; w_2\rangle}.w_2$$

$$w_3 = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} - \frac{\left\langle\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\right\rangle}.\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} - \frac{\left\langle\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right\rangle}.\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

$$w_3 = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} - \frac{0}{2}.\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} - \frac{0}{3}.\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{w_3 = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}}$$

$$\boxed{B_{ortogonal} = \left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}}$$