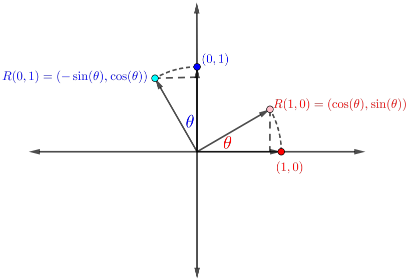
Rotaciones en el plano y el espacio.

Rotación en el plano. Sea $\theta \in (0, 2\pi)$. Definimos la *rotación de ángulo θ en el plano y alrededor del origen* como la única transformación lineal $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que cumple

$$\begin{cases} R(1,0) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \\ R(0,1) = (-\sin(\theta), \cos(\theta)) \end{cases}.$$



Notemos que

$$MR_E = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1. Calcular la imagen del vector $(2,-1)$ al aplicarle la rotación de ángulo $\pi/6$ alrededor del origen.

OPCIÓN 1: Usamos directamente la definición; en efecto, si R denota la rotación de ángulo $\pi/6$ entonces

$$\begin{cases} R(1,0) = (\cos(\pi/6), \sin(\pi/6)) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ R(0,1) = (-\sin(\pi/6), \cos(\pi/6)) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases} .$$

Luego, dado que $(2,-1) = 2(1,0) - (0,1)$ sigue que

$$\begin{aligned} R(2,-1) &= R(2(1,0) - (0,1)) \\ &= 2R(1,0) - R(0,1) \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

OPCIÓN 2: Usamos la matriz de R en base canónica:

$$MR_E = \begin{pmatrix} \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$[R(2,-1)]_E = MR_E[(2,-1)]_E = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

de modo que

$$R(2,-1) = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2},\ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \quad \square$$

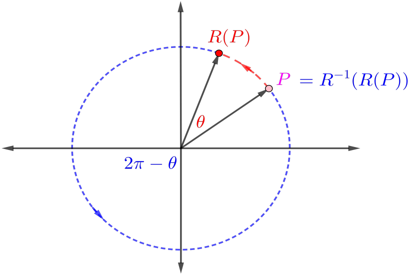
Notemos que la rotación que acabamos de ver es un isomorfismo; de hecho, todas las rotaciones de ángulo $\theta \in (0, 2\pi)$ son inversibles. Más aún, si R denota la rotación de ángulo θ, entonces

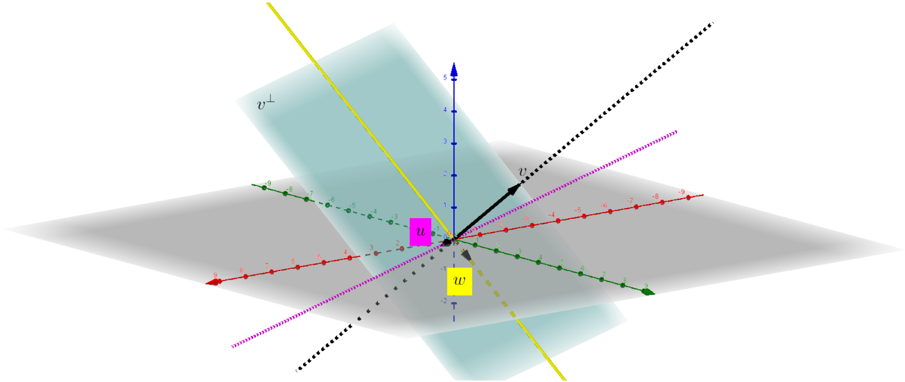
$$M(R^{-1})_E = (MR_E)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}.$$

Finalmente, dado que $\cos(-\theta) = \cos(2\pi - \theta)$ y $\sin(-\theta) = \sin(2\pi - \theta)$, concluímos que la inversa de R es la rotación de ángulo $2\pi - \theta$.

Esto es

$$M(R^{-1})_E = \begin{pmatrix} \cos(2\pi - \theta) & -\sin(2\pi - \theta) \\ \sin(2\pi - \theta) & \cos(2\pi - \theta) \end{pmatrix}.$$





$v^{\perp}$
v
u
w

Rotación en el espacio. Sea $\theta \in (0, 2\pi)$ y sea $v \in \mathbb{R}^3$ un vector unitario. Definimos la *rotación de ángulo θ en el espacio respecto al eje generado por v* como la única transformación lineal $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumple

$$\begin{cases} R(v) = v \\ R|_{v^\perp} \text{ es una rotación en el plano } \ v^\perp \end{cases}$$

donde $v^\perp = gen\{u, w\}$ con u y w vectores unitarios, ortogonales a v y ortogonales entre sí ($v^\perp$ es el plano con normal v que pasa por el origen y $\{u, w\}$ es una base ortonormal de dicho plano).

Notemos que, si $B = \{v, u, w\}$ (B es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$), entonces

$$MR_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2. Calcular la imagen del vector $(-4,3,-2)$ al aplicarle la rotación de ángulo $\pi/6$ respecto al eje generado por $(-1,2,-1)$.

Por dato, sabemos que $v = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; debemos entonces buscar vectores u y w tales que sean unitarios, ortogonales entre sí y ortogonales a v.
Podemos, por ejemplo, tomar el vector $(2,1,0)$ que es ortogonal a v y normalizarlo, así queda elegido $u = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$. Finalmente, para conseguir w podemos normalizar el vector $(-1,2,-1) \times (2,1,0) = (1,-2,-5)$; es decir, $w = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, -\frac{5}{\sqrt{30}}\right)$.

Por lo visto, si $B = \left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right); \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right); \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, -\frac{5}{\sqrt{30}}\right)\right\}$ resulta que

$$MR_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/6) & -\sin(\pi/6) \\ 0 & \sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Para conseguir el vector $R(-4,3,-2)$ usaremos la propiedad

$$MR_{BB}[(-4,3,-2)]_B = [R(-4,3,-2)]_B$$

Respecto al vector de coordenadas $[(-4,3,-2)]_B$ notemos que

$$(-4,3,-2) = 2\sqrt{6}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) - \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) + 0\left(\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, -\frac{5}{\sqrt{30}}\right)$$

y por lo tanto $[(-4,3,-2)]_B = \begin{pmatrix} 2\sqrt{6} \\ -\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Luego,

$$[R(-4,3,2)]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sqrt{6} \\ -\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{6} \\ -\frac{\sqrt{15}}{2} \\ -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

de modo que $R(-4,3,2) = 2\sqrt{6}\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right) - \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) - \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, -\frac{5}{\sqrt{30}}\right)$

QUEDA RESOLVER LA C.L.