Unidad 9
Integrales sobre superficies
Flujo
Guía de clase. Com 02

Integral de una función vectorial sobre una superficie

Dado un campo vectorial $\vec{F}: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ continuo en U abierto y S una superficie parametrizada por $\Phi: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, siendo Φ inyectiva y regular en D salvo sobre un conjunto de puntos de área nula, entonces la integral de $\vec{F}$ sobre S en la dirección del vector normal unitario $\vec{n}$ de S, viene dada por

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_D \vec{F}[\Phi(u,v)] \cdot \vec{n}(u,v) \underbrace{\|\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)\|\, du\, dv}_{dS}$$

Como S tiene en cada punto dos vectores normales unitarios, $\vec{n}(u,v) = \pm \frac{\Phi_u(u,v)\times\Phi_v(u,v)}{\|\Phi_u(u,v)\times\Phi_v(u,v)\|}$, si $\vec{n}(u,v)$ tiene el mismo sentido que $\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)$, corresponde el signo $(+)$ y de lo contrario corresponde el signo $(-)$, la fórmula anterior puede expresarse como

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_D \vec{F}[\Phi(u,v)] \cdot \left(\pm \frac{\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)}{\|\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)\|} \right) \|\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)\|\, du\, dv$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \pm \iint_D \vec{F}[\Phi(u,v)] \cdot \overbrace{\left(\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)\right)}^{\vec{N}}\, du\, dv$$

Libro, Cálculo Vectorial, Waler Mora, Instituto Tecnológico de Costa Rica, 2019, Cap 8, pág 348

Ejemplo 1

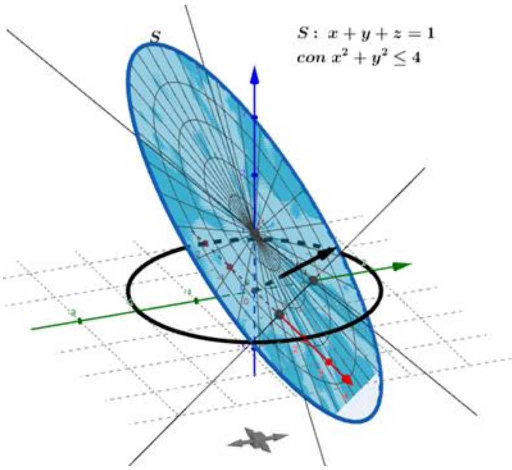
Dado el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$, y la superficie S el plano de ecuación $x + y + z = 1$, para $x^2 + y^2 \leq 4$, hallar el flujo de $\vec{F}$ a través de S en la dirección del vector normal ascendente $(z > 0)$

Resolución

Búsqueda de una parametrización para la superficie S

$$S: \Phi(x,y) = (x, y, 1 - x - y)$$

$$(x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$$



Cálculo de las derivadas parciales de Φ

$$\Phi_x(x,y) = (1,0,-1)$$

$$\Phi_y(x,y) = (0,1,-1)$$

Cálculo del producto vectorial fundamental

$$\Phi_x(x,y) \times \Phi_y(x,y)$$

$$\Phi_x(x,y) \times \Phi_y(x,y) = \begin{pmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (1,1,1) = \vec{N}$$

Este vector normal tiene la componente $z = 1 > 0$, es el sentido pedido.

Composición de $\Phi(x,y) = (x, y, 1 - x - y)$ con $\vec{F}_{(x,y,z)} = (x,y,z)$

$$F[\Phi(x,y)] = (x, y, 1 - x - y)$$

Producto escalar

$$F[\Phi(x,y)] \cdot \left(\Phi_x(x,y) \times \Phi_y(x,y)\right) = (x, y, 1 - x - y) \cdot (1,1,1) = 1$$

Finalmente la integral pedida es

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_D \vec{F}[\Phi(x,y)]\cdot\left(\Phi_x(x,y)\times\Phi_y(x,y)\right)\,dx\,dy =$$

$$= \underbrace{\iint_{x^2+y^2\le 4} dx\,dy}_{\ddot{A}rea(x^2+y^2=4)} \overset{\substack{Cambio\ a\\ Polares}}{\cong} \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} r\,dr\,d\theta = 4\pi$$

Ejemplo 2

Dado el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (y,z,x)$, y la superficie S del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con $1 \le z \le 4$, hallar el flujo de $\vec{F}$ a través de S en la dirección del vector normal descendente ($z < 0$, apuntando hacia fuera del paraboloide).

Resolución

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{para} \quad 1 \le z \le 4 \iff 1 \le x^2 + y^2 \le 4$$

$$S: \Phi(x,y) = (x, y, x^2 + y^2)$$
$$(x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$$

Cálculo de las derivadas parciales de Φ

$$\Phi_x(x,y) = (1,0,2x)$$
$$\Phi_y(x,y) = (0,1,2y)$$

Cálculo del producto vectorial fundamental

$$\Phi_x(x,y)\times\Phi_y(x,y) = \begin{pmatrix} \breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{pmatrix} = \Big(-2x, -2y, \underbrace{1}_{z=1=N_z}\Big) = \vec{N}$$

Este vector normal tiene la componente $z = 1 > 0$, sentido contrario al pedido, se usará entonces $\Phi_y(x,y)\times\Phi_x(x,y) = -\left(\Phi_x(x,y)\times\Phi_y(x,y)\right) = (2x, 2y, -1)$.

Composición de $\Phi(x,y) = (x, y, x^2 + y^2)$ con $\vec{F}(x,y,z) = (y,z,x)$

$$F[\Phi(x,y)] = (y, x^2 + y^2, x)$$

Producto escalar

$$F[\Phi(x,y)]\cdot\left(\Phi_{\mathrm{y}}(x,y)\times\Phi_{\mathrm{x}}(x,y)\right)=(y,x^2+y^2,x)\cdot(2x,2y,-1)=$$
$$=2xy+2x^2y+2y^3-x$$

Finalmente la integral pedida es

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_D \vec{F}[\Phi(x,y)]\cdot\left(\Phi_y(x,y)\times\Phi_x(x,y)\right)\,dx\,dy=$$

$$=\iint_{1\le x^2+y^2\le 4}(2xy+2x^2y+2y^3-x)\,dx\,dy=$$

$$\overset{\substack{Cambio\ a\\ Polares}}{\triangleq}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{2}\left(2r^2\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)+2r^3\cos^2(\theta)\operatorname{sen}(\theta)+2r^3\operatorname{sen}^3(\theta)\right.$$
$$\left.-r\underbrace{\cos(\theta)}_{\int_0^{2\pi}\cos(\theta)=0}\right)r\,dr\,d\theta$$

$$=0$$

Bibliografía digital MIeL, Cálculo en Varias Variables, W Mora, Cap 8, pag 348.