T P 7 Ej 2 f

Calcular la integral:

(a) Integrando primero respecto de x.

(b) Integrando primero respecto de y.

$$\iint_R \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,dxdy \qquad\qquad R=[-1,1]\times[-1,1]$$

(a) Integrando primero respecto de x.

$$\iint_R \frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy = \int_{y=-1}^{1}\left(\int_{x=-1}^{1}\frac{xy}{1+x^2+y^2}dx\right)dy$$

Resolvemos primero la integral que se encuentra dentro del paréntesis.

$$\int_{x=-1}^{1}\frac{xy}{1+x^2+y^2}dx = y\int_{x=-1}^{1}\frac{x}{1+x^2+y^2}dx$$

Tomando $t=1+x^2+y^2$, podemos tomar $dx=\frac{dt}{2x}$ y sustituir en la integral, la cual nos queda.

$$y\int\frac{x}{t}\frac{dt}{2x}=\frac{y}{2}\ln|t| = \frac{y}{2}ln|1+x^2+y^2|$$

Como la expresión dentro del módulo será siempre positiva y mayor a 1, podemos quitarlo de la expresión, por lo tanto, el resultado de la integral será:

$$y\int_{x=-1}^{1}\frac{x}{1+x^2+y^2}dx = \frac{y}{2}ln(1+x^2+y^2)|_{x=-1}^{1}$$

$$\frac{y}{2}ln(2+y^2)-\frac{y}{2}ln(2+y^2)=0$$

Ahora reemplazamos este resultado en la integral doble inicial.

$$\int_{y=-1}^{1} 0\,dy = 0$$