T P 04 Ej. 31

Sea F: $\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$, con $F(x,y) = \big(F_1(x,y), F_2(x,y)\big) = (xe^y, sen(xy))$ y G: $\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$, con $G(x,y) = \big(G_1(x,y), G_2(x,y)\big) = (xy, x-y)$. Hallar la matriz jacobiana de la función compuesta H=G o F

Para resolver este ejercicio debemos aplicar, como bien dice el enunciado, la regla de la cadena. La herramienta a usar es la Matriz Jacobiana, ya ejercitado en ejercicios anteriores. Como estamos buscando las derivadas parciales de la composición de dos funciones, El Jacobiano va a obtenerse del producto de dos matrices.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \cdots & \alpha \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z & \cdots & \omega \end{bmatrix}$$

donde g_m son las componentes del campo G y h_n son las componentes del campo H.

En este caso primero tenemos que preparar el sistema de ecuaciones para poder aplicar la regla de la cadena:

En la Función G, reemplazo las variables x e y por unas nuevas u,v las cuales van a recibir la composición. Entonces, el sistema me queda de la siguiente manera:

$$H = G \text{ o } F \begin{cases} G(u,v) = \big(G_1(u,v), G_1(u,v)\big) = (uv, u-v) \\ F(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big) = (xe^y, sen(xy)) \end{cases}$$

Ahora, vamos al ejercicio en cuestión:

$$J = \begin{bmatrix} {G_1}_u & {G_1}_v \\ {G_2}_u & {G_2}_v \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}$$

Operando

$$J = \begin{bmatrix} v & u \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} e^y & xe^y \\ ycos(xy) & xcos(xy) \end{bmatrix}$$

Operando

$$J = \begin{bmatrix} ve^y + uycos(xy) & vxe^y + uxcos(xy) \\ e^y - ycos(xy) & xe^y - xcos(xy) \end{bmatrix}$$

Ahora lo que hay que haces es reemplazar u y v por su equivalente denotado en la función F:

J = $\begin{bmatrix} sen(xy)e^y + xe^y ycos(xy) & sen(xy)xe^y + xe^y xcos(xy) \\ e^y - ycos(xy) & xe^y - xcos(xy) \end{bmatrix}$

Sacando factores comunes, la matriz queda de la siguiente manera:

J = $\begin{bmatrix} e^y(sen(xy) + xycos(xy)) & xe^y(sen(xy) + xcos(xy)) \\ e^y - ycos(xy) & x(e^y - cos(xy)) \end{bmatrix}$

Esta es la Matriz del Jacobiano.