Álgebra y Geometría analítica II

Primer cuatrimestre de 2020

Sea $W = \left\{A \in R^{2x2} / \ A.\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

un subconjunto de R^{2x2}

a) Probar que W es subespacio de R^{2x2}

b) Dar una base de W y su dimensión.

a) Probar que W es subespacio de R^{2x2}

$$\mathrm{W} = \left\{ A \in R^{2x2} / \ A.\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Recordemos:

$i)\ W \neq \emptyset$ ó bien $\vec{0}_V \in W$

$ii)\ \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in W : (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \in W$

$iii)\ \forall k \in R\ , \forall \vec{v} \in W\ :\ (k.\vec{v}) \in W$

$$W = \left\{A \in R^{2x2} / \, A.\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$ donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$i)\ W \neq \emptyset$ Veré que $\vec{0}_V \in W$ $\vec{0}_V = \vec{0}_{R^{2x2}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Me pregunto: ¿$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{W}$?

Cumple con la condición $A.\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$**?**

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ✓

Cumple $\boldsymbol{i})$

$$W = \left\{ A \in R^{2x2} / \, A.\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$ii)\ \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in W : (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \in W$$

$$\vec{v}_1 = A \in W \Rightarrow \boxed{A.\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\vec{v}_2 = B \in W \Rightarrow \boxed{B.\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Hipótesis

Me pregunto: ¿ $(\boldsymbol{\vec{v}_1} + \boldsymbol{\vec{v}_2}) \in \boldsymbol{W}$?
Cumple con la condición?

$$¿\ (A + B).\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ ?$$

$$A.\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$B.\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Hipótesis

$$¿\ (A+B).\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\ ?$$

$$(A+B).\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\underbrace{A.\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}}+\underbrace{B.\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}}$$

Distribuyo para poder usar las hipótesis

Uso hipótesis

$$(A+B).\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{(A+B).\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}$$

Cumple *ii*)

$$W = \left\{A \in R^{2x2} / A.\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$iii)\ \forall k \in R\ , \forall \vec{v} \in W : (k.\vec{v}) \in W$$

$$\vec{v} = A \in W \Rightarrow \boxed{A.\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \quad \boxed{\text{Hipótesis}}$$

Me pregunto: ¿ $(\boldsymbol{k}.\vec{\boldsymbol{v}}) \in \boldsymbol{W}$? Cumple con la condición?

$$¿\ (k.\mathrm{A}).\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ ?$$

Subespacios

$$\boxed{A.\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}$$

Hipótesis

$$¿\,(k.\mathrm{A}).\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\,?$$

$$(k.\mathrm{A}).\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=k.\left(\underbrace{A.\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}}\right)$$

Asocio distinto para que aparezca la hipótesis

$$(k.\mathrm{A}).\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=k.\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Uso hipótesis

$$\boxed{(k.\mathrm{A}).\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}$$

Cumple iii)

Finalmente, puedo decir que W es un subespacio de R^{2x2}

b) Dar una base de W y su dimensión.

$$W = \left\{ A \in R^{2x2} / \, A . \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Recordemos:

GENERADORES

INDEPENDENCIA LINEAL

$$W = \left\{ A \in R^{2x2} / \, A. \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

GENERADORES

A cualquier elemento de W lo podré escribir como c.l. de sus generadores

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolvamos el producto:

$$\begin{cases} 2a - b = 0 & \rightarrow \boxed{b = 2a} \\ 2c - d = 0 & \rightarrow \boxed{d = 2c} \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W \Leftrightarrow b = 2a \;\; y \;\; d = 2c$$

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & 2a \\ c & 2c \end{pmatrix}$$

$$A = a.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A cualquier elemento de W lo podré escribir como c.l. de sus generadores

$$\boxed{W = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}}$$

Serán Linealmente independientes?

En este caso, por ser sólo dos elementos los generadores, podemos ver que como uno no es múltiplo del otro, son LI

Veamos cómo lo demuestro por Método corto:

$$W = gen\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Como al ponerlas una debajo de la otra ya están escalonadas, serán LI

$$B_W = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right\}$$

$$\dim W = 2$$

Sea $W = \left\{A \in R^{2x2} / \, A.\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

un subconjunto de R^{2x2}

a) Probar que W es subespacio de R^{2x2} ✓

b) Dar una base de W y su dimensión.

$$\boxed{B_W = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}}$$

$$\boxed{\dim W = 2}$$