Clase 8

Práctica sobre

- **Teorema de La Función implícita.**
- **Fórmulas de las derivadas para una Función Implícita.**

Funciones implícitas

Teorema de Existencia y Unicidad – Fórmulas de Derivación

Funciones implícitas de una variable

Teorema de la función implícita (TFI-I). Sea la función

$$F: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / w = F(x, y)$$

de clase $\mathcal{C}^1$ en el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$. Sea $P = (x_0, y_0) \in A$, un punto para el cual se cumplen las condiciones

$$F(x_0, y_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

Entonces existe un entorno E_1 de y_0, un entorno E_2 de $P' = x_0$, donde $E_2 \times E_1 \subseteq A$, y una única función

$$\varphi: E_2 \to E_1 / y = \varphi(x)$$

(*la función implícita*) de clase $\mathcal{C}^1$ en E_2, que para cada $x \in E_2$ satisface $F\big(x, \varphi(x)\big) = 0$ y además $y_0 = \varphi(x_0)$, y cuya derivada en $P' = x_0$ está dadas por la fórmula

$$\varphi'(x_0) = \frac{d\varphi}{dx}(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

Ejemplo 1. A partir de la ecuación

$$F(x, y) = \operatorname{sen}(x - 1) + xy^2 - x = 0 \qquad (1)$$

y el punto $P_0 = (x_0, y_0) = (1, -1)$ es posible definir una función (la función implícita)

$$\varphi: E_2 \to E_1 / y = \varphi(x)$$

Donde E_2 es un entorno de $P'_0 = x_0 = 1$, y E_1 un entorno de $y_0 = -1$.

Nótese que, efectivamente

$$F(P_0) = F(1, -1) = 0$$

En efecto

$$F(P_0) = F(1, -1) = \operatorname{sen}(1 - 1) + 1 \cdot (-1)^2 - 1 = 0$$

Por otra parte, es claro que F es de clase $\mathcal{C}^1$ en todo $A = \mathbb{R}^2$. Obsérvese pues que, sus derivadas parciales

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \cos(x-1) + y^2 - 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2xy$$

Son siempre continuas en $\mathbb{R}^2$. Además, se cumple también que

$$\frac{\partial F}{\partial y}(P_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(1,-1) = 2 \cdot 1 \cdot (-1) = -2 \neq 0$$

Entonces, en virtud del Teorema de La Función Implícita, es posible asegurar la existencia y unicidad (junto con todas las propiedades que este resultado garantiza) de la función (la implícita)

$$\varphi : E_2 \ \to E_1 / y = \varphi(x)$$

Finalmente, la derivada de esta función en $P'_0 = x_0 = 1$

$$\varphi'(x_0) = \frac{d\varphi}{dx}(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)} = -\frac{\cos(x_0-1) + y_0^2 - 1}{2x_0y_0}$$

O sea

$$\varphi'(1) = \frac{d\varphi}{dx}(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,-1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,-1)}$$

Entonces, teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \cos(x-1) + y^2 - 1 \quad \to \quad \frac{\partial F}{\partial x}(1,-1) = 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2xy \quad \to \quad \frac{\partial F}{\partial y}(1,-1) = -2$$

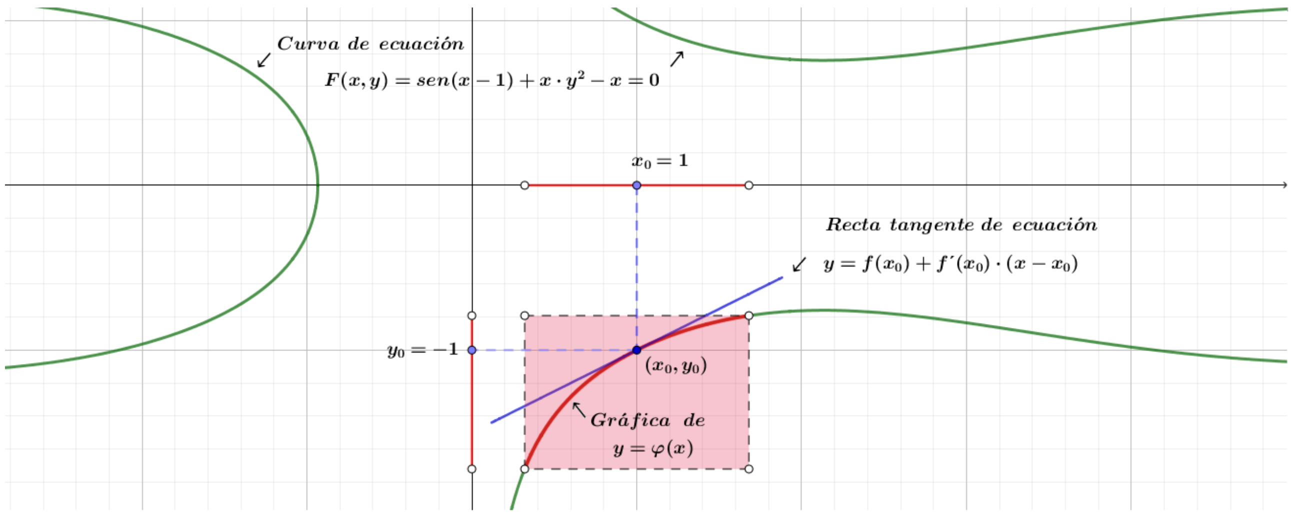
En definitiva

$$\varphi'(1) = \frac{d\varphi}{dx}(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,-1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,-1)} = -\frac{1}{-2}$$

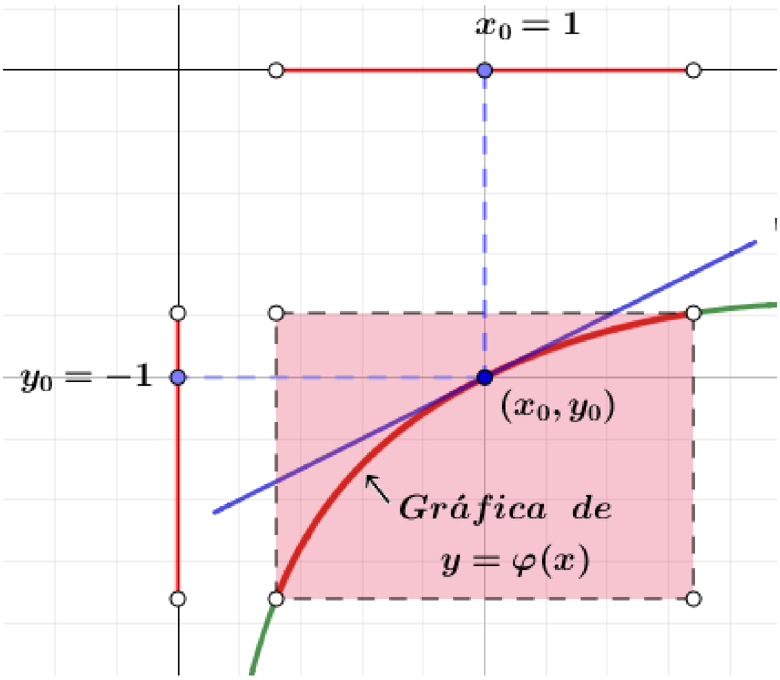
Es decir

$$\varphi'(1) = \frac{d\varphi}{dx}(1) = \frac{1}{2}$$

Que es en valor de la derivada de la función implícita $y = \varphi(x)$ en $x_0 = 1$.



La gráfica de la función implícita $y = \varphi(x)$ es el sector de la curva $C: F(x,y) = 0$ que se encuentra en el interior del rectángulo sombreado



Representación geométrica de la gráfica de la función implícita $y = \varphi(x)$ y su recta tangente en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$

Nota adicional: En el TFI no se pone en discusión la posibilidad de obtener efectivamente la ecuación explícita de la función $y = \varphi(x)$. En algunos casos, esta posibilidad es directamente inexistente. El TFI ofrece las condiciones para las cuales esta función (la implícita $y = \varphi(x)$) existe y es única. Es decir que el TFI es un teorema de existencia y unicidad.

Sin embargo, en algunos casos, como el de este Ejemplo 1, es verdaderamente posible "despejar y en términos de x". Y esta posibilidad permite verificar los resultados que se obtuvieron al aplicar la teoría de las funciones implícitas.

En efecto, se tiene

$$\operatorname{sen}(x-1) + xy^2 - x = 0$$

$$xy^2 = x - \operatorname{sen}(x-1)$$

$$y^2 = \frac{x - \operatorname{sen}(x-1)}{x} \qquad x \neq 0$$

$$\sqrt{y^2} = |y| = \sqrt{\frac{x - \operatorname{sen}(x-1)}{x}}$$

$$|y| = \sqrt{1 - \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x}}$$

$$|y| = y = \sqrt{1 - \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x}}, \;\; y > 0$$

$$|y| = -y = \sqrt{1 - \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x}}, \;\; y < 0$$

$$y = -\sqrt{1 - \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x}}, \;\; y < 0$$

Esta es precisamente, la ecuación explícita correspondiente a la función $y = \varphi(x)$ que se definió implícitamente en el Ejemplo 1. Es decir

$$y = \varphi(x) = -\sqrt{1 - \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x}} = -\sqrt{\frac{x - \operatorname{sen}(x-1)}{x}} = -\left(\frac{x - \operatorname{sen}(x-1)}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Obsérvese que

$$y_0 = \varphi(1) = -\sqrt{1 - \frac{\operatorname{sen}(1-1)}{1}} = -1$$

$$y_0 = \varphi(1) = -1$$

Como ya se sabía.

Por otra parte, al derivar explícitamente a la función

$$y = \varphi(x) = -\left(\frac{x - \operatorname{sen}(x-1)}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Se tiene

$$y' = \varphi'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{x - \operatorname{sen}(x-1)}{x}\right)^{\frac{1}{2}-1}\left(\frac{(1-\cos(x-1))x - (x - \operatorname{sen}(x-1))\cdot 1}{x^2}\right)$$

$$y' = \varphi'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x - \operatorname{sen}(x-1)}{x}}}\left(\frac{x - x\cos(x-1) - x + \operatorname{sen}(x-1)}{x^2}\right)$$

$$y' = \varphi'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x - \operatorname{sen}(x-1)}{x}}}\left(\frac{-x\cos(x-1) + \operatorname{sen}(x-1)}{x^2}\right)$$

$$y' = \varphi'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x\cos(x-1) - \operatorname{sen}(x-1)}{\sqrt{\frac{x - \operatorname{sen}(x-1)}{x}}}\cdot\frac{1}{x^2}$$

Esto es

$$y' = \varphi'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\frac{x\cos(x-1) - \operatorname{sen}(x-1)}{\sqrt{\frac{x - \operatorname{sen}(x-1)}{x}}}$$

Y esta expresión para la derivada de la implícita φ, es la que se obtiene al reemplazar

$$y = \varphi(x) = -\sqrt{\frac{x - \operatorname{sen}(x-1)}{x}}$$

En la fórmula para la derivada obtenida según el TFI, a saber

$$\varphi'(x) = \frac{d\varphi}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)} = -\frac{\cos(x-1) + y^2 - 1}{2xy}$$

Por otra parte, se verifica el valor de esta derivada en $x_0 = 1$, que se obtuvo anteriormente según el TFI.

$$y' = \varphi'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x \cdot \cos(x-1) - \operatorname{sen}(x-1)}{\sqrt{1 - \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{x}}}$$

$$y'(1) = \varphi'(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1^2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$$

$$y'(1) = \varphi'(1) = \frac{1}{2}$$

<u>Comparación de las fórmulas para la derivada de la implícita</u>

Fórmula obtenida según el TFI

$$\varphi'(x) = -\frac{\cos(x-1) + y^2 - 1}{2xy}$$

En la que se entiende que

$$y = \varphi(x)$$

O sea

$$\varphi'(x) = -\frac{\cos(x-1) + \left(\varphi(x)\right)^2 - 1}{2x\varphi(x)}$$

Pero en este caso, sabemos que

$$\varphi(x) = -\sqrt{\frac{x - \operatorname{sen}(x-1)}{x}}$$

Reemplazando esta fórmula de $y = \varphi(x)$, queda

$$\varphi'(x) = -\frac{\cos(x-1) + \left(-\sqrt{\frac{x - \operatorname{sen}(x-1)}{x}}\right)^2 - 1}{2x\left(-\sqrt{\frac{x - \operatorname{sen}(x-1)}{x}}\right)} = \frac{1}{2x} \frac{\cos(x-1) - 1 + \frac{x - \operatorname{sen}(x-1)}{x}}{\sqrt{\frac{x - \operatorname{sen}(x-1)}{x}}}$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2x} \frac{\left(\cos(x-1) - 1 + \frac{x - \operatorname{sen}(x-1)}{x}\right)}{\sqrt{\frac{x - \operatorname{sen}(x-1)}{x}}} \frac{x}{x} = \frac{1}{2x^2} \frac{x\cos(x-1) - x + x - \operatorname{sen}(x-1)}{\sqrt{\frac{x - \operatorname{sen}(x-1)}{x}}}$$

Esto quiere decir que la derivada de la función implícita $y = \varphi(x)$, es

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} \frac{x\cos(x-1) - \operatorname{sen}(x-1)}{\sqrt{\frac{x - \operatorname{sen}(x-1)}{x}}}$$

Y esta expresión coincide exactamente con la fórmula de la derivada, obtenida a partir de derivar la fórmula explícita de la función

$$y = \varphi(x) = -\sqrt{\frac{x - \operatorname{sen}(x-1)}{x}}$$

Funciones implícitas de dos variables

Teorema de la función implícita I (TFI-I). Sea la función

$$F: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} / w = F(x, y, z)$$

de clase C^1 en el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^3$. Sea $P = (x_0, y_0, z_0) \in A$, un punto para el cual se cumplen las condiciones

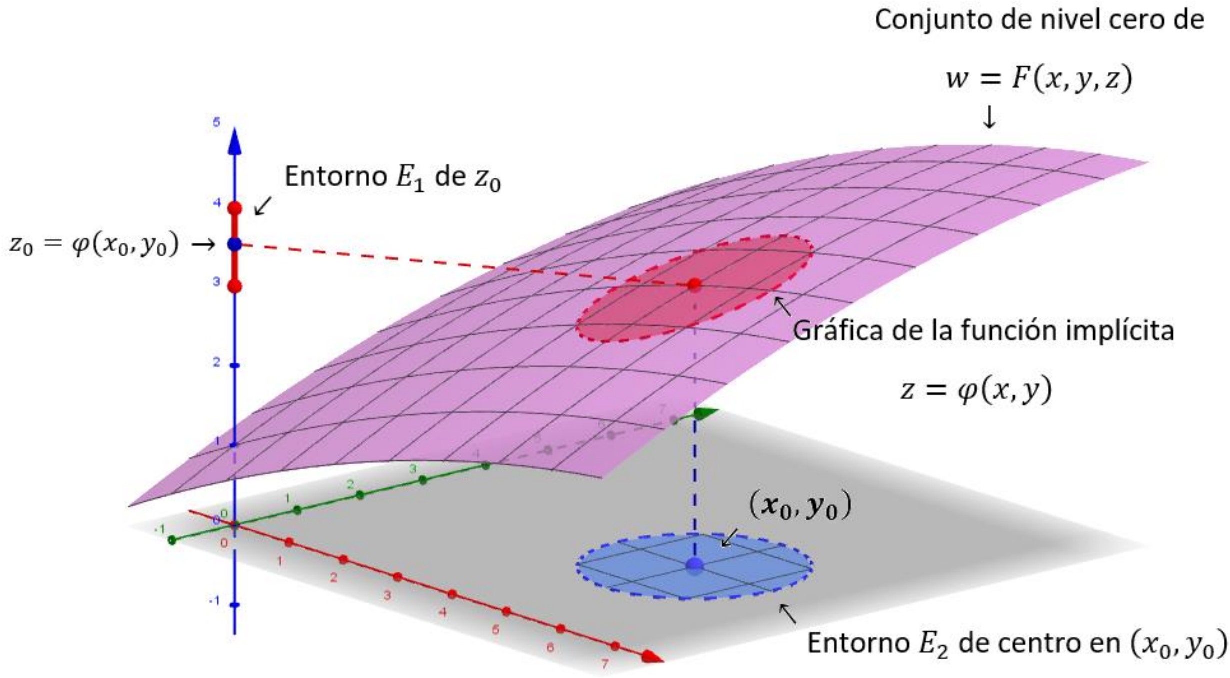
$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

Entonces existe un entorno E_1 de z_0, un entorno E_2 de $P' = (x_0, y_0)$, donde $E_2 \times E_1 \subseteq A$, y una única función

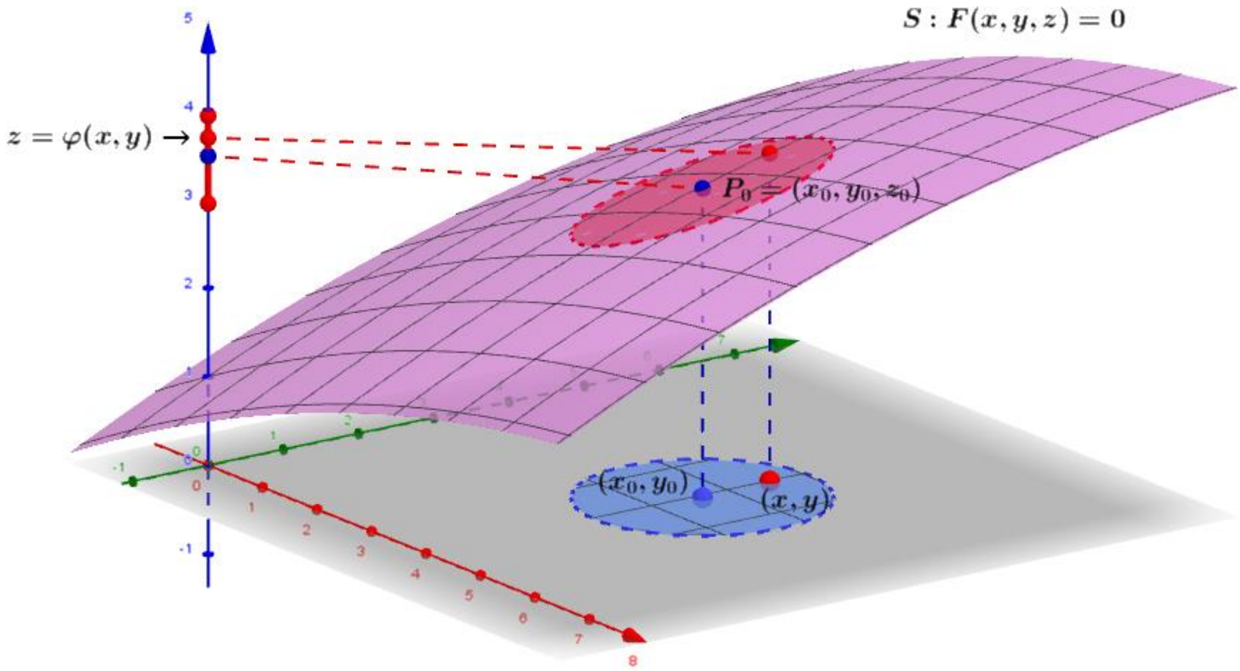
$$\varphi: E_2 \to E_1 / z = \varphi(x, y)$$

(*la función implícita*) de clase C^1 en E_2, que para cada $(x, y) \in E_2$ satisface $F\big(x, y, \varphi(x, y)\big) = 0$ y además $z_0 = \varphi(x_0, y_0)$, cuyas derivadas parciales en $P' = (x_0, y_0)$ están dadas por las fórmulas

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}$$



Representación geométrica de los elementos mencionados en el Teorema de la Función Implícita I



La Función Implícita $z = \varphi(x, y)$ asocia a cada par $(x, y) \in E_2$ un único valor de $z_0 \in E_1$

Ejemplo 2. (Fórmulas de las Derivadas Parciales de una Función Implícita)

Sea la función

$$F: Dom\ f \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: w = F(x, y, z)$$

Y supóngase que el conjunto de nivel 0 (nivel cero) de f es la superficie

$$S: F(x, y, z) = 0$$

Supóngase además que esta superficie (en general solamente en un entorno de un punto dado) se puede considerar como la gráfica de la función de dos variables

$$z = \varphi(x, y)$$

Esto quiere decir que las termas (x, y, z) en la superficie S, verifican la ecuación

$$F(x, y, z) = 0$$

Y también la

$$z = \varphi(x, y)$$

Pues se trata de la misma superficie.

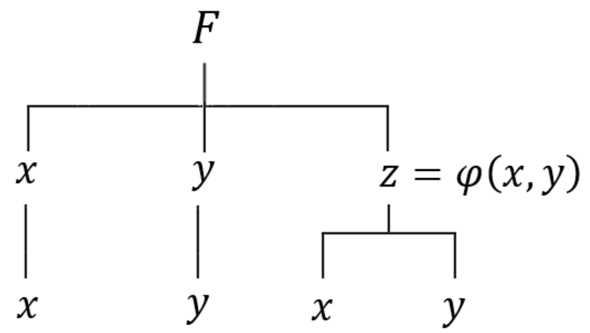
Entonces se cumple la relación

$$F(x, y, z) = F\big(x, y, \varphi(x, y)\big) = 0$$

Y en tal situación se presenta la composición nula

$$F\big(x, y, \varphi(x, y)\big) = 0$$

Nótese que, en este caso, el esquema de dependencia correspondiente es



<u>**Esquema de dependencia para el esquema de la Función Implícita**</u>

Derivada parcial respecto de x

$$F\big(x, y, \varphi(x, y)\big) = 0$$

$$\frac{\partial\left(F\big(x, y, \varphi(x, y)\big)\right)}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Dado que z depende de las variables x e y, según

$$z = \varphi(x, y)$$

Resulta que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Y, por otra parte, teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1$$

Y que la derivada de y respecto de x es igual a cero, se tiene

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

Reemplazando en

$$\frac{\partial\left(F\big(x, y, \varphi(x, y)\big)\right)}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Queda

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot 0 + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \qquad (I)$$

Si se cumple que

$$\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$$

De (I) se puede escribir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Utilizando los símbolos de dependencia queda

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}$$

Y esta es la fórmula de la derivada parcial de la función implícita

$$z = \varphi(x,y)$$

definida (implícitamente) a partir de la ecuación

$$F(x,y,z) = 0$$

<u>Derivada parcial respecto de y</u>

$$F\big(x,y,\varphi(x,y)\big) = 0$$

$$\frac{\partial\left(F\big(x,y,\varphi(x,y)\big)\right)}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Dado que z depende de las variables x e y, según

$$z = \varphi(x,y)$$

Se escribe

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial y}{\partial y} = 1$$

Y que la derivada de x respecto de y es igual a cero, se tiene

$$\frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

Reemplazando luego en

$$\frac{\partial\left(F\big(x,y,\varphi(x,y)\big)\right)}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Queda

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot 0+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot 1+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y}=0 \qquad (II)$$

Si se cumple además que

$$\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$$

De (I) se puede obtiene

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Utilizando ahora los símbolos de dependencia, queda

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)}$$

que es la fórmula de la derivada parcial de la función implícita

$$z=\varphi(x,y)$$

definida (implícitamente) a partir de la ecuación

$$F(x,y,z)=0$$

Ejemplo 3. A partir de la ecuación

$$F(x,y,z)=z\cdot e^{2\cdot x-y}-2\cdot e^{y-z}=0 \qquad (1)$$

Y la terna $P_0=(x_0,y_0,z_0)=(1,2,2)$ es posible definir una función (la función implícita)

$$\varphi: E_2 \ \to E_1/z=\varphi(x,y)$$

Donde E_2 es un entorno de $P\acute{}_0=(x_0,y_0)=(1,2)$, y E_1 un entorno de $z_0=2$.

Nótese que la terna satisface la ecuación (1)

$$F(P_0)=F(x_0,y_0,z_0)=F(1,2,2)=2\cdot e^{2\cdot 1-2}-2\cdot e^{2-2}=2-2=0$$

Y que, además, la función

$$F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}: w=F(x,y,z)=z\cdot e^{2\cdot x-y}-2\cdot e^{y-z}$$

Es de clase $\mathcal{C}^1$ en todo $\mathbb{R}^3$. Para esto, obsérvese que, efectivamente, las funciones derivadas parciales

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 2z \cdot e^{2\cdot x-y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = -z \cdot e^{2\cdot x-y} - 2 \cdot e^{y-z}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = e^{2\cdot x-y} + 2 \cdot e^{y-z}$$

Son continuas en todo punto de $\mathbb{R}^3$. Y, además, se cumple que

$$\frac{\partial F}{\partial z}(P_0) = \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$$

En efecto

$$\frac{\partial F}{\partial z}(P_0) = \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial F}{\partial z}(1,2,2) = e^{2\cdot 1-2} + 2 \cdot e^{2-2} = 3 \neq 0$$

En estas condiciones, el Teorema de La Función Implícita asegura la existencia de la función implícita

$$\varphi\colon E_2 \ \to E_1 / z = \varphi(x,y)$$

de clase $\mathcal{C}^1$ en el entorno E_2 de $P'_0 = (x_0,y_0) = (1,2)$, cuyo codominio es el entorno E_1 de $z_0 = 2$. Además, tal que $z_0 = \varphi(x_0,y_0) = \varphi(1,2) = 2$.

Ejemplo 4. Sea la función

$$z = \varphi(x,y)$$

definida implícitamente por

$$F(x,y,z) = z \cdot e^{2\cdot x-y} - 2 \cdot e^{y-z} = 0 \qquad (1)$$

Localmente según $P_0 = (x_0,y_0,z_0) = (1,2,2)$.

i) Calcular sus derivadas parciales en el punto $P'_0 = (x_0,y_0)$, o sea

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(P'_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(1,2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(P'_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,2)$$

Por el TFI-I, se sabe que las derivadas de la función implícita $z = \varphi(x,y)$, en $P'_0 = (x_0,y_0)$ están dadas por las fórmulas

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}$$

En este caso, se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 2z\cdot e^{2\cdot x-y} \quad \to \quad \frac{\partial F}{\partial x}(1{,}2{,}2) = 4$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = -z\cdot e^{2\cdot x-y} - 2\cdot e^{y-z} \quad \to \quad \frac{\partial F}{\partial y}(1{,}2{,}2) = -4$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = e^{2\cdot x-y} + 2\cdot e^{y-z} \quad \to \quad \frac{\partial F}{\partial z}(1{,}2{,}2) = 3$$

Entonces resulta

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1{,}2) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1{,}2{,}2)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1{,}2{,}2)} = -\frac{4}{3} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(1{,}2) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1{,}2{,}2)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1{,}2{,}2)} = -\frac{-4}{3}$$

Es decir

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1{,}2) = -\frac{4}{3} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(1{,}2) = \frac{4}{3}$$

Que son los valores de las derivadas parciales de la función implícita $z = \varphi(x,y)$, en $P'_0 = (1{,}2)$.

i) Calcular su derivada direccional en $P'_0 = (x_0,y_0) = (1{,}2)$, respecto de la dirección y sentido del vector unitario $\vec{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$.

Dado que el TFI-I garantiza que la función

$$\varphi: E_2 \subset \mathbb{R}^2 \to E_1 / z = \varphi(x,y)$$

Es de clase $\mathcal{C}^1$ en el entorno E_2 de $P'_0 = (x_0,y_0) = (1{,}2)$, entonces, en ese punto vale la Fórmula del Gradiente para la Derivada Direccional

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{v}}(1{,}2) = \nabla\varphi(1{,}2) \bullet \vec{v}$$

En concreto

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{v}}(1{,}2) = \nabla\varphi(1{,}2) \bullet \vec{v} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1{,}2), \frac{\partial\varphi}{\partial y}(1{,}2)\right) \bullet \left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{v}}(1,2) = \left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right) \bullet \left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{-8-4}{3\sqrt{5}} = -\frac{4}{\sqrt{5}}$$

Es decir que la derivada direccional de la función implícita $z = \varphi(x,y)$, en el punto $P'_0 = (1,2)$ es

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{v}}(1,2) = -\frac{4}{\sqrt{5}}$$

$iii)$ Determinar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la gráfica de la función implícita $z = \varphi(x,y)$, en $P_0 = \big(1,2,\varphi(1,2)\big) = (1,2,2)$.

Teniendo en cuenta que se trata de una superficie que coincide con la gráfica de la función

$$z = \varphi(x,y)$$

diferenciable en $P'_0 = (x_0,y_0) = (1,2)$, la ecuación del plano tangente es

$$\pi: z = \varphi(x_0,y_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

Sabiendo entonces que

$$\varphi(1,2) = 2 \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(1,2) = -\frac{4}{3} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,2) = \frac{4}{3}$$

Se tiene que, la ecuación del plano tangente a la gráfica de $z = \varphi(x,y)$, en $P_0 = \big(1,2,\varphi(1,2)\big) = (1,2,2)$, es

$$\pi: z = \varphi(1,2) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(1,2)\cdot(x-1) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,2)\cdot(y-2)$$

$$\pi: z = 2 - \frac{4}{3}\cdot(x-1) + \frac{4}{3}\cdot(y-2)$$

$$\pi: 4x - 4y + 3z = 2$$

Debe observarse que la ecuación del plano π también se puede obtener según la formula del gradiente

$$\pi: \nabla F(x_0,y_0,z_0) \bullet (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$$

$$\pi: \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right) \bullet (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$$

Ya que la gráfica de la función implícita es una parte de la superficie de nivel cero de $w = F(x,y,z)$, esto es

$$S: F(x,y,z) = 0$$

en las inmediaciones de $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Nótese además que

$$\nabla F(x_0,y_0,z_0) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right) =$$

$$= -\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \cdot \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}, -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}, -1\right) =$$

$$= -\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right) =$$

$$= -\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \cdot N$$

Es decir que el gradiente

$$\nabla F(x_0,y_0,z_0)$$

Y

$$N = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)$$

Son vectores paralelos entre sí. Recuérdese que el vector N es normal al plano tangente a la gráfica de la función $z = \varphi(x,y)$, diferenciable en $P'_0 = (x_0, y_0)$.

Finalmente, la ecuación vectorial de la recta $R^{\perp}$, normal a la gráfica de la implícita $z = \varphi(x,y)$, en el punto $P_0 = \big(1,2,\varphi(1,2)\big) = (1,2,2)$, es

$$R^{\perp}: \alpha(t) = \big(1,2,\varphi(1,2)\big) + t \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1,2), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,2), -1\right), \qquad t \in \mathbb{R}$$

O sea

$$R^{\perp}: \alpha(t) = (1,2,2) + t \cdot \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -1\right), \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$R^{\perp}: \alpha(t) = \left(1 - \frac{4}{3} \cdot t, 2 + \frac{4}{3} \cdot t, 2 - t\right), \qquad t \in \mathbb{R}$$