Superficies parametrizadas

Práctica sobre

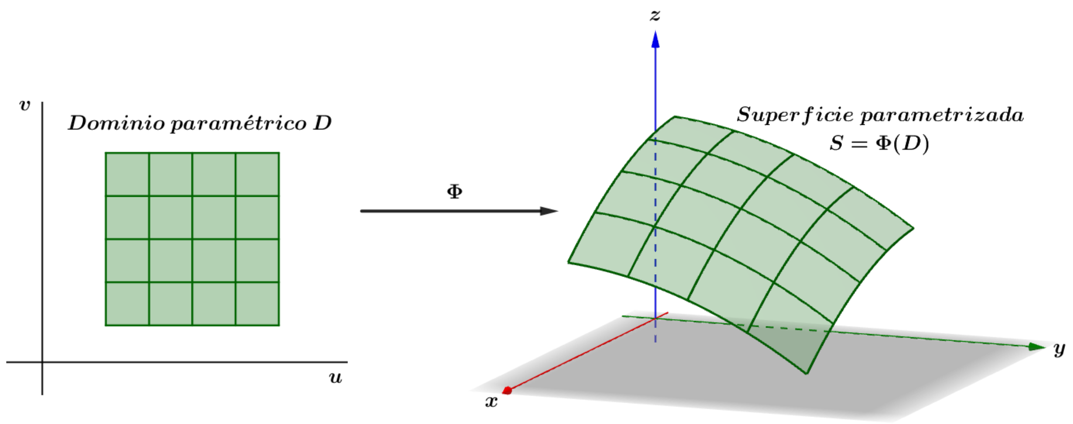
- **Superficies parametrizadas.**
- **Vectores tangentes y vector normal.**
- **Superficies suaves o regulares.**
- **Cálculo de área de una superficie regular.**
- **Integral de superficie de un campo escalar.**

Superficies parametrizadas

El estudio realizado sobre funciones escalares ha permitido conocer un tipo particular de superficies, a saber, la gráfica de la función $z = f(x, y)$. En este apartado serán expuestos algunos ejemplos de superficies que se obtienen como el conjunto imagen de una función vectorial de la forma

$$\vec{\Phi}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \vec{\Phi}(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$$

donde el $D \subset \mathbb{R}^2$ es algún dominio del plano uv. Esto se conoce como la representación paramétrica de la superficie S, y se escribe $S = \vec{\Phi}[D]$.



La función vectorial $\vec{\Phi}$ transforma el conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ en la superficie $S \subset \mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1. Una parametrización para la superficie

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{x^2 + y^2}{2} \wedge -1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1\right\}$$

Es la que ofrece la función vectorial

$$\vec{\Phi}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \vec{\Phi}(u, v) = \big(x, y, z(x, y)\big) = \left(x, y, \frac{x^2 + y^2}{2}\right) = \left(u, v, \frac{u^2 + v^2}{2}\right)$$

Siendo su dominio paramétrico el cuadrado

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq u \leq 1 \wedge -1 \leq v \leq 1\}$$

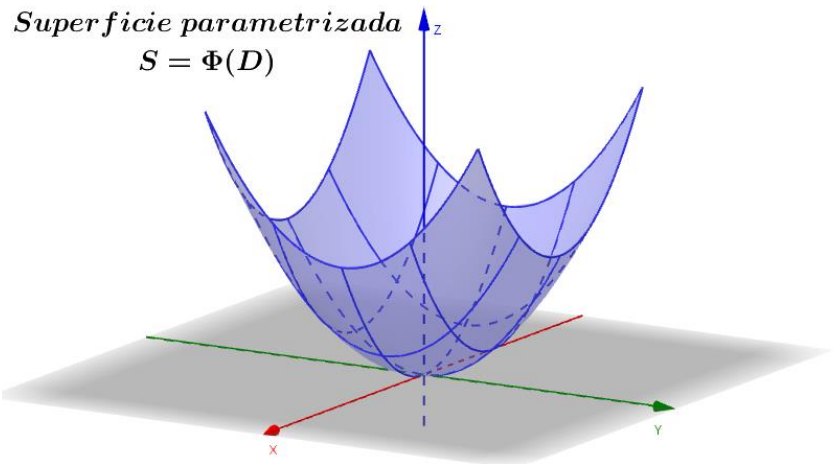
Nótese que en este caso se toma

$$x = x(u, v) = u$$

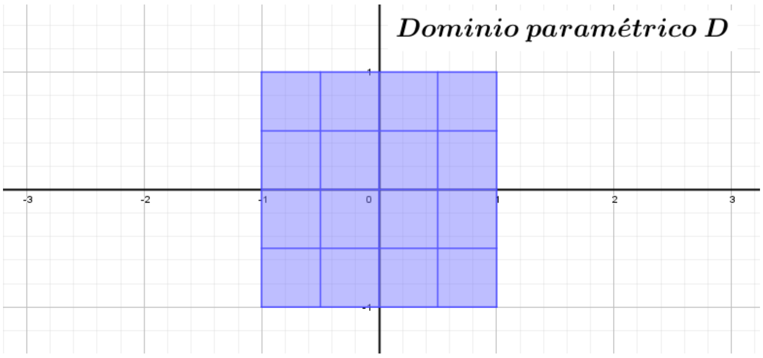
$$y = y(u, v) = v$$

$$z = z(u, v) = \frac{u^2 + v^2}{2}$$

Este tipo de parametrización se conoce como *parametrización de Monge*.



Representación gráfica conjunto de la superficie S parametrizada por $\overrightarrow{\Phi}$ y su.



Representación gráfica del dominio paramétrico D

Ejemplo 2. Una manera de identificar a los puntos del plano π que pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y es paralelo a los vectores linealmente independientes $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$, es a partir de la siguiente parametrización

$$\overrightarrow{\Phi}: D = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{\Phi}(u, v) = P_0 + u \cdot \vec{A} + v \cdot \vec{B}$$

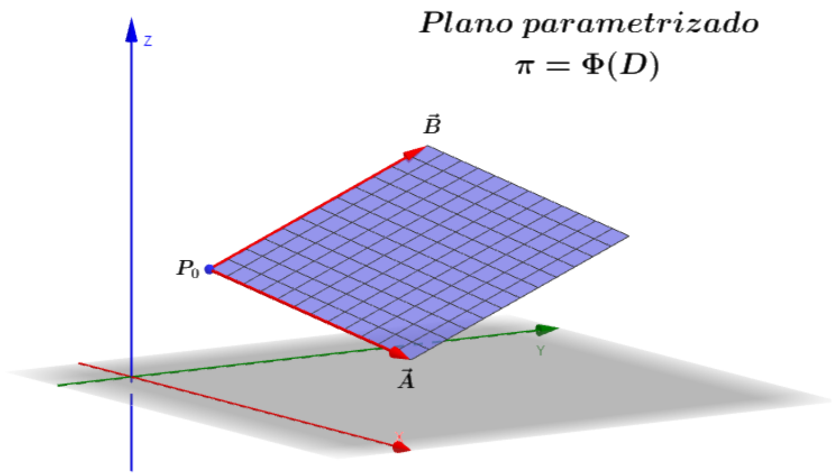
Es este caso, resulta

$$x = x(u, v) = x_0 + u \cdot a_1 + v \cdot b_1$$

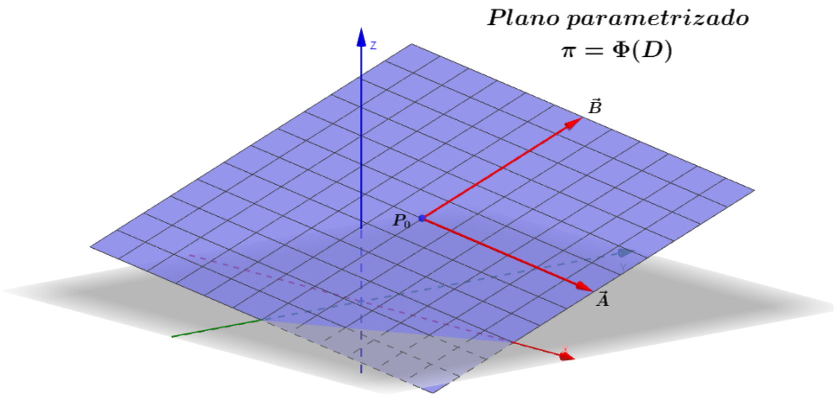
$$y = y(u, v) = y_0 + u \cdot a_2 + v \cdot b_2$$

$$z = z(u, v) = z_0 + u \cdot a_3 + v \cdot b_3$$

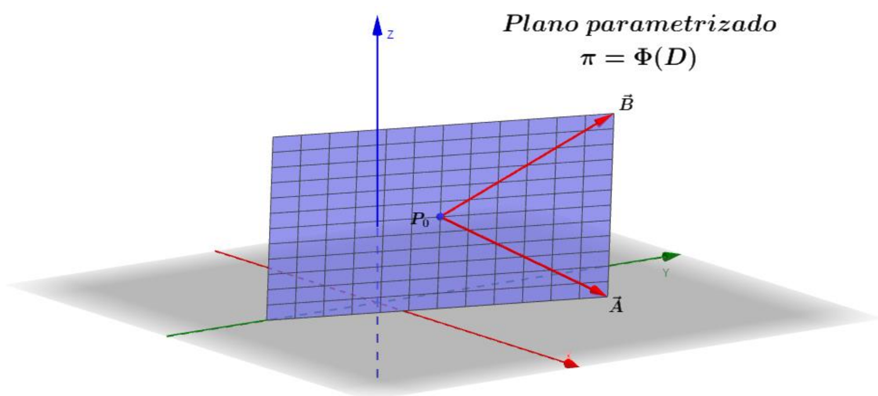
Obsérvese también que se ha tomado al conjunto $D = \mathbb{R}^2$ como dominio paramétrico. De este modo se logra parametrizar al plano π en su totalidad.



Superficie plana π que pasa por el punto P_0 y es paralelo a los vectores linealmente independientes $\vec{A}$ y $\vec{B}$, con dominio paramétrico $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1 \wedge 0 \leq v \leq 1\}$.



Superficie plana π que pasa por el punto P_0 y es paralelo a los vectores linealmente independientes $\vec{A}$ y $\vec{B}$, con dominio paramétrico $D^* = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq u \leq 1 \wedge -1 \leq v \leq 1\}$.



Superficie plana π que pasa por el punto P_0 y es paralelo a los vectores linealmente independientes $\vec{A}$ y $\vec{B}$, con dominio paramétrico $D^{**} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : |u| + |v| \leq 1\}$.

También se puede obtener una parametrización del plano procediendo como en el Ejemplo 1. Esto es, obtener la ecuación cartesiana del plano, que, si no se trata de un plano vertical, admite la forma

$$z = a + b \cdot x + c \cdot y$$

Y entonces definir la parametrización de Monge asociada

$$\overrightarrow{\Phi_1}: D = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{\Phi_1}(u, v) = (u, v, a + b \cdot u + c \cdot y)$$

<u>Coordenadas cilíndricas</u>

Como se ha visto en los ejemplos anteriores, ciertas parametrizaciones pueden definirse utilizando las coordenadas cartesianas x, y, z. Por ejemplo, en el caso de la gráfica de la función escalar $z = f(x, y)$, se define

$$\vec{\Phi}: Dom\, f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \vec{\Phi}(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big) = \big(u, v, f(u, v)\big)$$

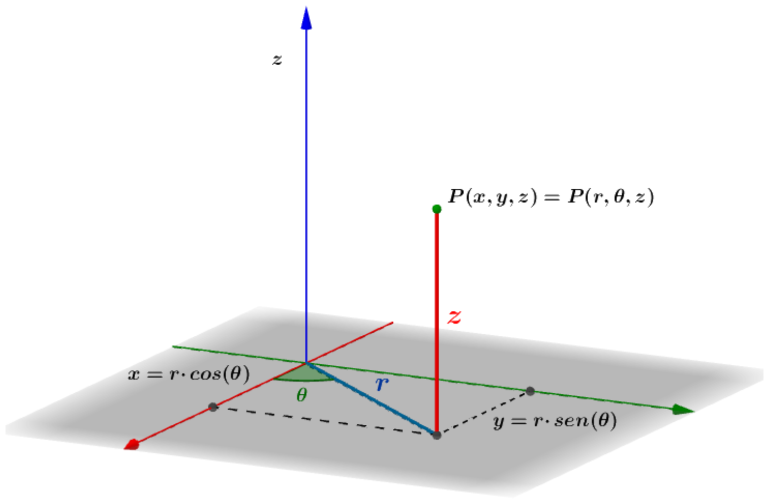
Una alternativa a las coordenadas cartesianas son las llamadas coordenadas cilíndricas r, θ y z. Que se relacionan con x, y y z, según las fórmulas de asociación de coordenadas

$$x(r, \theta, z) = r \cdot \cos(\theta)$$

$$y(r, \theta, z) = r \cdot \operatorname{sen}(\theta)$$

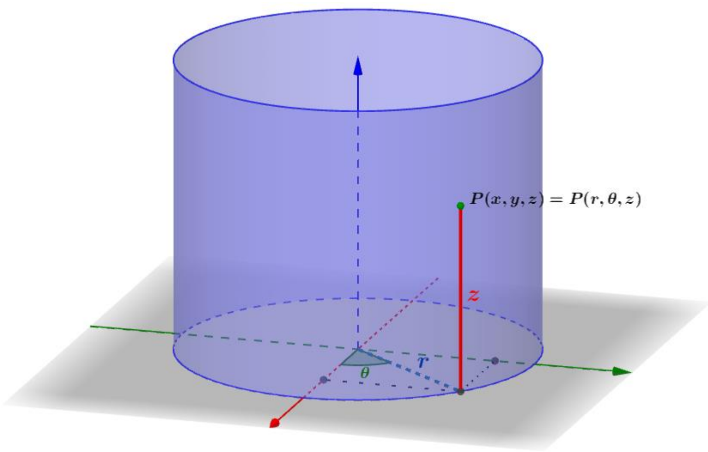
$$z(r, \theta, z) = z$$

En la figura que se muestra a continuación se expone la interpretación geométrica de estas tres coordenadas y del mismo gráfico se pueden deducir las fórmulas de equivalencia. Nótese que la coordenada radial $r \geq 0$ se interpreta como la distancia al origen del punto (x, y) del plano xy, la coordenada angular $0 \leq \theta < 2\pi$, se considera como la medida en radianes del ángulo que se genera cuando la parte positiva del eje x gira en sentido contrario al de las agujas del reloj, hasta coincidir con la semirrecta de vértice en el origen que pasa por (x, y), y la coordenada z se toma exactamente de la misma forma que en el sistema cartesiano, es decir como la distancia del punto $P = (x, y, z)$ hasta el plano xy.

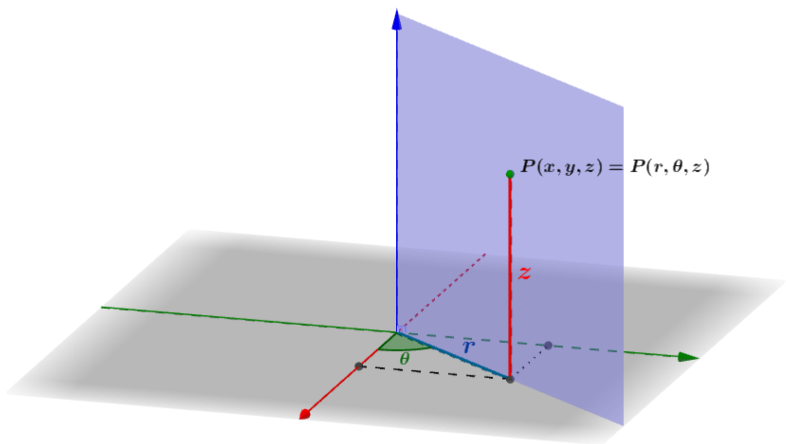


Interpretación geométrica de las coordenadas cilíndricas r, θ y z.

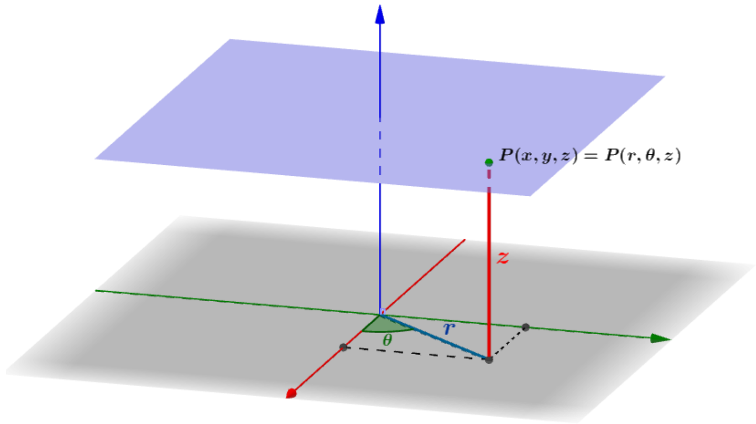
En las siguientes tres figuras que se ofrecen a continuación se muestra el tipo de superficie que se genera cuando se considera constante a r, θ o z.



Superficie cilíndrica generada al considerar constante a la coordenada cilíndrica radial r



Semiplano vertical generado al considerar constante a la coordenada cilíndrica angular θ



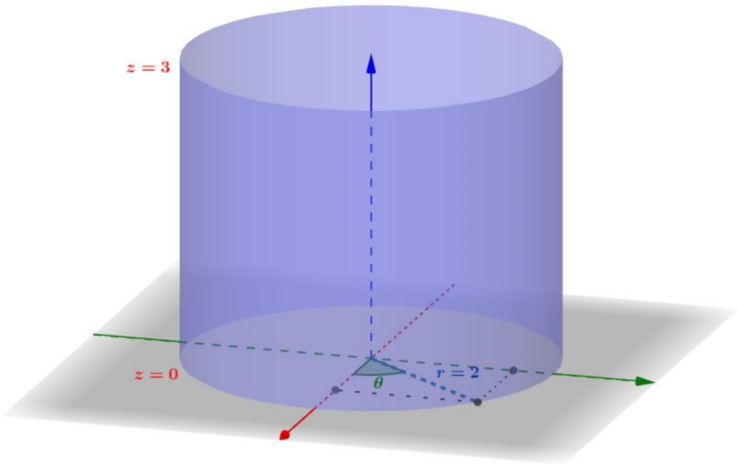
Plano horizontal generado al considerar constante a la coordenada cilíndrica z

Ejemplo 3. La función

$$\vec{\Phi}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3: \vec{\Phi}(\theta, z) = (2 \cdot \cos(\theta)\,, 2 \cdot \operatorname{sen}(\theta)\,, z)$$

Con dominio paramétrico $D = \{(\theta, z) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq z \leq 3\}$, parametriza la superficie cilíndrica

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = 4 \wedge 0 \leq z \leq 3\}$$



Superficie cilíndrica parametrizada por $\vec{\Phi}(\theta, z)$ del Ejemplo 3.

Coordenadas esféricas

En el sistema esférico, cada posición P del sistema cartesiano x, y, z, es representada por una terna ρ, θ, φ (rho, zeta y fi), que se conocen como las coordenadas esféricas del punto P. En este caso, las fórmulas de equivalencia son las siguientes

$$x(\rho, \theta, \varphi) = \rho \cdot \cos(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\varphi)$$

$$y(\rho, \theta, \varphi) = \rho \cdot \operatorname{sen}(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\varphi)$$

$$z(\rho, \theta, \varphi) = \rho \cdot \cos(\varphi)$$

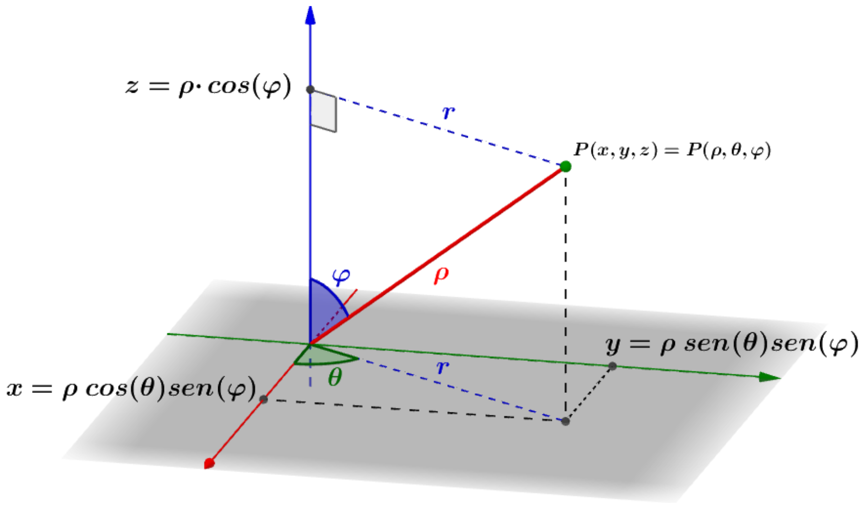
En la siguiente figura se exhibe la representación geométrica de estas coordenadas. En primer lugar, la coordenada $\rho \geq 0$ representa la distancia al origen de la terna (x, y, z). Por tal razón, resulta que

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

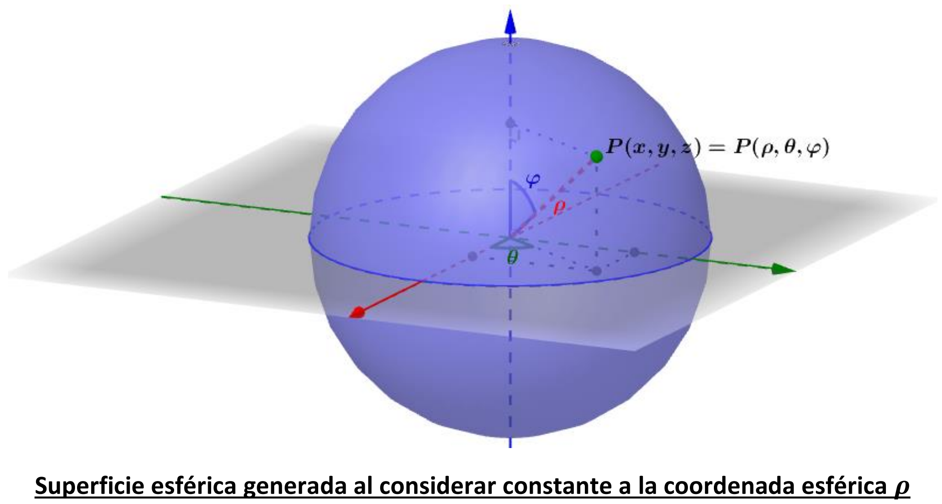
Por otra parte, la coordenada angular $0 \leq \theta < 2\pi$ se toma exactamente como en las coordenadas cilíndricas. Finalmente, la coordenada angular $0 \leq \varphi \leq \pi$ corresponde con la medida en radianes del ángulo que se genera cuando la parte positiva del eje z, en el semi plano correspondiente a un cierto valor de θ, gira hasta coincidir con la semirrecta de vértice en el origen que pasa por el punto P. Nótese que la coordenada cilíndrica r está asociada con las coordenadas esféricas según la siguiente relación

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \cdot \operatorname{sen}(\varphi)$$

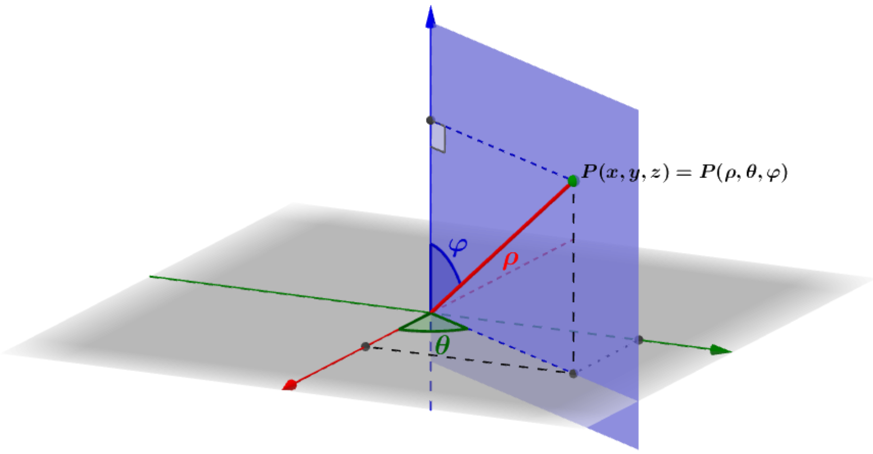
Obsérvese que en el triángulo de vértices O, P y P', la coordenada r se corresponde con la medida del cateto $\overline{OP'}$, opuesto al ángulo de vértice P de medida φ.



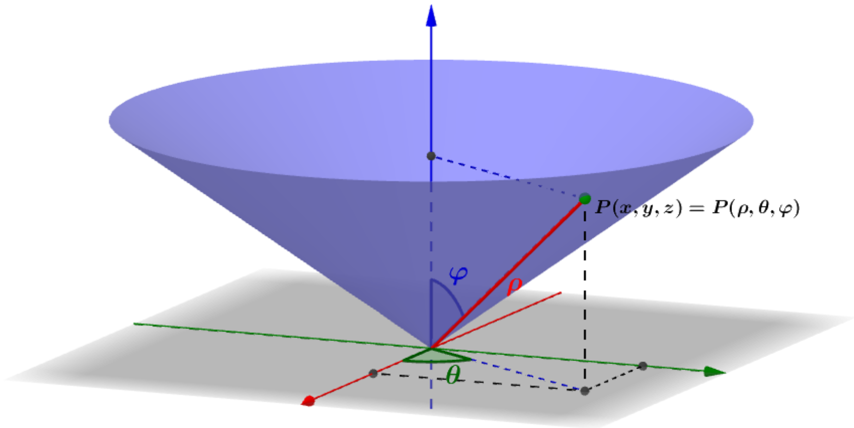
Interpretación geométrica de las coordenadas esféricas ρ, θ y φ.



Superficie esférica generada al considerar constante a la coordenada esférica ρ



Plano vertical generado al considerar constante a la coordenada esférica azimutal θ



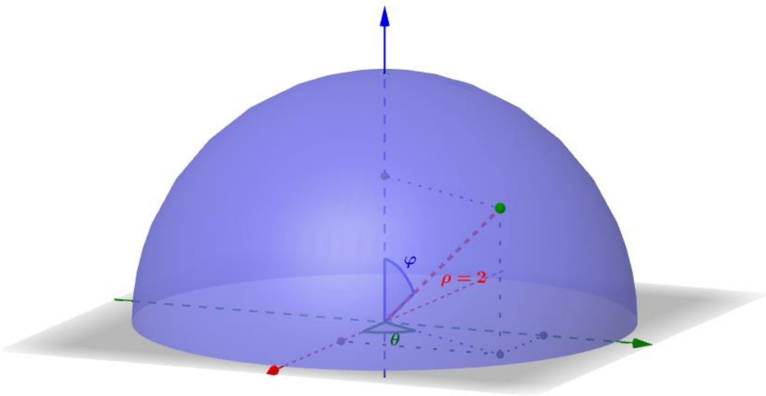
Superficie cónica generada al considerar constante a la coordenada esférica angular φ

Ejemplo 4. La función

$$\vec{\Phi}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \vec{\Phi}(\theta, \varphi) = (2 \cdot \cos(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\varphi), 2 \cdot \operatorname{sen}(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\varphi), 2 \cdot \cos(\varphi))$$

Con dominio paramétrico $D = \left\{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right\}$, parametriza la semiesfera

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \wedge z \geq 0\}$$



Semiesfera parametrizada por la función vectorial $\vec{\Phi}(\theta, \varphi)$.

Ejemplo 5. La parametrización esférica de la superficie cónica

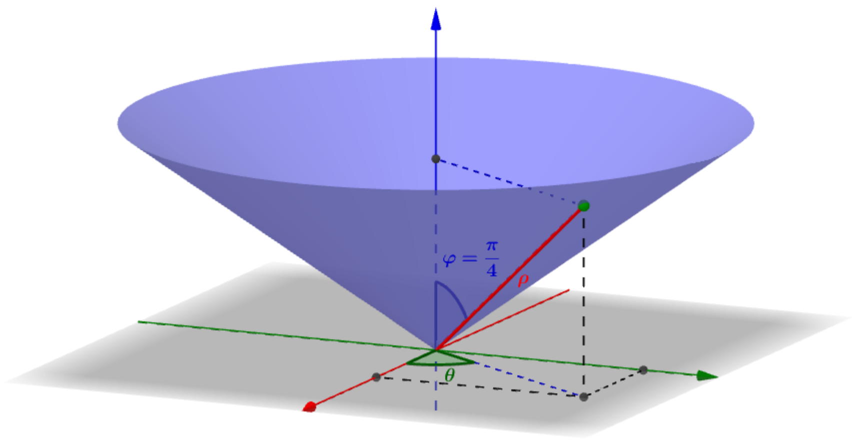
$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2} \wedge 0 \leq z \leq 4\right\}$$

es

$$\vec{\Phi}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \vec{\Phi}(\rho, \theta) = \left(\rho \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \cdot \rho \operatorname{sen}(\theta) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \rho \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Con dominio paramétrico

$$D = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 4 \cdot \sqrt{2} \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$



Superficie cónica parametrizada por $\vec{\Phi}(\rho, \theta)$.

En este caso, el valor constante de la variable esférica angular φ es

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

Por otra parte, también se puede ofrecer una parametrización cilíndrica para el mismo cono. Se trata de la siguiente parametrización

$$\vec{\Phi}_1: D_1 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \vec{\Phi}_1(r, \theta) = \big(x(r, \theta), y(r, \theta), z(r, \theta)\big) = (r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta), r)$$

$$S: \vec{\Phi}_1(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta), r)$$

Con dominio paramétrico

$$D_1 = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 4 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

También puede considerarse la parametrización cartesiana

$$S: \vec{\Phi}_2(x, y) = (x, y, z) = \left(x, y, \sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

Cuyo dominio paramétrico es el círculo

$$D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 4\right\}$$

Vectores tangentes y vector normal – Superficies regulares

Como se ha dicho al principio, se llama superficie parametrizada, a la imagen de una función vectorial

$$\vec{\Phi}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \vec{\Phi}(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$$

Definida sobre la región $D \subset \mathbb{R}^2$. Esto quiere decir que la función $\vec{\Phi}$ transforma a la superficie plana D en la superficie $S = \vec{\Phi}[D]$ de $\mathbb{R}^3$. Ahora bien, cuando se considera constante a alguna de las dos variables, por ejemplo, tomando $v = v_0$, se tiene la función

$$\vec{\Phi}(u, v_0) = \big(x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)\big)$$

Que dibuja una curva sobre la superficie S. Nótese que se trata de una función de una variable. De este modo, se obtiene el vector derivada parcial respecto de u

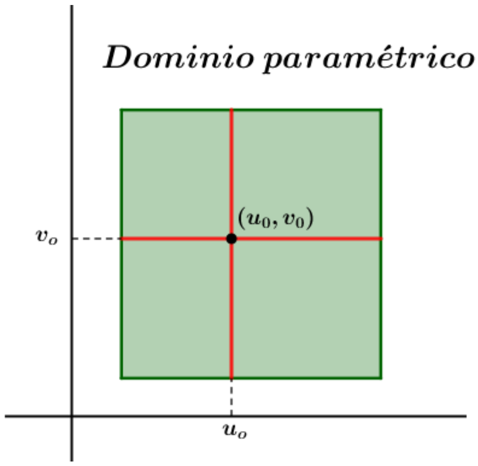
$$\vec{\Phi}_u(u, v_0) = \big(x_u(u, v_0), y_u(u, v_0), z_u(u, v_0)\big)$$

Que de existir y ser no nulo en el punto (u_0, v_0), resulta ser un vector tangente a la superficie S, en el punto $P_0 = \vec{\Phi}(u_0, v_0)$.

Del mismo modo, en las mismas condiciones de existencia y no nulidad, se tiene que el vector

$$\vec{\Phi}_v(u_0, v_0) = \big(x_v(u_0, v_0), y_v(u_0, v_0), z_v(u_0, v_0)\big)$$

es un vector tangente a la superficie S, en el punto $P_0 = \vec{\Phi}(u_0, v_0)$.



Se toman los segmentos de recta horizontal $u = u_0$ y $v = v_0$ en el dominio paramétrico D

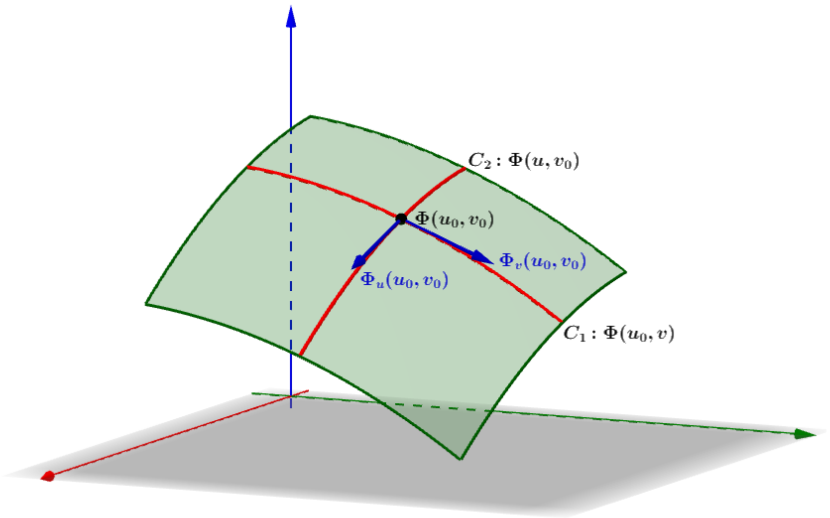
Luego, si los vectores tangentes

$$\vec{\Phi}_u(u_0, v_0) \qquad \vec{\Phi}_v(u_0, v_0)$$

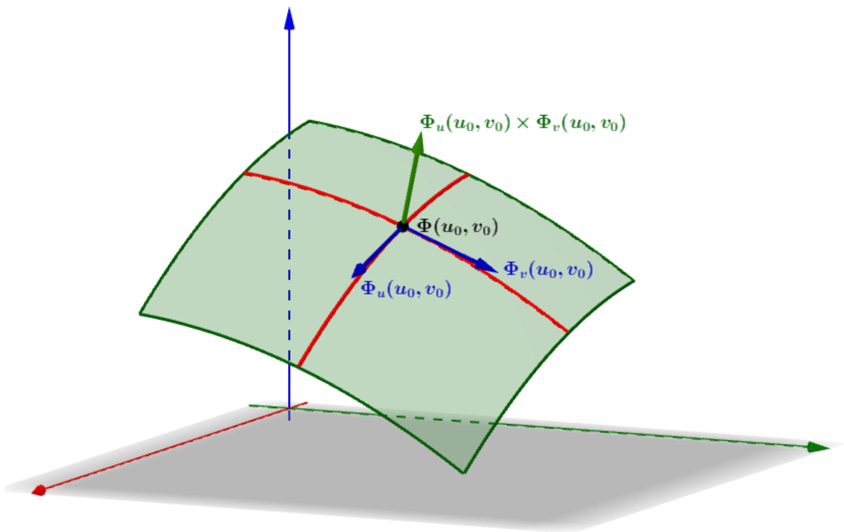
son linealmente independientes, se tiene que

$$\vec{\Phi}_u(u_0, v_0) \times \vec{\Phi}_v(u_0, v_0) \neq 0$$

representa a un vector normal a la superficie. Este es el vector normal a S, dado por la parametrización seleccionada.



Los vectores $\boldsymbol{\Phi}_u(\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{v_0})$ y $\boldsymbol{\Phi}_v(\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{v_0})$ son vectores tangentes a la superficie en el punto $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{v_0})$



El vector $\vec{n}_{\boldsymbol{\Phi}} = \boldsymbol{\Phi}_u(\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{v_0}) \times \boldsymbol{\Phi}_v(\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{v_0})$ es normal a la superficie en el punto $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u_0}, \boldsymbol{v_0})$

Este vector ofrece una orientación posible para S. Cuando el campo vectorial normal

$$\vec{n}_\Phi = \vec{n}(u, v) = \vec{\Phi}_u(u, v) \times \vec{\Phi}_v(u, v)$$

Es continuo en D, se dice que la superficie S es orientable, y que $\vec{n}_\Phi$ ofrece una posible orientación, o que la orienta según una de las dos caras de la superficie. Nótese que, en tal situación, se tienen dos orientaciones posibles, una dada por

$$\vec{N}_1 = \vec{n}(u,v) = \vec{\Phi}_u(u,v) \times \vec{\Phi}_v(u,v)$$

Y otra dada por

$$\vec{N}_2 = -\vec{N}_1 = \vec{\Phi}_v(u,v) \times \vec{\Phi}_u(u,v)$$

Definición. Se dice que la superficie orientable S parametrizada por la función vectorial

$$\vec{\Phi}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \vec{\Phi}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

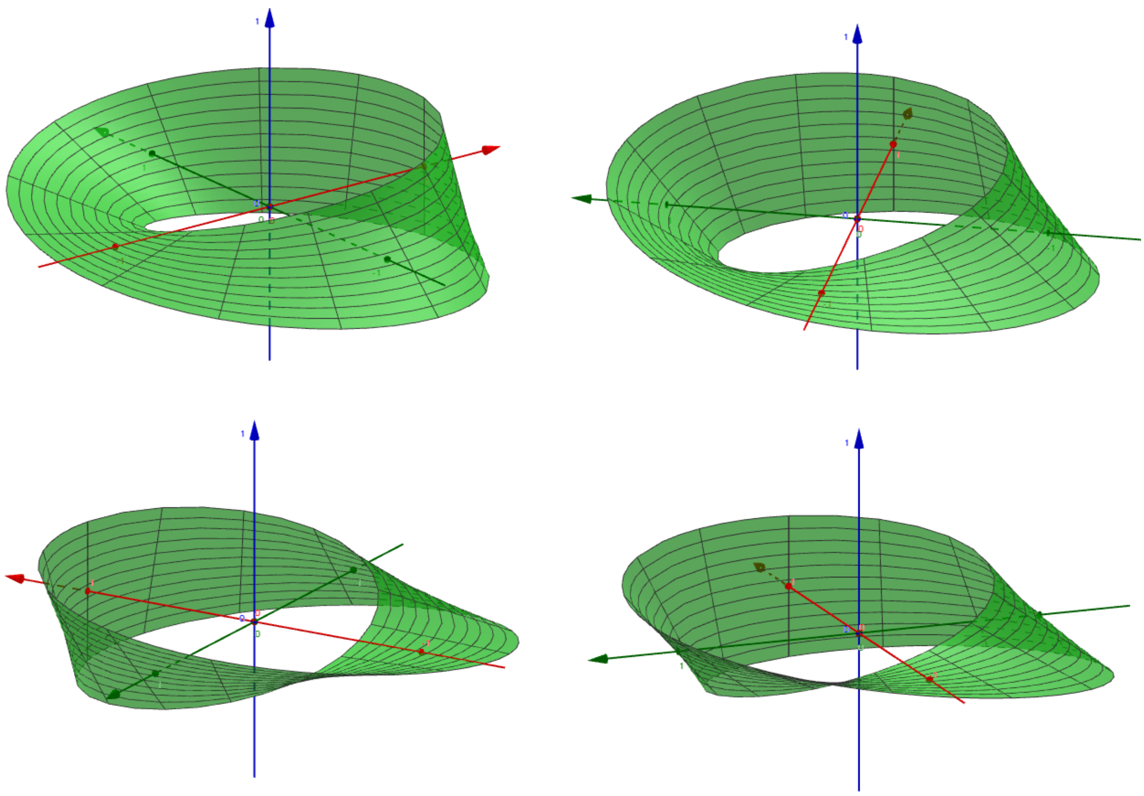
es <u>suave o regular</u> en D, si $\vec{\Phi}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en D y se cumple que

$$\vec{\Phi}_u(u,v) \times \vec{\Phi}_v(u,v) \neq 0$$

en la región D (salvo en conjuntos de medida nula).

De este modo, siendo $S = \vec{\Phi}[D]$ una superficie regular, se tiene que la ecuación del plano tangente a S en el punto $P_0 = \vec{\Phi}(u_0, v_0)$ es

$$\pi: \left[\vec{\Phi}_u(u,v) \times \vec{\Phi}_v(u,v)\right] \bullet (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$



<u>La conocida Cinta o Banda de Möbius es una superficie de una sola cara y por tal razón es no orientable</u>

Área de una superficie parametrizada

Definición. Sea la superficie orientable regular S parametrizada por la función vectorial

$$\vec{\Phi}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \vec{\Phi}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

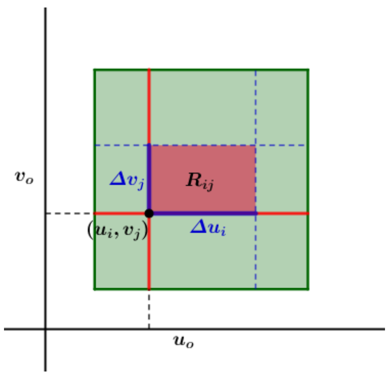
Se tiene que el área de S, denotada por $a(S)$, está dada por la integral doble

$$a(S) = \iint_S dS = \iint_D \left\| \vec{\Phi}_u(u,v) \times \vec{\Phi}_v(u,v) \right\| du dv$$

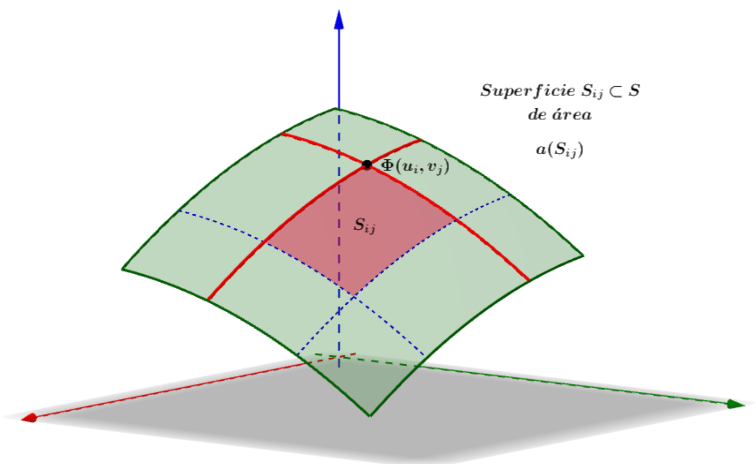
Supóngase que el dominio paramétrico D de $\vec{\Phi}$ es un rectángulo. Considerando una partición $P_{mn} = P_m \times P_n$ de D y tómese el sub-rectángulo $R_{ij} \subset D$. Defínase ahora la superficie

$$S_{ij}: \vec{\Phi}: R_{ij} \to \mathbb{R}^3 / \vec{\Phi}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

Que se obtiene al restringir $\vec{\Phi}$ sobre R_{ij}



El sub-rectángulo $R_{ij} \subset D$ genera la superficie $S_{ij} \subset S$



Superficie $S_{ij} \subset S$ generada al restringir a $\vec{\Phi}$ sobre el sub-rectángulo $R_{ij} \subset D$

Considérese ahora el paralelogramo r_{ij} generado por los dos vectores

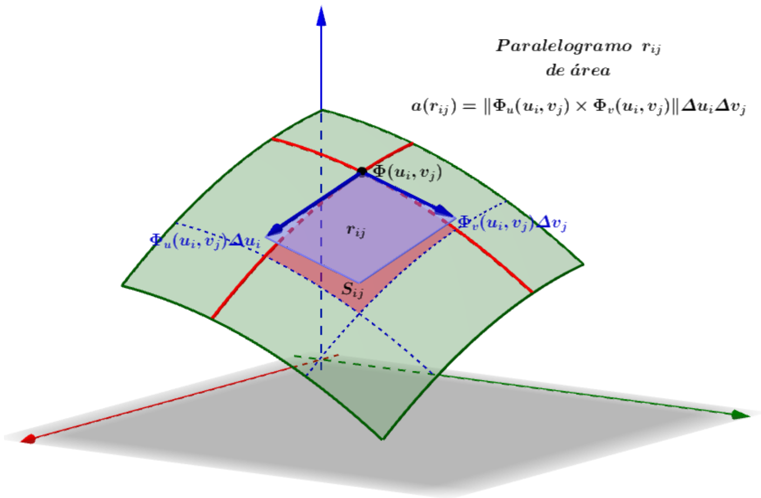
$$\vec{\Phi}_u(u_i, v_j)\Delta u_i \qquad \vec{\Phi}_v(u_i, v_j)\Delta v_j$$

Se tiene que el área $a(r_{ij})$ de r_{ij} está dada por

$$a(r_{ij}) = \|\vec{\Phi}_u(u_i, v_j)(u_{i+1} - u_i) \times \vec{\Phi}_v(u_i, v_j)(v_{j+1} - v_j)\| = \|\vec{\Phi}_u(u_i, v_j)\Delta u_i \times \vec{\Phi}_v(u_i, v_j)\Delta v_j\|$$

Es decir

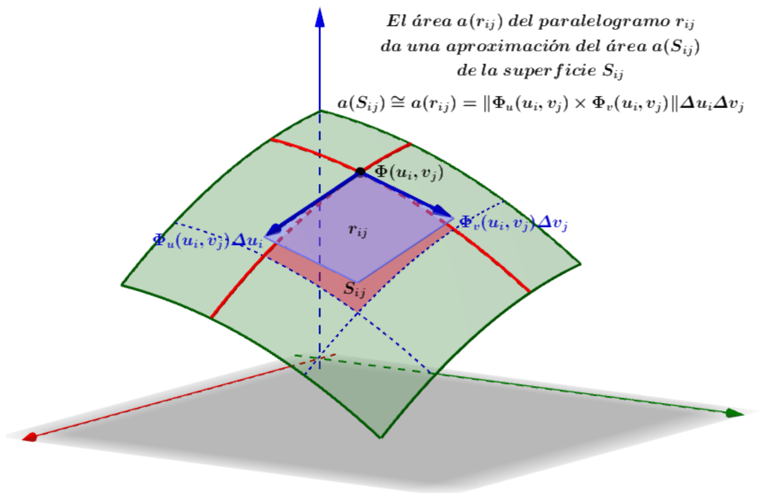
$$a(r_{ij}) = \|\vec{\Phi}_u(u_i, v_j) \times \vec{\Phi}_v(u_i, v_j)\|\Delta u_i \Delta v_j$$



<u>Paralelogramo r_{ij} generado por los vectores $\vec{\Phi}_u(u_i, v_j)\Delta u_i$ y $\vec{\Phi}_v(u_i, v_j)\Delta v_j$</u>

Si la función $\vec{\Phi}$ es "lo suficientemente buena", cuando Δu_i y Δv_j son lo suficientemente pequeños, se tiene la siguiente aproximación para el área de la superficie $S_{ij} \subset S$

$$a(S_{ij}) \cong a(r_{ij}) = \|\vec{\Phi}_u(u_i, v_j) \times \vec{\Phi}_v(u_i, v_j)\|\Delta u_i \Delta v_j$$



<u>El área del paralelogramo r_{ij} da una aproximación del área de la superficie</u>

De esta manera, una aproximación del área de la superficie parametrizada S se da a partir de la sumatoria

$$a(S) \cong \sum_{h=0}^{h=m-1} \sum_{k=0}^{k=n-1} \|\vec{\Phi}_u(u_h, v_k) \times \vec{\Phi}_v(u_h, v_k)\|\Delta u_h \Delta v_k$$

Lo que finalmente deviene en la integral doble que ofrece el área de la superficie parametrizada S en la definición precedente, a saber

$$\boldsymbol{a(S)} = \iint_S \boldsymbol{dS} = \iint_D \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \times \overrightarrow{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\right\| \boldsymbol{dudv}$$

Ejemplo 6. Calcular el área de la superficie esférica

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = \rho_0^2$$

Por lo realizado en el Ejemplo 4, se sabe que una parametrización de S es la siguiente

$$\overrightarrow{\Phi}(\theta,\varphi) = (\rho_0 \cdot \cos(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\varphi), \rho_0 \cdot \operatorname{sen}(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\varphi), \rho_0 \cdot \cos(\varphi))$$

Con dominio paramétrico

$$D = \{(\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq \varphi \leq \pi\}$$

Se tiene así que

$$\overrightarrow{\Phi}_\theta(\theta,\varphi) = (-\rho_0 \cdot \operatorname{sen}(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\varphi), \rho_0 \cdot \cos(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\varphi), 0)$$

$$\overrightarrow{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi) = (\rho_0 \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi), \rho_0 \cdot \operatorname{sen}(\theta) \cdot \cos(\varphi), -\rho_0 \cdot \operatorname{sen}(\varphi))$$

De este modo, resulta

$$\overrightarrow{\Phi}_\theta(\theta,\varphi) \times \overrightarrow{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\rho_0 \cdot \operatorname{sen}(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\varphi) & \rho_0 \cdot \cos(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\varphi) & 0 \\ \rho_0 \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) & \rho_0 \cdot \operatorname{sen}(\theta) \cdot \cos(\varphi) & -\rho_0 \cdot \operatorname{sen}(\varphi) \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{\Phi}_\theta(\theta,\varphi) \times \overrightarrow{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi) = (-\rho_0^2 \cos(\theta) \cdot \operatorname{sen}^2(\varphi), -\rho_0^2 \operatorname{sen}(\theta) \cdot \operatorname{sen}^2(\varphi), -\rho_0^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \operatorname{sen}(\varphi))$$

Y así

$$\left\|\overrightarrow{\Phi}_\theta(\theta,\varphi) \times \overrightarrow{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi)\right\|$$
$$= \sqrt{(-\rho_0^2 \cos(\theta) \cdot \operatorname{sen}^2(\varphi))^2 + (-\rho_0^2 \operatorname{sen}(\theta) \cdot \operatorname{sen}^2(\varphi))^2 + (-\rho_0^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \operatorname{sen}(\varphi))^2}$$

Esto es

$$\left\|\overrightarrow{\Phi}_\theta(\theta,\varphi) \times \overrightarrow{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi)\right\| = \sqrt{\rho_0^4(\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)) \cdot \operatorname{sen}^4(\varphi) + \rho_0^4 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \operatorname{sen}^2(\varphi)}$$

$$\left\|\overrightarrow{\Phi}_\theta(\theta,\varphi) \times \overrightarrow{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi)\right\| = \rho_0^2 \sqrt{\operatorname{sen}^2(\varphi) \cdot (\operatorname{sen}^2(\varphi) + \cos^2(\varphi))} = \rho_0^2 \sqrt{\operatorname{sen}^2(\varphi)}$$

$$\left\|\overrightarrow{\Phi}_\theta(\theta,\varphi) \times \overrightarrow{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi)\right\| = \rho_0^2 \sqrt{\operatorname{sen}^2(\varphi)} = \rho_0^2 |\operatorname{sen}(\varphi)|$$

Pero dado que en el intervalo

$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

Se tiene que

$$\operatorname{sen}(\varphi) \geq 0$$

Queda

$$\left\|\vec{\Phi}_\theta(\theta,\varphi) \times \vec{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi)\right\| = \rho_0^2 \cdot \operatorname{sen}(\varphi)$$

Luego

$$a(S) = \iint_D \left\|\vec{\Phi}_\theta(\theta,\varphi) \times \vec{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi)\right\| d\theta d\varphi = \iint_D \rho_0^2 \cdot \operatorname{sen}(\varphi)\, d\theta d\varphi$$

O sea

$$a(S) = \iint_D \left\|\vec{\Phi}_\theta(\theta,\varphi) \times \vec{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi)\right\| d\theta d\varphi = \rho_0^2 \left(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta\right)\left(\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \operatorname{sen}(\varphi)\, d\varphi\right)$$

Y así se obtiene que el área de la superficie esférica

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = \rho_0^2$$

es

$$a(S) = 4\pi\rho_0^2$$

Ejemplo 7. Cálculo del área del paralelogramo P generado por los vectores

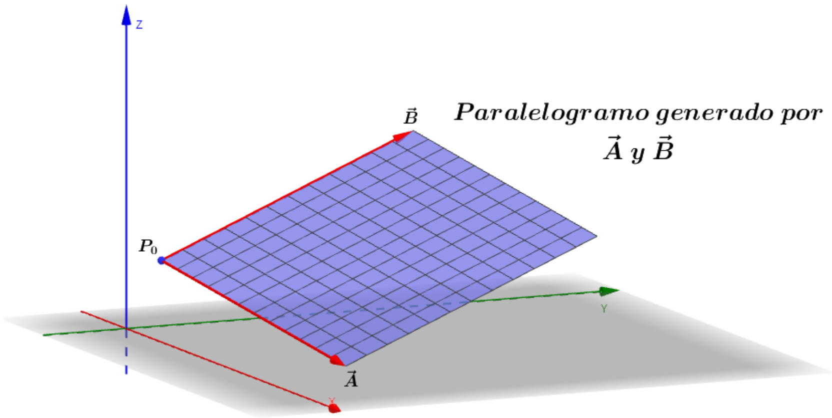
$$\vec{A} = (a_1, a_2, a_3) \qquad \vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$$

Nótese que si se sitúa al extremo inicial de estos dos vectores en el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, entonces el paralelogramo P es el sector S del plano π que pasa por el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y es paralelo a los vectores linealmente independientes $\vec{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$. Así, se tiene que P es la imagen de la parametrización

$$\vec{\Phi}(u, v) = P_0 + u \cdot \vec{A} + v \cdot \vec{B}$$

Con dominio paramétrico

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1 \wedge 0 \leq v \leq 1\}$$



Superficie plana π que pasa por el punto P_0 y es paralelo a los vectores linealmente independientes $\vec{A}$ y $\vec{B}$, con dominio paramétrico $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u \le 1 \wedge 0 \le v \le 1\}$.

Se tiene entonces

$$\vec{\Phi}_u(u, v) = \vec{A}$$

$$\vec{\Phi}_v(u, v) = \vec{B}$$

Luego

$$a(S) = \iint_D \left\|\vec{\Phi}_u(u, v) \times \vec{\Phi}_v(u, v)\right\| dudv = \iint_D \left\|\vec{A} \times \vec{B}\right\| dudv = \int_{v=0}^{v=1} \left(\int_{u=0}^{u=1} \left\|\vec{A} \times \vec{B}\right\| du \right) dv$$

Finalmente, el área del paralelogramo P generado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es

$$a(S) = \left\|\vec{A} \times \vec{B}\right\|$$

Ejemplo 8. Cálculo del área de la superficie cónica

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2} \wedge 0 \le z \le 4\right\}$$

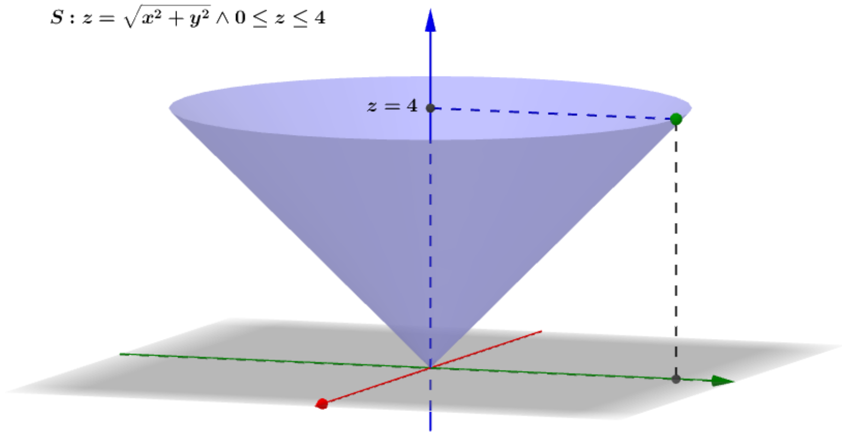
Para este caso se utiliza la parametrización cilíndrica de S

$$\vec{\Phi}(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta), r)$$

Con dominio paramétrico

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le r \le 4 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

Aunque para el cálculo del área de S se puede utilizar también la parametrización esférica.



Superficie cónica parametrizada por $\vec{\Phi}(r,\theta)$.

Se tiene así que

$$\vec{\Phi}_r(r,\theta) = (\cos(\theta)\,, \operatorname{sen}(\theta)\,, 1)$$

$$\vec{\Phi}_\theta(r,\theta) = (-r\operatorname{sen}(\theta)\,, r\cos(\theta)\,, 0)$$

De este modo, resulta

$$\vec{\Phi}_r(r,\theta) \times \vec{\Phi}_\theta(r,\theta) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) & 1 \\ -r\operatorname{sen}(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\Phi}_r(r,\theta) \times \vec{\Phi}_\theta(r,\theta) = (-r\cos(\theta)\,, -r\operatorname{sen}(\theta)\,, r)$$

Y así

$$\left\|\vec{\Phi}_r(r,\theta) \times \vec{\Phi}_\theta(r,\theta)\right\| = \sqrt{(-r\cos(\theta))^2 + (-r\operatorname{sen}(\theta))^2 + r^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r$$

Es decir que

$$\left\|\vec{\Phi}_r(r,\theta) \times \vec{\Phi}_\theta(r,\theta)\right\| = \sqrt{2}r$$

Entonces

$$a(S) = \iint_D \left\|\vec{\Phi}_r(r,\theta) \times \vec{\Phi}_\theta(r,\theta)\right\| dr d\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=4} \sqrt{2}r\, dr \right) d\theta = 16\sqrt{2}\,\pi$$

Esto significa que el área $a(S)$ de la superficie cónica

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2} \wedge 0 \leq z \leq 4\right\}$$

es

$$a(S) = 16\sqrt{2}\,\pi$$

Integral de superficie de un campo escalar

Definición. Sea el campo escalar

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}: w = f(x, y, z)$$

de clase $\mathcal{C}^0$ en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^3$. Y sea la <u>superficie regular orientable</u> $S \subset U$, parametrizada por la función vectorial

$$\vec{\Phi}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3: \vec{\Phi}(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$$

Se define la integral de superficie del campo escalar f sobre la superficie S como la integral doble

$$\iint_S f\, dS = \iint_D f\big[\vec{\Phi}(u, v)\big]\big\|\vec{\Phi}_u(u, v) \times \vec{\Phi}_v(u, v)\big\| dudv$$

Ejemplo 9. Cálculo de la integral de superficie del campo escalar

$$f(x, y, z) = z^2$$

sobre la superficie esférica

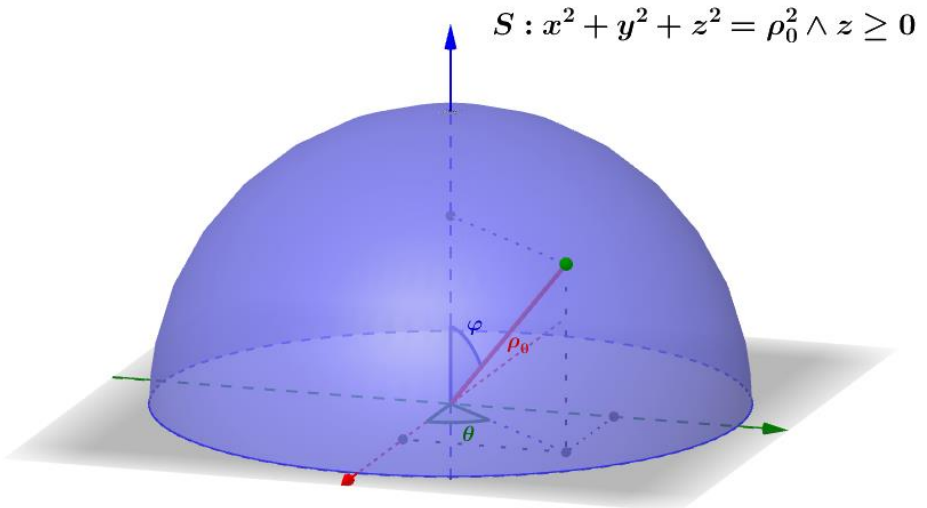
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = \rho_0^2 \wedge z \geq 0\}$$

Utilizando la parametrización esférica de S

$$\vec{\Phi}(\theta, \varphi) = (\rho_0 \cdot \cos(\theta) \cdot \mathrm{sen}(\varphi)\, , \rho_0 \cdot \mathrm{sen}(\theta) \cdot \mathrm{sen}(\varphi)\, , \rho_0 \cdot \cos(\varphi))$$

Con dominio paramétrico

$$D = \left\{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$



<u>Superficie esférica S parametrizada por $\vec{\Phi}(\theta, \varphi)$.</u>

Según lo realizado en el Ejemplo 6, resulta

$$\left\|\vec{\Phi}_\theta(\theta,\varphi)\times\vec{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi)\right\| = \rho_0^2\cdot\operatorname{sen}(\varphi)$$

Luego, la integral de superficie del campo escalar

$$f(x,y,z) = z^2$$

sobre la superficie esférica S, se expresa como

$$\iint_S f\,dS = \iint_D f\left[\vec{\Phi}(\theta,\varphi)\right]\left\|\vec{\Phi}_\theta(\theta,\varphi)\times\vec{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi)\right\|d\theta d\varphi = \iint_D (\rho_0\cdot\cos(\varphi))^2\rho_0^2\cdot\operatorname{sen}(\varphi)\,d\theta d\varphi$$

O sea

$$\iint_S f\,dS = \iint_D \rho_0^4\cdot\operatorname{sen}(\varphi)\cos^2(\varphi)\,d\theta d\varphi$$

Es decir

$$\iint_S f\,dS = \rho_0^4\left(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta\right)\left(\int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(\varphi)\cos^2(\varphi)\,d\varphi\right) = \rho_0^4\left(\theta\ \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\right)\left(-\frac{\cos^3(\varphi)}{3}\ \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}\right)$$

Y, en definitiva

$$\iint_S f\,dS = \frac{2}{3}\pi\rho_0^4$$