Álgebra y Geometría analítica II

Primer cuatrimestre de 2020

PROPIEDAD:

Sea $(E, \langle\ ;\ \rangle)$ un espacio euclídeo con un producto interno definido.
Sea S un subespacio de E tal que:

$$B = \{w_1; w_2; \ldots; w_k\} \text{ una BASE ORTOGONAL de } S.$$

Siendo w $\in S$ un vector cualquiera, resulta que:

$$[w]_B = \begin{pmatrix} \dfrac{\langle w\ ;\ w_1\rangle}{\langle w_1\ ;\ w_1\rangle} \\ \dfrac{\langle w\ ;\ w_2\rangle}{\langle w_2\ ;\ w_2\rangle} \\ \vdots \\ \dfrac{\langle w\ ;\ w_k\rangle}{\langle w_k\ ;\ w_k\rangle} \end{pmatrix}$$

Sea $(E, \langle\ ;\ \rangle)$ un espacio euclídeo con un producto interno definido. Sea S un subespacio de E tal que:

$B = \{w_1; w_2; \dots; w_k\}$ una BASE ORTOGONAL de S.

Siendo w $\in S$ un vector cualquiera, diremos que:

$$[w]_B = \begin{pmatrix} \dfrac{\langle w\ ;\ w_1\rangle}{\langle w_1\ ;\ w_1\rangle} \\ \dfrac{\langle w\ ;\ w_2\rangle}{\langle w_2\ ;\ w_2\rangle} \\ \vdots \\ \dfrac{\langle w\ ;\ w_k\rangle}{\langle w_k\ ;\ w_k\rangle} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{w = \frac{\langle w\ ;w_1\rangle}{\langle w_1\ ;w_1\rangle}.\,w_1 + \frac{\langle w\ ;w_2\rangle}{\langle w_2\ ;w_2\rangle}.\ w_2 + \ \dots\ + \frac{\langle w\ ;w_k\rangle}{\langle w_k\ ;w_k\rangle}.\ w_k}$$

DEFINICIÓN:

Sea $(E, \langle\ ;\ \rangle)$ un espacio euclídeo con un producto interno definido.
Sea S un subespacio de E tal que:

$B = \{w_1; w_2; \dots; w_k\}$ una BASE ORTOGONAL de S.

Siendo $v \in E$ un vector cualquiera, diremos que:

$$proy_S v = \frac{\langle v\,;w_1\rangle}{\langle w_1\,;w_1\rangle}.w_1 + \frac{\langle v\,;w_2\rangle}{\langle w_2\,;w_2\rangle}.\,w_2 + \ \dots\ + \frac{\langle v\,;w_k\rangle}{\langle w_k\,;w_k\rangle}.\,w_k$$

Observaciones:

- $proy_S v$ = La proyección del vector v sobre el subespacio S
- $proy_S v \in S$ $\Rightarrow$ Se puede escribir como c.l. de los vectores de una base de S
- Los escalares tendrán ese formato **SÓLO SI LA BASE ES ORTOGONAL**

Proyección ortogonal

VEREMOS DOS FORMAS DE HALLAR LA PROYECCIÓN DE UN VECTOR SOBRE UN SUBESPACIO

1. Si tengo (o puedo conseguir) una base ORTOGONAL del Subespacio:

$$proy_S v = \frac{\langle v\,;w_1\rangle}{\langle w_1\,;w_1\rangle}.\,w_1 + \frac{\langle v\,;w_2\rangle}{\langle w_2\,;w_2\rangle}.\,w_2 + \;\ldots\; + \frac{\langle v\,;w_k\rangle}{\langle w_k\,;w_k\rangle}.\,w_k$$

2. Si tengo (o puedo conseguir) una base cualquiera del COMPLEMENTO ORTOGONAL del Subespacio:

La vemos ahora..

Recordemos:

Sea $(E, \langle\, ;\, \rangle)$ un espacio euclídeo con un producto interno definido. Sea S un subespacio de E:

$$S + S^{\perp} = E \qquad S \cap S^{\perp} = \{\vec{0}_E\} \Rightarrow \boxed{S \oplus S^{\perp} = E}$$

Suma directa

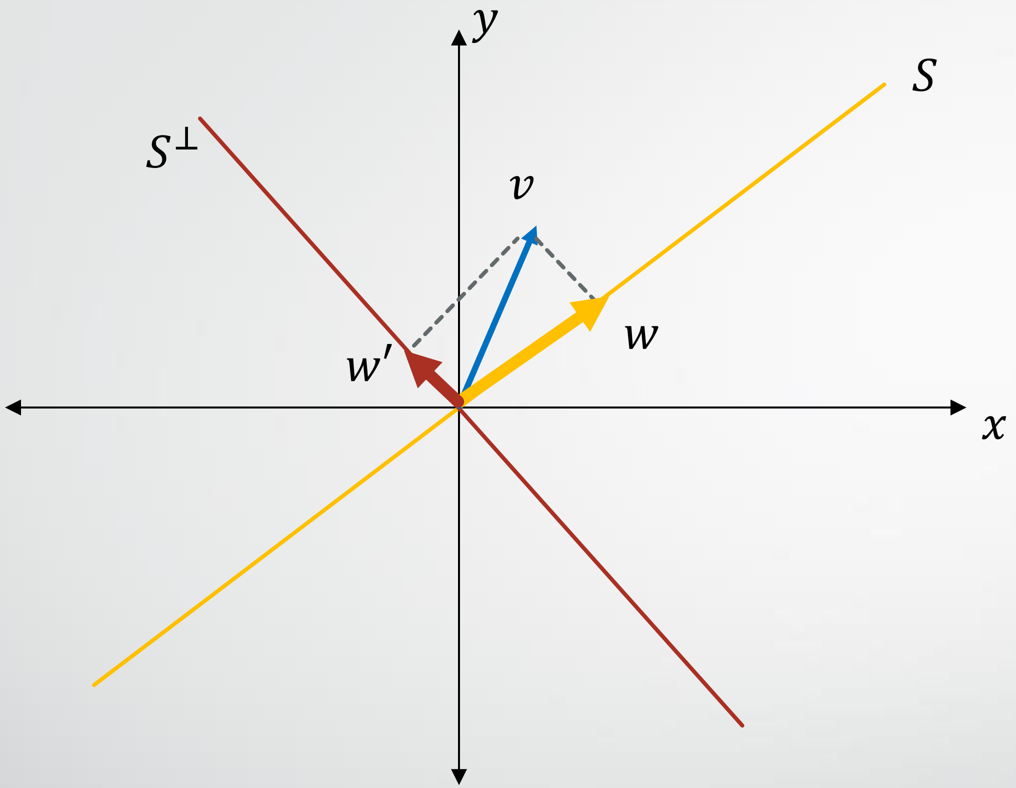
$$\Downarrow$$

Sea $v \in E$: Existen únicos $\mathrm{w} \in S$ y $\mathrm{w}' \in S^{\perp}$ tal que:

$$\boxed{v = w + w'}$$

Proyección ortogonal

Ejemplo en $(R^2 \,,\, \cdot\,)$



$\boxed{S\!: Subespacio\ de\ R^2}$

$\boxed{\dim S = 1}$

$\Downarrow$

$\boxed{\dim S^{\perp} = 1}$

$\boxed{S^{\perp}\!: una\ recta\ ortogonal\ a\ S\ en\ R^2\ con\ el\ producto\ escalar}$

$\boxed{v\!: un\ vector\ cualquiera\ en\ R^2}$

Sea $v \in R^2$: Existen únicos $w \in S$ y $w' \in S^{\perp}$ tal que:

$\boxed{v = w + w'}$ Veamos quienes son esos vectores w y w′

$\boxed{w = proy_S v}$ $\boxed{w' = proy_{S^{\perp}} v}$

2 Si tengo (o puedo conseguir) una base cualquiera del COMPLEMENTO ORTOGONAL del Subespacio:

Sea $(E, \langle \, ; \rangle)$ un espacio euclídeo de dimensión n con un producto interno definido.

Sea S un subespacio de E tal que: $B_S = \{v_1; v_2; \dots; v_k\}$ una base cualquiera de S.

Y sea el complemento ortogonal de S tal que $B_{S^\perp} = \{v_{k+1}; v_{k+2}; \dots; v_n\}$ una base cualquiera de $S^\perp$

Entonces si junto ambas bases, armo una base de $(E, \langle \, ; \rangle)$:

$$B = \{v_1; v_2; \dots; v_k\,; v_{k+1}; v_{k+2}; \dots; v_n\} \text{ base de E.}$$

Siendo $v \in E$ un vector cualquiera, entonces:

$$v = \underbrace{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k}_{proy_S v} + \underbrace{\alpha_{k+1} v_{k+1} + \alpha_{k+2} v_{k+2} + \dots + \alpha_n v_n}_{proy_{S^\perp} v}$$

<u>*EJEMPLO* 1</u>:

Sea en $(P_2; \langle\ ;\ \rangle)$ con $\langle p; q\rangle = p(-1).q(-1) + p(0).q(0) + p(1).q(1)$

Sea $S = \{p \in P_2\ /\ p(1) + 2p(-1) = 0\}$ subespacio. Hallar $proy_S v$ siendo $v = 2x - 2$

Lo haremos por ambos métodos para verificar que da lo mismo

1 Si tengo (o puedo conseguir) una base ORTOGONAL del Subespacio:

$$\boxed{proy_S v = \frac{\langle v\,;w_1\rangle}{\langle w_1\,;w_1\rangle}.w_1 + \frac{\langle v\,;w_2\rangle}{\langle w_2\,;w_2\rangle}.\,w_2 + \ \ldots\ + \frac{\langle v\,;w_k\rangle}{\langle w_k\,;w_k\rangle}.\,w_k}$$

Primero busco una base cualquiera del subespacio

$$p(x) = ax^2 + bx + c\ /\ a + b + c + 2(a - b + c) = 0 \ \Rightarrow\ \boxed{b = 3a + 3c}$$

$$p(x) = ax^2 + (3a + 3c)x + c \ \Rightarrow\ S = gen\,\{x^2 + 3x\,;3x + 1\}$$

Los gen son LI ya que son 2 y no son múltiplos

$$\boxed{B_S = \{x^2 + 3x\,;3x + 1\}}$$

Proyección ortogonal

$\boxed{B_S = \{x^2 + 3x \,;\, 3x + 1\}}$

Es una base ortogonal?

$\langle p; q \rangle = p(-1).q(-1) + p(0).q(0) + p(1).q(1)$

$\langle x^2 + 3x; 3x + 1 \rangle = (-2).(-2) + 0.1 + 4.4 = 20 \neq 0$

NO es una base ortogonal

$$B_{ortogonal} = \{w_1; w_2\}$$

MÉTODO DE GRAMM SCHMIDT

$$w_1 = v_1 \Rightarrow \boxed{w_1 = x^2 + 3x}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2; w_1 \rangle}{\langle w_1; w_1 \rangle}.w_1 \Rightarrow w_2 = 3x + 1 - \frac{\langle 3x+1; x^2+3x \rangle}{\langle x^2+3x; x^2+3x \rangle}.(x^2 + 3x)$$

$$w_2 = 3x + 1 - \frac{20}{20}.(x^2 + 3x) \Rightarrow \boxed{w_2 = -x^2 + 1}$$

$$\boxed{B_{ortogonal} = \{x^2 + 3x; -x^2 + 1\}}$$

Hallar $proy_S v$ siendo $v = 2x - 2$

$$\boxed{\langle p;q\rangle = p(-1).q(-1) + p(0).q(0) + p(1).q(1)}$$

1 Si tengo (o puedo conseguir) una base ORTOGONAL del Subespacio:

$$\boxed{proy_S v = \frac{\langle v\,;w_1\rangle}{\langle w_1\,;w_1\rangle}.\,w_1 + \frac{\langle v\,;w_2\rangle}{\langle w_2\,;w_2\rangle}.\,w_2 + \quad \dots \quad + \frac{\langle v\,;w_k\rangle}{\langle w_k\,;w_k\rangle}.\,w_k}$$

$$\boxed{B_{ortogonal} = \{x^2 + 3x; -x^2 + 1\}}$$

$$proy_S(2x-2) = \frac{\langle 2x-2\,;\,x^2+3x\rangle}{\langle\, x^2+3x\,;\,x^2+3x\rangle}.(\,x^2+3x) + \frac{\langle 2x-2\,;-x^2+1\rangle}{\langle -x^2+1;-x^2+1\rangle}.(-x^2+1)$$

$$proy_S(2x-2) = \frac{8}{20}.(\,x^2+3x) + \frac{(-2)}{1}.(-x^2+1)$$

$$\boxed{proy_S(2x-2) = \frac{12}{5}x^2 + \frac{6}{5}x - 2}$$

EJEMPLO 1:

Sea en $(P_2; \langle\ ;\ \rangle)$ con $\langle p; q\rangle = p(-1).q(-1) + p(0).q(0) + p(1).q(1)$

Sea $S = \{p \in P_2 \ / \ p(1) + 2p(-1) = 0\}$ subespacio. Hallar $proy_S v$ siendo $v = 2x - 2$

Lo haremos por ambos métodos para verificar que da lo mismo

2

Si tengo (o puedo conseguir) una base cualquiera del COMPLEMENTO ORTOGONAL del Subespacio:

Primero busco una base cualquiera del subespacio $\boxed{B_S = \{x^2 + 3x\,; 3x + 1\}}$

Luego busco una base cualquiera del Complemento ortogonal $\boxed{S^{\perp} = \{p \in P_2 \ / \ \langle\ p; v_S\ \rangle = 0\}}$

$$p(x) = ax^2 + bx + c \ / \quad \langle ax^2 + bx + c; x^2 + 3x\rangle = 0$$

$$\langle ax^2 + bx + c; 3x + 1\rangle = 0$$

EJEMPLO 1:

Sea en $(P_2; \langle\ ;\ \rangle)$ con $\langle p; q\rangle = p(-1).q(-1) + p(0).q(0) + p(1).q(1)$

Sea $S = \{p \in P_2\ /\ p(1) + 2p(-1) = 0\}$ subespacio. Hallar $proy_S v$ siendo $v = 2x - 2$

2 Si tengo (o puedo conseguir) una base cualquiera del COMPLEMENTO ORTOGONAL del Subespacio:

$$p(x) = ax^2 + bx + c\ /\ \langle ax^2 + bx + c; x^2 + 3x\rangle = 0$$

$$\langle ax^2 + bx + c; 3x + 1\rangle = 0$$

$\Rightarrow$ $(-2)(a - b + c) + 4(a + b + c) = 0$

$\Rightarrow$ $(-2)(a - b + c) + c + 4(a + b + c) = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{c} c = 0 \\ a = -3b \end{array}}$

$$p(x) = ax^2 + bx + c = -3bx^2 + bx$$

Un solo generador no nulo

$$\boxed{B_{S^\perp} = \{-3x^2 + x\}}$$

2 Si tengo (o puedo conseguir) una base cualquiera del COMPLEMENTO ORTOGONAL del Subespacio:

$$\boxed{B_S = \{x^2 + 3x\,;3x + 1\}} \qquad \boxed{B_{S^\perp} = \{-3x^2 + x\}}$$

$$\boxed{B = \{x^2 + 3x\,;3x + 1\,;-3x^2 + x\}}$$ ⇨ BASE DE P_2

Hallar $proy_S v$ siendo $v = 2x - 2$

$$2x - 2 = \underbrace{\alpha_1(x^2 + 3x) + \alpha_2(3x + 1)}_{proy_S v} + \underbrace{\alpha_3(-3x^2 + x)}_{proy_{S^\perp} v}$$

x^2: $\alpha_1 - 3\alpha_3 = 0$

x: $3\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 2$ ⇨

$T.I.$: $\alpha_2 = -2$

$\alpha_1 = \frac{12}{5}$

$\alpha_2 = -2$ ⇨

$\alpha_3 = \frac{4}{5}$

$$\boxed{proy_S v = \frac{12}{5}x^2 + \frac{6}{5}x - 2}$$

DEFINICIÓN:

Sea $(E, \langle\ ;\ \rangle)$ un espacio euclídeo con un producto interno definido.
Sea S un subespacio de E tal que:

Se define la distancia desde un vector v a un subespacio:

$$\boxed{dist(v, S) = \left\| proy_{S^{\perp}} v \right\| = \| v - proy_S v \|}$$

$$\boxed{v = proy_S v + proy_{S^{\perp}} v}$$

EJEMPLO 2:

Sea en $(R^{2x2};\langle\ ;\ \rangle)$ con $\langle A\,;B\ \rangle = tr(A.B^t)$

Sea W $= \{A \in R^{2x2}\ /\ a_{12} - 2a_{21} = a_{11}\}$ un subespacio. Hallar la distancia de v de W siendo $v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{dist(v, W) = \left\| proy_{W^\perp} v \right\|}$$

Primero debo dar una base cualquiera del subespacio para luego ver cómo hallo dicha proyección

$$A = \begin{pmatrix} a_{12} - 2a_{21} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow W = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Realizando el método corto,
DEBO DEMOSTRAR QUE SON LI

$$B_w = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

EJEMPLO 2:

Sea en $(R^{2x2};\langle\ ;\ \rangle)$ con $\langle A\,;B\,\rangle = tr(A.B^t)$

Hallar la distancia de v de W siendo $v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{dist(v,W) = \|proy_{W^\perp}v\|}$$

$$B_w = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Opciones:

Podemos hallar una base ortogonal de W y luego hallar la proyección sobre él. Y aplicar la fórmula $dist(v,W) = \|v - proy_W v\|$

Podemos hallar el complemento ortogonal de W y luego (ya que tendrá dimensión 1, hallar la proyección sobre él. Y aplicar la fórmula $dist(v,W) = \|proy_{W^\perp}v\|$

EJEMPLO 2:

Sea en $(R^{2x2}; \langle\ ;\ \rangle)$ con $\langle A\,; B\ \rangle = tr(A.B^t)$

Hallar la distancia de v de W siendo $v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{dist(v, W) = \|proy_{W^{\perp}} v\|}$$

$$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Busco una base cualquiera del Complemento ortogonal

$$\boxed{W^{\perp} = \{v \in R^{2x2} \,/\, \langle\ v; v_W\ \rangle = 0\}}$$

$$v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ / \quad \begin{array}{l} \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} d = 0 \\ a = -b \\ c = -2b \end{array}}$$

EJEMPLO 2:

Sea en $(R^{2x2};\langle\ ;\ \rangle)$ con $\langle A\ ;B\ \rangle = tr(A.B^t)$

Hallar la distancia de v de W siendo $v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{dist(v,W) = \|proy_{W^\perp}v\|}$$

$$v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,/\, \boxed{\begin{matrix} d = 0 \\ a = -b \\ \mathrm{c} = -2\mathrm{b} \end{matrix}} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} -b & b \\ -2b & 0 \end{pmatrix}$$

Un solo generador no nulo

$$\boxed{B_{W^\perp} = \left\{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right\}}$$

$proy_{W^\perp}v \Rightarrow$ Como el complemento ortogonal tiene dimensión 1, la base encontrada ya es ortogonal.. Entonces usaremos la fórmula para encontrar dicha proyección

$$proy_{W^\perp}v = \frac{\langle v\ ;w_1\rangle}{\langle w_1\ ;w_1\rangle}.w_1 = \frac{\left\langle\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right\rangle}.\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{6}.\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 2:

Sea en $(R^{2x2}; \langle\ ;\ \rangle)$ con $\langle A\,;B\,\rangle = tr(A.B^t)$

Hallar la distancia de v de W siendo $v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{dist(v,W) = \left\|proy_{W^\perp}v\right\|}$$

$$proy_{W^\perp}v = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$dist(v,W) = \left\|\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} \right\rangle} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$