Extremos condicionados.
Multiplicador de Lagrange.

Guía de clase. Com 02

Situación posible, se tiene una función $z = f(x, y)$ junto con una ecuación $g(x, y) = 0$.
$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, A es un conjunto abierto y $f \in C^1$ en A, además se tiene el siguiente conjunto caracterizado por una curva en el dominio de f,

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\} \subseteq A$

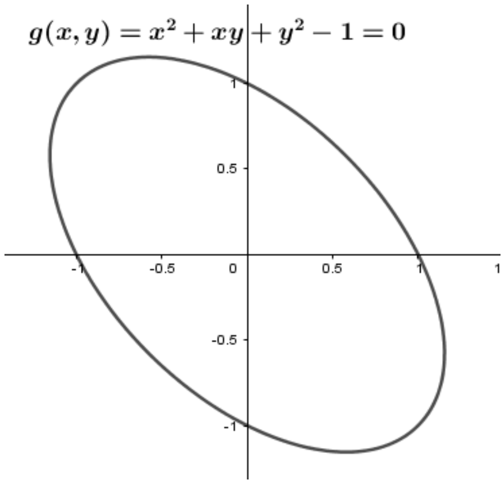
Se quieren hallar máximo y/o mínimo de f sólo para los puntos de B.

Por ejemplo

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

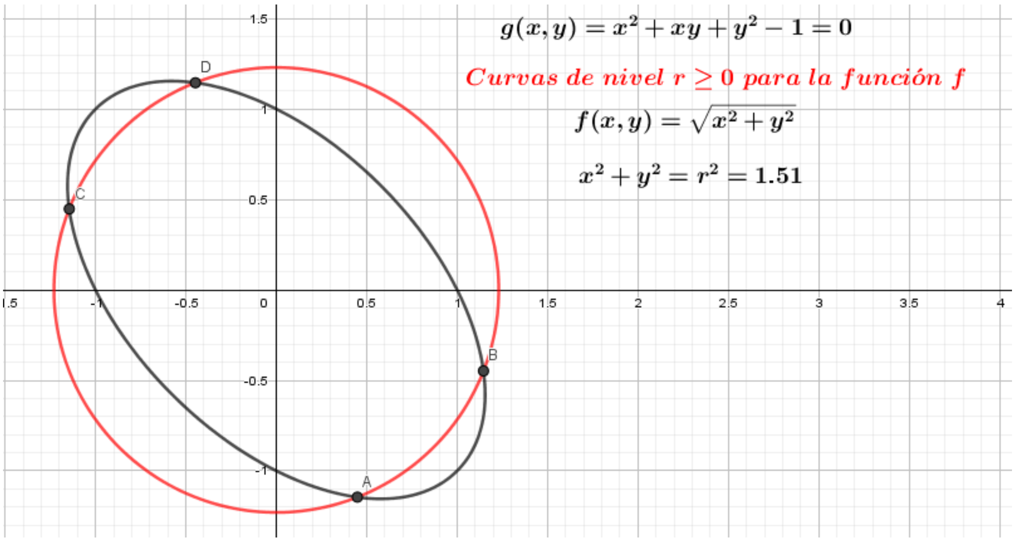
$$g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$$

Hallar el máximo y el mínimo de f para los puntos de $g(x, y) = 0$

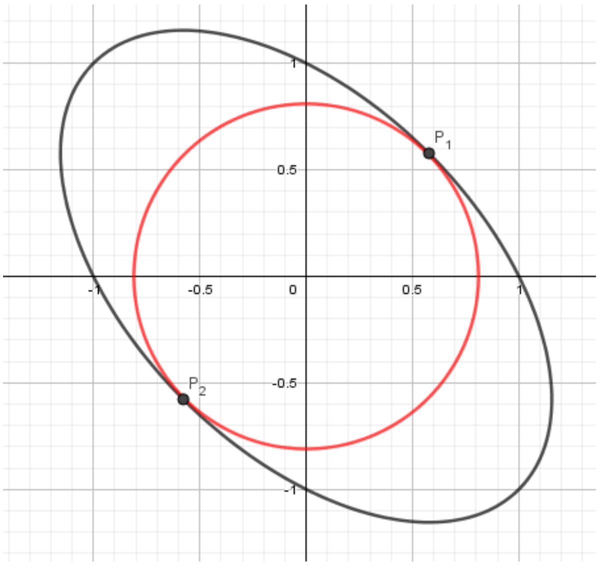


Las curvas de nivel de f son circunferencias centradas en el origen

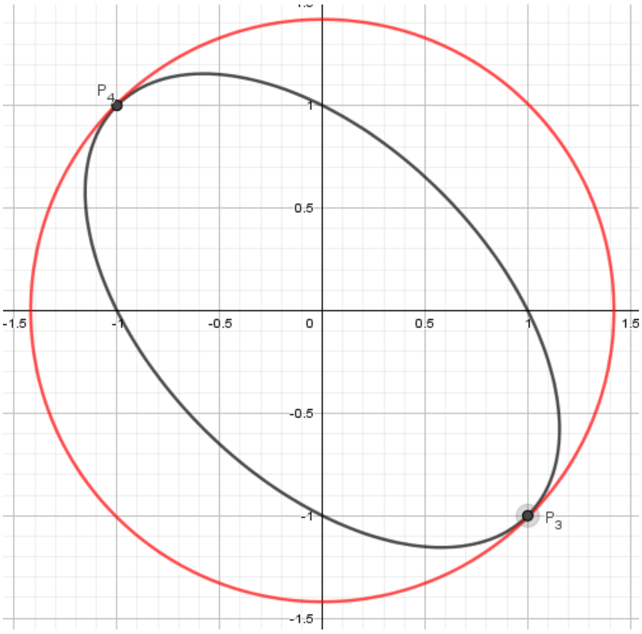
$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$



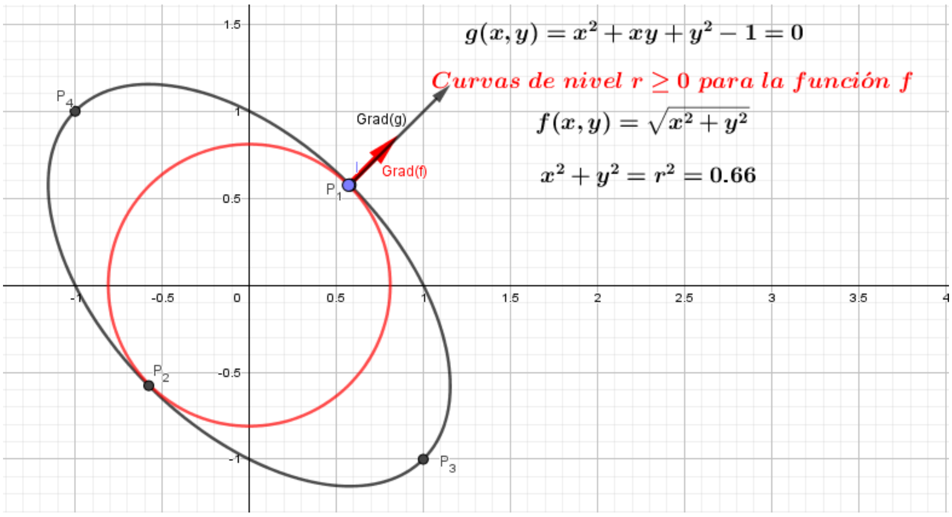
Puede intuirse que los puntos de la curva $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ más cercanos al origen corresponden a un $r_{\min}$ tal que en dichos puntos las curvas $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ y $x^2 + y^2 = r_{\min}^2$, son tangentes.



Por otro lado, los puntos más lejanos al origen de la curva $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ corresponden a un $r_{\max}$ de manera que en dichos puntos las curvas $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ y $x^2 + y^2 = r_{\max}^2$, son tangentes.



También, en los puntos de tangencia los gradientes son paralelos



Link al applet de geogebra que permite experimentar lo descripto recientemente.

https://www.geogebra.org/m/kqkdrtnc

De lo expuesto geométricamente resulta:

MÉTODO DE LA CONDICIÓN NECESARIA. CLASIFICACIÓN POR COMPARACIÓN.

Dada la función $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ siendo A un conjunto abierto y no vacío de $\mathbb{R}^2$ y $f \in C^1$, y dada la curva C de ecuación $g(x,y) = 0$ contenida en A y $g \in C^1$, f tendrá un *máximo* o un *mínimo* sobre (x_0, y_0) , un punto de C, si el gradiente de f en (x_0, y_0) y el gradiente de g en (x_0, y_0), satisfacen la ecuación

$$\nabla f(x_0, y_0) = \underbrace{\lambda}_{\substack{Multiplicador \\ de\ Lagrange}} \nabla g(x_0, y_0) \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{R}$$

De esta manera, el problema de hallar la existencia de extremos de f para puntos de C, consiste primero en hallar ternas (x_0, y_0, λ) que satisfagan las ecuaciones

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda\, \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Y luego, con los puntos hallados, comparar sus imágenes para identificar al/los punto/s que da/n el valor máximo de f y el/los punto/s que da/n el valor mínimo de f.

Observación: si $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$, (x_0, y_0) es un punto crítico de f, entonces $\lambda = 0$, pero si $\nabla g(x_0, y_0) = (0,0)$, la relación de paralelismo entre los gradientes es trivial (el vector nulo es paralelo a cualquier vector) y el sistema de ecuaciones puede no tener solución, se pedirá que $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

Ejemplo 1:

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{función distancia}$$

$$g(x,y) = x^2 + xy + y^2 = 1$$

Antes de avanzar con el planteo y resolución, consideremos lo siguiente

La función $y = \sqrt{x}$ es estrictamente creciente, entonces (i) y (ii) son equivalentes.

$$\begin{cases} (i) \;\; 0 \le x_1 < x_2 \\ (ii) \;\; \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (i) \quad x_1^2 + y_1^2 < x_2^2 + y_2^2 \\ (ii) \; \sqrt{x_1^2 + y_1^2} < \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \end{cases}$$

Buscar extremos de f es equivalente a buscar extremos de $x^2 + y^2$

Usaremos la función

$$\tilde{f}(x, y) = x^2 + y^2 = \tilde{d}(x, y) = d^2(x, y)$$

Y

$$g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} \nabla\tilde{f}(x, y) = \lambda\, \nabla g(x, y) \\ \quad g(x, y) = 0 \end{cases}$$

$$\nabla\tilde{f}(x, y) = (2x, 2y)$$

$$\nabla g(x, y) = (2x + y, 2y + x)$$

$$\nabla\tilde{f}(x, y) = \underline{(2x, 2y)} = \lambda\nabla g(x, y) = \underline{\lambda(2x + y, 2y + x)}$$

$$\begin{cases} 2x = \lambda(2x + y) \\ 2y = \lambda(2y + x) \end{cases} \quad \text{(INCOMPLETO)}$$

$$\begin{cases} 2x = \lambda(2x + y) & \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{2x}{2x + y} \\ 2y = \lambda(2y + x) & \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{2y}{2y + x} \\ g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{2x}{2x+y}=\frac{2y}{2y+x} \Leftrightarrow 4xy+2x^2=4xy+2y^2 \Leftrightarrow x^2=y^2 \Leftrightarrow y=\pm x$$

$$|x|=|y| \quad \pm x=\pm y$$

Si $y=x$: $\quad x^2+xx+x^2-1=0, \qquad 3x^2-1=0, \qquad x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

Puntos para evaluar: $P_1=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right), P_2=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

Si $y=-x$: $\quad x^2+x(-x)+(-x)^2-1=0, \quad x^2-1=0, \;\; x=\pm 1$

Nuevos puntos para evaluar: $P_3=(1,-1), P_4=(-1,1)$

$$f(P_i)$$

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$f(P_1)=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$f(P_2)=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$f(P_3)=\sqrt{2}$$

$$f(P_4)=\sqrt{2}$$

P_1 y P_2 son los puntos de la elipse más cercanos al origen

P_3 y P_4 son los puntos más lejanos al origen.

Ejemplo 2:

Dada la curva de ecuación $x^4+y^4=4$, hallar sus puntos más cercanos al origen de coordenadas y sus puntos más lejanos.

Para resolver ejercicios de extremos condicionados dónde la función a extremar es la función distancia al origen $d_{(x,y)} = \sqrt{x^2+y^2}$, se usará para simplificar los cálculos el cuadrado de la función distancia que se lo identificó como

$$\tilde{d}_{(x,y)} = x^2 + y^2$$

Llamaremos g a la función (creamos g)

$$g(x,y) = x^4 + y^4 - 4 = 0$$

De esta manera la condición del multiplicador de Lagrange queda

$$\nabla\tilde{d}_{(x,y)} = \lambda\nabla g_{(x,y)}$$

$$\nabla\tilde{d}_{(x,y)} = (2x, 2y)$$

$$\nabla g_{(x,y)} = (4x^3, 4y^3)$$

$$(2x, 2y) = \lambda(4x^3, 4y^3) = (4\,\lambda\, x^3, 4\,\lambda\, y^3)$$

Resultando el sistema

$$\begin{cases} 2x = 4\,\lambda\, x^3 \\ 2y = 4\,\lambda\, y^3 \\ g_{(x,y)} = x^4 + y^4 - 4 = 0 \end{cases}$$

De $2x = 4\,\lambda\, x^3$, $\quad x - 2\lambda x^3 = 0$, $\quad x(1 - 2\lambda x^2) = 0$

resultan

$$x = 0 \wedge \lambda\ libre \quad \text{o,} \quad x \neq 0 \wedge x^2 = \frac{1}{2\lambda}$$

De $2y = 4\,\lambda\, y^3$ resultan $y = 0 \wedge \lambda\ libre$ o, y$\neq 0 \wedge y^2 = \frac{1}{2\lambda}$

Interactuando con $g_{(x,y)} = x^4 + y^4 - 4 = 0$, resultan los puntos candidatos a extremos absolutos:

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2+\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2-4=0$$

$$P_{1,2}=\left(0,\pm\sqrt{2}\right),\qquad P_{3,4}=\left(\pm\sqrt{2},0\right),\qquad P_{5,6,7,8}=\left(\pm\sqrt[4]{2},\pm\sqrt[4]{2}\right)$$

Finalmente, usando la función distancia resultan los puntos $P_{1,2,3,4}$ son los más cercanos al origen a distancia $\sqrt{2}$, y $P_{5,6,7,8}$, son los puntos más lejanos al origen con distancia $\sqrt{2\sqrt{2}}$

MÉTODO DE LA FUNCIÓN LAGRANGIANA. HESSIANO LIMITADO (ORLADO)

Teorema. Sean $f: A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ y $g: A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dos funciones de clase $\mathcal{C}^1$ en el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$, y sea el conjunto

$$S=\{(x,y)\in A/g(x,y)=0\}$$

Supóngase que en $(x_0,y_0)\in S$, la función f posee un punto de extremo condicionado en S, es decir que existe un entorno U de centro en (x_0,y_0) tal que

$$f(x,y)\le f(x_0,y_0)\ \vee\ f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$$

para todo $(x,y)\in U\cap S$. Supóngase además que

$$\nabla g(x_0,y_0)\neq\vec{0}$$

Entonces, existe un número real λ_0 (lambda cero) tal que el punto (x_0,y_0,λ_0) es un punto crítico de la función lagrangiana

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda.g(x,y)$$

Es decir que, en tales circunstancias, el punto (x_0,y_0,λ_0) es solución del sistema

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\lambda\cdot\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)+\lambda\cdot\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=g(x,y)=0\end{cases}$$

La variable auxiliar "λ" que interviene en el teorema anterior, se conoce como "multiplicador de Lagrange".

Obsérvese que el teorema anterior permite hallar, siempre que se cumplan las condiciones establecidas, posibles puntos de extremos condicionados, pues ocurre que no todo punto crítico (x_0, y_0, λ_0) de la función lagrangiana, estará asociado a un punto de extremo condicionado de f.

En el siguiente resultado se dan condiciones suficientes para la existencia de extremos condicionados a partir del llamado *hessiano limitado (orlado)*.

Teorema. Sean $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones de clase $\mathcal{C}^2$ en el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$, y sea el conjunto

$$S = \{(x, y) \in A / g(x, y) = 0\}$$

Supóngase que en el punto $(x_0, y_0) \in S$, se cumple que

$$\nabla g(x_0, y_0) \neq \vec{0}$$

y supóngase además que existe el número real λ_0 tal que (x_0, y_0, λ_0) es un punto crítico de la función lagrangiana

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, g(x, y)$$

Sea el *hessiano limitado* de $L(x, y, \lambda)$ en (x_0, y_0, λ_0):

$$\overline{H}L(x_0, y_0, \lambda_0) = \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & -\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, y_0, \lambda_0) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ -\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}$$

i) Si $\overline{H}L(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$, entonces f posee un punto de máximo local condicionado en (x_0, y_0).

ii) Si $\overline{H}L(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$, entonces f posee un punto de mínimo local condicionado en (x_0, y_0).

$iii)$ Si $\overline{H}L(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$, no es posible, con tal información, determinar la naturaleza del punto (x_0, y_0).