Resolución TP6:

Ejercicio 12 - a

Hallar los puntos críticos para $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy$. Además, determinar si son máximos locales, mínimos locales o puntos de ensilladura y calcular sus imágenes.

Herramientas:

- Primeras derivadas para calcular Pc (léase puntos críticos a partir de ahora).
- Segundas derivadas para formar Matriz Hessiana.
- Matriz Hessiana en cada Pc para determinar la clasificación.

Para empezar:

- El dominio de la función es todo $\mathbb{R}^2$ por lo que no tenemos restricción alguna para los puntos que hallaremos
- Los puntos críticos que buscamos son de la forma $Pc_n = (x_n, y_n)$

Primeras Derivadas:

- Recuérdese: Al derivar en x la variable y actúa como constante, al derivar en y la variable x actúa como constante.

$$f_x(x,y) = 2x + y$$
$$f_y(x,y) = -2y + x$$

Segundas Derivadas:

- Recuérdese: Trabajamos con funciones cuyas derivadas cruzadas son iguales.

$$f_{xx}(x,y) = 2$$
$$f_{xy}(x,y) = 1$$
$$f_{yx}(x,y) = 1$$
$$f_{yy}(x,y) = -2$$

Matriz Hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Buscando Puntos Críticos:

Recordar: la condición que los Pc deben cumplir es:

$$\nabla f(x,y) = (0,0)$$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

Entonces aplicado a este caso:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ -2y + x = 0 \end{cases}$$

o también

$$\begin{cases} y = -2x \\ x = 2y \end{cases}$$

Dicho sistema se puede resolver por medio de los métodos de sustitución, igualación, sumas y restas o determinantes. Aunque se puede percibir que ambas rectas se cruzan en el origen. Así determinamos el valor del único Pc que existe en esta función. (no tienen por qué ser siempre muchos).

$$Pc_1 = (0,0)$$

Clasificando:

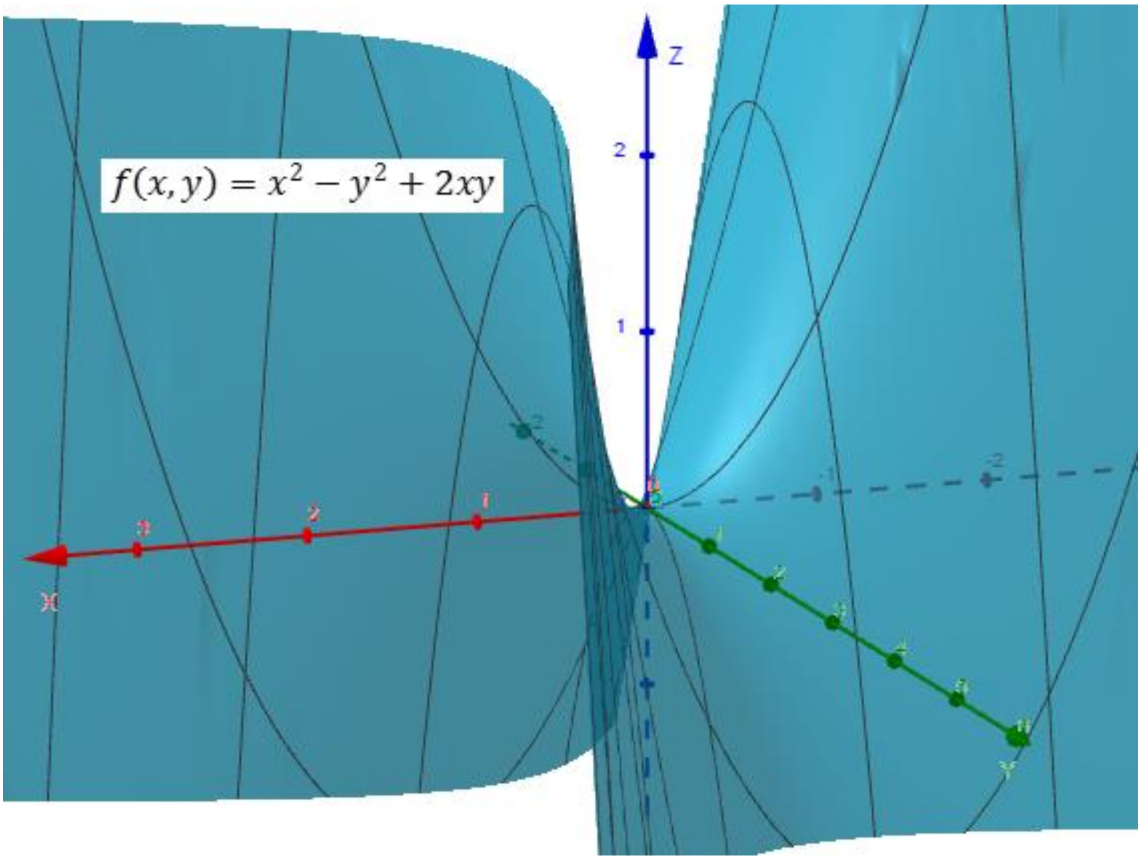
$$Hf(Pc_1) = Hf(0,0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det\big(Hf(0,0)\big) = 2\,(-2) - 1\,1 = -4 - 1 = -5$$

Según el criterio de clasificación $\det(H) < 0$ indica punto de ensilladura.

Imagen del punto de ensilladura $f(0,0) = 0$

En la siguiente figura, gráfico hecho con geogebra 3D, puede observarse el punto de ensilladura en el origen.



$f(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy$
z
2
1
x
y