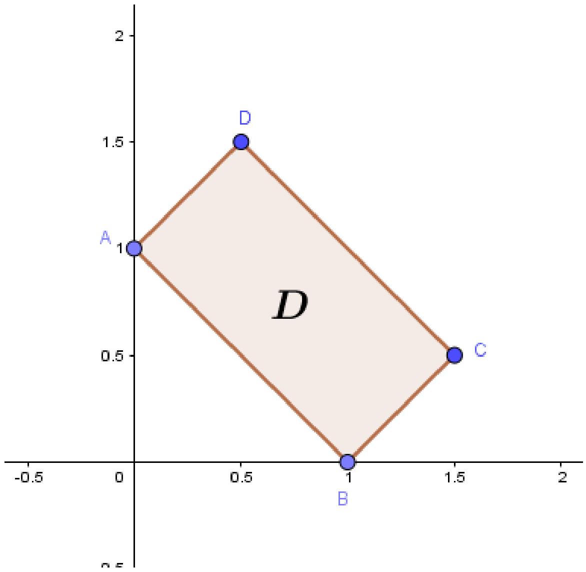
Integrales Dobles – Transformación Afín

EJEMPLO 1

Calcular la integral:

$$\iint_D (x + 2y + 1)\, dx\, dy$$

$$Donde\ D\ \ es\ la\ región\ delimitada\ por\ \ A = (0\,,1), B = (1\,,0)\,, C = \left(\frac{3}{2}\,,\frac{1}{2}\right) y\ \ D = \left(\frac{1}{2}\,,\frac{3}{2}\right)$$



Transformación Afín

Si $(x, y) = T(u, v)$ está dada por

$$x = au + bv + p$$
$$y = cu + dv + q$$

Y el Jacobiano en este caso estará dado por

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

También podemos representarla vectorialmente como:

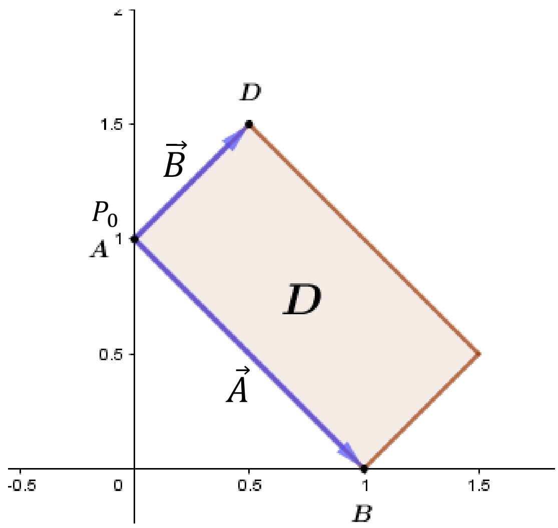
$$(x, y) = P_0 + u\vec{A} + v\vec{B}$$

$$0 \leq u \leq 1$$
$$0 \leq v \leq 1$$

Por lo tanto, a la región D la podemos expresar de forma vectorial

$$(x,y)=P_0+u\vec{A}+v\vec{B}$$

$$0\le u\le 1$$
$$0\le v\le 1$$



$$(x,y)=P_0+u\vec{A}+v\vec{B}$$

$$(x,y)=(0{,}1)+u[B-A]+v[D-A]$$

$$(x,y)=(0{,}1)+u[(1{,}0)-(0{,}1)]+v\left[\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)-(0\,,1)\right]$$

$$(x,y)=\underbrace{(0{,}1)}_{P_0}+u\,\underbrace{(1,-1)}_{\vec{A}}+v\underbrace{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}_{\vec{B}}$$

$$(x,y)=(0{,}1)+(u,-u)+\left(\frac{1}{2}v,\frac{1}{2}v\right)$$

$$(x,y)=\left(\underset{x}{0+u+\frac{1}{2}},\underbrace{1-u+\frac{1}{2}v}_{y}\right)$$

$$\begin{cases}x=u+\dfrac{1}{2}v\\ y=-u+\dfrac{1}{2}v+1\end{cases}\qquad \begin{array}{l}0\le u\le 1\\ 0\le v\le 1\end{array}$$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=ad-bc$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1$$

Estamos en condiciones de calcular la integral pedida

$$\iint_D (x + 2y + 1)\, dx\, dy$$

Aplicando el cambio de variable,

$$\begin{cases} x = u + \frac{1}{2}v \\ y = -u + \frac{1}{2}v + 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 1 \end{matrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\underbrace{u + \frac{1}{2}v}_{x} + 2\left(\underbrace{-u + \frac{1}{2}v + 1}_{y} \right) + 1 \right) \cdot 1 \; dudv$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(-u + \frac{3}{2}v + 3 \right) dudv$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(-u + \frac{3}{2}v + 3 \right) du \right) dv$$

Resolviendo la integral dentro del paréntesis

$$\int_0^1 \left(-u + \frac{3}{2}v + 3 \right) du = -\frac{u^2}{2} + \frac{3}{2}vu + 3u \Big|_{u=0}^{1} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}v + 3 = \frac{3}{2}v + \frac{5}{2}$$

Reemplazando en la integral original

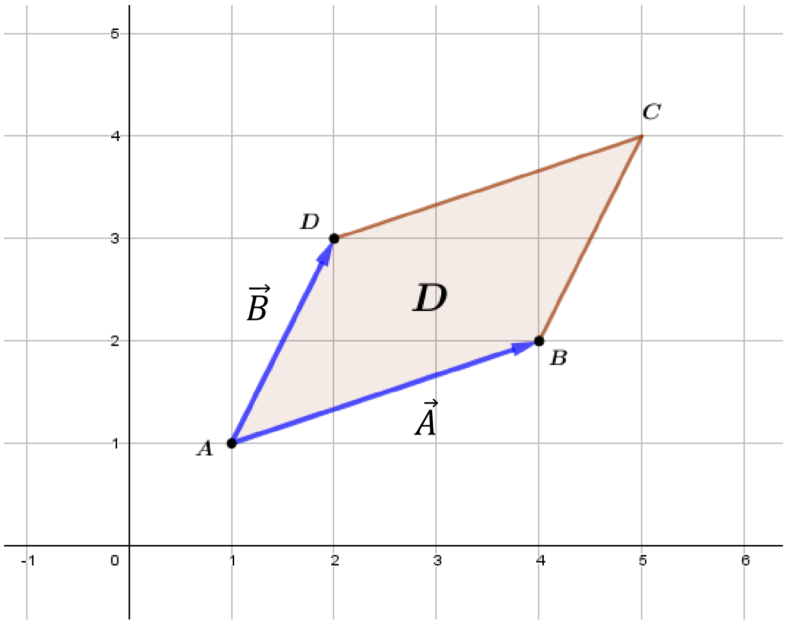
$$\int_0^1 \frac{3}{2}v + \frac{5}{2}\, dv = \frac{3}{4}v^2 + \frac{7}{2}v \Big|_{v=0}^{1} = \frac{3}{4} + \frac{7}{2} = \frac{13}{4}$$

EJEMPLO 2

Calcular la integral:

$$\iint_D (2x-y)(3y-x)\,dx\,dy$$

$$Donde\ D\ \ es\ el\ paralelogramo\ de\ vertices\ \ A=(1\,,1),B=(4\,,2)\,,C=(5\,,4)y\ \ D=(2\,,3)$$



$$P_0=(1\,,1)\quad \vec{A}=(4-1\,,2-1)\quad \vec{B}=(2-1\,,3-1)$$

Entonces

$$P_0=(1\,,1)\quad \vec{A}=(3\,,1)\quad \vec{B}=(1\,,2)$$

$$(x,y)=P_0+u\vec{A}+v\vec{B}$$

$$(x,y)=(1\,,1)+u(3\,,1)+v(1\,,2)$$

$$\begin{cases} x=3u+v+1 \\ y=u+2v+1 \end{cases}\qquad \begin{matrix} 0\le u\le 1 \\ 0\le v\le 1 \end{matrix}$$

$$J=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=5$$

Estamos en condiciones de calcular la integral pedida

$$\iint_D (2x-y)(3y-x)\,dx\,dy$$

$$2x - y = 2(3u + v + 1) - (u + 2v + 1)$$

$$2x - y = 5u + 1$$

$$3y - x = 3(u + 2v + 1) - (3u + v + 1)$$

$$3y - x = 5v + 2$$

Aplicando el método de sustitución nos queda:

$$\int_0^1 \int_0^1 [(5u + 1)(5v + 2) \cdot 5] \; du dv$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 [(5u + 1)(5v + 2) \cdot 5] \; du \right) dv$$

Resolvemos la integral dentro del paréntesis

$$\int_0^1 [(5u + 1)(5v + 2) \cdot 5] \; du$$

$$(25v + 10) \cdot \int_0^1 (5u + 1) \, du$$

Lo que debemos hacer en primera instancia es resolver la integral:

$$\int_0^1 (5u + 1) \; du = \frac{5}{2}u^2 + u \Big|_{u=0}^{1} = \frac{7}{2}$$

$$\int_0^1 [(5u + 1)(5v + 2) \cdot 5] \; du = (25v + 10) \cdot \frac{7}{2} = \frac{175}{2}v + 35$$

Reemplazando en la integral original

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 [(5u + 1)(5v + 2) \cdot 5] \; du \right) dv$$

$$\int_0^1 \frac{175}{2}v + 35 \, dv = \frac{175}{4}v^2 + 35v \Big|_{v=0}^{1} = \frac{175}{4} + 35 = \frac{315}{4}$$

Suponga que

$$f(x,y) = g(x) \cdot h(y) \quad \text{y} \quad R = [a,b] \times [c\,,d]$$

Entonces por el teorema de Fubbini

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \int_a^b g(x) \cdot h(y)\ dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b g(x) \cdot h(y) dx \right] dy$$

En esta última integral, y es constante, así que $h(y)$ es constante

$$\int_c^d \left[\int_a^b g(x) \cdot h(y) dx \right] dy = \int_c^d \left[h(y) \left(\int_a^b g(x)\,dx \right) \right] dy$$

Ya que $\int_a^b g(x)\,dx$ es una constante en la integral respecto de la variable y

$$\int_c^d \left[\int_a^b g(x) \cdot h(y) dx \right] dy = \left(\int_a^b g(x)\,dx \right) \cdot \left(\int_c^d h(y)\,dy \right)$$

Por lo tanto

$$\int_c^d \int_a^b g(x) \cdot h(y)\ dxdy = \left(\int_a^b g(x)\,dx \right) \cdot \left(\int_c^d h(y)\,dy \right)$$

$$Donde\ R = [a,b] \times [c\,,d]$$

EJEMPLO: Si $R = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0\,, \frac{\pi}{2}\right]$, entonces

$$\iint_R sen(x) \cdot \cos(y)\,dxdy = \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(x)\,dx \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(y)\,dy \right)$$

$$\left(-\cos(x)|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \right) \cdot \left(sen(y)|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

Retomemos el ejemplo anterior

$$\int_0^1 \int_0^1 [(5u+1)(5v+2) \cdot 5] \; dudv$$

$$5 \cdot \int_0^1 \int_0^1 (5u+1)(5v+2) \; dudv$$

$$\int_0^1 \int_0^1 (5u+1)(5v+2) \; dudv = \left(\int_0^1 (5u+1)\, du \right) \cdot \left(\int_0^1 (5v+2)\, dv \right)$$

$$\int_0^1 (5u+1)\, du = \frac{5}{2}u^2 + u \bigg|_0^1 = \frac{7}{2}$$

$$\int_0^1 (5v+2)\, dv = \frac{5}{2}v^2 + 2v \bigg|_0^1 = \frac{9}{2}$$

Por lo tanto

$$5 \cdot \int_0^1 \int_0^1 (5u+1)(5v+2) \; dudv = 5 \cdot \left(\frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} \right) = \frac{315}{4}$$

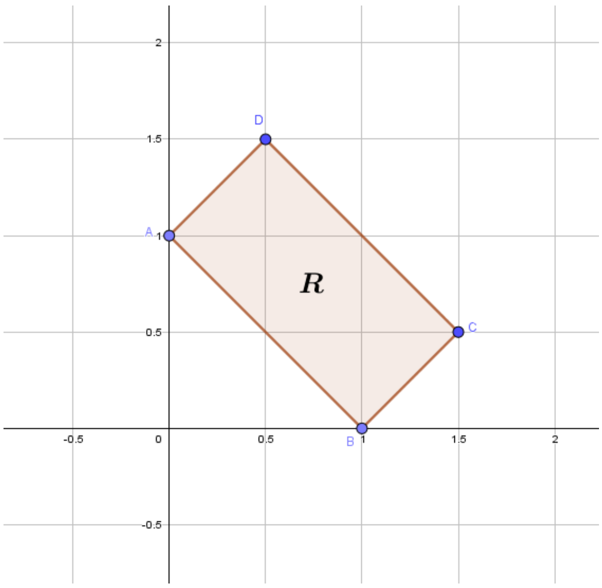
Retomamos el ejemplo 1 pero lo resolveremos comparando las rectas paralelas.

EJEMPLO 1 bis

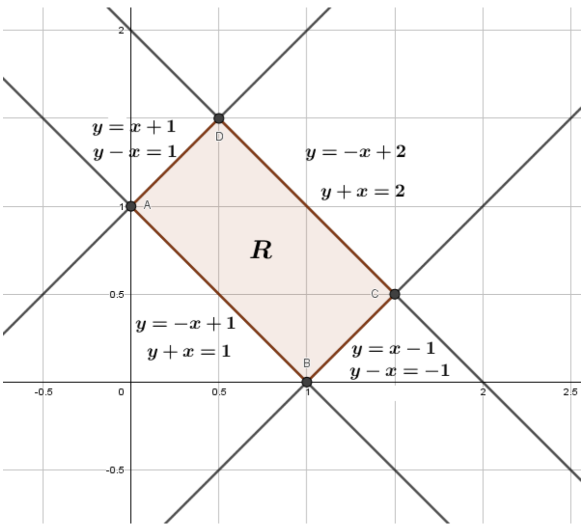
Calcular la integral:

$$\iint_R (x + y + 1)\, dx\, dy$$

$$Donde\ R\ \ es\ la\ region\ delimitada\ por\ \ A = (0\,,1), B = (1\,,0)\,, C = \left(\frac{3}{2}\,,\frac{1}{2}\right) y\ \ D = \left(\frac{1}{2}\,,\frac{3}{2}\right)$$



nótese que este paralelogramo esta definido por la intersección de 4 rectas



El paralelogramo esta acotado por las siguientes inecuaciones

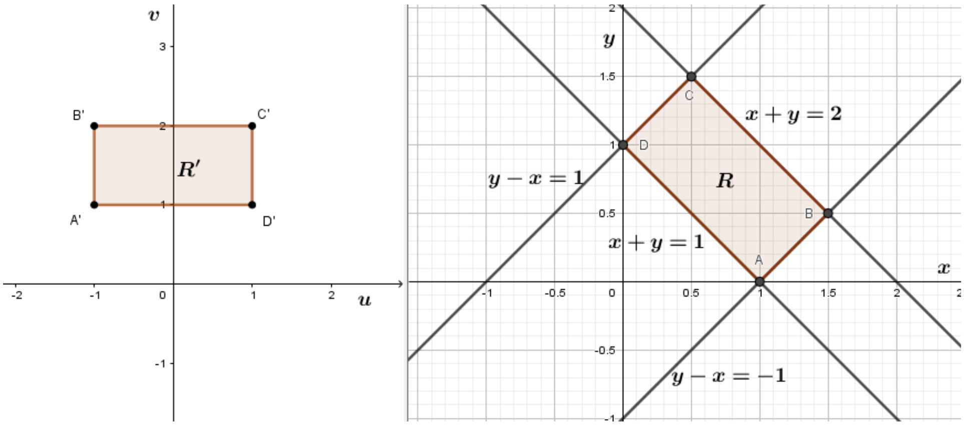
$$R\colon \begin{cases} -1 \le y - x \le 1 \\ 1 \le y + x \le 2 \end{cases}$$

Entonces, se considera la sustitución

$$u(x,y) = y - x \qquad v(x,y) = y + x$$

Cuyo rango de variación es

$$R'\colon \begin{cases} -1 \le u \le 1 \\ 1 \le v \le 2 \end{cases}$$



Recorrido de la transformación $T(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \left(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\,,\boldsymbol{y}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})\right)$

De

$$\begin{cases} u = y - x \\ v = y + x \end{cases}$$

Se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} u = y - x \\ v = y + x \end{aligned}\right\} \to 2y = u + v \ \to y(u,v) = \frac{u+v}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} u = y - x \\ v = y + x \end{aligned}\right\} \to -2x = u - v \ \to x(u,v) = \frac{-u+v}{2}$$

Así las formulas

$$x(u,v) = \frac{v-u}{2}$$

$$y(u,v) = \frac{u+v}{2}$$

Llamadas *función de transformación de coordenadas.*

es decir, que retomando la integral que deseamos calcular, podemos realizar el cambio de variable. Sin embargo, necesitamos la derivada de la transformación, que será el Jacobiano.

De esta manera, se obtiene el jacobiano asociado a la transformación

$$T(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big) = \left(\frac{v-u}{2}, \frac{u+v}{2}\right)$$

$$J_T(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

Calculando su modulo

$$|J| = \frac{1}{2}$$

Entonces, según la fórmula de cambio de variables en integrales dobles, se tiene

Nótese que:

$$\frac{Área(R)}{Área(R')} = \frac{1}{2} = |J|$$

Teorema (Cambio de variables en integrales dobles). Sea $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una función continua en el conjunto abierto no vacío U de $\mathbb{R}^2$, y se la región $D \subset U$.

Sea, además, la función

$$T: V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : T(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$$

que aplica de manera inyectiva (salvo en conjuntos de área nula) la región $D' \subset V$ del plano uv, en la región D del plano xy. Supóngase que T es de clase C^1 en V y que el jacobiano de T

$$J_T(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} \neq 0$$

en D' (salvo en conjuntos de área nula). Se tiene así, la fórmula de cambio de variables en integrales dobles

$$I = \iint_R f(x,y)\,dxdy = \iint_{R'} f[x(u,v),y(u,v)] \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Retomando el ejercicio anterior

$$\iint_R (x+y+1)\,dx\,dy = \iint_{R'} (x(u,v)+y(u,v)+1) \cdot |J|\,du\,dv$$

$$T(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big) = \left(\underbrace{\frac{v-u}{2}}_{x}, \underbrace{\frac{u+v}{2}}_{y}\right)$$

$$|J| = \frac{1}{2}$$

$$-1 \le u \le 1$$
$$1 \le v \le 2$$

$$\iint_{R'} \left(\frac{v-u}{2} + \frac{u+v}{2} + 1\right) \cdot \frac{1}{2}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_{v=1}^{2}\int_{u=-1}^{1} (v+1)\,dudv$$

$$\frac{1}{2}\int_{v=1}^{2}\left(\int_{u=-1}^{1} (v+1)\,du\right)dv$$

Resolvemos la integral dentro del paréntesis

$$\int_{u=-1}^{1} (v+1)\,du = (v+1)u\Big|_{-1}^{1} = (v+1) - (-v-1) = 2v+2$$

Reemplazando este resultado en la integral original

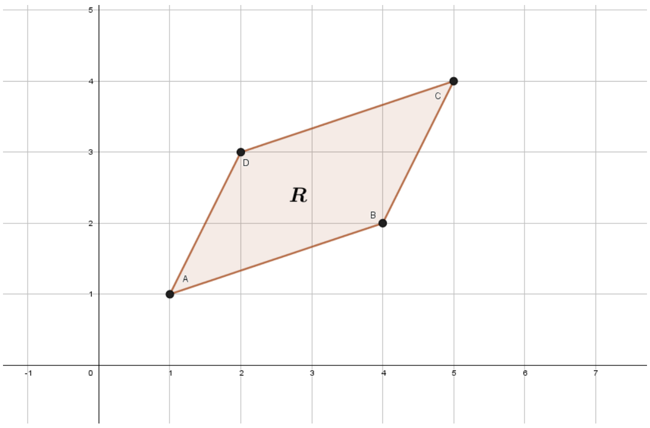
$$\frac{1}{2}\int_{v=1}^{2} 2v+2\,dv = \int_{v=1}^{2} v+1\,dv = \frac{v^2}{2} + v\Big|_1^2 = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

EJEMPLO 3

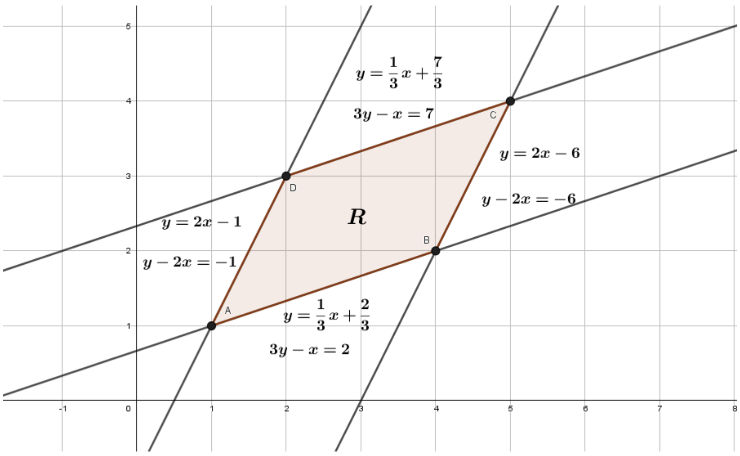
Calcular la integral:

$$\iint_R (x^2 - y + 1)\, dx\, dy$$

$Donde\ R\ \ es\ el\ paralelogramo\ de\ vertices\ \ A = (1\ ,1), B = (4\ ,2)\ , C = (5\ ,4) y\ \ D = (2\ ,3)$



Definimos las ecuaciones de cada recta para armar las funciones de cambio de variable



$$2 \leq 3y - x \leq 7$$
$$-6 \leq y - 2x \leq -1$$

Siendo

$$u = 3y - x$$
$$v = y - 2x$$

$$\left.\begin{matrix} u = 3y - x \\ v = y - 2x \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} u = 3y - x \\ 3v = 3y - 6x \end{matrix}\right\} \rightarrow 5x = u - 3v \rightarrow x(u,v) = \frac{u - 3v}{5}$$

$$\left.\begin{matrix} u = 3y - x \\ v = y - 2x \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} 2u = 6y - 2x \\ v = y - 2x \end{matrix}\right\} \rightarrow 5y = 2u - v \rightarrow y(u,v) = \frac{2u - v}{5}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}u - \frac{3}{5}v \\ y = \frac{2}{5}u - \frac{1}{5}v \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{vmatrix} = -\frac{1}{25} + \frac{6}{25} = \frac{1}{5}$$

$$2 \leq u \leq 7$$

$$-6 \leq v \leq -1$$

Entonces, según la fórmula de cambio de variables en integrales dobles, se tiene

$$\iint_R (x^2 - y + 1)\, dx\, dy = \int_2^7 \int_{-6}^{-1} \left(\left(\frac{1}{5}u - \frac{3}{5}v\right)^2 - \left(\frac{2}{5}u - \frac{1}{5}v\right) + 1\right) \cdot \underbrace{\frac{1}{5}}_{J} dvdu$$

$$\frac{1}{5}\int_2^7 \int_{-6}^{-1} \left(\frac{1}{25}u^2 - \frac{6}{25}uv + \frac{9}{25}v^2 - \frac{2}{5}u + \frac{1}{5}v + 1\right) dvdu$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}\int_2^7 \int_{-6}^{-1} \left(\frac{1}{5}u^2 - \frac{6}{5}uv + \frac{9}{5}v^2 - 2u + v + 5\right) dvdu$$

$$\frac{1}{25}\int_2^7 \left(\int_{-6}^{-1} \left(\frac{1}{5}u^2 - \frac{6}{5}uv + \frac{9}{5}v^2 - 2u + v + 5\right) dv\right) du$$

Resolvemos la integral respecto de v

$$\int_{-6}^{-1} \left(\frac{1}{5}u^2 - \frac{6}{5}uv + \frac{9}{5}v^2 - 2u + v + 5\right) dv =$$

$$\frac{1}{5}u^2 v - \frac{6}{10}uv^2 + \frac{9}{15}v^3 - 2uv + \frac{v^2}{2} + 5v\Big|_{-6}^{-1} =$$

$$\left(-\frac{1}{5}u^2 - \frac{6}{10}u - \frac{9}{15} + 2u + \frac{1}{2} - 5\right) - \left(-\frac{6}{5}u^2 - \frac{216}{10}u - \frac{1944}{15} + 12u + 18 - 30\right)$$

$$-\frac{1}{5}u^2 + \frac{7}{5}u - \frac{51}{10} + \frac{6}{5}u^2 + \frac{48}{5}u + \frac{708}{5} = u^2 + 11u + \frac{273}{2}$$

Reemplazando esta expresión en la integral original

$$\frac{1}{25}\int_{2}^{7} u^2 + 11u + \frac{273}{2}\,du$$

$$\left.\frac{u^3}{3} + \frac{11}{2}u^2 + \frac{273}{2}u\right|_2^7$$

$$\left(\frac{343}{3} + \frac{539}{2} + \frac{1011}{2}\right) - \left(\frac{8}{3} + 22 + 273\right)$$

$$\frac{1051}{3} - \frac{893}{3} = \frac{158}{3}$$

$$\iint_R (x^2 - y + 1)\,dx\,dy = \frac{1}{25}\cdot\frac{158}{3} = \frac{158}{75}$$