T P 04 Ej. 14-b

Empleando el gradiente, calcular las derivadas direccionales, y en cada caso indicar cuál es la dirección de máximo crecimiento de las funciones dadas en los puntos indicados.

$$\boldsymbol{f(x,y,z) = y.\sin(x) + z^2 \quad en\ P_0 = \left(\frac{\pi}{2}, 1, 1\right)\ en\ la\ direcci\text{ó}n\ \vec{v} = (0,0,1)}$$

Para una explicación detallada de cada uno de los pasos referirse al ejercicio 14-a

A simple vista se puede apreciar que la $\|\vec{v}\| = 1$ $\therefore$

Por lo tanto, emplearemos la expresión:

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(x_0, y_0, z_0) = \dot{f_v}(x_0, y_0, z_0) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \circ \breve{v}$$

Ahora bien:

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \rightarrow$$

$$\boldsymbol{\vec{\nabla} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (y.\cos x\ ;\ \sin x\ ;\ 2.z\ )}$$

Evaluando al gradiente de la función en $P_0 = \left(\frac{\pi}{2}, 1{,}1\right)$, tenemos:

$$\vec{\nabla} f\left(\frac{\pi}{2}, 1{,}1\right) = \left(1.\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\ ; \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\ ; 2.1\right) \quad \rightarrow$$

$$\boldsymbol{\vec{\nabla} f\left(\frac{\pi}{2}, 1, 1\right) = (0\ ; 1\ ; 2)}$$

Entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}\left(\frac{\pi}{2}\ ; 1\ ; 1\right) = \dot{f_v}\left(\frac{\pi}{2}\ ; 1\ ; 1\right) = \vec{\nabla} f\left(\frac{\pi}{2}\ ; 1\ ; 1\right) \circ \breve{v} = (0\ ; 1\ ;, 2) \circ (0\ ; 0\ ; 1) \quad \rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}\left(\frac{\pi}{2} \,; 1 \,; 1\right) = \dot{f}_v\left(\frac{\pi}{2} \,; 1 \,; 1\right) = 0.0 + 1.0 + 2.1 \quad \rightarrow$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}\left(\frac{\pi}{2} \,; 1 \,; 1\right) = \dot{f}_v\left(\frac{\pi}{2} \,; 1 \,; 1\right) = 2}$$

<u>La dirección de máximo crecimiento será:</u>

$$\vec{u}(x_0, y_0, z_0) = \frac{\vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0)}{\left\| \vec{\nabla} f(x_0, y_0, z_0) \right\|} \quad \rightarrow$$

$$\vec{u}\left(\frac{\pi}{2} \,; 1 \,; 1\right) = \frac{\vec{\nabla} f\left(\frac{\pi}{2} \,; 1 \,; 1\right)}{\left\| \vec{\nabla} f\left(\frac{\pi}{2} \,; 1 \,; 1\right) \right\|} = \frac{(0\,, 1\,, 2)}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{(0\,, 1\,, 2)}{\sqrt{5}} \quad \rightarrow$$

$$\boldsymbol{\vec{u}\left(\frac{\pi}{2} \,; 1 \,; 1\right) = \left(0 \,; \frac{1}{\sqrt{5}} \,; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$$