T P 5 Ejercicio 12

Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva definida implícitamente por.

$$\begin{cases} x - y + z^2 = 1 \\ 2x + y^3 - z = 2 \end{cases} \quad en\ el\ punto\ P = (1,1,1)$$

Resolución:

Definimos las funciones $F(x, y, z) = x - y + z^2 - 1$ y $G(x, y, z) = 2x + y^3 - z - 2$

Siendo $x - y + z^2 - 1 = 0$ la superficie de nivel 0 de la función F y $2x + y^3 - z - 2 = 0$ la superficie de nivel 0 de la función G. Por lo tanto, el sistema queda definido como

$$\begin{cases} F(x, y, z) = x - y + z^2 - 1 = 0 \\ G(x, y, z) = 2x + y^3 - z - 2 = 0 \end{cases}$$

Si se cumplen las condiciones del Teorema de la función implícita II, es posible asegurar la existencia de las funciones $y = f(x)$ y $z = g(x)$ (las funciones implícitas) ambas de clase C^1 en algún entorno E_x, tales que para cada $x \in E_x$ verifican las ecuaciones $F\big(x, f(x), g(x)\big) = 0$ y $G\big(x, f(x), g(x)\big) = 0$ y por lo tanto podemos hallar sus derivadas parciales resolviendo el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial F}{\partial z} \cdot \dfrac{dz}{dx} = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial G}{\partial z} \cdot \dfrac{dz}{dx} = 0 \end{cases} \quad en\ \ P = \big(x_0, y_0, z_0\big)$$

Concretamente se tiene:

$$\begin{cases} 1 - 1\ \dfrac{dy}{dx} + 2z\ \dfrac{dz}{dx} = 0 \\ 2 + 3y^2 \dfrac{dy}{dx} - 1\ \dfrac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$

Verifiquemos el T. de la función Implícita II.

$$F(x_0, y_0, z_0) = G(x_0, y_0, z_0) = 0$$

$$F(1,1,1) = 1 - 1 + 1^2 - 1 = 0$$

$$G(1,1,1) = 2 + 1^3 - 1 - 2 = 0$$

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}(x_0, y_0, z_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \dfrac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \dfrac{\partial G}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} -1 & 2z \\ 3y^2 & -1 \end{vmatrix}_{(1,1,1)} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5 \neq 0$$

Se satisfacen así, las condiciones del Teorema de la función Implícita II. Entonces existen las funciones implícitas $y = f(x)$ y $z = g(x)$, cuyas derivadas podemos calcularlas mediante:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(x_0,y_0,z_0)} \qquad \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(x_0,y_0,z_0)}$$

Calculo de $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dz}{dx}$ en $P = (1,1,1)$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}(x_0,y_0,z_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial G}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 2z \\ 2 & -1 \end{vmatrix}_{(1,1,1)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 5 = -5$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(x_0,y_0,z_0)} = -\frac{-5}{-5} = -1$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}(x_0,y_0,z_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial G}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3y^2 & 2 \end{vmatrix}_{(1,1,1)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(x_0,y_0,z_0)} = -\frac{-5}{-5} = -1$$

Sabemos que en las cercanías del punto $P = (1,1,1)$, la curva intersección de las superficies es la imagen de la función vectorial

$$\alpha(x) = \big(x, f(x), g(x)\big)$$

Y según el teorema de la función implícita II resulta que $y_0 = f(x_0)$ y $z_0 = g(x_0)$, se cumple entonces que

$$y_0 = f(1) = 1 \quad y \quad z_0 = g(1) = 1$$

De esta manera queda claro que P es la imagen de $\alpha(x)$ en $x_0 = 1$

Para hallar la recta tangente es necesario un vector director de dicha recta en el punto P, el cual se obtiene a partir de la derivada de la función $\alpha(x)$ en el punto $x_0 = 1$

$$\alpha'(x) = \left(1, \frac{df}{dx}, \frac{dg}{dx}\right)$$

$$\alpha'(x) = \left(1, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right)$$

Sabemos que

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = -1 \qquad \frac{dz}{dx}(x_0) = -1$$

Con lo cual el vector tangente a la curva en P es:

$$\alpha'(1) = (1, -1, -1)$$

Ecuación de la recta R tangente a la curva en P.

$$R: \lambda(t) = P + t \cdot \alpha'(1) = (1,1,1) + t(1, -1, -1) = (1 + t, 1 - t, 1 - t)$$

Hallar, la ecuación del plano perpendicular a la curva en el mismo punto.

$$\pi^{\perp}: (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \vec{n} = 0$$
$$\pi^{\perp}: (x - 1, y - 1, z - 1) \cdot (1, -1, -1) = 0$$
$$\pi^{\perp}: x - 1 - y + 1 - z + 1 = 0$$
$$\pi^{\perp}: x - y - z = -1$$

Otra forma de calcular el plano

$$\pi^{\perp}: (x, y, z) \cdot \vec{n} = P \cdot \vec{n}$$

$$\pi^{\perp}: (x, y, z) \cdot (1, -1, -1) = (1,1,1) \cdot (1, -1, -1)$$
$$\pi^{\perp}: x - y - z = 1 - 1 - 1$$
$$\pi^{\perp}: x - y - z = -1$$