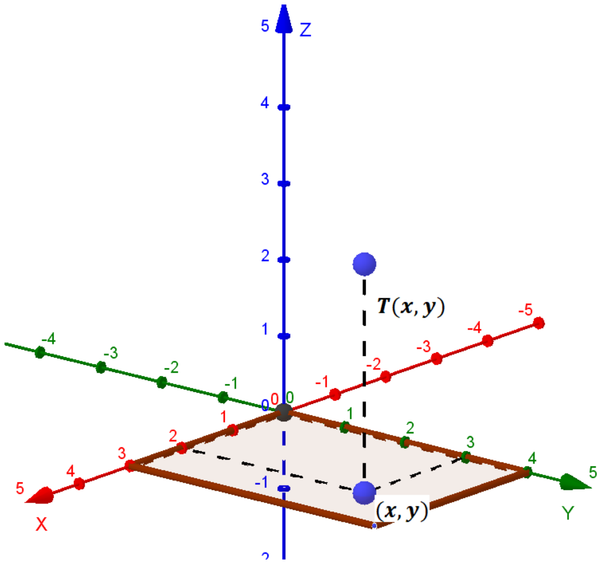
Funciones de varias variables

Del análisis matemático de una variable traemos las funciones escalares

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y = f(x)$

Por ejemplo el área de un cuadrado, de un círculo, el precio de un producto que se vende por kilogramo, la temperatura sobre un hilo, etc, son ejemplos de funciones de una variable en el dominio, que se denominan escalares, porque el resultado es un número, no un vector.

Si tenemos una función que nos da la temperatura sobre cada punto de una chapa rectangular, entonces tendremos como entrada (elemento del dominio) el punto de la chapa, que colocada en un sistema coordenado rectangular podemos identificar como(x, y), siendo la temperatura una magnitud escalar, podemos formular la relación entre cada punto de la chapa y su temperatura mediante una fórmula:



$$T: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad z = T(x, y)$$

Diremos que T es una función escalar de dos variables.

Si ahora consideramos el fenómeno de la temperatura en el espacio tridimensional, tendremos una relación entre ternas (x, y, z) y la temperatura correspondiente al punto de esa posición, esto se resume en:

$$T: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad w = T(x, y, z)$$

En este caso diremos que T es una función escalar de tres variables.

En general, a este tipo de funciones las llamaremos, funciones o campos escalares de varias variables.

Definición 1. Una *función (o campo) escalar* de $n \geq 2$ variables reales, es una regla que asigna a cada elemento $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ del conjunto $dom\, f \subseteq \mathbb{R}^n$, un único número real $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Se escribe:

$$f:\ dom\, f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ /\ \ y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

El conjunto $dom\, f \subseteq \mathbb{R}^n$ se llama dominio de f. El conjunto de números reales $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ obtenidos a partir de la acción de la función f sobre cada elemento del $dom\, f$, se llama *rango (o imagen) de* f.

Es usual referirse a la función

$$f\colon\ dom\, f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} /\ y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

indicando solamente la regla que asocia a cada $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$, el número real $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, es decir que se ofrece la formula

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

sin dar explícitamente el dominio $dom\, f$. En tal situación deberá entenderse que el dominio de f es el conjunto $dom\, f \subseteq \mathbb{R}^n$ más amplio posible para el cual la regla $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tenga sentido en el conjunto de los números reales. En tales circunstancias se habla del dominio natural de f.

Este tipo de funciones se utilizan para representar la distribución espacial de magnitudes escalares. Por ejemplo, la densidad $\rho(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ (ρ, letra griega rho) de un sólido Ω (letra griega Omega) en el punto $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$, la temperatura $T(x, y, z)$ en la posición (x, y, z) del espacio, el potencial gravitacional $P(x, y, z)$ sobre el punto (x, y, z) en el campo gravitatorio.

En lo sucesivo, la mayor parte de los ejemplos presentados, serán de funciones de dos y de tres variables. Vale entonces decir, que en estos casos se adopta una escritura literal conveniente que consiste en abandonar la notación subindexada. En concreto, para el caso de funciones de dos variables se utilizan x e y para referirse a las variables independientes y se emplea la letra z para denotar a la variable dependiente. Se escribe entonces

$$z = f(x, y)$$

De forma similar, para funciones de tres variables, se escribe

$$w = f(x, y, z)$$

Ejemplo 1. El dominio natural de la función de dos variables definida por la fórmula

$$z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

es el conjunto

$$dom\, f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Se trata del círculo de centro en el origen y radio unitario que se muestra en la Figura 1. Nótese que la condición que define al dominio de la función se obtiene del requisito de no negatividad del radicando en la fórmula de f.

Ejemplo 2. El dominio natural de la función

$$z = f(x, y) = \ln(xy)$$

es el conjunto

$$dom\, f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ \ xy > 0\}$$

que equivalentemente se puede expresar como

$$dom\, f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ \ (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)\}$$

y que se trata del conjunto formado por el primer y el tercer cuadrante, exceptuando los puntos de los ejes de coordenadas. La representación gráfica de este conjunto se expone en la Figura 2.

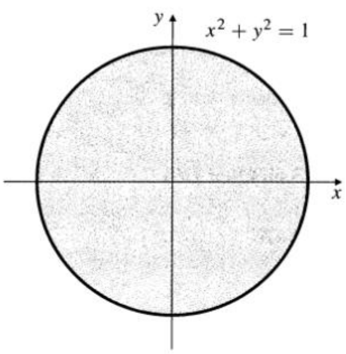


Figura 1. Dominio natural de la función $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

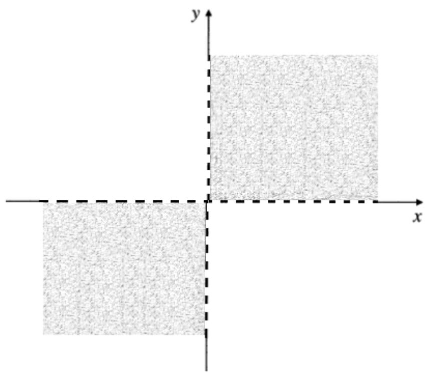


Figura 2. Dominio natural de la función $f(x, y) = \ln(xy)$.

Gráfica de una función escalar de dos variables

Definición 2. La gráfica de la función escalar de $n = 2$ variables reales

$$f: Dom\, f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} /\ z = f(x, y)$$

Se define como el conjunto

$$Graf(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 /\ (x, y) \in dom\, f \ \wedge \ z = f(x, y)\}$$

Se dice que la gráfica de la función $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una hipersuperficie n-dimensional en el espacio $\mathbb{R}^{n+1}$.
Cuando se trata de una función de dos variables la gráfica de la función

$$f: Dom\, f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / z = f(x, y)$$

resulta ser la superficie en $\mathbb{R}^3$ que se define como

$$Graf(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ (x, y) \in dom\, f \ \wedge \ z = f(x, y)\}$$

cuya representación geométrica es la que se muestra en la Figura 3.

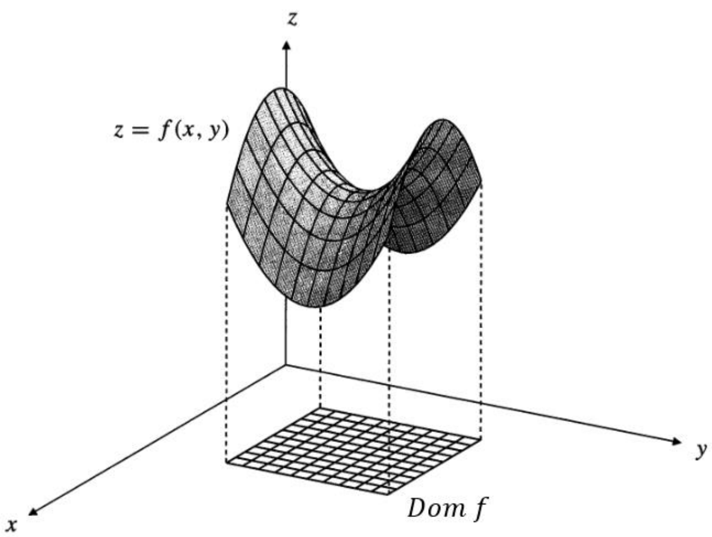


Figura 3. Gráfica de la función $z = f(x, y)$.

En esta representación gráfica se permite describir el dominio $dom\, f \subseteq \mathbb{R}^2$ en el plano $z = 0$.

Ejemplo 3. La gráfica de la función

$$z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

es la parte positiva de la esfera de centro en el origen y radio 3.

En efecto, escribiendo la ecuación que define a f en la forma

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

se deduce que $z \geq 0$. Luego, procediendo del siguiente modo

$$z^2 = 9 - x^2 - y^2$$

resulta la expresión

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

y luego, la siguiente

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 3$$

que es aquella que define al conjunto de ternas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ cuya distancia al origen de coordenadas es igual a 3. La gráfica de f se muestra en la Figura 4.

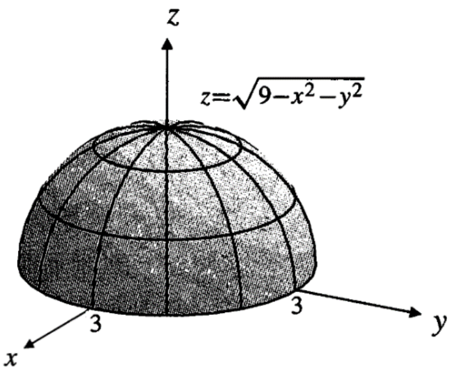


Figura 4. Gráfica de la función $z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Ejemplo 4. La gráfica de

$$z = f(x, y) = 1 - x - y$$

es el plano que pasa por los puntos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$.

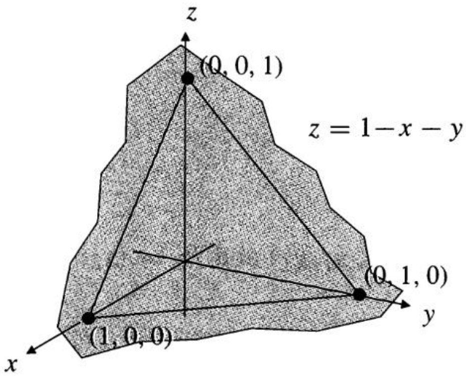


Figura 5. La gráfica de la función f es el plano de ecuación $x + y + z = 1$.

Ejemplo 5. La gráfica de

$$z = f(x, y) = x^2$$

es el cilindro parabólico que se muestra en la Figura 6.

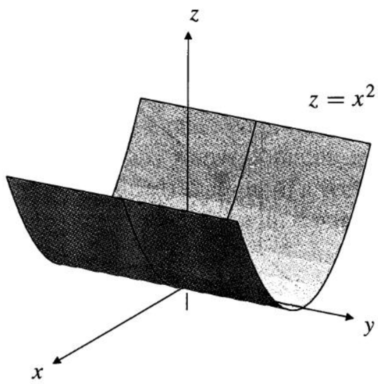


Figura 6. Gráfica de la función $z = f(x, y) = x^2$.

Conjuntos de nivel

Una manera de contar con una representación gráfica parcial de la función escalar $z = f(x, y)$, es la que se obtiene a partir de generar un mapa topográfico en el plano xy, indicando niveles constantes de esta función. Esto es, establecido un nivel C, se define el conjunto de puntos del dominio $dom\ f$, donde la función asume ese valor constante. Este concepto es el de *conjunto de nivel*, que para el caso comentado viene dado por:

$$L_C = \{(x, y) \in Dom\ f /\ \ f(x, y) = C\}$$

El conjunto L_C puede interpretarse geométricamente como la proyección vertical sobre el plano xy de la intersección de la gráfica de la función $z = f(x, y)$ con el plano horizontal de ecuación $z = C$. Claro que, si dicha intersección no existe, el conjunto de nivel es el conjunto vacío. Ahora bien, cuando tal intersección existe, el conjunto de nivel obtenido, si es que se trata de una curva, se llama *curva de nivel*. En la Figura 7 se exhiben, el gráfico y algunas curvas de nivel de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$.

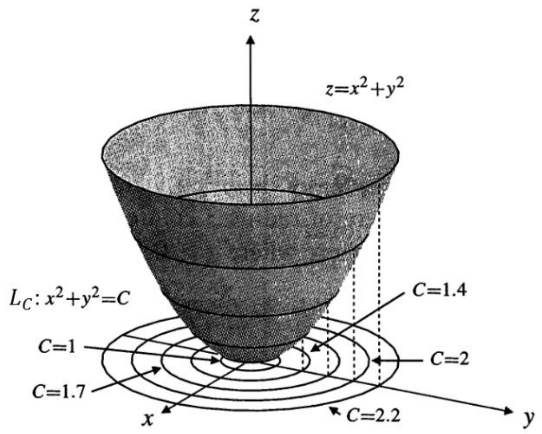


Figura 7. Gráfica de la función de dos variables $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ y algunas de sus curvas de nivel.

La gráfica de $f(x, y) = x^2 + y^2$ es un paraboloide circular y conjuntos de nivel L_C son:

- Circunferencias de centro en el origen y radio $\sqrt{C}$, cuando $C > 0$.
- El origen de coordenadas $(0,0)$, cuando $C = 0$.
- El conjunto vacío cuando $C < 0$.

Ejemplo 6. Los conjuntos de nivel de la función del Ejemplo 3

$$z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

son:

- Circunferencias de centro en el origen y radio $\sqrt{9 - C^2}$, cuando $0 \leq C < 3$.
- El origen de coordenadas $(0,0)$, cuando $C = 3$.
- El conjunto vacío cuando $C < 0$ o $C > 3$.

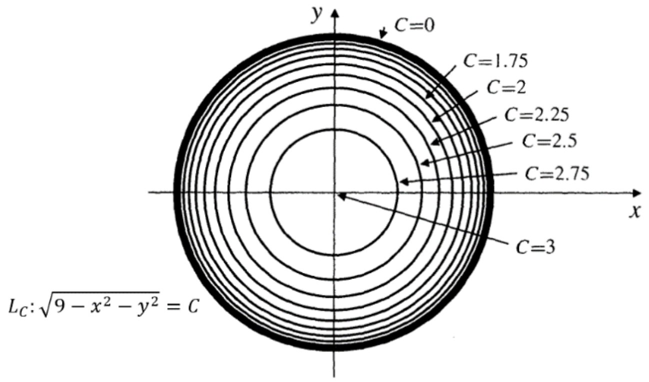


Figura 8. Representación gráfica de algunas curvas de nivel de la función

$$z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

La expresión $\sqrt{9 - C^2}$ que define al radio de las circunferencias, para el caso $0 \leq C < 3$, se obtiene aplicando el mismo procediendo empleado en el Ejemplo 3.

Ejemplo 6. La gráfica de la función $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ es un paraboloide hiperbólico. Esta superficie se caracteriza por tener parábolas como secciones verticales paralelas a los planos coordenados xz, y, yz e hipérbolas equiláteras en el plano coordenado xy, como secciones horizontales que son las curvas de nivel. En la Figura 9 se muestra la descripción gráfica de esta superficie.

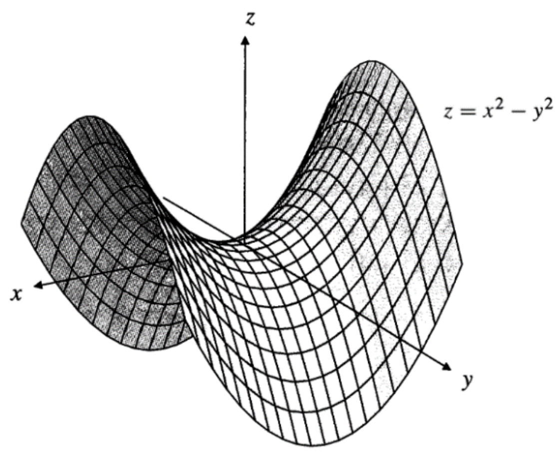


Figura 9. La gráfica de la función $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ es un paraboloide hiperbólico.

Los conjuntos de nivel L_C de la función f son:

- Hipérbolas equiláteras de eje x, cuando $C > 0$.
- Hipérbolas equiláteras de eje y, cuando $C < 0$.
- Las dos rectas definidas por la ecuación $|x| = |y|$, cuando $C = 0$.

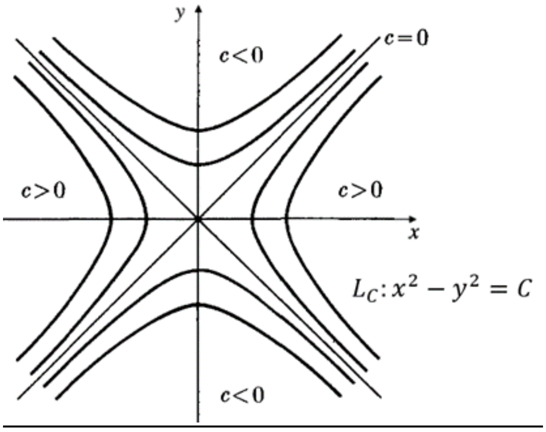


Figura 10. Descripción de las curvas de nivel de la función

$z = f(x, y) = x^2 - y^2$ según el valor de C.

Cuando el concepto de conjunto de nivel se extiende a funciones de tres variables $w = f(x, y, z)$, el equivalente a las curvas de nivel es *superficie de nivel*.

Ejemplo 7. Los conjuntos de nivel L_C de la función

$$w = f(x, y, z) = x^2 - z$$

con dominio natural $dom\ f = \mathbb{R}^3$ son, para todo $C \in \mathbb{R}$, cilindros parabólicos definidos por

$$L_C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ f(x, y, z) = x^2 - z = C\}$$

O bien, entendiendo que L_C está formado por ternas (x, y, z), según la escritura lacónica:

$$L_C: z = x^2 - C$$

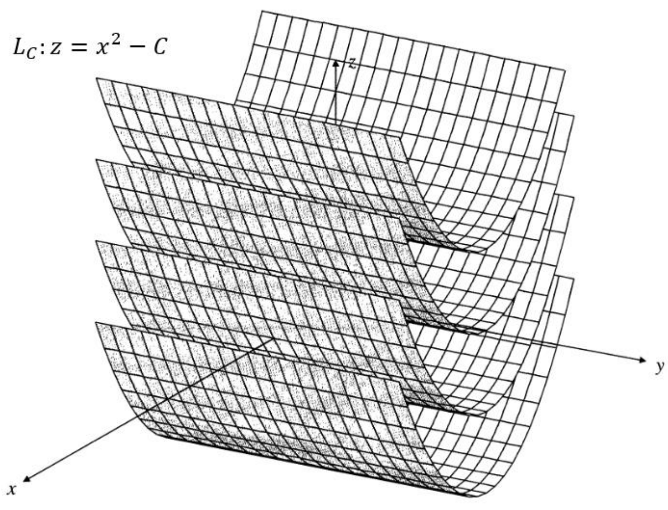


Figura 11. Algunas superficies de nivel de la función de tres variables $w = f(x, y, z) = x^2 - z$

El concepto de conjunto de nivel se generaliza en la siguiente definición.

Definición 3. Para la función escalar

$$f: Dom\, f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} /\, y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

y la constante real C, se define el conjunto de nivel C de f como

$$L_C = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in Dom\, f / f(x_1, x_2, \dots, x_n) = C\}$$

Nota: Si bien en este apunte se explican funciones escalares de dos y tres variables, los únicos gráficos que se necesitan manejar en el espacio tridimensional son planos, paraboloides elípticos, paraboloides hiperbólicos, esferas, elipsoides y conos.

Biblioteca digital. Cap 3, p. 100. Cálculo varias variables. W Mora.

Link contenidos pertinentes (Ctrl+Clic mouse para ir al enlace)
Khan Academy
https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/thinking-about-multivariable-function#ways-to-represent-multivariable-functions