T P 04 Ej. 30-c

Aplicando la regla de la cadena, calcular las derivadas de las funciones compuestas que se indican:

Calcular F_uy F_v donde F = f o $G \begin{cases} f(x,y,z) = xyz \\ G(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = (uv, u+v, u-v) \end{cases}$

Para resolver este ejercicio debemos aplicar, como bien dice el enunciado, la regla de la cadena. La herramienta a usar es la Matriz Jacobiana, ya ejercitado en ejercicios anteriores. Como estamos buscando las derivadas parciales de la composición de dos funciones, El Jacobiano va a obtenerse del producto de dos matrices.

$$JF = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \cdots & \alpha \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z & \cdots & \omega \end{bmatrix}$$

donde g_m son las componentes del campo G y h_n son las componentes del campo H.

Si miramos la matriz resultante, la drivada parcial de la composición con respecto a la primera variable es:

F_{x_1}=(a,b,c,…) las componentes dependen de filas que tenga la matriz resultante

$\vdots$

F_{x_n}=($\alpha, \beta, \gamma,$ ...) las componentes dependen de filas que tenga la matriz resultante.

Ahora, vamos al ejercicio en cuestión:

$$JF(u,v) = \big(Jf \circ G(u,v)\big)\ JG(u,v) = [f_x \quad f_y \quad f_z]_{G(u,v)} \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix}$$

Operando

$$JF(u,v) = [yz \quad xz \quad xy]_{G(u,v)} \begin{bmatrix} v & u \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= [(u+v)(u-v) \quad uv(u-v) \quad uv(u+v)] \begin{bmatrix} v & u \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ahora lo que hay que haces es reemplazar u y v por su equivalente denotado en la función G:

$JF(u,v)$=

$$= [(u+v)(u-v)v + uv(u-v) + (u+v)uv \quad (u+v)(u-v)u + uv(u-v) - (u+v)uv]$$

Una vez obtenida esta matriz, expresamos las derivadas parciales:

F_u=$3u^2v - v^3$

F_v=$u^3 - 3uv^2$