Composición de funciones

En análisis matemático de una variable, se ha visto que dadas dos funciones f y g, bajo ciertas condiciones, tiene sentido por ejemplo, usar a la función g como variable de entrada para la función f, lo que se indica como $f \circ g$, y se dice g compuesta con f. Con más detalle,

Si $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y, $g: B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y la imagen de g está contenida en A, $imag\ g \subseteq A$, entonces tiene sentido la relación $f \circ g$.

Pasemos ahora al caso de composición de funciones de varias variables escalares, trayectorias y vectoriales.

1) Caso de composición entre una trayectoria y una función escalar

Sean el campo escalar $f(x, y) = 6 - x - y$,
y la trayectoria en el plano $\vec{\alpha}: [0; 2\pi] \to \mathbb{R}^2 / \vec{\alpha}(t) = (2cos\ t, 2sin\ t)$.

Hacer la composición de $\vec{\alpha}$ con f.
Primeramente, hallamos el dominio de $f \circ \vec{\alpha}$

$$dom\ f \circ \vec{\alpha} = \{t \in dom\ \vec{\alpha} / \vec{\alpha}(t) \in dom\ f\} = \{t \in [0; 2\pi] / (2cos\ t, 2sin\ t) \in R^2\} = [0; 2\pi]$$

ya que $(2 \cos t, 2 \sin t) \in \mathbb{R}^2$ es una proposición verdadera.

Ahora, hallamos $f \circ \vec{\alpha}$

$f \circ \vec{\alpha}: dom\ f \circ \vec{\alpha} \to \mathbb{R} / f \circ \vec{\alpha}(t) = f[\vec{\alpha}(t)]$,

Pero, $f[\vec{\alpha}(t)] = f(2cos\ t, 2sin\ t) = 6 - 2cos\ t - 2sin\ t$. Luego

$$f \circ \vec{\alpha}: [0; 2\pi] \to \mathbb{R} / f \circ \vec{\alpha}(t) = 6 - 2cos\ t - 2sin\ t$$

2) Caso de composición entre una trayectoria y una función vectorial

Dados el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$,
y la trayectoria en el plano $\vec{\omega}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 / \vec{\omega}(t) = (t, t)$.

Hallar la función compuesta $\vec{F} \circ \vec{\omega}$.

Hallamos el dominio de $\vec{F} \circ \vec{\omega}$

$$dom\,\vec{F} \circ \vec{\omega} = \{t \in dom\,\vec{\omega} /\ \vec{\omega}(t) \in dom\,\vec{F}\} = \{t \in \mathbb{R}/(t,t) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}$$

porque $(t,t) \in \mathbb{R}^2$ es una proposición verdadera.

Hallamos $\vec{F} \circ \vec{\omega}$

$$\vec{F} \circ \vec{\omega}: dom\,\vec{F} \circ \vec{\omega} \to \mathbb{R}^2 /\ \vec{F} \circ \vec{\omega}(t) = \vec{F}[\vec{\omega}(t)]$$

Pero, $\vec{F}[\vec{\omega}(t)] = \vec{F}(t,t) = (t^2 - t^2, 2tt) = (0{,}2t^2)$. Entonces

$$\vec{F} \circ \vec{\omega}: R \to \mathbb{R}^2/\vec{F} \circ \vec{\omega}(t) = (0{,}2t^2)$$

3) <u>Caso de composición entre una trayectoria y una función vectorial</u>

Sean el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$,

y la trayectoria en el espacio $\vec{\mu}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 /\ \vec{\mu}(t) = (t,t,4)$.

Hallar $\vec{F} \circ \vec{\mu}$.

Hallamos el dominio del campo vectorial $\vec{F}$

$$dom\,\vec{F} \ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ (x,y) \neq (0{,}0)\} = \mathbb{R}^3 - \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/(x,y) = (0{,}0)\}$$

$$dom\,\vec{F} = \mathbb{R}^3 - \{(0{,}0,z)/z \in R\}$$

Podemos ver claramente que $dom\,\vec{F}$: espacio - eje z.

Hallamos el dominio de $\vec{F} \circ \vec{\mu}$

$$dom\,\vec{F} \circ \vec{\mu} \ = \{t \in dom\,\vec{\mu} /\ \vec{\mu}(t) \in dom\,\vec{F}\} = \{t \in \mathbb{R}/\ (t,t,4) \in dom\,\vec{F}\}$$

$$dom\,\vec{F} \circ \vec{\mu} = \{t \in \mathbb{R}/t \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

Hallamos $\vec{F} \circ \vec{\mu}$

$$\vec{F} \circ \vec{\mu}: dom\,\vec{F} \circ \vec{\mu} \to \mathbb{R}^3/\vec{F} \circ \vec{\mu}(t) = \vec{F}[\vec{\mu}(t)]$$

Pero, $\vec{F}[\vec{\mu}(t)] = \vec{F}(t,t,4) = \left(-\frac{t}{t^2+t^2}, \frac{t}{t^2+t^2}, 0\right) = \left(-\frac{1}{2t}, \frac{1}{2t}, 0\right)$. Luego

$$\vec{F} \circ \vec{\mu}: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}^3 /\ \vec{F} \circ \vec{\mu}(t) = \left(-\frac{1}{2t}, \frac{1}{2t}, 0\right)$$