Álgebra y Geometría analítica II

Primer cuatrimestre de 2020

Ejemplo Matriz de Transformación Lineal

Matriz de una TL.

Sea la Transformación Lineal: $f: V \to W$ y sean

$B = \{v_1; v_2; \dots; v_n\}$ base de V $\qquad \dim V = n$

$B' = \{w_1; w_2; \dots; w_k\}$ base de W $\qquad \dim W = k$

Entonces la matriz de la TL asociada a dichas bases es:

$$M_{BB'}f = ([f(v_1)]_{B'} \vdots \; [f(v_2)]_{B'} \vdots \; \dots\dots \; \vdots \; [f(v_n)]_{B'})$$

ORDEN DE LA MATRIZ ASOCIADA A LA TL: $\Rightarrow$ $\boxed{k \; x \; n}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\dim W \; x \; \dim V}$

Ejemplo Matriz de Transformación Lineal

¿Cómo trabajamos con la matriz de una TL?

$$\boxed{M_{BB'}f\,.\,[v]_B = [f(v)]_{B'}}$$

- ✓ PARA HALLAR LA IMAGEN DE ALGÚN VECTOR
- ✓ PARA HALLAR NÚCLEO E IMAGEN DE LA TL
- ✓ PARA CLASIFICAR A LA TL

A DIFERENCIA DE LA EXPRESIÓN GENERAL, NO TRABAJA CON VECTORES SINO CON SUS COORDENADAS EN LAS BASES DADAS

Ejemplo Matriz de Transformación Lineal

Sea la siguiente Transformación Lineal:

$f: R^3 \rightarrow P_2 \;/\; f(a,b,c) = (a-c).x^2 - (2a+b).x + a - c$ y sean:

$B = \{(1,2,1);(0,-1,2);(2,1,1)\}$ base de R^3

$B' = \{1+x\,;x^2-2\,;x\}$ base de P_2

a) Dar la matriz de la TL $M_{BB'}f$

b) Hallar, usando $M_{BB'}f$, núcleo e imagen de f. Clasificar a f

c) Hallar $f(-1,1,0)$ usando la matriz

d) Hallar la matriz $M_{EE'}f$ usando producto de matrices, siendo E y E' las bases canónicas de los respectivos espacios.

Ejemplo Matriz de Transformación Lineal

Sea la siguiente Transformación Lineal:

$f: R^3 \to P_2 \,/\, f(a,b,c) = (a-c).x^2 - (2a+b).x + a - c$ y sean:

$B = \{(1,2,1);(0,-1,2);(2,1,1)\}$ base de R^3

$B' = \{1+x\,;x^2-2\,;x\}$ base de P_2

a) Dar la matriz de la TL $M_{BB'}f$

$$M_{BB'}f = \left([f(1,2,1)]_{B'} \;\vdots\; [f(0,-1,2)]_{B'} \;\vdots\; [f(2,1,1)]_{B'}\right)$$

$f(1,2,1) = -4x \Rightarrow -4x = \alpha_1(1+x) + \alpha_2(x^2-2) + \alpha_3 x$

$f(0,-1,2) = -2x^2 + x - 2 \Rightarrow -2x^2 + x - 2 = \beta_1(1+x) + \beta_2(x^2-2) + \beta_3 x$

$f(2,1,1) = x^2 - 5x + 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 1 = \delta_1(1+x) + \delta_2(x^2-2) + \delta_3 x$

Ejemplo Matriz de Transformación Lineal

$$M_{BB'}f = ([f(1,2,1)]_{B'} \ \vdots \ [f(0,-1,2)]_{B'} \ \vdots \ [f(2,1,1)]_{B'})$$

$f(1,2,1) = -4x \Rightarrow -4x = \alpha_1(1+x) + \alpha_2(x^2-2) + \alpha_3 x$ $\boxed{1}$

$f(0,-1,2) = -2x^2 + x - 2 \Rightarrow -2x^2 + x - 2 = \beta_1(1+x) + \beta_2(x^2-2) + \beta_3 x$ $\boxed{2}$

$f(2,1,1) = x^2 - 5x + 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 1 = \delta_1(1+x) + \delta_2(x^2-2) + \delta_3 x$ $\boxed{3}$

$\boxed{1}$ $\alpha_1 = 0\ ;\ \alpha_2 = 0\ ;\ \alpha_3 = -4$

$\boxed{2}$ $\beta_1 = -6\ ;\ \beta_2 = -2\ ;\ \beta_3 = 7$

$\boxed{3}$ $\delta_1 = 3\ ;\ \delta_2 = 1\ ;\ \delta_3 = -8$

$$\Rightarrow \boxed{M_{BB'}f = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 7 & -8 \end{pmatrix}}$$

Ejemplo Matriz de Transformación Lineal

$f: R^3 \to P_2$

$B = \{(1,2,1); (0,-1,2); (2,1,1)\}$ base de R^3

$B' = \{1 + x\,; x^2 - 2\,; x\}$ base de P_2

$$M_{BB'}f = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 7 & -8 \end{pmatrix}$$

b) Hallar, usando $M_{BB'}f$, núcleo e imagen de f. Clasificar a f

NÚCLEO ⇒ $Nu\ f = \{v \in R^3\ /\ f(v) = 0x^2 + 0x + 0\}$

$M_{BB'}f\,.\,[v]_B = [f(v)]_{B'}$ ⇒ $v = \alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(0,-1,2) + \alpha_3(2,1,1)$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$f(v) = 0x^2 + 0x + 0$ ⇒ $[f(v)]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ejemplo Matriz de Transformación Lineal

NÚCLEO

$$v = \alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(0,-1,2) + \alpha_3(2,1,1)$$

$$M_{BB'}f = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 7 & -8 \end{pmatrix}$$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$[f(v)]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{BB'}f \,.\, [v]_B = [f(v)]_{B'}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 7 & -8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 7 & -8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2 - \frac{1}{3}f_1 \to f_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & -8 & 0 \end{array}\right)$$

$$-6\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 2\alpha_2$$

$$-4\alpha_1 + 7\alpha_2 - 8\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{9}{4}\alpha_2$$

$$v = -\frac{9}{4}\alpha_2(1,2,1) + \alpha_2(0,-1,2) + 2\alpha_2(2,1,1)$$

Ejemplo Matriz de Transformación Lineal

NÚCLEO

$$v = -\frac{9}{4}\alpha_2(1,2,1) + \alpha_2(0,-1,2) + 2\alpha_2(2,1,1) \Rightarrow \boxed{v = \alpha_2\left(\frac{7}{4}, -\frac{7}{2}, \frac{7}{4}\right)}$$

$$\boxed{Nu\ f = gen\left\{\left(\frac{7}{4}, -\frac{7}{2}, \frac{7}{4}\right)\right\}}$$

⇒ **Un solo vector distinto del nulo, entonces el conjunto es LI**

$$\boxed{B_{Nu\ f} = \left\{\left(\frac{7}{4}, -\frac{7}{2}, \frac{7}{4}\right)\right\}}$$

$$\boxed{\dim Nu\ f = 1}$$

Como $\dim Nu\ f \neq 0$, entonces f NO es monomorfismo

Ejemplo Matriz de Transformación Lineal

$f: R^3 \to P_2$

$B = \{(1,2,1); (0,-1,2); (2,1,1)\}$ base de R^3

$B' = \{1 + x\ ; x^2 - 2\ ; x\}$ base de P_2

$$M_{BB'}f = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 7 & -8 \end{pmatrix}$$

b) Hallar, usando $M_{BB'}f$, núcleo e imagen de f. Clasificar a f

IMAGEN ⇨ $Im\ f = \{w \in P_2 \ /\ \exists v \in R^3\ tq\ f(v) = w\}$

Usaremos los datos en las columnas de la matriz $M_{BB'}f$

IMAGEN

$f: R^3 \to P_2$

$B = \{(1,2,1); (0,-1,2); (2,1,1)\}$ base de R^3

$B' = \{1 + x\,; x^2 - 2\,; x\}$ base de P_2

$$M_{BB'}f = ([f(1,2,1)]_{B'} \;\vdots\; [f(0,-1,2)]_{B'} \;\vdots\; [f(2,1,1)]_{B'})$$

$$\boxed{M_{BB'}f = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 7 & -8 \end{pmatrix}}$$

$$f(1,2,1) = 0.(1+x) + 0.(x^2-2) - 4.x \boxed{= -4.x}$$

$$f(0,-1,2) = (-6).(1+x) - 2.(x^2-2) + 7.x \boxed{= -2x^2 + x - 2}$$

$$f(2,1,1) = 3.(1+x) + 1.(x^2-2) - 8.x \boxed{= x^2 - 5x + 1}$$

Ejemplo Matriz de Transformación Lineal

$$\boxed{Im\ f = gen\{-4x\,;-2x^2+x-2\,;x^2-5x+1\}}$$

$$f: R^3 \to P_2 \qquad \boxed{\dim Nu\ f = 1}$$

$$\boxed{dim\ Im\ f = 2}$$

Como se que la dimensión de la imagen es 2, se que hay algún polinomio generador LD. Elijo uno de ellos y veo que es c.l. de los otros.

$$-2x^2+x-2 = (-2).(x^2-5x+1)+\frac{9}{4}(-4x)$$

$$\boxed{B_{Im\ f} = \{-4x\,;x^2-5x+1\}} \qquad \boxed{dim\ Im\ f = 2}$$

Como $\dim Im\ f \neq \dim P_2$, entonces f NO es epimorfismo

Ejemplo Matriz de Transformación Lineal

$f: R^3 \to P_2$

$B = \{(1,2,1); (0,-1,2); (2,1,1)\}$ base de R^3

$B' = \{1 + x\,; x^2 - 2\,; x\}$ base de P_2

c) Hallar $f(-1,1,0)$ usando la matriz

$$\boxed{M_{BB'}f = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 7 & -8 \end{pmatrix}} \Rightarrow \boxed{M_{BB'}f\,.\,[v]_B = [f(v)]_{B'}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 7 & -8 \end{pmatrix}.\,[(-1,1,0)]_B = [f(-1,1,0)]_{B'}}$$

Ejemplo Matriz de Transformación Lineal

$f: R^3 \to P_2$

$B = \{(1,2,1); (0,-1,2); (2,1,1)\}$ base de R^3

$B' = \{1 + x\ ; x^2 - 2\ ; x\}$ base de P_2

c) Hallar $f\,(-1,1,0)$ usando la matriz

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 7 & -8 \end{pmatrix} . [(-1,1,0)]_B = [f\,(-1,1,0)]_{B'}}$$

$[(-1,1,0)]_B = ?$ ⇨ $(-1,1,0) = \alpha_1(1,2,1) + \alpha_2(0,-1,2) + \alpha_3(2,1,1)$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = -1 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{[(-1,1,0)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Ejemplo Matriz de Transformación Lineal

$f: R^3 \rightarrow P_2$

$B = \{(1,2,1); (0,-1,2); (2,1,1)\}$ base de R^3

$B' = \{1 + x \,; x^2 - 2 \,; x\}$ base de P_2

c) Hallar $f(-1,1,0)$ usando la matriz

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 7 & -8 \end{pmatrix} . [(-1,1,0)]_B = [f(-1,1,0)]_{B'}}$$

$$\boxed{[(-1,1,0)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 7 & -8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = [f(-1,1,0)]_{B'}$$

$$f(-1,1,0) = (-3).(1 + x) - 1.(x^2 - 2) + 4.\mathrm{x}$$

$$\boxed{f(-1,1,0) = -x^2 + x - 1}$$

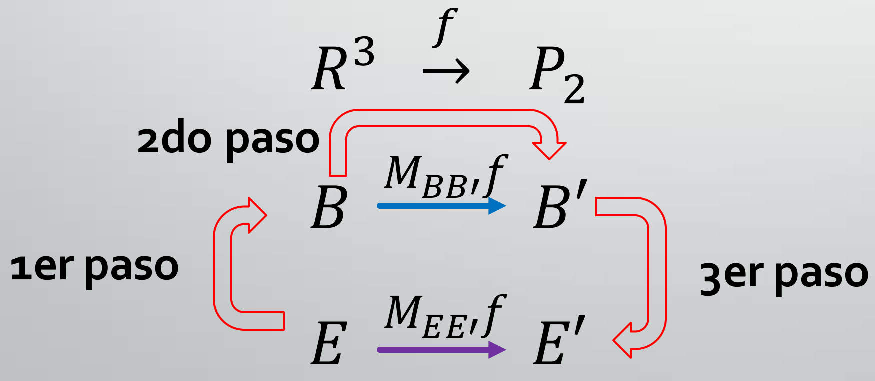
Ejemplo Matriz de Transformación Lineal

$f: R^3 \to P_2$

$B = \{(1,2,1); (0,-1,2); (2,1,1)\}$ base de R^3

$B' = \{1 + x \,; x^2 - 2 \,; x\}$ base de P_2

d) Hallar la matriz $M_{EE'}f$ usando producto de matrices, siendo E y E' las bases canónicas de los respectivos espacios.



1ro: Anoto las bases conocidas de cada espacio

2do: Anoto la matriz que conozco de f

3ro: Anoto la matriz que quiero hallar de f

4to: Armo el camino para llegar desde E a E'

Ejemplo Matriz de Transformación Lineal

$f: R^3 \to P_2$

$B = \{(1,2,1); (0,-1,2); (2,1,1)\}$ base de R^3

$B' = \{1 + x \,; x^2 - 2 \,; x\}$ base de P_2

d) Hallar la matriz $M_{EE'}f$ usando producto de matrices, siendo E y E' las bases canónicas de los respectivos espacios.

$$R^3 \xrightarrow{f} P_2$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "M_{BB'}f"] \arrow[r, bend left=60, "\text{2do paso}"] & B' \arrow[d, bend left, "\text{3er paso}"] \\ E \arrow[u, bend left, "\text{1er paso}"] \arrow[r, "M_{EE'}f"'] & E' \end{tikzcd}$$

4to: Armo la matriz pedida multiplicando las matrices utilizadas en el camino, en orden contrario al andado

$$M_{EE'}f = C_{B'E'} \, . \, M_{BB'}f \, . \, C_{EB}$$

Matrices de cambio de coordenadas

Ejemplo Matriz de Transformación Lineal

$f: R^3 \to P_2$

$B = \{(1,2,1); (0,-1,2); (2,1,1)\}$ base de R^3 $\quad$ $E = \{(1,0,0); (0,1,0); (0,0,1)\}$

$B' = \{1 + x\,; x^2 - 2\,; x\}$ base de P_2 $\quad$ $E' = \{x^2\,; x\,; 1\}$

d) Hallar la matriz $M_{EE'}f$ usando producto de matrices, siendo E y E' las bases canónicas de los respectivos espacios.

$$\boxed{M_{EE'}f = C_{B'E'} \, . \, M_{BB'}f \, . \, C_{EB}}$$

$$C_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

inversa

$$C_{EB} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$C_{B'E'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{BB'}f = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 7 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M_{EE'}f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$