Curvas parametrizadas

Longitud de arco

Integral de línea de campos escalares

Integral de línea de campos vectoriales

Práctica sobre

- Ejemplos de parametrizaciones de curvas conocidas.
- Curvas regulares.
- Curvas simples.
- Curvas cerradas simples.
- Longitud de arco.
- Integral de línea de campos escalares.
- Integral de línea de campos vectoriales.

Curvas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$

Definición 1. Una *trayectoria* en $\mathbb{R}^n$ es una función

$$\alpha: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n / \alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$$

donde $I = [a, b]$ es el dominio de α llamado *intervalo paramétrico* y la variable t el *parámetro*. La imagen de α sobre I, denotada por $C = \alpha[I]$, se llama curva parametrizada por α y los puntos

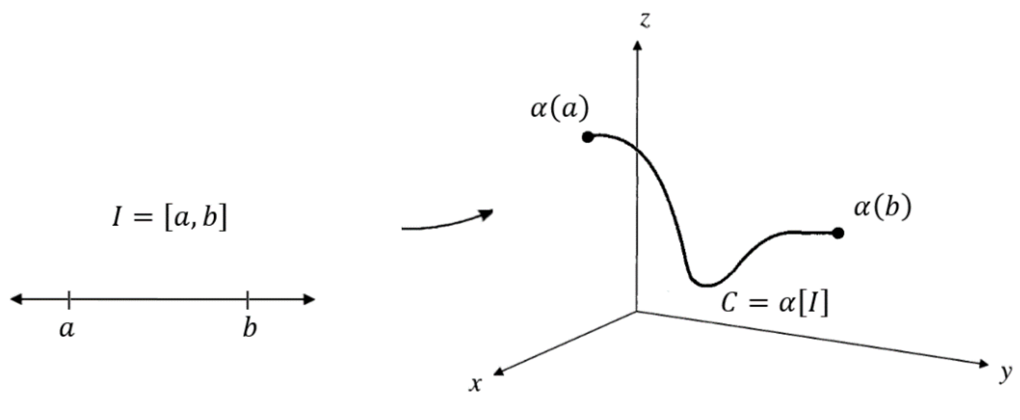
$$A = \alpha(a) \in \mathbb{R}^n \qquad B = \alpha(b) \in \mathbb{R}^n$$

se llaman extremos inicial y final, respectivamente. Se dice que α es una *trayectoria regular* si existe la derivada $\alpha'(t) \neq \vec{0}$ y es continua en el intervalo abierto $I' = (a, b)$, en este caso de dice que

$$C = \alpha[I]$$

es una curva regular.

Este tipo de funciones se utilizan para modelar el recorrido realizado por un objeto en movimiento, en el plano, en el espacio o, en general, en $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, $\alpha(t_0) \in \mathbb{R}^3$ puede simbolizar la posición de una partícula en el espacio, en el instante t_0. De este modo, así como se muestra en la figura, a medida que la variable t recorre el intervalo I, desde a hasta b, la función α va trazando la curva $C \subset \mathbb{R}^3$.



<u>Representación gráfica del intervalo paramétrico I y de la curva C parametrizada por α.</u>

Ejemplo 1. La función

$$\alpha(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (r \cdot \cos(t)\,, r \cdot \operatorname{sen}(t))$$

con intervalo paramétrico $I = [0, 2\pi]$, parametriza por completo, la circunferencia C de centro en el origen y radio r.

En efecto, del triángulo rectángulo de vértices $(x,0)$, $(0,y)$ y el origen O, que se muestra en la Figura 2, aplicando las relaciones trigonométricas fundamentales se deducen las siguientes relaciones

$$\cos(t) = \frac{x}{r} \qquad\qquad \operatorname{sen}(t) = \frac{y}{r}$$

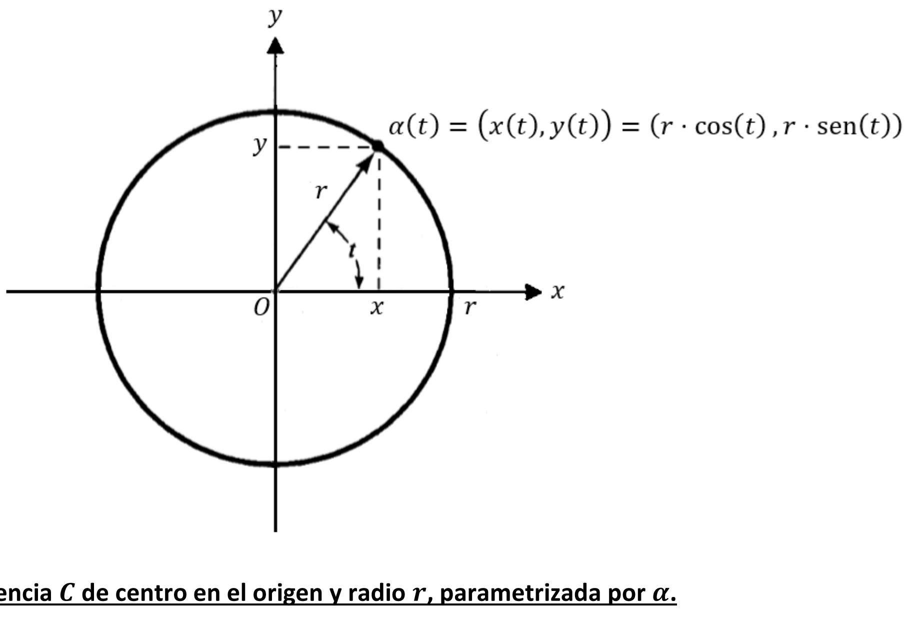
Nótese que, en el triángulo rectángulo mencionado, los valores de x e y, corresponden a las longitudes de los catetos adyacente y opuesto, respecto del ángulo t. Y de estas ecuaciones se obtienen las siguientes

$$x = x(t) = r \cdot \cos(t) \qquad\qquad y = y(t) = r \cdot \operatorname{sen}(t)$$

Esto quiere decir que el par (x,y) que se ha tomado de la circunferencia, en referencia al valor angular t, admite la escritura

$$(x,y) = \big(x(t), y(t)\big) = (r \cdot \cos(t)\,, r \cdot \operatorname{sen}(t))$$

Por otra parte, también de la construcción presentada en la Figura 2, se deduce el rango de variación del parámetro. Obsérvese que cuando t varía desde $a = 0$ hasta $b = 2\pi$, $\alpha(t)$ realiza la traza completa de la circunferencia C, empezando y terminando el recorrido en el punto $\alpha(0) = \alpha(2\pi) = (r,0)$. La traza completa también se logra tomando como referencia un intervalo paramétrico $I = [a,b]$ de longitud $l = b - a = 2\pi$.



<u>Circunferencia C de centro en el origen y radio r, parametrizada por α.</u>

El desarrollo anterior muestra cómo obtener una parametrización de la circunferencia C, a partir de la construcción realizada. Y que efectivamente la función α se corresponde con una de estas.
Hay situaciones en las cuales se deduce el tipo de curva parametrizada una función dada, a partir de obtener la ecuación cartesiana

$$F(x, y) = 0$$

que a esta le corresponde. Esto se llama implicitar la curva. Esto se logra a partir de considerar las ecuaciones que definen a la curva

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

eliminar el parámetro t y obtener una ecuación que solamente involucre a x e y. Para el caso de

$$C: \begin{cases} x = x(t) = r \cdot \cos(t) \\ y = y(t) = r \cdot \operatorname{sen}(t) \end{cases}$$

se procede del siguiente modo

$$x = x(t) = r \cdot \cos(t) \quad \rightarrow \quad x^2 = r^2 \cdot \cos^2(t)$$

$$y = y(t) = r \cdot \operatorname{sen}(t) \quad \rightarrow \quad y^2 = r^2 \cdot \operatorname{sen}^2(t)$$

sumando las últimas expresiones resulta

$$x^2 + y^2 = r^2 \cdot \cos^2(t) + r^2 \cdot \operatorname{sen}^2(t) = r^2 \cdot \left(\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t)\right) = r^2$$

es decir

$$x^2 + y^2 = r^2$$

o lo que es lo mismo

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

y precisamente, esta ecuación cartesiana define a la circunferencia de centro en el origen y radio r.

Hay que entender, de todas maneras, que la única conclusión que se puede obtener a partir de este procedimiento es que los puntos

$$\left(x(t), y(t)\right) = (r \cdot \cos(t)\,, r \cdot \operatorname{sen}(t))$$

que ofrece la parametrización $\alpha(t)$, verifican la relación

$$x^2(t) + y^2(t) - r^2 = 0$$

Es decir, que todos se encuentran en la circunferencia de centro en el origen y radio r. Nada se puede afirmar sobre qué parte de esta circunferencia es la que dibuja la función α. Obsérvese que si se tomara el rango

$$0 \leq t \leq \pi$$

se estaría parametrizando solamente la semicircunferencia superior, desde el extremo inicial de recorrido $\alpha(0) = (r, 0)$ hasta el extremo final $\alpha(\pi) = (-r, 0)$. En cambio, la ecuación

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

define la circunferencia completa sin inducir un sentido de recorrido alguno.

Definición. Se dice que la curva parametrizada por

$$\alpha: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2: \alpha(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

es una *curva simple* si y sólo si la función α es inyectiva el intervalo paramétrico $I = [a, b]$.

Esto quiere decir que para dos valores distintos $t_1 \neq t_2$ tales que

$$t_1 \in I \qquad t_2 \in I$$

Entonces

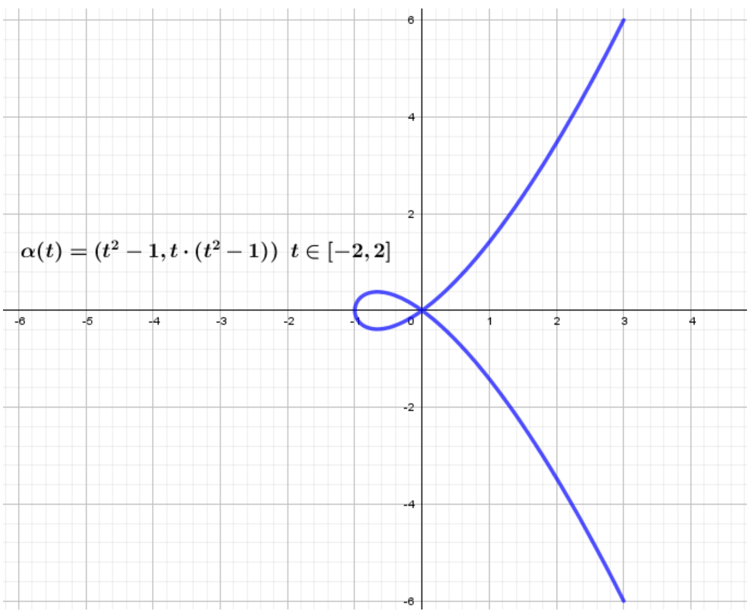
$$\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$$

El concepto de curva simple hace referencia a una curva que no tiene intersección consigo misma. O lo que es lo mismo la traza de $\alpha(t)$ no pasa dos veces por el mismo lugar.

Un ejemplo de esta situación se observa en la curva definida por la parametrización

$$\alpha(t) = \big(x(t), y(t)\big) = \big(t^2 - 1, t(t^2 - 1)\big)$$

con intervalo paramétrico $I = [-2,2]$.



Representación geométrica de la curva parametrizada por α.

Nótese que en $t_1 = -1$ y en $t_2 = 1$ la imagen es el origen de coordenadas.

$$\alpha(t_1) = \alpha(-1) = (0,0)$$

$$\alpha(t_2) = \alpha(1) = (0,0)$$

En el caso del Ejemplo 1 se presenta una curva que satisface esta propiedad en todo el intervalo paramétrico, salvo en los extremos. En el contexto en el que se está trabajando, se dice que una curva C que está caracterizada por esta propiedad se llama curva cerrada simple.

Definición. Se dice que la curva parametrizada por

$$\alpha: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2: \alpha(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

es una *curva cerrada simple* si y sólo si la función α es inyectiva el intervalo (a, b) y además satisface

$$\alpha(a) = \alpha(b)$$

En este caso, la función $\alpha(t)$ ofrece puntos distintos a lo largo de todo su recorrido, el cual empieza y termina en el mismo lugar, es decir que el extremo inicial y el extremo final son el mismo punto. Por esto se da la igualdad

$$\alpha(a) = A = \alpha(b) = B$$

Cuando se trata de una curva cerrada, se habla también se sentido de recorrido. Intuitivamente, se dice que una curva cerrada simple está orientada positivamente, o que tiene orientación positiva, o que es recorrida en sentido positivo, si ésta es recorrida en sentido opuesto al de las agujas del reloj. En caso contrario, se dice que la curva está recorrida en sentido negativo.

Por ejemplo, la función del Ejemplo 1, a saber

$$\alpha(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (r \cdot \cos(t)\,, r \cdot \operatorname{sen}(t)) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

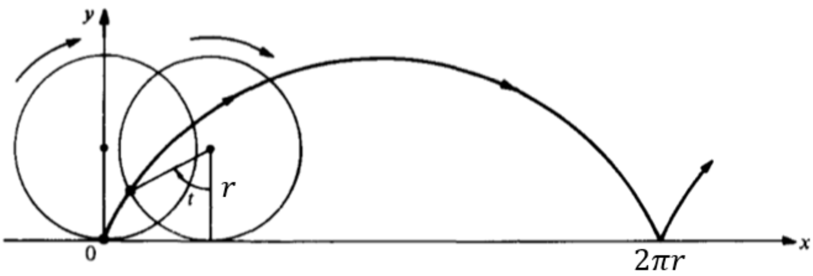
Recorre a la circunferencia de centro en el origen y de radio r en sentido positivo, es decir, en sentido opuesto al de las gujas del reloj. Mientras que las funciones

$$\beta(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (r \cdot \cos(t)\,, -r \cdot \operatorname{sen}(t)) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Y

$$\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (r \cdot \operatorname{sen}(t)\,, r \cdot \cos(t)) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Ejemplo 2. Se lama *cicloide* a la curva que describe un punto fijo sobre una circunferencia de radio R, que rueda sin deslizarse sobre una recta.



Representación geométrica de la cicloide

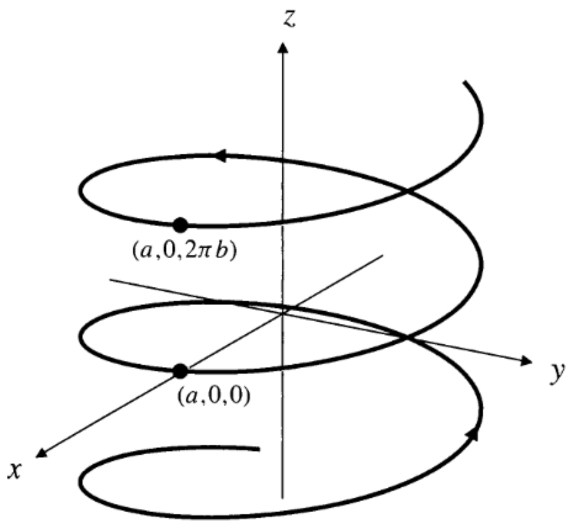
Una parametrización para la primera rama de esta curva es la que ofrece la función

$$\alpha(t) = \big(r \cdot t - r \cdot sen(t), r - r \cdot cos(t)\big) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Ejemplo 3. La función vectorial

$$\alpha(t) = (a \cdot \cos(t)\,, a \cdot \operatorname{sen}(t)\,, b \cdot t) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

con $a > 0$ y $b > 0$ parametriza la *hélice circular* que se muestra en la Figura 4, iniciando el trazado en el extremo inicial $\alpha(0) = (a, 0,0)$ y finalizándolo en el extremo final $\alpha(2\pi) = (a, 0,2\pi b)$.



Hélice circular del Ejemplo 3.

Una característica de esta curva es que se encuentra incluida en el cilindro vertical de ecuación

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Efectivamente, al considerar las fórmulas de x e y y procediendo como se hizo en el Ejemplo 1, se verifica la relación mencionada.

$$x^2(t) + y^2(t) = a^2 \cdot \cos^2(t) + a^2 \cdot \mathrm{sen}^2(t) = a^2 \cdot \left(\cos^2(t) + \mathrm{sen}^2(t)\right) = a^2$$

Ejemplo 4. El segmento de la recta R de $\mathbb{R}^3$ de extremos inicial y final, A y B respectivamente, es la imagen de la trayectoria

$$\alpha(t) = A + t \cdot (B - A) \qquad 0 \leq t \leq 1$$

Nótese que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$. Por otra parte, a partir de los puntos A y B es posible obtener el vector diferencia

$$D = B - A$$

que resulta ser paralelo a la recta R. Es decir que se trata de un vector director de la recta. A su vez, este vector coincide en sentido con el sentido de recorrido en el que se quiere trazar el segmento en cuestión.

De este modo, para cada número real t_0, el vector

$$V = t_0 \cdot (B - A)$$

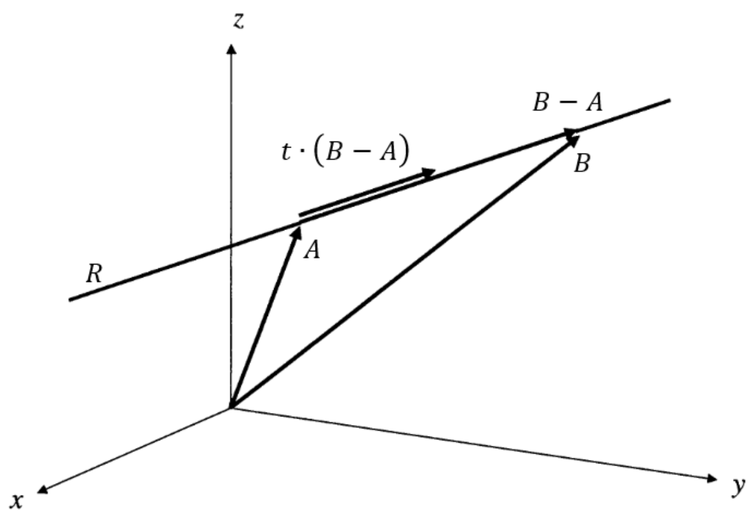
también es paralelo a R. Con lo cual, la terna

$$P = A + t_0 \cdot (B - A)$$

constituye un punto sobre la recta. Por tal razón se define la función

$$\alpha(t) = A + t \cdot (B - A)$$

Que dibuja la recta completa cuando el parámetro t recorre la recta real, y solamente el segmento de extremos A y B cuando t varía en el intervalo $[0,1]$.



<u>**Visualización geométrica del segmento de recta de extremos A y B.**</u>

Ejemplo 5. La función vectorial

$$\alpha(t) = (a \cdot \cos(t) + h, b \cdot \operatorname{sen}(t) + k) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Parametriza una elipse C completa, de centro (h, k) y valores positivos de semiejes "a" horizontal y "b" vertical. Nótese que

$$C: \begin{cases} x = x(t) = a \cdot \cos(t) + h \\ y = y(t) = b \cdot \operatorname{sen}(t) + k \end{cases}$$

De estas fórmulas se deducen las relaciones

$$x - h = a \cdot \cos(t)$$

$$y - k = b \cdot \operatorname{sen}(t)$$

Luego

$$\frac{x - h}{a} = \cos(t)$$

$$\frac{y - k}{b} = \operatorname{sen}(t)$$

Elevando al cuadrado a ambos lados

$$\left(\frac{x - h}{a}\right)^2 = \cos^2(t)$$

$$\left(\frac{y - k}{b}\right)^2 = \operatorname{sen}^2(t)$$

Sumando a ambos lados

$$\left(\frac{x-h}{a}\right)^2+\left(\frac{y-k}{b}\right)^2=\cos^2(t)+\operatorname{sen}^2(t)=1$$

Es decir que

$$\left(\frac{x-h}{a}\right)^2+\left(\frac{y-k}{b}\right)^2=1$$

O bien

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Que es la ecuación cartesiana de la elipse mencionada. Y que la parametrización sea completa, tiene que ver con el intervalo paramétrico, que en este caso es $I=[0,2\pi]$.

Longitud de arco

Definición. Sea la curva C parametrizada por la función vectorial

$$\alpha:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2:\alpha(t)=\big(x(t),y(t)\big)$$

de clase C^1 en el intervalo paramétrico $I=[a,b]$. Se define la longitud de arco $l(C)$ de la curva C como la integral

$$l(C)=\int_{t=a}^{t=b}\|\alpha'(t)\|\,dt$$

Téngase en cuenta que la integral que define la longitud de arco $l(C)$ de la curva C, calcula la longitud acumulada de la curva trazada por la función α. Esto quiere decir que, si, por ejemplo, la función α parametriza una circunferencia y la recorre varias veces, la integral anterior dará como resultado, la longitud acumulada a lo largo de todo el recorrido, no coincidiendo en tal caso con la longitud real de esa curva.

Ejemplo 6. Calcular la longitud de la circunferencia

$$C: x^2+y^2=r_0^2$$

Utilizando la parametrización del Ejemplo 1

$$C:\alpha(t)=\big(x(t),y(t)\big)=(r_0\cdot\cos(t)\,,r_0\cdot\operatorname{sen}(t))\qquad 0\le t\le 2\pi$$

con intervalo paramétrico $I=[0,2\pi]$, se tiene

$$\alpha'(t) = \left(x'(t), y'(t)\right) = (-r_0 \cdot \operatorname{sen}(t), r_0 \cdot \cos(t))$$

Luego

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} = \sqrt{(-r_0 \cdot \operatorname{sen}(t))^2 + (r_0 \cdot \cos(t))^2} = \sqrt{r_0^2} = r_0$$

De este modo

$$l(C) = \int_{t=a}^{t=b} \|\alpha'(t)\| \, dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} r_0 \, dt = 2\pi r_0$$

Es decir que la longitud de la circunferencia de radio r es igual a

$$l(C) = 2\pi \cdot r_0$$

Como es conocido.

Ejemplo 7. Calcular la longitud de la cicloide del Ejemplo

$$C: \alpha(t) = \left(r \cdot t - r \cdot sen(t), r - r \cdot cos(t)\right) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Se tiene

$$\alpha'(t) = \left(x'(t), y'(t)\right) = (r - r \cdot \cos(t), r \cdot \operatorname{sen}(t))$$

Entonces

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} = \sqrt{(r - r \cdot \cos(t))^2 + (r \cdot \operatorname{sen}(t))^2}$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} = \sqrt{r^2 - 2r^2\cos(t) + r^2\cos^2(t) + r^2\operatorname{sen}^2(t)}$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} = \sqrt{r^2 - 2r^2\cos(t) + r^2} = \sqrt{2r^2 - 2r^2\cos(t)}$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} = \sqrt{2r^2(1 - \cos(t))} = \sqrt{2}r\sqrt{1 - \cos(t)}$$

Teniendo en cuenta la identidad trigonométrica

$$\cos(2u) = \cos^2(u) - \operatorname{sen}^2(u)$$

$$1 - \cos(t) = 1 - \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right) = 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)$$

Se puede escribir

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} = \sqrt{2}r\sqrt{1-\cos(t)} = \sqrt{2}r\sqrt{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} = \sqrt{2}r\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)} = 2r\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)$$

Es decir

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} = 2r\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)$$

Nótese que

$$\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \left|\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)\right| = \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)$$

Ya que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \geq 0$$

En el intervalo paramétrico

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

En definitiva, resulta

$$l(C) = \int_{t=a}^{t=b} \|\alpha'(t)\|\,dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} 2r\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)dt = 2r\left(-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\Big|_{t=0}^{t=2\pi}\right)$$

$$l(C) = 2r\left(-2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\Big|_{t=0}^{t=2\pi}\right) = 4r(-\cos(\pi)+\cos(0)) = 8r$$

Es decir que

$$l(C) = 8r$$

Integral de línea de un campo escalar

Definición (De integral de línea de un campo escalar). Sea el campo escalar de dos variables

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: z = f(x, y)$$

Continuo en el conjunto abierto no vació U de $\mathbb{R}^2$ y la curva $C = \alpha[I]$ totalmente incluida en U, parametrizada por la función vectorial

$$\alpha: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2: \alpha(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

De clase $\mathcal{C}^1$ en $I = [a, b]$, con extremo inicial $A = \alpha(a)$ y extremo final $B = \alpha(b)$. Se define la integral de línea del campo escalar f sobre la curva C, recorrida desde A hasta B como la integral

$$\int_C f\, ds = \int_A^B f\, ds = \int_{t=a}^{t=b} f\big(\alpha(t)\big) \|\alpha'(t)\|\, dt$$

Nótese que, si el campo escalar considerado es igual a la unidad, es decir

$$f(x, y) = 1$$

Entonces el valor de la integral de línea coincide con la longitud de arco de la curva sobre la que se calcula la integral. En tan caso, se escribe

$$\mathcal{I} = \int_C ds = \int_{t=a}^{t=b} \|\alpha'(t)\|\, dt = l(C)$$

Ejemplo 8. Calcular la integral de línea del campo escalar

$$f(x, y) = e^{x^2+y^2}$$

A lo largo de toda la circunferencia

$$C: x^2 + y^2 = 1$$

Recorrida en sentido positivo, iniciando el recorrido en el punto

$$A = (1.0)$$

Así como se mostró en el Ejemplo 1, una parametrización positiva de la circunferencia citada, cuyo recorrido empieza en el punto $A = (1.0)$ es la siguiente

$$C: \alpha(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Se tiene, además, que

$$\alpha'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big) = (-\operatorname{sen}(t)\,, \cos(t))$$

Luego

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2} = \sqrt{(-\operatorname{sen}(t))^2 + (\cos(t))^2} = \sqrt{1} = 1$$

Por otra parte, la composición de la trayectoria con el campo escalar resulta ser

$$f\big(\alpha(t)\big) = f\big(x(t), y(t)\big) = e^{x^2(t)+y^2(t)} = e^{(\cos(t))^2+(\operatorname{sen}(t))^2} = e^1 = e$$

Entonces

$$\mathcal{I} = \int_C f\,ds = \int_{t=a}^{t=b} f\big(\alpha(t)\big)\|\alpha'(t)\|\,dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} e^{x^2(t)+y^2(t)}\|\alpha'(t)\|\,dt$$

$$\mathcal{I} = \int_C f\,ds = \int_{t=0}^{t=2\pi} e\,dt = 2\pi e$$

Esto significa que el valor de la integral de línea del campo escalar

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2}$$

a lo largo de toda la circunferencia

$$C\colon x^2 + y^2 = 1$$

Es exactamente igual a

$$\mathcal{I} = \int_C f\,ds = 2\pi e$$

Ejemplo 8-b. Calcular la integral de línea del campo escalar

$$f(x,y) = \frac{x}{2}\sqrt{1+4y}$$

A lo largo del arco de parábola

$$C: \alpha(t) = (t, t^2) \qquad 0 \leq t \leq 2$$

En este caso, resulta

$$\alpha'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big) = (1,2t)$$

Luego

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2} = \sqrt{1^2 + (2t)^2} = \sqrt{1+4t^2}$$

Por otra parte, la composición de la trayectoria con el campo escalar resulta ser

$$f\big(\alpha(t)\big) = f\big(x(t), y(t)\big) = \frac{x_{(t)}}{2}\sqrt{1+4y_{(t)}} = \frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2} =$$

Entonces

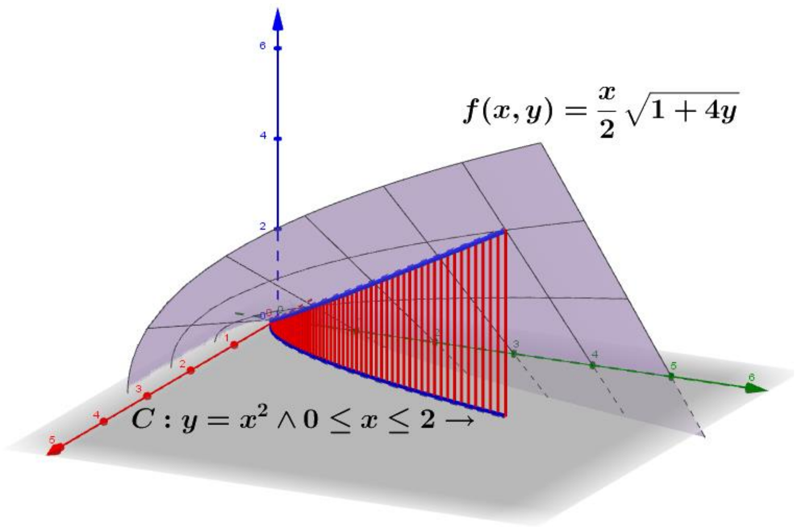
$$\mathcal{I} = \int_C f\,ds = \int_{t=a}^{t=b} f\big(\alpha(t)\big)\|\alpha'(t)\|\,dt = \int_{t=0}^{t=2} \frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2}\sqrt{1+4t^2}\,dt$$

$$\mathcal{I} = \int_C f\,ds = \int_{t=0}^{t=2} \frac{t}{2}(1+4t^2)\;dt = \frac{1}{2}\int_{t=0}^{t=2}(t+4t^3)\;dt = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{t}{2}+t^4\right)\Big|_{t=0}^{t=2}\right]$$

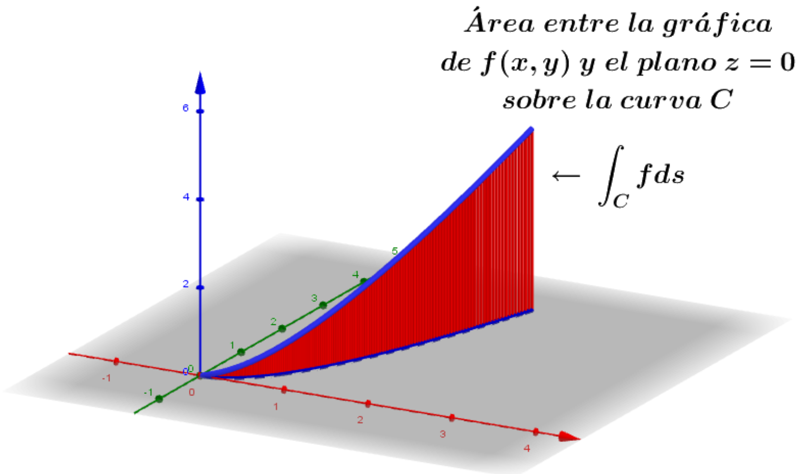
$$\mathcal{I} = \int_C f\,ds = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{t}{2}+t^4\right)\Big|_{t=0}^{t=2}\right] = \frac{1}{2}(1+16) = \frac{17}{2}$$

Es decir que

$$\mathcal{I} = \int_C f\,ds = \frac{17}{2}$$



<u>El valor de la integral de línea de un campo escalar $z = f(x, y) \geq 0$ sobre la curva C se puede interpretar como el área de la superficie cilíndrica extendida verticalmente desde la curva C, entre el plano $z = 0$ y la gráfica de $z = f(x, y)$</u>



<u>El valor de la integral de línea de un campo escalar $z = f(x, y) \geq 0$ sobre la curva C se puede interpretar como el área de la superficie cilíndrica extendida verticalmente desde la curva C, entre el plano $z = 0$ y la gráfica de $z = f(x, y)$</u>

Integral de línea de un campo vectorial

Definición (De integral de línea de un campo vectorial). Sea el campo vectorial de dos variables

$$\vec{F}: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2: \vec{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$$

continuo en el conjunto abierto no vació U de $\mathbb{R}^2$ y la curva $C = \alpha[I]$ totalmente incluida en U, parametrizada por la función

$$\alpha: [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2: \alpha(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

de clase $\mathcal{C}^1$ en $I = [a,b]$, con extremo inicial $A = \alpha(a)$ y extremo final $B = \alpha(b)$. Se define la integral de línea del campo vectorial F sobre la curva C, recorrida desde A hasta B como la integral

$$\int_C \vec{F}\, d\alpha = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t=a}^{t=b} \vec{F}[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t)\, dt$$

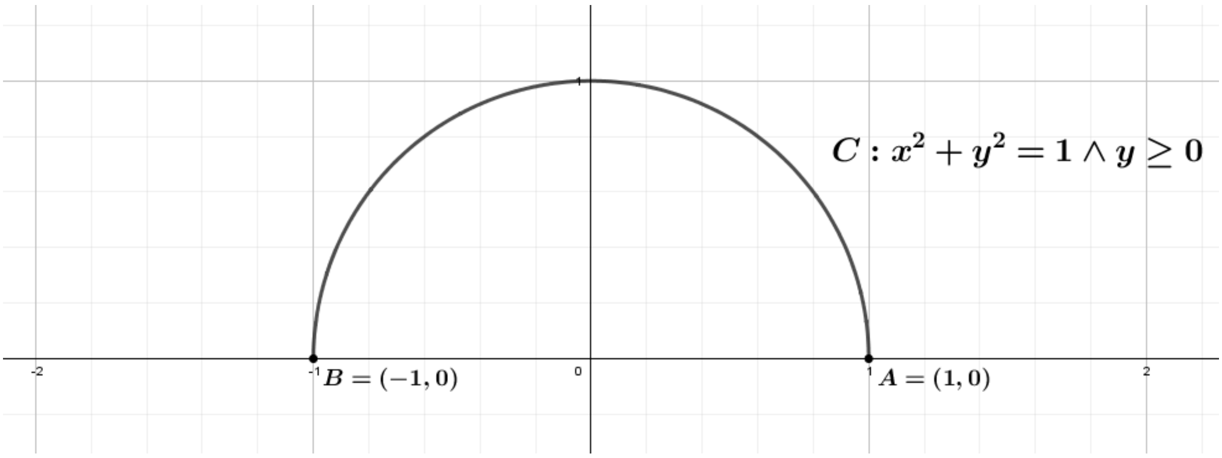
Ejemplo 9. Cálculo de la integral de línea del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

a lo largo del arco de circunferencia

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1 \wedge y \geq 0\}$$

recorrido desde $A = (1,0)$ hasta $B = (-1,0)$.



Arco C sobre el que se calcula la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}$

De lo hecho en el Ejemplo 1, se sabe que una parametrización para el arco C es la siguiente

$$C: \alpha(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)) \qquad 0 \leq t \leq \pi$$

Nótese que el extremo inicial se obtiene evaluando a la función α en el extremo inicial del intervalo paramétrico, o sea

$$A = \alpha(0) = (\cos(0), \operatorname{sen}(0)) = (1,0)$$

Y lo correspondiente para el extremo final

$$B = \alpha(\pi) = (\cos(\pi), \operatorname{sen}(\pi)) = (-1,0)$$

De este modo, se obtiene la derivada de la parametrización

$$\alpha'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t))$$

Por otra parte, el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

evaluado en la parametrización ofrece el resultado

$$\vec{F}[\alpha(t)] = \Big(P\big(\alpha(t)\big), Q\big(\alpha(t)\big)\Big) = \big(P(\cos(t), \operatorname{sen}(t)), Q(\cos(t), \operatorname{sen}(t))\big)$$

$$\vec{F}[\alpha(t)] = \left(\frac{-\operatorname{sen}(t)}{(\cos(t))^2 + (\operatorname{sen}(t))^2}, \frac{\cos(t)}{(\cos(t))^2 + (\operatorname{sen}(t))^2}\right) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t))$$

Esto es

$$\vec{F}[\alpha(t)] = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t))$$

Luego, calculando el producto escalar de los elementos obtenidos, resulta

$$\vec{F}[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t)) \bullet (-\operatorname{sen}(t), \cos(t)) = (\operatorname{sen}(t))^2 + (\cos(t))^2 = 1$$

Es decir

$$\vec{F}[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t) = 1$$

De este modo, la integral de línea de $\vec{F}$ a lo largo del arco de circunferencia

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \wedge y \geq 0\}$$

recorrido desde $A = (1,0)$ hasta $B = (-1,0)$, es igual a la integral

$$\int_C \vec{F}\, d\alpha = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t=a}^{t=b} \vec{F}[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t)\, dt$$

Concretamente

$$\int_C \vec{F}\, d\alpha = \int_{t=0}^{t=\pi} \vec{F}[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t)\, dt = \int_{t=0}^{t=\pi} 1\, dt = t \Big|_{t=0}^{t=\pi} = \pi$$

Es decir que

$$\int_C \vec{F}\, d\alpha = \int_A^B \vec{F}\, d\alpha = \pi$$

$$\int_A^B \vec{F}\, d\alpha = -\int_B^A \vec{F}\, d\alpha$$

$$\int_B^A \vec{F}\, d\alpha = -\int_A^B \vec{F}\, d\alpha$$

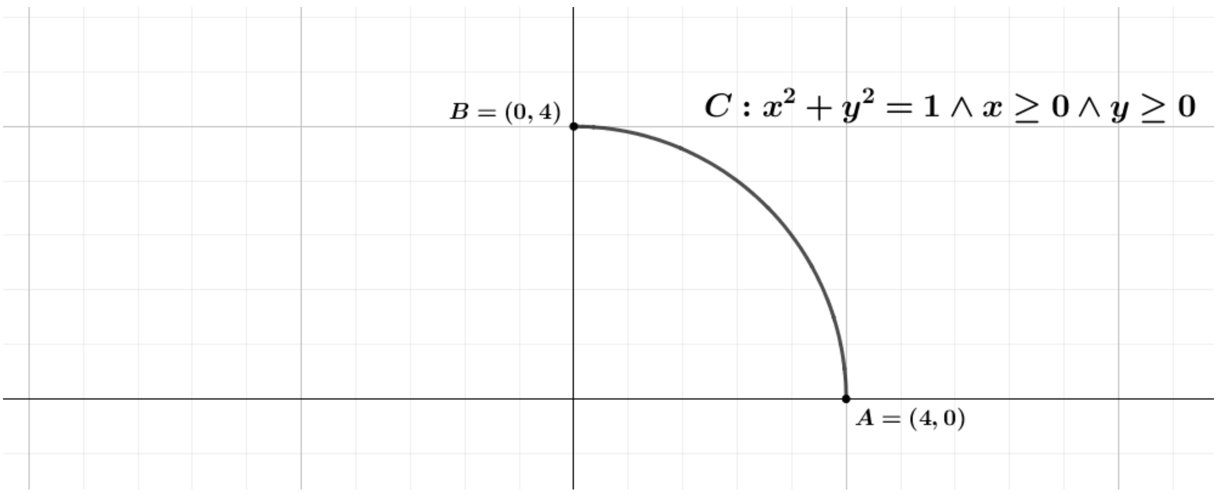
Ejemplo 10. Cálculo de la integral de línea del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

A lo largo del arco de circunferencia

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 16 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$$

Recorrido desde $A = (4,0)$ hasta $B = (0,4)$.



Arco C sobre el que se calcula la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}$

Considerando la parametrización

$$C\colon \alpha(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (4\cos(t)\,, 4\,\mathrm{sen}(t)) \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

Se tiene

$$\alpha'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big) = (-4\,\mathrm{sen}(t)\,, 4\cos(t))$$

En este caso, resulta

$$A = \alpha(0) = (4{,}0) \qquad\qquad B = \alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0{,}4)$$

Por otra parte

$$\vec{F}[\alpha(t)] = \Big(P\big(\alpha(t)\big), Q\big(\alpha(t)\big)\Big) = \big(P(4\cos(t)\,, 4\,\mathrm{sen}(t)), Q, (4\cos(t)\,, 4\,\mathrm{sen}(t))\big)$$

$$\vec{F}\big(\alpha(t)\big) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Luego

$$\vec{F}\big(\alpha(t)\big) \bullet \alpha'(t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \bullet (-4\,\mathrm{sen}(t)\,, 4\cos(t)) = -2\,\mathrm{sen}(t) + 2\cos(t)$$

Y de este modo, la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}$ a lo largo del arco C, o sea

$$\int_C \vec{F}\, d\alpha = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t=a}^{t=b} \vec{F}[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t)\, dt$$

Es igual a

$$\int_C \vec{F}\, d\alpha = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \vec{F}[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t)\, dt = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} (-2\,\mathrm{sen}(t) + 2\cos(t))\, dt$$

$$\int_C \vec{F}\, d\alpha = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \vec{F}[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t)\, dt = (2\cos(t) + 2\,\mathrm{sen}(t))\,\Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_C \vec{F}\, d\alpha = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \vec{F}[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t)\, dt = (2\cos(t) + 2\,\mathrm{sen}(t))\,\Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_C \vec{F}\, d\alpha = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \vec{F}[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t)\, dt = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - (2\cos(0) + 2\,\mathrm{sen}(0))$$

$$\int_C \vec{F}\, d\alpha = \int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \vec{F}[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t)\, dt = (2) - (2) = 0$$

Esto quiere decir que

$$\int_C \vec{F}\, d\alpha = 0$$

Ejemplo 11. Cálculo de la integral de línea del campo vectorial

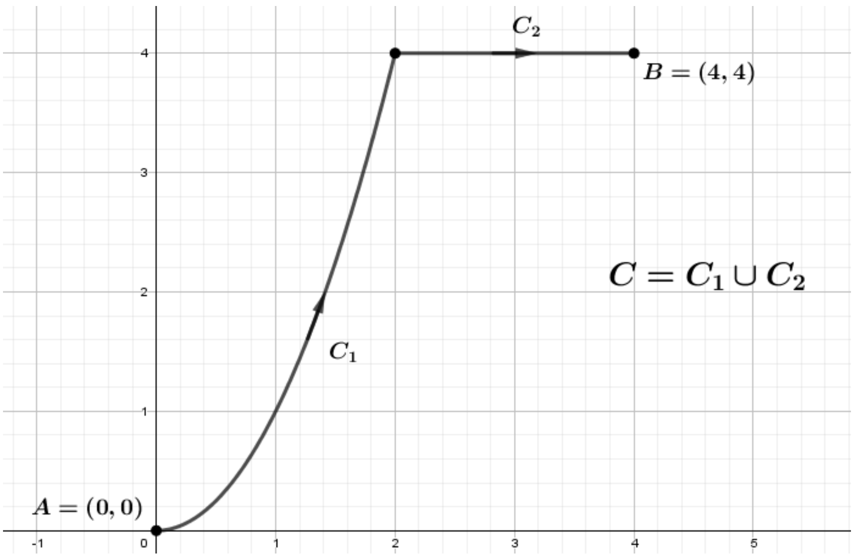
$$\vec{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = (x,y)$$

a lo largo de la curva $C = C_1 \cup C_2$, donde

$$C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 \wedge 0 \leq x \leq 2\}$$

$$C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 4 \wedge 2 \leq x \leq 4\}$$

recorrida desde $A = (0,0)$ hasta $B = (4,4)$.



Curva C sobre la que se calcula la integral de línea del campo vectorial $\vec{F}$

En este caso se aplica la propiedad

$$\int_C \vec{F}\, d\alpha = \int_{C_1} \vec{F}\, d\alpha + \int_{C_2} \vec{F}\, d\alpha$$

a) Cálculo de la integral de línea

$$\int_{C_1} \vec{F}\, d\alpha$$

Una parametrización del arco de parábola C_1

$$C_1: \alpha(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (t, t^2) \qquad 0 \leq t \leq 2$$

$$\int_{C_1} \vec{F}\, d\alpha = \int_{t=0}^{t=2} \vec{F}[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t)\, dt = \int_{t=0}^{t=2} \vec{F}\big(x(t), y(t)\big) \bullet \big(x'(t), y'(t)\big)\, dt$$

$$\int_{C_1} \vec{F}\, d\alpha = \int_{t=0}^{t=2} (t, t^2) \bullet (1{,}2t)\, dt = \int_{t=0}^{t=2} (t + 2t^3)\, dt = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2}\Big|_{t=0}^{t=2} = 10$$

Es decir que

$$\int_{C_1} \vec{F}\, d\alpha = 10$$

b) Cálculo de la integral de línea

$$\int_{C_2} \vec{F}\, d\alpha$$

Una parametrización del arco de parábola C_2

$$C_2: \alpha(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (t, 4) \qquad 2 \leq t \leq 4$$

$$\int_{C_2} \vec{F}\, d\alpha = \int_{t=2}^{t=4} \vec{F}[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t)\, dt = \int_{t=2}^{t=4} \vec{F}\big(x(t), y(t)\big) \bullet \big(x'(t), y'(t)\big)\, dt$$

$$\int_{C_2} \vec{F}\, d\alpha = \int_{t=2}^{t=4} (t, 4) \bullet (1{,}0)\, dt = \int_{t=2}^{t=4} t\, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{t=2}^{t=4} = 6$$

Es decir que

$$\int_{C_2} \vec{F}\, d\alpha = 6$$

Y de esta manera, resulta que

$$\int_C \vec{F}\, d\alpha = \int_{C_1} \vec{F}\, d\alpha + \int_{C_2} \vec{F}\, d\alpha = 10 + 6 = 16$$

Es decir que la integral de línea del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = (x,y)$$

a lo largo de la curva $C = C_1 \cup C_2$, recorrida desde $A = (0,0)$ hasta $B = (4,4)$ es

$$\int_C \vec{F}\, d\alpha = 16$$

Cuando la integral de línea se calcula a lo largo de una curva cerrada, se tiene que el extremo inicial y el extremo final coinciden y la curva es recorrida, en sentido positivo, o bien en sentido negativo. En el primer caso, se indica

$$\oint_{C^+} \vec{F}\, d\alpha = \oint_{C^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

En el segundo, o sea, cuando se recorre la curva cerrada en sentido negativo, se escribe

$$\oint_{C^-} \vec{F}\, d\alpha = \oint_{C^-} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Y se tiene la siguiente propiedad

$$\oint_{C^+} \vec{F}\, d\alpha = -\oint_{C^-} \vec{F}\, d\alpha$$

Ejemplo 12. Cálculo de la integral de línea del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = (y, -x)$$

a lo largo de la circunferencia

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

recorrida en sentido negativo.

De lo hecho anteriormente, se sabe que la una parametrización positiva de C es la siguiente

$$C: \alpha(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (\cos(t)\,, \operatorname{sen}(t)) \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Entonces, en virtud de la propiedad del sentido opuesto de recorrido, utilizando esta parametrización se tendrá el opuesto del resultado pedido, esto es

$$\oint_{C^+} \vec{F}\, d\alpha = -\oint_{C^-} \vec{F}\, d\alpha$$

Esto quiere decir que, en vez de buscar una parametrización coincidente con el sentido de recorrido solicitado, se puede reformular la igualdad anterior para hallar el valor pedido. O sea

$$\oint_{C^-} \vec{F}\, d\alpha = -\oint_{C^+} \vec{F}\, d\alpha$$

Cálculo de la integral según la parametrización positiva.

$$\oint_{C^+} \vec{F}\, d\alpha = \int_{t=0}^{t=2\pi} \vec{F}[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t)\, dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} (\operatorname{sen}(t), -\cos(t)) \bullet (-\operatorname{sen}(t), \cos(t))\, dt$$

$$\oint_{C^+} \vec{F}\, d\alpha = \int_{t=0}^{t=2\pi} (-\operatorname{sen}^2(t) - \cos^2(t))\, dt = -\int_{t=0}^{t=2\pi} (\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t))\, dt$$

$$\oint_{C^+} \vec{F}\, d\alpha = -\int_{t=0}^{t=2\pi} dt = -2\pi$$

Es decir que la integral de línea del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = (y, -x)$$

a lo largo de la circunferencia

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

recorrida en sentido positivo, es

$$\oint_{C^+} \vec{F}\, d\alpha = -2\pi$$

Por lo tanto, la integral de línea de $\vec{F}$ a lo largo de la circunferencia C recorrida en sentido negativo es

$$\oint_{C^-} \vec{F}\, d\alpha = -\oint_{C^+} \vec{F}\, d\alpha = -(-2\pi) = 2\pi$$

Esto es

$$\oint_{C^-} \vec{F}\, d\alpha = 2\pi$$