TP 02-7-c Graficar y obtener la ecuación cartesiana

$c)\ \ \vec{\Phi}_3\!:\ [0,\ 2\pi]\times[0,\pi]\to\mathbb{R}^3 /\ \ \vec{\Phi}_3(u,\ v)=(cos(u)\ sen(v)\,,\ sen(u)\ sen(v)\,,\ cos(v))$

$$\begin{cases} x = x(u,v) = cos(u)\ sen(v) \\ y = y(u,v) = sen(u)\ sen(v) \\ z = z(u,v) = cos(v) \end{cases}$$

Elevamos al cuadrado y sumamos

$$x^2+y^2+z^2 = (\cos(u)\ sen(v))^2 + (sen(u)\ sen(v))^2 + (\cos(v))^2 =$$

$$= \cos^2(u)\ sen^2(v)\ + sen^2(u)\ \text{sen}^2(v) + \cos^2(v) = \text{sen}^2(v)\left(\underbrace{\cos^2(u)+\text{sen}^2(u)}_{1}\right) + \cos^2(v) = 1$$

Finalmente

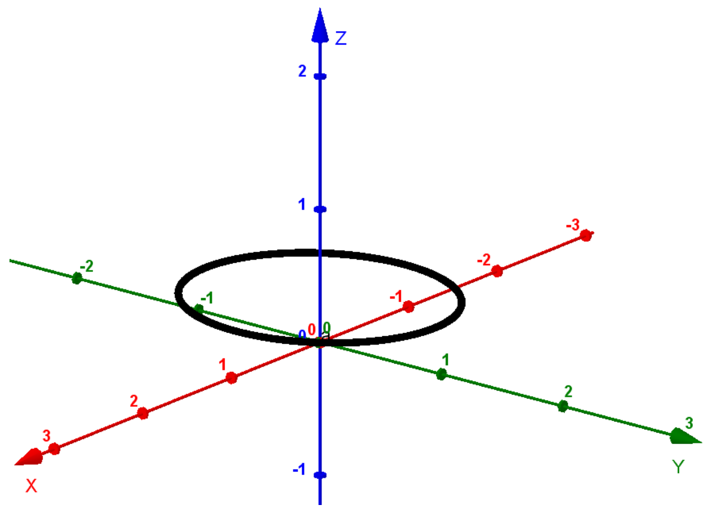
$x^2+y^2+z^2=1$ ecuación cartesiana de la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 1.

Cuál es el gráfico de $\vec{\Phi}_3$ para el dominio dado $[0,\ 2\pi]\times[0,\pi]$

Si dejamos libre a u y fijo v, resulta lo siguiente:

$u\in[0,\ 2\pi]$ para cada $v(fijo)\in[0,\pi]$, la ecuación

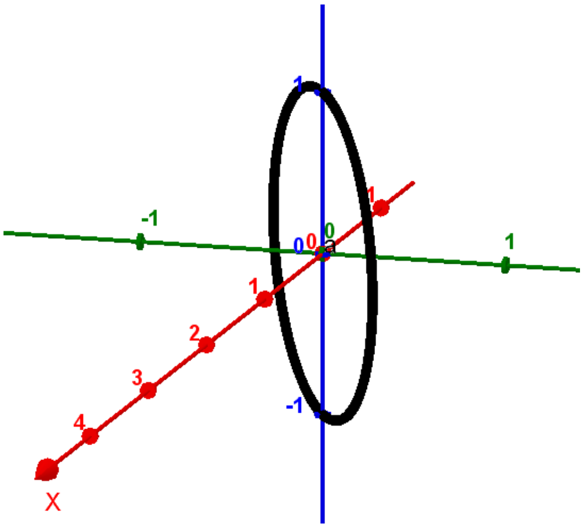
$\vec{\alpha}(u)=\left(cos(u)\ \underbrace{sen(v)}_{cte},\ sen(u)\ \underbrace{sen(v)}_{cte},\ \underbrace{cos(v)}_{cte}\right)$, corresponde a una circunferencia horizontal paralela al plano coordenado xy, o al plano $z=0$, de radio $\text{sen}(v)$, ubicada con respecto a z, entre $-1\le z\le 1, z=\cos(v)$.



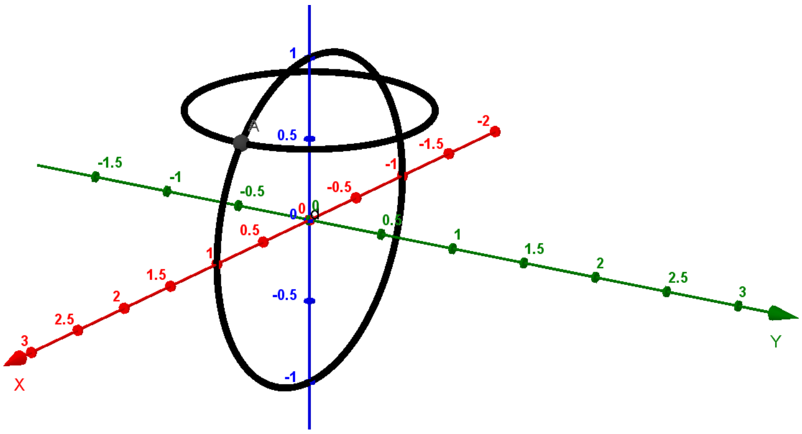
Si ahora dejamos libre a v y fijo u, resulta lo siguiente:

$v \in [0,\ \pi]$ para cada $u(fijo) \in [0,2\pi]$, la ecuación

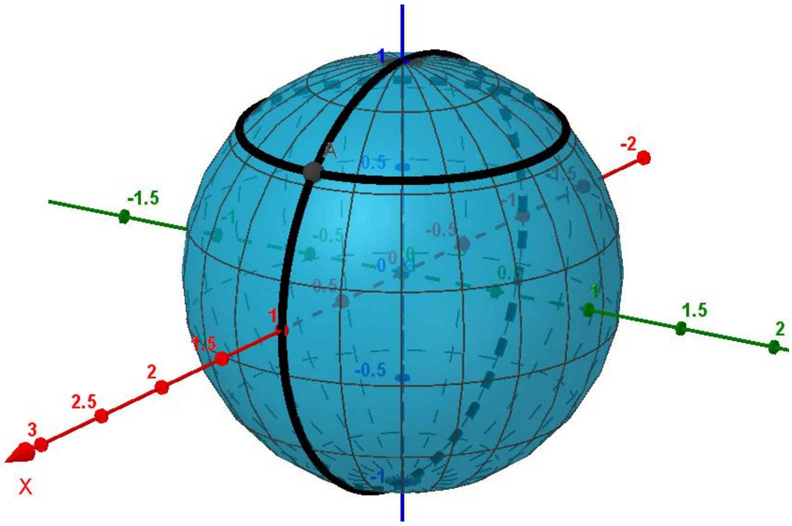
$\vec{\beta}(v) = \left(\underbrace{cos(u)}_{cte}\ sen(v)\,,\ \underbrace{sen(u)}_{cte}\ sen(v)\,,\ cos(v) \right)$, corresponde a una circunferencia vertical (contenida en el plano vertical, $-sen(u)x\ +\ cos(u)y = 0$) perpendicular al plano coordenado xy, o al plano $z = 0$, de radio 1.



Combinando ambas curvas, se vería como muestra la siguiente figura



Finalmente, la parametrización dada corresponde a toda la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$



Acompañan a estas explicaciones los siguientes archivos de geogebra:

TP 02-7-c-Circunf-Horiz.ggb

TP 02-7-c-Circunf-Vert.ggb

TP 02-7-c-Completo.ggb