Regla de la cadena

Guía de clase com 02. 22/04

Repaso de una variable

$$f(x) = \cos(x)$$

$$g(x) = x^3$$

$$h(x) = f \circ g(x) = f[g(x)]$$

$$\boxed{h'(x) = \frac{df}{dx}\big(g(x)\big)\ \frac{dg(x)}{dx}}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = -\operatorname{sen}(x)$$

$$\frac{df}{dx}\big(g(x)\big) = -\operatorname{sen}(x^3)$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = 3x^2$$

$$h'(x) = \frac{df}{dx}\big(g(x)\big)\ \frac{dg(x)}{dx} = -\operatorname{sen}(x^3)\ 3x^2 = (\cos(x^3))'$$

En varias variables

Regla de la cadena caso I

Consideremos los casos de $f: B \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\vec{\alpha}: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, con $im\,(\vec{\alpha}) \subseteq B$, $f \in C^1$ y $\vec{\alpha}$ derivable.

Veamos un primer caso particular sencillo:

$$f(x,y) = Ax^2 + By^2 \,, \quad \vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t))$$

Primero hacemos la composición de $\vec{\alpha}$ con f.

llamamos $h(t) = (f \circ \vec{\alpha})(t) = f(\vec{\alpha}(t))$,

$$h(t) = f(\vec{\alpha}(t)) = f(x(t), y(t)) = A(x(t))^2 + B(y(t))^2$$

$$h'(t) = \left(A\big(x(t)\big)^2 + B\big(y(t)\big)^2\right)$$

derivando respecto a t resulta,

$$h'(t) = A\,2\,x(t)\; x'(t) + B\; 2y(t)\; y'(t) \qquad (1)$$

Obsérvese que

$$2A\,x(t) = f_x(\vec{\alpha}(t)), f_x = 2Ax, \quad \text{y}, \quad 2B\,y(t) = f_y(\vec{\alpha}(t)), f_y = 2By$$

$$h'(t) = \underbrace{2A\,x(t)}_{f_x(\vec{\alpha}(t))}\; x'(t) + \underbrace{2B\,y(t)}_{f_y(\vec{\alpha}(t))}\; y'(t)$$

$$h'(t) = f_x\big(\vec{\alpha}(t)\big)\, x'(t) + f_y\big(\vec{\alpha}(t)\big)\, y'(t)$$

La expresión que antecede tiene el aspecto de un producto escalar

$$(a,b)\cdot(c,d) = ac + bd$$

$$\vec{\alpha}'(t) = (x'(t), y'(t))$$

$$\nabla f(x,y) = (2\,A\,x, 2\,b\,y)$$

Componiendo $\vec{\alpha}$ con el gradiente de f se obtiene:

$$\nabla f \circ \vec{\alpha}(t) = \nabla f(\vec{\alpha}(t)) = (2A\,x(t), 2B\,y(t))$$

Utilizando el gradiente y el producto escalar entre vectores resulta que la (1) se puede expresar como:

$$h'(t) = 2A\,x(t)\; x'(t) + 2B\,y(t)\; y'(t) = \big(2A\,x(t), 2B\,y(t)\big)\cdot\big(x'(t), y'(t)\big) = \nabla f\big(\vec{\alpha}(t)\big)\cdot\vec{\alpha}'(t)$$

Un segundo caso particular sencillo :

$\vec{\beta}(t) = (x(t), y(t))$, $g(x,y) = A\,x^n\,y^m$, con n y m números enteros positivos y,

llamando $k(t) = (g \circ \vec{\beta})(t) = g\left(\vec{\beta}(t)\right) = A\left(x(t)\right)^n \left(y(t)\right)^m$,

procediendo como en el ejemplo anterior, calculamos k' y llegaremos a:

$$k'(t) = An\left(x(t)\right)^{n-1} x'(t) \left(y(t)\right)^m + A\left(x(t)\right)^n m\left(y(t)\right)^{m-1} y'(t) =$$

$$\underbrace{An\left(x(t)\right)^{n-1} \left(y(t)\right)^m}_{f_x(\beta(t))} x'(t) + \underbrace{A\left(x(t)\right)^n m\left(y(t)\right)^{m-1}}_{f_y(\beta(t))} y'(t) =$$

$$= \underbrace{\left(nA\left(x(t)\right)^{n-1}\left(y(t)\right)^m, mA\left(x(t)\right)^n\left(y(t)\right)^{m-1}\right)}_{\nabla g\left(\vec{\beta}(t)\right)} \cdot \underbrace{(x'(t), y'(t))}_{\vec{\beta}'(t)} = \nabla g\left(\vec{\beta}(t)\right) \cdot \vec{\beta}'(t)$$

A continuación se enuncia el teorema que justifica lo expuesto anteriormente:

Teorema (caso I): $\vec{\alpha}: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $f: B \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $im\,\vec{\alpha} \subseteq B$, $f \in C^1$ y $\vec{\alpha}$ derivable, llamando $h(t) = (f \circ \vec{\alpha})(t) = f(\vec{\alpha}(t))$, la función compuesta h es diferenciable y además, $h'(t) = \frac{df(\vec{\alpha}(t))}{dt} = \nabla f\left(\vec{\alpha}(t)\right) \cdot \vec{\alpha}'(t)$.

Los dos casos concretos que más usaremos son:

Con $n = 2$: $h(t) = (f \circ \vec{\alpha})(t) = f(\vec{\alpha}(t)) = f(x(t), y(t))$, entonces,

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \nabla f\left(\vec{\alpha}(t)\right) \cdot \vec{\alpha}'(t)$$

Con $n = 3$: $h(t) = (f \circ \vec{\alpha})(t) = f(\vec{\alpha}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$, entonces,

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \nabla f\left(\vec{\alpha}(t)\right) \cdot \vec{\alpha}'(t)$$

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} \vec{\alpha}(t) = (sen(2t)\,, \cos(t)) = \big(x(t)\,, y(t)\big) \\ f(x,y) = x^2 y + 3xy^4 \end{cases}$$

Si $h(t) = (f \circ \vec{\alpha})(t)$, hallar $h'(t)$.

$$h'(t) = \nabla f\big(\vec{\alpha}(t)\big) \cdot \vec{\alpha}'(t)$$

Resolución: del teorema sale que debemos calcular $h'(t) = \nabla f\big(\alpha(t)\big) \cdot \alpha'(t)$

$$\nabla f(x,y) = (2xy + 3y^4, x^2 + 12xy^3)$$

$$\nabla f\big(\alpha(t)\big) = \Big(2\, sen(2t)\cos(t) + 3(\cos(t))^4,\ \ \big(sen(2t)\big)^2 + 12\, sen(2t)\,(\cos(t))^3\Big)$$

$$\nabla f\big(\alpha(t)\big) = (2\, sen(2t)\cos(t) + 3\cos^4(t),\ \ \mathrm{sen}^2(2t) + 12\, sen(2t)\cos^3(t))$$

$$\vec{\alpha}'(t) = (x'(t)\,, y'(t)\,) = (2cos(2t), -sent)$$

Finalmente:

$$\boxed{h'(t) = \nabla f\big(\alpha(t)\big) \cdot \alpha'(t)}$$

$$= (2\, sen(2t)\cos(t) + 3\cos^4(t)\,,\ \ sen^2(2t) + 12\, sen(2t)\cos^3(t)) \cdot (2cos(2t), -sen(t))$$

$$h'(t) = (2\, sen(2t)\cos(t) + 3\, cos^4(t))\, 2cos(2t) + (sen^2(2t) + 12sen(2t)cos^3(t))\,(-sen(t))$$

Propiedad

A continuación se usará este teorema para probar que **el gradiente es perpendicular a los conjuntos de nivel, tanto a las curvas de nivel si f tiene su dominio en $\mathbb{R}^2$, como a las superficies de nivel si f tiene su dominio en $\mathbb{R}^3$.**

Consideremos una función $w = f(x, y, z)$, con derivadas parciales continuas en su dominio ($f \in C^1$) y $P = (x_0, y_0, z_0) \in dom\ f$, llamemos N_k a la superficie de nivel

$$k = f(x_0, y_0, z_0) = f(x, y, z)$$

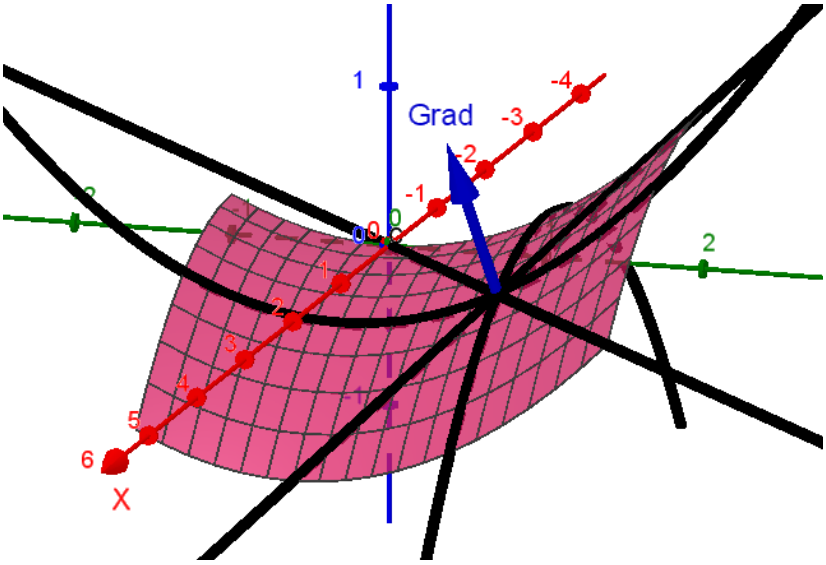
y C a cualquier curva suave contenida en N_k que pase por P , si llamamos $\vec{\alpha} = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ a la parametrización de C y $\vec{\alpha}'(t) \neq \vec{0}$, entonces se tiene que $f(\vec{\alpha}(t)) = k$ y por regla de la cadena caso I,

$$\frac{df(\vec{\alpha}(t))}{dt} = \nabla f(\vec{\alpha}(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t) = \frac{dk}{dt} = 0$$

$$\frac{df(\vec{\alpha}(t))}{dt} = \nabla f(\vec{\alpha}(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t) = 0$$

lo que indica que los vectores $\nabla f(\vec{\alpha}(t))$ y $\vec{\alpha}'(t)$ son perpendiculares.

Como este razonamiento es válido para cualquier curva suave (tiene recta tangente) contenida en la superficie de nivel N_k que pasa por P , se tiene que todas las curvas son perpendiculares al gradiente de f en P resultando entonces la perpendicularidad entre dicho gradiente y N_k en P . ///



Regla de la cadena caso II

Regla de la cadena generalizada

Introducción informal

Ejemplo1. Consideremos la siguiente transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$

$$\vec{F}(x,y,z) = \big(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)\big) = (2x - 3y + 5z, -x + y - 2z)$$

Dónde

$$f_1(x,y,z) = 2x - 3y + 5z, \text{ esto es } f_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \text{ con } \nabla f_1(x,y,z) = (2,-3,5)$$

$$f_2(x,y,z) = -x + y - 2z\text{ , esto es } f_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \text{ con } \nabla f_2(x,y,z) = (-1,1,-2)$$

Además la matriz asociada a $\vec{F}$ es

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz asociada a $\vec{F}$ tiene dos renglones, $\vec{F}$ tiene dos componentes, y tres columnas, $\vec{F}$ tiene tres variables independientes.

Ejemplo 2. Veamos ahora la siguiente situación:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / \ z = f(x,y) = xy$$

$$\vec{G}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / \vec{G}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big) = (uv^2, u - v)$$

Definimos

$$h(u,v) = f\left(\vec{G}(u,v)\right) = \big(f \circ \vec{G}\big)(u,v)$$

Calcularemos las derivadas parciales $\frac{\partial h}{\partial u}(u,v)$ y $\frac{\partial h}{\partial v}(u,v)$ a partir de la función compuesta h

$$h(u,v) = (uv^2)\ (u - v) = u\ v^2(u - v)$$

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = v^2(u - v) + uv^2$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = 2u\ v(u - v) + uv^2(-1)$$

Ahora calculamos el gradiente de f y luego componemos $\vec{G}$ con dicho gradiente

$$\nabla f(x,y) = (y,x)$$

$$\nabla f\left(\vec{G}(x,y)\right) = (u - v, u\ v^2)$$

A continuación calculemos $\vec{G}_u$ y $\vec{G}_v$

$$\vec{G}(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big) = (uv^2, u-v)$$

$$\vec{G}_u(u,v) = (v^2, 1)$$
$$\vec{G}_v(u,v) = (2u\,v, -1)$$

Nótese lo siguiente:

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = v^2(u-v) + uv^2 = \underbrace{(u-v,\ \ u\,v^2)}_{\nabla f\left(\vec{G}(x,y)\right)} \cdot \underbrace{(v^2,1)}_{\vec{G}_u(u,v)} \overset{\substack{Notación\\Matricial}}{\cong} \underbrace{(u-v \quad u\,v^2)}_{1\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} v^2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{2\times 1}$$

Y

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = 2u\,v(u-v) + uv^2(-1) = \underbrace{(u-v,\ \ u\,v^2)}_{\nabla f\left(\vec{G}(x,y)\right)} \cdot \underbrace{(2uv,-1)}_{\vec{G}_v(u,v)} = (u-v \quad u\,v^2)\begin{pmatrix} 2u\,v \\ -1 \end{pmatrix}$$

Recordando el producto entre matrices, podemos escribir:

$$\underbrace{(u-v \quad u\,v^2)}_{1\times 2}\underbrace{\begin{pmatrix} v^2 & 2u\,v \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{2\times 2} = \Bigg(\underbrace{(u-v)v^2 + uv^2}_{\frac{\partial h}{\partial u}(u,v)} \qquad \underbrace{(u-v)2u\,v + uv^2(-1)}_{\frac{\partial h}{\partial v}(u,v)}\Bigg) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

En base a lo hecho en los dos casos precedentes se define:

Matriz jacobiana, matriz de las derivadas parciales o derivada jacobiana de funciones diferenciables

Se expondrá el siguiente caso de referencia

Dada una función $\vec{F}: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4,\ \vec{F}(x,y,z) = \big(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z), f_4(x,y,z)\big)$

La **matriz jacobiana** de $\vec{F}$ es $J\vec{F} = D\vec{F}$:

$$J\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_{1\,x} & f_{1\,y} & f_{1\,z} \\ f_{2\,x} & f_{2\,y} & f_{2\,z} \\ f_{3\,x} & f_{3\,y} & f_{3\,z} \\ f_{4\,x} & f_{4\,y} & f_{4\,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1\,x} & \cdots & f_{1\,z} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{4\,x} & \cdots & f_{4\,z} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$$

De esta manera, para el ejemplo 1, resulta la siguiente matriz jacobiana

$$\vec{F}(x,y,z) = (2x - 3y + 5z, -x + y - 2z), \vec{F}: \mathbb{R}^{n=3} \to \mathbb{R}^{m=2}$$

$$J\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

Y para el ejemplo 2, las matrices jacobianas son:
Para

$$f(x,y) = xy$$

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

Para

$$\vec{G}(u,v) = (uv^2, u-v),\ \vec{G}: \mathbb{R}^{n=2} \to \mathbb{R}^{m=2}$$

$$J\vec{G}(u,v) = \begin{pmatrix} v^2 & 2u\,v \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

<u>Derivación de funciones compuestas empleando matrices jacobianas</u>

Componiendo $\vec{G}$ con la matriz jacobiana de f se obtiene:

$$f(x,y) = xy \qquad \vec{G}(u,v) = \left(\underbrace{uv^2}_{x}, \underbrace{u-v}_{y}\right)$$

$$h(u,v) = f \circ \vec{G}(u,v) = f\left(\vec{G}(u,v)\right)$$

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix}$$

$$Jf \circ \vec{G}(u,v) = Jf\left(\vec{G}(u,v)\right) = \left(\underbrace{u-v}_{y} \quad \underbrace{u\,v^2}_{x}\right)$$

$$J\vec{G}(u,v) = \begin{pmatrix} v^2 & 2u\,v \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Jh(u,v) = Jf\left(\vec{G}(u,v)\right)\ J\vec{G}(u,v)} = \begin{pmatrix} u-v & u\,v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^2 & 2u\,v \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Jh(u,v) = \begin{pmatrix} (u-v)v^2 + uv^2 & (u-v)2u\,v + uv^2(-1) \end{pmatrix}$$

$$Jh(u,v) = \Big(\underbrace{(u-v)v^2 + uv^2}_{\frac{\partial h}{\partial u}(u,v)} \qquad \underbrace{(u-v)2u\,v + uv^2(-1)}_{\frac{\partial h}{\partial v}(u,v)}\Big)$$

Aplicación de la matriz jacobiana al caso I de la regla de la cadena

$$w = f(x,y,z)$$

$$\vec{\alpha}(t) = (x(t)\,, y(t), z(t))$$

$$h(t) = f \circ \vec{\alpha}(t)$$

$$¿Jh(t)?$$

Resolución:

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad Jf \in \mathbb{R}^{1\times 3}$$

$$\vec{\alpha}: B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad J\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$

$$\mathrm{J}f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$$

$$Jf\big(\vec{\alpha}(t)\big) = \Big(f_x\big(\vec{\alpha}(t)\big) \quad f_y\big(\vec{\alpha}(t)\big) \quad f_z\big(\vec{\alpha}(t)\big)\Big) = \begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}_{(\vec{\alpha}(t))}$$

$$J\vec{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

$$Jh(t) = Jf \circ \vec{\alpha}(t) = \mathrm{J}f\big(\vec{\alpha}(t)\big)\, J\vec{\alpha}(t) = \Big(f_x\big(\vec{\alpha}(t)\big) \quad f_y\big(\vec{\alpha}(t)\big) \quad f_z\big(\vec{\alpha}(t)\big)\Big)\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} =$$

$$Jh(t) = \Big(f_x\big(\vec{\alpha}(t)\big)x'(t) + f_y\big(\vec{\alpha}(t)\big)y'(t) + f_z\big(\vec{\alpha}(t)\big)z'(t)\Big)$$

Operando con notación vectorial en el caso I habríamos llegado a:

$$h'(t) = \nabla f\big(\vec{\alpha}(t)\big) \cdot \vec{\alpha}'(t) = f_x\big(\vec{\alpha}(t)\big)x'(t) + f_y\big(\vec{\alpha}(t)\big)y'(t) + f_z\big(\vec{\alpha}(t)\big)z'(t)$$