EJERCICIO SOLICITADO POR UN ALUMNO . ORTOGONALIZACION DE BASES DE POLINOMIOS

Nos dan uns subespacio S $\subseteq$ P$_2(R)$ y nos dicen que una base de S es
B$_S = \{1+t, t^2-2, -3\}$

Si hacemos una combinacion lineal de esos polinomios y la igualamos al polinomio nulo nos da

$a(1+t)+b(t^2-2)+c(-3) = bt^2+at+a-2b-3c = \vec{O} = 0t^2+0t+0$

De donde surge que b = 0 , a = 0 y por lo tanto c = 0. Esos polinomios son L.I. (ya lo sabíamos porque nos decían que era una base) pero esa base tiene dimensión 3 o sea que S coincide con P$_2(R)$

Tenemos que definir un producto interior , el que se nos propone es si
$p(t) = at^2+b+c$ y q(t)= dt^2+e+f , entonces <p,q>=a.d+b.e+c.f

Siguiendo a Gram - Schmmidt proponemor un conjunto $\{p_1, p_2, p_3\}$, que generen a S y sean ortogonales , o sea $< p_i, p_j >= 0$ para cualquier producto con i $\neq$ j

Luego $p_1 = 1+t$

Hacemos $p_2 = t^2-2+\alpha(1+t) = t^2+\alpha t+\alpha-2$ y pedimos $< p_2, p_1 >= 0$

Luego $<t^2+\alpha t+\alpha-2, t+1 >= 0 = 1.0+\alpha.1+(\alpha-2).1 = 2\alpha-2 \to \alpha = 1$

Podríamos haber hecho $\alpha = -\frac{<t^2-2,t+1>}{<t+1,t+1>} = -\frac{-2}{2} = 1$

Luego $p_2 = t^2-2+(1+t) = t^2+t-1$

Pedimos $p_3 = -3+\beta(t+1)+\gamma(t^2+t-1)$

$\beta = -\frac{<-3,t+1>}{<t+1,t+1>} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$

$\gamma = -\frac{<-3,t^2+t-1>}{<t^2+t-1,t^2+t-1>} = -\frac{3}{3} = -1$

Luego $p_3 = -3+\frac{3}{2}(t+1)-(t^2+t-1) = -t^2+\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$

Entonces la base ortogonal de S es $\left\{t+1, t^2+t-1, -t^2+\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\right\}$