T P 10Ej4

a) Hallar la solución general de la siguiente ecuación diferencial de primer orden no homogénea.

$$y' + y = sen(x)$$

$$y = uv$$

$$y' = u'v + uv'$$

$$y' + y = sen(x)$$

$$u'v + uv' + uv = sen(x)$$

$$u'v + uv + uv' = sen(x)$$

$$(u' + u)v + uv' = sen(x)$$

$$uv' = sen(x)$$

$$u' + u = 0$$

$$u' = -u$$

$$\frac{du}{dx} = -u$$

$$\frac{du}{u} = -dx$$

$$\ln(|u|) = -x + C$$

$$|u| = e^{-x+c}$$

$$|u| = ke^{-x}$$

$$u = ke^{-x}$$

$$tomamos\ k = 1\ para\ obtener\ una\ solucion\ particular\ de\ la\ seccion\ homogenea$$

$$u = e^{-x}$$

El siguiente procedimiento nos dará una forma de resolver el tipo de ecuaciones diferenciales antes mencionadas.

$$(u' + P_{(x)}u)v + uv' = Q_{(x)}$$

$$0\ v + \ uv' = Q_{(x)}$$

$$uv' = Q_{(x)}$$

$$v' = \frac{Q(x)}{u}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{Q(x)}{u}$$

$$dv = \frac{Q(x)}{u}dx$$

$$v = \int \frac{Q_{(x)}}{\mu_{(x)}}dx$$

$$y\acute{} + y = sen(x) \rightarrow Q(x) = sen(x)$$

$$u_{(x)} = e^{-x}$$

$$v = \int e^{x} sen(x) dx = \frac{e^{x}(senx - cosx)}{2} + C$$

$Por\ partes\ en\ una\ integral\ iterativa$:

$$\int u_1 dv_1 = u_1 v_1 - \int v_1 du_1$$

$$sen(x) = u_1 \rightarrow \cos(x)\, dx = du_1$$

$$e^{x} dx = dv_1 \rightarrow v_1 = e^{x}$$

$$\int e^{x} sen(x) dx = e^{x} sen(x) - \int e^{x} cos(x) dx$$

$$cos(x) = u_2 \rightarrow -\text{sen(x)}dx = du_2$$

$$e^{x} dx = dv_2 \rightarrow v_2 = e^{x}$$

$$\int e^{x} cos(x) dx = \cos(x)\, e^{x} + \int e^{x} sen(x) dx$$

$$I = e^{x} sen(x) - (\cos(x)\, e^{x} + I)$$

$$2I = e^{x} sen(x) - (\cos(x)\, e^{x})$$

$$\int e^{x} sen(x) dx = \frac{e^{x}(senx - cosx)}{2} + C$$

$$y = uv$$

$$y = \frac{1}{e^{x}}\left[\frac{e^{x}(senx - cosx)}{2} + C\right]$$

Solución general del sistema

$$y = \frac{(senx - cosx)}{2} + \frac{C}{e^{x}}$$

Validacion:

Objetivo a verificar:

$$y' + y = sen(x)$$

Con C

$$y = \frac{(senx - cosx)}{2} + \frac{C}{e^{x}} = \frac{(senx - cosx)}{2} + Ce^{-x}$$

$$y' = \frac{cosx + senx}{2} - Ce^{-x}$$

$$y' + y = \frac{cosx + senx}{2} + Ce^{-x} + \frac{(senx - cosx)}{2} - Ce^{-x} = sen(x)$$

Solución general

$$y = \frac{(senx - cosx)}{2} + \frac{C}{e^{x}}$$

Solución Particular

$$y(0) = 1$$

$$y(0) = 1 \;\; implica\; x = 0\; e\; y = 1, C\; queda\; incognita$$

$$1 = \frac{(sen0 - cos0)}{2} + \frac{C}{e^0}$$

$$1 = \frac{(0 - 1)}{2} + \frac{C}{1}$$

$$1 = \frac{-1}{2} + \frac{C}{1}$$

$$1 + \frac{1}{2} = C$$

$$C = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{(senx - cosx)}{2} + \frac{3}{2}e^{-x}$$