Integrales Dobles

Transformaciones Afines

Práctica sobre

- **Fórmula de cambio de variables en integrales dobles.**
- **Integrales dobles sobre paralelogramos con aplicación de transformaciones afines.**

Fórmula de cambio de variables en integrales dobles

Teorema (Cambio de variables en integrales dobles). Sea $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una función continua en el conjunto abierto no vacío U de $\mathbb{R}^2$, y se la región $D \subset U$.

Sea, además, la función

$$T: V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : T(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$$

que aplica de manera inyectiva (salvo en conjuntos de área nula) la región $D' \subset V$ del plano uv, en la región D del plano xy. Supóngase que T es de clase $\mathcal{C}^1$ en V y que el jacobiano de T

$$J_T(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} \neq 0$$

en D' (salvo en conjuntos de área nula). Se tiene así, la fórmula de cambio de variables en integrales dobles

$$I = \iint_D f(x,y)\, dxdy = \iint_{D'} f[x(u,v), y(u,v)] \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

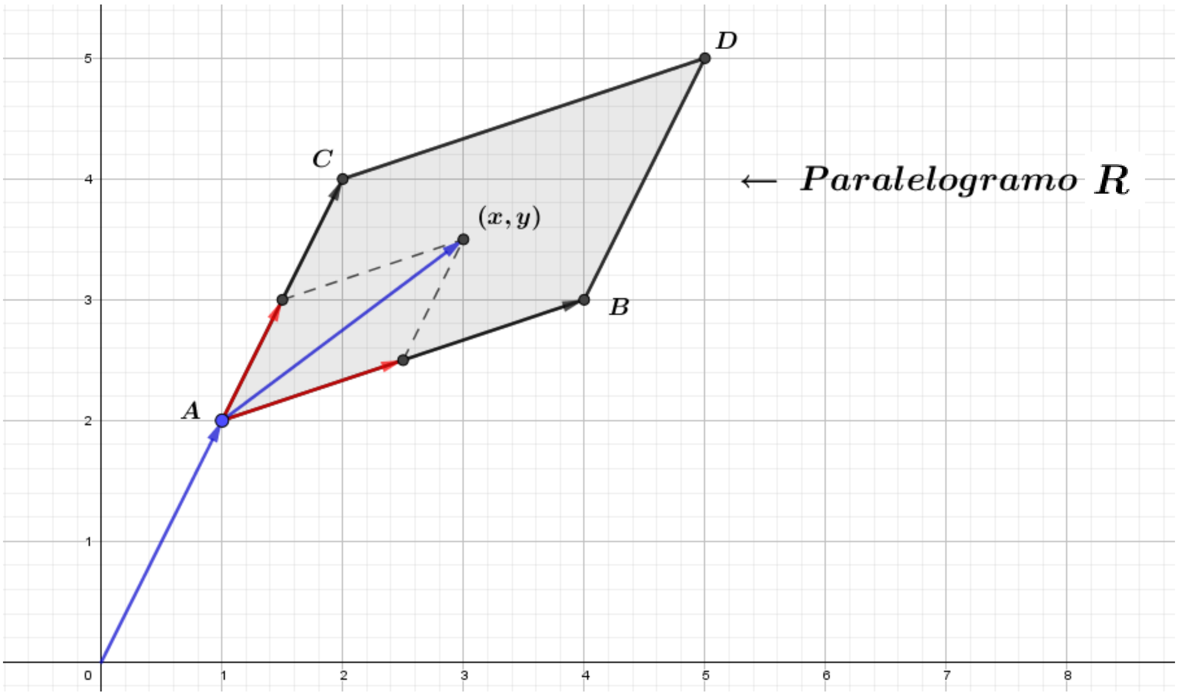
Este resultado indica cómo obtener el valor de la integral doble, a partir de aplicar un cambio de variables según una transformación conveniente.

Lo que se busca al aplicar una transformación de sustitución de variables es facilitar el cálculo de la integral doble planteada.

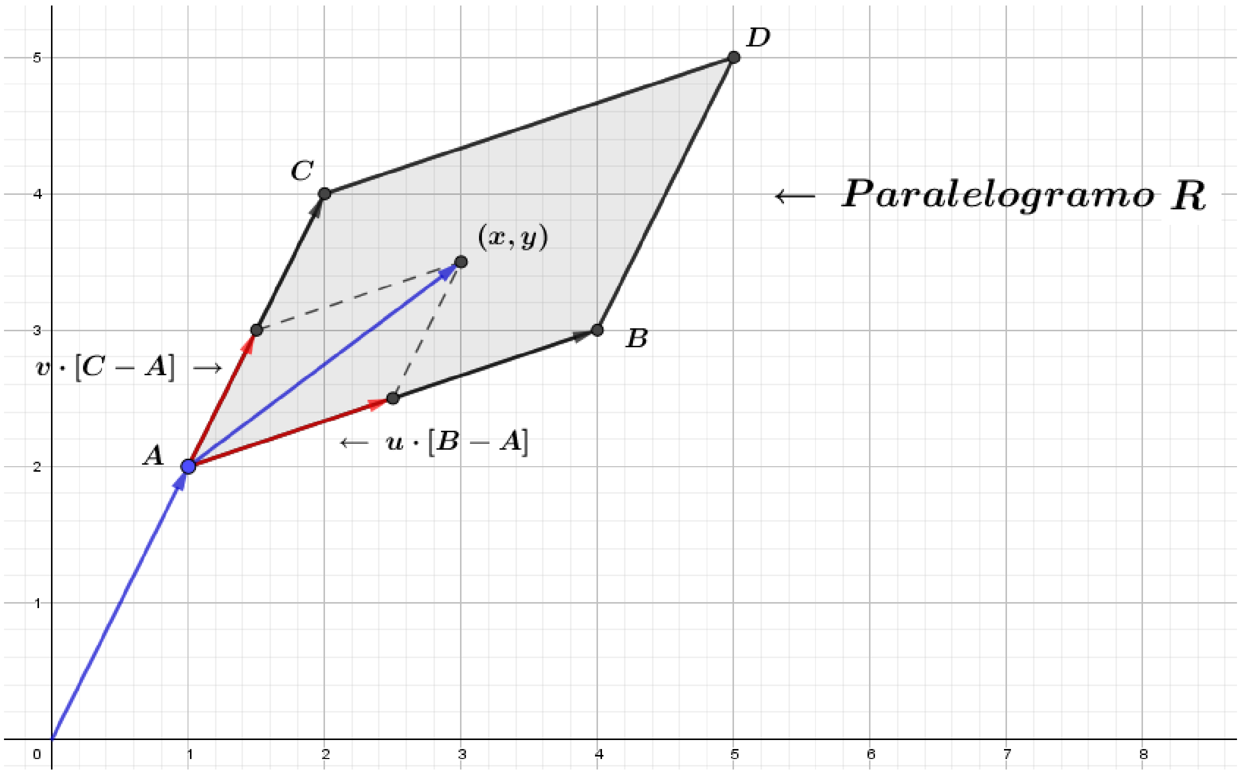
A continuación, se muestran algunos ejemplos de este tipo de cálculos aplicando transformaciones afines, que son funciones del plano en el plano que transforman polígonos de n lados, en polígonos de n lados. Por ejemplo, un cuadrilátero en un cuadrilátero, un triángulo en un triángulo, etc.

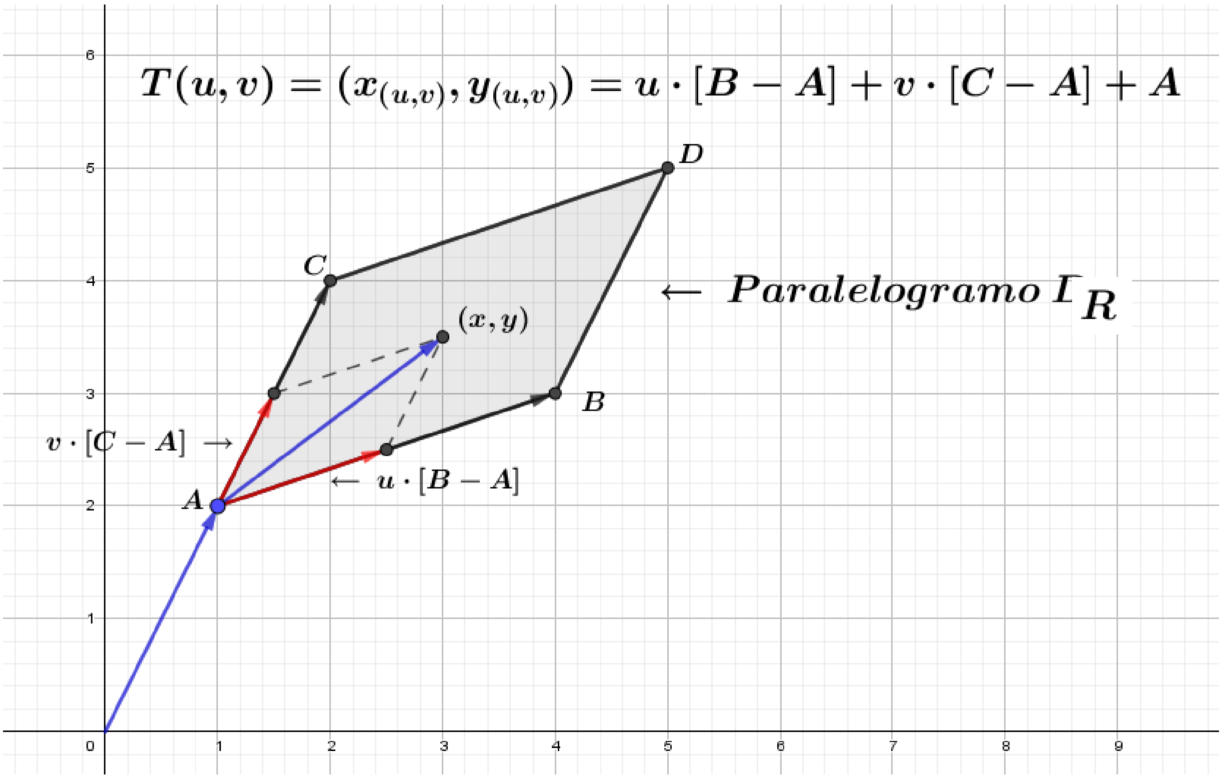
Transformaciones afines y paralelogramos

Sea el paralelogramo de vértices A, B, C y $D = B - A + C$, que se muestra en la figura

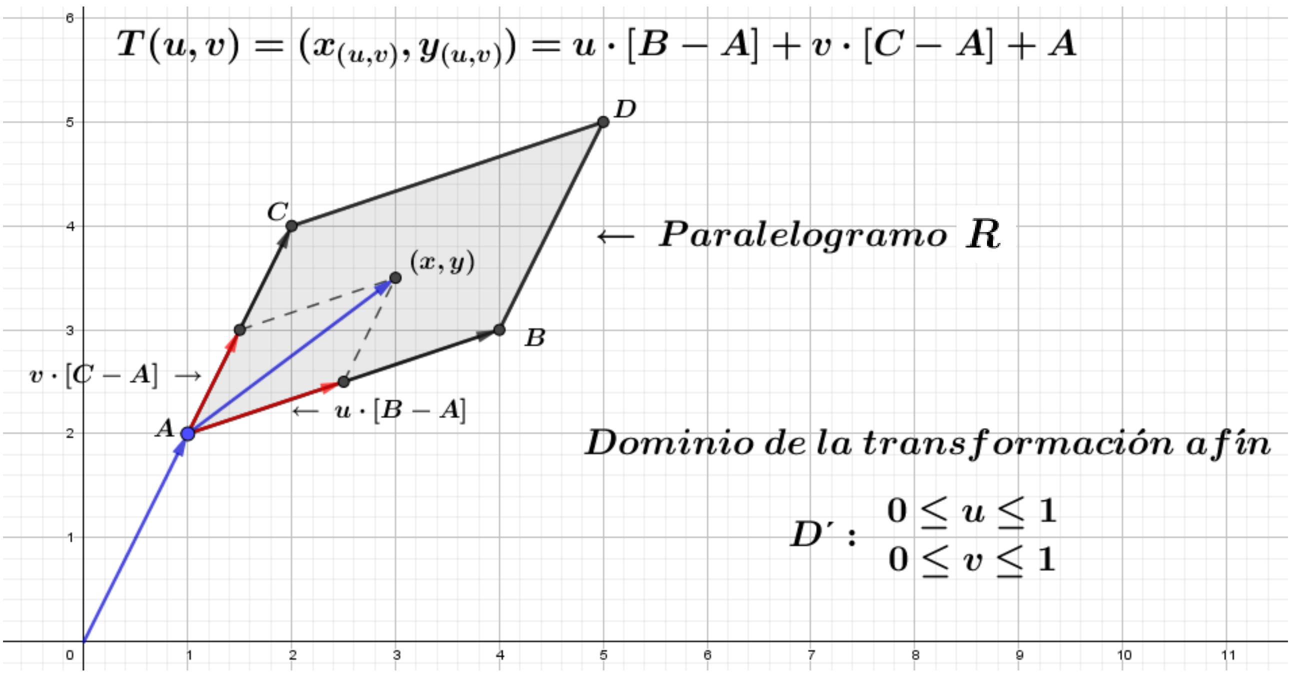


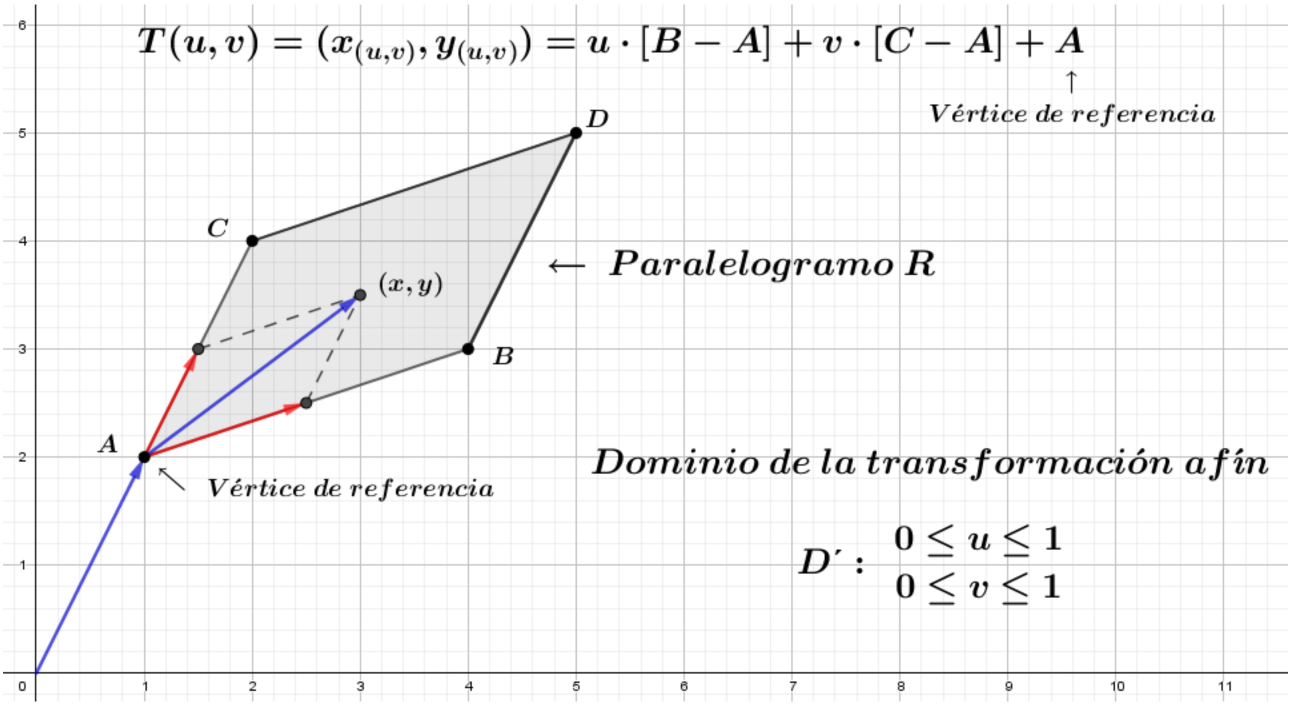
Para calcular una integral doble en una región de este estilo, se aplica una transformación afín conveniente y así evitar tener que realizar subdivisiones del recinto original.





De los cuatro vértices del paralelogramo se elige uno como vértice de referencia.





Representación gráfica sobre cómo definir la transformación afín a partir del vértice de referencia.

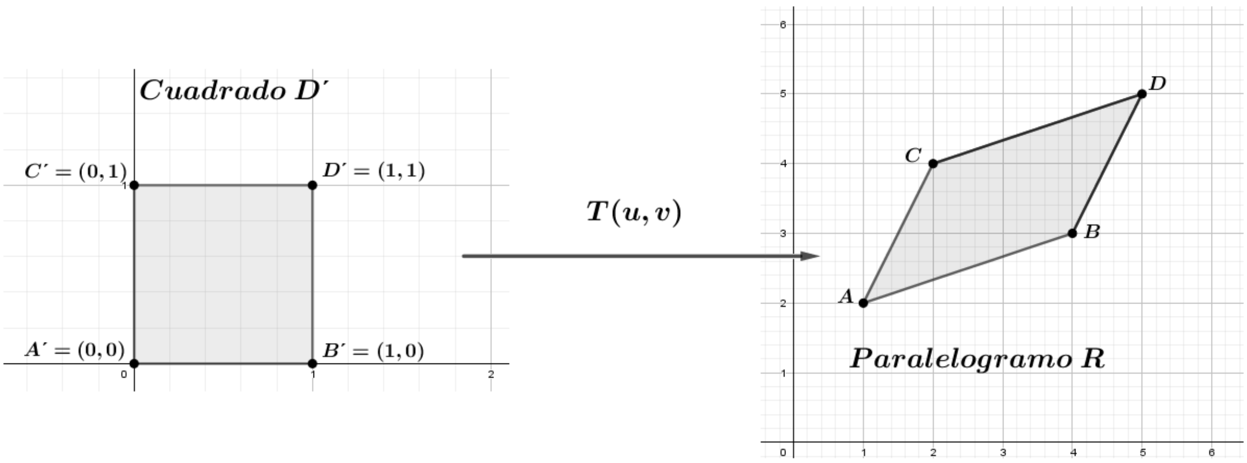
La función

$$T: V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : T(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big) = u \cdot [B - A] + v \cdot [C - A] + A$$

Definida sobre el cuadrilátero

$$D\acute{} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1 \wedge 0 \leq v \leq 1\}$$

Transforma a $D\acute{}$ en el paralelogramo R de vértices A, B, C y $D = B - A + C$. Gráficamente, se tiene

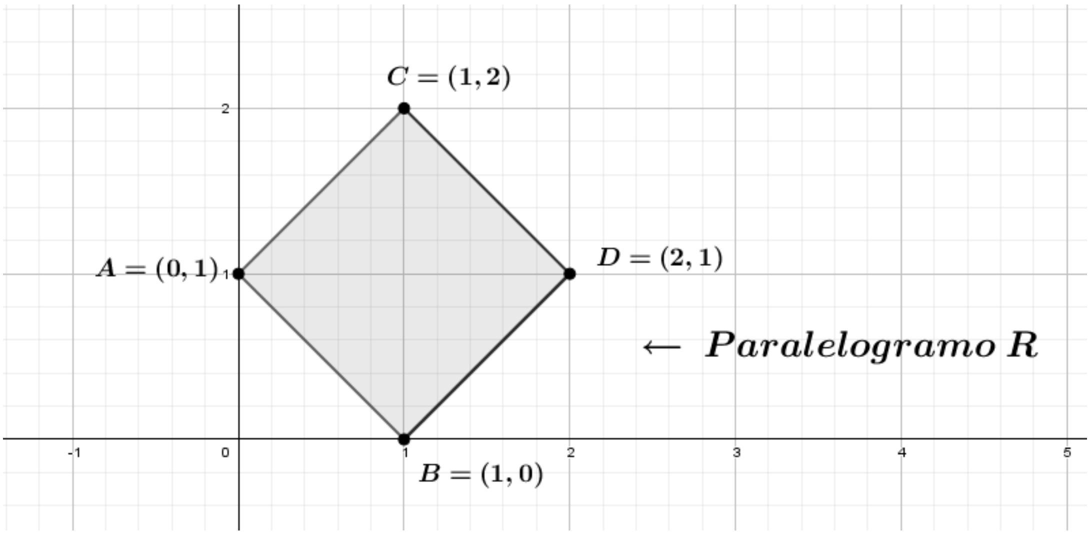


Recorrido de la transformación $T(u,v) = \big(x(u,v)\,,y(v,u)\big) = u \cdot [B - A] + v \cdot [C - A] + A$, definida en el cuadrado $D\acute{}$

Ejemplo 1. Calcular la integral doble

$$I = \iint_R e^{x+y}\,dxdy$$

Sobre el R paralelogramo de vértices $(0,1), (1,0), (2,1)$ y $(1,2)$.



Recinto de integración

Para calcular la integral se define una transformación afín conveniente. En este caso, tomando al vértice $(0,1)$ como vértice de referencia, se define la siguiente transformación

$$T(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big) = u \cdot [B - A] + v \cdot [C - A] + A$$

$$T(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big) = u \cdot [(1,0) - (0,1)] + v \cdot [(1,2) - (0,1)] + (0,1)$$

Con dominio

$$D' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u \le 1 \wedge 0 \le v \le 1\}$$

Resulta entonces

$$T(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big) = u \cdot (1,-1) + v \cdot (1,1) + (0,1)$$

$$T(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big) = (u + v, -u + v + 1)$$

Es decir que las fórmulas de transformación son

$$\begin{cases} x(u,v) = u + v \\ y(u,v) = -u + v + 1 \end{cases}$$

A partir de estas fórmulas se obtiene el jacobiano de la transformación

$$J_T(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2$$

De este modo, aplicando la transformación, la integral a calcular queda en la forma

$$I=\iint_R e^{x+y}\,dxdy=\iint_{D'}\left(e^{x(u,v)+y(u,v)}\right)\cdot\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

$$I=\iint_{D'}\left(e^{(u+v)+(-u+v+1)}\right)\cdot|2|\,dudv$$

$$I=\iint_{D'}2\cdot e^{2v+1}\,dudv$$

$$I=2\cdot\int_{u=0}^{u=1}\left(\int_{v=0}^{v=1}\left(e^{2v+1}\right)dv\right)du=2\cdot\int_{u=0}^{u=1}\left(\frac{1}{2}e^{2v+1}\Big|_{v=0}^{v=1}\right)du$$

$$I=(e^3-e^1)\int_{u=0}^{u=1}du=(e^3-e^1)\int_{u=0}^{u=1}du=(e^3-e^1)$$

O sea

$$I=(e^3-e^1)$$

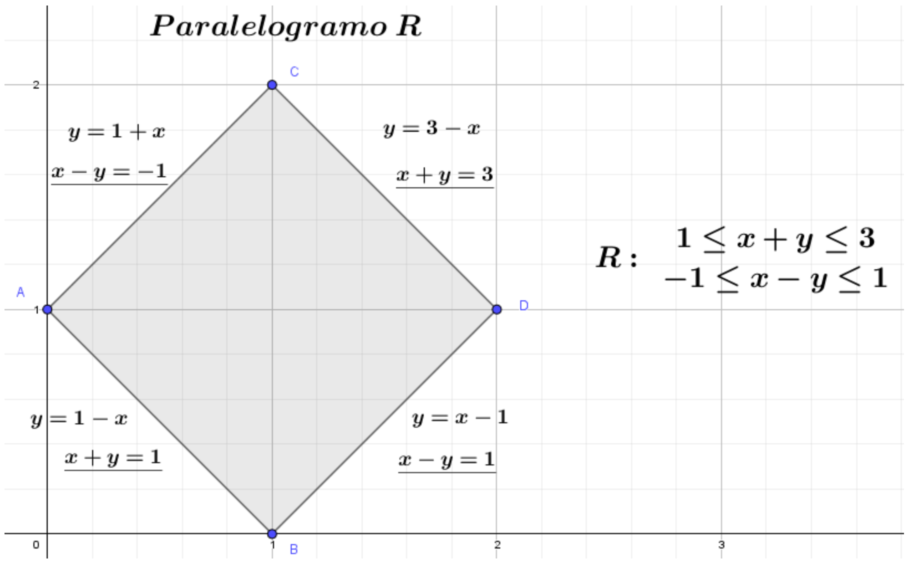
De este modo, se tiene que el valor de la integral

$$I=\iint_R e^{x+y}\,dxdy=e^3-e$$

Ejemplo 2. Calcular la integral doble

$$I = \iint\limits_{R} e^{x+y}\, dxdy$$

Sobre el paralelogramo de vértices $(0,1), (1,0), (2,1)$ y $(1,2)$.



El paralelogramo R está dado por las siguientes inecuaciones

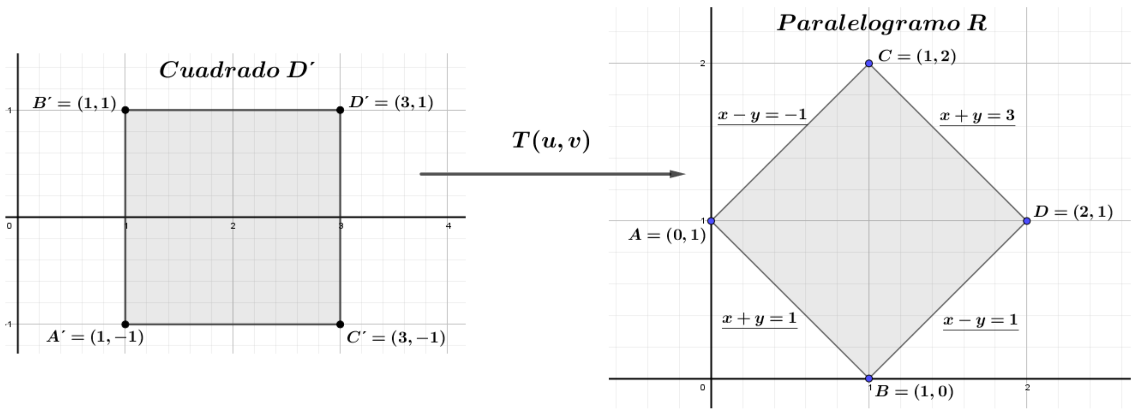
$$R: \begin{cases} 1 \le x + y \le 3 \\ -1 \le x - y \le 1 \end{cases}$$

Entonces, se considera la sustitución

$$u(x,y) = x + y \qquad v(x,y) = x - y$$

Cuyo rango de variación es

$$R': \begin{cases} 1 \le u \le 3 \\ -1 \le v \le 1 \end{cases}$$



Recorrido de la transformación $T(u,v) = \big(x(u,v)\,,\, y(v,u)\big)$

Con el objetivo de calcular el jacobiano que interviene en la fórmula de cambio de variables en integrales dobles, es necesario obtener las expresiones de u y v, en términos de x e y. Entonces, se procede del siguiente modo

$$\left.\begin{array}{l} u = x + y \\ v = x - y \end{array}\right\} \rightarrow 2x = u + v \ \rightarrow x(u,v) = \frac{u+v}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} u = x + y \\ v = x - y \end{array}\right\} \rightarrow 2y = u - v \ \rightarrow y(u,v) = \frac{u-v}{2}$$

Así, las fórmulas de transformación son

$$x(u,v) = \frac{u+v}{2}$$

$$y(u,v) = \frac{u-v}{2}$$

De esta manera, se obtiene el jacobiano asociado a la transformación

$$T(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

$$J_T(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

Entonces, según la fórmula de cambio de variables en integrales dobles, se tiene

$$I = \iint\limits_R e^{x+y}\, dxdy = \iint\limits_{R'} \left(e^{x(u,v)+y(u,v)}\right) \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

$$I = \iint\limits_R e^{x+y}\, dxdy = \iint\limits_{R'} \left(e^{\frac{u+v}{2}+\frac{u-v}{2}}\right) \cdot \left|-\frac{1}{2}\right| dudv$$

$$I = \iint\limits_R e^{x+y}\, dxdy = \iint\limits_{R'} (e^u) \cdot \left|-\frac{1}{2}\right| dudv$$

$$I = \iint\limits_R e^{x+y}\, dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{R'} e^u\, dudv = \frac{1}{2}\int\limits_{u=1}^{u=3} e^u\, du \int\limits_{v=-1}^{v=1} dv$$

$$I = \iint\limits_R e^{x+y}\, dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_{u=1}^{u=3} e^u \left(\int\limits_{v=-1}^{v=1} dv\right) du$$

$$I = \iint_R e^{x+y}\,dxdy = \frac{1}{2}\left(\int_{u=1}^{u=3} e^u\,du\right)\left(\int_{v=-1}^{v=1} dv\right)$$

$$I = \iint_R e^{x+y}\,dxdy = \frac{1}{2}\left(e^u\,\Big|_{u=1}^{u=3}\right)\left(v\,\Big|_{v=-1}^{v=1}\right) = \frac{1}{2}(e^3 - e)\big(1-(-1)\big)$$

$$I = \iint_R e^{x+y}\,dxdy = \frac{1}{2}(e^3 - e)(2)$$

Finalmente, se obtiene el valor de la integral doble

$$I = \iint_R e^{x+y}\,dxdy = e^3 - e$$

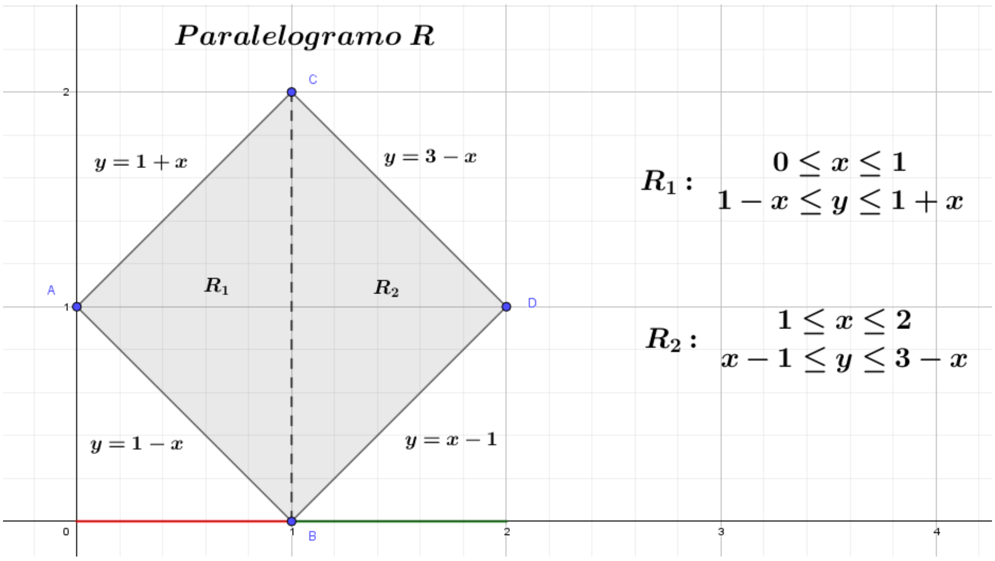
Así como se había calculado anteriormente.

En este caso, para verificar el resultado, se puede calcular la integral en las variables iniciales, pero por la característica del recinto, no es posible realizar el cálculo en una única integral doble. El paralelogramo no es ni región tipo I, ni región tipo II. Sin embargo, es posible considerarlo como una unión de este tipo de regiones. Por ejemplo, R es la unión de los triángulos R_1 y R_2 que se muestran en el gráfico siguiente.

Ejemplo 3. Calcular la integral doble

$$I = \iint\limits_{R} e^{x+y}\, dxdy$$

Sobre el paralelogramo R de vértices $(0,1), (1,0), (2,1)$ y $(1,2)$.



Como se muestra, los triángulos R_1 y R_2 son regiones de tipo I. Así, la integral doble inicial queda

$$I = \iint\limits_{R} e^{x+y}\, dxdy = \iint\limits_{R_1} e^{x+y}\, dxdy + \iint\limits_{R_2} e^{x+y}\, dxdy$$

$$I = \iint\limits_{R} e^{x+y}\, dxdy = \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=1-x}^{y=1+x} (e^{x+y})\, dy \right) dx + \int_{x=1}^{x=2} \left(\int_{y=x-1}^{y=3-x} (e^{x+y})\, dy \right) dx$$

$$I = \iint\limits_{R} e^{x+y}\, dxdy = \int_{x=0}^{x=1} \left(e^{x+y} \Big|_{y=1-x}^{y=1+x} \right) dx + \int_{x=1}^{x=2} \left(e^{x+y} \Big|_{y=x-1}^{y=3-x} \right) dx$$

$$I = \iint\limits_{R} e^{x+y}\, dxdy = \int_{x=0}^{x=1} (e^{2x+1} - e)\, dx + \int_{x=1}^{x=2} (e^{3} - e^{2x-1})\, dx$$

$$I = \iint\limits_{R} e^{x+y}\, dxdy = \left(\frac{1}{2} e^{2x+1} - xe \right) \Big|_{x=0}^{x=1} + \left(xe^{3} - \frac{1}{2} e^{2x-1} \right) \Big|_{x=1}^{x=2}$$

$$I = \iint\limits_{R} e^{x+y}\, dxdy = \left(\frac{1}{2} e^{3} - \frac{3}{2} e \right) + \left(\frac{1}{2} e^{3} + \frac{1}{2} e \right) = e^{3} - e$$

Es decir

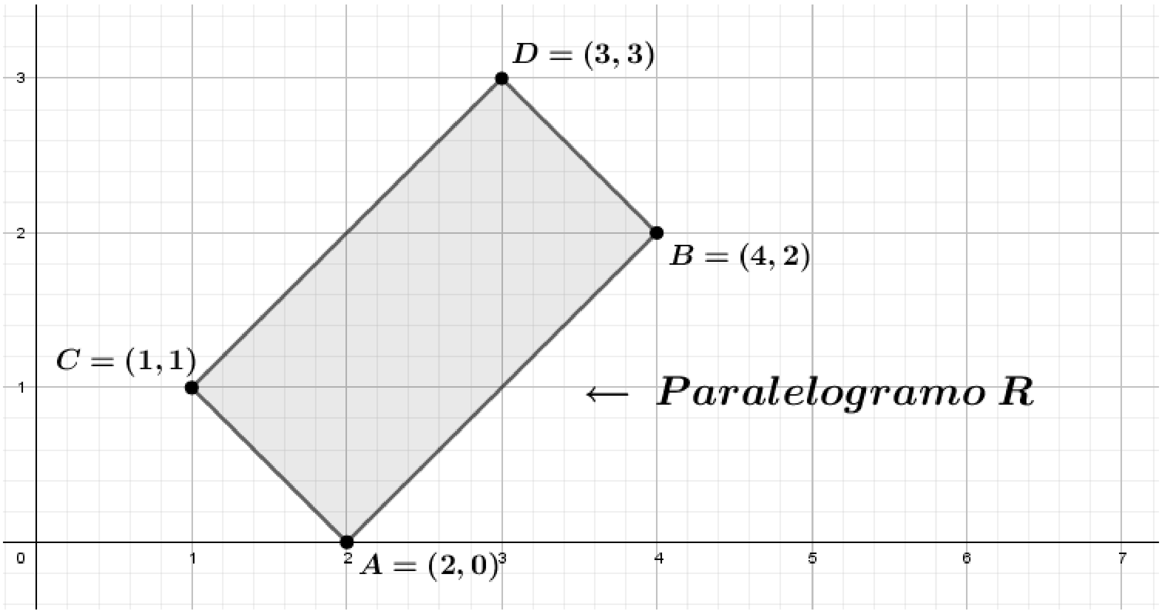
$$I = \iint_R e^{x+y}\, dxdy = e^3 - e$$

Como ya se sabía.

Ejemplo 4. Calcular la integral doble

$$I = \iint\limits_R \frac{x-y}{x+y} dxdy$$

Sobre el paralelogramo R de vértices $(1,1), (2,0), (4,2)$ y $(3,3)$.



Se define la siguiente transformación

$$T(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big) = u \cdot [B - A] + v \cdot [C - A] + A$$

$$T(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big) = u \cdot [(4,2) - (2,0)] + v \cdot [(1,1) - (2,0)] + (2,0)$$

Cuyo dominio es el cuadrado

$$D' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1 \wedge 0 \leq v \leq 1\}$$

Resulta así, que

$$T(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big) = u \cdot (2,2) + v \cdot (-1,1) + (2,0)$$

$$T(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big) = (2u - v + 2, 2u + v)$$

Es decir que las fórmulas de transformación son

$$\begin{cases} x(u,v) = 2u - v + 2 \\ y(u,v) = 2u + v \end{cases}$$

A partir de estas fórmulas se obtiene el jacobiano de la transformación

$$J_T(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4$$

De este modo, aplicando la transformación, la integral a calcular queda en la forma

$$I = \iint_R \frac{x-y}{x+y}\,dxdy = \iint_{D'} \left(\frac{x(u,v) - y(u,v)}{x(u,v) + y(u,v)}\right) \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

$$I = \iint_{D'} \left(\frac{(2u - v + 2) - (2u + v)}{(2u - v + 2) + (2u + v)}\right) \cdot |4|\, dudv$$

$$I = \iint_{D'} 4 \cdot \frac{2 - 2v}{2 + 4u}\,dudv$$

$$I = \left(\int_{u=0}^{u=1} 4 \cdot \frac{1}{2+4u}\,du\right)\left(\int_{v=0}^{v=1} (2 - 2v)\,dv\right)$$

$$I = \left(\int_{u=0}^{u=1} \frac{4}{2+4u}\,du\right)\left(\int_{v=0}^{v=1} (2 - 2v)\,dv\right)$$

$$I = \left(\ln(2+4u)\ \Big|_{u=0}^{u=1}\right)\left(2v - v^2\ \Big|_{u=0}^{u=1}\right) = [\ln(6) - \ln(2)][(1) - (0)]$$

$$I = \ln(6) - \ln(2) = \ln\left(\frac{6}{2}\right) = \ln(3)$$

Es decir que

$$I = \ln(3)$$

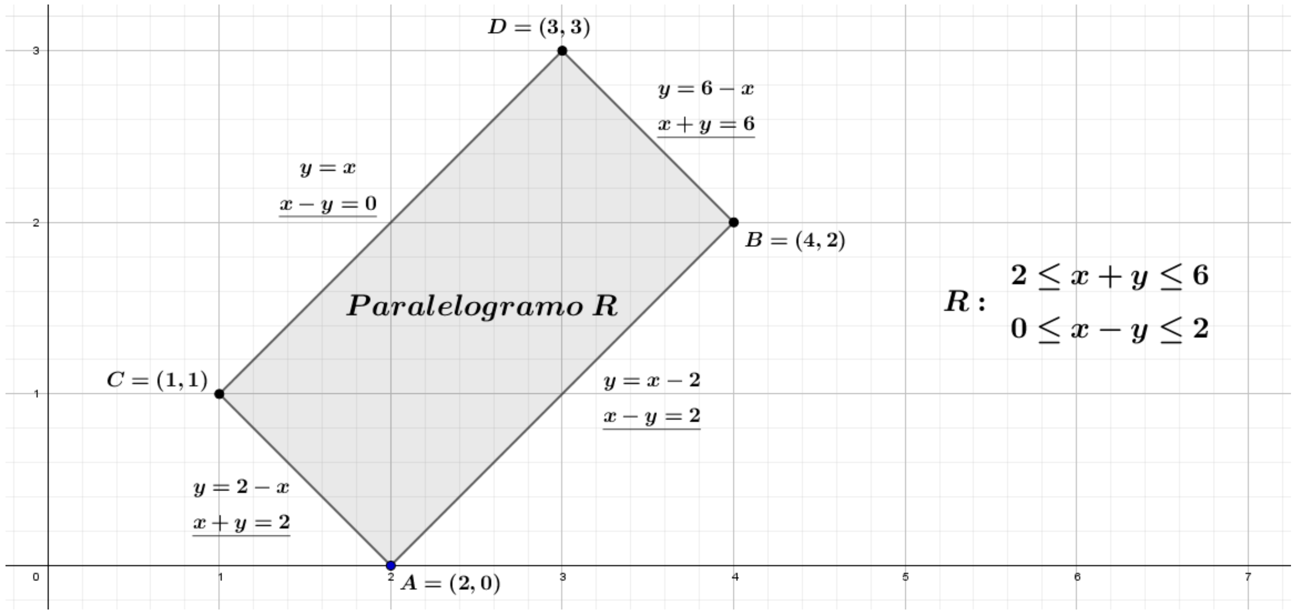
Así que, la integral doble pedida es igual a

$$I = \iint_R \frac{x-y}{x+y}\,dxdy = \ln(3)$$

Ejemplo 5. Calcular la integral doble

$$I = \iint_R \frac{x-y}{x+y}\,dxdy$$

Sobre el paralelogramo R de vértices $(1,1), (2,0), (4,2)$ y $(3,3)$.



En este caso, el paralelogramo R está dado por las siguientes inecuaciones

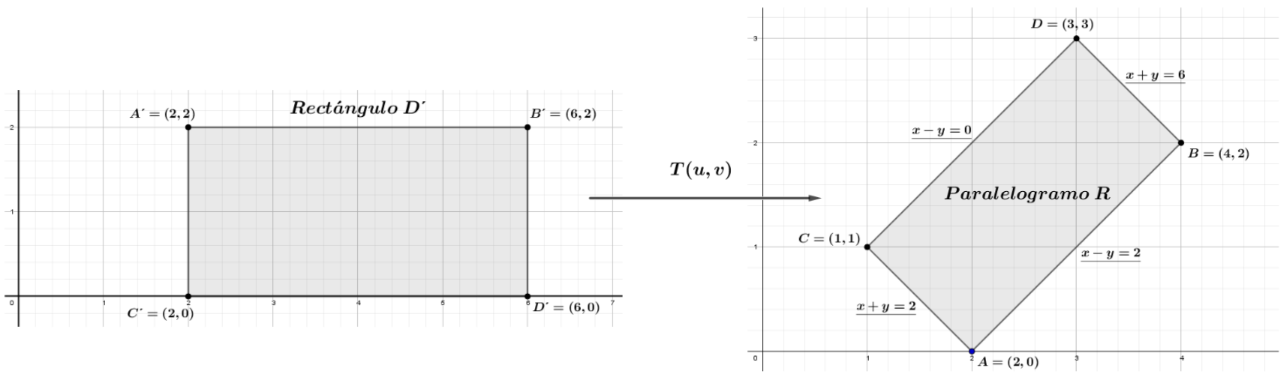
$$R: \begin{cases} 2 \le x + y \le 6 \\ 0 \le x - y \le 2 \end{cases}$$

Entonces, si se considera la sustitución

$$u(x,y) = x + y \qquad v(x,y) = x - y$$

Se tiene que rango de variación de cada variable es el siguiente

$$R': \begin{cases} 2 \le u \le 6 \\ 0 \le v \le 2 \end{cases}$$



Luego, para obtener las expresiones de u y v, en términos de x e y, se procede del siguiente modo

$$\left.\begin{array}{l} u = x + y \\ v = x - y \end{array}\right\} \to 2x = u + v \ \to x(u,v) = \frac{u+v}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} u = x + y \\ v = x - y \end{array}\right\} \to 2y = u - v \ \to y(u,v) = \frac{u-v}{2}$$

Entonces, las fórmulas de transformación son

$$x(u,v) = \frac{u+v}{2}$$

$$y(u,v) = \frac{u-v}{2}$$

De esta manera, se obtiene el jacobiano asociado a la transformación

$$T(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

$$J_T(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

Entonces, según la fórmula de cambio de variables en integrales dobles, se tiene

$$I = \iint\limits_R \frac{x-y}{x+y} dxdy = \iint\limits_{R'} \left(\frac{x(u,v) - y(u,v)}{x(u,v) + y(u,v)}\right) \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

$$I = \iint\limits_R \frac{x-y}{x+y} dxdy = \iint\limits_{R'} \frac{v}{u} \cdot \left|-\frac{1}{2}\right| dudv$$

$$I = \iint\limits_R \frac{x-y}{x+y} dxdy = \frac{1}{2} \iint\limits_{R'} \frac{v}{u} \cdot dudv = \frac{1}{2} \int\limits_{u=2}^{u=6} \frac{1}{u} du \int\limits_{v=0}^{v=2} v\, dv$$

$$I = \iint\limits_R \frac{x-y}{x+y} dxdy = \frac{1}{2} \int\limits_{u=2}^{u=6} \frac{1}{u} du \int\limits_{v=0}^{v=2} v\, dv = \frac{1}{2} \left(\int\limits_{u=2}^{u=6} \frac{1}{u} du \right) \left(\int\limits_{v=0}^{v=2} v\, dv \right)$$

$$I = \iint\limits_R \frac{x-y}{x+y} dxdy = \frac{1}{2} \left(\int\limits_{u=2}^{u=6} \frac{1}{u} du \right) \left(\int\limits_{v=0}^{v=2} v\, dv \right) = \frac{1}{2} \left(\ln(u) \Big|_{u=2}^{u=6} \right) \left(\frac{v^2}{2} \Big|_{v=0}^{v=2} \right)$$

$$I = \iint\limits_R \frac{x-y}{x+y} dxdy = \frac{1}{2} (\ln(6) - \ln(2)) \left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{6}{2}\right) \cdot 2 = \ln(3)$$

Es decir que

$$I = \iint_R \frac{x-y}{x+y}\, dxdy = \ln(3)$$

Tal como se obtuvo en el Ejemplo anterior.