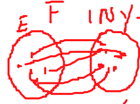
$E \xrightarrow{T} W$

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow F(x_1) \neq F(x_2)$

F INYECTIVA



$Im(F) = W$

F SOBREYECTIVA

SURYECTIVA

INY SOBRE $\Rightarrow$ biyectiva

Ejemplo

Sea f: $R^3 \rightarrow R^3$ / f(x ,y , z)=(x + y ,y + z, 2x + 3y + z). Hallar Nu(f)

Para hallar el Nu(f) hacemos

f(x ,y , z)=(0,0,0)

(x+y, y+z, 2x+3y+z)=(0, 0, 0).

$E \quad W$

$0 \longrightarrow 0$

$Nu(F) = \{0_W\}$

$Dim(W) = Dim(Im(F))$

$\rightarrow T$ MONOMORFISMO

T EPIMORFISMO

ISOMORFISMO

$Dim(Nu) + Dim(Im) = E$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ 2x+3y+z=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} (-2)f_1 + f_3 \rightarrow f_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} f_3 - f_2 \rightarrow f_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(A)=2$

$r(A')=2$

$n=3$

$x+y=0 \qquad x=-y$

$y+z=0 \qquad -y=z$

De donde surge que z= –y x= –y;

luego todos los (x ,y ,z) ∊ Nu(f) son de la forma (–y , y, –y) = y (–1, 1, –1).

O sea, es un subespacio generado por el vector (–1,1,–1)

$Nu(f) = \{(-1,1,-1)\}$ Dim Nu(f)=1

NO MONOMORFISMO POR QUE

$Nu(F) \neq \{(0,0,0)\}$

Busquemos ahora la Img(f).

Todos los vectores de la imagen son de la forma:

(x + y, y + z, 2x + 3y + z)=(x, 0, 2x)+(y, y, 3y)+(0, z, z)= x.(1,0,2) + y.(1,1,3) + z.(0,1,1)

Se trata de un subespacio generado por los vectores {(1,0,2),(1,1,3),(0,1,1)};

analicemos su independencia por el método corto.

La matriz que resulta, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, no es otra que la transpuesta de la que utilizamos para hallar el Nu(f)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

los tres vectores son L.D. y de ellos podremos elegir dos que generan a la Img(f) y son L.I., por ejemplo {(1,0,2),(0,1,1)}

este conjunto es base de la imagen

Im(f)={(1,0,2),(0,1,1)} dim(Im(f))=2

NO ES EPIMORFISMO $Dim(IM) = 2 \neq E = \mathbb{R}^3 = dim = 3$

$Dim(N) + Dim(I) = Dim(E)$

$1 + 2 = 3$

Sea f: $R^3 \rightarrow R^3$ / f(x ,y , z)=(x - z ,y + z, x - y).

clasificarla

$(x-z,\ y+z,\ x-y) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y+z = 0 \\ x-y = 0 \end{cases} \quad \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right| \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$2z = 0$ $\quad$ $y + 0 = 0$ $\quad$ $x - 0 = 0$

$z = 0$ $\quad$ $y = 0$ $\quad$ $x = 0$

$Nu(F) = \{(0,0,0)\}$ $\quad$ $Dim\,Nu(F) = 0 \Rightarrow$ F MONOMORFISMO

$(x-z,\ y+z,\ x-y) = x(1,0,1) + y(0,1,-1) + z(-1,1,0)$

gen $Im(F) = \{(1,0,1)\ (0,1,-1)\ (-1,1,0)\}$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right| \quad F_2 - F_3 \rightarrow F_3$$

$-F_2 + F_3 \rightarrow F_3$ $\quad$ -2

BASE $Im(F) = \{(1,0,1)\ (0,1,-1)\ (-1,1,0)\}$.

$Dim(B) = 3$ $\quad$ $Dim(W) = 3$ $\quad$ EPIMORFISMO

$\rightarrow$ ISOMORFISMO

$$F(X) = A.X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

TRANSFORMACIONES LINEALES

$T: R^3 \to R^2$ es una transformación lineal de la que se sabe que T(1;0;-1)=(-1;1), T(1;1;0)=(0;2) y T(0;1;2)=(0:3).

a) Obtenga la 3expresión de T(x;y;z) y la matriz de la transformación en las bases canónicas.
b) A partir de la matriz T encuentre las bases del núclo e imagen de T. Clasifique T
c) Determine $T\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ $y\ A = \{X \in R^3 / T(X) = (2;1)\}$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&0\\0&1&2\end{pmatrix} \xrightarrow{-F_1+F_2\to F_2} \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix} \xrightarrow{-F_2+F_3\to F_3} \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

l.i. ∴ FORMAN BASE → $\mathbb{R}^3$

$(x,y,z) = a(1,0,-1) + b(1,1,0) + c(0,1,2)$

$$\begin{cases} x = a+b \\ y = b+c \\ z = -a+2c \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&x\\0&1&1&y\\-1&0&2&z\end{array}\right) \xrightarrow{F_1+F_3\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&x\\0&1&1&y\\0&1&2&x+z\end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_3\to F_3} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&x\\0&1&1&y\\0&0&1&-y+x+z\end{array}\right)$$

$a+b=x$

$b+c=y$

$\boxed{c = x-y+z}$

$b + x-y+z = y$

$b = -x+y-z+y$

$\boxed{b = -x+2y-z}$

$a - \cancel{x}+2y-z = x$

$a = x-2y+z+x$

$\boxed{a = 2x-2y+z}$

$T(x,y,z) = T(a(1,0,-1)+b(1,1,0)+c(0,1,2))$

$T(x,y,z) = T(a(1,0,-1)) + T(b(1,1,0)) + T(c(0,1,2))$

$T(x,y,z) = aT(1,0,-1) + bT(1,1,0) + cT(0,1,2)$

$T(x,y,z) = a(-1,1) + b(0,2) + c(0,3)$

$T(x,y,z) = (2x-2y+z)(-1,1) + (-x+2y-z)(0,2) + (x-y+z)(0,3)$

$T(x,y,z) = (-2x+2y-z\ ,\ \cancel{2x}-\cancel{2y}+\cancel{z}-\cancel{2x}+4y-2z+3x-3y+3z)$

$T(x,y,z) = (-2x+2y-z\ ,\ 3x-y+2z)$

$$\begin{cases} -2x+2y-z=0 \\ 3x-y+2z=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2&2&-1&0\\3&-1&2&0\end{array}\right) \xrightarrow{3F_1+2F_2\to F_2} \left(\begin{array}{ccc|c}-2&2&-1&0\\0&4&1&0\end{array}\right)$$

$A = \begin{pmatrix}-2&2&-1\\3&-1&2\end{pmatrix}$

$-2x+2y-z=0 \quad -2x+2y+4y=0 \qquad -2x+6y=0 \quad x=3y$

$4y+z=0 \qquad z=-4y$

$(x,y,z)=(3y,y,-4y)=y(3,1,-4)$

$B(Nu(T))=\{(3,1,-4)\} \qquad Dim(N(T))=1 \neq 0 \Rightarrow$ NO ES MONO

$(-2x+2y-z,\,3x-y+2z)=x(-2,3)+y(2,-1)+z(-1,2)$

$gen(Im(T))=\{(-2,3)\ (2,-1)\ (-1,2)\}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}F_2+F_3\to F_3]{F_1+F_2\to F_2} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3/2F_2+2F_3} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$Base(Im\,T)=\{(-2,3),(2,-1)\}$ $\left.\begin{array}{l} Dim(Im(T))=2 \\ Dim(W)=2 \end{array}\right\} =$ EPIMORFISMO

$$T\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}=A.X=\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}=(3,-1)$$

$$T(X)=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2x+2y-z \\ +3x-y+2z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x+2y-z=2 \\ 3x-y+2z=1 \end{cases}$$