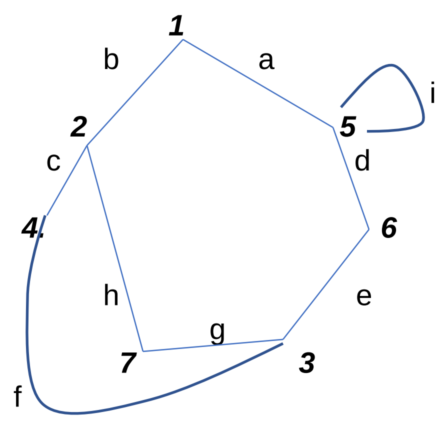
EJERCICIO DE GRAFOS PRIMERA PARTE

Dada la siguiente gráfica



a) Definirlo formalmente:

Recordemos que definir el grafo formalmente significa dar la terna ***G = (V; A;φ).***
Donde ***V :*** conjunto de vértices

A : Conjunto de aristas.

φ: A ⟶ V. Función de incidencia

Def.: Una arista ***a*** *es incidente* con un vértice ***v*** , si lo toca.

Se define formalmente el Grafo G = ({1,2,3,4,5,6,7};{a,b,c,d,e,f,g,h,i}; φ)

x	***a***	***b***	***c***	***d***	***e***	***f***	***g***	***h***	***i***
$\varphi(x)$	***{1,5}***	***{1,2}***	***{2,4}***	***{5,6}***	***{6,3}***	***{3,4}***	***{7,3}***	***{7,2}***	***{5}***

b) Indicar los grados de sus vértices:

gr (1) = 2 ; gr (2) = 3 ; gr (3) = 3 ; gr (4) = 2 ; gr (5) = 4 ; gr (6) = 2 ; gr (7) = 2

c) Verificar la propiedad fundamental:
La propiedad fundamental de los grados de los vértices de un grafo dice:

$\sum_{i=1}^{n} gr(v_i) = 2.|A|$, o sea que

En todo grafo, la suma de los grados de todos sus vértices es el doble de la cantidad de aristas.
En este caso queda :
2 + 3 + 3 + 2 + 4 + 2 + 2 = 18 = 2.9, o sea $\mathbf{2.|A|}$

d) Hallar la matriz de incidencia:

$$M_i = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

e) Hallar la matriz de adyacencia entre vértices:

Recordemos que dos vértices $\mathbf{v_i}$ y $\boldsymbol{v_j}$ son ***adyacentes*** si y solo si existe al menos una arista ***a*** que los une, o sea

$$v_i \ \boldsymbol{es\ adyacente}\ con\ v_j \Leftrightarrow \exists a \in A \ / \ \varphi(a) = \{v_i; v_j\}$$

$$M_a = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

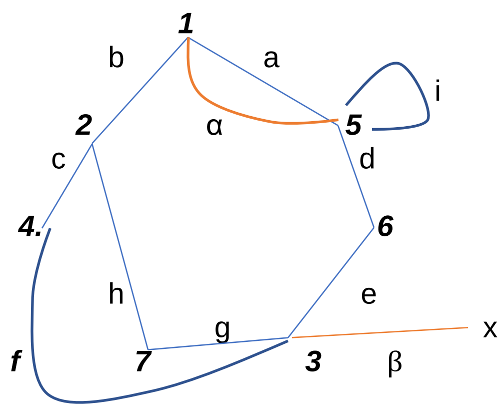
f) ¿Es G un grafo conexo? Justificar

G es un ***grafo conexo*** porque ***existe camino desde cualquier vértice hacia*** cualquier vértice, o sea todos los vértices están conectados por algún camino.

g) ¿Hay aristas paralelas, vértice colgante, vértice aislado, puente o istmo ?

El grafo G no tiene vértices colgantes ni aristas paralelas.

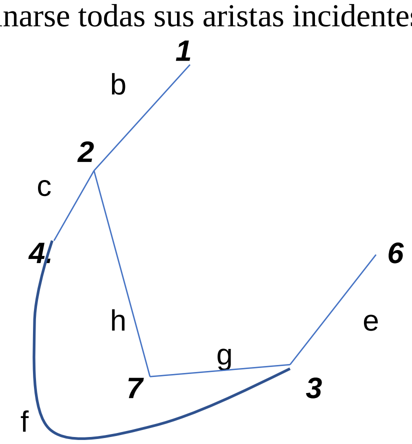
- Para que vean como se verían en la gráfica las ***aristas paralelas***, agregamos la arista ***α*** en otro color. Esta no forma parte del grafo original.
- Del mismo modo agregamos la arista ***β*** y el vértice ***x***, para que vean a qué se le llama vértice colgante.
- Quedaría entonces:



- El grafo G no tiene vértice aislado.
- Si el grafo tuviera al vértice x, entonces la arista β sería un puente, ya que al eliminarla, el grafo quedaría ***desconectado*** o ***no conexo.***
- En el mismo caso del punto anterior, el vértice ***3*** sería un ***istmo*** ya que al eliminarlo, el grafo $\boldsymbol{G_3}$ pasaría a ser ***no conexo***.

h) Hallar la sub- gráfica $\boldsymbol{G_5}$

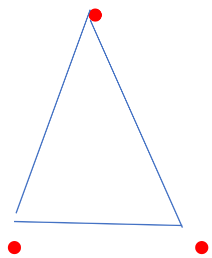
Recordemos que dado un grafo $\boldsymbol{G = (V;A;\ \varphi)}$, hay dos formas de obtener un sub grafo. Una es eliminando una o más aristas, y la otra es eliminando uno o más vértices. Tener en cuenta que cuando se elimina un vértice, también deben eliminarse todas sus aristas incidentes. El subgrafo pedido $\boldsymbol{G_5}$ es:



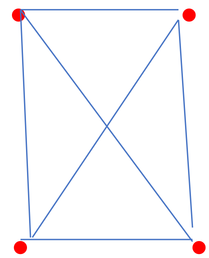
$\boldsymbol{G_{\{a,b,c\}}}$

i) ¿ Es $\boldsymbol{G = (V;A;\varphi)}$ un GRAFO COMPLETO ?

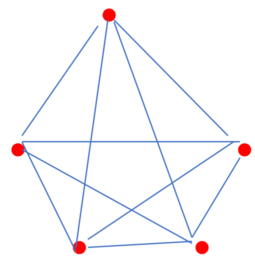
Hemos definido como ***grafo completo de n vértices Kn,*** al grafo cuyos vértices son todos adyacentes, o sea un grafo es completo cuando es simple y existe arista entre todos sus vértices tomados de a dos.
El grafo del ejercicio no es completo ya que, por ejemplo ***2 y 6 no son adyacentes.***
¿ Cómo se ve un grafo completo?
Por ejemplo $\boldsymbol{K_3}$ sería:



K₄



K₅



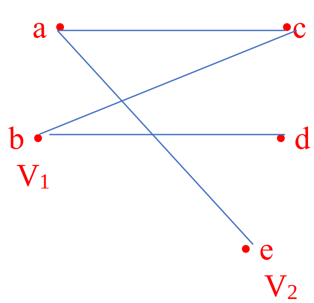
La cantidad de aristas en grafos completos siempre se calcula con la fórmula

$$|A| = \frac{n.(n-1)}{2}$$

¿ Es $\boldsymbol{G = (V;A;\varphi)}$ un GRAFO BIPARTITO ?

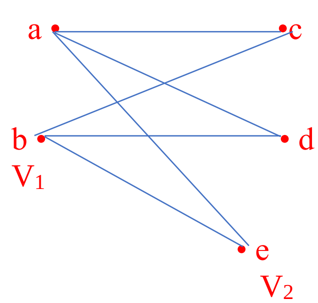
Hemos definido Grafo bipartito de orden m;n, o sea $\boldsymbol{K_{m;n}}$, a un grafo simple tal que su conjunto de vértices puede expresarse como la unión de dos subconjuntos, o sea $\boldsymbol{V = V_1 \cup V_2}$, tales que todas las aristas del grafo vayan ***de*** $\boldsymbol{V_1}$ ***a*** $\boldsymbol{V_2}$ y que al mismo tiempo no haya aristas en V_1 y V_2

Por ejemplo un grafo bipartito $\boldsymbol{K_{2;3}}$ sería



$V = V_1 \cup V_2$ / $V_1 = \{a;b\}$ y $V_2 = \{c;d;e\}$

GRAFO BIPARTITO COMPLETO $\boldsymbol{K'_{m;n}}$



$\boldsymbol{|V| = m + n}$ $\boldsymbol{|A| = m.n}$