Ejercicio 18

Para obtener la matriz que pasa de la base $B=\{e_1,e_2....,e_n\}$ a $B'=\{u_1,u_2....,u_n\}$ escribimos:

$$e_j=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kj}u_k$$

y

$$C_{BB'}=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & .. & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & .. & \alpha_{2n}\\ .. & .. & .. & ..\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & .. & \alpha_{nn}\end{bmatrix}$$

De la ortonormalidad de la base B', sabemos que:

$$\begin{cases} <u_k,u_j>=0 \text{ para } k\neq j\\ <u_k,u_j>=1 \text{ para } k\neq j\end{cases}$$

Entonces

$$<e_j,u_i>=<\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kj}u_k,u_i>=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kj}<u_k,u_i>=\alpha_{ij}$$

y la matriz de cambio de base:

$$C_{BB'}=\begin{bmatrix}<e_1,u_1> & <e_2,u_1> & .. & <e_n,u_1>\\ <e_1,u_2> & <e_2,u_2> & .. & <e_n,u_2>\\ .. & .. & .. & ..\\ <e_1,u_n> & <e_2,u_n> & .. & <e_n,u_n>\end{bmatrix} \quad (1)$$

Con un razonamiento análogo se obtiene la matriz que pasa de la base B' a B (la inversa de la matriz anterior)

$$C_{B'B}=[C_{BB'}]^{-1}=\begin{bmatrix}<u_1,e_1> & <u_2,e_1> & .. & <u_n,e_1>\\ <u_1,e_2> & <u_2,e_2> & .. & <u_n,e_2>\\ .. & .. & .. & ..\\ <u_1,e_n> & <u_2,e_n> & .. & <u_n,e_n>\end{bmatrix}$$

Como $<u_i,e_j>=<e_j,u_i>$, podemos cambiar el orden en los productos escalares que intervienen en la matriz anterior:

$$C_{B'B}=[C_{BB'}]^{-1}=\begin{bmatrix}<e_1,u_1> & <e_1,u_2> & .. & <e_1,u_n>\\ <e_2,u_1> & <e_2,u_2> & .. & <e_2,u_n>\\ .. & .. & .. & ..\\ <e_n,u_1> & <e_n,u_2> & .. & <e_n,u_n>\end{bmatrix} \quad (2)$$

Observando (1) y (2) vemos que la traspuesta de (1) es (2), entonces:

$$\boxed{C_{B'B}=[C_{BB'}]^{-1}=[C_{BB'}]^{t}.}$$

Ejercicio 19
Para resolver este ejercicio recordemos que una matriz M es simétrica cuando es igual a su traspuesta.

$$M = M^t \quad (M \text{ simétrica})$$

Entonces, como $MT_{B_1B_1}$ es simétrica

$$MT_{B_1B_1} = [MT_{B_1B_1}]^t$$

Si calculamos $MT_{B_2B_2}$ en función de $MT_{B_1B_1}$ se obtiene:

$$MT_{B_2,B_2} = C_{B_1B_2} MT_{B_1B_1} C_{B_2B_1}$$

o

$$MT_{B_2,B_2} = C_{B_1B_2} MT_{B_1B_1} [C_{B_1B_2}]^{-1} \quad (C_{B_2B_1} = [C_{B_1B_2}]^{-1})$$

Por el ejercicio 18 $[C_{B_1B_2}]^{-1} = [C_{B_1B_2}]^t$ y se obtiene la identidad siguiente que es válida para bases ortonormales:

$$\boxed{MT_{B_2,B_2} = C_{B_1B_2} MT_{B_1B_1} [C_{B_1B_2}]^t \quad (1)}$$

Para ver que la matriz MT_{B_2,B_2} es simétrica calculamos su traspuesta.

$$[MT_{B_2,B_2}]^t = [C_{B_1B_2} MT_{B_1B_1} [C_{B_1B_2}]^t]^t = [[C_{B_1B_2}]^t]^t [MT_{B_1B_1}]^t [C_{B_1B_2}]^t$$

Como $MT_{B_1B_1} = [MT_{B_1B_1}]^t$ y $[[C_{B_1B_2}]^t]^t = C_{B_1B_2}$ queda:

$$[MT_{B_2,B_2}]^t = C_{B_1B_2}\ MT_{B_1B_1} [C_{B_1B_2}]^t \quad (2)$$

y de (1) y (2)

$$MT_{B_2,B_2} = [MT_{B_2,B_2}]^t .$$

Ejercicio 20

a)
Llamando

$$E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$$

Calculamos la matriz de T en la base E. Para realizar este cálculo tenemos que obtener las coordenadas de $T(e_j)$ en la base E (columna j de MT_{EE}).

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{n} < T(e_j), e_i > e_i$$

y se obtiene una fórmula para el cálculo de la matriz de una transformación lineal en un base ortonormal.

$$\boxed{MT_{EE} = \begin{bmatrix} < T(e_1), e_1 > & < T(e_2), e_1 > & .. & < T(e_n), e_1 > \\ < T(e_1), e_2 > & < T(e_2), e_2 > & .. & < T(e_n), e_2 > \\ .. & .. & .. & .. \\ < T(e_1), e_n > & < T(e_2), e_n > & .. & < T(e_n), e_n > \end{bmatrix}}$$

Esta matriz es simétrica (ejercicio 19), entonces la entrada *i,j* ($< T(e_j), e_i >$)es igual a la entrada *j,i* ($< T(e_i), e_j >$)

$$< T(e_j), e_i > \; = \; < T(e_i), e_j > .$$

Como $< T(e_j), e_i >=< e_i, T(e_j) >$ resulta

$$< e_i, T(e_j) >=< T(e_i), e_j > .$$

b)

Para verificar esta propiedad podemos usar la parte (a). Para esto escribimos *x* e *y* en una base ortonormal.

$$x = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$$

$$y = \sum_{j=1}^{n} < y, e_j > e_j$$

Primeramente veremos que

$$< T(x), e_j >=< x, T(e_j) > .$$

$$< T(x), e_j >=< T\left(\sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i \right), e_j >=< \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > T(e_i), e_j >= \sum_{i=1}^{n} < x, e_i >< T(e_i), e_j >$$

$$< x, T(e_j) >=< \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i, T(e_j) >= \sum_{i=1}^{n} < x, e_i >< e_i, T(e_j) >$$

Por (a) $< T(e_i), e_j >=< e_i, T(e_j) >$ entonces

$$< x, T(e_j) >= \sum_{i=1}^{n} < x, e_i >< T(e_i), e_j >= < T(x), e_j >$$

Ahora veremos que

$$< T(x), y >=< x, T(y) > .$$

$$< T(x), y >=< T(x), \sum_{j=1}^{n} < y, e_j > e_j >= \sum_{j=1}^{n} < y, e_j >< T(x), e_j > .$$

$$< x, T(y) >=< x, T\left(\sum_{j=1}^{n} < y, e_j > e_j \right) >=< x, \sum_{j=1}^{n} < y, e_j > T(e_j) >= \sum_{j=1}^{n} < y, e_j >< x, T(e_j) > .$$

Como $< T(x), e_j >=< x, T(e_j) >$ resulta $< T(x), y >=< x, T(y) >$.

c)

Recordemos la definición de subespacio invariante:

$$S \text{ es invariante por } T \Leftrightarrow T(S) \subseteq S$$

Recordemos la definición de subespacio ortogonal:

$$W^{\perp} = \{ u \in E :< u, w >= 0 \, \forall w \in W \}$$

Para verificar (c) tendremos que ver que:

$$T(W^{\perp}) \subseteq W^{\perp},$$

usando que $T(W) \subseteq W$.

Si $u \in T(W^{\perp}) \Rightarrow u = T(w_u)$ con $w_u \in W^{\perp}$. Ahora calculamos $< u, w >$ para todo $w \in W$.
$< u, w > = < T(w_u), w > = < w_u, T(w) > = 0$, por que $T(w) \in W$ (*W* es invariante) y $w_u \in W^{\perp}$.
Entonces:

$$< u, w > = 0 \, \forall \, w \in W \, .$$

De lo último y la definición de complemento ortogonal resulta: $u \in W^{\perp}$. Entonces

$$T(W^{\perp}) \subseteq W^{\perp} \, .$$

d)
Primeramente recordemos la definición de autovector y autovalor:

$v \neq 0$ es un autovector de *T* sii existe un escalar λ (autovalor) tal que $T(v) = \lambda v$

Para encontrar los autovalores calculamos las raíces de polinomio característico $P(\lambda)$

$$P(\lambda) = \det(MT_{EE} - \lambda I) = 0$$

Las coordenadas $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de los autovectores en la base *B* se obtienen resolviendo el sistema:

$$(MT_{EE} - \lambda I) X^t = 0 \, .$$

Como $\det(MT_{EE} - \lambda I) = 0$ el sistema es compatible indeterminado y tendrá solución no nula. Es decir, siempre que el polinomio característico tenga una raíz real podremos encontrar un autovector resolviendo el sistema.
Ahora mostraremos que el polinomio característico tiene todas sus raíces reales (entonces todos los autovalores serán **reales**) si la matriz MT_{EE} es simétrica. Tomemos una raíz λ del polinomio característico (λ puede ser un número complejo, siempre tenemos raíces complejas) y encontremos una solución no nula *X* de:

$$(MT_{EE} - \lambda I) X^t = 0 \, .$$

Dado que λ podría ser un complejo las coordenadas de *X* podrían ser complejas. De cualquier manera tendremos:

$$MT_{EE} X^t = \lambda X^t$$

Ahora calculemos

$$X MT_{EE} \overline{X^t} \quad \text{(la barra indica conjugado)}$$

de dos formas distintas:
Como MT_{EE} es de coeficientes reales: $MT_{EE} \overline{X^t} = \overline{MT_{EE}} \, \overline{X^t} = \overline{MT_{EE} X^t} = \overline{\lambda X^t} = \overline{\lambda} \, \overline{X^t}$.
Entonces $X MT_{EE} \overline{X^t} = \overline{\lambda} X \overline{X^t}$.
Por otro lado

$$MT_{EE} X^t = \lambda X^t \Rightarrow (MT_{EE} X^t)^t = (\lambda X^t)^t \Rightarrow X \, MT_{EE}{}^t = \lambda X$$

Como $MT_{EE} = MT_{EE}{}^t$, $X \, MT_{EE} = \lambda X$. Entonces $X MT_{EE} \overline{X^t} = \lambda X \overline{X^t}$.
De los cálculos podemos escribir:

$$\lambda X \overline{X^t} = \overline{\lambda} X \overline{X^t}$$

$$X \overline{X^t} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i} = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \neq 0 \ (X \neq 0) \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \text{ es real.}$$

Otra demostración que se basa en el ejercicio 15 de la práctica anterior se puede encontrar en el libro de Hernández.

e)

Sabemos por la parte (b) que:

$$< v_1, T(v_2) > = < T(v_1), v_2 > .$$

Además $T(v_1) = \lambda_1 v_1$ y $T(v_2) = \lambda_2 v_2$. Entonces

$$< v_1, \lambda_2 v_2 > = < \lambda_1 v_1, v_2 >$$

$$\lambda_2 < v_1, v_2 > = \lambda_1 < v_1, v_2 >$$

y

$$(\lambda_2 - \lambda_1) < v_1, v_2 > = 0 .$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ resulta

$$< v_1, v_2 > = 0 .$$

f)

1) Podremos determinar dos subespacios invariantes:
   a) El subespacio generado por el autovector v_1.
   b) Su complemento ortogonal.

2) En el subespacio W generado por v_1 tenemos el autovector v_1.
En su complemento ortogonal ($W^{\perp}$) también encontraremos un autovector. Para esto restringimos la transformación a $W^{\perp}$ y como $W^{\perp}$ es invariante obtendremos una transformación lineal de $W^{\perp}$ en $W^{\perp}$.

$$T : W^{\perp} \to W^{\perp}$$

Si calculamos la matriz de esta transformación en una base ortonormal $\{u_1, u_2, ..., u_{n-1}\}$ de $W^{\perp}$ (recordar que $\dim(W^{\perp}) = n-1$, por que $\dim(W) = 1$) obtendremos:

$$\begin{bmatrix} < T(u_1), u_1 > & < T(u_2), u_1 > & .. & < T(u_n), u_1 > \\ < T(u_1), u_2 > & < T(u_2), u_2 > & .. & < T(u_n), u_2 > \\ .. & .. & .. & .. \\ < T(u_1), u_{n-1} > & < T(u_2), u_{n-1} > & .. & < T(u_n), u_{n-1} > \end{bmatrix}$$

Esta matriz es simétrica (por ejemplo $< T(u_1), u_2 > = < u_2, T(u_1) > = por(b) = < T(u_2), u_1 >$) y por la parte (d) su polinomio característico tiene todas sus raíces reales. Por lo tanto, podremos encontrar un autovector asociado a una de sus raíces.

3) Para explicar la idea supondremos que estamos en R^4. Como la matriz de T es simétrica las raíces del polinomio característico son reales elegimos una raiz λ_1 y calculamos el autovector correspondiente y lo normalizamos para que tenga longitud 1. Hasta ahora tenemos:

$$\lambda_1 \, autovalor, v_1 \, autovector, \|v_1\| = 1$$

W_1	$W_1^{\perp}$
v_1	

Llamando W_1 al suespacio generado por v_1 buscamos en $W_1^{\perp}$ un autovector v_2 (esto es posible por (2)) normalizado y llamamos λ_2 a su autovalor. Notar que como $v_1 \in W_1$ y $v_2 \in W_1^{\perp}$

$$< v_1, v_2 >= 0$$

W_1	W_2	$W_2^{\perp}$
v_1	v_2	

Ahora, pensamos que el espacio es $W_1^{\perp}$ ($\dim(W_1^{\perp}) = 3$) y repetimos el argumento. Es decir, si tomamos

$$T : W_1^{\perp} \to W_1^{\perp},$$

podemos calcular el complemento ortogonal en $W_1^{\perp}$ del subespacio W_2 generado por v_2 (estamos repitiendo el argumentos). En este subespacio, que notaremos con $W_2^{\perp}$ ($\dim(W_2^{\perp}) = 2$), buscamos un autovector normalizado v_3 (existe por (2)) y llamamos λ_3 a su autovalor. Por construcción

$$< v_2, v_3 >= 0$$

y

$$< v_1, v_2 >= 0, < v_1, v_3 >= 0 \text{ (recordar que } v_2 \in W_1^{\perp} \text{ y } v_3 \in W_1^{\perp}) .$$

W_1	W_2	W_3	$W_3^{\perp}$
v_1	v_2	v_3	

Siguiendo con el razonamiento recursivo supondremos que el espacio es $W_2^{\perp}$,

$$T : W_2^{\perp} \to W_2^{\perp}$$

llamaremos W_3 al subespacio generado por v_3 y en su complemento ortogonal ($W_3^{\perp}$, dim($W_3^{\perp}$)=1) en $W_2^{\perp}$ tomamos un autovector normalizado v_4 de autovalor λ_4. Por construcción

$$< v_3, v_4 >= 0$$

y

$$< v_2, v_3 >= 0, < v_2, v_4 >= 0, < v_1, v_3 >= 0, < v_1, v_4 >= 0$$

Lo último resulta de: $v_3 \in W_2^{\perp} \subset W_1^{\perp}, v_4 \in W_2^{\perp} \subset W_1^{\perp}$.

Dado que hemos encontrado cuatro autovectores ortonormales el proceso termina aquí (ya tenemos una base ortonormal de autovectores de T en R^4). En esta base la matriz D de T es diagonal.

$$D=\begin{bmatrix} <T(v_1),v_1> & <T(v_2),v_1> & <T(v_3),v_1> & <T(v_4),v_1> \\ <T(v_1),v_2> & <T(v_2),v_2> & <T(v_3),v_2> & <T(v_4),v_2> \\ <T(v_1),v_3> & <T(v_2),v_3> & <T(v_3),v_3> & <T(v_4),v_3> \\ <T(v_1),v_4> & <T(v_2),v_4> & <T(v_3),v_4> & <T(v_4),v_4> \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} <\lambda_1 v_1,v_1> & <\lambda_2 v_2,v_1> & <\lambda_3 v_3,v_1> & <\lambda_4 v_4,v_1> \\ <\lambda_1 v_1,v_2> & <\lambda_2 v_2,v_2> & <\lambda_3 v_3,v_2> & <\lambda_4 v_4,v_2> \\ <\lambda_1 v_1,v_3> & <\lambda_2 v_2,v_3> & <\lambda_3 v_3,v_3> & <\lambda_4 v_4,v_3> \\ <\lambda_1 v_1,v_4> & <\lambda_2 v_2,v_4> & <\lambda_3 v_3,v_4> & <\lambda_4 v_4,v_4> \end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

Dado que pasamos de una base ortonormal a otra base ortonormal la inversa de la matriz de cambio de base es su traspuesta. Las matrices que tienen por inversa a su traspuesta se denominan **ortogonales**.
Llamando U a la base formada con los autovectores obtenemos:

$$\boxed{D=C_{UE}{}^{t}MT_{EE}\,C_{UE}}$$

Ejercicio 21

b) Para diagonalizar tendremos que encontrar una base ortonormal de autovectores (el ejercicio anterior indica que encontraremos una base ortonormal de autovectores si y sólo si la matriz es simétrica)

$$MA \quad = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda)=\det\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}\right)=(1+\lambda)^2(2-\lambda)=0$$

Las raíces son $\lambda_1=-1$ y $\lambda_2=2$.

Se pueder ver que la dimensión de los subespacios invariantes $E(\lambda_i)$ asociados a los autovalores, es igual a la multiplicidad de la raíz λ_i del polinomio característico. En este caso,

$$\dim(E(-1)) = 2$$
$$\dim(E(2)) = 1$$

Del ejercicio anterior (e) :

$$v \in E(\lambda_i),\ w \in E(\lambda_j) \text{ y } \lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow < v, w >= 0$$

Entonces para encontrar una base ortonomal de autovectores tendremos que enconcotrar una base ortonormal de cada subespacio invariante.

$E(-1)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x + y + z = 0$$

Una base de este subespacio es $\{(1,-1,0)(0,1,-1)\}$. Estos vectores no son ortonormales. Por Gram-Schmidt encontramos una base ortonormal asociada.

$v_1 = (1,-1,0)$

$v_2 = (0,1,-1) - \dfrac{<(0,1,-1),(1,-1,0)>}{<(1,-1,0),(1,-1,0)>}(1,-1,0) = (0,1,-1) + \dfrac{1}{2}(1,-1,0) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, -1\right)$

$e_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = (\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

$e_2 = \dfrac{v_2}{\|v_2\|} = (\dfrac{1}{2\sqrt{3/2}}, \dfrac{1}{2\sqrt{3/2}}, -\sqrt{\dfrac{2}{3}}) = (\sqrt{\dfrac{1}{6}}, \sqrt{\dfrac{1}{6}}, -\sqrt{\dfrac{2}{3}})$

$E(2)$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -3x + 3z = 0 \end{cases}$$

Una base de este subespacio es $\{(1,1,1)\}$.

$$e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

En la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ la matriz de T es:

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

La matriz C que pasa de la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ a la base canónica es:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

y

$$D = C^t MAC\,.$$

c)

La simplicidad de la transformación involucrada en este ejercicio permite resolverlo a **OJO**.

Las matrices simétricas verifican:

$$A(M) = M$$

El subespacio invariante asociado al autovalor 1 estará formado por las matrices simétricas, una base de este subespacio es: $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ y sus vectores son ortogonales.

Es inmediato verificar que:

$$A(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}) = -1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ya tenemos el otro autovalor –1 (no hay mas autovalores por que ya cubrimos la dimensión del espacio) con autovector:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

La base de autovectores se obtiene normalizando los vectoctores encontrados:

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

La matriz de A en esta base es:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La matriz C que pasa de la base anterior a la canónica tendrá en sus columnas a las coordenadas de los autovectores en la base canónica.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora resolvemos el ejercicio por el método que usamos en (b).
Se calcula la matriz de A en la canónica de R^{2x2}.

$$A\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$MA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$

Las raíces de $P(\lambda)$ son $\lambda_1 = 1\, y\, \lambda_2 = -1$.

$E(1)$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-y+z=0$$

Una base de soluciones del sistema:

$$(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,01)$$

Estos vectores son las coordenadas de los autovectores en la base canónica (ya son ortogonales, es caso contrario se aplica Gram-Schmidt). Las normalizamos:

$$(1,0,0,0),(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0),(0,0,01)$$

y armamos los autovectores:

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$E(-1)$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y+z=0 \\ w=0 \end{cases}$$

Una base de soluciones del sistema:

$$(0,-1,1,0)$$

Normalizamos y calculamos el autovector

$$(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

En la base $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}\right\}$, la matriz de A es:

$$D=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

y

$$C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

Ejercicio 22

Encontremos una matriz U que verifique:

$$U^3=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

Esta matriz es la matriz de la trasformación buscada en la base canónica. Resolveremos el problema en forma diagonal:

$$D^3=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

Podemos encontrar una diagonal que es solución del problema:

$$D=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&\sqrt[3]{2}\end{bmatrix}$$

Multiplicando por la matriz de cambio C de base y su traspuesta:

$$CD^3C^t=C\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}C^t$$

$$CD^3C^t=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

Podemos poner

$$\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}=CD^3C^t=CD^2C^tCDC^t=CDC^tCDC^tCDC^t=U^3$$

Con

$$U = CDC^t$$

y

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Ahora con la matriz U se calcula la transformación pedida.
Con este mecanismo se encontró una matriz simétrica U que verifica:

$$U^3 = MA$$

Observar que si resolvemos el problema:

$$U^2 = MA$$

No prodremos encontrar una diagonal (hay autovalores negativos) tal que:

$$D^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Esto no significa que el problema no tiene solución, significa que el problema no tiene solución simétrica. El problema puede o no tener solución. En este caso podemos encontrar una solución

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}\right)^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

El resto es igual.

Y ya me cansé de esta sopa de letras......................................

Fin