T P 04 Ej. 6

Si una función tiene derivadas parciales en un punto ¿es necesariamente continua en ese punto? Analice el siguiente caso:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy/(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2) si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 \qquad si(x,y) = (0,0) \end{cases}$$ en el punto (0,0).

Hallamos las derivadas parciales en $(0,0)$

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h.0}{h^2+0^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{0.k}{0^2+k^2}-0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = \lim_{k\to 0} 0 = 0$$

⇨ Existen las dos derivadas parciales en $(0,0)$ y valen 0. $\exists f(0,0) = 0$? Sí

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2)} = \frac{0}{0}$$

Hallamos los límites radiales $y = mx$

$$Lr = \lim_{x\to 0} \frac{x.mx}{(\mathrm{x}^2+(mx)^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+m^2} = \frac{1}{1+m^2}$$

El resultado del límite depende de m (es decir, de la inclinación de la recta por la cual nos aproximamos) por lo tanto el límite no existe y eso prueba que f no es continua en $(0,0)$.

Podemos decir entonces que la derivabilidad no implica continuidad para funciones de varias variables.