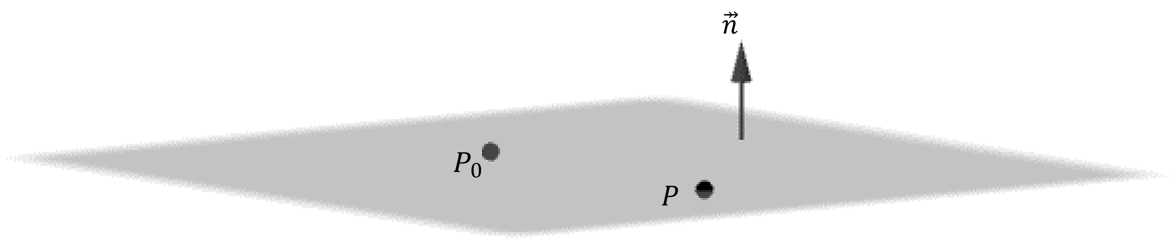
Plano en $\mathbb{R}^3$

Ecuaciones del plano

Dada un vector en $\mathbb{R}^3$, existen infinitos planos perpendiculares al mismo. Si conocemos además un punto del plano, éste queda determinado de forma única.

Se quiere hallar la ecuación del plano π que contiene al punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y es perpendicular al vector $\vec{n} = (a, b, c)$. **El vector $\vec{n}$ se denomina *vector normal* del plano.**



¿Qué condición debe cumplir un punto $P(x, y, z)$ para estar en el plano π? Si armamos el vector $\overrightarrow{P_0P}$, éste debe ser paralelo al plano, o sea perpendicular al vector normal del plano:

$$P(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P}.\vec{n} = 0$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0).(a, b, c) = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_{d} = 0$$

$$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0} \qquad \textit{Ecuación general o implícita del plano}$$

P

Ejemplo

Hallar la ecuación del plano perpendicular al vector $\vec{n} = (3,2,1)$ que pasa por el punto $P_0(1,1,-1)$.

$$\overrightarrow{P_0P}.\vec{n} = 0$$

$$(\text{x-1, y-1, z+1}).\,(3,2,1)=0$$

$$3(\text{x-1})+2.(\text{y-1})+(\text{z+1})=0$$

$$3\text{x}-3+2\text{y}-2+\text{z}+1=0$$

$$3\text{x}+2\text{y}+\text{z}-4=0$$

Otra forma

Las componentes de $\vec{n}$ nos indican los coeficientes a, b y c de la ecuación del plano:

$$\pi: 3x + 2y + z + d = 0$$

¿Cómo hallamos d?

El punto debe verificar la ecuación, entonces reemplazamos P_0 y obtenemos el coeficiente que faltaba:

$$3.1 + 2.1 - 1 + d = 0 \Rightarrow d = -4$$

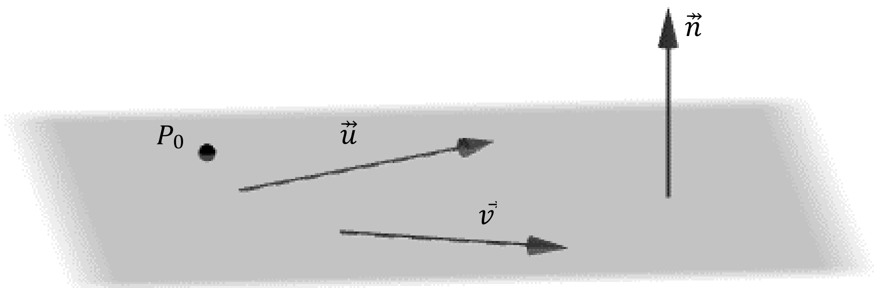
Así obtenemos la ecuación del plano:

$$\pi: 3x + 2y + z - 4 = 0$$

Éste es el único plano que pasa por el punto P_0 y es perpendicular al vector $\vec{n}$.

Ecuación vectorial paramétrica del plano

Dados dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ no paralelos y un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, nos proponemos hallar la ecuación del plano π que pasa por P_0 y es paralelo a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.



¿Cómo podemos obtener un vector perpendicular al plano conociendo dos vectores paralelos a dicho plano?

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

Teniendo $\vec{n}$ y el punto P_0, podemos hallar la ecuación implícita o general del plano π como habíamos visto previamente.

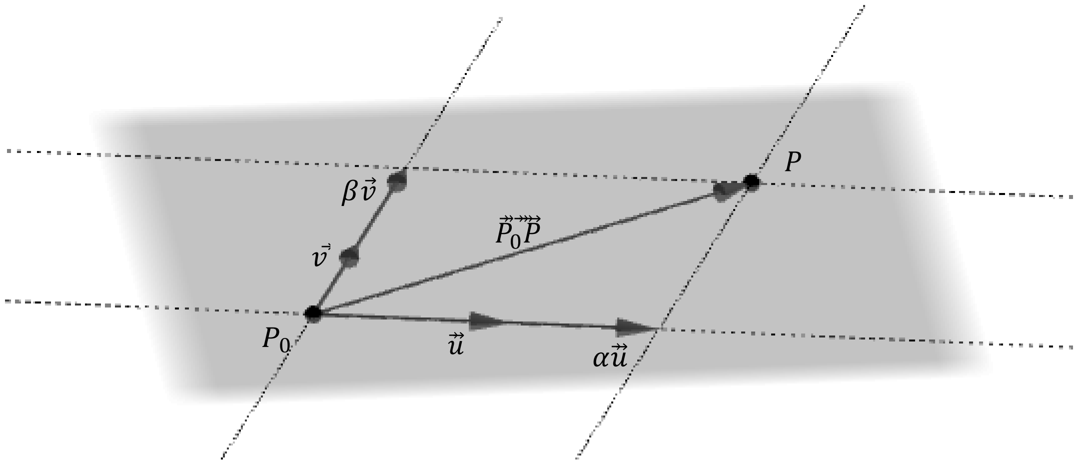
Obtendremos a continuación otro tipo de ecuación del plano, cuya deducción se basa en el concepto de combinación lineal de vectores, tal cómo vimos en el Ejemplo.

Si $P(x, y, z)$ es un punto cualquiera del plano π, los vectores $\overrightarrow{P_0P}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son coplanares

Entonces

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{P_0P} = \alpha\, \vec{u} + \beta\, \vec{v}$$

Esto significa que el vector $\overrightarrow{P_0P}$ puede expresarse como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, como se muestra en la figura:



$$(x - x_0\,, y - y_0, z - z_0) = \alpha.\,(u_1, u_2, u_3) + \beta\,(v_1, v_2, v_3)$$

Por lo tanto:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha\,(u_1, u_2, u_3) + \beta\,(v_1, v_2, v_3),\ con\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

O en notación vectorial:

$$(x, y, z) = \overrightarrow{OP_0} + \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} \qquad Ecuación\ vectorial\ paramétrica\ del\ plano$$

Ejemplo

Armar la ecuación vectorial paramétrica del plano paralelo a $\vec{u} = (3, -1,5)$ y $\vec{v} = (7,3,2)$ que pasa por el punto $P_0(0, -1,8)$.

De acuerdo con lo que hemos visto, tenemos toda la información para escribir la ecuación vectorial paramétrica:

$$(x, y, z) = (0, -1,8) + \alpha(3, -1,5) + \beta(7,3,2)\ , con\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Busquemos ahora la ecuación general de este plano.

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = (3, -1,5) \times (7,3,2) = (-17, 29,16)$$

Luego:

$$-17x + 29y + 16z + d = 0$$

Reemplazamos P_0 para obtener d:

$$-17.0 + 29.(-1) + 16.8 + d = 0 \Rightarrow d = -99$$

Luego:

$$-17x + 29y + 16z - 99 = 0$$

que es la ecuación general o implícita del plano.

De la ecuación general a la ecuación vectorial paramétrica

Dada la ecuación general de un plano, ¿cómo puede obtenerse una ecuación vectorial paramétrica de dicho plano?

Consideremos el siguiente ejemplo:

$$\omega: 2x - y + 3z + 9 = 0$$

Podemos despejar cualquiera de las variables, por ejemplo y:

$$y = 2x + 3z + 9$$

Entonces:

$$\omega: (x, y, z) = (x, 2x + 3z + 9\ , z)$$

Reescribimos como suma de tres vectores, de forma tal que uno de ellos tenga los términos con x, otro los términos con z y otro los términos independientes:

$$(x, y, z) = (x, 2x, 0) + (0,3z, z) + (0,9,0)$$

$$(x, y, z) = x(1,2,0) + z(0,3,1) + (0,9,0)\ , con\ x, z \in R$$

Si llamamos $x = \alpha$, $z = \beta$, resulta:

$$\omega: (x, y, z) = (0,9,0) + \alpha(1,2,0) + \beta(0,3,1)\ , con\ \alpha, \beta \in R$$

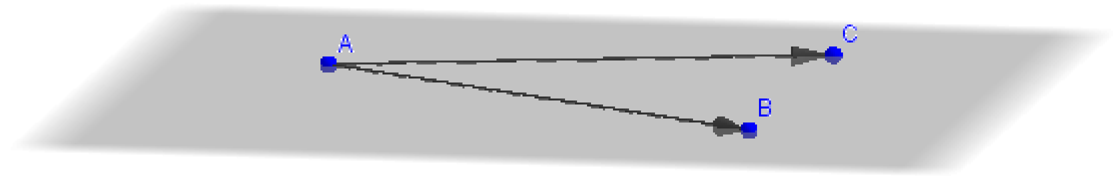
Obtuvimos así una ecuación vectorial paramétrica del plano ω.

Ejemplo

Dados $A(4,5,2)$, $B(1,3,4)$, $C(2,2,5)$ hallar, si es posible, el plano que contiene a los tres puntos.

tres puntos no alineados determinan un único plano que los contiene.

Hagamos una figura de análisis:

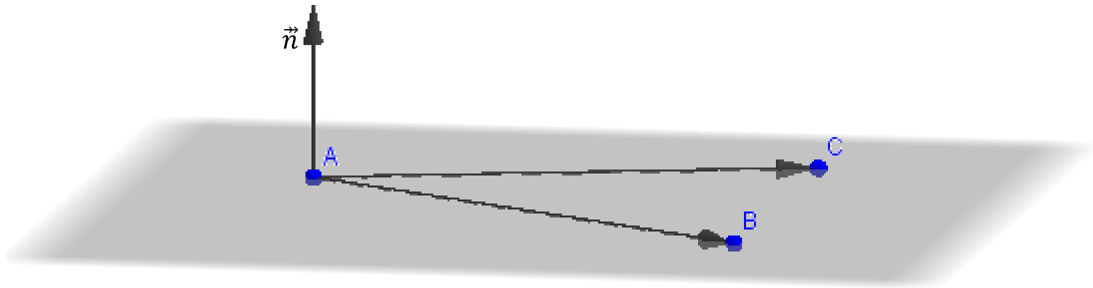


Con los tres puntos, podemos armar dos vectores, por ejemplo:

$$\overrightarrow{AB} = (-3, -2,2)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2, -3,3)$$

El vector normal debe ser perpendicular a ambos vectores



La operación que permite hallar un vector perpendicular a otros dos es el producto vectorial

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0,5,5)$$

¿Qué resultado se hubiera obtenido si A, B y C estuvieran alineados?

El vector $(0,5,5)$ es perpendicular al plano que buscamos, entonces podemos tomar $\vec{n} \ = (0,5,5)$ o cualquiera que sea paralelo a el, y escribir la ecuación del plano:

$$\alpha\text{:}\ \ 5y + 5z + d = 0 \qquad\qquad y+z+d=0$$

Para hallar d podemos reemplazar cualquiera de los tres puntos. Reemplacemos A:

$$5.5 + 5.2 + d = 0 \Rightarrow d = -35 \qquad\qquad 1.5+1.2+d=0$$

Luego:

$$5y + 5z - 35 = 0 \qquad\qquad d=-7$$

Podemos dividir por 5 ambos miembros:

$$\alpha\text{: } y + z - 7 = 0$$

El lector puede comprobar que los puntos B y C verifican esta ecuación.

Posiciones relativas entre planos

Sean π_1 y π_2 planos de vectores normales $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$ respectivamente:

$$\boldsymbol{Planos\ perpendiculares}\text{:}\quad \boldsymbol{\pi_1 \perp \pi_2 \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0}$$

$$\boldsymbol{Planos\ paralelos}\text{:}\ \boldsymbol{\pi_1 \parallel \pi_2 \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{n_1} \parallel \overrightarrow{n_2} \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{n_1} = k\overrightarrow{n_2}\ \ , k \in R}$$

Consideremos, por ejemplo:

$$\pi_1:\ 2x - 3y + z + 1 = 0 \qquad \vec{n_1} = (2,-3,1)$$

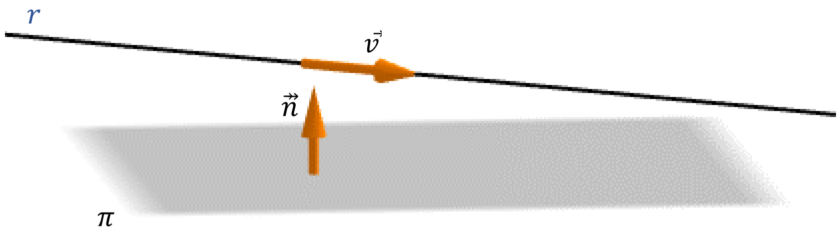
$$\pi_2:\ 4x - 6y + 2z + 5 = 0 \qquad \vec{n_2} = (4,-6,2)$$

$$\pi_3:\ 4x - 6y + 2z + 2 = 0 \qquad \vec{n_3} = (4,-6,2)$$

Como $n_2 = 2\,n_1$, podemos afirmar que π_1 y π_2 son paralelos.

Análogamente, como $n_3 = 2\,n_1$, los planos π_1 y π_3 también son paralelos. Pero además se verifica que $d_3 = 2\,d_1$, por lo cual π_1 y π_3 son coincidentes,

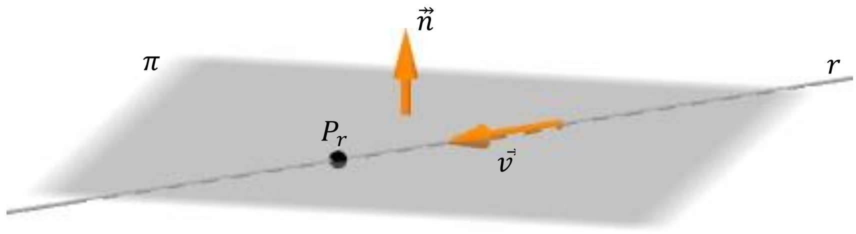
o sea $\pi_1 = \pi_3$.



¿Cómo deben ser el vector normal del plano y el vector director de la recta para que $r \parallel \pi$?

$$r \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{v} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{v}\,.\vec{n} = 0$$

¿Qué ocurre si la recta está incluida en el plano?



En este caso también se verifica que el vector director de la recta es perpendicular al normal del plano. Pero a diferencia del caso anterior, todos los puntos de la recta están en el plano. Esto nos permite afirmar que:

$$r \subset \pi \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{v} \perp \vec{n} \\ P_r \in \pi \end{cases}$$

Ejemplo

Dados el plano $\pi: x + y - z - 3 = 0$ y la recta $r: (x, y, z) = (1,0,0) + t(0,2,2)$, comprobar que la recta es paralela al plano. ¿Está incluida en el plano?

Si la recta es paralela al plano entonces su vector director $\vec{v}$ debe ser perpendicular al vector normal del plano $\vec{n}$. Luego $\vec{n}.\vec{v}$ debe ser cero:

$$(1,1,-1)(0,2,2) = 2 - 2 = 0$$

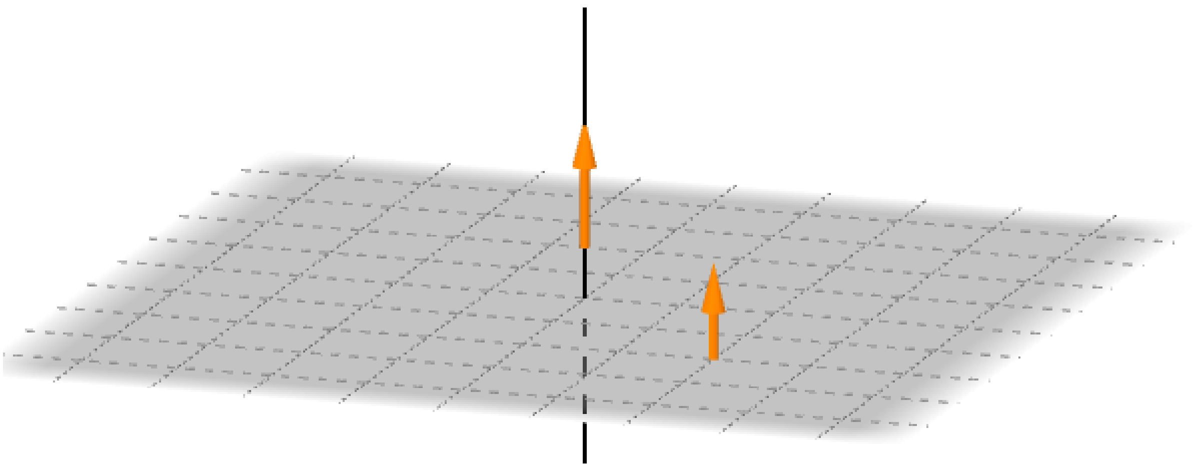
Para saber si la recta está incluida en el plano veamos si el punto $(1,0,0)$ satisface la ecuación del plano π:

$$1 + 0 - 0 - 3 = 0 \Rightarrow -2 = 0 \; Abs!$$

Como el punto no satisface la ecuación podemos concluir que r no está incluida en π.

¿Cómo deben ser el vector normal del plano y el vector director de la recta para que $r \perp \pi$?

$$r \perp \pi \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} \parallel \vec{n} \; \Leftrightarrow \quad \vec{v} = k\vec{n}$$



Ejemplo

Dado el plano π: $x - 3y + z + 1 = 0$, hallar la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por $A(1,0,3)$.

Como la recta es perpendicular al plano π entonces su vector director es paralelo al vector normal del plano. Podemos tomar:

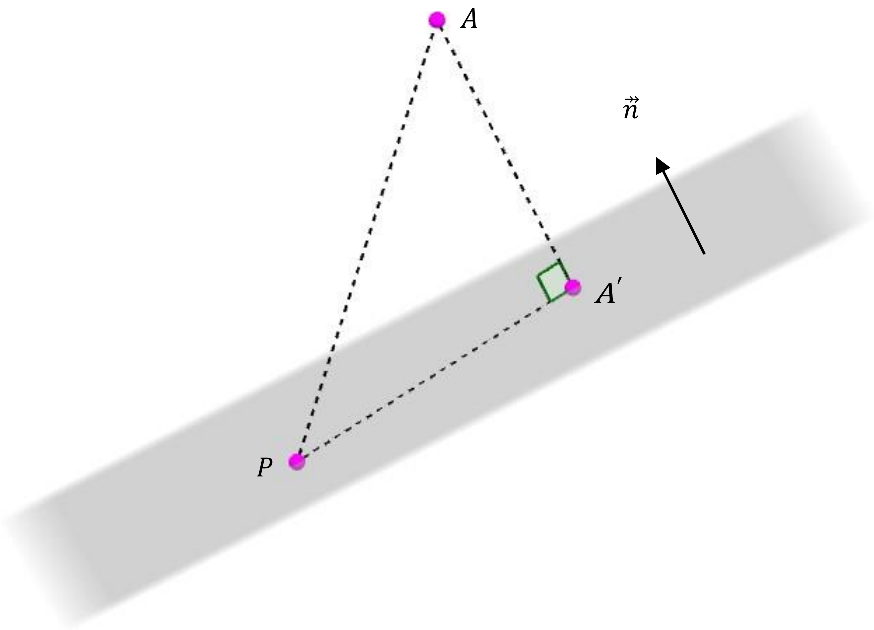
$$\vec{v} = (1, -3,1)$$

Ya tenemos el vector director y un punto de paso, luego la ecuación vectorial es:

r: $(x, y, z) = (1,0,3) + \lambda\,(1, -3,1)\,, \lambda \in \mathbb{R}$

Distancia de un punto a un plano

Dados un plano $\pi: ax + by + cz + d = 0$ y un punto $A(x_A, y_A, z_A)$
, nos proponemos calcular la distancia de A a π.



La distancia de A a π es la longitud del segmento AA', siendo A' la proyección ortogonal (perpendicular) de A sobre π.

Consideremos un punto cualquiera $P(x, y, z)$ perteneciente a π.

$$\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{proy}_{\vec{n}}(\overrightarrow{PA})$$

Entonces

$$dist(A, \pi) = \|\overrightarrow{proy}_{\vec{n}}(\overrightarrow{PA})\|$$ siendo P un

punto cualquiera del plano Veamos un ejemplo,

dados:

$$\pi: x + 2y + 3z + 1 = 0$$

$$A(0,2,1)$$