Ejercicio 1 Estudiar si existe alguna transformación lineal $f : \mathcal{P}_1[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ que cumpla:

$$f(2x-1) = -2f(3x+5) \qquad \text{y} \qquad gen\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset Im(f). \tag{1}$$

En caso de existir ¿es única?

Solución. Asumamos que existe alguna transformación lineal $f : \mathcal{P}_1[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ cumpliendo (1). Notemos que como f es una transfomación lineal resulta que

$$\begin{aligned} f(2x-1) = -2f(3x+5) \quad &\Longleftrightarrow \quad f(2x-1) + 2f(3x+5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \quad f((2x-1) + 2(3x+5)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \quad f(8x+9) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

de modo que $8x+9 \in Nu(f)$ y en consecuencia $dim(Nu(f)) \geq 1$.

Por otro lado, dado que el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente independiente resulta que la dimensión del subespacio generado por este conjunto es 2. Puesto que, por hipótesis, este subespacio está contenido en la imagen de f deducimos que $dim(Im(f)) \geq 2$.

Combinando lo obtenido tenemos que

$$dim(Nu(f)) + dim(Im(f)) \geq 1 + 2 = 3;$$

pero por el teorema de dimensión para transformaciones lineales sabemos que $dim(Nu(f)) + dim(Im(f)) = dim(\mathcal{P}_1[x]) = 2$. En consecuencia, la contradicción obtenida nos permite concluir que no existe ninguna transformación lineal $f : \mathcal{P}_1[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ cumpliendo simultáneamente las condiciones (1).

Dado que no hay existencia de transformaciones lineales cumpliendo los requisitos, la cuestión de unicidad carece de sentido. □