

# **Integrales Triples**

## **Práctica sobre**

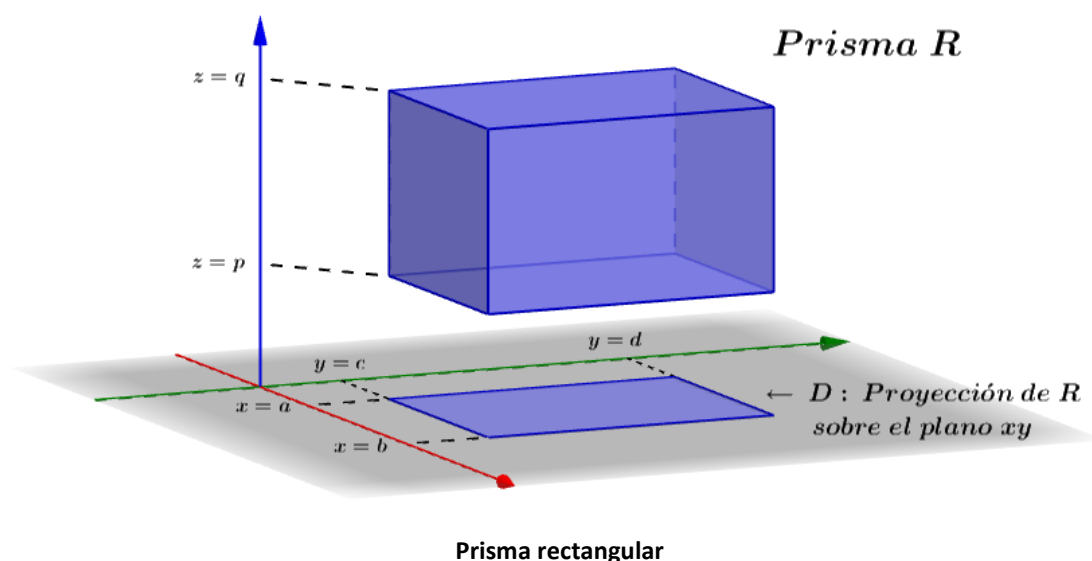
- **Integrales triples sobre prismas rectos de base rectangular.**
- **Integrales triples sobre regiones más generales.**
- **Cálculo del volumen de un sólido aplicando Integrales triples.**
- **Fórmula de cambio de variables en integrales triples.**
- **Transformación cilíndrica aplicada al cálculo de integrales triples sobre regiones con simetría cilíndrica.**
- **Transformación esférica aplicada al cálculo de integrales triples sobre regiones con simetría esférica.**

## Integrales triples sobre prismas rectos de base rectangular

**Teorema (de condición suficiente integrabilidad para funciones continuas sobre prismas rectos de base rectangular).** Sea  $f: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , una función definida en el conjunto abierto no vacío  $U$  de  $\mathbb{R}^3$ , y el prisma recto de base rectangular

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d \wedge p \leq z \leq q\} = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$$

tal que  $R \subset U$ . Se cumple que si  $f$  es continua en  $R$ , entonces  $f$  es integrable sobre  $R$ .



**Teorema (de Fubini para funciones continuas sobre prismas rectos de base rectangular).** Sea  $f: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , una función continua en el conjunto abierto no vacío  $U$  de  $\mathbb{R}^3$ , y el prisma

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d \wedge p \leq z \leq q\} = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$$

tal que  $R \subset U$ . Se cumple que el valor de la integral triple de  $f$  sobre  $R$  se puede obtener mediante integración sucesiva según la fórmula

$$I = \iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{x=a}^{x=b} \left[ \int_{y=c}^{y=d} \left( \int_{z=p}^{z=q} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right] dx$$

Así como en el caso de las integrales dobles, vale la permutación del orden de integración, que en esta situación se corresponde con seis ordenes distintos, a saber

$$I = \iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{x=a}^{x=b} \left[ \int_{y=c}^{y=d} \left( \int_{z=p}^{z=q} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right] dx$$

$$I = \iiint_R f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_{y=c}^{y=d} \left[ \int_{x=a}^{x=b} \left( \int_{z=p}^{z=q} f(x, y, z) \, dz \right) dx \right] dy$$

$$I = \iiint_R f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_{x=a}^{x=b} \left[ \int_{z=p}^{z=q} \left( \int_{y=c}^{y=d} f(x, y, z) \, dy \right) dz \right] dx$$

$$I = \iiint_R f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_{z=p}^{z=q} \left[ \int_{x=a}^{x=b} \left( \int_{y=c}^{y=d} f(x, y, z) \, dy \right) dx \right] dz$$

$$I = \iiint_R f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_{y=c}^{y=d} \left[ \int_{z=p}^{z=q} \left( \int_{x=a}^{x=b} f(x, y, z) \, dx \right) dz \right] dy$$

$$I = \iiint_R f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_{z=p}^{z=q} \left[ \int_{y=c}^{y=d} \left( \int_{x=a}^{x=b} f(x, y, z) \, dx \right) dy \right] dz$$

**Ejemplo 1.** Calcular la integral triple

$$I = \iiint_R z e^{2x+y} \, dx dy dz$$

Sobre el prisma rectangular

$$R = [0,3] \times [1,2] \times [1,3]$$

Integrando en el orden  $dz dy dx$ , se tiene

$$I = \iiint_R z e^{2x+y} \, dx dy dz = \int_{x=0}^{x=3} \left( \int_{y=1}^{y=2} e^{2x+y} \left( \int_{z=1}^{z=3} z \, dz \right) dy \right) dx$$

$$I = \int_{x=0}^{x=3} \left( \int_{y=1}^{y=2} e^{2x+y} \, dy \right) dx \left( \int_{z=1}^{z=3} z \, dz \right)$$

$$I = \left( \int_{x=0}^{x=3} e^{2x} \, dx \right) \left( \int_{y=1}^{y=2} e^y \, dy \right) \left( \int_{z=1}^{z=3} z \, dz \right)$$

$$I = \int_{x=0}^{x=3} e^{2x} \left( \int_{y=1}^{y=2} e^y dy \right) dx \left( \int_{z=1}^{z=3} z dz \right)$$

$$I = \left( \int_{x=0}^{x=3} e^{2x} dx \right) \left( \int_{y=1}^{y=2} e^y dy \right) \left( \int_{z=1}^{z=3} z dz \right)$$

$$I = \left( \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_{x=0}^{x=3} \right) \left( e^y \Big|_{y=1}^{y=2} \right) \left( \frac{z^2}{2} \Big|_{z=1}^{z=3} \right)$$

$$I = \frac{1}{2} (e^6 - 1)(e^2 - e) \left( \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} (e^6 - 1)(e^2 - e) 4 = 2(e^6 - 1)(e^2 - e)$$

$$I = \iiint_R z e^{2x+y} dx dy dz = 2(e^6 - 1)(e^2 - e)$$

**Ejemplo 2.** Calcular la integral triple

$$I = \iiint_R \cos(y - z) dx dy dz$$

Sobre el prisma rectangular

$$R = \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \times \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right] \times \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$$

Integrando en el orden  $dz dy dx$ , se tiene

$$I = \iiint_R \cos(y - z) dx dy dz = \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \left( \int_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \left( \int_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}} \cos(y - z) dz \right) dy \right) dx$$

$$I = \iiint_R \cos(y - z) dx dy dz = \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \left( \int_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \left( -\operatorname{sen}(y - z) \Big|_{z=0}^{z=\frac{\pi}{2}} \right) dy \right) dx$$

$$I = \iiint_R \cos(y - z) \, dx dy dz = \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \left( \int_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \left( -\operatorname{sen}\left(y - \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}(y) \right) dy \right) dx$$

$$I = \iiint_R \cos(y - z) \, dx dy dz = \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \left( \left( \cos\left(y - \frac{\pi}{2}\right) - \cos(y) \right) \Big|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} \right) dx$$

$$I = \iiint_R \cos(y - z) \, dx dy dz = \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \left( \left( \cos(0) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) - \left( \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0) \right) \right) dx$$

$$I = \iiint_R \cos(y - z) \, dx dy dz = \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} ((1 - 0) - (0 - 1)) \, dx = \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} 2 \, dx$$

$$I = \iiint_R \cos(y - z) \, dx dy dz = 2 \int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} dx = 2 \left( x \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} \right) = 2 \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi$$

Es decir que

$$I = \iiint_R \cos(y - z) \, dx dy dz = \pi$$

## Integrales triples sobre regiones más generales

**Definición (Región  $xy$  –proyectable).** Sean las funciones reales de dos variables

$$\varphi_1: U \rightarrow \mathbb{R}/z = \varphi_1(x, y) \quad \text{y} \quad \varphi_2: U \rightarrow \mathbb{R}/z = \varphi_2(x, y)$$

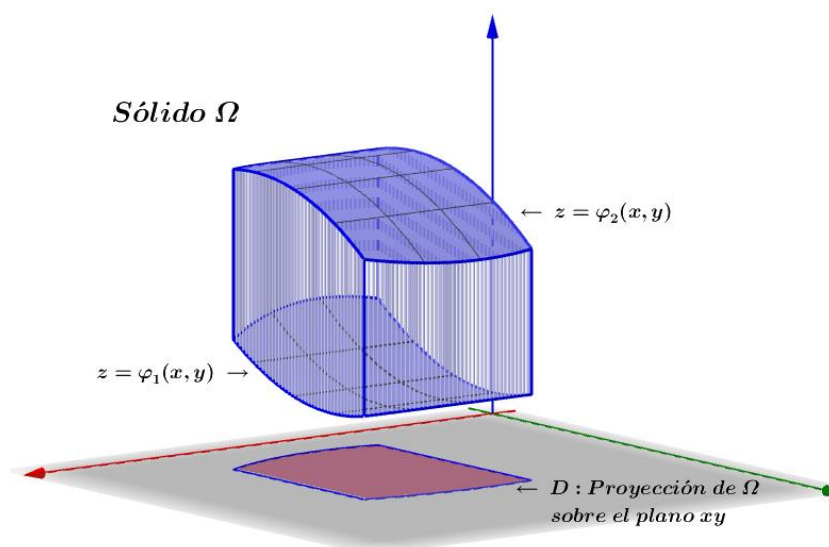
continuas en todo el conjunto abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  y tales que

$$\varphi_1(x, y) \leq \varphi_2(x, y), \quad \forall (x, y) \in D$$

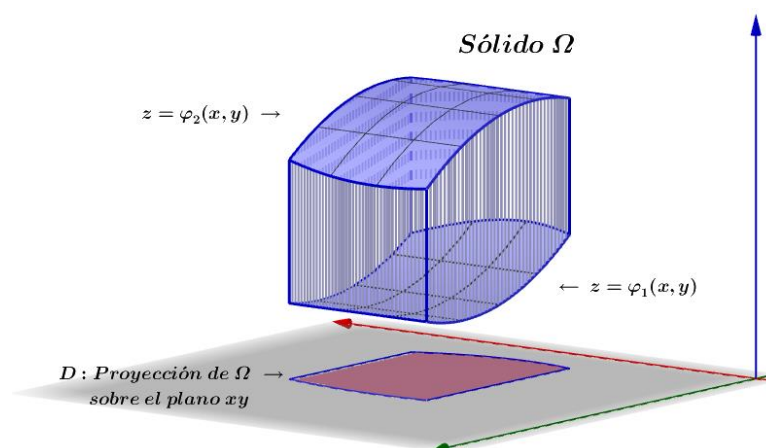
Siendo  $D$  una región del plano  $xy$ . Se llama *región  $xy$  –proyectable*, a la región acotada  $\Omega \subset U$ , definida como

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y) \wedge (x, y) \in D\}$$

La región  $D$  del plano  $xy$  de la que se habla en la definición anterior es una región del tipo I, tipo II o la unión de este tipo de regiones, tal como las que se han considerado a lo largo del estudio de las integrales dobles.



Región  $xy$  –proyectable  $\Omega$



Región  $xy$  –proyectable  $\Omega$

**Teorema (de Fubini para funciones continuas sobre regiones  $xy$  –proyectables).** Sea

$$f: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

una función continua en el conjunto abierto no vacío  $U$  de  $\mathbb{R}^3$  y la región  $xy$  –proyectable

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y) \wedge (x, y) \in D\}$$

Totalmente incluida en  $U$ . El valor de la integral triple de  $f$  sobre  $\Omega$  se puede obtener mediante integración sucesiva según la fórmula

$$I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_D \left( \int_{z=\varphi_1(x,y)}^{z=\varphi_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx \, dy$$

El resultado establece que el valor de la integral triple se puede obtener mediante integración sucesiva o iterada, integrando respecto de la variable  $z$  en el primer momento, según los límites

$$\varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)$$

Y finalmente calcular una integral doble de lo que resulta de esta primera operación, sobre la región  $D$  del plano  $xy$ , es decir, sobre la proyección del sólido  $\Omega$  sobre el plano  $xy$ .

Nótese que el resultado de la primera integración sobre la variable  $z$  resulta ser una función, a lo sumo, de las variables  $xy$ . Utilizando la escritura

$$\omega(x, y) = \int_{z=\varphi_1(x,y)}^{z=\varphi_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz$$

Se tienen entonces que la integral triple de  $f(x, y, z)$  sobre el sólido  $\Omega$  es exactamente igual a la integral doble de  $\omega(x, y)$  sobre la región  $D$ , esto es

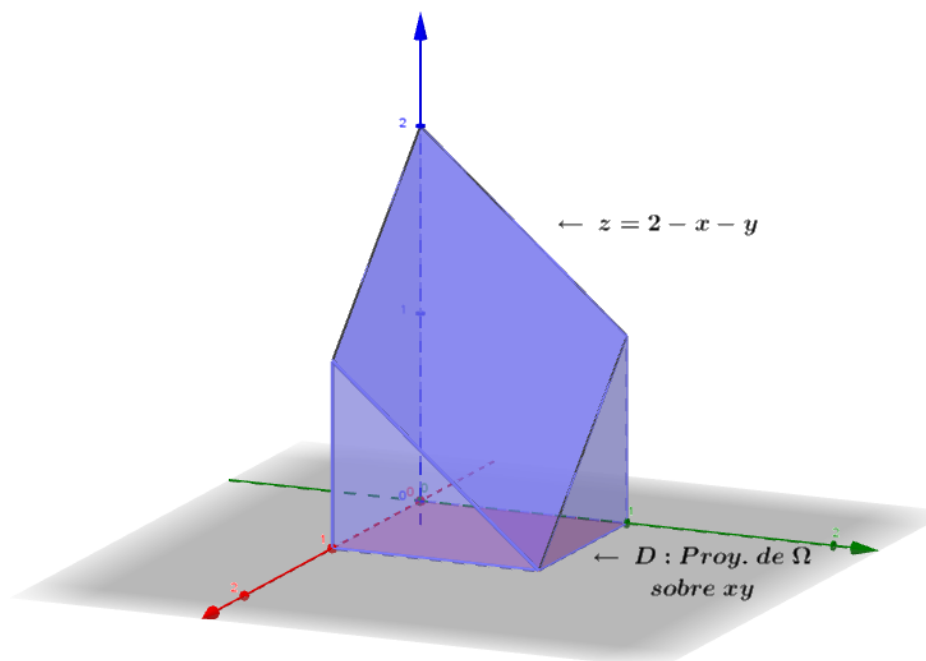
$$I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_D \omega(x, y) \, dx \, dy$$

**Ejemplo 3.** Calcular la integral triple

$$I = \iiint_{\Omega} 2z \, dx \, dy \, dz$$

Sobre el sólido

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 0 \leq z \leq 2 - x - y \wedge (x, y) \in [0,1] \times [0,1]\}$$



**Representación gráfica del sólido  $\Omega$**

Se tiene entonces

$$I = \iiint_{\Omega} 2z \, dx \, dy \, dz = \iint_D \left( \int_{z=0}^{z=2-x-y} 2z \, dz \right) dx \, dy$$

$$I = \iint_D \left( z^2 \Big|_{z=0}^{z=2-x-y} \right) dx \, dy = I = \iint_D (2-x-y)^2 \, dx \, dy$$

Teniendo en cuenta que

$$D = [0,1] \times [0,1]: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Aplicando la escritura tipo I, queda

$$I = \int_{x=0}^{x=1} \left( \int_{y=0}^{y=1} (2-x-y)^2 \, dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=1} \left( -\frac{(2-x-y)^3}{3} \Big|_{y=0}^{y=1} \right) dx$$

$$I = \int_{x=0}^{x=1} \left( \left( -\frac{(1-x)^3}{3} \right) + \left( -\frac{(2-x)^3}{3} \right) \right) dx$$

$$I = \left( \frac{(1-x)^4}{12} - \frac{(2-x)^4}{12} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \left( \frac{0^4}{12} - \frac{1^4}{12} \right) - \left( \frac{1^4}{12} - \frac{2^4}{12} \right) = -\frac{1}{12} - \frac{1}{12} + \frac{16}{12}$$



$$I = -\frac{1}{12} - \frac{1}{12} + \frac{16}{12} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$$

Esto quiere decir que la integral triple de  $f$  sobre  $\Omega$  es

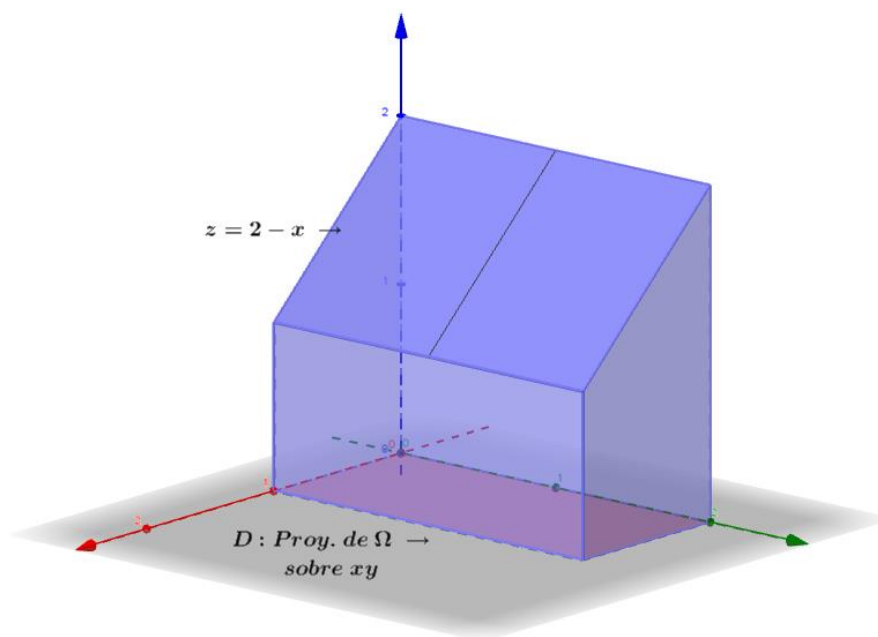
$$I = \iiint_{\Omega} 2z \, dx dy dz = \frac{7}{6}$$

**Ejemplo 4.** Calcular la integral triple

$$I = \iiint_{\Omega} (x + z) \, dx dy dz$$

Sobre el sólido

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 - x \wedge (x, y) \in [0, 1] \times [0, 2]\}$$



**Representación gráfica del sólido  $xy$  –proyectable  $\Omega$**

Se tiene

$$I = \iiint_{\Omega} (x + z) \, dx dy dz = \iint_D \left( \int_{z=0}^{z=2-x} (x + z) \, dz \right) dx dy$$

$$I = \iint_D \left( \int_{z=0}^{z=2-x} (x + z) \, dz \right) dx dy = \iint_D \left( \frac{(x + z)^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=2-x} \right) dx dy$$

$$I = \iint_D \left( \frac{(x+z)^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=2-x} \right) dx dy = \iint_D \left( \left( \frac{(x+2-x)^2}{2} \right) - \left( \frac{(x+0)^2}{2} \right) \right) dx dy$$

$$I = \iint_D \left( \left( \frac{(x+2-x)^2}{2} \right) - \left( \frac{(x+0)^2}{2} \right) \right) dx dy = \iint_D \left( 2 - \frac{x^2}{2} \right) dx dy$$

Teniendo en cuenta ahora que

$$D = [0,1] \times [0,2]$$

Adoptando la escritura tipo I, se tiene

$$I = \int_{x=0}^{x=1} \left( 2 - \frac{x^2}{2} \right) \left( \int_{y=0}^{y=2} dy \right) dx = \left( \int_{x=0}^{x=1} \left( 2 - \frac{x^2}{2} \right) dx \right) \left( \int_{y=0}^{y=2} dy \right)$$

$$I = \left( 2x - \frac{x^3}{6} \Big|_{x=0}^{x=1} \right) \left( y \Big|_{y=0}^{y=2} \right) = \left( 2 - \frac{1}{6} \right) (2) = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

En definitiva

$$I = \iiint_{\Omega} (x+z) dx dy dz = \frac{11}{3}$$

En la definición de región  $xy$  –proyectable las letras son completamente intercambiables y se puede así considerar otros tipos de regiones proyectables. A saber, las regiones  $xz$  –proyectables y  $yz$  –proyectable.

Y así como en una región  $xy$  –proyectable se integra primero respecto de la variable  $z$ . O sea, según dos órdenes posibles

$$dz dy dx \quad dz dx dy$$

En una región  $xz$  –proyectable primero se integra respecto de  $y$ , es decir, según los órdenes

$$dy dz dx \quad dy dx dz$$

y en una región  $yz$  –proyectable, se integra primero respecto de  $x$ , esto es, con los dos órdenes posibles

$$dx dz dy \quad dx dy dz$$

En el ejemplo anterior, calcular la integral triple

$$I = \iiint_{\Omega} (x + z) \, dx \, dy \, dz$$

Sobre el sólido

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 - x \wedge (x, y) \in [0, 1] \times [0, 2]\}$$

Integrando primero respecto de la variable  $y$ , es necesario conseguir la escritura del sólido  $\Omega$  correspondiente a una región  $xz$  –proyectable. Para esto, hay que determinar la proyección de  $\Omega$  sobre el plano  $xz$ , llámese por ejemplo  $D^*$ , y luego determinar las superficies

$$S_1: y = \psi_1(x, z) \quad S_2: y = \psi_2(x, z)$$

Que limitan lateralmente a  $\Omega$ .

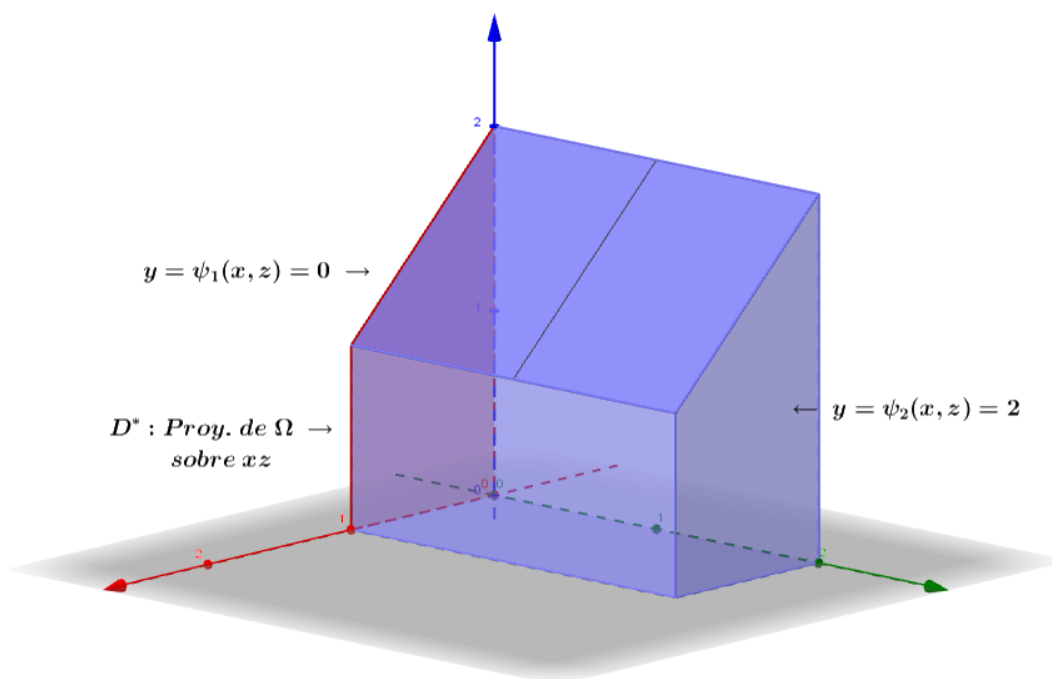
La escritura será de este modo

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \psi_1(x, z) \leq y \leq \psi_2(x, z) \wedge (x, z) \in D^*\}$$

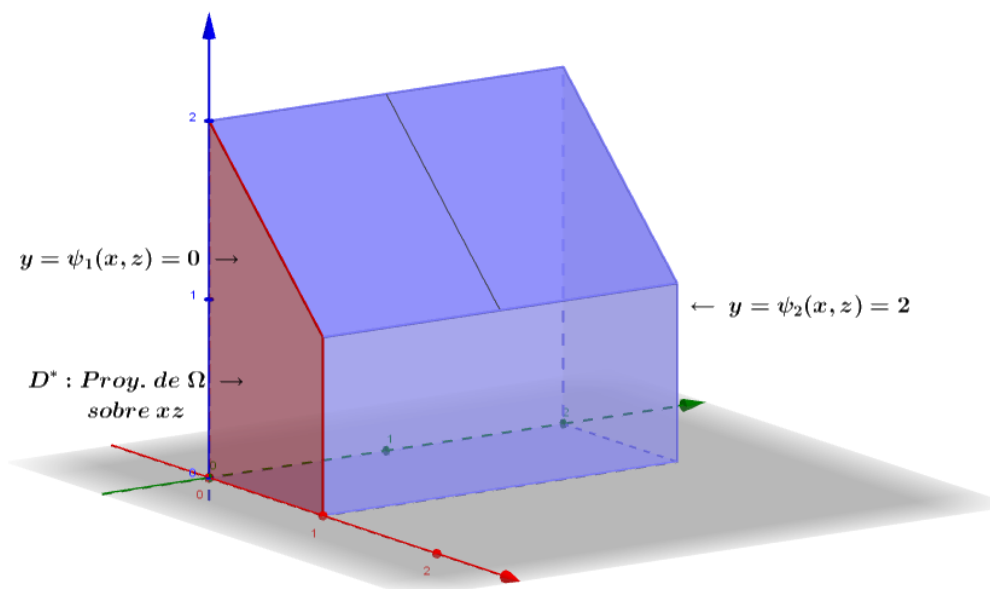
En el caso particular del sólido  $\Omega$  de este ejercicio, se tiene

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq 2 - x \wedge (x, z) \in D^*\}$$

Siendo  $D^*$ , el cuadrilátero de vértices  $(0,0,0)$ ,  $(1,0,0)$ ,  $(1,0,1)$  y  $(0,0,2)$



**El sólido  $\Omega$  es una región  $xz$  –proyectable**



**El sólido  $\Omega$  es una región  $xz$  –proyectable**

Ahora, adoptando la escritura tipo I del cuadrilátero  $D^*$ , esto es

$$D^*: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 2 - x \end{cases}$$

Resulta entonces

$$I = \iiint_{\Omega} (x + z) \, dx \, dy \, dz = \int_{x=0}^{x=1} \left( \int_{z=0}^{z=2-x} \left( \int_{y=0}^{y=2} (x + z) \, dy \right) dz \right) dx$$

$$I = \int_{x=0}^{x=1} \left( \int_{z=0}^{z=2-x} (x + z) \left( \int_{y=0}^{y=2} dy \right) dz \right) dx$$

$$I = \left( \int_{x=0}^{x=1} \left( \int_{z=0}^{z=2-x} (x + z) \, dz \right) dx \right) \left( \int_{y=0}^{y=2} dy \right)$$

$$I = \left( \int_{x=0}^{x=1} \left( \frac{(x + z)^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=2-x} \right) dx \right) \left( y \Big|_{y=0}^{y=2} \right)$$

$$I = \left( \int_{x=0}^{x=1} \left( \left( \frac{(x + 2 - x)^2}{2} \right) - \left( \frac{(x + 0)^2}{2} \right) \right) dx \right) 2$$

$$I = 2 \int_{x=0}^{x=1} \left( 2 - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2 \left( 2x - \frac{x^3}{6} \Big|_{x=0}^{x=1} \right) = 2 \left( 2 - \frac{1}{6} \right) = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

Es decir que resulta

$$I = \iiint_{\Omega} (x + z) \, dx \, dy \, dz = \frac{11}{3}$$

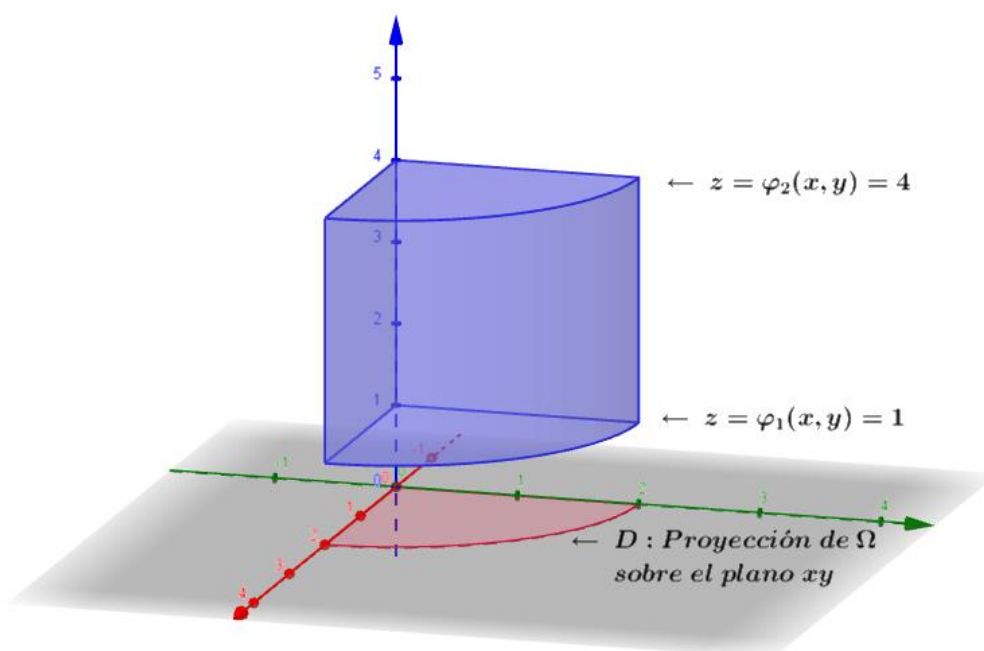
Tal como se obtuvo al calcular la integral en el orden  $dz \, dy \, dx$ .

**Ejemplo 5.** Calcular la integral triple

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{(x^2 + y^2)}{z} \, dx \, dy \, dz$$

Sobre el sólido

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq z \leq 4 \wedge x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$$



**Representación gráfica del sólido  $xy$  –proyectable  $\Omega$**

Se tiene

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{(x^2 + y^2)}{z} \, dx \, dy \, dz$$

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \frac{1}{z} \, dx \, dy \, dz$$

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) \left( \int_{z=1}^{z=4} \frac{1}{z} dz \right) dx dy$$

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) \left( \int_{z=1}^{z=4} \frac{1}{z} dz \right) dx dy$$

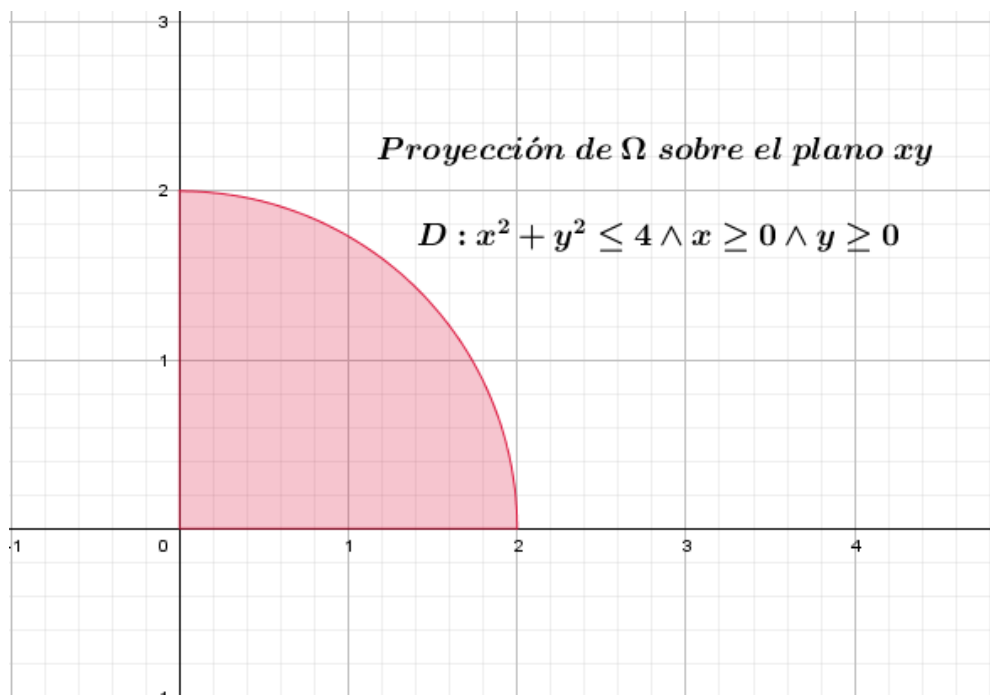
$$I = \iiint_{\Omega} \frac{(x^2 + y^2)}{z} dx dy dz = \iint_D (x^2 + y^2) \left( \ln(z) \Big|_{z=1}^{z=4} \right) dx dy$$

$$I = \iint_D \frac{(x^2 + y^2)}{z} dx dy dz = \iint_D (x^2 + y^2) (\ln(4) - \ln(1)) dx dy$$

$$I = \iint_D \frac{(x^2 + y^2)}{z} dx dy dz = \ln(4) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

Ahora, teniendo en cuenta que la proyección del sólido  $\Omega$  sobre el plano  $xy$  es una región circular, en efecto, se tiene

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$$



Representación gráfica de la región  $D$ , proyección del sólido  $\Omega$  sobre el plano  $xy$

para calcular la integral doble final, se aplica la transformación polar.

$$T: D' \rightarrow \mathbb{R}^2: T(r, \theta) = (x(r, \theta), y(r, \theta)) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

Siendo

$$D' = \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq r \leq 2 \wedge 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

Resulta entonces

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{(x^2 + y^2)}{z} dx dy dz = \ln(4) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy =$$

$$x^2 + y^2 = (r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2 = r^2 \overbrace{((\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2)}^1 = r^2$$

$$= \ln(4) \iint_{D'} r^2 \cdot |r| dr d\theta$$

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{(x^2 + y^2)}{z} dx dy dz = \ln(4) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \ln(4) \iint_{D'} r^3 dr d\theta$$

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{(x^2 + y^2)}{z} dx dy dz = \ln(4) \left( \int_{r=0}^{r=2} r^3 dr \right) \left( \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} d\theta \right)$$

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{(x^2 + y^2)}{z} dx dy dz = \ln(4) \left( \frac{r^4}{4} \Big|_{r=0}^{r=2} \right) \left( \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{(x^2 + y^2)}{z} dx dy dz = \ln(4) \left( \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right) \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \ln(4) \cdot 4 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{(x^2 + y^2)}{z} dx dy dz = \ln(4) \cdot 2\pi$$

Entonces, se obtiene el valor de la integral triple

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{(x^2 + y^2)}{z} dx dy dz = 2\pi \cdot \ln(4)$$

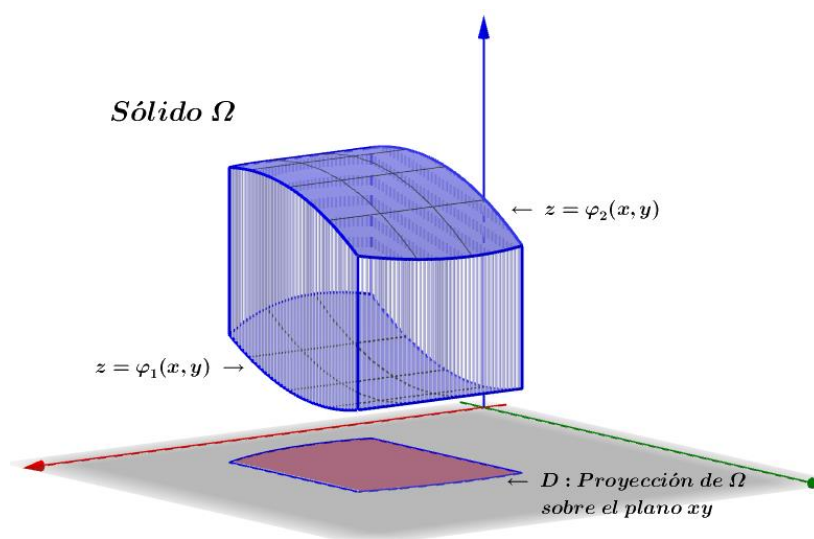
## Cálculo del volumen de un sólido aplicando integrales triples

Del estudio realizado sobre integrales dobles, se sabe que el volumen del sólido

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y) \wedge (x, y) \in D\}$$

Está dado por la siguiente integral doble

$$vol(\Omega) = \iint_D [\varphi_2(x, y)] dx dy - \iint_D [\varphi_1(x, y)] dx dy = \iint_D [\varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y)] dx dy$$



**Representación gráfica del sólido  $\Omega$**

Ahora bien, esta integral doble se puede escribir en la forma

$$vol(\Omega) = \iint_D [\varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y)] dx dy$$

$$vol(\Omega) = \iint_D \left( z \Big|_{z=\varphi_1(x,y)}^{z=\varphi_2(x,y)} \right) dx dy$$

O de manera equivalente

$$vol(\Omega) = \iint_D \left( \int_{z=\varphi_1(x,y)}^{z=\varphi_2(x,y)} 1 dz \right) dx dy$$

Esto es



$$\text{vol}(\Omega) = \iiint_{\Omega} 1 \, dx dy dz$$

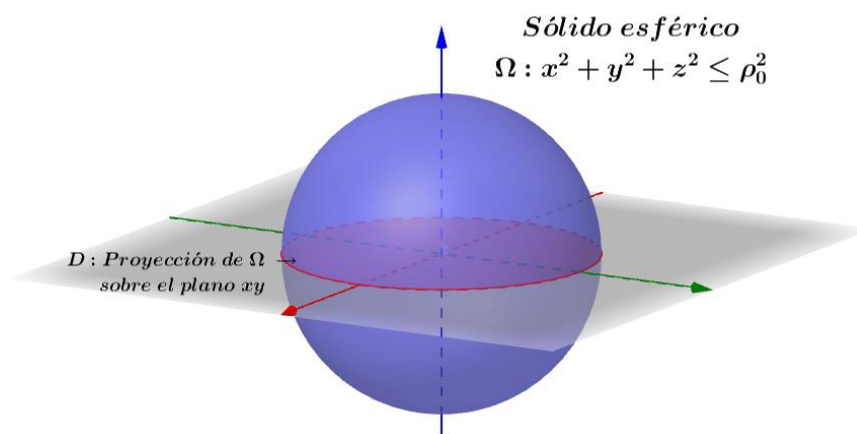
Es decir que el volumen del sólido  $\Omega$  es exactamente igual a la integral triple del campo escalar constante

$$f(x, y, z) = 1$$

Sobre el mismo sólido  $\Omega$ .

**Ejemplo 6.** Calcular el volumen del sólido esférico limitado por la esfera de centro en el origen y radio  $\rho_0$ , es decir

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq \rho_0^2\}$$



Representación gráfica del sólido  $\Omega$

En principio, se debe seleccionar un orden de integración. Por ejemplo

$$dz dy dx$$

Ahora, para obtener los límites de integración de  $z$ , es necesario determinar las ecuaciones de las superficies que limitan al sólido  $\Omega$ , inferior y superiormente. Entonces, de la ecuación de la superficie que limita a  $\Omega$  se tiene

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho_0^2$$

$$z^2 = \rho_0^2 - x^2 - y^2$$

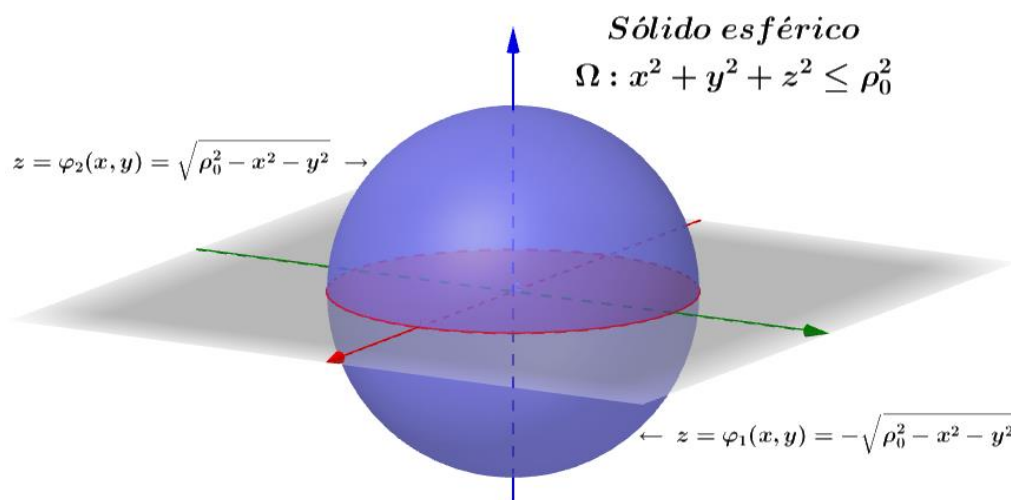
$$\sqrt{z^2} = \sqrt{\rho_0^2 - x^2 - y^2}$$

$$|z| = \sqrt{\rho_0^2 - x^2 - y^2}$$

Así, resulta que

$$z = \varphi_1(x, y) = -\sqrt{\rho_0^2 - x^2 - y^2}$$

$$z = \varphi_2(x, y) = \sqrt{\rho_0^2 - x^2 - y^2}$$



Superficies inferior y superior que limitan a  $\Omega$

Luego

$$\text{vol}(\Omega) = \iiint_{\Omega} 1 \, dx dy dz$$

Donde se adopta la escritura

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -\sqrt{\rho_0^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{\rho_0^2 - x^2 - y^2} \wedge (x, y) \in D \right\}$$

Siendo

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \rho_0^2\}$$

Así que

$$\text{vol}(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iint_D \left( \int_{z=-\sqrt{\rho_0^2 - x^2 - y^2}}^{z=\sqrt{\rho_0^2 - x^2 - y^2}} 1 \, dz \right) dy dx$$

$$\text{vol}(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iint_D \left( z \Big|_{z=-\sqrt{\rho_0^2 - x^2 - y^2}}^{z=\sqrt{\rho_0^2 - x^2 - y^2}} \right) dy dx$$

$$\text{vol}(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iint_D \left( \left( \sqrt{\rho_0^2 - x^2 - y^2} \right) - \left( -\sqrt{\rho_0^2 - x^2 - y^2} \right) \right) dy dx$$

$$vol(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz = 2 \iint_D \sqrt{\rho_0^2 - x^2 - y^2} dy dx$$

Y así como en el Ejemplo 5, para calcular la integral doble final, se aplica la transformación polar

$$T: D' \rightarrow \mathbb{R}^2: T(r, \theta) = (x(r, \theta), y(r, \theta)) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

Siendo

$$D' = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq r \leq \rho_0 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Así

$$vol(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz = 2 \iint_D \sqrt{\rho_0^2 - (x^2 + y^2)} dy dx = 2 \iint_{D'} \sqrt{\rho_0^2 - r^2} \cdot |r| dr d\theta$$

$$vol(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz = 2 \iint_{D'} (\rho_0^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \cdot r dr d\theta$$

$$vol(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz = 2 \iint_{D'} r \cdot (\rho_0^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} dr d\theta$$

$$vol(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz = 2 \left( \int_{r=0}^{r=\rho_0} r \cdot (\rho_0^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} dr \right) \left( \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \right)$$

$$vol(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz = 2 \left( -\frac{1}{3} (\rho_0^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{r=0}^{r=\rho_0} \right) \left( \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right)$$

$$vol(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz = 2 \left( -\frac{1}{3} (\rho_0^2 - \rho_0^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} (\rho_0^2 - 0^2)^{\frac{3}{2}} \right) (2\pi - 0)$$

$$vol(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz = 2 \left( \frac{1}{3} (\rho_0^2)^{\frac{3}{2}} \right) 2\pi$$

$$vol(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \frac{4}{3} \pi \rho_0^3$$

Es decir que el volumen de la esfera de radio  $\rho$  es

$$vol(\Omega) = \frac{4}{3} \pi \rho_0^3$$

## Fórmula de cambio de variables en integrales triples

**Teorema (Cambio de variables en integrales triples).** Sea  $f: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , una función continua en el conjunto abierto no vacío  $U$  de  $\mathbb{R}^3$ , y sea la región  $\Omega \subset U$ . Sea, además, la función

$$T: V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2: T(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

que aplica de manera inyectiva (salvo en conjuntos de medida nula) la región  $\Omega' \subset V$  del espacio  $uvw$ , en la región  $\Omega$  del espacio  $xyz$ . Supóngase que  $T$  es de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $V$  y que el jacobiano de  $T$

$$J_T(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial x}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial x}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial y}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial y}{\partial w}(u, v, w) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u, v, w) & \frac{\partial z}{\partial v}(u, v, w) & \frac{\partial z}{\partial w}(u, v, w) \end{vmatrix} \neq 0$$

en  $\Omega'$  (salvo en conjuntos de medida nula). Se tiene así, la fórmula de cambio de variables en integrales dobles

$$I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\Omega'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \, du \, dv \, dw$$

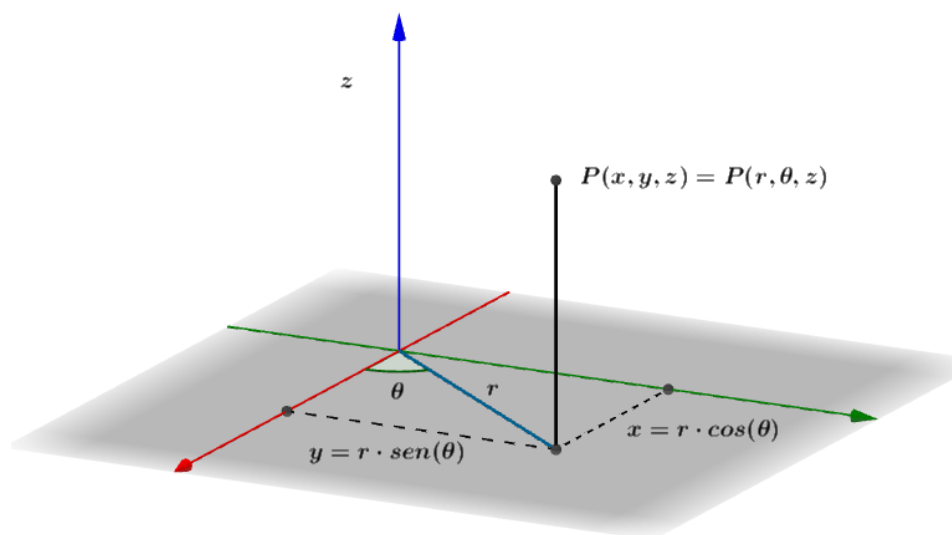
Este resultado indica cómo obtener el valor de la integral triple, a partir de aplicar un cambio de variables según una cierta transformación que verifique las condiciones establecidas.

## Transformación cilíndrica

La transformación cilíndrica define una posición  $P$  del espacio a partir de las tres coordenadas

$$(r, \theta, z)$$

Según como se muestra en la siguiente figura



### Interpretación geométrica de las coordenadas cilíndricas

Las tres coordenadas  $r, \theta$  y  $z$  son las llamadas coordenadas cilíndricas asociadas a la posición  $P$ , según el sistema cilíndrico.

La definición de la transformación cilíndrica es la siguiente

$$T: V \rightarrow \mathbb{R}^3: T(r, \theta, z) = (x(r, \theta, z), y(r, \theta, z), z(r, \theta, z)) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$$

Donde

$$V = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3: r \geq 0 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge z \in \mathbb{R}\}$$

Ciertamente no se trata de una transformación inyectiva en todo  $V$ , pero pierde la inyectividad en conjuntos de medida nula.

En el caso de las integrales triples, esta transformación es útil cuando el sólido de integración posee simetría cilíndrica. En una situación tal, la proyección  $D$  del sólido  $\Omega$  sobre el plano, por ejemplo, el  $xy$ , es una región circular, la que será recorrida a partir de las coordenadas  $r$  y  $\theta$ . Luego, la variación de  $z$ , deberá tomarse según las inecuaciones

$$\varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)$$

Pero reemplazando las fórmulas de transformación, es decir

$$x(r, \theta, z) = r \cos(\theta)$$

$$y(r, \theta, z) = r \sin(\theta)$$

$$z(r, \theta, z) = z$$

Resulta así, la desigualdad que muestra la limitación de  $z$  según las coordenadas cilíndricas

$$\varphi_1(x(r, \theta, z), y(r, \theta, z)) \leq z(r, \theta, z) \leq \varphi_2(x(r, \theta, z), y(r, \theta, z))$$

$$\varphi_1(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \leq z(r, \theta, z) \leq \varphi_2(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

### Jacobiano de la transformación cilíndrica

Como se muestra en la fórmula de cambio de variables en integrales triples, así como ocurría en las integrales dobles, interviene el jacobiano de la transformación. Para el caso de la transformación cilíndrica

$$T: V \rightarrow \mathbb{R}^3: T(r, \theta, z) = (x(r, \theta, z), y(r, \theta, z), z(r, \theta, z)) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$$

se tiene

$$J_T(r, \theta, z) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix}_{(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Es decir que el jacobiano de esta transformación es

$$J_T(r, \theta, z) = r$$

**Ejemplo 7.** Calcular la integral triple

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{(x^2 + y^2)}{z} dx dy dz$$

Sobre el sólido

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: 1 \leq z \leq 4 \wedge x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$$

Aplicando la transformación cilíndrica.

Aplicar la transformación cilíndrica, significa aplicar las fórmulas de transformación

$$x(r, \theta, z) = r \cos(\theta)$$

$$y(r, \theta, z) = r \sin(\theta)$$

$$z(r, \theta, z) = z$$

Ahora, para el cálculo de la integral triple hay que considerar el correspondiente jacobiano, como así también el sólido  $\Omega'$  asociado a l sólido  $\Omega$  inicial. Respecto del jacobiano, del apartado anterior, se sabe que

$$J_T(r, \theta, z) = r$$

Con relación a la región  $\Omega'$  asociada, los rangos de variación de  $r$  y  $\theta$  se obtienen a partir de la proyección de  $\Omega$  sobre el plano  $xy$ , tal como en la transformación polar. Resulta entonces que

$$0 \leq r \leq 2$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Y como se mencionó más arriba, para la variable  $z$ , ocurre que

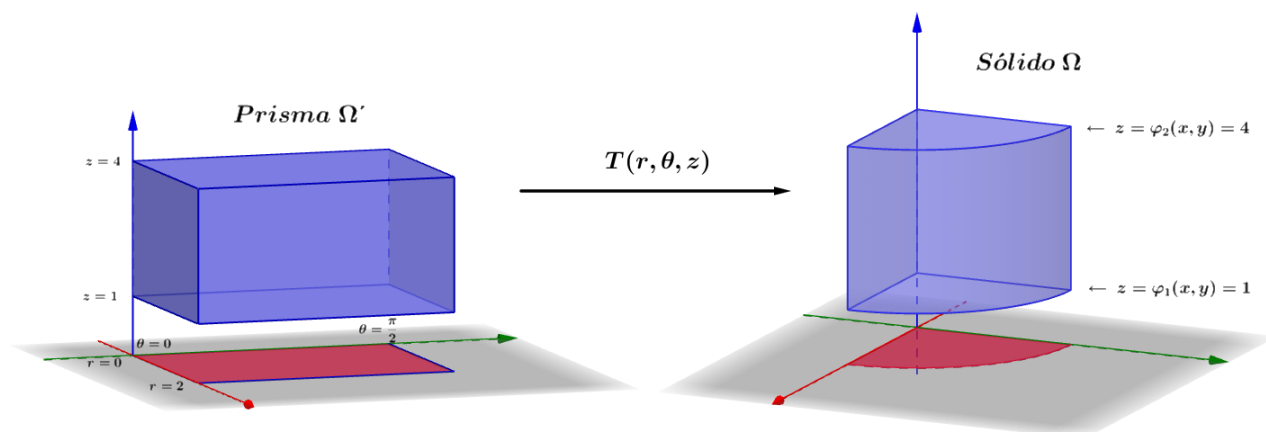
$$\varphi_1(x(r, \theta, z), y(r, \theta, z)) \leq z(r, \theta, z) \leq \varphi_2(x(r, \theta, z), y(r, \theta, z))$$

Pero como en este caso las funciones  $z = \varphi_1(x, y) = 1$  y  $z = \varphi_2(x, y) = 4$  son constantes, queda

$$1 \leq z \leq 4$$

Así, el sólido  $\Omega'$  asociado se define como

$$\Omega' = \left\{ (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 2 \wedge 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \wedge 1 \leq z \leq 4 \right\}$$



**La función  $T(r, \theta, z)$  transforma el prisma  $\Omega'$  del espacio  $r\theta z$  en el sólido  $\Omega$  de espacio  $xyz$**

Aplicando la fórmula de cambio de variables en integrales triples, resulta

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{(x^2 + y^2)}{z} dx dy dz = \iiint_{\Omega'} \frac{((r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2)}{z} \cdot \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| dr d\theta dz$$

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{(x^2 + y^2)}{z} dx dy dz = \iiint_{\Omega'} \frac{r^2}{z} \cdot |r| dr d\theta dz$$

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{(x^2 + y^2)}{z} dx dy dz = \iiint_{\Omega'} \frac{r^3}{z} dr d\theta dz$$

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{(x^2 + y^2)}{z} dx dy dz = \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left( \int_{r=0}^{r=2} \left( \int_{z=1}^{z=4} \frac{r^3}{z} dz \right) dr \right) d\theta$$

Al existir la posibilidad de separar las variables y ser los límites constantes, se puede escribir

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{(x^2 + y^2)}{z} dx dy dz = \left( \int_{r=0}^{r=2} r^3 dr \right) \left( \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} d\theta \right) \left( \int_{z=1}^{z=4} \frac{1}{z} dz \right)$$

Entonces, tal como en el Ejemplo 5, se verifica

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{(x^2 + y^2)}{z} dx dy dz = 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \ln(4) = 2\pi \cdot \ln(4)$$

O sea

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{(x^2 + y^2)}{z} dx dy dz = 2\pi \cdot \ln(4)$$

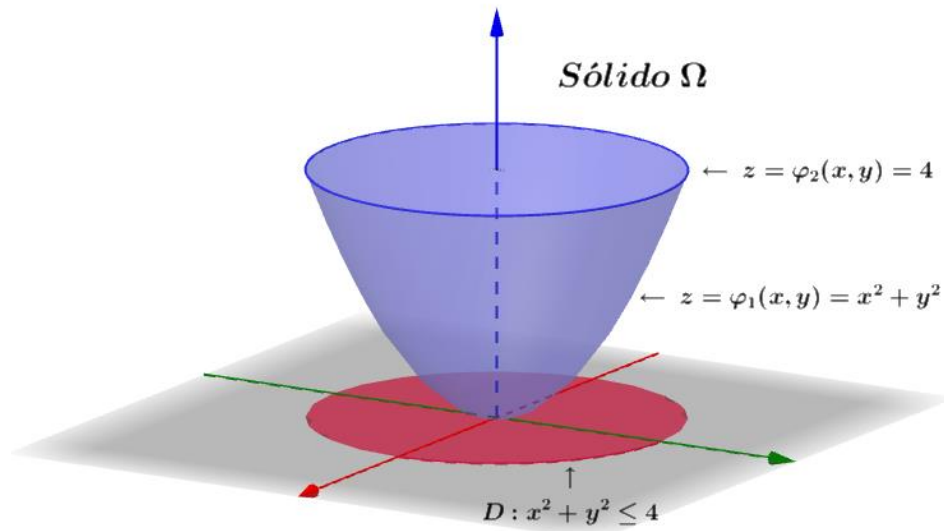
**Ejemplo 8.** Calcular la integral triple

$$I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$$

Sobre el sólido

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$$





**Representación gráfica del sólido  $\Omega$  sobre el que se ha de calcular la integral**

Aplicar la transformación cilíndrica significa sustituir según las fórmulas de transformación

$$x(r, \theta, z) = r \cos(\theta)$$

$$y(r, \theta, z) = r \sin(\theta)$$

$$z(r, \theta, z) = z$$

Donde se tiene que

$$J_T(r, \theta, z) = r$$

A su vez, dado que la proyección del sólido  $\Omega$  sobre el plano  $xy$  es el círculo

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Se tiene que el rango de variación de las variables  $r$  y  $\theta$  es

$$0 \leq r \leq 2$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 4$$

Aplicando las fórmulas de transformación

$$x(r, \theta, z) = r \cos(\theta) \quad y(r, \theta, z) = r \sin(\theta) \quad z(r, \theta, z) = z$$

Resulta

$$x^2 + y^2 \leq z \leq 4$$

$$(r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2 \leq z \leq 4$$

$$r^2((\cos(\theta))^2 + (\sin(\theta))^2) \leq z \leq 4$$

$$r^2 \leq z \leq 4$$

Luego, el sólido asociado a  $\Omega$  en las coordenadas cilíndricas es

$$\Omega' = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : r^2 \leq z \leq 4 \wedge 0 \leq r \leq 2 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

O brevemente

$$\Omega' : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ r^2 \leq z \leq 4 \end{cases}$$

Aplicando la fórmula de cambio de variables en integrales triples

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy dz = \iiint_{\Omega'} \sqrt{(r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2} \cdot \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| dr d\theta dz$$

$$I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy dz = \iiint_{\Omega'} r \cdot |r| \, dr d\theta dz$$

$$I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy dz = \iiint_{\Omega'} r^2 \, dr d\theta dz$$

$$I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy dz = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left( \int_{r=0}^{r=2} \left( \int_{z=r^2}^{z=4} r^2 \, dz \right) dr \right) d\theta$$

Teniendo en cuenta que  $r^2$  es constante para la integración respecto de  $z$ , se escribe

$$I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy dz = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left( \int_{r=0}^{r=2} \left( \int_{z=r^2}^{z=4} r^2 \, dz \right) dr \right) d\theta$$

$$I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy dz = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left( \int_{r=0}^{r=2} r^2 \left( \int_{z=r^2}^{z=4} dz \right) dr \right) d\theta$$

$$I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy dz = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left( \int_{r=0}^{r=2} r^2 \left( z \Big|_{z=r^2}^{z=4} \right) dr \right) d\theta$$

$$I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left( \int_{r=0}^{r=2} r^2(4-r^2) \, dr \right) d\theta$$

Separando esta integral doble como el producto de integrales simples

$$I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz = \left( \int_{r=0}^{r=2} (4r^2 - r^4) \, dr \right) \left( \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \right)$$

$$I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz = \left( \frac{4}{3} \cdot r^3 - \frac{r^5}{5} \Big|_{r=0}^{r=2} \right) \left( \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right)$$

$$I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz = \left( \frac{4}{3} \cdot 2^3 - \frac{2^5}{5} \right) (2\pi - 0)$$

$$I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz = \left( \frac{4}{3} \cdot 2^3 - \frac{2^5}{5} \right) (2\pi - 0)$$

$$I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz = 2\pi \cdot 32 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = 64\pi \cdot \frac{2}{15} = \frac{128}{15} \pi$$

Esto significa que la integral triple de  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , sobre el sólido  $\Omega$  es

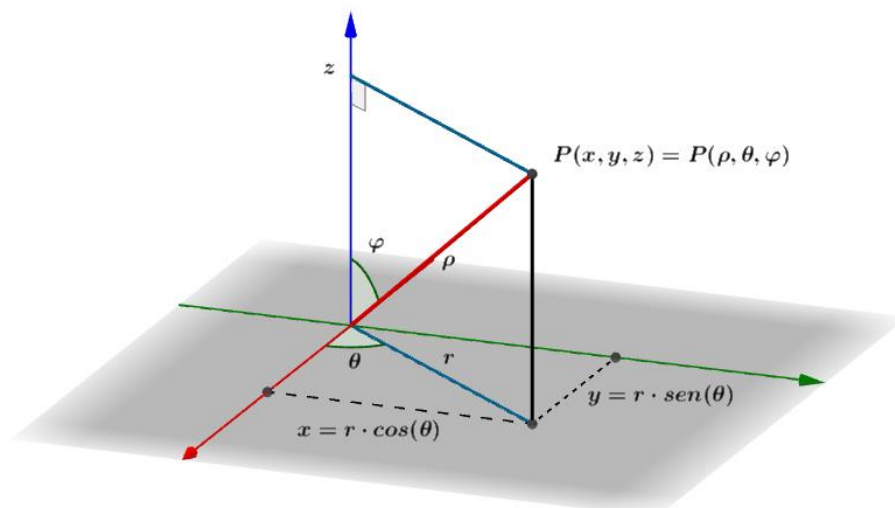
$$I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz = \frac{128}{15} \pi$$

### Transformación esférica

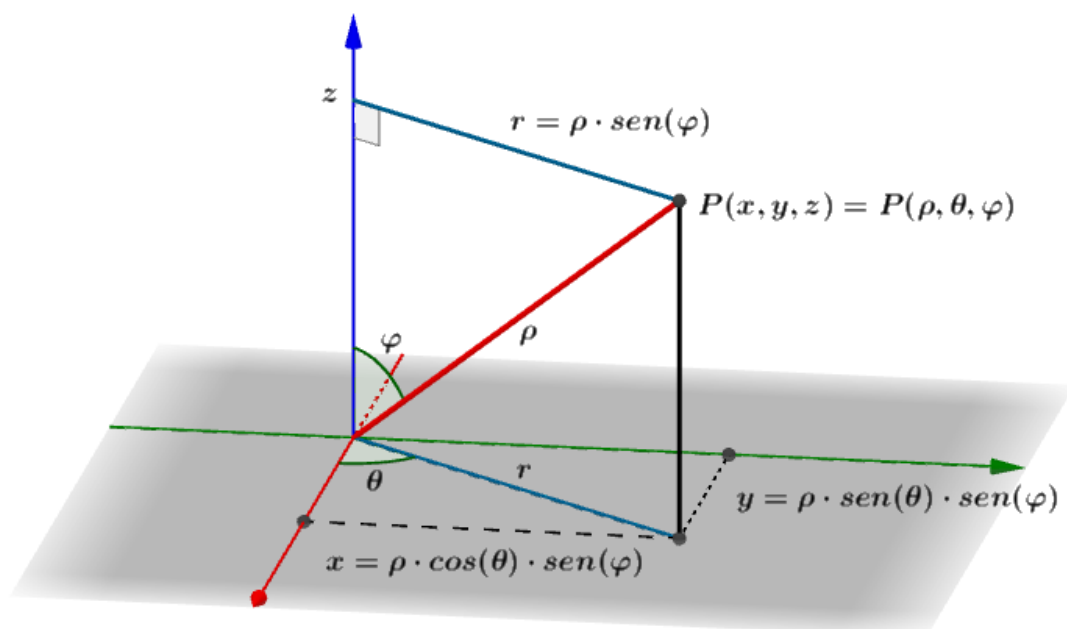
Así como se tiene la transformación cilíndrica y aplicada al cálculo de integrales sobre sólidos con simetría cilíndrica, también se define la transformación esférica en la que se establece la posición  $P$  del espacio a partir de las coordenadas esféricas

$$(\rho, \theta, \varphi)$$

En lo que respecta a su utilidad a la aplicación de integrales triples, resulta conveniente cuando se trabaja sobre regiones con simetría esférica. En las siguientes figuras se muestra la interpretación geométrica de estas coordenadas



### Representación geométrica de las coordenadas esféricas



### Relación entre las coordenadas cartesianas $(x, y, z)$ y las coordenadas esféricas $(\rho, \theta, \varphi)$

La coordenada  $\rho$  se interpreta como la distancia al origen del punto  $P$ . La variable angular  $\theta$  se llama variable azimutal y se toma exactamente como en las transformaciones polar y cilíndrica, y la variable angular  $\varphi$ , llamada colatitud, es la que mide el ángulo formado por la parte positiva del eje vertical  $z$  y el segmento que une el origen de coordenadas con el punto  $P$ .

La transformación esférica se define del siguiente modo

$$\begin{aligned} T: V &\rightarrow \mathbb{R}^3: T(\rho, \theta, \varphi) = (x(\rho, \theta, \varphi), y(\rho, \theta, \varphi), z(\rho, \theta, \varphi)) \\ &= (\rho \cos(\theta) \sen(\varphi), \rho \sen(\theta) \sen(\varphi), \rho \cos(\varphi)) \end{aligned}$$

Donde

$$V = \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : \rho \geq 0 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq \varphi \leq \pi\}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{z}{\rho} \rightarrow z = \rho \cos(\varphi)$$

$$\operatorname{sen}(\varphi) = \frac{r}{\rho} \rightarrow r = \rho \operatorname{sen}(\varphi)$$

$$x = r \cos(\theta) = \rho \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta)$$

$$y = r \operatorname{sen}(\theta) = \rho \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta)$$

$$x = \rho \cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi)$$

$$y = \rho \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi)$$

$$z = \rho \cos(\varphi)$$

**Observación:** Algunas relaciones entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas esféricas, útiles en cuanto al cálculo de integrales triples, son las siguientes

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Es natural ya que  $\rho$  se definió como la distancia al origen del punto  $P(x, y, z)$ .

$$r = |\rho \operatorname{sen}(\varphi)| = \rho \operatorname{sen}(\varphi) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Recuérdese que  $r$  es la variable radial en la transformación cilíndrica y que, precisamente, la relación con las coordenadas cartesianas es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Y así como se deduce de la representación geométrica de las coordenadas esféricas, se tiene la relación mencionada, a saber

$$r = |\rho \operatorname{sen}(\varphi)| = \rho \operatorname{sen}(\varphi) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

El hecho de extraer las barras de valor absoluto se corresponde con que

$$\operatorname{sen}(\varphi) \geq 0$$

En el intervalo de variación de la variable angular  $\varphi$ . Recuérdese que

$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

## Jacobiano de la transformación esférica

Como se muestra en la fórmula de cambio de variables en integrales triples, así como ocurría en las integrales dobles, interviene el jacobiano de la transformación. Para el caso de la transformación esférica se tiene

$$T(\rho, \theta, \varphi) = (x(\rho, \theta, \varphi), y(\rho, \theta, \varphi), z(\rho, \theta, \varphi)) = (\rho \cos(\theta) \sin(\varphi), \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), \rho \cos(\varphi))$$

entonces

$$J_T(\rho, \theta, \varphi) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}_{(\rho, \theta, \varphi)}$$

$$J_T(\rho, \theta, \varphi) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \sin(\varphi) & -\rho \sin(\theta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & \rho \cos(\theta) \sin(\varphi) & \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & 0 & -\rho \sin(\varphi) \end{vmatrix}$$

Es decir que el jacobiano de la transformación esférica es

$$J_T(\rho, \theta, \varphi) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = -\rho^2 \sin(\varphi)$$

**Ejemplo 9.** Calcular la integral triple

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

Sobre el sólido esférico

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$$

Aplicando la transformación esférica.

Aplicar la transformación esférica significa aplicar las fórmulas de transformación

$$x(\rho, \theta, \varphi) = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi)$$

$$y(\rho, \theta, \varphi) = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

$$z(\rho, \theta, \varphi) = \rho \cos(\varphi)$$

Con jacobiano

$$J_T(\rho, \theta, \varphi) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = -\rho^2 \sin(\varphi)$$

Ahora bien, es necesario determinar la región  $\Omega'$  del espacio  $\rho\theta\varphi$  que la transformación esférica convierte en el sólido  $\Omega$  del espacio  $xyz$ . En este caso, tratándose de un sólido esférico de centro en el origen y radio 3, queda claro que el rango de variación de  $\rho$  es

$$0 \leq \rho \leq 3$$

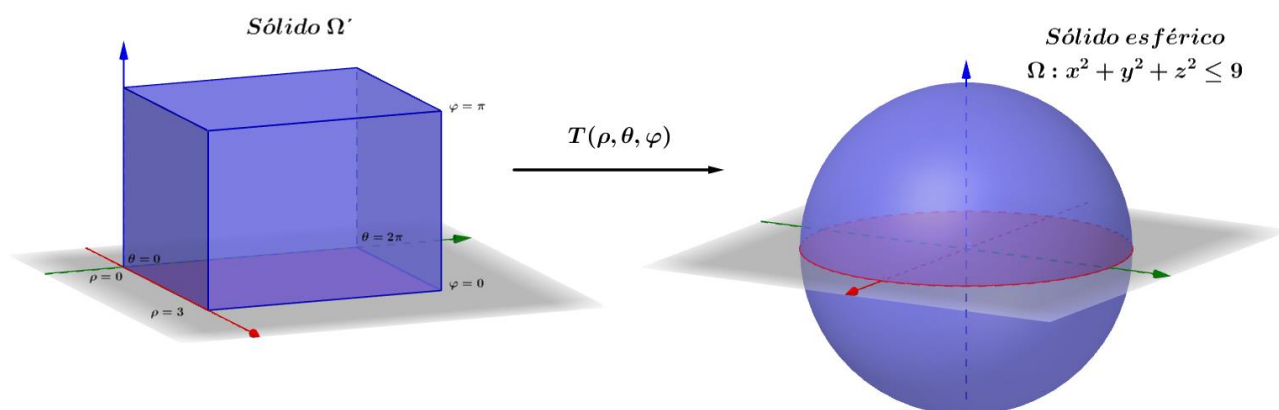
Y teniendo en cuenta que es el sólido esférico completo, debe ser entonces

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

Es decir que  $\Omega'$  se define como

$$\Omega' = \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq 3 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq \varphi \leq \pi\}$$



La función  $T(\rho, \theta, \varphi)$  transforma el prisma  $\Omega'$  del espacio  $\rho\theta\varphi$  en el sólido esférico  $\Omega$  de espacio  $xyz$

Aplicando la fórmula de cambio de variables en integrales triples, resulta

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_{\Omega'} \left( (x(\rho, \theta, \varphi))^2 + (y(\rho, \theta, \varphi))^2 + (z(\rho, \theta, \varphi))^2 \right) \cdot \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} \right| \, d\rho \, d\theta \, d\varphi \end{aligned}$$

Como se comentó en la observación de más arriba, se cumple que

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Es decir

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Además

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} \right| = |-\rho^2 \sin(\varphi)| = \rho^2 |\sin(\varphi)| = \rho^2 \sin(\varphi)$$

Entonces

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} \rho^2 \cdot |-\rho^2 \sin(\varphi)| d\rho d\theta d\varphi$$

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin(\varphi) d\rho d\theta d\varphi$$

Luego, resulta

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} \rho^4 \cdot \sin(\varphi) d\rho d\theta d\varphi$$

Separando las variables, la integral se puede calcular del siguiente modo

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \left( \int_{\rho=0}^{\rho=3} \rho^4 d\rho \right) \left( \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \sin(\varphi) d\varphi \right) \left( \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \right)$$

Luego

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \left( \frac{\rho^5}{5} \Big|_{\rho=0}^{\rho=3} \right) \left( -\cos(\varphi) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \right) \left( \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right)$$

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \left( \frac{243}{5} \right) (-\cos(\pi) + \cos(0))(2\pi - 0)$$

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \left( \frac{243}{5} \right) 4\pi$$

O sea que, el valor de la integral triple es

$$I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{972}{5} \pi$$



**Ejemplo 10.** Calcular el volumen del sólido esférico limitado por la esfera de centro en el origen y radio  $\rho_0$ , es decir

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq \rho_0^2\}$$

Esta tarea fue realizada en el Ejemplo 6. Pero en tal situación, la integral triple a partir de la que se calcula el volumen de  $\Omega$ , a saber

$$\text{vol}(\Omega) = \iiint_{\Omega} 1 \, dx dy dz$$

Fue evaluada, integrando en primer lugar respecto de  $z$ , y finalmente aplicando la transformación polar para el cálculo de la última integral doble.

En este caso, se aplicará la fórmula de cambio de variables según la transformación esférica para obtener el volumen de este sólido.

Entonces, para calcular la integral triple

$$\text{vol}(\Omega) = \iiint_{\Omega} 1 \, dx dy dz$$

Se aplican las fórmulas de transformación

$$x(\rho, \theta, \varphi) = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi)$$

$$y(\rho, \theta, \varphi) = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

$$z(\rho, \theta, \varphi) = \rho \cos(\varphi)$$

el jacobiano correspondiente

$$J_T(\rho, \theta, \varphi) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = -\rho^2 \sin(\varphi)$$

Integrando sobre el sólido

$$\Omega' = \{(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \rho \leq \rho_0 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq \varphi \leq \pi\}$$

Nótese que el rango de variación de  $\rho$  se obtiene a partir de saber que es el sólido esférico de radio  $\rho_0$  completo. Y por la misma razón, así como en el ejemplo anterior

$$0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq \varphi \leq \pi$$

Queda entonces

$$vol(\Omega) = \iiint_{\Omega} 1 \, dx dy dz = \iiint_{\Omega'} 1 \cdot |-\rho^2 \operatorname{sen}(\varphi)| \, d\rho d\theta d\varphi$$

$$vol(\Omega) = \iiint_{\Omega} 1 \, dx dy dz = \iiint_{\Omega'} \rho^2 \cdot \operatorname{sen}(\varphi) \, d\rho d\theta d\varphi$$

Separando las variables, la integral se puede calcular del siguiente modo

$$vol(\Omega) = \iiint_{\Omega} 1 \, dx dy dz = \left( \int_{\rho=0}^{\rho=\rho_0} \rho^2 \, d\rho \right) \left( \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \operatorname{sen}(\varphi) \, d\varphi \right) \left( \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \right)$$

Así, se tiene

$$vol(\Omega) = \iiint_{\Omega} 1 \, dx dy dz = \left( \frac{\rho^3}{3} \Big|_{\rho=0}^{\rho=\rho_0} \right) \left( -\cos(\varphi) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \right) \left( \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right)$$

$$vol(\Omega) = \iiint_{\Omega} 1 \, dx dy dz = \frac{\rho_0^3}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi$$

Es decir que

$$vol(\Omega) = \iiint_{\Omega} 1 \, dx dy dz = \frac{4}{3} \pi \rho_0^3$$

Que es el volumen del sólido esférico de radio  $\rho_0$ , tal como se sabía de lo realizado en el Ejemplo 6.