UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA MATANZA

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA II - Ejercicios resueltos

TEMA: **AUTOVALORES - AUTOVECTORES.**

Ejercicio 1 Sea $A = \begin{pmatrix} a+b & a & 7 \\ 0 & b+2 & 1 \\ -4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

(a) Hallar $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que $(1, -2, 0)$ sea autovector de A asociado al autovalor -1.

(b) Para los valores de a y b hallados en el ítem previo; decidir si A es diagonalizable. En caso afirmativo, dar una diagonalización de A.

Ejercicio 2 Sabiendo que $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ es una matriz que verifica $E_{-1}(A) = gen\{(1,1,1,0);(0,0,0,1)\}$, $E_0(A) = gen\{(0,1,-1,0)\}$ y $E_1(A) = gen\{(1,0,1,0)\}$

(a) Justificar por qué A es diagonalizable y dar A.

(b) Calcular A^{114}.

Ejercicio 3 Sea $T : \mathcal{P}_2[\mathbb{R}] \to \mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$ la transformación lineal definida por

$$T(aX^2 + bX + c) = cX^2 + bX + a.$$

(a) Verificar que T es un endomorfismo diagonalizable.

(b) Definimos la transformación lineal $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por $L(x, y, z) = (MT_{BB}(x\ y\ z)^T)^T$, siendo $B = \{X^2,\ X,\ 1\}$. Estudiar si L es una simetría.

Ejercicio 4 Mostrar que las siguientes proposiciones son verdaderas justificando adecuadamente:

(a) Si $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ es el endomorfismo definido por

$$\begin{cases} f\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \\ f\left(\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \\ f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

entonces el polinomio característico de f es $p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^2$.

(b) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz que cumple $A^2 = A$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de A entonces $\lambda \in \{0, 1\}$.

(c) Sean $f, g : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ endomorfismos. Si $v \in E_\lambda(f) \cap Nu(g)$, entonces $v \in E_{\lambda^2}((f + g) \circ f)$.

Solución propuesta.

Ejercicio 1.

(a) Por definición, un vector $v \in \mathbb{R}^n$ (no nulo) es *autovector* de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, asociado al *autovalor* λ, si y sólo si

$$Av^T = \lambda v^T. \tag{1}$$

De modo que, $v = (1, -2, 0)$ es autovector de $A = \begin{pmatrix} a+b & a & 7 \\ 0 & b+2 & 1 \\ -4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ asociado al autovalor $\lambda = -1$ si y sólo si

$$\begin{pmatrix} a+b & a & 7 \\ 0 & b+2 & 1 \\ -4 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Re-escribiendo esta igualdad matricial como un sistema de ecuaciones (luego de hacer los correspondientes productos) tenemos

$$\begin{cases} -a + b = -1 \\ -2b - 4 = 2 \end{cases}$$

(omitimos escribir la tercer ecuación ya que no aporta nada).
Resolviendo este sistema vemos que $a = -2$ y $b = -3$ es la única alternativa posible.

(b) Reemplazando los valores de a y b hallados en el ítem anterior tenemos

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

y debemos estudiar si esta matriz es diagonalizable o no[1]. Para este fin, comenzamos buscando todos los autovalores de A; es decir, todas las raíces del polinomio característico $det(\lambda I - A)$:[2]

$$det(\lambda I - A) = det \begin{pmatrix} \lambda+5 & 2 & -7 \\ 0 & \lambda+1 & -1 \\ 4 & 2 & \lambda-6 \end{pmatrix} = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{cases}.$$

[1]Este es un buen momento para revisar los apuntes y la bibliografía sugerida ya sea para recordar la definición de matriz diagonalizable como los criterios que permiten decidir si una matriz lo es o no.

[2]Conviene tener presente que la única diferencia entre $det(\lambda I - A)$ y $det(A - \lambda I)$ es a lo sumo un signo; razón por la cual ambos polinomios tienen el mismo conjunto de raíces. En concreto: podemos trabajar tanto con $det(\lambda I - A)$ como $det(A - \lambda I)$ para buscar los autovalores.

Dado que $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tiene tres autovalores reales distintos sabemos que A es diagonalizable[3]. En este caso, se nos pide una diagonalización de A. Recordemos que una diagonalización de A consiste en una factorización de dicha matriz mediante una matriz diagonal D y una matriz inversible C tal que

$$A = CDC^{-1}.$$

En general, sabemos que si $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base formada por autovectores de A (v_i es autovector asociado al autovalor λ_i), entonces

$$A\ C_{BE} = C_{BE}\ Diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

o equivalentemente,

$$\begin{aligned} A &= C_{BE}\ Diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\ C_{EB} \\ &= C_{BE}\ Diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\ C_{BE}^{-1} \end{aligned} \tag{2}$$

(aquí $Diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ denota la matriz diagonal con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ como los coeficientes de la diagonal).

Luego, tomando $C = C_{BE}$ y $D = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ conseguimos una factorización de A.

Es necesario entonces, a fin de dar una diagonalización de A, obtener los autoespacios[4]:

- Para obtener $E_0(A)$ debemos resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Resolviendo, concluímos que $E_0(A) = gen\{(1, 1, 1)\}$.

- Para obtener $E_1(A)$ debemos resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Resolviendo, concluímos que $E_1(A) = gen\{(2, 1, 2)\}$.

---

[3]Hemos usado aquí la siguiente propiedad: *Si una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene n autovalores reales todos distintos entre sí, entonces A es diagonalizable.*

Recordemos que existen matrices con autovalores repetidos que son diagonalizables (por ejemplo, la matriz nula o la matriz identidad); por lo cual, la recíproca de la propiedad anterior no es necesariamente verdadera. Enfatizamos una vez más este hecho: no es necesario que una matriz tenga todos sus autovalores distintos para ser diagonalizable; no obstante, si hay garantía que todos los autovalores son distintos, de seguro la matriz es diagonalizable.

[4]El autoespacio $E_\lambda(A)$ asociado al autovalor λ consiste en el conjunto de todos los autovectores vinculados a λ junto al vector nulo; este conjunto tiene estructura de subespacio (de ahí su nombre), nosotros estamos interesados en obtener una base del mismo. Concretamente, $E_\lambda(A)$ es el conjunto solución del sitema

$$(\lambda I - A)X = 0$$

por lo que debemos resolver este sistema, para cada autovalor, y obtener una base del conjunto solución.

- $E_{-1}(A) = gen\{(1,-2,0)\}$ pues $(1,-2,0) \in E_{-1}(A)$ por hipótesis y, además, $dim(E_{-1}(A)) = 1$ ya que $\lambda = -1$ es raíz simple del polinomio característico[5].

Finalmente, considerando la base $B = \{(1,-2,0);(1,1,1);(2,1,2)\}$ de $\mathbb{R}^3$ (formada por autovectores de A), una diagonalización de A es

$$\begin{aligned} A &= C_{BE}\; Diag(-1,0,1)\; C_{EB} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.

(a) Asumamos que $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ es una matriz que verifica $E_{-1}(A) = gen\{(1,1,1,0);(0,0,0,1)\}$, $E_0(A) = gen\{(0,1,-1,0)\}$ y $E_1(A) = gen\{(1,0,1,0)\}$; resulta entonces (gracias al hecho que $(1,1,1,0)$ y $(0,0,0,1)$ son linealmente independientes) que

$$dim(E_{-1}(A)) = 2, \qquad dim(E_0(A)) = 1 \qquad \text{y} \qquad dim(E_1(A)) = 1.$$

Luego,

$$dim(E_{-1}(A)) + dim(E_0(A)) + dim(E_1(A)) = 4$$

y como $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, sigue que A es diagonalizable[6].

Por otro lado, podemos calcular A a partir de una de sus diagonalizaciones (ver (2)). En efecto, tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Para calcular A^{114} nos valdremos de la diagonalización que dimos en el ítem anterior.

[5] Para un autovalor λ cualquiera de A sabemos que

$$1 \le dim(E_\lambda(A)) \le ma(\lambda)$$

donde $ma(\lambda)$ denota la multiplicidad algebraica de λ (es decir, la multiplicidad de λ como raíz del polinomio característico.) Por lo tanto, cuando λ sea una raíz simple de dicho polinomio tendremos $dim(E_\lambda(A)) = 1$.

[6] En este caso usamos el siguiente criterio: *Si la suma de todas las multiplicidades geométricas (dimensión de los autoespacios) coincide con el orden de A, entonces A es diagonalizable.*

En efecto[7],

$$
\begin{aligned}
A^{114} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{114} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{114} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{114} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0^{114} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1^{114} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ejercicio 3.

(a) Para verificar que $T : \mathcal{P}_2[\mathbb{R}] \to \mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$, $T(aX^2 + bX + c) = cX^2 + bX + a$, es un endomorfismo diagonalizable debemos ver que su matriz en una base cualquiera (fija) de $\mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$ es diagonalizable[8]. Comencemos entonces hallando la matriz de T en la base $B = \{X^2,\ X,\ 1\}$ (notemos que esta matriz también nos será útil para el ítem (b)):

$$
\begin{aligned}
M_B(T) &= ([T(X^2)]_B\ [T(X)]_B\ [T(1)]_B) \quad \text{(por definición de } M_B(T)) \\
&= ([1]_B\ [X]_B\ [X^2]_B) \quad \text{(aquí hemos usado la ley de asignación o fórmula)} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(hallando los correspondientes vectores de coordenadas)}
\end{aligned}
$$

Busquemos los autovalores de $M_B(T)$:

$$
det(\lambda I - M_B(T)) = det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1),
$$

luego, $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$ son los únicos autovalores de $M_B(T)$. Dado que la multiplicidad algebraica (multiplicidad como raíz del polinomio característico) de $\lambda = 1$ es 2 no podemos decidir *a priori* si $M_B(T)$ es diagonalizable o no, necesitamos conocer la

[7]En lo que sigue usaremos las siguientes dos propiedades:

$$A = CDC^{-1} \Rightarrow A^m = CD^mC^{-1} \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

$$Diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)^m = Diag(\lambda_1^m, \lambda_2^m, \ldots, \lambda_n^m) \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

[8]Sabemos que hay independencia de la base por lo que elegiremos una base en la que nos resulte *naturalmente* sencillo realizar los cálculos.

multiplicidad geométrica (dimensión del autoespacio asociado) de dicho autovalor: el sistema a resolver en este caso es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

resolviendo[9], concluímos que $E_1(M_B(T)) = gen\{(1,0,1);(0,1,0)\}$[10]. Finalmente, dado que la multiplicidad geométrica también es 2 concluímos que $M_B(T)$, y por lo tanto T, es diagonalizable[11].

Es importante aclarar que para aquellos autovalores que sean raíces simples del polinomio característico (multiplicidad algebraica 1), se tiene garantizado que su multiplicidad geométrica también es 1 (ver nota al pie 5). Por esta razón, solo centramos nuestra atención en el autovalor 1.

(b) Debemos estudiar ahora si la transformación lineal $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $L(x,y,z) = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]^T = (z,y,x)$ es una simetría o no.

Si se tratase de una simetría, entonces el plano respecto al cual se practica la simetría estaría determinado por $E_1(M_B(T))$ y la normal a dicho plano pertenecería a $E_{-1}(M_B(T))$ (medite esto geométricamente...). Luego, cualquier vector en $E_1(M_B(T)) = gen\{(1,0,1);(0,1,0)\}$ debe ser ortogonal al generador de $E_{-1}(M_B(T))$. Un simple cálculo muestra que $E_{-1}(M_B(T)) = gen\{(1,0,-1)\}$. Ahora dado que $(1,0,1)\perp(1,0,-1)$ y $(0,1,0)\perp(1,0,-1)$ podemos afirmar que L es una simetría respecto al plano con normal $(1,0,-1)$ que pasa por el origen, o sea, respecto al plano $x - z = 0$.

Ejercicio 4.

(a) Consideremos el endomorfismo $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definido por

$$\begin{cases} f\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \\ f\left(\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \\ f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\right) \end{cases}.$$

[9]No es necesario resolver, alcanza con observar que el rango de esta matriz es 1 por lo que la solución de dicho sistema tiene dimensión 2.

[10]OJO!!! Estos vectores (dispuestos como columnas) son las coordenadas de autovectores de T en la base B pero debe quedar claro que NO son autovectores de T. Pueden cotejar que los autovectores, asociados al autovalor 1, de T son $X^2 + 1$ y X. Es decir,

$$E_1(T) = gen\{X^2 + 1, X\}.$$

Es importante notar y entender la diferencia entre $E_1(M_B(T))$ y $E_1(T)$.

[11]En este caso el criterio que usamos es el siguiente: *Si para cada autovalor de A, la multiplicidad geométrica y la multiplicidad algebraica coinciden, entonces A es diagonalizable.*

Notemos que la primer ecuación de la tabla puede escribirse

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\right) = -2\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$$

por lo tanto, $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ es autovector de f asociado al autovalor -2 (vea (1)).

La segunda ecuación de la tabla puede escribirse

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\right) = 2\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix};$$

por lo tanto, $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ es autovector de f asociado al autovalor 2.

Finalmente, la tercer ecuación puede ser escrita como sigue

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\right) = 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix};$$

por lo tanto, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ son autovectores de f asociados al autovalor 0.

Teniendo presente que los autovalores de f son raíces del polinomio característico, resulta que $(\lambda-(-2))(\lambda-2)(\lambda-0)^2 = (\lambda^2-4)\lambda^2 = \lambda^4-4\lambda^2$ divide a dicho polinomio característico. Ahora, como ambos polinomios tienen el mismo grado y son mónicos[12] concluímos que son iguales.

(b) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz que cumple $A^2 = A$, y asumamos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de A.

Existe entonces un vector no nulo $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $Av^T = \lambda v^T$. Multiplicando por A en ambos miembros de esta igualdad tenemos

$$A^2v^T = A(\lambda v^T) = \lambda Av^T;$$

usando la hipótesis $A^2 = A$ resulta que

$$Av^T = \lambda Av^T.$$

Finalmente, usando que $Av^T = \lambda v^T$ sigue que

$$\lambda v^T = \lambda(\lambda v^T) = \lambda^2 v^T.$$

Pasando de término y factorizando, la ecuación anterior se escribe

$$0 = (\lambda^2 - \lambda)v^T$$

y dado que v es un vector no nulo, necesariamente debemos tener

$$\lambda^2 - \lambda = 0.$$

Por lo tanto, $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$.

[12] Un polinomio se dice mónico si su coeficiente principal es 1.

(c) Sean $f, g : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ endomorfismos. Queremos mostrar que si $v \in E_\lambda(f) \cap Nu(g)$, entonces $v \in E_{\lambda^2}((f+g)\circ f)$.

Asumamos que $v \in E_\lambda(f) \cap Nu(g)$; entonces

- $v \in E_\lambda(f)$ implica[13]
$$f(v) = \lambda v \tag{3}$$
- $v \in Nu(g)$ implica
$$g(v) = 0 \tag{4}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
((f+g)\circ f)(v) &= (f+g)(f(v)) && \text{(definición de composición)}\\
&= (f+g)(\lambda v) && \text{(gracias a (3))}\\
&= \lambda(f+g)(v) && (f+g \text{ es t.l.})\\
&= \lambda(f(v)+g(v)) && \text{(definición de suma)}\\
&= \lambda(f(v)) && \text{(gracias a (4))}\\
&= \lambda(\lambda v) \;=\; \lambda^2 v && \text{(gracias a (3))}
\end{aligned}$$

es decir, $((f+g)\circ f)(v) = \lambda^2 v$. Por lo tanto, $v \in E_{\lambda^2}((f+g)\circ f)$.

[13] Es un ejercicio simple y útil probar lo siguiente

$$v \in E_\lambda(f) \quad \Leftrightarrow \quad f(v) = \lambda v.$$

AUTOEVALUACIÓN
SOBRE AUTOVALORES - AUTOVECTORES.

Para resolver esta evaluación, realizar las guías de estudio y leer atentamente la resolución de los ejercicios de este documento.
Cada ejercicio tiene un valor de 2 puntos.

1. Estudiar si los siguientes objetos son diagonalizables y, en cada caso, dar los autoespacios asociados:

   (a) $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (c) $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $T\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11}+a_{22} \end{pmatrix}$.

   (d) $T : \mathcal{P}_2[\mathbb{R}] \to \mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$, $T(p(X)) = p(X) - p(-X+1)$.

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$.

   Mostrar que las siguientes proposiciones son verdaderas justificando adecuadamente.

   (a) El polinomio característico de A es $P(\lambda) = \lambda(\lambda+2)^2(\lambda-5)$.

   (b) $-2(1,0,0,8) + 7(1,0,-1,0) \in E_{-2}(A)$.

   (c) El vector $w = (-4, 2, -2, 2)$ es solución del sistema homogéneo $AX = 0$.

3. Consideremos el endomorfismo $T : \mathcal{P}_2[\mathbb{R}] \to \mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$ determinado por la siguiente tabla

$$\begin{cases} T(2x^2+3) = x^2+x+2 \\ T(x^2-x+1) = 0 \\ T(x^2-2x) = -x \end{cases}$$

   Estudiar si T es diagonalizable.

4. Supongamos que A es una matriz de 3×3 que cumple $A^3 = A$.

   (a) Mostrar que si λ es autovalor de A, entonces $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$.

   En lo que resta consideraremos la base $\mathcal{B} = \{(1,0,1);\ (0,1,0);\ (1,0,2)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Dar una matriz $A \neq -I$ que cumpla la condición del enunciado, $A^2 \neq A$ y tal que $\mathcal{B}$ esté formada por autovectores de A.

   (c) Dar una matriz A que cumpla la condición del enunciado, sea inversible y $\mathcal{B}$ esté formada por autovectores de A.

Ejercicio 5 Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo $T(x, y, z) = (ax + z, y, x + az)$ con $a \in \mathbb{R}$.

(a) Hallar $a \in \mathbb{R}$ de modo que $(1, 0, 1) \in E_0(T)$.

(b) Para el o los valores hallados en (a) decidir si T es diagonalizable.