Resolución TP7:

Ejercicio 4 - c

Graficar la región de integración R y resolver la integral I.

$$R: \{(x, y) \epsilon R^2 / \ 1 \ \leq x^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge x \geq 0 \ \wedge y \geq 0\}$$

$$I = \iint_R x + y dxdy$$

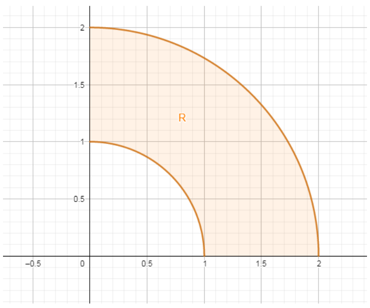
Resolviendo con Método de Transformaciones Polares.

Según el teorema, el resultado de la integral es el mismo aplicando transformaciones lineales afines, estas se encontraran expresadas de la forma:

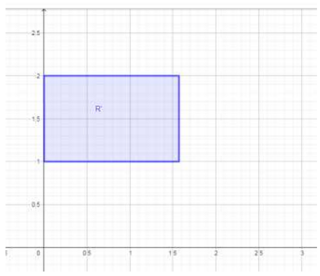
$$(x, y) = T(r, \alpha) = (r \, cos(\alpha), r \, sen(\alpha))$$

Aplicada sobre un recinto derivado de R, llamado R', dependiente de (r,α) el cual tiene como objetivo proveer una integral con menos particiones.

Este se construye según los valores del radio de la circunferencia (siempre r>0) y los valores radianes que son recorridos en la circunferencia (distancia máxima 2π).



==>



En este caso $R': \begin{cases} 1 \leq \ r \leq 2 \\ 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Sumemos el hecho de que el Jacobino de la transformación (modulo del determinante de la matriz jacobina de T) cobra un papel importante en el teorema el cual además posee un valor ya conocido:

$$|J| = r$$

$$I = \iint_R x + y dxdy = \iint_{R'} (x(r, \alpha) + y(r, \alpha))|J| dr d\alpha$$

$$I = \iint_R x + y dxdy \overset{\substack{Trans\\Polares}}{\cong} \iint_{R'} \big(x(r,\alpha) + y(r,\alpha)\big)|J| dr d\alpha$$

$$I = \int_{r=1}^{r=2} \int_{\alpha=0}^{\alpha=\frac{\pi}{2}} \big(r^2\, cos(\alpha) + r^2\, sen(\alpha)\big) d\alpha dr$$

$$I = \int_{r=1}^{r=2} [r^2\, sen(\alpha) - r^2 cos(\alpha)]_{\alpha=0}^{\alpha=\frac{\pi}{2}} dr$$

$$I = \int_{r=1}^{r=2} \left[\left(r^2\, sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - r^2 cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \big(r^2\, sen(0) - r^2 cos(0)\big)\right] dr$$

$$I = \int_{r=1}^{r=2} [(r^2\,(1) - r^2(0)) - (r^2\,(0) - r^2(1))] dr$$

$$I = \int_{r=1}^{r=2} [(r^2\,) - (-r^2)] dr$$

$$I = \int_{r=1}^{r=2} 2r^2 dr$$

$$I = \frac{2}{3}[r^3]_{r=1}^{r=2}$$

$$I = \frac{2}{3}[8 - 1]$$

$$I = \frac{14}{3}$$