Integrales dobles
Teorema de Fubini. Recintos
Guía de clase. Com 02

Teorema de Fubini

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada sobre un rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$ contenido en D.

Si

$$\int_{y=c}^{d} f(x,y)\, dy \text{ existe para cada } x \in [a,b]$$

entonces

$$\int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c}^{d} f(x,y)\, dy \right) dx$$

existe y

$$\int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c}^{d} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{R} f(x,y)\, dA$$

Siendo dA un diferencial de área dentro del rectángulo R, generalizando, $dA = dx\, dy = dy\, dx$

De manera análoga, si

$$\int_{x=a}^{b} f(x,y)\, dx \text{ existe para cada } y \in [c,d]$$

entonces

$$\int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=a}^{b} f(x,y)\, dx \right) dy$$

existe y

$$\int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=a}^{b} f(x,y)\, dx \right) dy = \int_{R} f(x,y)\, dA$$

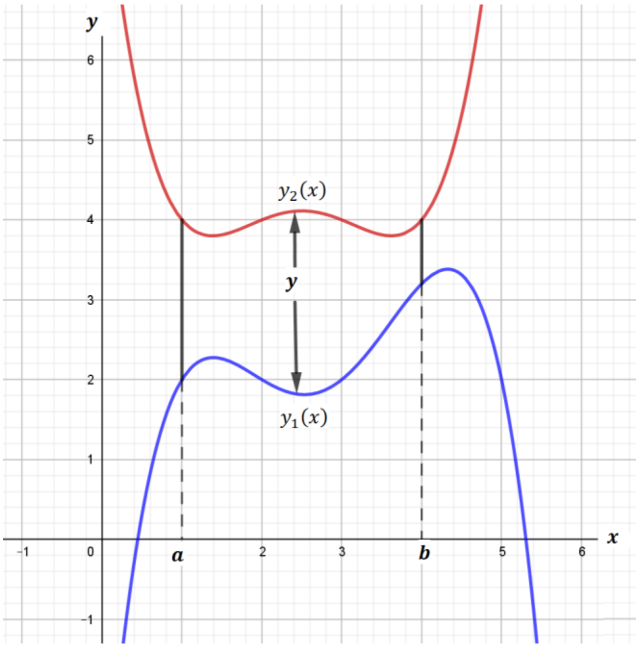
De esta manera, si todas estas condiciones se cumplen simultáneamente, se tiene

$$\int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c}^{d} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=a}^{b} f(x,y)\, dx \right) dy = \int_{R} f(x,y)\, dA$$

Integración sobre regiones más generales (no rectangulares)

Si el recinto R no es rectangular procederemos a clasificarlo en los tres casos siguientes.

Recintos tipo I:



$$y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \quad \forall\, x \in [a, b]$$

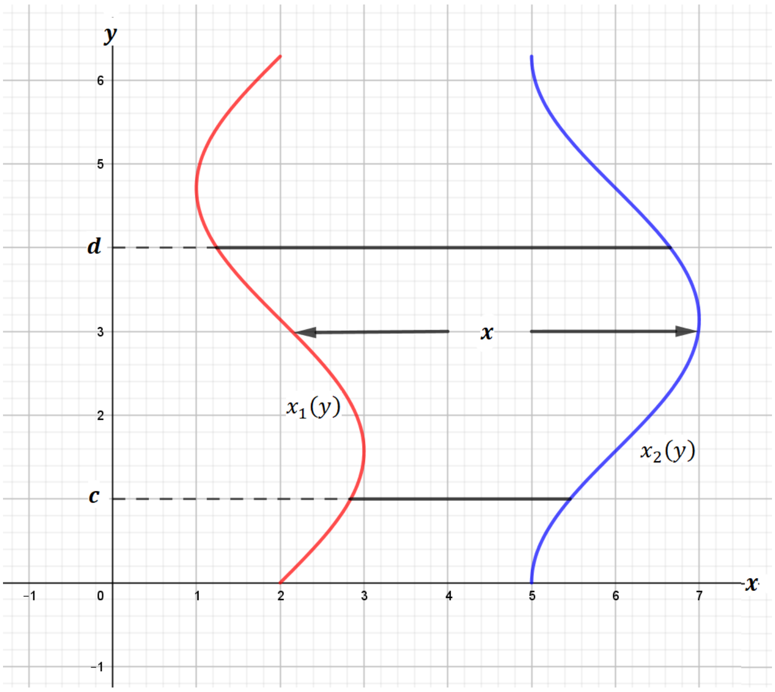
Nótese que en la figura de arriba no es posible expresar $x = x(y)$, es decir, x como función de la variable y, ya que para algunos valores de y, x tiene dos imágenes.

A $y_1(x)$ lo llamaremos límite inferior, y, a $y_2(x)$ lo llamaremos límite superior.

Entonces, la integral para este caso se expresará como:

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_R f(x, y)\, dA$$

Recintos tipo II:



$$x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \quad \forall\, y \in [c, d]$$

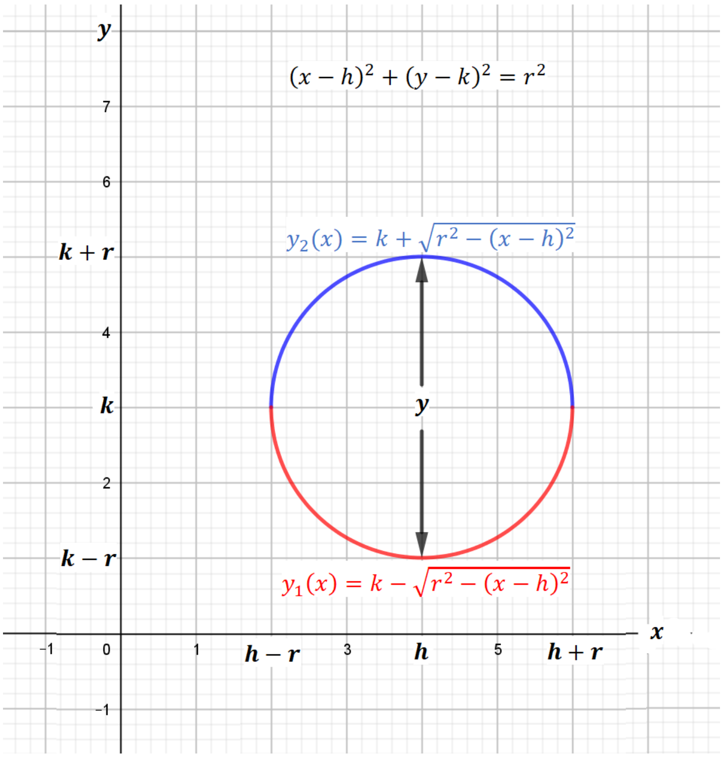
En la figura de arriba, nótese que no es posible expresar $y = y(x)$, es decir, y como función de la variable x, ya que para algunos valores de x, y tiene dos imágenes. $x_1(y)$ se denomina límite inferior de x, y, $x_2(y)$ se denomina límite superior de x

Entonces, la integral para este caso se expresará como:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_R f(x,y)\,dA$$

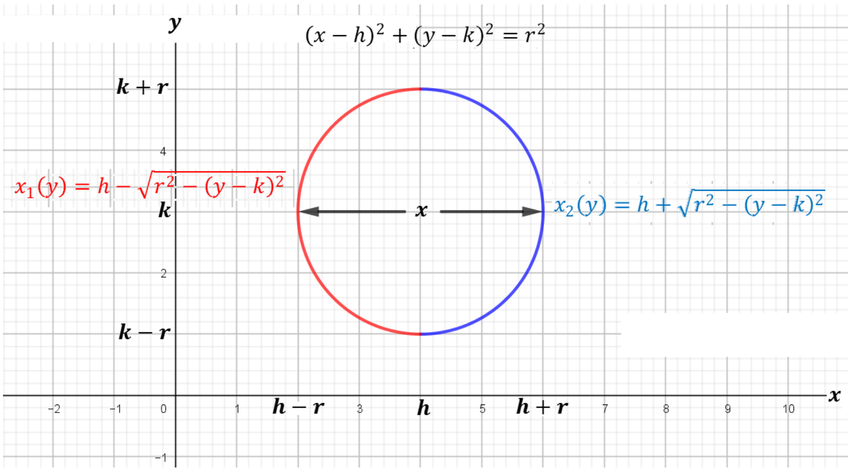
Recinto tipo III

Diremos que un recinto es del tipo III cuando puede expresarse como tipo I o tipo II. Una circunferencia con su interior o una elipse, son recintos del tipo III.



$$y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \quad \forall\, x \in [h-r, h+r]$$

$$\iint_R f(x,y)\, dx\, dy = \int_{x=h-r}^{h+r} \left(\int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_R f(x,y)\, dA$$



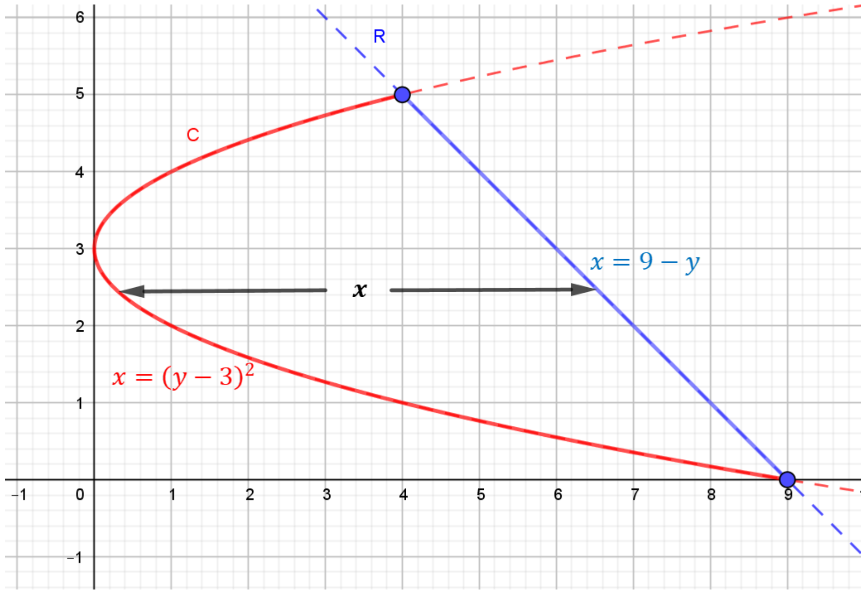
$$x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \quad \forall\, y \in [k-r, k+r]$$

$$\iint_R f(x,y)\, dx\, dy = \int_{y=k-r}^{k+r} \left(\int_{x=x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\, dx \right) dy = \int_R f(x,y)\, dA$$

Veamos algunos ejemplos concretos

Ejemplo 1

Recinto del plano delimitado por la parábola $x = (y-3)^2$ y la recta $x + y = 9$.



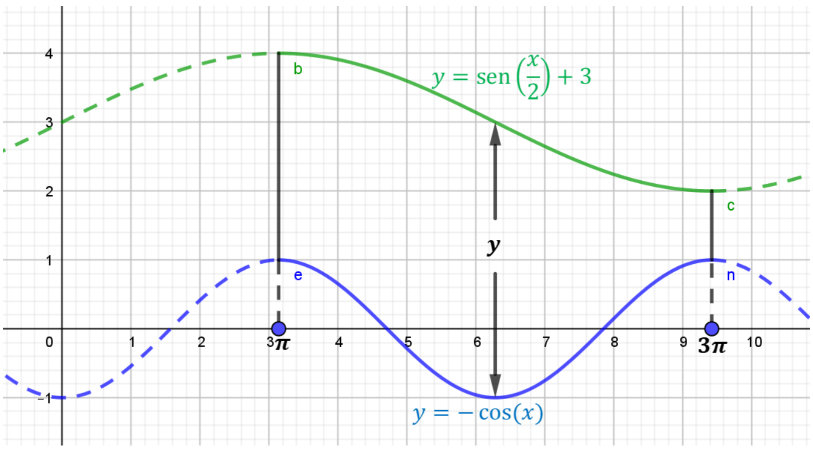
Recinto del tipo II

$$(y-3)^2 = x_1(y) \le x \le x_2(y) = 9 - y \quad \forall\, y \in [0,5]$$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{5} \left(\int_{x=(y-3)^2}^{9-y} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Ejemplo 2

Recinto del plano delimitado por las curvas $y = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 3$, y, $y = -\cos(x)$.



Recinto del tipo I

$$-\cos(x) = y_1(x) \le y \le y_2(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 3 \qquad \forall\, x \in [\pi, 3\pi]$$

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x=\pi}^{3\,\pi} \left(\int_{y=-cos(x)}^{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+3} f(x,y)\,dy \right) dx$$

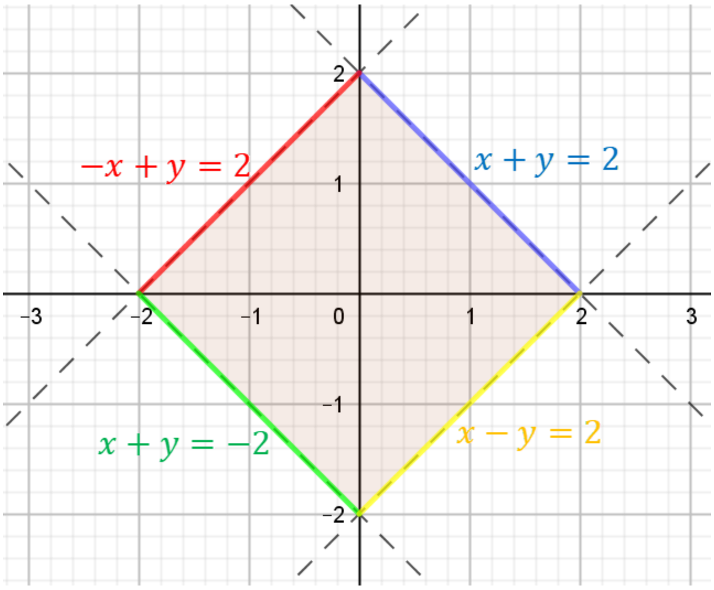
Ejemplo 3

Recinto del plano delimitado por $|x| + |y| \leq 2$.

En este caso aplicaremos primero la definición de módulo tanto al término con x, como al término con y.

Nos queda lo siguiente:

$$|x| + |y| \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 2 & si \ \ x \geq 0, \ \ y \geq 0 & (1) \\ -x + y \leq 2 & si \ \ x < 0, \ \ y \geq 0 & (2) \\ -x - y \leq 2 & si \ \ x < 0, \ \ y < 0 & (3) \\ x - y \leq 2 & x \geq 0, \ \ y < 0 & (4) \end{cases}$$



A este recinto lo tendremos que dividir en dos recintos triangulares, tanto si se lo quiere considerar como del tipo I o como del tipo II, esto es:

Considerándolo tipo I, un triángulo es el de vértices $(0, -2), (0,2), (-2,0)$, y el otro triángulo es el de vértices $(2,0), (0,2), (0, -2)$.

Para el triángulo de la izquierda:

$$-x - 2 = y_1(x) \leq y \leq y_2(x) = 2 + x \qquad \forall\, x \in [-2, 0]$$

$$\iint\limits_{R_{IZQ}} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{x=-2}^{0} \left(\int_{y=-x-2}^{2+x} f(x,y)\, dy \right) dx$$

Para el triángulo de la derecha:

$$x - 2 = y_3(x) \leq y \leq y_4(x) = 2 - x \qquad \forall\, x \in [0, 2]$$

$$\iint\limits_{R_{DER}} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{x=0}^{2} \left(\int_{y=x-2}^{2-x} f(x,y)\, dy \right) dx$$

Finalmente la integral doble de $f(x, y)$ sobre el recinto R viene dada por

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R_{IZQ}} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{R_{DER}} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{x=-2}^{0}\left(\int_{y=-x-2}^{2+x} f(x,y)\,dy\right)dx + \int_{x=0}^{2}\left(\int_{y=x-2}^{2-x} f(x,y)\,dy\right)dx$$

Si ahora lo considermos como recinto tipo II, un triángulo es el de vértices $(2,0), (-2,0), (0,-2)$ (triángulo inferior), y el otro triángulo es el de vértices $(2,0), (0,2), (-2,0)$ (triángulo superior).

Para el triángulo inferior:

$$-y-2 = x_1(y) \le x \le x_2(y) = 2+y \quad \forall\, y \in [-2, 0]$$

$$\iint_{R_{INF}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=-2}^{0}\left(\int_{x=-y-2}^{2+y} f(x,y)\,dx\right)dy$$

Para el triángulo superior:

$$y-2 = x_3(y) \le x \le x_4(y) = 2-y \quad \forall\, y \in [0, 2]$$

$$\iint_{R_{SUP}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=0}^{2}\left(\int_{x=y-2}^{2-y} f(x,y)\,dx\right)dy$$

Finalmente la integral doble de $f(x, y)$ sobre el recinto R viene dada por

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R_{INF}} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{R_{SUP}} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{y=-2}^{0}\left(\int_{x=-y-2}^{2+y} f(x,y)\,dx\right)dy + \int_{y=0}^{2}\left(\int_{x=y-2}^{2-y} f(x,y)\,dx\right)dy$$

Ejercicios

Describir algebraicamente los siguientes recintos del plano

1) Delimitado por la curva $y = x^3$, y la recta $y = x$, con $-1 \le x \le 1$

2) Delimitado por la elipse $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

3) Delimitado por la parábola $y = (x-1)^2 - 2$, y la recta $x + y = 1$

4) Delimitado por $f(x) = \text{sen}(x)$ y $g(x) = \cos(x)$ para $0 \leq x \leq 2\pi$

5) Delimitado por las circunferencias concéntricas $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$.

6) Delimitado por el triángulo de vértices $(1,-1)$, $(2,1)$ y $(3,-2)$