T P 04 Ej. 19-b

Calcular la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie dada:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \qquad en\ \vec{P}_0 = (1\ ,0\ ,-1)$$

La siguiente ecuación representa geométricamente en R^3una superficie cónica.
Sí a la misma la reescribimos de la siguiente manera, tenemos:

$F(x, y, z)$: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

Determinación del Plano Tangente:

$$\boldsymbol{\pi}: \vec{\boldsymbol{\nabla}}\boldsymbol{F}(\vec{\boldsymbol{P}}_{\mathbf{0}}).(\vec{\boldsymbol{P}} - \vec{\boldsymbol{P}}_{\mathbf{0}}) = \mathbf{0}$$

$$\vec{\nabla}F(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (2.x\ ;\ 2.y\ ;\ -2.z) \qquad \rightarrow$$

$$\vec{\nabla}F(\vec{P}_0) = \vec{\nabla}F(1\ ,0\ ,-1) = (2\ ,0\ ,2)$$

Finalmente tenemos:

$$\pi: \vec{\nabla}F(\vec{P}_0).(\vec{P} - \vec{P}_0) = 0 \quad \rightarrow$$

$$\pi: \vec{\nabla}F(1,0,-1) \circ [(x, y, z) - (1,0,-1)] = 0 \ \rightarrow$$

$$\pi: (2\ ,0\ ,2) \circ (x - 1\ , y - 0\ , z + 1) \rightarrow$$

$$\pi: 2.(x - 1) + 0.y + 2.(z + 1) = 0 \rightarrow$$

$$\pi: 2.x - 2 + 2.z + 2 = 0 \ \rightarrow$$

$$\pi: 2.x + 2.z = 0 \ \rightarrow$$

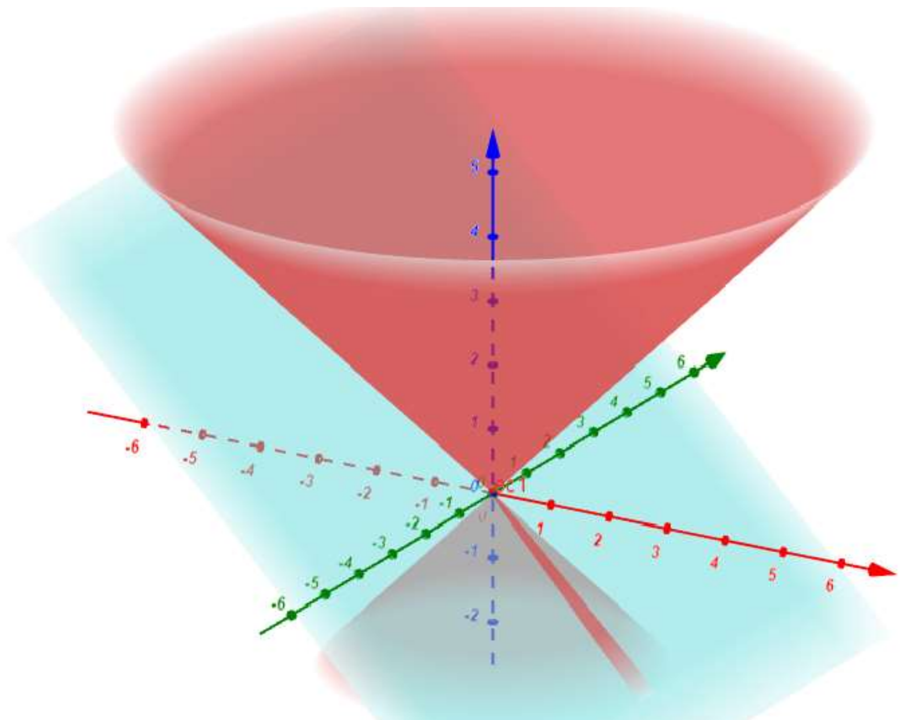
$$\boldsymbol{\pi}: \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = \mathbf{0}$$

Determinación de la Recta Normal:

$$\mathbb{L}: \vec{\nabla}F(\vec{P}_0).t + \vec{P}_0 \rightarrow$$

$$\mathbb{L}: \vec{\nabla}F(1\ ,0\ ,-1).t + (1\ ,0\ ,-1) \rightarrow$$

$$\mathbb{L}: (\mathbf{2}\ ,\mathbf{0}\ ,\mathbf{2}).\boldsymbol{t} + (\mathbf{1}\ ,\mathbf{0}\ ,-\mathbf{1})$$



En el gráfico se puede observar la representación geométrica del cono con generatrices a $45°$ y el plano tangente a este en el punto $\vec{P}_0 = (1\,,0\,,-1)$. Se puede apreciar que el plano de ecuación $\pi: z + x = 0$ generado por la recta de ecuación $z = -x$ que protusiona hacia ambos lados del eje Y (color verde) es un plano con una inclinación de $45°$ (medido desde el eje X hasta la recta), por lo tanto todos los puntos del cono que tengan componentes $\vec{P}_0 = (a, 0, -a)$ tendrán el mismo plano tangente.

La recta normal a la superficie en el punto $\vec{P}_0 = (1\,,0\,,-1)$, no se encuentra graficada, pero es fácil verificar que la ecuación vectorial hallada de la misma es correcta.

$$\mathbb{L}: \boldsymbol{(2\,,0\,,2).t + (1\,,0\,,-1)}\ \boldsymbol{ecuación\ vectorial\ de\ la\ recta\ normal}$$

Sí $(x, y, z) = (2.t + 1; 0; 2.t - 1) \rightarrow$

$1)\ x = 2.t + 1$
$2)\ y = 0$
$3)\ z = 2.t - 1$

Restando las ecuaciones 1) y 3) tenemos:

$x - z = 2 \rightarrow$

$$\boldsymbol{z = x - 2\ ecuación\ cartesiana\ de\ la\ recta\ normal}$$

Por otra parte, sabemos que el plano tangente al cono en $\vec{P}_0 = (1\ ,0\ ,-1)$ esta generado por una recta (que protusiona a ambos lados del eje Y) de ecuación cartesiana:

$$\boldsymbol{z = -x}$$

Como se puede observar en ambas ecuaciones de recta, estas son perpendiculares entre sí, puesto que la pendiente de una de ellas es la inversa con signo contrario de la otra (y viceversa), condición esta de perpendicularidad entre rectas. Por otra parte, se puede verificar que ambas rectas contienen al punto $\vec{P}_0 = (1\ ,0\ ,-1)$, pues el mismo verifica sus ecuaciones.