Diferenciabilidad

EJEMPLO 1

Sea

$$f(x,y) = \frac{\cos(x) + e^{xy}}{x^2 + y^2}$$

¿es f diferenciable para todos los puntos de su domino?

Teorema (de Cauchy)

Si f es de clase C^1 en U, entonces f es diferenciable en U.

Una función es de clase C^1 en U,si las derivadas parciales de f son continuas para todo punto de U.

Esto significa que nosotros en lugar de resolver el límite doble indicado en la definición de diferenciabilidad, aplicaremos el teorema de Cauchy, que es una condición suficiente para la diferenciabilidad de f en su dominio o en un subconjunto de éste.

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R} : (x,y) \neq (0,0)\}$$

Veamos si la función es de clase C^1

$$f_x = \frac{(x^2+y^2)\big(ye^{xy} - sen(x)\big) - 2x(\cos(x) + e^{xy})}{(x^2+y^2)^2}$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$$

$$f_y = \frac{(x^2+y^2)xe^{xy} - 2y(\cos(x) + e^{xy})}{(x^2+y^2)^2}$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$$

Las derivadas parciales son continuas para todo $(x,y) \neq (0,0)$

Por lo tanto f es de clase C^1, con lo cual, también diferenciable para todo su dominio.

EJEMPLO 2

Dada la función $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y, z) = \cos(x + y^2 + z^3)$$

Verificar si es diferenciable para todo su dominio.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -sen(x + y^2 + z^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y \cdot sen(x + y^2 + z^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -3z^2 \cdot sen(x + y^2 + z^3)$$

Las derivadas parciales son continuas. Entonces f es diferenciable.

La suma, el producto y el cociente de funciones diferenciables son también diferenciables son también diferenciables (como ocurre con las funciones de una sola variable). De aquí, el siguiente teorema:

Teorema

Sean $f, g: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$, diferenciables en $\boldsymbol{p} \in U$, entonces:

(i) La suma $f + g: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,$(f + g)(p) = f(p) + g(p)$ es una función diferenciable en $\boldsymbol{p}$.

(ii) El producto $fg: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,$(fg)(p) = f(p)g(p)$ es una función diferenciable en $\boldsymbol{p}$.

(iii) Si $g(p) \neq 0$, el cociente $\frac{f}{g}: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(p) = \frac{f(p)}{g(p)}$ es diferenciable en $\boldsymbol{p}$

EJEMPLO 3

La función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \frac{x^2-y^2-1}{x^2+y^2+1}$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$

El cociente de dos funciones polinomiales siempre es diferenciable (y además la función del denominador siempre es no nula)

EJEMPLO 4

La función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$

La composición de la función $\varphi(x,y) = x^2 + y^2$ que siempre es diferenciable, con la función $\psi(x) = e^{-x}$ que también lo es.

Derivadas direccionales

EJEMPLO 1

Determinar la derivada direccional de $f(x,y) = x^2y^3 - 4y$ si $\vec{u} = 2i + 5j$ en el punto $(2,-1)$.

Una de las consecuencias de la diferenciabilidad de una función, es que $f(x,y)$ posee derivada direccional en (x_0,y_0) en la dirección de cualquier vector unitario $\vec{v} = (a,b)$ dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \cdot b$$

Que no es nada más ni nada menos que el producto escalar entre el gradiente de la función y el vector director, es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot \vec{v}$$

Retomando el ejemplo, antes de aplicar esta propiedad, debemos comprobar si la función es diferenciable en el punto.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2 - 4$$

Por lo tanto, f es diferenciable en todo su dominio por el teorema de Cauchy de la condición suficiente.

Tenemos entonces que

$$\nabla f(x,y) = (2xy^3\ , 3x^2y^2 - 4)$$

por lo tanto $\nabla f(2,-1) = (-4\ ,8)$

Vemos que $\vec{v}$ no es un vector unitario, pero como $\|\vec{u}\| = \sqrt{29}$, el vector unitario en la dirección de $\vec{u}$ es:

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\ , \frac{5}{\sqrt{29}}\right)$$

Entonces, la derivada direccional la obtenemos de la siguiente manera:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot \vec{v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,-1) = (-4\ ,8) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{29}}\ , \frac{5}{\sqrt{29}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,-1) = \frac{-4 \cdot 2 + 8 \cdot 5}{\sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{29}}$$

EJEMPLO 2

Dada la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = sen(x^2 + y^2)$$

Hallar la derivada direccional que en el punto $P(1,1)$, en la dirección que va desde este punto al punto $Q = (3,2)$.

Necesitamos las derivadas parciales de f, no solo para verificar si la función es diferenciable, sino también para definir el gradiente de esta.

$$f_x = 2x \cdot \cos(x^2 + y^2)$$

$$f_y = 2y \cdot \cos(x^2 + y^2)$$

La función es diferenciable, definimos el gradiente como:

$$\nabla f(x,y) = (2x \cdot \cos(x^2 + y^2)\ ,2y \cdot \cos(x^2 + y^2))$$

La dirección del vector director esta dado por

$$\vec{u} = Q - P = (3,2) - (1,1) = (2,1)$$

Debemos normalizar el vector

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{(2,1)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Por otro lado, las derivadas parciales evaluadas en el punto P.

$$f_x(1,1) = 2 \cdot \cos(2)$$

$$f_y(1,1) = 2 \cdot \cos(2)$$

Entonces, obtenemos la derivada direccional de la siguiente manera:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1) = (2\cos(2)\ , 2\cos(2)) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1) = (2\cos(2))\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + (2\cos(2))\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{6}{\sqrt{5}}\cos(2)$$

EJEMPLO 3

Hallar la derivada direccional de la siguiente función en el punto $P = (1,1,1)$ en la dirección del vector $\vec{u} = (2, -3, 1)$

$$f(x, y, z) = x^{y^z}$$

Búsqueda de derivadas parciales.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^z x^{y^z - 1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z x^{y^z} y^{z-1} \ln(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^{y^z} y^z \ln(x) \ln(y)$$

Definimos el gradiente como:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(y^z x^{y^z-1}, z x^{y^z} y^{z-1}\ln(x), x^{y^z} y^z \ln(x)\ln(y)\right)$$

Evaluada en el punto $P = (1,1,1)$

$$\nabla f(1,1,1) = (1,0,0)$$

Como el vector $\vec{u} = (2,-3,1)$, debemos normalizarlo

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{(2,-3,1)}{\sqrt{14}} = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0,z_0) = \nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot\vec{v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1,1) = (1,0,0)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{14}}, -\frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right) = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

EJEMPLO 4

Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$. ¿en qué dirección es igual a cero la derivada de esta función en el punto(1,1)?

Sabemos que

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$$

Y debe pasar que

$$\nabla f(1,1)\cdot(a,b) = 0$$

Es decir, que tenemos:

$$(2,2)\cdot(a,b) = 0$$

$$2a + 2b = 0$$

$$-a = b$$

Debe tenerse en cuenta, que el vector (a,b) debe ser normal para calcularse la derivada direccional, entonces

$$\sqrt{a^2+b^2} = 1$$

$$a^2 + b^2 = 1$$

Sabiendo que $b = -a$

$$a^2 + a^2 = 1$$

$$a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por lo tanto, los vectores buscados son:

$$v_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad v_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Plano tangente

EJEMPLO 1

Hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie $z = x^2y + e^{x^2+y^2}$ en el punto $P = (1,1)$.

Tenemos que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 2xe^{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2ye^{x^2+y^2}$$

Además z en $(1,1)$ queda $z = 1 + e^2$ y

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 2 + 2e^2 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = 1 + 2e^2$$

La ecuación del plano tangente está dada por

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$ax + by + cz = d$$

$$\pi: (x, y, z) \cdot N = P \cdot N$$

Entonces

$$z = 1 + e^2 + (2 + 2e^2)(x - 1) + (1 + 2e^2)(y - 1)$$

$$\vec{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$$

Y la ecuación de la recta normal

$$R^{\perp}: \alpha(t) = (1, 1, 1 + e^2) + t(2 + 2e^2, 1 + 2e^2, -1)$$

EJEMPLO 2

Determinar el plano tangente a la grafica $f(x, y) = z = x^2 + y^4 + e^{xy}$ en el punto $(1, 0, 2)$.

Tenemos que $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ y $z_0 = f(x_0, y_0) = 2$

Las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + ye^{xy} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + xe^{xy}$$

En $(1,0)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = 2 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(1,0) = 1$$

Por lo tanto, la ecuación del plano tangente queda definida como:

$$z = 2 + 2(x - 1) + 1(y - 0)$$

$$z = 2x + y$$

Ejercicio adicional

Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2 - 4x$ que sea perpendicular a la recta $\alpha(t) = (3 + 4t, -2t, 1 + t)$ con $t \in \mathbb{R}$.