Resolución TP5:

Ejercicio 7

Tomando $F(x,y,z,u) = xy + yz + zu - 3ue^{x-2y+u} = 0$ Calcular la derivada direccional para la función implícita $u = f(x,y,z)$ en el punto $P = (1,1,1,1)$ y en dirección $\vec{v} = (1,-1,1)$.

Herramientas:

- Se deben cumplir las 3 condiciones del teorema para $F(x,y,z,u) = 0$ e $u = f(x,y,z)$
  - $P \epsilon F(x,y,z,u) = 0$
  - Las derivadas F_x F_y F_z y F_u son continuas en el entorno del punto.
  - $F_u(P) \neq 0$
- Si se cumple TFI entonces existe $u = f(x,y,z)$ en P y sus derivadas son:
  - $f_x(x_0,y_0,z_0) = -\frac{F_x(P)}{F_u(P)}$
  - $f_y(x_0,y_0,z_0) = -\frac{F_y(P)}{F_u(P)}$
  - $f_z(x_0,y_0,z_0) = -\frac{F_z(P)}{F_u(P)}$
- Si se cumple TFI entonces existe $u = f(x,y,z)$ es diferenciable en P y sus derivadas direccional se puede calcular con:
  - $f_{\vec{v}}(x_0,y_0,z_0) = \nabla f(x_0,y_0,z_0) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$
  - $f_{\vec{v}}(x_0,y_0,z_0) = \left(-\frac{F_x(P)}{F_u(P)}, -\frac{F_y(P)}{F_u(P)}, -\frac{F_z(P)}{F_u(P)}\right) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Resolviendo:

- $¿F(P) = 0?$

$$xy + yz + zu - 3ue^{x-2y+u} = 0$$
$$1^2 + 1^2 + 1^2 - 3 \cdot 1 \cdot e^{1-2+1} = 0$$
$$3 - 3 = 0$$

Se cumple el primer enunciado.

- ¿Son F_x , F_y, F_z y F_u continuas en $E(P)$?

$$Dom(F) = \mathbb{R}^4$$

$$F_x = y - 3u(e^{x-2y+u})$$
$$F_y = x + z - 3u(-2e^{x-2y+u})$$
$$F_z = y + u$$
$$F_u = z - 3(e^{x-2y+u} + ue^{x-2y+u})$$

Lineales y Exponenciales son continuas en $\mathbb{R}^4$ y se cumple el segundo enunciado.

- ¿ $F_u(P) \neq 0$?

$$F_u(\mathrm{P}) = 1 - 3(e^{1-2+1} + 1e^{1-2+1})$$
$$F_u(P) = 1 - 3(1+1) = -5$$

Al ser $F_u(P) = -5$ se cumple el tercer enunciado.

Se cumple TFI por lo tanto existe $u = f(x, y, z)$ en P y sus derivadas son:

- $f_x(x_0, y_0, z_0) = -\frac{F_x(P)}{F_u(P)}$
- $f_y(x_0, y_0, z_0) = -\frac{F_y(P)}{F_u(P)}$
- $f_z(x_0, y_0, z_0) = -\frac{F_z(P)}{F_u(P)}$

$$F_x = y - 3u(e^{x-2y+u}) \rightarrow \qquad F_x(\mathrm{P}) = -2$$
$$F_y = x + z - 3u(-2e^{x-2y+u}) \rightarrow \qquad F_y(\mathrm{P}) = 8$$
$$F_z = y + u \rightarrow \qquad F_z(\mathrm{P}) = 2$$
$$F_u = z - 3(e^{x-2y+u} + ue^{x-2y+u}) \rightarrow \qquad F_u(P) = -5$$

$$f_x(1,1,1) = -\frac{F_x(P)}{F_u(P)} \qquad f_y(1,1,1) = -\frac{F_y(P)}{F_u(P)} \qquad f_z(1,1,1) = -\frac{F_z(P)}{F_u(P)}$$
$$f_x(1,1,1) = -\frac{-2}{-5} \qquad f_y(1,1,1) = -\frac{8}{-5} \qquad f_z(1,1,1) = -\frac{2}{-5}$$
$$f_x(1,1,1) = -\frac{2}{5} \qquad f_y(1,1,1) = \frac{8}{5} \qquad f_z(1,1,1) = \frac{2}{5}$$

$$\nabla f(1,1,1) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{8}{5}, \frac{2}{5}\right)$$
$$\vec{v} = (1,-1,1) \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$f_{\vec{v}}(1,1,1) = \nabla f(1,1,1) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$f_{\vec{v}}(1,1,1) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{8}{5}, \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}}$$

$$f_{\vec{v}}(1,1,1) = -\frac{2}{5\sqrt{3}} - \frac{8}{5\sqrt{3}} + \frac{2}{5\sqrt{3}}$$

$$f_{\vec{v}}(1,1,1) = -\frac{8}{5\sqrt{3}}$$