ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA I
MÓDULO 5 – TRANSFORMACIONES LINEALES – TERCERA CLASE
COMPOSICIÓN E INVERSA- TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Lee las páginas 272 a 277 de Apunte III TEJIENDO EL ÁLGEBRA LINEAL.
Realiza todos los ejercicios y actividades propuestas en esas páginas.

En este apunte encontrarás otras explicaciones y ejemplos correspondientes a estos temas y el tratamiento de transformaciones geométricas y su composición.
También en el archivo llamado M5. TERCERA CLASE. EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA están propuestos otros ejercicios y actividades.

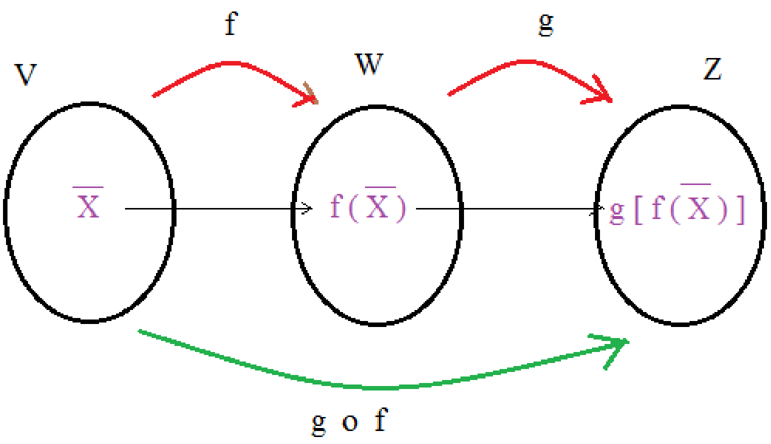
COMPOSICIÓN DE TRANSFORMACIONES LINEALES

Sean V, W y Z espacios vectoriales reales, f: $V \to W$ y g: W$\to Z$ transformaciones lineales. Entonces podemos hacer g seguida de f, para formar la composición de las dos funciones, aplicar f y a sus imágenes aplicar g, esta función se simboliza $g \circ f$ y está de finida de V →Z.
Para que $g \circ f$ se pueda realizar el conjunto de llegada de f debe coincidir con el Dominio de g y la transformación compuesta resultante tiene como Dominio al Dominio de f y como llegada al conjunto de llegada de g , $g \circ f$: V →Z.

La definición tomada del Cálculo es $\boxed{g \circ f\,(\vec{X}) = g\,[f\,(\vec{X})]}$

Recordar que la composición de funciones es una operación entre funciones, que a partir de dos funciones f y g permite obtener su compuesta g o f , esta función compuesta hace corresponder a cada elemento del Dominio de f , el correspondiente a través de g , del correspondiente a través de f de ese elemento.
Implica la aplicación sucesiva de las dos funciones, primero se aplica f y a las imágenes se les aplica g, la función compuesta permite pasar del primer elemento al tercero.

Te cuidado que se aplica primero f y luego g, pero se escribe al revés $g \circ f$.
Como con las expresiones coloquiales, si decimos el cuadrado del siguiente de un número, primero hacemos el siguiente y luego el cuadrado. Ejemplo: el cuadrado del siguiente de 3 es: primero el siguiente, 4, y luego el cuadrado, 16. Lo resolvemos empezando por la última función.



Sean V, W y Z espacios vectoriales reales y f: $V \to W$, g: W$\to Z$ transformaciones lineales. Entonces la función $g \circ f : V \to Z$ es una transformación lineal.

Si V = Z podemos pensar también en realizar $f \circ g$ que significa primero aplicar *g* y a continuación *f*.

Ejemplo:

f: $R^2 \to R^3$: f(x;y) = (x , x + y , y) y g: $R^3 \to R^2$:g(x;y;z) = (x + y ; z)

Hallaremos g o f:

Analicemos primero los espacios vectoriales, f va de R^2 en R^3, su conjunto de llegada R^3 coincide con el Dominio de g, que va de $R^3 \to R^2$, entonces la composición se puede realizar y está definida de R^2 (Dominio de f) en R^2 (Conjunto de llegada de g).

$$g \circ f : R^2 \to R^2$$

Para entender mejor la composición, veamos las imágenes de algún vector de R^2, como el (3 ; - 5) f(3 ; -5) = (3 ; -2 ; -5) a la imagen le aplicamos g, g (3 ; -2 ; -5) = (1 ; -5). La función compuesta g o f que estamos buscando, aplicada al (3 ; - 5), debe tener como transformado al (1 ; -5) directamente.

Usaremos las fórmulas de las funciones

$(g \circ f)(\vec{v})$ = g [f $(\vec{v})$] = g [f (x ; y)] porque f está definida para vectores de R^2

= g [(x ; x + y ; y)] hemos aplicado la definición de f, ahora aplicamos g a ese vector de R^3

= (x + x + y ; y)   porque al aplicar g, se obtiene un vector de dos componentes, cuya primera componente es la suma de las dos primeras y su segunda componente es la tercera. Operando resulta

= (2 x + y ; y)   (1)

Resultó entonces g o f : $R^2 \rightarrow R^2$ $(g \circ f)$ (x ; y) = (2 x + y ; y) obtuvimos otra transformación lineal que es la compuesta de f y g .

Probemos con el vector (3 ; - 5) que habíamos usado antes, $(g \circ f)$ (3 ; -5) = (2 . 3 + (-5) ; -5) = (1 ; -5) que es la misma imagen que obtuvimos antes.

MATRIZ DE LA COMPOSICIÓN DE DOS TRANSFORMACIONES LINEALES

Sean f: $R^n \rightarrow R^m$ y g: $R^m \rightarrow R^p$ lineales.

Si f($\vec{x}$) = M(f) · $\vec{x}$, M(f) $\in R^{mxn}$, g(x) = M (g)· $\vec{x}$, M (g) $\in R^{p\,x\,m}$ y

g o f ($\vec{x}$) = M(g o f) · $\vec{x}$, M (g o f) $\in R^{pxn}$, entonces:

M(g o f) . $\vec{x}$ = (g o f) (. $\vec{x}$) = g [f (. $\vec{x}$)] = g [M(f) . $\vec{x}$] = M(g) . [M(f) . $\vec{x}$] = [M(g) . M(f)] . $\vec{x}$

Como esto vale $\forall \vec{x} \in R^n$ resulta:

$$M(\, g \circ f\,) \,.\, \vec{x} = [M(g) \,.\, M(f)\,] \,.\, \vec{x}$$

Es decir, la matriz de la composición de f con g es el producto de la matriz asociada a g por la matriz asociada a f.

Ejemplo:

Retomemos las funciones anteriores

f: $R^2 \rightarrow R^3$: f(x;y) = (x , x+y , y) y g: $R^3 \rightarrow R^2$: f(x;y;z) = (x+y ; z)

Sus matrices representativas son

M(f) = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es la matriz perteneciente a R^{3x2} asociada a f

$M(g) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es la matriz perteneciente a R^{2x3} asociada a g

Para encontrar la matriz asociada a la transformación lineal g o f multiplicamos la matriz asociada a g por la matriz asociada a f , en ese orden.

Matriz (g o f) = Matriz (g) . Matriz (f) = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

M (g o f) $= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Observemos que: si a partir de la matriz de la transformación compuesta, obtenemos la expresión de la T.L. obtenemos la fórmula a la que llegamos antes.

(g o f) (x ; y) = $= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ y \end{bmatrix}$

Que es la expresión (1)

Como en este ejemplo V = Z = R^2 podemos realizar la composición en el otro orden, primero g y luego f (f o g)

La función f o g estará definida del Dominio de g al conjunto de llegada de f, en este caso de $R^3 \to R^3$.

Usaremos primero las fórmulas de las funciones

(f o g) $(\vec{v})$ = f [g $(\vec{v})$] = f [g (x ; y ; z)] porque g está definida para vectores de R^3 .

= f [(x + y ; z)] hemos aplicado la definición de f, ahora aplicamos g a ese vector de R^3

= (x + y ; x + y + z ; z) ya que f da como imagen un vector de 3 componentes, la primera es igual a la primera del vector de dos componentes del Dominio, la segunda es la suma de las dos componentes y la tercera es igual a la tercera.

Si empleamos las matrices M (f o g) = [M(f) . M(g)]

M(f o g) $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ que es la matriz correspondiente a la transformación que obtuvimos antes.

INVERSA DE TRANSFORMACIONES LINEALES

Si f: $V \to W$ es un isomorfismo, una función biyectiva, existe la función inversa de f:

$f^{-1}: W \to V$ de manera que $f^{-1} \circ f = I$ y $f \circ f^{-1} = I$

Siendo I la función identidad, $I(\vec{x}) = \vec{x}$, que a cada vector le asigna el mismo vector. La amtriz asociada a la función I es la matriz identidad del espacio vectorial correspondiente.

Recordemos que la función inversa de una función biyectiva es aquella que a la imagen de cada elemento le hace corresponder el elemento que lo tenía como imagen.

Se intercambian el Dominio y el conjunto Imagen (que coincide con el conjunto de llegada por ser sobreyectiva)

Si f es un isomorfismo, su función inversa f^{-1} es una transformación lineal y también isomorfismo.

Recordemos que es necesario que las dimensiones de V y W sean iguales para ser un isomorfismo.

Si f(x) = x $\forall x \in R^n$, es f(x) = I·x, donde I es la matriz identidad en R^{nxn} .

Si f es un isomorfismo y f^{-1} su inversa como $f(x) = M(f) . \vec{x}$, $f^{-1}(x) = M(f^{-1}) \vec{x}$, con M(f) y $M(f^{-1}) \in R^{nxn}$, resulta:

$$I \cdot \vec{x} = \vec{x} = (f^{-1} \circ f)(\vec{x}) = (M(f^{-1}) . M(f)). \vec{x} \quad \forall \vec{x} \in R^n$$

Luego: $M(f^{-1}) . M(f) = I$

De manera similar, se ve que:

$$M(f) . M(f^{-1}) = I \quad \text{es decir } M(f^{-1}) . M(f) \text{ son matrices inversas.}$$

La matriz de la inversa de f es la inversa de la matriz de f: $\boxed{M(f^{-1}) = [M(f)]^{-1}}$

Ejemplo:

Sea la T.L. f : $R^3 \to R^3$ / f (x ; y ; z) = (2 x – z ; y ; - 3 x + 2 z)

Queda para el lector probar que es un isomorfismo.

La matriz asociada a la transformación f es M(f) = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Encontraremos laT.L. inversa calculando la matriz inversa de M (f)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) 2F_3 + 3F_1 \to F_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) F_1 + F_3 \to F_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) F_1 \to \tfrac{1}{2} F_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Entonces la matriz que se encuentra a la derecha es la inversa buscada.

$[M(f)]^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a la inversa de la función f

Su expresión es $f^{-1}(x ; y ; z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + z \\ y \\ 3x + 2z \end{pmatrix}$

$f^{-1}(x ; y ; z) = (2x + z ; y ; 3x + 2z)$

Mostremos en un punto en particular, por ejemplo: (2 ; 3 ; - 5)

f(2 ; 3 ; - 5) = (2 . 2 – (-5) ; 3 ; - 3 . 2 + 2 . (- 5)) = (9 ; 3 ; -16)

f^{-1}(9 ; 3 ; -16) = (2 . 9 + (-16) ; 3 ; 3 . 9 + 2 . (-16)) = (2 ; 3 ; - 5) volvemos al vector original

SEGUIMOS CON LAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICA

Las clases anteriores trabajamos con transformaciones geométricas en el plano, estas transformaciones también pueden definirse empleando la matriz asociada.

La simetría central estaba dada por **P= (x; y)** $\longrightarrow$ S_o (**P**)= (–x ; –y)

La matriz asociada a ella M (S_o) puede encontrarse hallando las imágenes de los versores de la base canónica i y j.

S_o (1 ; 0 **)=** (–1 ; 0)

S_o (0 ; 1 **)=** (0 ; -1) colocando estas imágenes en columna es: M (S_o) = $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Análogamente las simetrías según el eje x, eje y, proyección sobre el eje x y proyección sobre el eje y producen las matrices:

$M(S_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $M(S_y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $M(P_x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $M(P_y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Obtuvimos también que la rotación de un ángulo θ del punto (x, y). recordemos que su expresión estaba dada por:

$R\theta((x, y)) = (x .\cos\theta - y \operatorname{sen}\theta , x \operatorname{sen}\theta + y .\cos\theta)$

Las imágenes de los versores de la base canónica son:

$R\theta((1, 0)) = (1 .\cos\theta - 0 \operatorname{sen}\theta , 1 \operatorname{sen}\theta + 0 .\cos\theta) = (\cos\theta ; \operatorname{sen}\theta)$

$R\theta((0, 1)) = (0 .\cos\theta - 1 \operatorname{sen}\theta , 0 \operatorname{sen}\theta + 1 .\cos\theta) = (-\operatorname{sen}\theta , \cos\theta)$

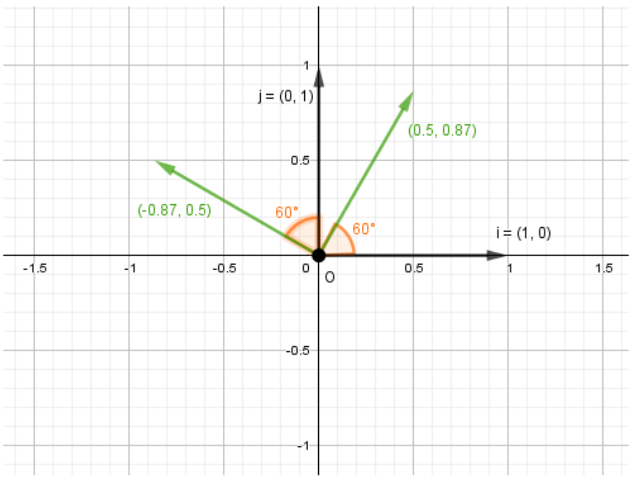
Entonces la matriz $M(R_\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\ \theta \\ sen\ \theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Si consideremos una rotación de 90º horaria, es decir - 90º.
Recordando que cos (-90º) = 0 y sen (- 90º) = -1

Resulta $M(R_{-90°}) = \begin{bmatrix} \cos(-90º) & -sen\ (-90º) \\ sen\ (-90º) & \cos\ (-90º) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Que también puede obtenerse haciendo $\mathbf{R_{-90°}}((1, 0))$= .(0, -1) y $\mathbf{R_{-90°}}((0, 1))$ = (1, 0) que son las columnas de la matriz.

Si consideramos un giro de 60º = $\frac{\pi}{3}$



$\mathbf{R_{60°}}((1, 0))$= ($\cos\frac{\pi}{3}$; $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$) = $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$\mathbf{R_{60°}}((0, 1))$= $\left(-\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}, \cos\frac{\pi}{3}\right)$ =

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ que son las columnas de la matriz.

$\mathbf{M(R_{60°})} = \begin{bmatrix} \cos 60º & -sen\ 60º \\ sen\ 60º & \cos\ (60º) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Si multiplicamos la matriz representativa por el vector columna genérico obtenemos la fórmula de la T.L.

$$R_{60^o}((x\,;y))=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R_{60^o}}((x\,;y))= =\left(\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y;\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)$$

También es posible componer transformaciones geométricas en el plano

Ejemplo:

Consideremos la simetría axial de eje x $\quad S_x(x\,;y)=(x\,;-y)$ $\quad M(S_x)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$,

Y la Rotación horaria de 90º $\quad R_{-90^o}(x\,;y)=(y\,;-x)$ $\quad M(R_{-90^o})=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

Y el trapecio de vértices A= (-1 ; 1) , B = (4 ; 1) , C = (4 ; 4) , D = (- 2 ;4)

Al trapecio le aplicamos sucesivamente la Simetría axial y a su imagen la Rotación horaria de 90º. Sus transformados son:

A= (-1 ; 1) , A’= S_x (A) = (-1 ; -1) A” = R_{-90^o} (A’) = R_{-90^o} [S_x (A)] = (-1 ; 1)
B = (4 ; 1) , B’= S_x (B) = (4 ; -1) B” = R_{-90^o} (B’) = R_{-90^o} [S_x (B)] = (-1 ; -4)
C = (4 ; 4) , C’= S_x (C) = (4 ; -4) C” = R_{-90^o} (C’) = R_{-90^o} [S_x (C)] = (-4 ; -4)
D = (- 2 ;4) D’= S_x (D) = (-2 ; -4) D” = R_{-90^o} (D’) = R_{-90^o} [S_x (D)] = (-4 ; 2)

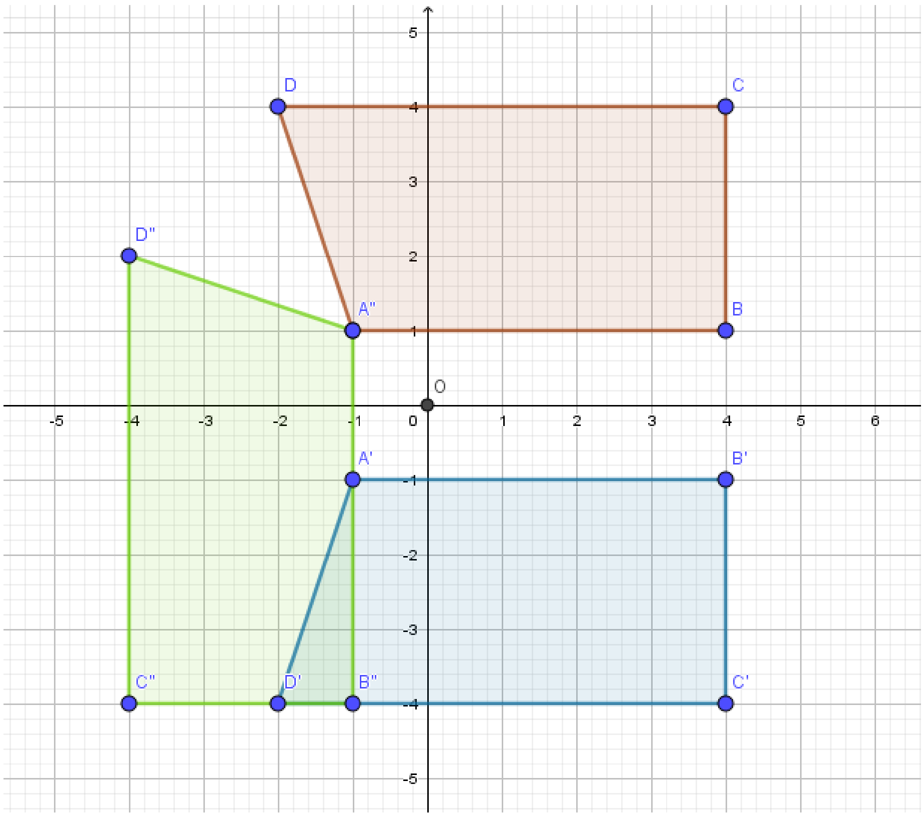
Si realizamos la composición usando las fórmulas, resulta:

$(R_{-90^o}\text{ o } S_x)(x\,;y)= R_{-90^o}[S_x(x\,;y)]= R_{-90^o}[(x\,;-y)]=(-y\,;-x)$

Con ella podemos obtener directamente los puntos A”,B” , C” , D”

A” = (R_{-90^o} o S_x) (-1 ; 1) = (-1 ; 1) B” = (R_{-90^o} o S_x) (4 ; 1) = (-1 ; -4)

C” = (R_{-90^o} o S_x) (4 ; 4) = (-4 ; -4) D” = (R_{-90^o} o S_x) (-2 ; 4) = (-4 ; 2)



Si trabajamos con las matrices, la matiz de la composición es el producto de las matrices.

$$M(R_{-90^\circ} \text{ o } S_x) = M(R_{-90^\circ}) \cdot M(S_x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta transformación compuesta es una simetría axial con respecto a la recta de ecuación y = - x, bisectriz del segundo y tercer cuadrante.

Para obtener los transformados de los vértices del trapecio, podemos realizar una única multiplicación de matrices, si armamos una matriz de datos con los cuatro puntos colocados como columnas

Como los vértices son A= (-1 ; 1) , B = (4 ; 1) , C = (4 ; 4) , D = (- 2 ;4)

Matriz de Datos $D = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

Multiplicamos la matriz de la composición por la matriz de Datos y obtenemos las imágenes de los vértices en columnas.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -4 & -4 \\ 1 & -4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

A” = (-1 ; 1)   B” = (-1 ; -4)   C” = (-4 ; -4)   D” = (-4 ; 2).

También podemos observar cómo se transforma una recta a través de esta composición.

Lo haremos con la recta de ecuación

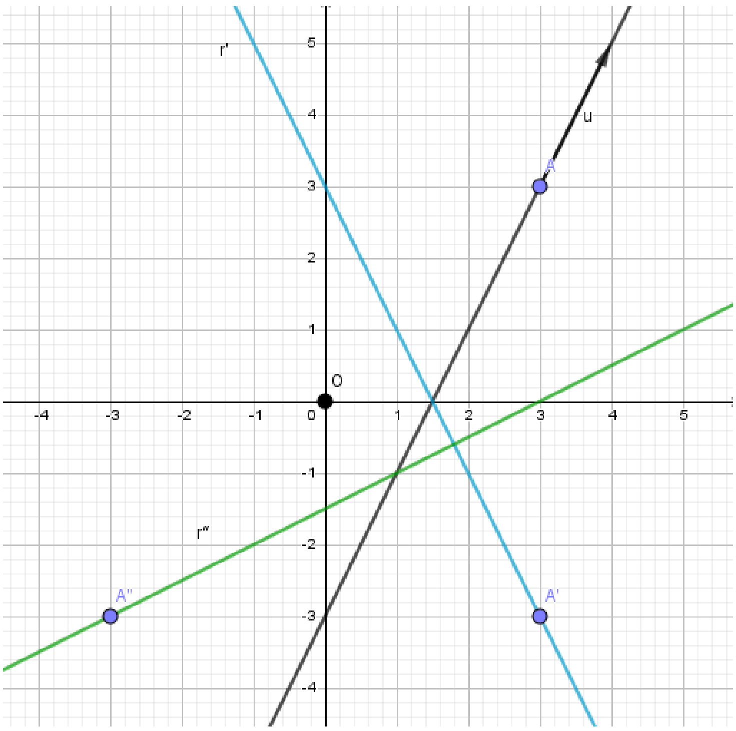
$\vec{x}$ = t (1 ; 2) + (3 ;3) su ecuaciones paramétricos son $\begin{cases} x = t+3 \\ y = 2t+3 \end{cases}$ y su ecuación explícita es y = 2 x – 3

La matriz de Datos será $\begin{bmatrix} t+3 \\ 2t+3 \end{bmatrix}$

Multiplicamos usando la matriz de la composición : $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t+3 \\ 2t+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t-3 \\ -t-3 \end{bmatrix}$

Y resulta que el transformado es la recta de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = -2t-3 \\ y = -t-3 \end{cases}$ ecuación vectorial $\vec{x}$ = t (-2 ; -1) + (-3 ;-3) y ecuación explícita y = $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

Gráficamente:



Al realizar la composición pasamos directamente de la recta graficada en negro y = 2 x – 3 a la recta graficada en verde y = $\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

Videos que pueden ayudarte con estos temas

https://www.youtube.com/watch?v=YJfS4_m_0Z8

https://www.youtube.com/watch?v=8f7UUnbLqp0