Integrales dobles
Coordenadas cartesianas.
Guía de clase. Com 02

Cambio en el orden de integración

Ejemplo

Calcular el volumen comprendido por la superficie de ecuación $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ (paraboloide circular) y el plano $z = 0$, para los puntos (x, y) del recinto triangular de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0, -1)$.

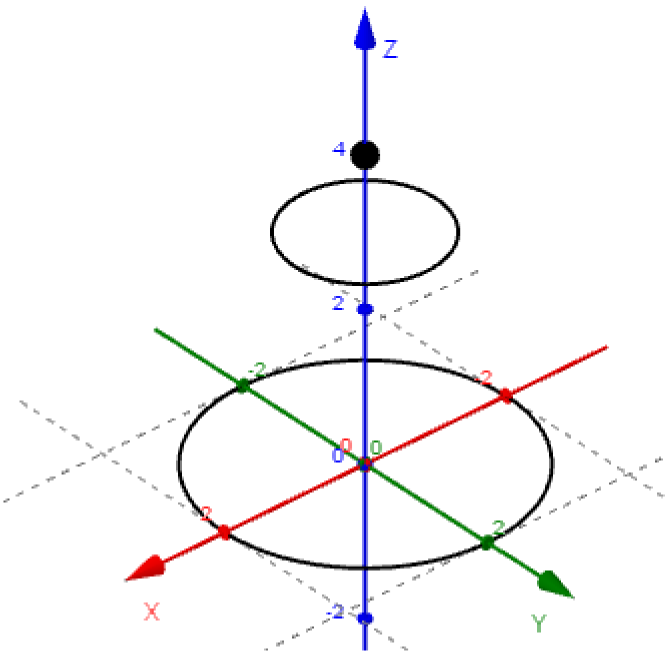
Resolución:

Gráfico del paraboloide circular

Algunas curvas de nivel son

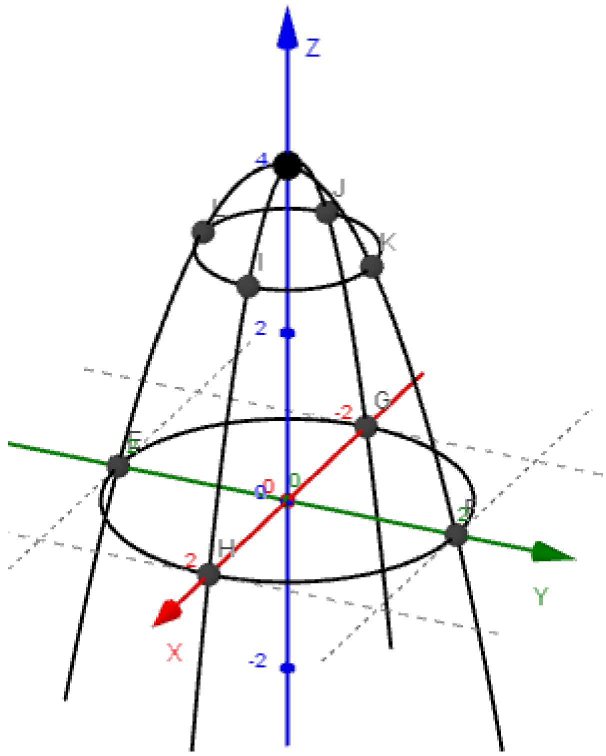
$$z = 4, \quad (x, y) = (0,0)$$
$$z = 3, \quad x^2 + y^2 = 1$$
$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = 4$$

Las trabajaremos como curvas de la superficie $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ en el sistema coordenado tridimensional



Curvas auxiliares para $x = 0, z = 4 - y^2$,

Para $y = 0, z = 4 - x^2$.



La superficie en cuestión es

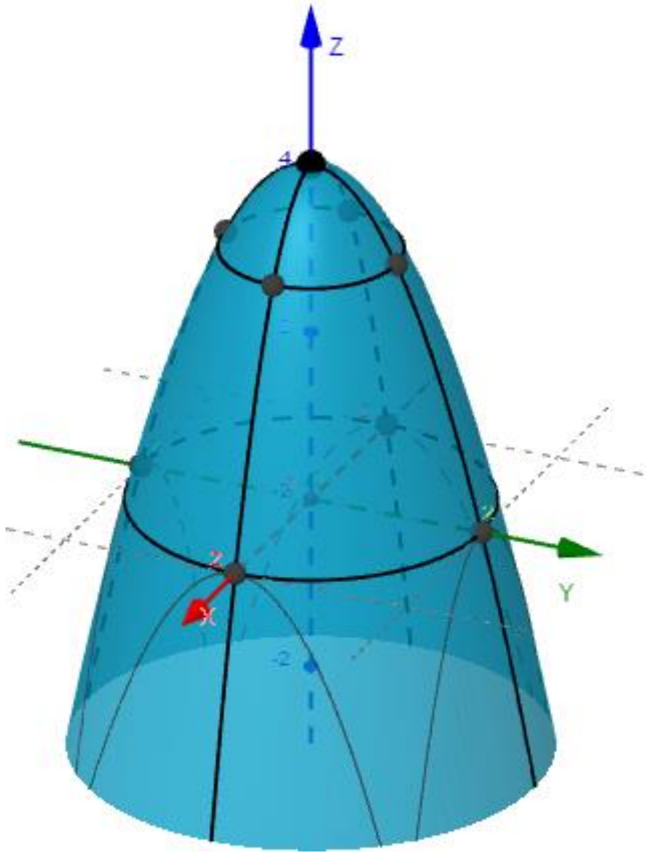
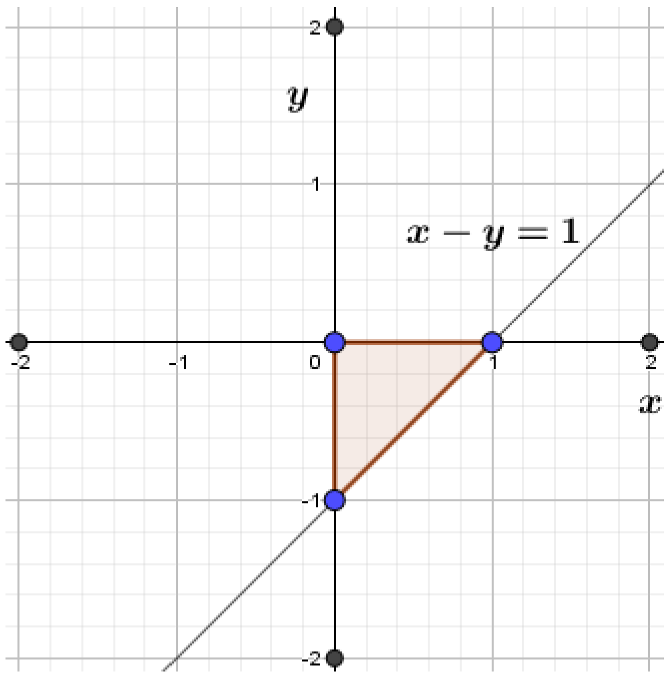


Gráfico del recinto de integración, triángulo de vértices (0,0), (1,0) y (0, −1).



Descripciones algebraicas del recinto

Tipo I	**Tipo II**
$x - 1 \leq y \leq 0$	$0 \leq x \leq 1 + y$
$0 \leq x \leq 1$	$-1 \leq y \leq 0$
$\underbrace{dy\ \ dx}_{\substack{ORDEN\ \ DE \\ INTEGRACIÓN}}$	$dx\ \ dy$

Integrales para el cálculo del volumen

$$Vol = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x-1}^{0} (4 - x^2 - y^2)\, dy\, dx =$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=x-1}^{0} (4 - x^2 - y^2)\, dy \right) dx =$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left(-\frac{1}{3} y^3 - x^2 y + 4y \right)_{y=x-1}^{0} dx =$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left(\frac{4}{3}\,x^3 - \,2x^2 - \,3x \,+\, \frac{11}{3}\right) dx = \boxed{\frac{11}{6}}$$

$$Vol = \int_{y=-1}^{0} \int_{x=0}^{1+y} (4 - x^2 - y^2)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{y=-1}^{0} \left(\int_{x=0}^{1+y} (4 - x^2 - y^2)\, dx \right) dy =$$

$$= \int_{y=-1}^{0} \left(-\frac{1}{3}x^3 \,-\, x\,y^2 \,+\, 4x\right)_{x=0}^{1+y} dy =$$

$$= \int_{y=-1}^{0} \left(-\frac{4}{3}\,y^3 \,-\, 2y^2 \,+\, 3y \,+\frac{11}{3}\right) dy = \boxed{\frac{11}{6}}$$