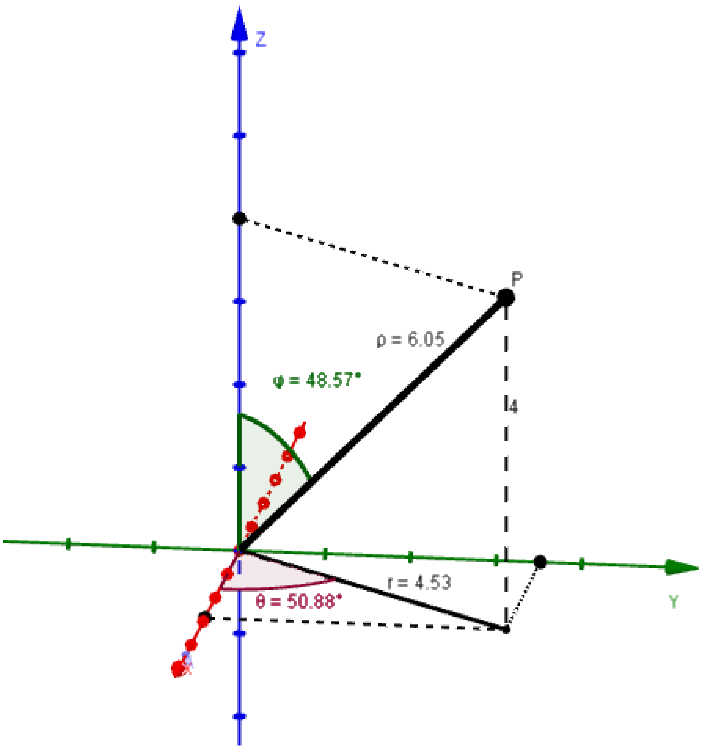
Integrales triples
Coordenadas esféricas.
Guía de clase. Com 02

Las coordenadas esféricas o polares espaciales, son otra manera de ubicar un punto en el espacio, se usará para ello la distancia del punto al origen, identificada con la letra griega ρ (rho), el ángulo que forma el segmento $\overline{0P}$ con el semieje z positivo, identificado con la letra griega φ (phi o varphi), y el ya usado ángulo θ, formado por el segmento r y el semieje positivo x.



Link al applet de geogebra

https://www.geogebra.org/m/btxfckrj

$$\begin{cases} x = x(\rho,\theta,\varphi) = r\ \cos(\theta) = \overbrace{\rho\,\mathrm{sen}(\varphi)}^{r}\ \cos(\theta) \\ y = y(\rho,\theta,\varphi) = r\ \mathrm{sen}(\theta) = \rho\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\varphi) \\ z = z(\rho,\theta,\varphi) = \rho\cos(\varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq 2\,\pi \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \end{cases}$$

Se define entonces como la transformación de cambio de coordenadas a la función

$$T(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi)\,,\rho\, sen(\theta)\operatorname{sen}(\varphi)\,,\rho\cos(\varphi)) = (x,y,z)$$
$$T\colon \Omega' \subseteq \mathbb{R}^3 \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$$

Con jacobiano

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\theta & x_\varphi \\ y_\rho & y_\theta & y_\varphi \\ z_\rho & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix}_{(\rho,\theta,\varphi)} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi) & -\rho\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi) & \rho\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi) & \rho\cos(\theta)\operatorname{sen}(\varphi) & -\rho\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & 0 & -\rho\operatorname{sen}(\varphi) \end{vmatrix} = -\rho^2\operatorname{sen}(\varphi)$$

La cual es inyectiva salvo en un conjunto de puntos de volumen nulo, ya que θ puede tomar los valores 0 y 2π, $0 \equiv 2\pi$, esto no afectará al cálculo integral. Para $\rho = 0$ no se asignan ángulos ni θ ni φ.

Cambio de variables a esféricas en integrales triples

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\ dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{\Omega'} f\big(x(\rho,\theta,\varphi), y(\rho,\theta,\varphi), z(\rho,\theta,\varphi)\big)\ \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}\right|\ d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

En este caso el módulo del jacobiano resulta

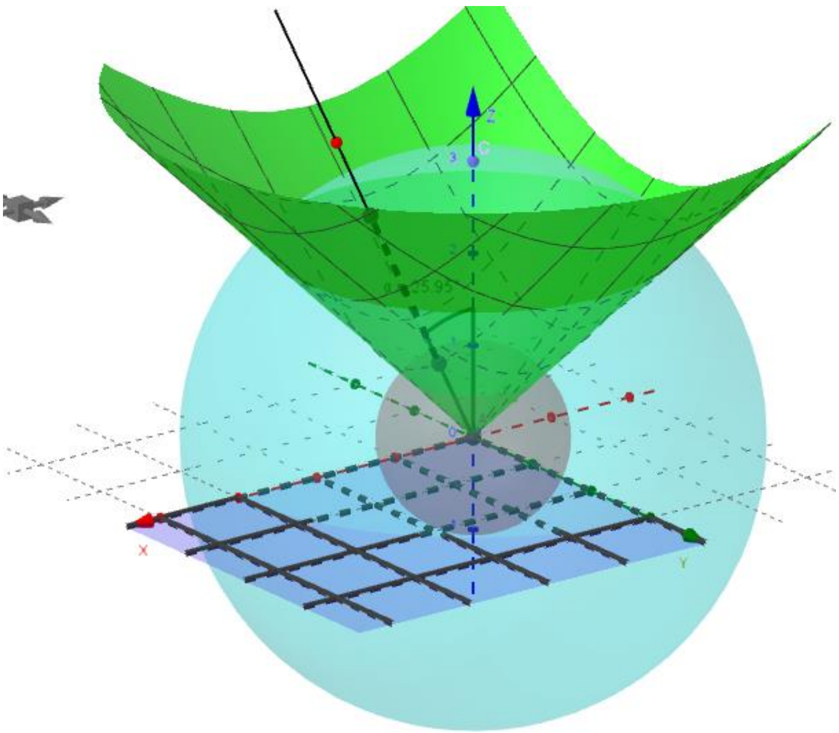
$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}\right| = |-\rho^2\operatorname{sen}(\varphi)| \overset{\substack{0\le\varphi\le\pi \\ \operatorname{sen}(\varphi)\ge 0}}{\hat{=}} \rho^2\operatorname{sen}(\varphi) \quad \text{Módulo del Jacobiano condicionado}$$

Ejercicio 1

Hallar el volumen del cuerpo delimitado por las esferas

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$$
$$S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 9$$
$$1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$$
$$\text{Con } z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ \ x \geq 0\,,\ \ y \geq 0\,,\ \ z \geq 0\,.$$
$$x \geq 0\,,\ \ y \geq 0\,,\ \ z \geq 0 \text{ Primer octante}$$
$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{Cono superior, } z \geq 0$$
$$\text{Si } y = 0, z = |x|,\ z = \pm x\,,\ z \geq 0$$
$$\text{Si } x = 0, z = |y|,\ z = \pm y\,,\ z \geq 0$$
$$z^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{Cono doble}$$

Res:



(Archivo geogebra: 20210602-Volumen Integ Triple Esfericas.ggb)

Fórmula para el cálculo de volumen en integrales triples

$$Vol = \iiint_V dx\, dy\, dz$$

$$V = \begin{cases} 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9 \\ z \ge \sqrt{x^2 + y^2} \\ x \ge 0, \;\; y \ge 0, \;\; z \ge 0 \end{cases}$$

Coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta)\ \operatorname{sen}(\varphi) \\ y = \rho\operatorname{sen}(\theta)\ sen\ (\varphi) \\ z = \rho\cos(\varphi) \end{cases} \qquad |J| = \rho^2\ sen\ (\varphi) \quad V' = \begin{cases} 1 \le \rho \le 3 \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Volumen en coordenadas esféricas

$$Vol = \iiint_V dx\, dy\, dz = \iiint_{V'} \rho^2\ sen\ (\varphi)\ d\rho\, d\varphi\, d\theta = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\rho=1}^{3} \rho^2\ sen\ (\varphi)\ d\rho\, d\varphi\, d\theta =$$

$$\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{3}\rho^3\right)\Big]_{\rho=1}^{3} (-\cos(\varphi))\Big]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{26}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - (-1)\right) = \frac{13}{6}\,\pi\left(2 - \sqrt{2}\right)$$

Si en lugar de tener un recinto delimitado por esfera y cono, fuera, esfera y paraboloide, las coordenadas esféricas no serían adecuadas y sí las coordenadas cilíndricas. Veamos el siguiente ejercicio.

Ejercicio

Calcular

$$\iiint_\Omega xy\ dx\, dy\, dz$$

Para Ω el recinto del espacio delimitado por $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$, y, $3z \ge x^2 + y^2$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \qquad z \ge 0, \qquad z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

$$3z = x^2 + y^2$$

$$z = \frac{x^2 + y^2}{3}$$

Hallar la curva intersección

$$3z + z^2 = 4$$

$$z^2 + 3z - 4 = 0$$

$$z_1 = 1$$

$$z_2 = -4 \;\; no\ corresponde, \Omega\ está\ en\ la\ región\ z \geq 0$$

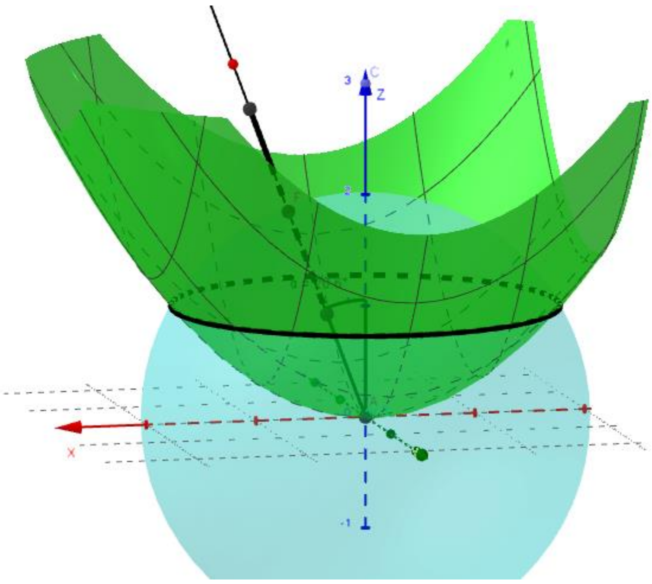
El recinto en el plano xy es

$$x^2 + y^2 \leq 3$$

$$0 \leq r \leq \sqrt{3}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\frac{r^2}{3} = \underbrace{\frac{x^2 + y^2}{3}}_{Paraboloide} \leq z \leq \underbrace{\sqrt{4 - (x^2 + y^2)}}_{Semiesfera} = \sqrt{4 - r^2}$$



Coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = x(r, \theta, z) = r\cos(\theta) \\ y = y(r, \theta, z) = r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ z = z(r, \theta, z) = z \end{cases}$$

Los límites de integración serán:

$$\Omega' : \begin{cases} \dfrac{r^2}{3} \leq z \leq \sqrt{4 - r^2} \\ 0 \leq r \leq \sqrt{3} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$|J| = r$$

$$\iiint_{\Omega} xy\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\Omega'} r\cos(\theta)\, r\,\mathrm{sen}(\theta)\ r\, dz\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\sqrt{3}} \int_{z=\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} r\cos(\theta)\, r\,\mathrm{sen}(\theta)\ r\, dz\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_{r=0}^{\sqrt{3}} \int_{z=\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} \int_{\theta=0}^{2\pi} r\cos(\theta)\, r\,\mathrm{sen}(\theta)\ r\, d\theta\, dz\, dr =$$