Álgebra y Geometría analítica II

Primer cuatrimestre de 2020

DEFINICIÓN: Independencia lineal entre vectores

Sea V un espacio vectorial y sea $A = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_k}\}$ un subconjunto de V

Diremos que el conjunto A es linealmente independiente (L.I.) sí y sólo sí se cumple:

Si existen $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k \in R$ tal que: $\alpha_1 . \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 . \overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_k . \overrightarrow{v_k} = \overrightarrow{0_V}$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$$

De lo contrario, diremos que el conjunto A es linealmente dependiente (L.D.)

Independencia Lineal por Definición

Si existen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k \in R$ tal que: $\alpha_1 . \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 . \overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_k . \overrightarrow{v_k} = \overrightarrow{O_V}$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$$

<u>En palabras</u>:

La única combinación lineal posible entre los vectores que dé por resultado al vector nulo, es aquella donde los escalares son todos ceros

- El sistema que armo para hallar los escalares es homogéneo, por lo tanto siempre será compatible
- Si el sistema resulta S.C.D, tendrá única solución, siendo ésta que todos los escalares sean Ceros. LOS VECTORES SERÁN L.I.
- Si el sistema resulta S.C.I, tendrá infinitas soluciones, es decir, que no necesariamente todos los escalares serán Ceros. LOS VECTORES SERÁN L.D.

Ejemplo 1:

Sean en R^{2x2}, los siguientes vectores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Decidir si los vectores dados son L.I. o L.D

Independencia Lineal por Definición

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\alpha_1.\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\alpha_2.\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}+\alpha_3.\begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\alpha_4.\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_4=0\\ -2\alpha_1-\alpha_2-2\alpha_3+\alpha_4=0\\ -\alpha_2-\alpha_4=0\\ -\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=0\end{cases}$$

Si el sistema es SCD, diremos que los vectores son L.I.

Si el sistema es SCI, diremos que los vectores son L.D.

Independencia Lineal por Definición

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ -2\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ -\alpha_2 - \alpha_4 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F3+F1\to F2 \\ F4+2F1\to F4}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F3+2F2\to F3 \\ F4+5F2\to F4}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F4-2F3\to F4]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \boxed{rg\ A = 3\ , rg\ M = 3\ \ y\ \ n = 4}$$

El sistema es SCI, y por lo tanto, diremos que los vectores son L.D.

Ejemplo 2:

Sea V un espacio vectorial, sea $B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ una base de V

y sea $A = \{2.\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_3}\ ,\ \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + 2.\overrightarrow{v_3}\ , \overrightarrow{v_1} - 3.\overrightarrow{v_2}\}$ un subconjunto de V

Decidir si A es o no una base de V

Independencia Lineal por Definición

$B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ una base de V $\rightarrow$ $\boxed{\dim V = 3}$

$A = \{2.\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_3}\,,\ \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + 2.\overrightarrow{v_3}\,, \overrightarrow{v_1} - 3.\overrightarrow{v_2}\}$ un subconjunto de V

Decidir si A es o no una base de V

A tiene 3 vectores que pertenecen a V por ser combinación lineal de los elementos de una base de V

⇩

Sólo basta ver que los vectores de A son L.I. para decir que A es base de V

Independencia Lineal por Definición

$B = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ una base de V

$V_1 - V_2 - 3V_3$

$A = \{2.\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_3}\ ,\ \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + 2.\overrightarrow{v_3}\ ,\underbrace{\overrightarrow{v_1} - 3.\overrightarrow{v_2}}\}$ un subconjunto de V

Veamos si el conjunto A es o no L.I.

$V_1 - V_2 - 3V_3$

$$\alpha_1.(2.\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_3}) + \alpha_2.(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + 2.\overrightarrow{v_3}) + \alpha_3.(\overrightarrow{v_1} - 3.\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{O_V}$$

Reorganizo armando una c.l. de los vectores de la base B

✓ $\quad -\alpha_3 \quad -3\alpha_3$

$$\underbrace{(2\alpha_1+\alpha_2 + \alpha_3)}_{K_1}.\overrightarrow{v_1} + \underbrace{(\alpha_2 - 3\alpha_3)}_{K_2}.\overrightarrow{v_2} + \underbrace{(-\alpha_1 + 2\alpha_2)}_{K_3}.\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{O_V}$$

Como los vectores den la base B son L.I, los escalares de esta combinación lineal deben ser 0

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

✓

$\alpha_2 - \alpha_3 = 0$

$-\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$F_3 + 2F_1 \to F_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

Independencia Lineal por Definición

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F3+2F1\to F3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F3-5F2\to F3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \end{array}\right)$$

$rg\ A = 3\,, rg\ M = 3\ \ y\ \ n = 3$

El sistema es SCD, y por lo tanto, diremos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

Los vectores del conjunto A serán L.I., y por lo tanto, diremos que A es una base de V

DEFINICIÓN: Independencia lineal entre vectores

Sea V un espacio vectorial y sea $A = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \dots, \overrightarrow{v_k}\}$ un subconjunto de V

Diremos que el conjunto A es linealmente independiente (L.I.) sí y sólo sí se cumple:

Si existen $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_k \in R$ tal que: $\alpha_1 . \overrightarrow{v_1} + \alpha_2 . \overrightarrow{v_2} + \cdots + \alpha_k . \overrightarrow{v_k} = \overrightarrow{O_V}$

$$\Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$$

De lo contrario, diremos que el conjunto A es linealmente dependiente (L.D.)