T P 7 Ej 2 c

Calcular la integral:

(a) Integrando primero respecto de x.

(b) Integrando primero respecto de y.

$$\iint_R \sqrt{y^3} + 2x^2 - xy^3 dxdy \qquad\qquad R = [0,1] \times [1,2]$$

Utilizaremos lo que se conoce como resolución iterada de integrales dobles.

Integrales iteradas.

Siendo f una función de dos variables que es integrable sobre el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Se usa la notación $\int_c^d f(x, y)dy$ para indicar que x se mantiene fija y $f(x, y)$ se integra respecto a y a partir de $y = c$ hasta $y = d$. Este procedimiento se llama integración parcial respecto de y.

$$A(x) = \int_{y=c}^{d} f(x, y)\, dy$$

Si ahora se integra la función A con respecto a x

$$\int_{x=a}^{b} A(x)\, dx = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c}^{d} f(x, y)\, dy \right) dx$$

Análogamente podemos indicar que y esta fija y $f(x, y)$ se integra respecto a x:

$$B(x) = \int_{x=a}^{b} f(x, y)\, dx$$

Obteniendo

$$\int_{y=c}^{d} B(x)\, dx = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=a}^{b} f(x, y)\, dx \right) dy$$

Por lo tanto, para integrar sobre el rectángulo R tenemos

$$\iint_R f(x, y)dxdy = \int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=a}^{b} f(x, y)\, dx \right) dy = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c}^{d} f(x, y)\, dy \right) dx$$

Retomando el ejercicio en el cual se pide:

(a) Integrando primero respecto de x.

$$\iint_R \sqrt{y^3}+2x^2-xy^3dxdy = \int_{y=1}^{2}\left(\int_{x=0}^{1}\sqrt{y^3}+2x^2-xy^3\,dx\right)dy$$

Resolvemos primero la integral que se encuentra dentro del paréntesis.

$$\int_{x=0}^{1} y^{\frac{3}{2}}+2x^2-xy^3\,dx = xy^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}x^3-\frac{x^2y^3}{2}\bigg|_{x=0}^{1} = y^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}-\frac{y^3}{2}$$

Ahora reemplazamos este resultado en la integral doble inicial.

$$\int_{y=1}^{2} y^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}-\frac{y^3}{2}dy = \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}y-\frac{y^4}{8}\bigg|_{y=1}^{2} = \frac{8}{5}\sqrt{2}-\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}-\frac{1}{8}\right) = \frac{8}{5}\sqrt{2}-\frac{193}{120}$$

(b) Integrando primero respecto de y.

$$\iint_R y^{\frac{3}{2}}+2x^2-xy^3dxdy = \int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=1}^{2} y^{\frac{3}{2}}+2x^2-xy^3\,dy\right)dx$$

Resolvemos primero la integral que se encuentra dentro del paréntesis.

$$\int_{y=1}^{2} y^{\frac{3}{2}}+2x^2-xy^3\,dy = \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}+2x^2y-\frac{xy^4}{4}\bigg|_{y=1}^{2} = \frac{8}{5}\sqrt{2}+4x^2-4x-\left(\frac{2}{5}+2x^2-\frac{1}{4}x\right)$$

$$\int_{y=1}^{2} y^{\frac{3}{2}}+2x^2-xy^3\,dy = \frac{8}{5}\sqrt{2}+2x^2-\frac{15}{4}x-\frac{2}{5}$$

Ahora reemplazamos este resultado en la integral doble inicial.

$$\int_{x=0}^{1} \frac{8}{5}\sqrt{2}+2x^2-\frac{15}{4}x-\frac{2}{5}dx = \left(\frac{8}{5}\sqrt{2}-\frac{2}{5}\right)x+\frac{2}{3}x^3-\frac{15}{8}x^2\bigg|_{x=0}^{1} = \frac{8}{5}\sqrt{2}-\frac{2}{5}+\frac{2}{3}-\frac{15}{8} = \frac{8}{5}\sqrt{2}-\frac{193}{120}$$