T P 04 Ej. 30-ii

Aplicando la regla de la cadena, calcular las derivadas de las funciones compuestas que se indican:

Calcular $\frac{dF}{dt}$ donde F = G o α $\begin{cases} G(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y), g_3(x,y)) = (cosx, xy, y^2) \\ \alpha(t) = (\text{x(t)}, y(t)) = (t+\pi, t^2) \end{cases}$

Para resolver este ejercicio debemos aplicar, como bien dice el enunciado, la regla de la cadena. La herramienta a usar es la Matriz Jacobiana, ya ejercitado en ejercicios anteriores. Como estamos buscando las derivadas parciales de la composición de dos funciones, El Jacobiano va a obtenerse del producto de dos matrices.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \cdots & \alpha \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z & \cdots & \omega \end{bmatrix}$$

donde g_m son las componentes del campo G y h_n son las componentes del campo H.

Si miramos la matriz resultante, la drivada parcial de la composición con respecto a la primera variable es:

F_{x_1}=(a,b,c,…) las componentes dependen de filas que tenga la matriz resultante

$\vdots$

F_{x_n}=($\alpha, \beta, \gamma,$ ...) las componentes dependen de filas que tenga la matriz resultante.

Ahora, vamos al ejercicio en cuestión:

$$J = \begin{bmatrix} g_{1_x} & g_{1_y} \\ g_{2_x} & g_{2_y} \\ g_{3_x} & g_{3_y} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix}$$

Operando

$$J = \begin{bmatrix} -senx & 0 \\ y & x \\ 0 & 2y \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \end{bmatrix}$$

Operando

$$J = \begin{bmatrix} -senx \\ y + x2t \\ 4yt \end{bmatrix}$$

Ahora lo que hay que haces es reemplazar u y v por su equivalente denotado en la función α:

J = $\begin{bmatrix} -sen(t+\pi) \\ t^2 + 2t(t+\pi) \\ 4t^3 \end{bmatrix}$

Una vez obtenida esta matriz, expresamos las derivadas parciales:

$\frac{dF}{dt} = (-sen(t+\pi), 3t^2 + 2\pi t, 4t^3)$.