Autovalores y autovectores

Diagonalización y propiedades

Definición 1. Autovalores y autovectores de matrices cuadradas

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ($n \in \mathbb{N}$), decimos que $v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ (no nulo) es un **autovector** asociado al **autovalor** $\lambda \in \mathbb{R}$, si y solo si se cumple que

$$Av = \lambda v$$

La condición dada en la definición resulta equivalente a

$$(\lambda I_n - A)v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{o bien} \quad (A - \lambda I_n)v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Además,

$p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ se llama **polinomio característico** asociado a la matriz A, se trata de un polinomio mónico de grado n.

(λ, v) se denomina **autopar** asociado a la matriz A.

$$E_\lambda(A) = \left\{ u \in \mathbb{R}^{n\times 1} : \ (A - \lambda I_n)u = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es el **autoespacio** asociado a λ, donde $\dim E_\lambda(A)$ se llama **multiplicidad geométrica** del autovalor λ (lo notaremos mg(λ)).

Observemos que

- $E_\lambda(A) = \left\{ \begin{array}{c} \text{autovectores} \\ \text{asociados a } \lambda \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- $1 \leq \text{mg}(\lambda)$

Nota

Recordemos que si $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es un endomorfismo y B es una base de $\mathbb{V}$,

$$E_\lambda(T) = \left\{ u \in \mathbb{V} : \ (MT_{BB} - \lambda I_n)[u]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Actividad 1.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

1. Decidir si alguno de los vectores resulta ser un autovector de A. En caso que lo sea, indicar cuál es el autovalor correspondiente.

   - $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   - $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
   - $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   - $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Determinar todos los autovalores de A y sus respectivos autoespacios.

Actividad 1.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

1. Decidir si alguno de los vectores resulta ser un autovector de A. En caso que lo sea, indicar cuál es el autovalor correspondiente.
   - $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   - $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
   - $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   - $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. Determinar todos los autovalores de A y sus respectivos autoespacios.

RECORDEMOS LA DEFINICIÓN: $A.v = \lambda.v$

v_1:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-2).\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$A.v_1 = (-2).v_1$

v_1 es autovector de A con autovalor asociado -2

v_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (-2). \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$A. v_2 = (-2). v_2$

v_2 es autovector de A con autovalor asociado -2

v_3:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

COMO EL RESULTADO NO ES UN MÚLTIPLO DE v_3, ENTONCES:

v_3 NO es autovector de A

v_4:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$A. v_3 = 4. v_3$

v_3 es autovector de A con autovalor asociado 4

Actividad 1.

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$,

1. Decidir si alguno de los vectores resulta ser un autovector de A. En caso que lo sea, indicar cuál es el autovalor correspondiente.

   - $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   - $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   - $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
   - $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Determinar todos los autovalores de A y sus respectivos autoespacios.

AUTOVALORES: POLINOMIO CARACTERÍSTICO IGUAL A 0

$|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 3 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda).[(1-\lambda)^2 - 9] = (-2-\lambda).[\lambda^2 - 2\lambda - 8] = 0$$

LAPLACE POR FILA 2

$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -2 \quad \lambda_3 = 4$

MULTIPLICIDAD ALGEBRAICA DE UN AUTOVALOR: MULTIPLICIDAD COMO RAIZ DEL POLINOMIO CARACTERISTICO

$m_a(-2) = 2 \qquad m_a(4) = 1$

AUTOVECTORES O AUTOESPACIOS ASOCIADOS A CADA AUTOVALOR. DEBO RESOLVER EL SISTEMA:

$$(A-\lambda I).(v)=\bar{0}$$

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}1-\lambda & -3 & 3\\ 0 & -2-\lambda & 0\\ 3 & -3 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

$\lambda_1=-2$

$$\begin{pmatrix}3 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 3 & -3 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

ME QUEDARÁ SOLO UNA ECUACIÓN CON 3 INCÓGNITAS:

$y=x+z \qquad (x;x+z;z)$

$$E_{-2}=gen\left\{\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

<u>MULTIPLICIDAD GEOMÉTRICA DE UN AUTOVALOR:</u> DIMENSIÓN DE SU AUTOESPACIO ASOCIADO

$m_g(-2)=2$

$\lambda_3=4$

$$\begin{pmatrix}-3 & -3 & 3\\ 0 & -6 & 0\\ 3 & -3 & -3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$y=0 \quad ; \quad x=z \qquad (x;0;z)$

$$E_4=gen\left\{\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

$m_g(4)=1$

Actividad 2.

Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, determinar los autovalores y autoespacios asociados.

AUTOVALORES: POLINOMIO CARACTERÍSTICO IGUAL A 0

$|B - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda).[(-1-\lambda).(1-\lambda) - 1] + 2.(-1).[(-1).(1-\lambda) - 0] = 0$$

LAPLACE POR FILA 1

$= (1-\lambda).[\lambda^2 - 2] + 2(1-\lambda) = 0$

FACTOR COMÚN

$= (1-\lambda).[\lambda^2 - 2 + 2] = 0$

$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = 0$

<u>MULTIPLICIDAD ALGEBRAICA DE UN AUTOVALOR:</u> MULTIPLICIDAD COMO RAIZ DEL POLINOMIO CARACTERISTICO

$m_a(1) = 1 \qquad m_a(0) = 2$

AUTOVECTORES O AUTOESPACIOS ASOCIADOS A CADA AUTOVALOR. DEBO RESOLVER EL SISTEMA:

$$(B-\lambda I).(v)=\bar{0}$$

$$B-\lambda I=\begin{pmatrix}1-\lambda & 2 & 0\\ -1 & -1-\lambda & 1\\ 0 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

$\lambda_1=1$

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$y=0 \quad ; \quad x=z \qquad (x;0;z)$

$$E_1=gen\left\{\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

$m_g(1)=1$

$\lambda_2=0$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Escalono..

$x=-2y \quad ; \quad z=-y \qquad (-2y;y;-y)$

$$E_0=gen\left\{\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ -1\end{pmatrix}\right\}$$

$m_g(0)=1$

Actividad 2.

Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, determinar los autovalores y autoespacios asociados.

En las actividades anteriores comprobamos el siguiente resultado

Propiedad 1. Relación entre las multiplicidades de un mismo autovalor

Sean $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalor asociado. Entonces

$$\mathrm{mg}(\lambda) \leq \mathrm{ma}(\lambda)$$

Lo que estamos afirmando es que la multiplicidad geométrica de cualquier autovalor siempre es menor o igual que su multiplicidad algebraica.

A continuación, se exhiben algunas propiedades involucradas en el estudio de los autovalores y autovectores:

Propiedad 2. Independencia lineal de autovectores

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$, y sean (λ_2, v_2) y (λ_1, v_1) dos autopares de A tales que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Entonces v_1 y v_2 son linealmente independientes.

A partir del resultado anterior y mediante el método de inducción se puede demostrar que la propiedad anterior vale para una cantidad finita de autovalores distintos.

Propiedad 3. Autopares y potencias de matrices

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$, y sea $k \in \mathbb{N}$. Si (λ, v) es autopar de A, entonces (λ^k, v) es autopar de la matriz A^k

Propiedad 4. Autopares y múltiplos de matrices

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$, y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Si (λ, v) es autopar de A, entonces $(\alpha\lambda, v)$ es autopar de la matriz αA

Propiedad 5. Autovalores y matrices invertibles

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$,

$$A \text{ es invertible} \Leftrightarrow \ 0 \text{ no es autovalor de } A$$

Observar que una condición equivalente a la expuesta en la propiedad anterior es

$$A \text{ no es invertible} \Leftrightarrow \ 0 \text{ es autovalor de } A$$

De esta forma, la propiedad anterior resulta simple de demostrar, ya que

$$0 \text{ es autovalor de } A \Leftrightarrow \det(A - 0I) = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow A \text{ no es invertible}$$

Propiedad 6. Autopares de matrices invertibiles

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$ una matriz invertible. Si (λ, v) es autopar de A $(\lambda \neq 0)$, entonces (λ^{-1}, v) es autopar de la matriz A^{-1}.

Propiedad 3. Autopares y potencias de matrices

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$, y sea $k \in \mathbb{N}$. Si (λ, v) es autopar de A, entonces (λ^k, v) es autopar de la matriz A^k

DEM.

SI SE DE DATO EL AUTOPAR, ESO SIGNIFICA QUE: $A.v = \lambda.v$

VOY A TOMAR AHORA LA MATRIZ CON UNA POTENCIA Y LA MULTIPLICARÉ POR EL MISMO VECTOR (AUTOVECTOR DE A)

$A^k.v = A^{k-1}.A.v = A^{k-1}.\lambda.v = \lambda.A^{k-1}.v = \lambda.A^{k-2}.A.v = \lambda.A^{k-2}.\lambda.v = \lambda^2.A^{k-2}.v$

SI SIGO ASI .. LLEGARÉ A :

$$A^k.v = \lambda^k.v$$

FINALMENTE, POR DEFINICIÓN, (λ^k, v) ES UN AUTOPAR DE A

CASO PARTICULAR: CUANDO $k = -1$

Propiedad 6. Autopares de matrices invertibiles

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$ una matriz invertible. Si (λ, v) es autopar de A $(\lambda \neq 0)$, entonces (λ^{-1}, v) es autopar de la matriz A^{-1}.

Propiedad 4. Autopares y múltiplos de matrices

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(n \in \mathbb{N})$, y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Si (λ, v) es autopar de A, entonces $(\alpha\lambda, v)$ es autopar de la matriz αA

DEM.

SI SE DE DATO EL AUTOPAR, ESO SIGNIFICA QUE: $A.v = \lambda.v$

VOY A TOMAR AHORA UN MÚLTIPLO DE LA MATRIZ Y LA MULTIPLICARÉ POR EL MISMO VECTOR (AUTOVECTOR DE A)

$$(\alpha A).v = \alpha.(A.v) = \alpha.(\lambda.v) = (\alpha.\lambda).v$$

FINALMENTE, VEO QUE SE CUMPLE

Actividad 3.

Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$,

1. determinar los autovalores y autoespacios asociados.
2. Ídem, para la matriz M^{-1}

$M = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Propiedad 4. Autopares y múltiplos de matrices

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(n \in \mathbb{N})$, y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Si (λ, v) es autopar de A, entonces $(\alpha\lambda, v)$ es autopar de la matriz αA

COMO $M = \frac{1}{5}.A$ entonces los autovalores de M serán los autovalores de A multiplicados por $\frac{1}{5}$

AUTOVALORES: POLINOMIO CARACTERÍSTICO IGUAL A 0

$|A - \lambda I| = 0$

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

AUTOVALORES DE A: $\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 3$

AUTOVALORES DE M: $\lambda_1 = -1/5 \quad \lambda_2 = 3/5$

AUTOVECTORES DE A Y DE M SERÁN LOS MISMOS! ENTONCES TRABAJO CON A:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} . v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -1$

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$y = -y \qquad (-y; y)$

$E_{-1}(A) = gen\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$$m_g(-1) = 1$$

$\lambda_2 = 3$

$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$y = y \qquad (y; y)$

$E_3(A) = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

AUTOVALORES DE M: $\lambda_1 = -1/5 \quad \lambda_2 = 3/5$

AUTOVECTORES DE M:

$$E_{-1/5}(M) = gen\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \qquad E_{3/5}(M) = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Actividad 3.

Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$,

1. determinar los autovalores y autoespacios asociados.
2. Ídem, para la matriz M^{-1}

COMO NINGUNO DE LOS AUTOVALORES DE M FUE 0, ENTONCES M ES INVERSIBLE.

AUTOVALORES DE M^{-1}: $\lambda_1 = -5 \quad \lambda_2 = 5/3$

AUTOVECTORES DE M^{-1}:

$$E_{-5}(M^{-1}) = gen\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \qquad\qquad E_{5/3}(M^{-1}) = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$