

Integrales dobles

Teorema de Fubini

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada sobre un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ contenido en D . Si

$$\int_{y=c}^d f(x, y) dy \text{ existe para cada } x \in [a, b]$$

entonces

$$\int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^d f(x, y) dy \right) dx$$

existe y

$$\int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^d f(x, y) dy \right) dx = \int_R f(x, y) dA$$

Siendo dA un diferencial de área dentro del rectángulo R , generalizando, $dA = dx dy = dy dx$

De manera análoga, si

$$\int_{x=a}^b f(x, y) dx \text{ existe para cada } y \in [c, d]$$

entonces

$$\int_{y=c}^d \left(\int_{x=a}^b f(x, y) dx \right) dy$$

existe y

$$\int_{y=c}^d \left(\int_{x=a}^b f(x, y) dx \right) dy = \int_R f(x, y) dA$$

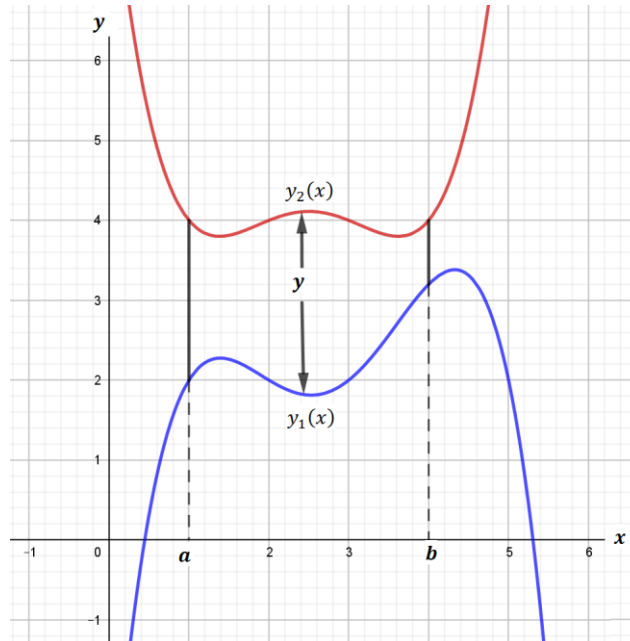
De esta manera, si todas estas condiciones se cumplen simultáneamente, se tiene

$$\int_{x=a}^b \left(\int_{y=c}^d f(x, y) dy \right) dx = \int_{y=c}^d \left(\int_{x=a}^b f(x, y) dx \right) dy = \int_R f(x, y) dA$$

Integración sobre regiones más generales (no rectangulares)

Si el recinto R no es rectangular procederemos a clasificarlo en los tres casos siguientes.

Recintos tipo I:



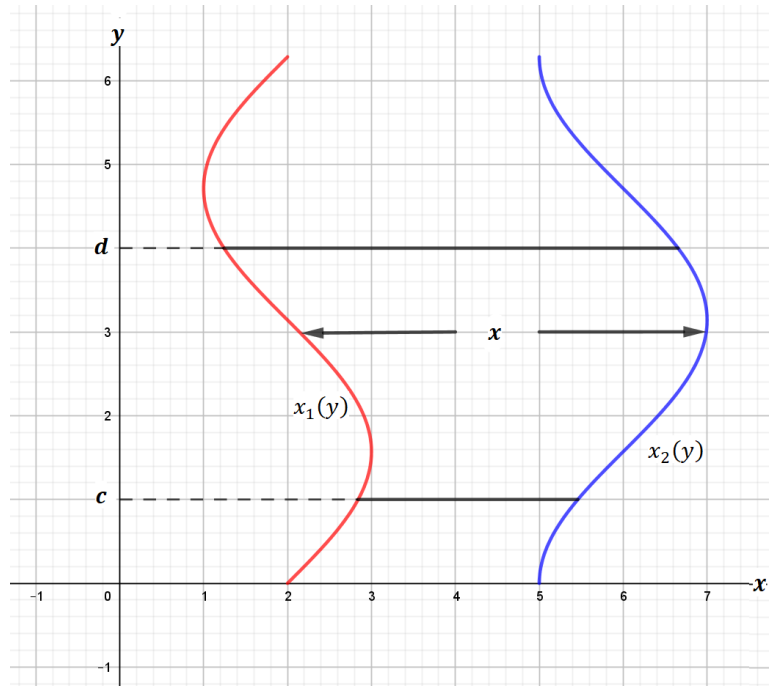
$$y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Nótese que en la figura de arriba no es posible expresar $x = x(y)$, es decir, x como función de la variable y , ya que para algunos valores de y , x tiene dos imágenes. A $y_1(x)$ lo llamaremos límite inferior, y a $y_2(x)$ lo llamaremos límite superior.

Entonces, la integral para este caso se expresará como:

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_{x=a}^b \left(\int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx = \int_R f(x, y) \, dA$$

Recintos tipo II:



$$x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \quad \forall y \in [c, d]$$

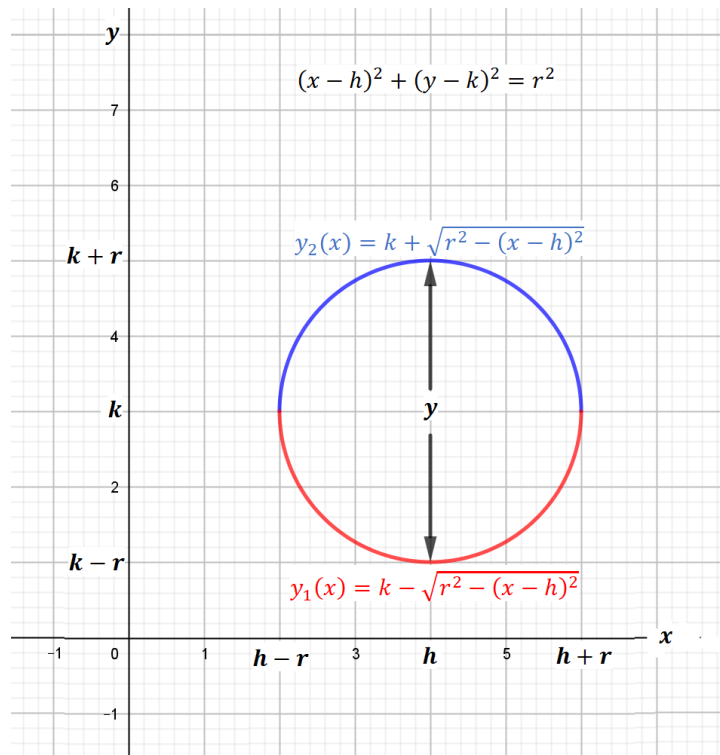
En la figura de arriba, nótese que no es posible expresar $y = y(x)$, es decir, y como función de la variable x , ya que para algunos valores de x , y tiene dos imágenes. $x_1(y)$ se denomina límite inferior de x , y , $x_2(y)$ se denomina límite superior de x

Entonces, la integral para este caso se expresará como:

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_{y=c}^d \left(\int_{x=x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy = \int_R f(x, y) \, dA$$

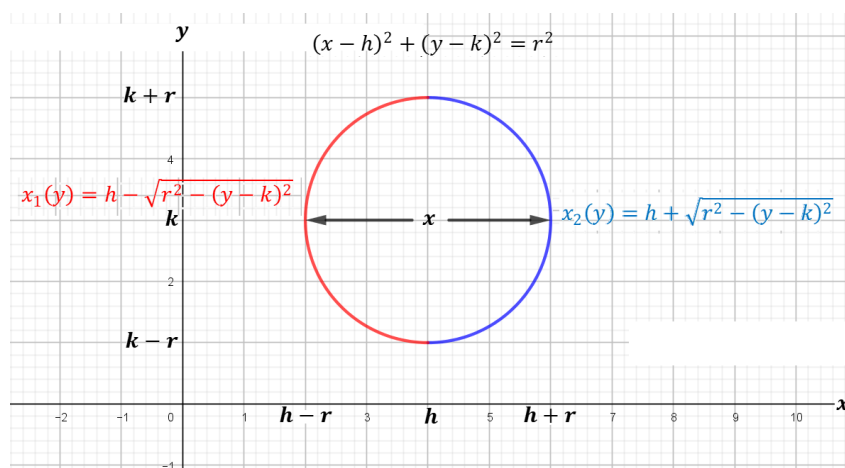
Recinto tipo III

Diremos que un recinto es del tipo III cuando puede expresarse como tipo I o tipo II. Una circunferencia con su interior o una elipse, son recintos del tipo III.



$$y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \quad \forall x \in [h-r, h+r]$$

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_{x=h-r}^{h+r} \left(\int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx = \int_R f(x, y) \, dA$$



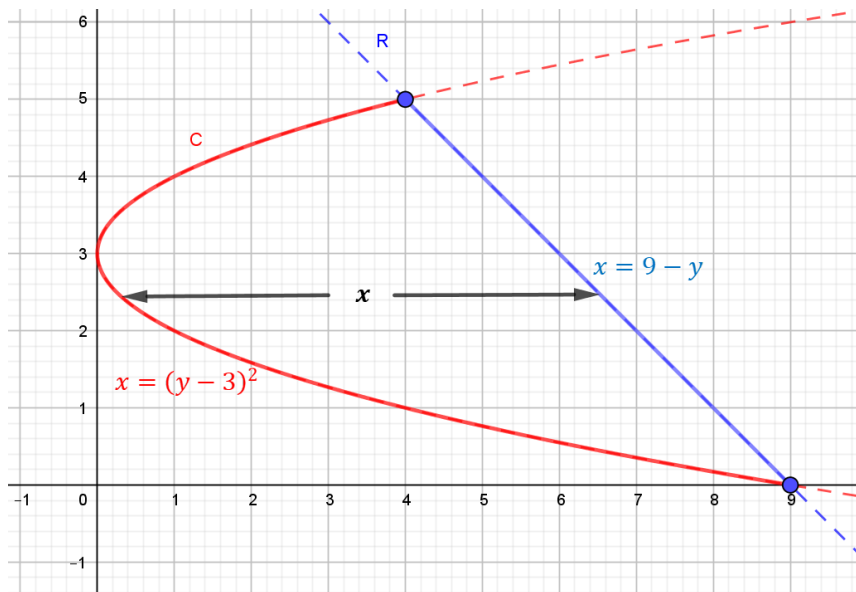
$$x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \quad \forall y \in [k-r, k+r]$$

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_{y=k-r}^{k+r} \left(\int_{x=x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy = \int_R f(x, y) \, dA$$

Veamos algunos ejemplos concretos

Ejemplo 1

Recinto del plano delimitado por la parábola $x = (y - 3)^2$ y la recta $x + y = 9$.



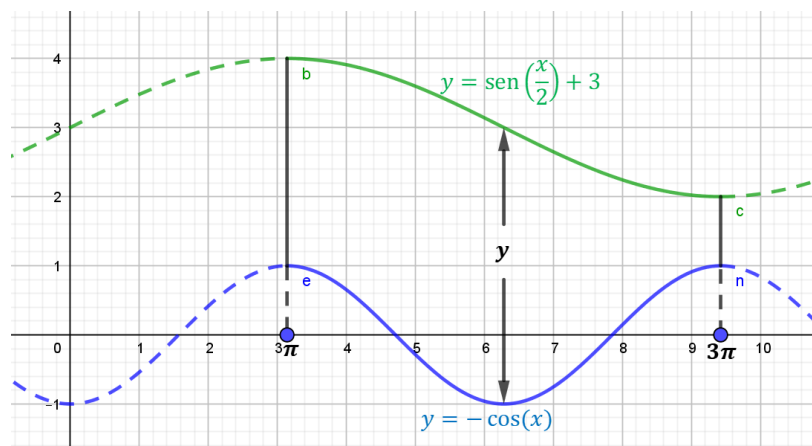
Recinto del tipo II

$$(y - 3)^2 = x_1(y) \leq x \leq x_2(y) = 9 - y \quad \forall y \in [0, 5]$$

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_{y=0}^5 \left(\int_{x=(y-3)^2}^{9-y} f(x, y) \, dx \right) dy$$

Ejemplo 2

Recinto del plano delimitado por las curvas $y = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 3$, $y = -\cos(x)$.



Recinto del tipo I

$$-\cos(x) = y_1(x) \leq y \leq y_2(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 3 \quad \forall x \in [\pi, 3\pi]$$

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_{x=\pi}^{3\pi} \left(\int_{y=-\cos(x)}^{\sin(\frac{x}{2})+3} f(x, y) \, dy \right) dx$$

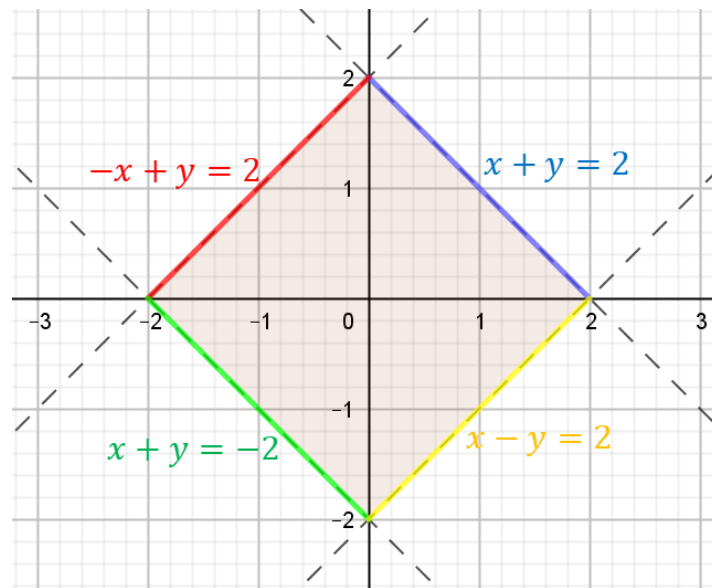
Ejemplo 3

Recinto del plano delimitado por $|x| + |y| \leq 2$.

En este caso aplicaremos primero la definición de módulo tanto al término con x , como al término con y .

Nos queda lo siguiente:

$$|x| + |y| \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 2 & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 & (1) \\ -x + y \leq 2 & \text{si } x < 0, y \geq 0 & (2) \\ -x - y \leq 2 & \text{si } x < 0, y < 0 & (3) \\ x - y \leq 2 & \text{si } x \geq 0, y < 0 & (4) \end{cases}$$



A este recinto lo tendremos que dividir en dos recintos triangulares, tanto si se lo quiere considerar como del tipo I, como del tipo II, esto es:

Considerándolo tipo I, un triángulo es el de vértices $(0, -2)$, $(0, 2)$, $(-2, 0)$, y el otro triángulo es el de vértices $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(0, -2)$.

Para el triángulo de la izquierda:

$$-x - 2 = y_1(x) \leq y \leq y_2(x) = 2 + x \quad \forall x \in [-2, 0]$$

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{x=-2}^0 \left(\int_{y=-x-2}^{2+x} f(x, y) dy \right) dx$$

Para el triángulo de la derecha:

$$x - 2 = y_3(x) \leq y \leq y_4(x) = 2 - x \quad \forall x \in [0, 2]$$

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_{x=0}^2 \left(\int_{y=x-2}^{2-x} f(x, y) dy \right) dx$$

Si ahora lo consideramos del tipo II, un triángulo es el de vértices $(2,0)$, $(-2,0)$, $(0,-2)$, y el otro triángulo es el de vértices $(2,0)$, $(0,2)$, $(-2,0)$.

Para el triángulo de abajo:

$$-y - 2 = x_1(y) \leq x \leq x_2(y) = 2 + y \quad \forall y \in [-2, 0]$$

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_{y=-2}^0 \left(\int_{x=-y-2}^{2+y} f(x, y) \, dx \right) dy$$

Para el triángulo de arriba:

$$y - 2 = x_3(y) \leq x \leq x_4(y) = 2 - y \quad \forall y \in [0, 2]$$

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_{y=0}^2 \left(\int_{x=y-2}^{2-y} f(x, y) \, dx \right) dy$$

Ejercicios

Describir algebraicamente los siguientes recintos del plano

- 1) Delimitado por la curva $y = x^3$, y la recta $y = x$, con $-1 \leq x \leq 1$
- 2) Delimitado por la elipse $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$
- 3) Delimitado por la parábola $y = (x - 1)^2 - 2$, y la recta $x + y = 1$
- 4) Delimitado por $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \cos(x)$ para $0 \leq x \leq 2\pi$
- 5) Delimitado por las circunferencias concéntricas $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$.
- 6) Delimitado por el triángulo de vértices $(1, -1)$, $(2, 1)$ y $(3, -2)$

Biblioteca digital. Cap 7, p. 263. Cálculo varias variables. W Mora.

Link contenidos pertinentes (Ctrl+Clic mouse para ir al enlace)

Khan Academy videos

<https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/integrating-multivariable-functions#double-integrals-topic>

Khan Academy artículos

<https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/integrating-multivariable-functions#double-integrals-a>