RESOLUCION DE EJERCICIOS
PRACTICA AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Ej. 10 a). Probar que dos autovectores de A$\in$ R^{nxn} de autovalores distintos son linealmente independientes

Sean entonces dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tal que A$\vec{u}$=$\lambda\vec{u}$ y A$\vec{v}$=$\beta\vec{v}$ con $\alpha \neq \beta$.

Queremos demostrar que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes. Como procedemos para demostrar la independencia lineal de dos vectores , construimos una combinación lineal de ellos y la igualamos al vector nulo y analizamos que pasa con los coeficientes de dicha combinación lineal.

$a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ (1)

Si a esta combinación lineal le aplicamos la matriz resulta

$A(a\vec{u} + b\vec{v}) = A(a\vec{u}) + A(b\vec{v}) = aA(\vec{u}) + bA(\vec{v}) =$

$a.\lambda\vec{u} + b.\beta\vec{v} = \lambda a\vec{u} + \beta b\vec{v} = A(\vec{0}) = \vec{0}$ (2)

Si suponemos que $\lambda \neq 0$ podemos multiplicar a la igualdad (1) por λ

$\lambda a\vec{u} + \lambda b\vec{v} = \vec{0}$ (3)

Restando miembro a miembro las igualdades (2) y (3) resulta

$\beta b\vec{v} - \lambda b\vec{v} = \vec{0} = b(\beta - \lambda)\vec{v} = \vec{0}$

Luego nos queda el producto de dos número y un vector igualado al vector nulo. Las soluciones posibles son

$b = 0; (\beta - \lambda) = 0; \vec{v} = \vec{0}$ (individualmente o todas a la vez)

$(\beta - \lambda) \neq 0$, pues hemos partido de la hipótesis que ambos autovalores son diferentes

$\vec{v} \neq \vec{0}$, pues es un autovector y no puede ser el vector nulo.

Por lo tanto la única solución posible es $b = 0$. Reemplazando en (1) resulta

$a\vec{u} = \vec{0}$, y como $\vec{u}$ es un autovector y no puede ser el vector nulo resulta que la única solución es a=0

Por lo tanto hemos planteado la combinación lineal (1) y la única solución es que los coeficientes a y b son nulos , por lo tanto los vectores son linealmente independientes.

Si $\lambda = 0$, podemos entonces suponer que $\beta \neq 0$ y realizamos el mismo razonamiento , que llevará a que a y b sean nulos.

b) Probar que si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_k$ son autovalores distintos , los respectivos autovectores son linealmente independientes entre sí.

Basándose en el ejercicio 10a) se toman los k autovalores de a pares y se obtiene que para $\vec{v_i}$ y $\vec{v_j}$ autovectores respectivos de los autovalores diferentes λ_i, λ_j son linealmente independientes.

De esta forma resulta que $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \ldots, \vec{v_k}\}$ es un conjunto de autovectores linealmente independintes.

c) Si dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son autovectores linealmente independientes de un endomorfismo f:V–> V , ¿corresponden a autovalores distintos?

Si hemos encontrado autovalores y autovectores en algunos ejercicios podemos habernos encontrado con una matriz como la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Si buscamos sus autovalores det $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0 =$

$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \rightarrow -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 15\lambda + 9 = 0$, las solucicones son: $3, 1$

Las raíces de este polinomio son 3(raíz doble) y 1

Para $\lambda = 3$, reemplazando en la ecuación (A-λI)$\vec{v}$=0 (matriz nula) resulta

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde resulta que x=0 y no tenemos condiciones sobre y y z. Por lo tanto los autovectores que corresponden al autovalor 3 serán de la forma

(0,y,z)=y(0,1,0)+z(0,0,1) y tanto (0,1,0) como (0,0,1) son autovectores linealmente independientes correspondientes a un mismo autovalor.

Por lo tanto la respuesta a la pregunta del ejercicio sería negativa.

d) Probar que la multiplicidad geométrica de un autovalor es menor o igual que su multiplicidad algebraica.

La **multiplicidad algebraica** es el orden de multiplicidad de las raíces del polinomio característico. La **multiplicidad geométrica es la dimensión del subespacio invariante correspondiente a un autovalor** (la palabra geométrica hace referencia a la interpretación gráfica que uno puede hacer a los autovectores en ejemplos de R^2 y R^3).

Este ejercicio constituye una demostración importante en el tema de autovectores y autovalores

Si A es una matriz nxn entonces la multiplicidad geométrica de cada autovalor es menor o igual a su multiplicidad algebraica.

En la demostración haremos uso de matrices particionadas y de propiedades del polinomio característico.

¿Que es una matriz particionada?

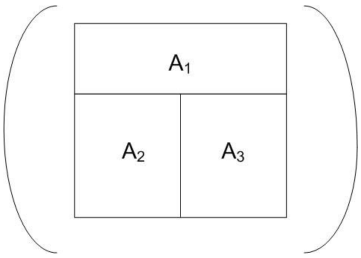
En el cálculo del determinante de una matriz por el método de Laplace hemos trabajado con submatrices (matrices que se obtienen de una original suprimiendo algunas filas y/o columnas).

Una matriz A puede dividirse en varias submatrices (sin eliminar filas o columnas) simplemente dividiéndola por rectas horizontales y/o verticales.

Ejemplo

La matriz A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$(5x4) puede contener a las submatrices

A_1=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}(2x4)$; A_2=$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}(3x2)$, A_3=$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ (3x2)de forma tal que la matriz tendrá la forma



En base a esto desarrollaremos el ejercicio.

Demostración

Sea $\mathbb{E}_{\lambda_1}$ el subespacio de autovectores correspondiente al autovalor λ_1 que tiene dimensión p. Luego existen p vectores $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots \overrightarrow{v_p}\}$ que forman una base de $\mathbb{E}_{\lambda_1}$

Si ampliamos a una base de $\mathbb{V}$ con vectores linealmente independientes $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots \overrightarrow{v_p}, \vec{v}_{p+1}, \vec{v}_{p+2}, \ldots \overrightarrow{v_n}\}$, resulta que la matriz Q que tiene por columnas a dichos vectores es nxn e inversible.¿porqué?

Q= $[\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2}\ldots\overrightarrow{v_p}\vec{v}_{p+1}\vec{v}_{p+2}\ldots\overrightarrow{v_n}]$ puede ser expresada como una matriz particionada siendo Q= $\left[U \mid V\right]$, con U (nxp)(vectores $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots \overrightarrow{v_p}\}$) y V (nx(n-p))(vectores $\{\vec{v}_{p+1}, \vec{v}_{p+2}, \ldots \overrightarrow{v_n}\}$) escritos en columnas.

Como Q es inversible resultará que $Q^{-1} = [\frac{C}{D}]$, con C (pxn) y D ((n-p)xn)

Como las columnas de U son los autovectores de A de autovalor λ_1 , entonces AU=λ_1.U.

Dado que a la matriz identidad I_n la podemos particionar en

$I_n = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = Q^{-1}.Q = [\frac{C}{D}]\left[U \mid V\right] = \begin{pmatrix} CU & CV \\ DU & DV \end{pmatrix}$ con CU (pxp); CV (px(n-p); DU ((n-p)xp) y DV ((n-p)x(n-p))

resulta ser que CU=I_p ; CV=0 , DU=0 y DV=I_{n-p}.

Luego si hacemos

$$Q^{-1}AQ = [\frac{C}{D}].A.\left[U \mid V\right] = \begin{pmatrix} CAU & CAV \\ DAU & DAV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 CU & CAV \\ \lambda_1 DU & DAV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_p & CAV \\ 0 & DAV \end{pmatrix}$$

Luego si recordamos el ejercicio 7)f) de esta misma práctica , resulta $|Q^{-1}AQ - \lambda I| = (\lambda_1 - \lambda)^p.\det(DAV - \lambda I) = |A - \lambda I| = P(A)$

Esto que implica que la multiplicidad algebraica de λ_1 **es al menos p** pues λ_1 aparece como raíz de orden p pero además el $\det(DAV - \lambda I)$ puede tener tambien a λ_1 como raíz , lo que indicaría que el **mínimo valor** que tiene la multiplicidad algebraicas del autovalor es p (que es la dimensión del subespacio asociado a dicho autovalor). Luego se cumple que la multiplicidad geométrica del autovalor λ_1 es menor o a lo sumo igual que la multiplicidad algebraica de λ_1

Existen muchas demostraciones de este teorema , aquí hemos seguido la línea (a pie juntillas) de *Álgebra Lineal - Una introducción moderna - Segunda Edición - D. Poole - Ed. Thomson*.

Ejercicio 11)a) Probar que si λ es autovalor de la matriz A entonces λ^n es autovalor de A^n

Si λ es autovalor de la matriz A , significa que existe un vector $\vec{v}$ que es autovector correspondiente a dicho autovalor

Luego $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

Si aplicamos a ambos lados de la igualdad la matriz A resulta

$AA\vec{v} = A^2\vec{v} = A\lambda\vec{v} = \lambda A\vec{v} = \lambda^2\vec{v}$

Repitiendo la operación se llega a $An\vec{v} = \lambda^n\vec{v}$

b) Probar que A es inversible si y solo si no tiene autovalores nulos

Lo primero que podemos preguntarnos es ¿cuales son los autovectores que corresponden a un autovalor nulo?(recordar que por la multiplicidad de las raíces pueden ser más de uno).

Esos autovectores cumplen $A\vec{v} = \lambda\vec{v} = 0\vec{v} = \vec{0}$

Luego los autovectores que se corresponden al autovalor nulo son los vectores del núcleo de la transformación representada por la matriz A.

Tenemos que demostrar algo del tipo ⇔. Conviene analizar por separado cada uno de los términos y buscar todo lo que significan por separado.

A es inversible

Sabemos de Álgebra I (o al menos deberíamos recordarlo) que esto implica que el det(A)≠ 0 , o que el rango (A) es n (cantidad de filas o columnas linealmente independientes).

No tiene autovalores nulos

Implica que el núcleo de la transformación tiene como único elemento el vector nulo (no tiene otros vectores asociados) , por lo tanto la dimensión de la imagen de la transformación es n ¿porque?

Dos formas de demostrarlo

i) **A es inversible**⇔ $|A| \neq 0 \Leftrightarrow |A - 0I| \neq 0 \Leftrightarrow 0$ no es autovalor de A ⇔ luego A **No tiene autovalores nulos**

ii) **A es inversible**⇔ el rango(A)=n⇔ dim(Imagen)=n⇔ dim(Nucleo)=0⇔ el núcleo solo contiene al vector nulo⇔ A **No tiene autovalores nulos**

c) Probar que si A es inversible y $\lambda \neq 0$ es un autovalor de A, entonces λ^{-1} es autovalor de A^{-1}

i) $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ → (como existe A^{-1}) $A^{-1}A\vec{v} = A^{-1}\lambda\vec{v} \rightarrow \vec{v} = \lambda A^{-1}\vec{v} \rightarrow \frac{1}{\lambda}\vec{v} = A^{-1}\vec{v}$ (podemos pasar a λ dividiendo porque es diferente de cero) → $A^{-1}\vec{v} = \lambda^{-1}\vec{v}$

Luego λ^{-1} es autovalor también de A^{-1} con el mismo autovector $\vec{v}$.

Otra forma

ii) $|A - \lambda I| = 0 \rightarrow |A - \lambda A.A^{-1}| = 0 \rightarrow |A||I - \lambda A^{-1}| = 0$, (como A es inversible det(A)$\neq 0$) , luego debe pasar que $|I - \lambda A^{-1}| = 0 \rightarrow \left|\lambda((\frac{1}{\lambda})I - A^{-1})\right| = 0 \rightarrow \lambda^n|\lambda^{-1}I - A^{-1}| = 0$, (donde como sabemos que $\lambda \neq 0$ podemos sacar factor λ y al sacarlo fuera del determinante queda elevado a la n. Entonces $|\lambda^{-1}I - A^{-1}| = 0 \rightarrow \lambda^{-1}$ es autovalor de A^{-1}