Sistemas de Ecuaciones Lineales

Clase 3

AyGA- FRH- UTN

Recordemos la definición de combinación lineal

Sean los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y los escalares α , β y γ se dice que $\vec{a}$ es una combinación lineal si

$$\vec{a} = \alpha.\overrightarrow{u} + \beta.\vec{v} + \gamma.\overrightarrow{w}$$

$$\begin{array}{c} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{array} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.\mathrm{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

El vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$es combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

En otras palabras dado un Sistema de ecuaciones lineales ,

$$A.X = B$$

será compatible si B es combinación lineal de las columnas de A

S.C.D si existe una única combinación lineal.

S.C.I si existen infinitas combinaciones lineales

Dados los vectores

$$\vec{a}=(1,1,1);\vec{b}=(-1,0,1);\vec{c}=(0,1,1);\vec{d}=(0,1,2);\vec{e}=(5,3,0)$$

a) ¿Se puede expresar el vector $\vec{e}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a}\,;\vec{b}\ y\ \vec{c}$?
¿la combinación lineal es única?

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{e}$$

$$\alpha(1,1,1)+\beta(-1,0,1)+\gamma(0,1,1)=(5,3,0)$$

$$\begin{cases}\alpha-\beta=5\\ \alpha+\gamma=3\\ \alpha+\beta+\gamma=0\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 5\\ 1 & 0 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}\alpha=2\\ \beta=-3\\ \gamma=1\end{matrix}\Rightarrow 2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}=\vec{e}$$

r(A)= 3
r(A')= 3
n= 3

Cómo resulta el Sistema?

S.C.D

Cuál es la interpretación geométrica?

los vectores $\vec{a}\,;\vec{b}\ y\ \vec{c}$ no son coplanares

b) ¿Se puede expresar el vector $\vec{0}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a}$; $\vec{b}$ y $\vec{c}$? ¿la combinación lineal es única?

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$$

$$\alpha(1,1,1) + \beta(-1,0,1) + \gamma(0,1,1) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{matrix} \Rightarrow 0.\vec{a} + 0.\vec{b} + 0.\vec{c} = \vec{0}$$

Existe una **única** combinación
Lineal para expresar el vector $\vec{0}$
En función de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$

¿Cuál es la interpretación geométrica?

Los vectores $\vec{a}$; $\vec{b}$ y $\vec{c}$ no son coplanares

c) ¿Se puede expresar el vector $\vec{e}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a}\,;\vec{b}\ y\ \vec{d}$?
¿la combinación lineal es única?

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{d}=\vec{e}$$

$$\alpha(1,1,1)+\beta(-1,0,1)+\gamma(0,1,2)=(5,3,0)$$

$$\begin{cases}\alpha-\beta=5\\ \alpha+\gamma=3\\ \alpha+\beta+2.\gamma=0\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 5\\ 1 & 0 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 5\\ 1 & 0 & 1 & 3\\ -1 & 1 & 0 & -6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow S.I.$$

r(A)= 2
r(A')= 3
n= 3

S.I

¿Cuál es la interpretación geométrica?

$\vec{e}$ no es coplanar a los vectores $\vec{a}\,;\vec{b}\ y\ \vec{d}$

d) ¿Se puede expresar el vector $\vec{0}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{a}$; $\vec{b}$ y $\vec{d}$?
¿la combinación lineal es única?

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{d} = \vec{0}$$

$$\alpha(1,1,1) + \beta(-1,0,1) + \gamma(0,1,2) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \ldots\ldots\ldots \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha - \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = \beta \\ \forall \beta \in R \\ \gamma = -\beta \end{matrix} \Rightarrow \beta.\vec{a} + \beta.\vec{b} - \beta.\vec{d} = \vec{0} \quad \forall \beta \in R$$

¿Cuál es la interpretación geométrica?

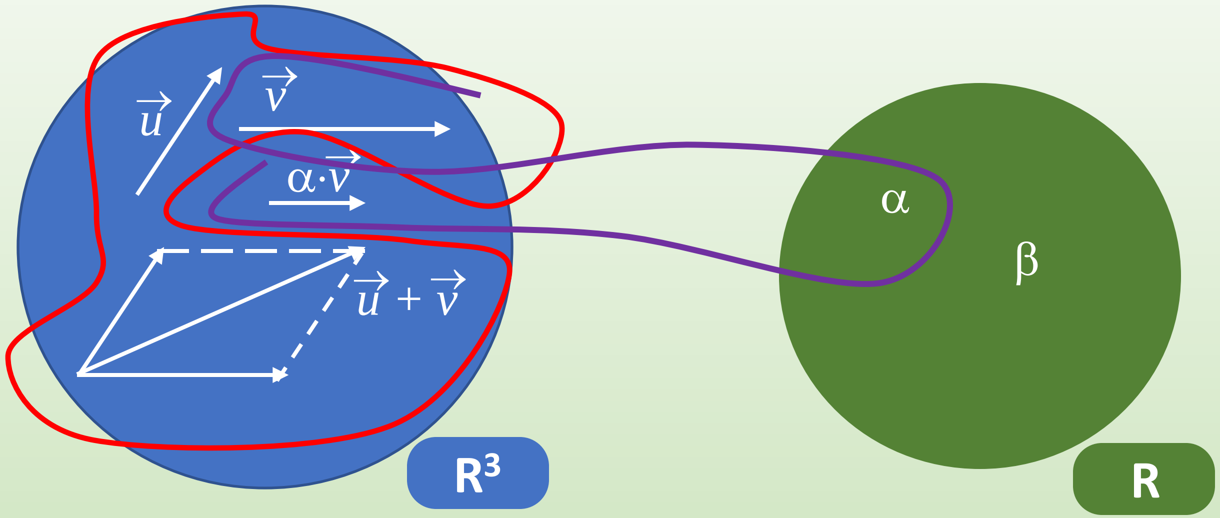
Los vectores $\vec{a}$; $\vec{b}$ y $\vec{d}$ son coplanares

UNIDAD N° 4 – ESPACIOS VECTORIALES REALES

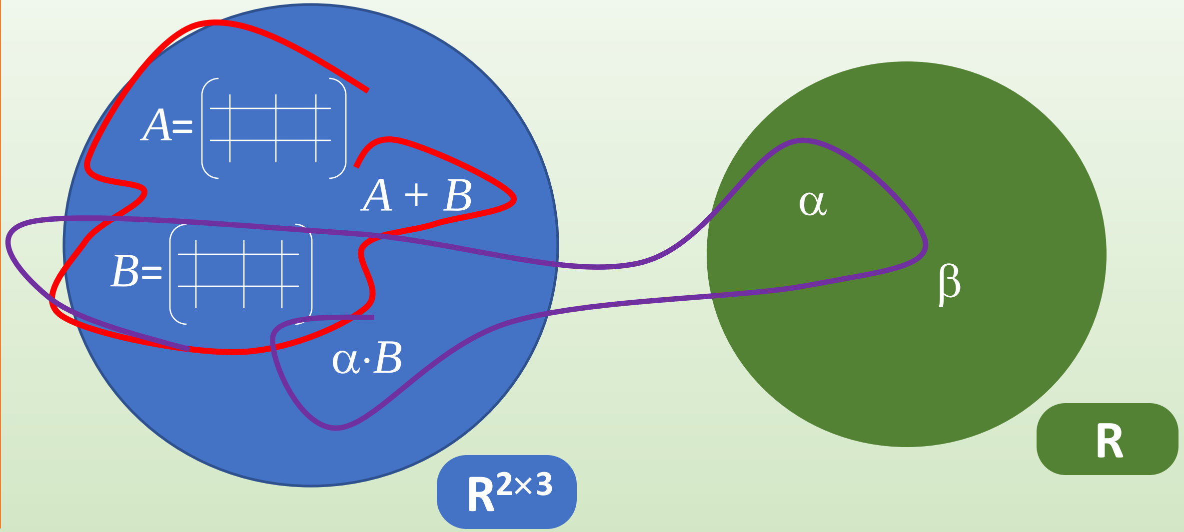
ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

FACULTAD REGIONAL HAEDO - UTN

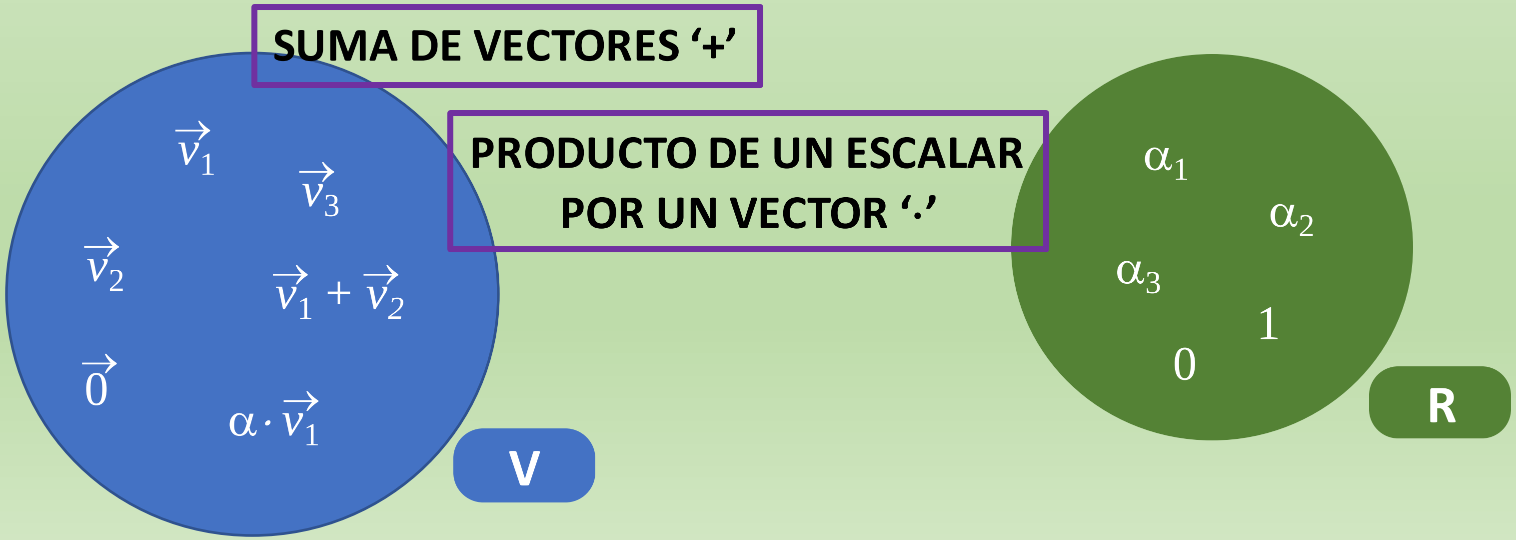
UNIDAD N° 1 – VECTORES GEOMÉTRICOS

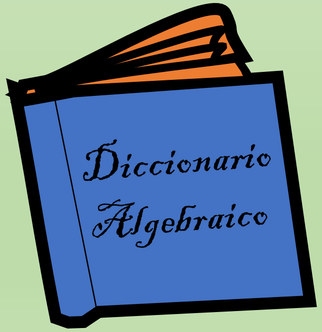


UNIDAD N° 2 – MATRICES DE ELEMENTOS REALES



¿Qué encontramos en común en su estudio?





ESTRUCTURA ALGEBRAICA DE ESPACIO VECTORIAL REAL (V, R, ‘+’, ‘·’)

Propiedades distributivas

$\alpha\,\text{'}\cdot\text{'}\left(\vec{v}_1\,\text{'}+\text{'}\,\vec{v}_2\right)=\left(\alpha\,\text{'}\cdot\text{'}\,\vec{v}_1\,\text{'}+\text{'}\,\alpha\,\text{'}\cdot\text{'}\,\vec{v}_2\right)$

$(\alpha+\beta)\,\text{'}\cdot\text{'}\,\vec{v}_1=\left(\alpha\,\text{'}\cdot\text{'}\,\vec{v}_1\,\text{'}+\text{'}\,\beta\,\text{'}\cdot\text{'}\,\vec{v}_1\right)$

‘+’

Ley de composición interna

$\left(\vec{v}_1\,\text{'}+\text{'}\,\vec{v}_2\right)\in\mathbf{V}$

Propiedad conmutativa

$\left(\vec{v}_1\,\text{'}+\text{'}\,\vec{v}_2\right)=\left(\vec{v}_2\,\text{'}+\text{'}\,\vec{v}_1\right)$

Propiedad asociativa

$\vec{v}_1\,\text{'}+\text{'}\left(\vec{v}_2\,\text{'}+\text{'}\,\vec{v}_3\right)=\left(\vec{v}_1\,\text{'}+\text{'}\,\vec{v}_2\right)\text{'}+\text{'}\,\vec{v}_3$

Existe elemento neutro

$\left(\vec{v}_1\,\text{'}+\text{'}\,\vec{0}\right)=\left(\vec{0}\,\text{'}+\text{'}\,\vec{v}_1\right)$

Existe elemento opuesto

$\left[\vec{v}_1\,\text{'}+\text{'}\left(-\vec{v}_1\right)\right]=\vec{0}$

‘·’

Ley de composición externa

$\left(\alpha\,\text{'}\cdot\text{'}\,\vec{v}_1\right)\in\mathbf{V}$

Ley asociativa mixta

$\alpha\,\text{'}\cdot\text{'}\left(\beta\,\text{'}\cdot\text{'}\,\vec{v}_1\right)=(\alpha\cdot\beta)\,\text{'}\cdot\text{'}\,\vec{v}_1$

Existe elemento neutro

$\left(1\,\text{'}\cdot\text{'}\,\vec{v}_1\right)=\vec{v}_1$

Ejemplos, (V, R, +,.) es un espacio vectorial si

$$V = R^2 \qquad \vec{v} = (x, y)$$

$$V = R^3 \qquad \vec{v} = (x, y, z)$$

$$V = R^n \qquad \vec{v} = (x_1 , x_2, \ldots \ldots , x_n)$$

$$V = R^{m \times n} \qquad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$V = \{\overrightarrow{0}\}$$

$$V = P_n (x) \qquad \vec{v} = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$V = F(a, b)$$

PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS VECTORIALES

PROPIEDAD 1

$$0.\vec{v} = \overrightarrow{0_V}$$

PROPIEDAD 2

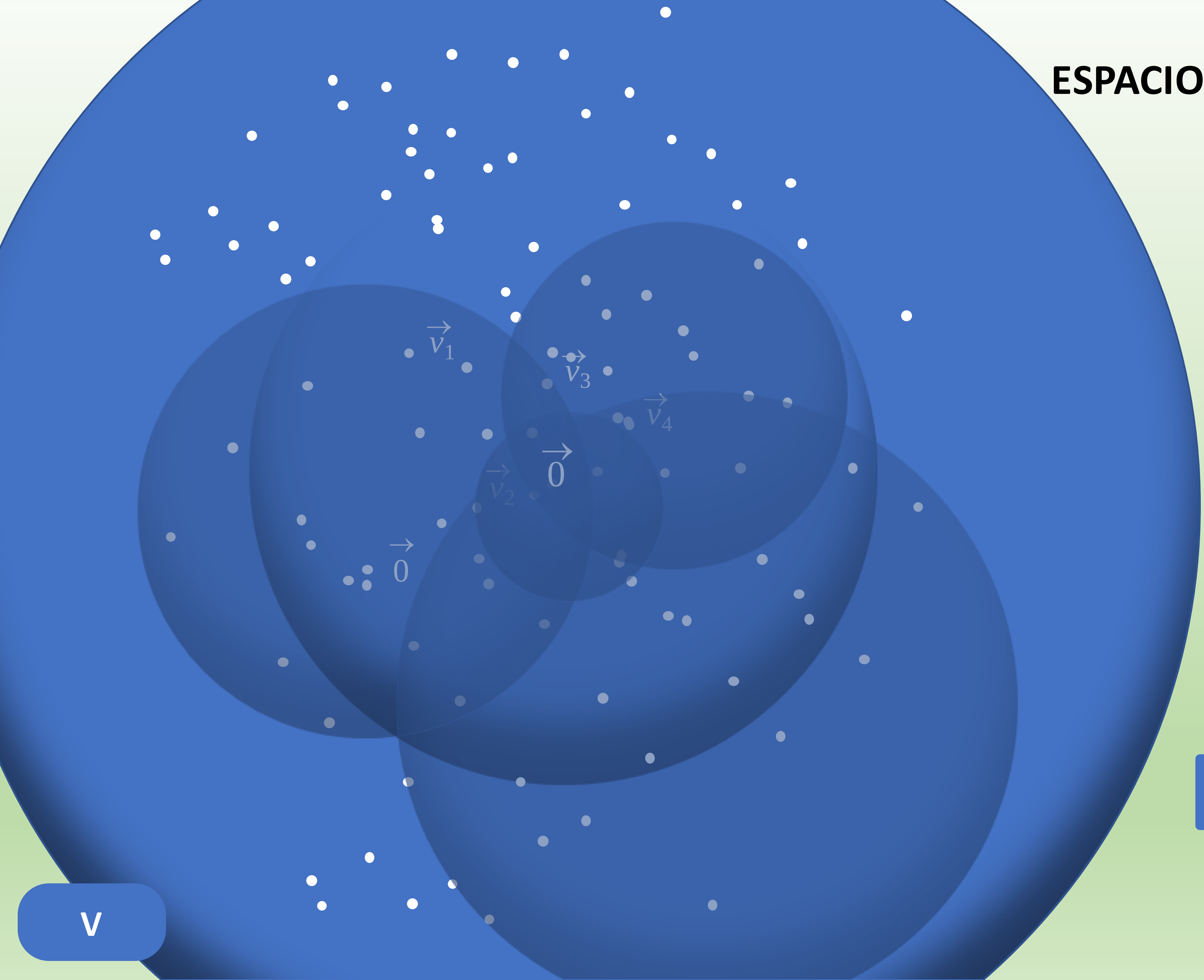
$$\alpha.\vec{0} = \overrightarrow{0_V}$$

PROPIEDAD 3

$$-1.\vec{v} = -\vec{v}$$

PROPIEDAD 4

$$\alpha.\vec{v} = \overrightarrow{0_V} \quad \rightarrow \alpha = 0 \vee \vec{v} = \vec{0}$$

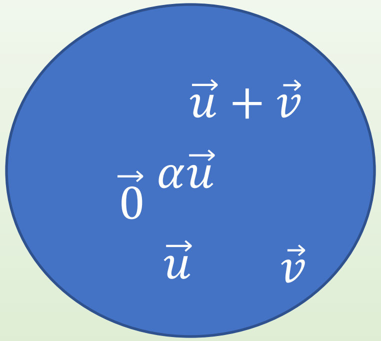


ESPACIO VECTORIAL DENTRO DE UN ESPACIO VECTORIAL

SUBESPACIO VECTORIAL

Sea $V=R^2$ y el conjunto $S=\{(x,y)\in R^2/y=2.x\}$

$\vec{u}=(x_1,2x_1)\in \mathrm{S}$ $\quad$ $\vec{v}=(x_2,2x_2)\in \mathrm{S}$



1) ¿ $\vec{u}+\vec{v} \in S$? $\quad$ $\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2\,,2(x_1+x_2))\in S$

2) ¿ $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$? $\quad$ $\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2\,,2(x_1+x_2))$=
$=\left(x_2+x_1\,,2(x_2+x_1)\right)=\vec{v}+\vec{u}$

$\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores de R^2 y la suma de vectores de R^2 es conmutativa.
Y también es asociativa por lo tanto podríamos afirmar que

3) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ se cumple

4) $\vec{0}=(0{,}0)\in S$

5) $-\vec{v} \in S$

6) $\alpha\vec{v} \in S$? $\quad$ $\alpha.(x_2\,,2.x_2)$=$(\alpha.x_2,\ 2\alpha x_2)\in S$

7) $\alpha(\beta\vec{u})$=$(\alpha\beta x_1{,}2\alpha\beta x_1)$=$(\alpha\beta)\vec{u}$ ¿Podría no cumplirse? No, por que $\vec{u} \in R^2$

8) $1.\vec{u}=1.(x_1\,,2x_1)=\vec{u}$

9) $\alpha(\vec{u}+\vec{v})$=$(\alpha x_1+\alpha x_2{,}2\alpha x_1+2\alpha x_2)$= $\alpha\vec{u}$+$\alpha\vec{v}$

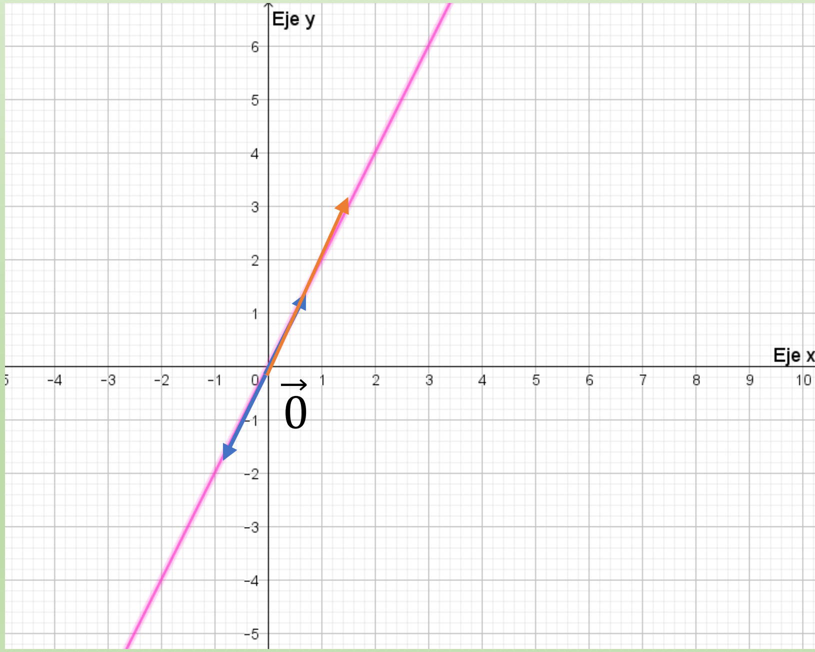
10) $(\alpha+\beta)\vec{u}=(\alpha+\beta)x_1{,}2(\alpha+\beta)x_1)$=$\alpha\vec{u}$+$\beta\vec{u}$

Se puede observar que :

$S\subset V$

$S\neq\{\}$

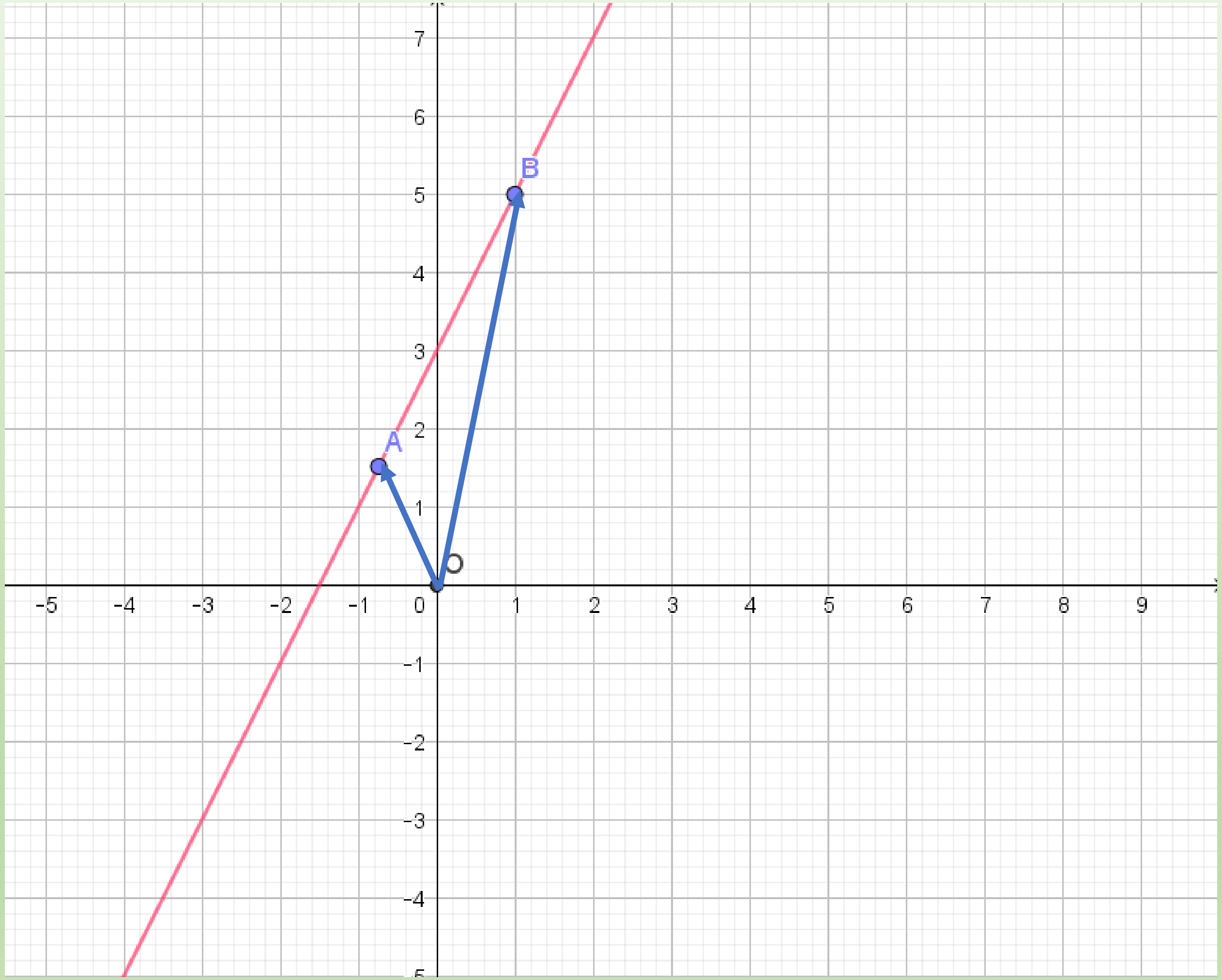
S representa a los puntos de una recta que pasa por el origen



S es un espacio vectorial.

S es un subespacio de V

Sea $V = R^2$ y el conjunto $S = \{(x, y) \in R^2 / y = 2.x + 3\}$



Se puede observar que :

$$S \subset V$$

$$S \neq \{\}$$

$$\vec{0} \notin S$$

$$¿\, \vec{u} + \vec{v} \in S\, ?$$

NO, $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2\, , 2x_1 + 3 + 2x_2 + 3)$

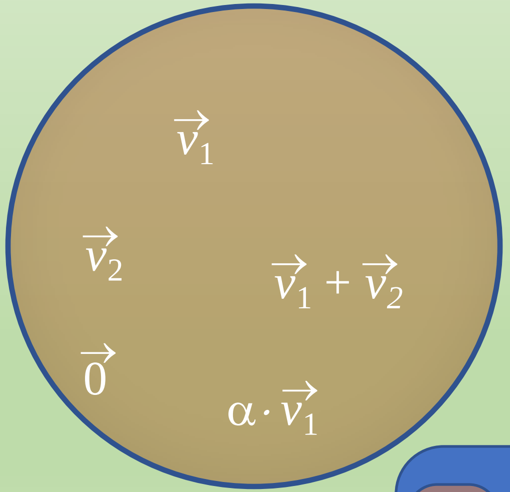
$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2\, , 2(x_1 + x_2) + 6)$$

S no es subespacio de V

SUBESPACIO VECTORIAL DE UN ESPACIO VECTORIAL (V,R,'+','')

CONDICIONES PARA QUE UN SUBCONJUNTO S DE $\mathbf{V}$ SEA UN SUBESPACIO

- C1. $S \subset \mathbf{V}$ → Garantiza que se cumplen los axiomas excepto las leyes de composición interna para la suma y externa para el producto
- C2. $S \neq \varnothing$ → Se suele reemplazar esta condición por la de verificar que $\vec{0} \in S$
- C3. $\forall \vec{v}_1 \in S, \forall \vec{v}_2 \in S \Rightarrow \left(\vec{v}_1 + \vec{v}_2\right) \in S$
- C4. $\forall \vec{v}_1 \in S, \forall \alpha \in \mathbf{R} \Rightarrow \left(\alpha \cdot \vec{v}_1\right) \in S$



Subespacios triviales: $\boxed{S = \left\{\vec{0}\right\}}$ $\boxed{S = \mathbf{V}}$

PROPIEDADES: $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}; \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}; \alpha \cdot \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = 0 \vee \vec{v} = \vec{0}$

$$V = R^{2\times 2}$$

$$S = \{A \in R^{2\times 2} / A = A^T\}$$

C1) $S \subset V$ por definición

$C2)$ $S \neq \emptyset$ por que por ejemplo $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$

$C3)$ $Si\ A \in S \Rightarrow A = A^T$ y $B \in S \Rightarrow B = B^T$

Entonces ¿$A + B \in S$? ¿ $A + B = (A+B)^T$?

$A + B = A^T + B^T$ (Por hipótesis)

$= (A+B)^T$ (Por propiedad de la transpuesta de un suma)

Por lo tanto $A + B \in S$

$C4)$ $Si\ A \in S \Rightarrow A = A^T$ y $\alpha \in R$

Entonces ¿ $\alpha . A \in S$? ¿ $\alpha . A = (\alpha . A)^T$?

$\alpha . A = \alpha . A^T = (\alpha . A)^T$

(Por hipótesis) (Por propiedad de transpuesta)

Como las cuatro condiciones se verifican S es un subespacio de V

$$W = \{A \in R^{2\times 2} / tr(A) = 1\}$$

C1) $W \subset V$ por definición

$C2)$ $W \neq \emptyset$ por que por ejemplo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$

Pero $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W$

Entonces W no es un subespacio de V