# ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA I

## MÓDULO 2- TERCERA CLASE

### PRODUCTO VECTORIAL

Una nueva operación **solo definida entre vectores de $\mathbf{R}^3$** es el **producto vectorial**.

Si $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ y $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$ es

$$\vec{u} \text{ x } \vec{v} = \vec{u}\wedge\vec{v}=(u_y.v_z-v_y.u_z;u_z.v_x-v_z.u_x;u_x.v_y-v_x.u_y) \qquad (1)$$

Usaremos indistintamente cualquiera de los dos símbolos ( x o $\wedge$ )

El resultado del producto vectorial es un nuevo vector de $\mathbf{R}^3$.

La fórmula anterior es un poco tediosa, por lo que se utiliza la siguiente regla práctica para calcularlo, empleando **determinantes.**

Para efectuar $\vec{u}\wedge\vec{v}$ disponemos en una matriz de 3x3 los tres versores canónicos de $R^3$ y luego dos *filas* ***ordenadas*** para $\vec{u}$ y $\vec{v}$ .

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix} \text{ y resolvemos el “determinante” } \hat{i}.\begin{vmatrix}u_y & u_z\\ v_y & v_z\end{vmatrix} - \hat{j}.\begin{vmatrix}u_x & u_z\\ v_x & v_z\end{vmatrix} + \hat{k}.\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}$$

aplicando la regla de Laplace , desarrollando por los elementos de la primera fila .

El signo menos (–) antes del segundo determinante recuerden que deriva de hacer ( $-1)^{1+2}$ por el adjunto o cofactor del elemento 12.

Esto último se traduce como:

$$\vec{u}\wedge\vec{v}= \quad \hat{i}.\left(u_y.v_z-u_z.v_y\right)-\hat{j}.\left(u_x.v_z-u_z.v_x\right)+\hat{k}.\left(u_x.v_y-u_y.v_x\right) \qquad (2)$$

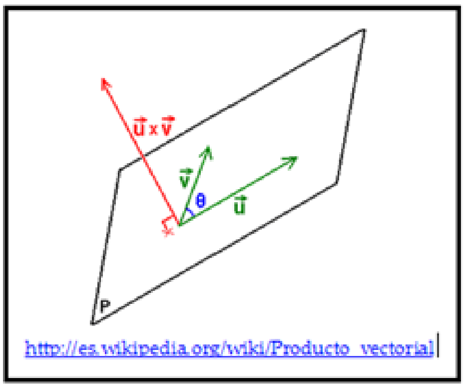
$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\hat{i}.\left(u_y.v_z-u_z.v_y\right)+\hat{j}.\left(u_z.v_x-u_x.v_z\right)+\hat{k}.\left(u_x.v_y-u_y.v_x\right) \quad \text{, entonces}$$

Observar que ambas expresiones (1) y (2) son coincidentes.

Así $(-3, 2, 4) \wedge (5, 0, -6) = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -3 & 2 & 4\\ 5 & 0 & -6\end{vmatrix} = \hat{i}.\begin{vmatrix}2 & 4\\ 0 & -6\end{vmatrix}-\hat{j}.\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 5 & -6\end{vmatrix}+\hat{k}.\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 5 & 0\end{vmatrix}=$

$\hat{i}.(-12)-\hat{j}.(-2)+\hat{k}.(-10) = (-12, 2, -10)$

• El producto vectorial resulta ser un nuevo vector **perpendicular** a cada uno de los vectores que lo generaron.




En nuestro caso (–12, 2, –10) $\perp$ (–3, 2, 4) pues:
(–12, 2, –10)•(–3, 2, 4)= 36 + 4 – 40 = 0 y

(–12, 2, –10) $\perp$ (5, 0, –6) ya que
(–12, 2, –10)•(5, 0, –6) = –60 + 0 + 60 = 0.

En forma genérica:

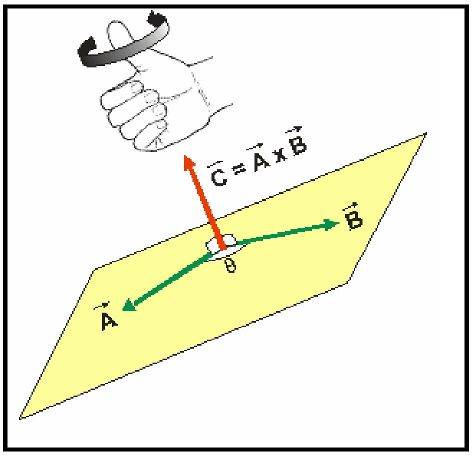
$$\vec{u} \perp \vec{u} \wedge \vec{v} \Rightarrow (u_x, u_y, u_z) \bullet (u_y.v_z - v_y.u_z; u_z.v_x - v_z.u_x; u_x.v_y - v_x.u_y)$$

$= u_x u_y v_z - u_x u_z v_y + u_y u_z v_x - u_y u_x v_z + u_z u_x v_y - u_z u_y v_x$

$= \underline{u_x u_y v_z} - u_x u_z v_y + u_y u_z v_x - \underline{u_y u_x v_z} + u_z u_x v_y - u_z u_y v_x = 0$

De forma análoga probar que $\vec{v} \perp \vec{u} \wedge \vec{v}$.

Geométricamente (si los vectores son no nulos y no paralelos) podemos ubicar al vector producto vectorial de dos vectores -a través de la *regla de la mano derecha*- en una recta que es perpendicular al plano que determinan los vectores componentes.




El sentido del vector **C = A x B** se define por dicha regla:
Se coloca la mano derecha en el origen común de los dos vectores **A** y **B**, y se flexionan los de esa mano partiendo de **A** hacia **B**. El pulgar extendido define la dirección del vector **C = A x B**.[1]

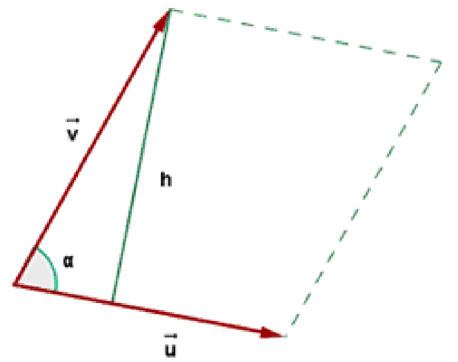
Otra forma, si colocamos el dedo índice apuntando en la dirección y sentido del primer vector, y el dedo mayor apuntando como el segundo vector. El dedo pulgar queda apuntando en el sentido del vector producto vectorial.

[1] http://cpreuni.blogspot.com.ar/2010/08/producto-vectorial.html

La norma del vector producto vectorial se obtiene haciendo $\|\overline{u}\times\overline{v}\| = \|\overline{u}\|.\|\overline{v}\|.sen\ \ \hat{\theta}$

Piensa porque en la fórmula anterior el factor $sen\ \ \hat{\theta}$ no está entre barras de valor absoluto.

**El módulo del producto vectorial de dos vectores nos da el área del paralelogramo que tiene por lados a esos vectores.**



http://www.vitutor.com/analitica/vectores/producto_vectorial.html

Utilizando el esquema se observa:

$$A = \|\overline{u}\|.h = \|\overline{u}\|.\|\overline{v}\|.sen\ \ \hat{\alpha} = \|\overline{u}\times\overline{v}\|$$

Ten presente esta propiedad para los ejercicios que pidan hallar el área de un paralelogramo o de un triángulo

**Propiedades del producto vectorial entre vectores**

Sean $\overline{u}$ , $\overline{v}$ , $\overline{w}$ vectores de $R^3$ y $\lambda\in R$ entonces:

a) $\forall\ \ \overline{u},\overline{v}\in R^3 : \overline{u}\times\overline{v} = -(\overline{v}\times\overline{u})$ [anticonmutatividad]

b) $\forall\ \ \overline{u}\in R^3 \wedge \overline{0}\in R^3 : \overline{u}\times\overline{0} = \overline{0}\times\overline{u} = \overline{0}$

c) $\forall\ \ \overline{u}\in R^3 : \overline{u}\times\overline{u} = \overline{0}$

d) $\forall\ \ \overline{u},\overline{v}\in R^3 \wedge \forall\ \ \lambda\in R : (\lambda.\overline{u})\times\overline{v} = \overline{u}\times(\lambda.\overline{v}) = \lambda.(\overline{u}\times\overline{v})$

e) $\forall\ \ \overline{u},\overline{v},\overline{w}\in R^3 : \begin{cases} \overline{u}\times(\overline{v}+\overline{w}) = (\overline{u}\times\overline{v}) + (\overline{u}\times\overline{w}) \\ (\overline{v}+\overline{w})\times\overline{u} = (\overline{v}\times\overline{u}) + (\overline{w}\times\overline{u}) \end{cases}$ $pero\ \ \overline{u}\times(\overline{v}+\overline{w}) = -\left[\left(\overline{v}+\overline{w}\right)\times\overline{u}\right]$

f) $\forall\ \ \overline{u},\overline{v}\in R^3 : \|\overline{u}\times\overline{v}\|^2 = \|\overline{u}\|^2.\|\overline{v}\|^2 - \left(\overline{u}\bullet\overline{v}\right)^2$ [Identidad de Lagrange]

g) $\forall\ \ \overline{u},\overline{v}\in R^3 \wedge \overline{u}\neq\overline{0} \wedge \overline{v}\neq\overline{0} \wedge \overline{u}\times\overline{v} = \overline{0} \Rightarrow \overline{u}\ \ //\ \ \overline{v}$

Todas las propiedades pueden obtenerse a partir de la definición.

• Para cada propiedad exprese en lenguaje coloquial qué significa.
Por ejemplo, en a): "el producto vectorial entre dos vectores resulta dar el *vector opuesto* si la operación se efectúa en el orden inverso".

Para la propiedad h) se parte de g);
si $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0} \rightarrow \|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = 0 \rightarrow 0 = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.sen\ \hat{\theta} \rightarrow 0 = sen\ \hat{\theta} \rightarrow \theta = 0^{o}$ ó $\theta = 180^{o}$.
Análogamente si los vectores son paralelos resulta $\theta = 0^{o}$ ó $\theta = 180^{o}$
$\rightarrow sen\ \hat{\theta} = 0 \rightarrow \|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = 0 \rightarrow \vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$

**Algunos ejemplos:**
**a)** Si $\bar{u} = (-3,2,5)$ y $\bar{v} = 2.\breve{i} - \breve{j} + \breve{k}$ calcular $\bar{u}\times\bar{v}$, $\bar{v}\times\bar{u}$, $\|\bar{u}\times\bar{v}\|$ y $\|2.\bar{u}\times(-3).\bar{v}\|$ (comparar las normas de estos dos últimos).
¿Cuál es el área del paralelogramo de vértices O, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{u+v}$?

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2+5)\hat{i} - (-3-10)\,\hat{j} + (3-4)\hat{k} = (7\ ;\ 13;\ -1)$$

$$\vec{v}\wedge\vec{u} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-5-2)\hat{i} - (10+3)\,\hat{j} + (4-3)\hat{k} = (-7\ ;\ -13;\ 1)$$

En los dos cálculos anteriores tenemos un ejemplo de la anticonmutatividad, obtuvimos vectores opuestos , $\bar{u}\times\bar{v} = -(\bar{v}\times\bar{u})$

$$\|\vec{u}x\vec{v}\| = \sqrt{7^2 + 13^2 + (-1)^2} = \sqrt{49+169+1} = \sqrt{219}$$

$$2\vec{u}\wedge(-3\vec{v}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -6 & 4 & 10 \\ -6 & 3 & -3 \end{vmatrix} = (-12-30)\hat{i} - (18+60)\,\hat{j} + (-18+24)\hat{k} = (\ -42;\ -78\ ;\ 6)$$

También podemos resolverlo aplicando propiedades de determinantes:

$$2\vec{u}\wedge(-3\vec{v}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -6 & 4 & 10 \\ -6 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 2.(-3)\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -6.(\vec{u}\wedge\vec{v}) = -6\ .\ (7\ ;\ 13;\ -1) = (\ -42;\ -78\ ;\ 6)$$

$$\left\|2\vec{u} \wedge \left(-3\vec{v}\right)\right\| = \sqrt{(-42)^2 + (-78)^2 + 6^2} = \sqrt{1764 + 6084 + 36} = \sqrt{7884} = 6\sqrt{219}$$

La norma de $2.\bar{u} \times (-3).\bar{v}$ es seis veces la norma de $\bar{u} \times \bar{v}$ . $\left\|2.\bar{u} \times (-3).\bar{v}\right\| = 6. \left\|\bar{u} \times \bar{v}\right\|$

Para resolver lo anterior podemos usar las propiedades
$\left\|2.\bar{u} \times (-3).\bar{v}\right\| = \left\|-6.\left(\bar{u} \times \bar{v}\right)\right\| = |-6|\left\|\left(\bar{u} \times \bar{v}\right)\right\| = 6.\left\|\left(\bar{u} \times \bar{v}\right)\right\|$ por asociatividad, y norma del producto de un escalar por un vector

**PRODUCTO MIXTO**

**El producto mixto sólo es posible en** $R^3$ **y se define así**:
Si $\bar{u} = (u_x, u_y, u_z), \bar{v} = (v_x, v_y, v_z)$ $y$ $\bar{w} = (w_x, w_y, w_z)$ el producto mixto $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ es $\bar{w} \bullet (\bar{u} \times \bar{v})$
El resultado es **un número real,** un escalar y primero se efectúa el producto vectorial entre los dos primeros vectores y al resultado se lo multiplica escalarmente por el tercer vector. (Nota que es imposible que sea al revés).

Recordando que $\bar{u} \times \bar{v} = (u_y.v_z - v_y.u_z).\breve{i} - (u_x.v_z - v_x.u_z).\breve{j} + (u_x.v_y - v_x.u_y).\breve{k}$ resulta que:
$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \bar{w} \bullet (\bar{u} \times \bar{v}) = w_x.u_y.v_z - w_x.v_y.u_z - w_y.u_x.v_z + w_y.v_x.u_z + w_z.u_x.v_y - w_z.v_x.u_y$

**Ejemplo**
Si $\bar{u} = (3,0,-1), \bar{v} = (-2,5,1)$ $y$ $\bar{w} = (-1,-3,4)$ es:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (-1,-3,4) \bullet \begin{vmatrix} \hat{i} & -\hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -3, 4) \bullet (5, -1, 15) = -5 + 3 + 60 = 58.$$

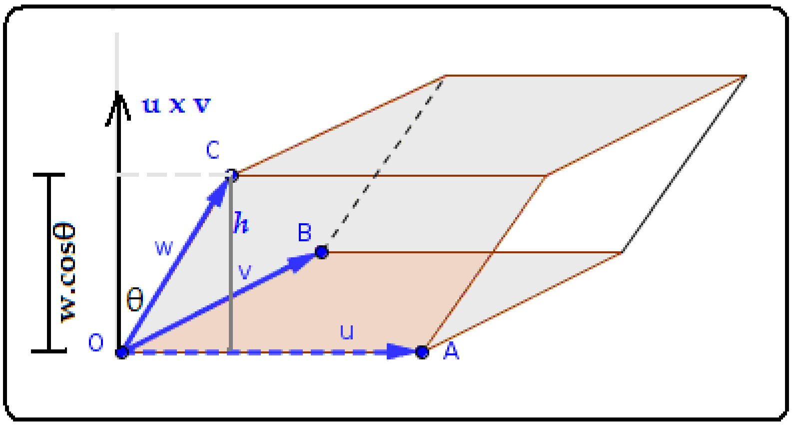
Que también puede calcularse como:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$ por ejemplo si desarrollamos por los elementos de la primera fila resulta:

3. ( 5 . 4 – 1 . ( -3)) + ( - 1) . ( (-2).(-3) – 5 (-1)) = 3 . 23 -1. ( 6 + 5 ) = 69 -11= 58

**Interpretación geométrica del valor absoluto del producto mixto**

Tres vectores $\overline{u}\ ,\ \overline{v}\ ,\ \overline{w} \in R^3$ -con origen en O- generan un paralelepípedo cuyas tres aristas concurrentes son esos vectores.




El volumen de éste está dado por el producto de la superficie de la base por su altura:

$Volumen = \sup .\, base \times long.\, altura$

Como la superficie de la base puede obtenerse por la norma del producto vectorial de los vectores aristas se tiene:

$V = h\ .\ \left\|\vec{u} \wedge \vec{v}\right\|$

Pero h= $\left\|\vec{w}\right\| . \left|\cos\theta\right|$ (ponemos valor absoluto pues el coseno puede ser negativo)

$$Volumen\ = \left\|\vec{w}\right\|\ .\ \left\|\vec{u} \wedge \vec{v}\right\| . \left|\cos\theta\right| = \left|\vec{w} \bullet \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right)\right|$$

O sea que el valor absoluto del producto mixto entre tres vectores nos da el volumen del paralelepípedo determinados por esos tres vectores.

**Condición de coplanaridad entre tres vectores en** $R^3$

Tres vectores $\overline{u}\ ,\ \overline{v}\ ,\ \overline{w} \in R^3$ se denominarán coplanares si sus direcciones quedan incluidas en el mismo plano. Si esto ocurriera no formarían un paralelepípedo o equivalentemente su volumen daría cero por lo que podemos resaltar el siguiente resultado:

Dados $\overline{u}\ ,\ \overline{v}\ ,\ \overline{w} \in R^3$, no nulos, serán coplanares si y sólo si el producto mixto entre ellos da cero.

**Ejemplos**

Si $\overline{u} = (-2,\ 0,\ 3)\ ;\ \ \overline{v} = (1,\ -1,\ -a)\ \ y\ \ \overline{w} = (3,\ a\ ,\ 9)$

a) Encontrar $a \in R$ tal que los vectores resulten coplanares. Mostrar las ternas de vectores que obtienen.

b) Dado $\vec{t} = (3\ ,1\ ,-4)$, ¿para cuáles valores de $a$, $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{t}$ determinan un paralelepípedo de volumen 12?

Resolución:

a) Debemos recordar que dos vectores son coplanares si y solo si su producto mixto es 0

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = (\overline{u} \times \overline{v}) \bullet \overline{w} = 0$$

Calculamos el producto mixto

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -a \\ 3 & a & 9 \end{vmatrix} = -1(-18-9) - a(2a-3) = 27 - 2a^2 + 3a$$

Igualamos el producto mixto a cero y resolvemos la ecuación

$$-2a^2 + 3a + 27 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -3 \vee a = \frac{9}{2}$$

Entonces los vectores resulta:

Con $a$ = - 3 resultan $\overline{u} = (-2,\ 0,\ 3)$ ; $\overline{v} = (1,\ -1,\ 3)$ $y$ $\overline{w} = (3,\ -3\ ,\ 9)$ Nota que los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ obtenidos son paralelos

Con $a = \frac{9}{2}$ resultan $\overline{u} = (-2,\ 0,\ 3)$ ; $\overline{v} = \left(1,\ -1,\ -\frac{9}{2}\right)$ y $\overline{w} = \left(3,\ \frac{9}{2}\ ,\ 9\right)$

b) Debemos recordar que el valor absoluto del producto mixto es el volumen del paralelepípedo determinado por los 3 vectores.

Calculamos primero el producto mixto

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{t}] = (\overline{u} \times \overline{v}) \bullet \overline{t} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -a \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -1(8-9) - 1(2a-3) = 1 - 2a + 3 = -2a + 4$$

El valor absoluto del producto mixto debe ser igual a 12

$|-2a+4| = 12$ entonces

$$\begin{aligned} -2a+4 &= 12 \quad \vee \quad -2a+4 = -12 \\ -2a &= 8 \quad \vee \quad -2a = -16 \\ a &= -4 \quad \vee \quad a = 8 \end{aligned}$$

Entonces, si a vale -4 u 8 los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{t}$ forman un paralelepípedo de volumen 12 unidades cúbicas

Resolver los ejercicios 41 al 54 del archivo llamado "MÓDULO 2, GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS"

Puedes empezar a resolver los ejercicios propuestos como EJERCITACIÓN EXTRA

Videos de la cátedra que pueden ayudarte con estos temas:

Área de un triangulo
https://www.youtube.com/watch?v=sbsu5F94lRo

Vectores 1. Vectores coplanares.
https://www.youtube.com/watch?v=XgZ-IeUcVe8

Vectores 3. Volumen.
https://www.youtube.com/watch?v=Xdl0OU-kMrI