Funciones vectoriales de una variable. Trayectorias en $\mathbb{R}^n$

Curvas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$

Definición 1. Una *trayectoria* en $\mathbb{R}^n$ es una función

$$\vec{\alpha}: [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n / \ \vec{\alpha}(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$$

$$\text{o también } \ \vec{\alpha}(t) = \alpha_1(t)\ \hat{\imath} + \alpha_2(t)\ \hat{\jmath} + \alpha_n(t)\hat{k}$$

donde $I = [a,b]$ es el dominio de $\vec{\alpha}$ llamado *intervalo paramétrico* y la variable t el *parámetro*. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son las componentes de $\vec{\alpha}$**.** La imagen de $\vec{\alpha}$ sobre I, denotada por $C = \vec{\alpha}[I]$, se llama curva parametrizada por $\vec{\alpha}$ y los puntos $\vec{\alpha}(a) \in \mathbb{R}^n$ y $\vec{\alpha}(b) \in \mathbb{R}^n$ se llaman extremos inicial y final, respectivamente. Se dice que $\vec{\alpha}$ es una *trayectoria regular* si existe la derivada $\vec{\alpha}'(t) \neq \vec{0}$ y es continua en el intervalo abierto $I' = (a,b)$.

Notación: En los apuntes teóricos y guía de trabajos prácticos se usará para indicar magnitud vectorial la notación letra con flecha arriba, $\vec{v}$, mientras que en los libros de texto es más usual encontrar la notación de letra en negrita, $\boldsymbol{v}$. Los símbolos $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$, representan los vectores unitarios o versores, $\hat{\imath} = \vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\hat{\jmath} = \vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\hat{k} = \vec{e}_3 = (0,0,1)$.

Este tipo de funciones se utilizan para modelar el recorrido realizado por un objeto en movimiento, en el plano, en el espacio o, en general, en $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, $\vec{\alpha}(t_0) \in \mathbb{R}^3$ puede simbolizar la posición de una partícula en el espacio, en el instante t_0. De este modo, así como se muestra en la Figura 1, a medida que la variable t recorre el intervalo I, desde a hasta b, la función $\vec{\alpha}$ va trazando la curva $C \subset \mathbb{R}^3$.

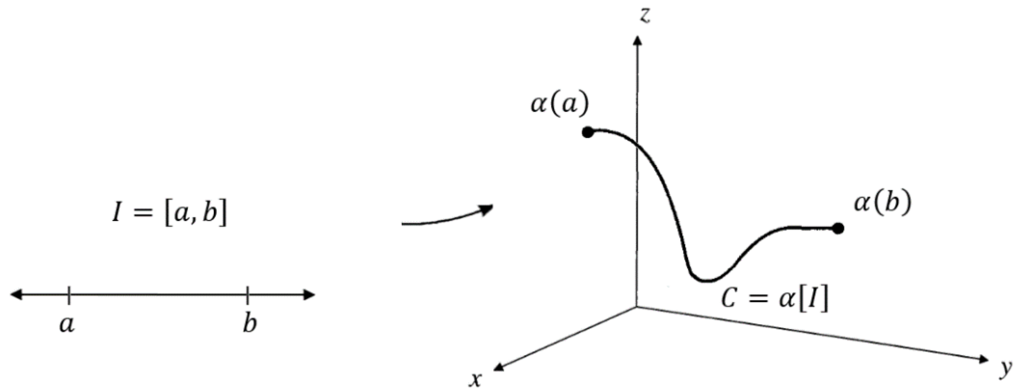

Figura 1. Representación gráfica del intervalo paramétrico I y de la curva C parametrizada por $\vec{\alpha}$.

Ejemplo 1. La función

$$\vec{\alpha}(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (r \cdot \cos(t)\,, r \cdot \operatorname{sen}(t))$$

con intervalo paramétrico $I = [0{,}2\pi]$, parametriza por completo, la circunferencia C de centro en el origen y radio r.

En efecto, del triángulo rectángulo de vértices $(x, 0)$, $(0, y)$ y el origen O, que se muestra en la Figura 2, aplicando las relaciones trigonométricas fundamentales se deducen las siguientes relaciones

$$\cos(t) = \frac{x}{r} \qquad\qquad \operatorname{sen}(t) = \frac{y}{r}$$

Nótese que, en el triángulo rectángulo mencionado, los valores de x e y, corresponden a las longitudes con orientación de los catetos adyacente y opuesto, respecto del ángulo t. Y de estas ecuaciones se obtienen las siguientes

$$x = x(t) = r \cdot \cos(t) \qquad\qquad y = y(t) = r \cdot \operatorname{sen}(t)$$

Esto quiere decir que el par (x, y) que se ha tomado de la circunferencia, en referencia al valor angular t, admite la escritura

$$(x, y) = \big(x(t), y(t)\big) = (r \cdot \cos(t)\,, r \cdot \operatorname{sen}(t))$$

Por otra parte, también de la construcción presentada en la Figura 2, se deduce el rango de variación del parámetro. Obsérvese que cuando t varía desde $a = 0$ hasta $b = 2\pi$, $\vec{\alpha}(t)$ realiza la traza completa de la circunferencia C, empezando y terminando el recorrido en el punto $\vec{\alpha}(0) = \vec{\alpha}(2\pi) = (r, 0)$. La traza completa también se logra tomando como referencia un intervalo paramétrico $I = [a, b]$ de longitud $l = b - a = 2\pi$.

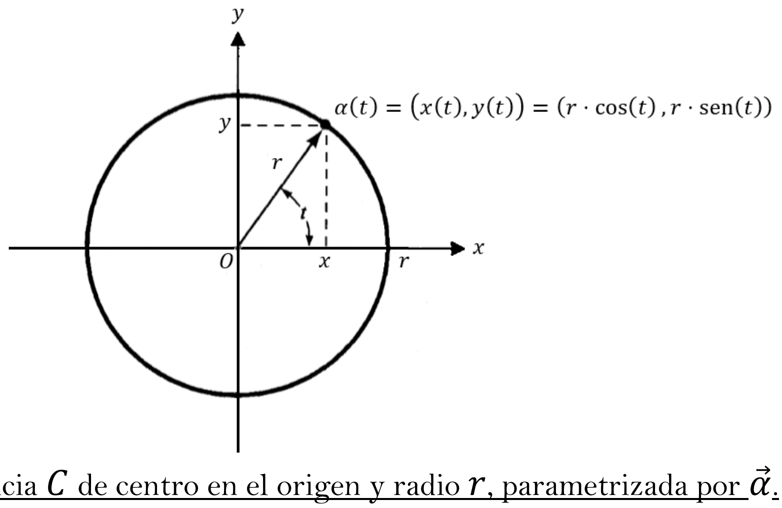

Figura 2. Circunferencia C de centro en el origen y radio r, parametrizada por $\vec{\alpha}$.

El desarrollo anterior muestra cómo obtener una parametrización de la circunferencia C, a partir de la construcción realizada. Y que efectivamente la función α se corresponde con una de estas.

Hay situaciones en las cuales se deduce el tipo de curva parametrizada una función dada, a partir de obtener la ecuación cartesiana

$$F(x, y) = 0$$

que a esta le corresponde. Esto se llama implicitar la curva. Esto se logra a partir de considerar las ecuaciones que definen a la curva

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

eliminar el parámetro t y obtener una ecuación que solamente involucre a x e y. Para el caso de

$$C: \begin{cases} x = x(t) = r \cdot \cos(t) \\ y = y(t) = r \cdot \operatorname{sen}(t) \end{cases}$$

se procede del siguiente modo

$$x = x(t) = r \cdot \cos(t) \quad \rightarrow \quad x^2 = r^2 \cdot \cos^2(t)$$

$$y = y(t) = r \cdot \operatorname{sen}(t) \quad \rightarrow \quad y^2 = r^2 \cdot \operatorname{sen}^2(t)$$

sumando las últimas expresiones resulta

$$x^2 + y^2 = r^2 \cdot \cos^2(t) + r^2 \cdot \operatorname{sen}^2(t) = r^2 \cdot \left(\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t)\right) = r^2$$

es decir

$$x^2 + y^2 = r^2$$

o lo que es lo mismo

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

y precisamente, esta ecuación cartesiana define a la circunferencia de centro en el origen y radio r.

Hay que entender, de todas maneras, que la única conclusión que se puede obtener a partir de este procedimiento es que los puntos

$$\left(x(t), y(t)\right) = (r \cdot \cos(t), r \cdot \operatorname{sen}(t))$$

que ofrece la parametrización $\vec{\alpha}(t)$, verifican la relación

$$x^2(t) + y^2(t) - r^2 = 0$$

Es decir, que todos se encuentran en la circunferencia de centro en el origen y radio r. Nada se puede afirmar sobre qué parte de esta circunferencia es la que dibuja la función $\vec{\alpha}$. Obsérvese que si se tomara el rango

$$0 \leq t \leq \pi$$

se estaría parametrizando solamente la semicircunferencia superior, desde el extremo inicial de recorrido $\vec{\alpha}(0) = (r, 0)$ hasta el extremo final $\vec{\alpha}(\pi) = (-r, 0)$. En cambio, la ecuación

$$F(x, y) = x^2 + \ y^2 - r^2 = 0$$

define la circunferencia completa sin inducir un sentido de recorrido alguno.

Ejemplo 2. Se lama *cicloide* a la curva que describe un punto fijo sobre una circunferencia de radio r, que rueda sin deslizarse sobre una recta.

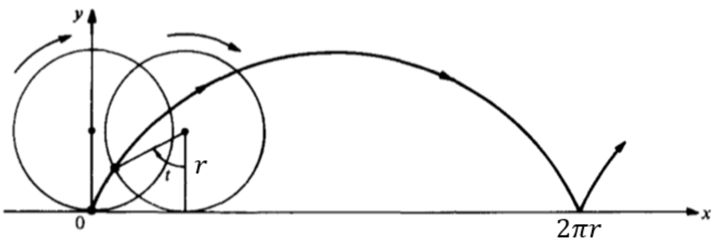

Figura 3. Representación geométrica de la cicloide

Una parametrización para la primera rama de esta curva es la que ofrece la función

$$\vec{\alpha}(t) = \big(r\,t - r\,sen(t), r - r\,cos(t)\big) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Ejemplo 3. La función vectorial

$$\vec{\alpha}(t) = (a \cdot \cos(t)\,, a \cdot \operatorname{sen}(t)\,, b \cdot t) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

con $a > 0$ y $b > 0$ parametriza la *hélice circular* que se muestra en la Figura 4, iniciando el trazado en el extremo inicial $\vec{\alpha}(0) = (a, 0,0)$ y finalizándolo en el extremo final $\vec{\alpha}(2\pi) = (a, 0,2\pi b)$.

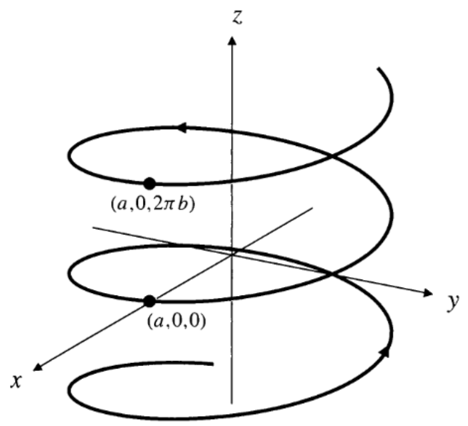

Figura 4. Hélice circular del Ejemplo 3.

Una característica de esta curva es que se encuentra incluida en el cilindro vertical de ecuación

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Efectivamente, al considerar las fórmulas de x e y, y procediendo como se hizo en el ejemplo 1, se verifica la relación mencionada.

$$x^2(t) + y^2(t) = a^2 \cdot \cos^2(t) + a^2 \cdot \operatorname{sen}^2(t) = a^2 \cdot \left(\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t)\right) = a^2.$$

Ejemplo 4. El segmento de la recta R de $\mathbb{R}^3$ de extremos inicial y final, A y B respectivamente, es la imagen de la trayectoria

$$\vec{\alpha}(t) = A + t \cdot (B - A) \qquad 0 \le t \le 1$$

Nótese que $\vec{\alpha}(0) = A$ y $\vec{\alpha}(1) = B$. Por otra parte, a partir de los puntos A y B es posible obtener el vector diferencia

$$D = B - A$$

que resulta ser paralelo a la recta R. Es decir que se trata de un vector director de la recta. A su vez, este vector coincide en sentido con el sentido de recorrido en el que se quiere trazar el segmento en cuestión.

De este modo, para cada número real t_0, el vector

$$V = t_0 \cdot (B - A)$$

también es paralelo a R. Con lo cual, la terna

$$P = A + t_0 \cdot (B - A)$$

constituye un punto sobre la recta. Por tal razón se define la función

$$\vec{\alpha}(t) = A + t \cdot (B - A)$$

Que dibuja la recta completa cuando el parámetro t recorre la recta real, y solamente el segmento de extremos A y B cuando t varía en el intervalo $[0,1]$.

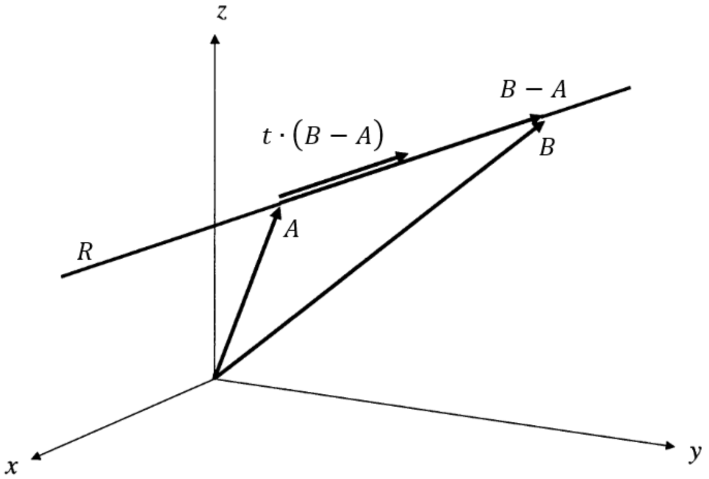

Figura 5. Visualización geométrica del segmento de recta de extremos A y B.

Cálculo del dominio

Consideremos que nos dan la expresión $\vec{\alpha}(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)\big)$, y necesitamos conocer el dominio de $\vec{\alpha}$. Como la función $\vec{\alpha}$ tiene tres componentes, y cada componente es una función escalar de una variable, tendremos entonces un dominio para cada componente, $dom\ \alpha_1,\ dom\ \alpha_2,\ dom\ \alpha_3$, por lo tanto el dominio de $\vec{\alpha}$ será la intersección entre los dominios de sus componentes, es decir,

$$dom\ \vec{\alpha} = dom\ \alpha_1 \cap\ dom\ \alpha_2 \cap\ dom\ \alpha_3$$

Ejemplo 5. Calcular el dominio natural (más amplio) de la siguiente trayectoria

$$\vec{\alpha}(t) = \big(\sqrt{1-t}, \ln t, \arctan t\big)$$

Resolución:

$$\sqrt{1-t}\colon (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$$
$$\ln t\colon\ (0, \infty) \to \mathbb{R}$$
$$\arctan t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$dom\ \vec{\alpha} = (-\infty, 1] \cap (0, \infty) \cap \mathbb{R} = (0,1)$$

Biblioteca digital. Cap 4, p. 151. Cálculo varias variables. W Mora.

Link contenidos pertinentes (Ctrl+Clic mouse para ir al enlace)
Khan Academy

https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/thinking-about-multivariable-function#ways-to-represent-multivariable-functions

Nota: en este sitio de internet, los vectores se describen como: $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$