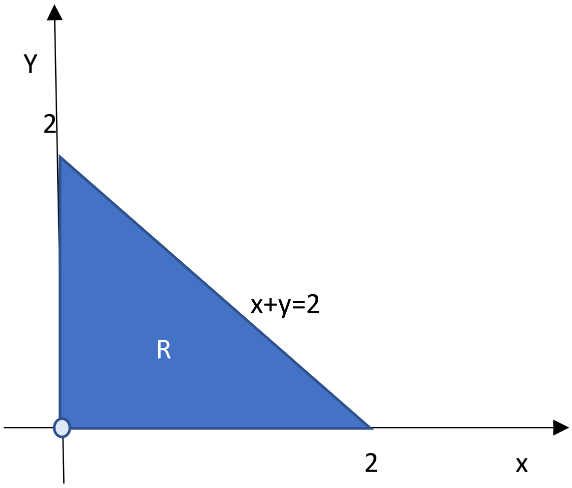
8.- En los siguientes casos, elegir una transformación afín adecuada para calcular las integrales dadas:

d)

$$\iint_R e^{\frac{y-x}{y+x}}\ \mathrm{dx\ dy}$$

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 2\ \} - \{(0,0)\}$



Planteamos la transformación

$$\begin{cases} y - x = u \\ y + x = v \end{cases}$$

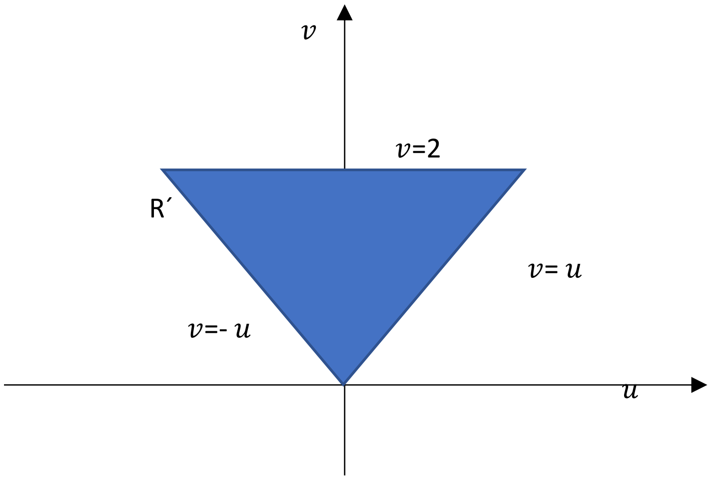
$\rightarrow \qquad y = \frac{u+v}{2} \qquad\qquad x = \frac{v-u}{2}$

Debemos transformar el triángulo R

$$x \geq 0 \rightarrow \frac{v-u}{2} \geq 0 \rightarrow v \geq u$$

$$y \geq 0 \rightarrow \frac{u+v}{2} \geq 0 \rightarrow v \geq -u$$

$$x + y \leq 2 \rightarrow v \leq 2$$



Los límites de integración para R´

$$0 \leq v \leq 2$$

$$-v \leq u \leq v$$

$$\iint\limits_{R} e^{\frac{y-x}{y+x}} \, \mathrm{dx}\ \mathrm{dy} = \iint\limits_{\mathrm{R}'} e^{\frac{u}{v}} \left| J \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \right| du\, dv$$

$$J \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \left| J \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}$$

$$\iint\limits_{R} e^{\frac{y-x}{y+x}} \, \mathrm{dx}\ \mathrm{dy} = \int_{0}^{2} dv \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}} \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int_{0}^{2} dv \left. \frac{e^{\frac{u}{v}}}{\frac{1}{v}} \right|_{-v}^{v} = \frac{1}{2} \int_{0}^{2} v(e - e^{-1})\, dv =$$

$$= \frac{1}{2} (e - e^{-1}) \left. \frac{v^2}{2} \right|_{0}^{2} = 2\, \mathrm{sh}(1)$$