RESOLUCIÓN DE EJERCICIOS 8, 9 y 10 de MÓDULO 5
EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA - PRIMERA CLASE

Resueltos por la profesora Julieta Mateucci

8) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando EN TODOS los casos,
a) Si T es una transformación lineal y $v \in Nu(T)$ entonces $2v \in Nu(T)$
b) $T(x_1;x_2) = (x_1\ ;\ x_1\ ;\ x_1)$ tiene un núcleo de dimensión 0.
c) Si T es una transformación lineal y $v \in Im(T)$ entonces $-3v \in Im(T)$

Resolución:
a) Si $v \in Nu(T)$ entonces: $T(v) = \vec{0}$ como T es una transformación lineal, verifica las propiedades de transformación lineal, en particular:

$$T(kv) = kT(v)$$

Para todo valor de k real. Entonces

$$T(2v) = 2.T(v) = 2.\vec{0} = \vec{0}$$

Por lo que $2v \in Nu(T)$ y la afirmación es **<u>verdadera</u>**

b) $T(x_1;x_2) = (x_1\ ;\ x_1\ ;\ x_1)$
Buscamos el núcleo de la TL: $(x_1;x_2)\ /\ T(x_1;x_2) = (0;0;0)$

$$(x_1\ ;\ x_1\ ;\ x_1) = (0;0;0) \rightarrow \boxed{x_1 = 0}$$

Entonces: $(x_1;x_2) = (0;x_2) = x_2(0;1)$
$B_{Nu(T)} = \{(0;1)\}$ y tiene dimensión 1, por lo que la afirmación es **<u>falsa</u>**.

c) Si $v \in Im(T)$ entonces: hay un vector w del espacio de salida tal que $T(w) = v$ como T es una transformación lineal, verifica las propiedades de transformación lineal, en particular:

$$T(ku) = kT(u)$$

Para todo valor de k real. Entonces

$$T(-3w) = -3.T(w) = -3.v$$

Por lo que $-3v \in Im(T)$ y la afirmación es ***<u>verdadera</u>***

---

9) Sea $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación definida por:

$$T(x_1;x_2;x_3;x_4) = (x_4 - x_1\ ;\ x_2 - x_1\ ;\ x_4 - x_2\ ;2x_4 - x_2 - x_1)$$

Y el subespacio $S = \{(x_1;x_2;x_3;x_4) \in \mathbb{R}^4;\ \ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$

a) Dar bases y dimensión de $Nu(T), Im(T)$

b) Hallar $S \cap Nu(T)$ y verificar que el $(1;1;3;1)$ pertenece al subespacio intersección entre S y $Nu(T)$

Resolución:

Buscamos $Nu(T)$: $T(x_1;x_2;x_3;x_4) = (0;0;0;0)$

$$(x_4 - x_1\ ;\ x_2 - x_1\ ;\ x_4 - x_2\ ;2x_4 - x_2 - x_1) = (0;0;0;0)$$

$$\begin{cases} x_4 - x_1 = 0 \\ x_2 - x_1 = 0 \\ x_4 - x_2 = 0 \\ 2x_4 - x_2 - x_1 = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{matrix} F_2 - F_1 \\ F_4 - F_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \begin{matrix} F_3 + F_2 \\ F_4 + F_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x_4 - x_1 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_4 = x_1 \\ x_2 = x_4 \end{cases}$$

$$Nu(T):\ (x_1;x_2;x_3;x_4) = (x_4;x_4;x_3;x_4) = x_4(1;1;0;1) + x_3(0;0;1;0)$$

$$Nu(T) = < (1;1;0;1),(0;0;1;0) >$$

Como además los dos vectores no son múltiplos, es un conjunto linealmente independiente y, por lo tanto:

$$\boxed{B_{Nu(T)} = \{(1;1;0;1),(0;0;1;0)\}}$$

Buscamos $Im(T)$:

Sabemos que los transformados de los elementos de una base del espacio de salida, generan la imagen de la transformación, por lo que calculamos los transformados de la base canónica:

$$T\big((1;0;0;0)\big) = (-1;-1;0;-1)$$
$$T\big((0;1;0;0)\big) = (0;1;-1;-1)$$
$$T\big((0;0;1;0)\big) = (0;0;0;0)$$
$$T\big((0;0;0;1)\big) = (1;0;1;2)$$
$$Im(T) = < (-1;-1;0;-1),(0;1;-1;-1),(0;0;0;0),(1;0;1;2) >$$

Sabemos que el vector nulo es linealmente dependiente, por lo que lo podemos omitir del conjunto:

$$Im(T) = < (-1;-1;0;-1),(0;1;-1;-1),(1;0;1;2) >$$

Ahora vemos si hay algún otro vector que sea linealmente dependiente en el conjunto. Para eso utilizamos el método corto:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow F_3 + F_1 \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F_3 + F_2 \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, vemos que el tercer vector era combinación lineal de los otros dos, por lo que:

$$\boxed{B_{Im(T)} = \{(-1;-1;0;-1),(0;1;-1;-1)\}}$$

Tanto el núcleo como la imagen de T, tienen dimensión 2.

Calculamos $S \cap Nu(T)$ $S = \{(x_1;x_2;x_3;x_4) \in \mathbb{R}^4;\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$

$$B_{Nu(T)} = \{(1;1;0;1),(0;0;1;0)\}$$

Entonces, cualquier elemento del núcleo se puede escribir como:

$$(x_1;x_2;x_3;x_4) \in Nu(T), \qquad (x_1;x_2;x_3;x_4) = (x_4;x_4;x_3;x_4)$$

Vemos cuales de estos vectores, cumplen con la ecuación de S:

$$(x_4;x_4;x_3;x_4) \in S \ \rightarrow \ x_4 + x_4 - x_3 + x_4 = 0 \ \rightarrow 3x_4 - x_3 = 0 \ \rightarrow \boxed{3x_4 = x_3}$$

Entonces:

$$(x_4;x_4;x_3;x_4) \in S \cap Nu(T) \ \leftrightarrow (x_1;x_2;x_3;x_4) = (x_4;x_4;3x_4;x_4) = x_4(1;1;3;1)$$

$$B_{S\cap Nu(T)} = \{(1;1;3;1)\}$$

Ya que por ser el $(1;1;3;1)$ un solo vector distinto al nulo, es LI. Además el conjunto está formado por todos los múltiplos de este vector, en particular, él mismo, por lo que el $(1;1;3;1)$ pertenece al subespacio intersección.

---

10) Sea T: $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que verifica que:

$$T(v_1) = (2;1;1)$$
$$T(v_2) = (1;1;0)$$
$$T(v_3) = (0;0;0)$$
$$T(v_4) = (0;-1;1)$$

Hallar base y dimensión de la $Im(T)$, sabiendo que el conjunto $\{v_1;v_2;v_3;v_4\}$ es base del espacio $\mathbb{V}$

Resolución:

Buscamos $Im(T)$:

Sabemos que los transformados de los elementos de una base del espacio de salida, generan la imagen de la transformación, por lo que calculamos los transformados de la base canónica:

$$Im(T) =< (2;1;1),(1;1;0),(0;0;0),(0;-1;1) >$$

Sabemos que el vector nulo es linealmente dependiente, por lo que lo podemos omitir del conjunto:

$$Im(T) =< (2;1;1),(1;1;0),(0;-1;1) >$$

Ahora vemos si hay algún otro vector que sea linealmente dependiente en el conjunto. Para eso utilizamos el método corto:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F_1 - 2F_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F_3 + F_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, vemos que el primer vector era combinación lineal de los otros dos, por lo que:

$$\boxed{B_{Im(T)} = \{(1;1;0),(0;-1;1)\}}$$

Y la imagen de T, tiene dimensión 2.