Clase 9

Práctica sobre

- **Derivadas parciales de segundo orden.**
- **Simetría de las derivadas segundas mixtas.**
- **Matriz hessiana de una función escalar.**
- **Fórmula de Taylor de Segundo Orden para una función escalar de dos variables.**

Derivadas de segundo orden

(Ejemplos)

Ejemplo 1. Para la función escalar de dos variables

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$$

Sus funciones derivadas parciales de primer orden son

$$\frac{\partial f}{\partial x}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y\cos(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x\cos(xy)$$

Estas dos, son a la vez, funciones escalares de dos variables. Calcular las derivadas parciales de cualquiera de estas dos funciones, consiste en “derivar dos veces” a la función inicial f. Así, se obtienen las derivadas parciales de segundo orden o derivadas segundas de esta función. Estas son las siguientes cuatro

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -y^2 \operatorname{sen}(xy)$$

Que se obtiene al derivar a f respecto de la variable x en las dos instancias de derivación.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \cos(xy) - xy\operatorname{sen}(xy)$$

Que se obtiene al derivar a f respecto de x en un primer momento, y respecto de y en la segunda instancia.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \cos(xy) - xy\operatorname{sen}(xy)$$

Obtenida al derivar a f respecto de y en el primer momento, y respecto de la variable x, en el segundo momento de derivación.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -x^2 \operatorname{sen}(xy)$$

Que es el resultado de derivar a la función f respecto de y en ambas ocasiones.

$$f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y^2 \operatorname{sen}(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \cos(xy) - xy \operatorname{sen}(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \cos(xy) - xy \operatorname{sen}(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -x^2 \operatorname{sen}(xy)$$

Los símbolos correspondientes a las derivadas parciales de segundo orden se leen del siguiente modo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \text{ Derivadas segundas mixtas}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Ejemplo 2. Las derivadas segundas de la función

$$f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: f(x,y) = \ln(x-y) \qquad U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y > 0\}$$

Son las siguientes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}: U \to \mathbb{R}: \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{1}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}: U \to \mathbb{R}: \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{1}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}: U \to \mathbb{R}: \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}: U \to \mathbb{R}: \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{1}{(x-y)^2}$$

Como se puede observar, en los dos ejemplos anteriores las derivadas segundas mixtas son iguales. Esta regularidad no siempre es así. Sim embargo, tampoco se trata de un hecho fortuito. Ocurre que, bajo ciertas condiciones, la igualdad de las derivadas mixtas de segundo orden está garantizada.

Más adelante se darán condiciones suficientes para la igualdad (o simetría) de las derivadas segundas mixtas. Pero antes se mostrará "un ejemplo donde no se cumple la igualdad de las derivadas segundas mixtas".

Ejemplo 3. Sea la función

$$f(x,y)=\begin{cases} y^2\cdot\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right) & y\neq 0\\ 0 & y=0\end{cases}$$

Se cumple que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=0$$

Es decir que las derivadas parciales segundas mixtas en el origen son distintas.

$a)$ Fórmula de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

Cuando $y\neq 0$, se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y^3}{x^2+y^2}$$

Por otra parte cuando $y=0$, es decir para aquellos pares de la forma $(x_0,0)$, resulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,0)-f(x_0,0)}{h}=0$$

Entonces, la función derivada parcial de f respecto de x, definida en todo el plano está dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{x^2+y^2} & y\neq 0\\ 0 & y=0\end{cases}$$

$b)$ Cálculo de $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{k^3}{0^2+y^2}-0}{k}=1$$

O sea

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$$

$c)$ Fórmula de $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

Para $y \neq 0$, se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \cdot \arctan\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

Cuando $y = 0$, es decir para los pares de la forma $(x_0, 0)$, es

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0,k) - f(x_0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k^2 \cdot \arctan\left(\frac{x_0}{k}\right)}{k}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = \lim_{k\to 0}\left[k \cdot \arctan\left(\frac{x_0}{k}\right)\right]$$

Nótese que, en las condiciones del límite anterior, resulta

$$\left|\arctan\left(\frac{x_0}{k}\right)\right| \leq \frac{\pi}{2}$$

Con lo cual, se concluye que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = 0$$

Luego

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y \cdot \arctan\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{xy^2}{x^2+y^2} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

$d)$ Cálculo de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = 0$$

Es decir que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$$

Y así como se comentó más arriba, ocurre que las derivadas segundas mixtas de f en el origen son distintas. Esto es

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$$

Se tiene, además, que las funciones derivadas parciales mixtas de f están definidas de la siguiente manera

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \begin{cases} y^2 \cdot \dfrac{3x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \wedge x \neq 0 \\ 1 & y = 0 \wedge x = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \begin{cases} y^2 \cdot \dfrac{3x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

Puede demostrarse que las dos funciones derivadas parciales segundas mixtas de f no son continuas en el origen. Basta con analizar los límites radiales en el origen para llegar a tal conclusión. Como se verá a continuación, la continuidad de las derivadas segundas mixtas es una condición que, junto con otras más, se requiere para garantizar la igualdad de estas derivadas segundas.

El resultado en cuestión es el siguiente:

Teorema (Condición suficiente para la igualdad de las derivadas segundas mixtas en un punto). Sea la función $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continua en el conjunto abierto no vacío U de $\mathbb{R}^2$. Supóngase que existe un entorno $E \subset U$ de centro en (x_0, y_0) en el que están definidas las funciones

$$\frac{\partial f}{\partial x}: E \to \mathbb{R} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}: E \to \mathbb{R} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}: E \to \mathbb{R} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}: E \to \mathbb{R}$$

y que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}: E \to \mathbb{R} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}: E \to \mathbb{R}$$

son continuas en (x_0, y_0). Entonces se verifica la igualdad

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

A continuación, se definen las funciones de clase $\mathcal{C}^2$ en un conjunto abierto.

Definición (Función de Clase $\mathcal{C}^2$). Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida en el conjunto abierto no vacío U de $\mathbb{R}^2$. Si las funciones derivadas parciales de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}: U \to \mathbb{R}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}: U \to \mathbb{R}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}: U \to \mathbb{R}; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}: U \to \mathbb{R}$$

existen y son continuas en U, entonces se dice que la función f es de clase $\mathcal{C}^2$ en U.

Combinando el resultado precedente y la definición anterior, se obtiene el siguiente teorema en el que se establecen condiciones que aseguran la igualdad de las derivadas segundas mixtas en todo un conjunto.

Teorema (Condición suficiente para la igualdad de las derivadas segundas mixtas en un conjunto). Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida en el conjunto abierto no vacío U de $\mathbb{R}^2$. Si la función f es de clase $\mathcal{C}^2$ en U, entonces las derivadas parciales segundas mixtas son iguales en todo U. Esto es

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

para cada par (x,y) en U.

Matriz hessiana de una función escalar

(Ejemplos)

Definición (Matriz hessiana). Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de clase $\mathcal{C}^2$ en el conjunto abierto no vacío U de $\mathbb{R}^2$. Se define la matriz hessiana de f como

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}$$

Nótese que al ser f de clase $\mathcal{C}^2$ en U, se cumple la igualdad de las derivadas segundas mixtas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

ocasionando que la matriz hessiana sea simétrica.

Ejemplo 4. Para la función

$$f(x,y)=e^{xy}$$

la matriz hessiana es

$$H_f(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y^2e^{xy} & e^{xy}+xye^{xy}\\ e^{xy}+xye^{xy} & x^2e^{xy}\end{bmatrix}$$

Y para la función

$$f(x,y)=xy$$

la matriz hessiana es

$$H_f(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

<u>Polinomio de Taylor de Segundo Orden y Fórmula de Taylor de Segundo Orden</u>

Considérese la función de dos variables

$$f: U\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}: z=f(x,y)$$

de $\mathcal{C}^2$ en el conjunto abierto no vacío U de $\mathbb{R}^2$, y el punto $(x_0,y_0)\in U$. El polinomio de Taylor de Segundo Orden de f en (x_0,y_0), es el polinomio cuadrático $P_2(x,y)$ que posee en (x_0,y_0) <u>propiedades de contacto hasta el orden dos</u>, con la función f. Esto quiere decir que, en ese punto, $P_2(x,y)$ coincide en valor específico con f hasta las derivadas de segundo orden. Simbólicamente

$$f(x_0,y_0)=P_2(x_0,y_0)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial P_2}{\partial x}(x_0,y_0)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2}(x_0,y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial P_2}{\partial y}(x_0,y_0)\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 P_2}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 P_2}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 P_2}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

Deducción de la fórmula a partir de las condiciones de contacto.

En principio, se establece la fórmula del polinomio cuadrático de la siguiente manera

$$P_2(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2$$

Pero teniendo en cuenta que debe ser

$$f(x_0,y_0) = P_2(x_0,y_0)$$

Se escribe

$$P_2(x,y) = f(x_0,y_0) + A_2(x-x_0) + A_3(y-y_0) + A_4(x-x_0)^2 + A_5(x-x_0)(y-y_0) + A_6(y-y_0)^2$$

$$P_2(x,y) = f(x_0,y_0) + A_2(x-x_0) + A_3(y-y_0) + A_4(x-x_0)^2 + A_5(x-x_0)(y-y_0) + A_6(y-y_0)^2$$

Luego, para hallar los demás coeficientes, se calculan las derivadas del polinomio. Por ejemplo, derivando respecto de x, queda

$$\frac{\partial P_2}{\partial x}(x,y) = A_2 + 2A_4(x-x_0) + A_5(y-y_0)$$

Evaluando en (x_0,y_0), resulta

$$\frac{\partial P_2}{\partial x}(x_0,y_0) = A_2 + 2A_4(x_0-x_0) + A_5(y_0-y_0) = A_2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial P_2}{\partial x}(x_0,y_0) = A_2$$

Pero, como debe ser

$$\frac{\partial P_2}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = A_2$$

Esto quiere decir que el coeficiente del término lineal en $(x-x_0)$ es

$$A_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

Del mismo modo, se obtiene que el coeficiente del término lineal en $(y-y_0)$ es

$$A_3 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

Calculando ahora la derivada segunda del polinomio, respecto de x dos veces

$$P_2(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + A_4(x-x_0)^2$$
$$+ A_5(x-x_0)(y-y_0) + A_6(y-y_0)^2$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial x}(x,y) = A_2 + 2A_4(x-x_0) + A_5(y-y_0)$$

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2}(x,y) = 2A_4$$

Evaluando en (x_0,y_0), se tiene

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2}(x_0,y_0) = 2A_4$$

Pero al ser

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$$

Entonces se tiene

$$2A_4 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$$

Es decir

$$A_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$$

Que es la expresión del coeficiente correspondiente al término cuadrático en $(x-x_0)^2$.

Del mismo modo se obtienen las siguientes relaciones

$$A_5 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$$

Y

$$A_6 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

Nótese que, en las condiciones establecidas, las derivadas segundas mixtas son iguales.

Finalmente, la fórmula correspondiente del Polinomio de Taylor de Segundo Orden es

$$P_2(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2$$

Ahora, identificando al vector

$$\boldsymbol{h} = (h,k) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0} = (x,y) - (x_0,y_0) = (x-x_0, y-y_0)$$

Con la matriz renglón

$$\boldsymbol{h} = [h \ \ k] = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0} = [x-x_0 \ \ y-y_0]$$

La fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

Se puede escribir en términos del gradiente, según el producto escalar

$$\nabla f(\boldsymbol{x_0}) \bullet \boldsymbol{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

Y notando que la suma de los últimos cuatro términos en la fórmula de $P_2(x,y)$, (la que involucra a las derivadas segundas de f en (x_0,y_0)), a saber

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0) +$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)\cdot(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)^2$$

se puede escribir en términos de la matriz hessiana, como sigue

$$\frac{1}{2}[x-x_0 \ y-y_0]\cdot\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}[h \ \ k]\cdot H_f(x_0,y_0)\cdot\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\boldsymbol{h}\cdot H_f(\boldsymbol{x_0})\cdot\boldsymbol{h}^t$$

Y así entonces, adoptar una escritura compacta para el Polinomio de Taylor de Segundo Orden

$$P_2(x,y) = P_2(\boldsymbol{x}) = P_2(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x_0}) + \nabla f(\boldsymbol{x_0}) \bullet \boldsymbol{h} + \frac{1}{2}\boldsymbol{h}\cdot H_f(\boldsymbol{x_0})\cdot\boldsymbol{h}^t$$

O bien

$$P_2(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0) \bullet (x - x_0, y - y_0) +$$

$$+\frac{1}{2}[x - x_0 \; y - y_0] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

Mientras que todos los elementos de la función f que intervienen en la fórmula del Polinomio de Taylor se puedan calcular, la fórmula de este siempre se puede determinar, así como está indicada más arriba. Sin embargo, solo se tendrá un polinomio con las propiedades de contacto hasta el segundo orden. Ahora bien, si la función satisface ciertas condiciones, este polinomio, es el mejor polinomio cuadrático que aproxima a la función f cerca de (x_0, y_0). El siguiente Teorema establece las condiciones suficientes para que tal aproximación de segundo grado ocurra. Y se da entonces, La Fórmula de Taylor de Segundo Orden.

Fórmula de Taylor de Segundo Orden

(Para funciones de dos variables)

Teorema (Fórmula de Taylor de Segundo Orden). Sea la función

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: z = f(x,y)$$

de clase C^2 en el conjunto abierto no vacío U de $\mathbb{R}^2$, y el punto $\boldsymbol{x_0} = (x_0, y_0) \in U$. Entonces, para cada $\boldsymbol{h} = (h,k)$, de modo que $\boldsymbol{x} = (x,y) = \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{h} = (x_0 + h, y_0 + k) \in U$, se tiene la fórmula

$$f(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x_0}) + \nabla f(\boldsymbol{x_0}) \bullet \boldsymbol{h} + \frac{1}{2}\boldsymbol{h} \cdot H_f(\boldsymbol{x_0}) \cdot \boldsymbol{h}^t + R_2(\boldsymbol{h})$$

O bien

$$f(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{h}) = P_2(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{h}) + R_2(\boldsymbol{h})$$

siendo $P_2(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{h})$ en Polinomio de Taylor de Segundo Orden de f en $\boldsymbol{x_0}$. Donde el *resto de segundo orden* $R_2(\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{h}) - P_2(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{h})$, satisface la propiedad

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \vec{0}} \frac{R_2(\boldsymbol{h})}{||\boldsymbol{h}||^2} = 0$$

Recordando que

$$\boldsymbol{h} = (h,k) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0} = (x,y) - (x_0,y_0) = (x - x_0, y - y_0)$$

Se puede tiene que

$$\|\boldsymbol{h}\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Así que, la propiedad del resto de segundo orden R_2 se puede escribir del siguiente modo

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\vec{0}} \frac{R_2(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|^2} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\vec{0}} \frac{\overbrace{f(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{h}) - P_2(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{h})}^{R_2(\boldsymbol{h})}}{\|\boldsymbol{h}\|^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R_2(x - x_0, y - y_0)}{\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)^2} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R_2(x - x_0, y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = 0$$

O sea

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\vec{0}} \frac{R_2(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|^2} = \lim_{\boldsymbol{h}\to\vec{0}} \frac{f(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{h}) - P_2(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|^2} = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R_2(x - x_0, y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = 0$$

Y esto significa que el resto de segundo orden R_2 es un infinitésimo de orden superior respecto del cuadrado de la distancia que separa a (x,y) de (x_0,y_0). O bien, dicho de otro modo, que R_2 tiende a cero más rápidamente de lo que lo hace el cuadrado de la mencionada distancia.

Ejemplo 5. El polinomio de segundo orden de la función

$$f(x,y) = xy^2$$

En el punto $P_0 = (x_0,y_0) = (0,1)$ es

$$P_2(x,y) = x(2y - 1) = 2xy - x$$

Nótese que

$$f(x,y) = xy^2 \quad \to \quad f(0,1) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2 \quad \to \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy \quad \to \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0 \quad \to \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 2y \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,1) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2y \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = 0$$

Luego, el Polinomio de Taylor de Segundo Orden de f en $P_0 = (x_0, y_0) = (0,1)$ es

$$P_2(x,y) = f(0,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) \cdot (x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) \cdot (y-1) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) \cdot (x-0)^2$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,1) \cdot (x-0) \cdot (y-1) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) \cdot (x-0) \cdot (y-1) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) \cdot (y-1)^2$$

Esto es

$$P_2(x,y) = x + \frac{1}{2} \cdot 2x(y-1) + \frac{1}{2} \cdot 2x(y-1) = x + 2x(y-1) = x(2y-1)$$

$$P_2(x,y) = x(2y-1) = 2xy - x$$

Que se obtiene del mismo modo, a partir de la escritura sintética

$$P_2(x,y) = P_2(\boldsymbol{x}) = P_2(\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x_0}) + \nabla f(\boldsymbol{x_0}) \bullet \boldsymbol{h} + \frac{1}{2}\boldsymbol{h} \cdot H_f(\boldsymbol{x_0}) \cdot \boldsymbol{h}^t$$

$$\boldsymbol{x} = (x,y) \quad \boldsymbol{x_0} = (0,1) \quad \boldsymbol{h} = (h,k)$$

$$\boldsymbol{h} = (h,k) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0} = (x - x_0, y - y_0) = (x-0, y-1) = (x, y-1)$$

$$P_2(x,y) = f(0,1) + \nabla f(0,1) \bullet (x-0, y-1) + \frac{1}{2}[x \;\; y-1] \cdot H_f(0,1) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y-1 \end{bmatrix}$$

$$P_2(x,y) = 0 + (1,0) \bullet (x, y-1) + \frac{1}{2}[x \;\; y-1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y-1 \end{bmatrix}$$

$$P_2(x,y) = x + 2x(y-1) = x(2y-1)$$

$$P_2(x,y) = x(2y-1)$$

De esta manera, La Fórmula de Taylor de Segundo Orden para f en el punto $P_0 = (0,1)$ es

$$f(x,y) = xy^2 = P_2(x,y) + R_2(x, y-1) = x(2y-1) + R_2(x, y-1)$$

O sea

$$f(x,y) = P_2(x,y) + R_2(x-0, y-1)$$

$$f(x,y) = xy^2 = x(2y-1) + R_2(x, y-1)$$

Luego

$$xy^2 - x(2y-1) = R_2(x, y-1)$$

$$x(y^2 - 2y + 1) = R_2(x, y-1)$$

$$R_2(x, y-1) = x \cdot (y-1)^2$$

Donde el resto de segundo orden en $P_0 = (0,1)$ es

$$R_2(x, y-1) = f(x,y) - x(2y-1) = xy^2 - x(2y-1)$$

$$R_2(x, y-1) = xy^2 - x(2y-1) = xy^2 - 2xy + x = x(y^2 - 2y + 1) = x(y-1)^2$$

$$R_2(x, y-1) = x(y-1)^2$$

Y este satisface la propiedad

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{R_2(x, y-1)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2}^2} = 0$$

Obsérvese pues que

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{R_2(x, y-1)}{x^2 + (y-1)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} x \frac{(y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} x \overbrace{\left[\frac{(y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2}\right]}^{\text{acotada}} = 0$$