Resolución TP7:

Ejercicio 12

Calcular el área de la región de R por medio de integrales.

$$R: \{(x, y) \epsilon R^2 / \; |x| + |y| \leq 1\}$$

Resolución:

En base a la definición de la función modulo:

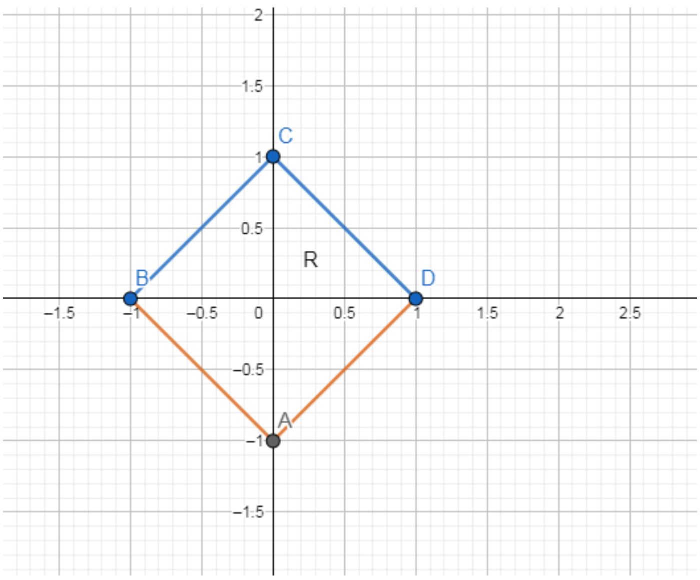
$$|a| = \begin{cases} a & si\, a \geq 0 \\ -a & si\, a < 0 \end{cases}$$

Si x≥0 e y≥0➔$x + y \leq 1$

Si x≥0 e y<0➔$x - y \leq 1$

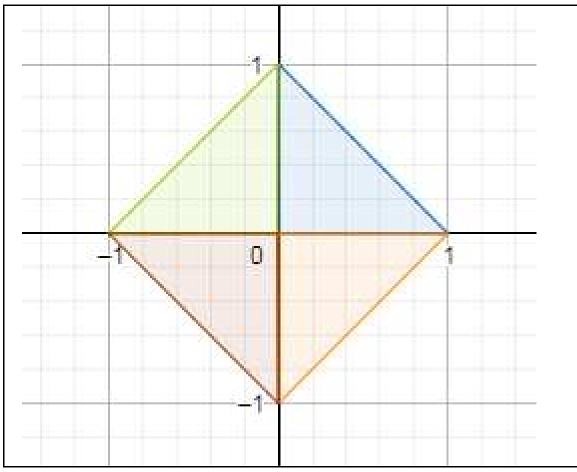
Si x<0 e y≥0➔$-x + y \leq 1$

Si x<0 e y<0➔ $-x - y \leq 1$



$A = (0, -1)$
$B = (-1,0)$
$C = (0,1)$
$D = (1,0)$

Antes de resolver, podemos anticipar el resultado:

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Tenemos 4 triángulos del mismo tamaño.

$$A_R = 4A_T$$
$$A_T = \frac{bh}{2}$$
$$A_R = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$</td>
</tr>
</table>

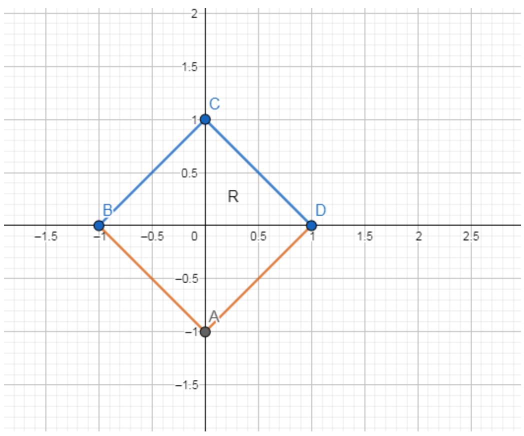
Si R es una región del plano, se proporciona su área mediante la integral

$$I = \iint_R 1dxdy$$

Según el teorema de transformaciones afines, el resultado de la integral es el mismo aplicando transformaciones lineales afines, estas se encontraran expresadas de la forma:

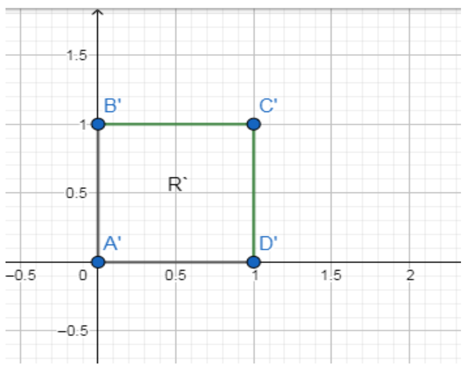
$$(x, y) = T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

Aplicada sobre un recinto derivado de R, llamado R', dependiente de (u,v) el cual tiene como objetivo proveer una integral con menos particiones.



==>

R' de ejemplo



También es posible encontrarse con su inversa la cual se debe despejar:

$$(u, v) = T^{-1}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

Sumemos el hecho de que el Jacobino de la transformación (modulo del determinante de la matriz jacobina de T) cobra un papel importante en el teorema:

$$|J| = \left||J[T(u,v)]|\right| = \left\|\begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix}\right\| = |x_u y_v - x_v y_u|$$

$$I = \iint\limits_{R} dxdy = \iint\limits_{R'} |J| dudv$$

$$I = 2$$

Aplicando Teorema de TLA, Método I (TLAI).

Buscamos similitudes en las rectas del recinto:

$$\begin{matrix} \text{Si x} \geq 0 \text{ e y} \geq 0 \rightarrow x + y \leq 1 \\ \text{Si x} < 0 \; e \; y < 0 \rightarrow -x - y \leq 1 \end{matrix} \quad ==> \quad \begin{matrix} x + y \leq 1 \\ x + y \geq -1 \end{matrix}$$

Utilizamos dicha similitud para armar parte de la transformación:

$$u = x + y$$

Utilizamos dicha similitud para completar de la transformación:

$$\begin{matrix} \text{Si x} \geq 0 \text{ e y} < 0 \rightarrow x - y \leq 1 \\ \text{Si x} < 0 \; e \; y \geq 0 \rightarrow -x + y \leq 1 \end{matrix} \quad ==> \quad \begin{matrix} x - y \leq 1 \\ x - y \geq -1 \end{matrix}$$

$$v = x - y$$

Por lo tanto, nos encontramos con su inversa:

$$(u, v) = T^{-1}(x, y) = (x + y, x - y)$$

Usando sumas y restas:

$$\begin{matrix} u + v = 2x \\ u - v = 2y \end{matrix} \quad ==> \quad \begin{matrix} x = \dfrac{u + v}{2} \\ y = \dfrac{u - v}{2} \end{matrix}$$

$$(x, y) = T(u, v) = \left(\frac{u + v}{2}, \frac{u - v}{2}\right)$$

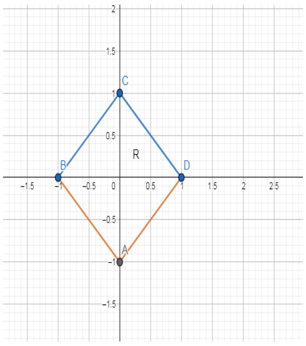
Hallando R':

$$A = (0, -1) ==> A' = T^{-1}(0, -1) = (-1,1)$$

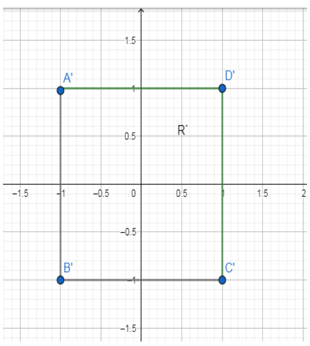
$$B = (-1,0) ==> B' = T^{-1}(-1,0) = (-1, -1)$$

$$C = (0,1) ==> C' = T^{-1}(0,1) = (1, -1)$$

$$D = (1,0) ==> D' = T^{-1}(1,0) = (1,1)$$



==>



$$=> R': \begin{cases} -1 \leq u \leq 1 \\ -1 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

Hallando el Jacobino:

Dado:

$$(x,y) = T(u,v) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$$

Entonces:

$$|J| = \left\| \begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix} \right\| = |(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) - (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})|$$

$$|J| = \left|-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

Armado de la integral:

$$I = \iint_R dxdy = \iint_{R'} |J|\, dudv$$

$$I = \int_{v=-1}^{v=1} \int_{u=-1}^{u=1} \left(\frac{1}{2}\right) du\, dv$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{v=-1}^{v=1} [u]_{u=-1}^{u=1}\, dv$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{v=-1}^{v=1} 1 - (-1)\, dv$$

$$I = \int_{v=-1}^{v=1} 1\, dv$$

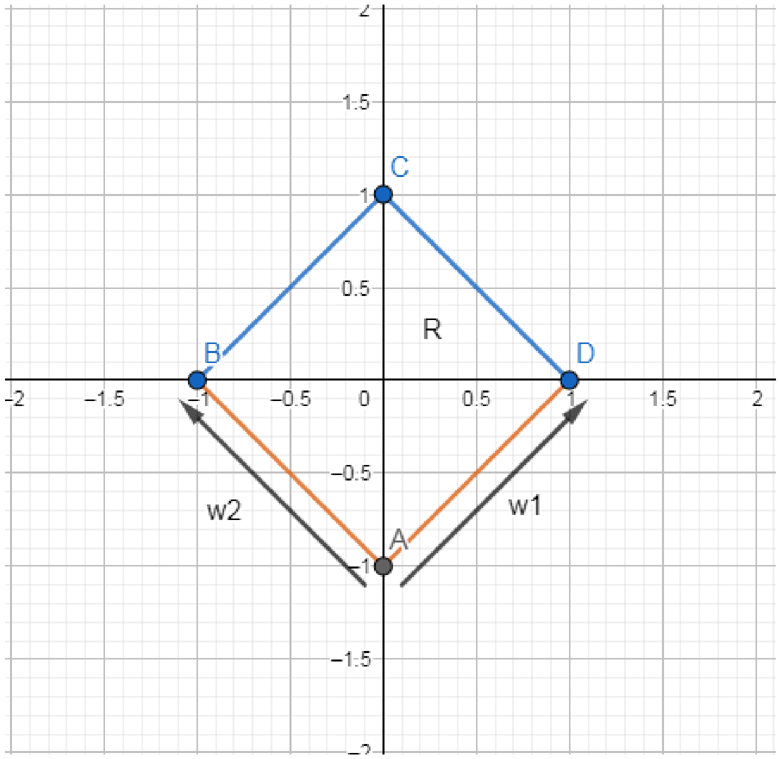
$$I = [v]_{v=-1}^{v=1}$$

$$I = 1 - (-1)$$

$$I = 2$$

Aplicando Teorema de TLA, Método II (TLAII).

Buscamos dos direcciones que acompañen las rectas del grafico de R:



Estos vectores son la diferencia entre los puntos extremo e inicial:

$$\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{D - A} = (1,1)$$

$$\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{B - A} = (-1,1)$$

Entonces los podemos asociar a parametros u y v de manera parametrica, con origen en A:

$$(x, y) = T(u, v) = A + u\overrightarrow{w_1} + v\overrightarrow{w_2}$$

$$(x, y) = T(u, v) = (0, -1) + u(1,1) + v(-1,1)$$

$$(x, y) = T(u, v) = (u - v, -1 + u + v)$$

Usando sumas y restas:

$$\begin{matrix} x + y = -1 + 2u \\ x - y = -2v + 1 \end{matrix} \implies \begin{matrix} u = \dfrac{x + y + 1}{2} \\ y = \dfrac{-x + y + 1}{2} \end{matrix}$$

$$(u, v) = T^{-1}(x, y) = (\frac{x + y + 1}{2}, \frac{-x + y + 1}{2})$$

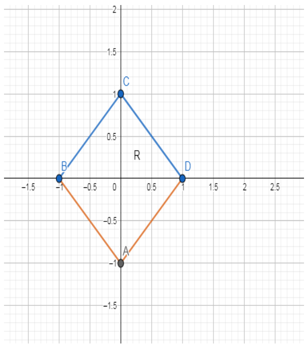
Hallando R':

$$A = (0,-1) ==> A' = T^{-1}(0,-1) = (0,0)$$

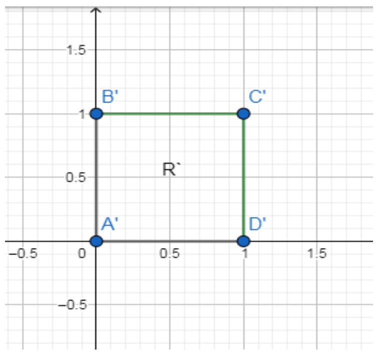
$$B = (-1,0) ==> B' = T^{-1}(-1,0) = (0,1)$$

$$C = (0,1) ==> C' = T^{-1}(0,1) = (1,1)$$

$$D = (1,0) ==> D' = T^{-1}(1,0) = (1,0)$$



==>



$$=> R': \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

Hallando el Jacobino:

Dado:

$$(x, y) = T(u, v) = (u - v, -1 + u + v)$$

Entonces:

$$|J| = \left\| \begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\| = |(1)(-1) - (1)(1)|$$

$$|J| = |-1 - 1| = |-2| = 2$$

Armado de la integral:

$$I = \iint_R dxdy = \iint_{R'} |J|\, dudv$$

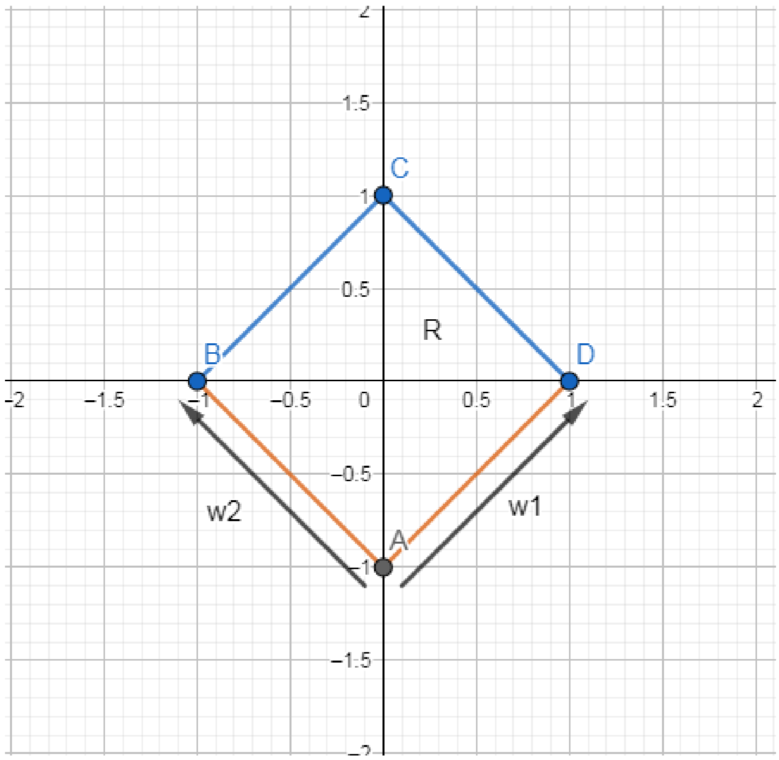
$$I = \int_{v=0}^{v=1} \int_{u=0}^{u=1} (2) du\, dv = 2 \int_{v=0}^{v=1} dv \int_{u=0}^{u=1} du$$

$$I = 2(1)(1)$$

$$I = 2$$

Aplicando Producto vectorial

Buscamos dos direcciones que acompañen las rectas del grafico de R en el espacio (3 coordenadas, para poder aplicar producto vectorial):



$$\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{D - A} = (1,1,0)$$

$$\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{B - A} = (-1,1,0)$$

$$I = \iint_R 1dxdy = Area(R) = |\overrightarrow{w_1} X \overrightarrow{w_2}| = |(1,1,0)X(-1,1,0)| = |0,0,2| = 2$$

Casualmente:

$$I = |(1,1,0)X(-1,1,0)| = i \cdot 0 - j \cdot 0 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} k = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = |J|$$

$$I = |(1,1,0)X(-1,1,0)| = |J(x(u,v), y(u,v))| = |J| \int_{v=0}^{v=1} \int_{u=0}^{u=1} du\, dv$$