Recomendados:

1.8.16.21.28.36

26. Dada la función $f_{(x,y)} = -x^2 - y^2$ hallar el máximo y el mínimo absolutos para la condición $g_{(x,y)} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$ a

Para descubrir los puntos criticos condicionados se utiliza

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ \mathrm{g(x,y)} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2\mathrm{x} = \frac{\lambda \mathrm{x}}{2} \\ -2\mathrm{y} = \frac{\lambda 2\mathrm{y}}{9} \\ \frac{\mathrm{x}^2}{4} + \frac{\mathrm{y}^2}{9} - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4\mathrm{x} = \lambda \mathrm{x} \\ -9\mathrm{y} = \lambda \mathrm{y} \\ \frac{\mathrm{x}^2}{4} + \frac{\mathrm{y}^2}{9} - 1 = 0 \end{cases}$$

Por propiedades de la multiplicación $ab = 0 \rightarrow a = 0 \lor b = 0$

$$\begin{cases} (-4-\lambda)\mathrm{x} = 0 \\ (-9-\lambda)\mathrm{y} = 0 \\ \frac{\mathrm{x}^2}{4} + \frac{\mathrm{y}^2}{9} - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4 = \lambda \vee \mathrm{x} = 0 \\ -9 = \lambda \vee \mathrm{y} = 0 \\ \frac{\mathrm{x}^2}{4} + \frac{\mathrm{y}^2}{9} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 = \lambda \\ -9 = \lambda \\ \frac{\mathrm{x}^2}{4} + \frac{\mathrm{y}^2}{9} - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{por } \lambda \text{ resulta Conjunto vacio}$$

$$\begin{cases} -4 = \lambda \\ \mathrm{y} = 0 \\ \frac{\mathrm{x}^2}{4} + \frac{\mathrm{y}^2}{9} - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{\mathrm{x}^2}{4} + 0 - 1 = 0 \rightarrow \mathrm{x}^2 = 4 \rightarrow \begin{matrix} \mathrm{x} = 2 \rightarrow \mathrm{P_{c1}} = (2,0) \\ \mathrm{x} = -2 \rightarrow \mathrm{P_{c2}} = (-2,0) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \mathrm{x} = 0 \\ -9 = \lambda \\ \frac{\mathrm{x}^2}{4} + \frac{\mathrm{y}^2}{9} - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \mathrm{y} = 3 \rightarrow \mathrm{P_{c3}} = (0,3) \\ \mathrm{y} = -3 \rightarrow \mathrm{P_{c4}} = (0,-3) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \mathrm{x} = 0 \\ \mathrm{y} = 0 \\ \frac{\mathrm{x}^2}{4} + \frac{\mathrm{y}^2}{9} - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow 0 + 0 - 1 = 0 \rightarrow -1 = 0 \rightarrow \text{por falasia resulta Conjunto vacio}$$

Utilizando el criterio de comparación:

$$f(x,y) = -x^2 - y^2$$

$$\begin{matrix} \mathrm{P_{c1}} = (2,0) \rightarrow \mathrm{f}(2,0) = -4 \\ \mathrm{P_{c2}} = (-2,0) \rightarrow \mathrm{f}(-2,0) = -4 \end{matrix} \rightarrow \textit{Son maximos condicionados locales}$$

$$\begin{matrix} \mathrm{P_{c3}} = (0,3) \rightarrow \mathrm{f}(0,3) = -9 \\ \mathrm{P_{c4}} = (0,-3) \rightarrow \mathrm{f}(0,-3) = -9 \end{matrix} \rightarrow \textit{Son minimos condicionados locales}$$

Hallar la solución particular de las siguientes ecuaciones diferenciales:

33. $(\cos x)y' + (senx)y = senx\cos^2 x$, con $y_{(\pi/4)} = 1$

$$(cosx)y' + (senx\,)y = (senx)(\cos^2 x)$$

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

$(cosx) \neq 0 \rightarrow x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\ k \in \mathbb{Z}$ $y' + \frac{(senx\,)}{(cosx)}y = \frac{(senx)}{(cosx)}(\cos^2 x)$ $y' + tg(x)y = tg(x)(\cos^2 x)$ Camino a la solución general	$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow cosx = 0, senx = 1$ $(cosx)y' + (senx\,)y = (senx)(\cos^2 x)$ $0y' + 1y = 1 \cdot 0^2 = 0$ $y = 0$ $y' = 0$ Sol Trivial

$$y' + tg(x)y = tg(x)(\cos^2 x)$$

$$y = uv$$

$$y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + tg(x)uv = tg(x)(\cos^2 x)$$

$$(\underbrace{u' + tg(x)u}_{0})v + \underbrace{uv' = tg(x)(\cos^2 x)}_{despues\ de\ descubrir\ u(x)}$$

$u' + tg(x)u = 0$ $u = k_1 e^{-\int tg(x)dx}$ $u = k_1 e^{-(-\ln(\lvert cosx \rvert))}$ $u = k_1 e^{\ln(\lvert cosx \rvert)}$ $u = k_1 \lvert cosx \rvert$ Por propiedades de constantes aplicadas $u = k_2 cosx$ Se toma una solución particular no trivial con $k_2 = 1$ $u = cosx$	$uv' = tg(x)(\cos^2 x)$ $cosxv' = tg(x)(\cos^2 x)$ $v' = tg(x)\cos(x)$ $v' = \frac{sen(x)}{\cos(x)}\cos(x)$ $v' = sen(x)$ $v = \int sen(x)\,dx$ $v = -cos(x) + k_3$

La solución general de la ecuación diferencial

$$y = uv = (\cos(x))(-\cos(x) + k_3)$$

$$y = uv = -\cos^2 x + k_3\cos(x)$$

$$(cosx)y' + (senx\,)y = (senx)(\cos^2 x)$$

$$y' = -2\cos(x)\,(-sen(x)) + k_3(-sen(x))$$

$$(cosx)(-2\cos(x)\,(-sen(x)) + k_3(-sen(x))) + (senx\,)(-\cos^2 x\; + k_3\cos(x)) = (senx)(\cos^2 x)$$

$$(cosx)(2\cos(x)\,(sen(x)) - k_3(sen(x))) + (senx\,)(-\cos^2 x\; + k_3\cos(x)) = (senx)(\cos^2 x)$$

$$(2\quad \cos^2(x)\,(sen(x)) - k_3(cosx)(sen(x))) + (senx\,)(-\cos^2 x\,) + k_3 sen(c)\cos(x) = (senx)(\cos^2 x)$$

$$\cos^2 x\, sen(x) = sen(x)\cos^2(x)$$

Se verifica la solución general

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4}\quad y = 1$$

$$y = -\cos^2 x\; + k_3\cos(x)$$

$$1 = -\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\; + k_3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$1 = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + k_3\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$1 = -\frac{1}{2} + k_3\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{3}{2} = +k_3\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = k_3$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{2} = k_3$$

La solución particular para $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1\; es$:

$$y = -\cos^2 x\; + \frac{3}{2}\sqrt{2}\cos(x)$$

----

16. Dada la ecuación $ze^{x+y-2z} + xy^2 - yz^2 = 1$ se pide: (i) Justificar la existencia de una relación funcional $z = f_{(x,y)}$ diferenciable en un entorno de $P = (1,1,1)$; (ii) Calcular la derivada direccional de f en $(1,1)$ con dirección $\vec{v} = (3,4)$. (iii) Hallar el plano tangente y la recta normal a la gráfica de f en P

$i)\ TFI \rightarrow si\ se\ cumple\ 3condiciones\ para\ F(x,y,z) = 0$

$entonces\ Existe\ relacion\ funcional\ z = f(x,y)$

$$S: ze^{x+y-2z} + xy^2 - yz^2 = 1 \rightarrow S: F(x,y,z) = 0$$

$$F(x,y,z) = ze^{x+y-2z} + xy^2 - yz^2 - 1 = 0$$

1. El punto debe pertenecer a la superficie de nivel

$$F(P) = 1e^0 + 1 - 1 - 1 = 0 \rightarrow Se\ cumple\ la\ 1ra\ condicion$$

2. Las derivadas parciales de F deben ser continuas

$$F_x = ze^{x+y-2z} + y^2$$
$$F_y = ze^{x+y-2z} + 2xy - z^2$$
$$F_z = e^{x+y-2z} - 2ze^{x+y-2z} - 2yz$$

Las derivadas son continuas, ya que son de clase C1, por propiedades de tipo de funciones poli nómicas y exponenciales. Entonces se cumple la 2da condición.

3. $F_z(P) \neq 0$

$$F_x(P) = 2$$
$$F_y(2) = 2$$
$$F_z = -3 \neq 0$$

Entonces se cumple la 3ra condición.

Como se cumplen las 3 condiciones se asegura la existencia funcional $z = f(x,y)$

$ii)$

Por TFI, f es diferenciable, entonces vale la formula

$$z_x = -\frac{F_x(P)}{F_z(P)},$$
$$z_y = -\frac{F_y(P)}{F_z(P)}$$
$$\nabla z(P) = \nabla f(P) = \left(-\frac{F_x(P)}{F_z(P)}, -\frac{F_y(P)}{F_z(P)}\right) = \left(-\frac{(2)}{-3}, -\frac{(2)}{-3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$f_v(P) = \nabla f(P) \cdot \frac{v}{|v|}$$
$$f_v(P) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{(3,4)}{5} = \frac{2}{3}\frac{3}{5} + \frac{2}{3}\frac{4}{5} = \frac{6+8}{15} = \frac{14}{15}$$

$iii)$

$$N = \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-1\right) Expandiendo\ \nabla f(P)$$

$$\Pi_{tg}: \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-1\right) \cdot (x,y,z) = \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-1\ \right) \cdot (1,1,1)$$

$$\Pi_{tg}: \frac{2}{3}\mathrm{x} + \frac{2}{3}\mathrm{y} - 1\mathrm{z} = \frac{1}{3}$$

$$R_n(t) = P + t(\mathrm{N})$$

$$R_n(t) = \left(1 + \frac{2}{3}t, 1 + \frac{2}{3}t, 1 - t\right)$$

$iii)$

Se construye $F(x,y,z)$ diferenciable para utilizar $\nabla F(P)$ como vector normal a la superficie en P.

$$\nabla F(P) = (1+1, 1+2-1, 1-2-2) = (2,2,-3)$$

$$\Pi_{tg}: \nabla F(P) \cdot (x,y,z) = \nabla F(P) \cdot P$$

$$\Pi_{tg}: (2,2,-3) \cdot (x,y,z) = (2,2,-3) \cdot (1,1,1)$$

$$\Pi_{tg}: 2x + 2y - 3z = 1$$

$$R_n(t) = P + t\big(\nabla F(P)\big)$$

$$R_n(t) = (1,1,1) + t(2,2,-3)$$

$$R_n(t) = (1 + 2t, 1 + 2t, 1 - 3t)$$