ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA I

MÓDULO 2- PRIMERA CLASE

VECTORES

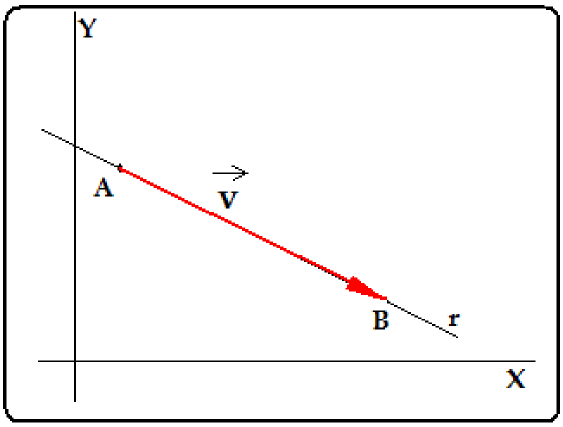
Magnitudes escalares y vectoriales

En el mundo real los fenómenos físicos son registrados y medidos según sus características específicas. La medición determinará, según las características necesarias para que quede perfectamente definida, magnitudes de distinto tipo, llamadas magnitudes escalares, vectoriales y tensoriales (no haremos referencia a estas últimas en esta asignatura)

Una **magnitud escalar** es aquella que está completamente caracterizada a través de un número real (la intensidad de lo medido) y la unidad de medida (puede ser el metro, el gramo, el segundo, etc.). El número indica la cantidad de veces que la magnitud medida contiene a la unidad considerada.
Ejemplos de este tipo de magnitud son la longitud, densidad, temperatura, tiempo, presión, trabajo entre otras.
En una **magnitud vectorial** son necesarios otros elementos adicionales, aparte de la unidad e intensidad se debe dar la recta de acción donde se encuentra esa magnitud vectorial, el sentido sobre dicha recta y el punto de aplicación dónde se haya aplicado. Esta magnitud recibe el nombre de **vector**.
En Física abundan los ejemplos de magnitudes vectoriales: la velocidad, aceleración, la fuerza, entre otros.
Cada magnitud vectorial tiene una representación analítica que en ciertas situaciones tiene correlato geométrico (sólo en una, dos o tres dimensiones) y allí se lo puede representar.

VECTORES EN EL PLANO

Trabajando en la recta, el plano o el espacio podemos tener una representación geométrica del vector.

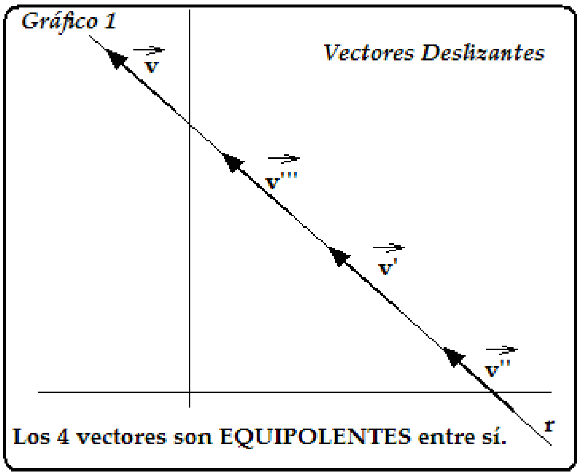


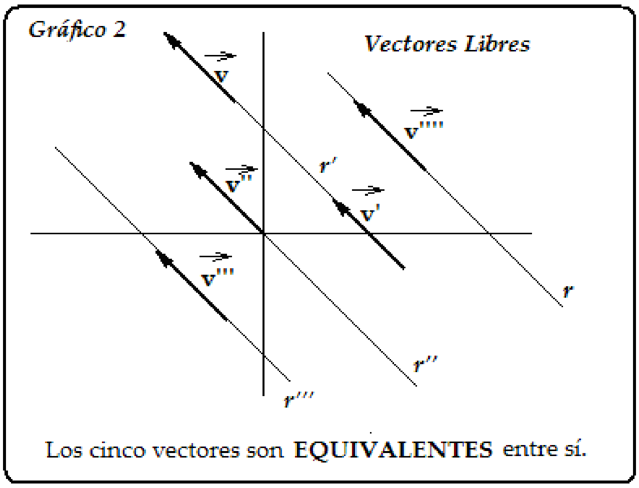
El vector $\vec{v}$ está sobre la recta **r**, su punto de aplicación – origen- es A y su sentido es uno de los dos posibles desde A (en este caso hacia abajo). El tamaño de la representación tendrá correlación con la intensidad –o módulo- del vector.

El vector $\vec{v}$ también puede denominarse como $\overrightarrow{AB}$. El orden es fundamental en la escritura: de izquierda a derecha, del origen a su punto final.

En Física aparecen diferentes tipos de vectores:

- los vectores *fijos* que son los que quedan definidos por su longitud, unidad de medida, dirección sentido y punto de aplicación;
- los vectores *deslizantes* son los que quedan definidos por su longitud, unidad de medida, recta de acción y sentido ; donde no es necesario precisar el punto de aplicación sobre la recta **r**; llamaremos *equipolentes* a todos los vectores con igual tamaño, sobre la misma recta **r** y con igual sentido -observar el gráfico 1-
- los vectores *libres* quedan definidos por su longitud, unidad de medida, dirección y sentido. Dos vectores libres son equipolentes con aquellos otros que tienen rectas de apoyo paralelas, tienen igual intensidad e igual sentido –ver gráfico 2-; a la equipolencia se la denomina *equivalencia* de vectores.





A partir de ahora nuestro estudio se enfocará sobre los ***vectores libres***.

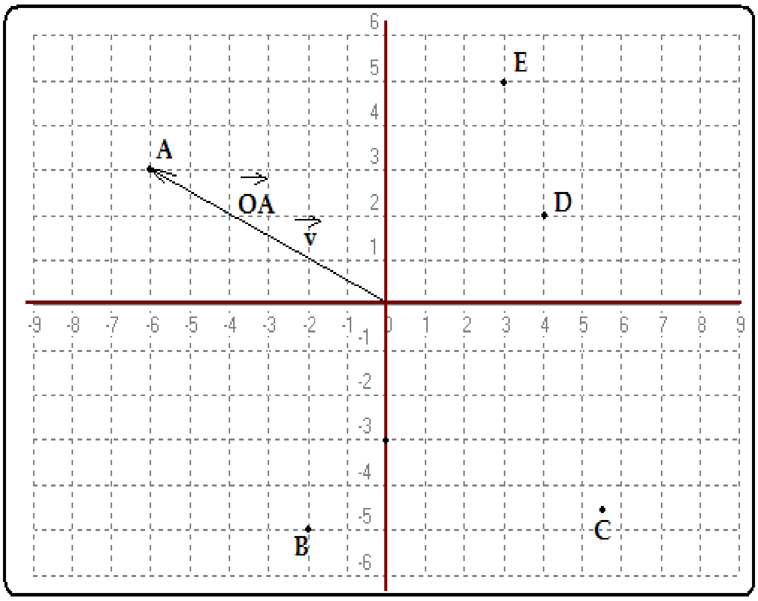
La definición geométrica de estos vectores es la del conjunto de todos los segmentos orientados de recta equivalentes a un segmento de recta de ese conjunto, llamado *representación* del vector.

En particular, elegiremos como **representante** al vector equivalente con origen en el punto O de coordenadas (0; 0) del sistema de referencia. En el gráfico 2 el representante es $\overrightarrow{v''}$.

A continuación, se hará la presentación de la *definición algebraica* y de las *propiedades* de los vectores en el plano ($\mathbf{R}^2$) y en más adelante se generalizará lo aprendido.

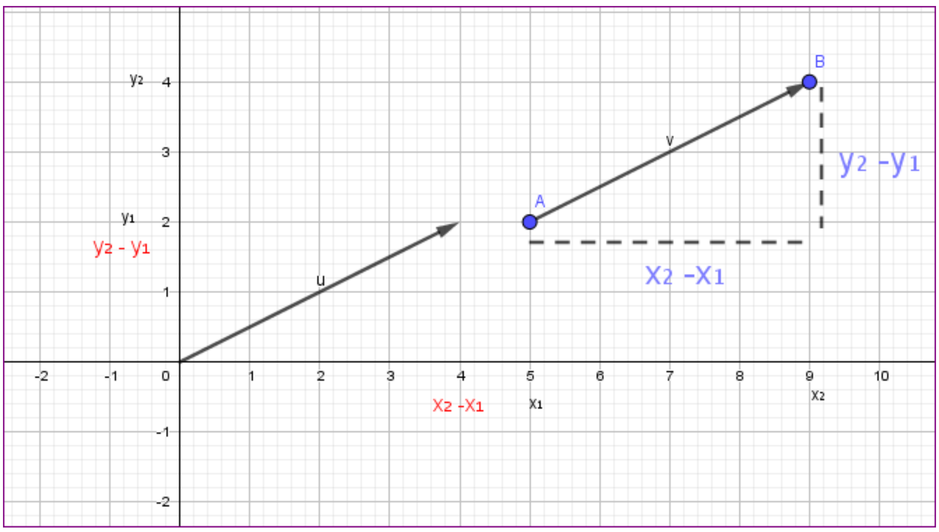
En R^2 un vector es un **par ordenado de números reales** que representa al extremo del vector respecto a un sistema de referencia (O, X, Y); el vector será $\vec{v}=(v_x;v_y)$ donde $\mathbf{v_x}$ es la componente sobre la dirección X y $\mathbf{v_y}$ es la componente sobre la dirección Y. Si los ejes X e Y son perpendiculares, las componentes son las *proyecciones ortogonales*.
El punto O = (0; 0) representa al origen de coordenadas, pero al mismo tiempo al *vector nulo*.

El vector $\overrightarrow{OA}$ representado es el (–6; 3).



Se pide:
a) Dar las coordenadas de los demás vectores con origen en O y extremo final en el punto marcado.
b) Dibujar el vector $\overrightarrow{HG}$ con G= (–2; –1) y H= (4; –3).

Si consideramos el vector $\overrightarrow{AB}$ con A = (5 ; 2) y B = (9 ,4) , el vector equivalente , con origen en el origen de coordenadas es $\vec{u}$ = (9 – 5 ; 4 – 2) = (4 , 2)



En general:

Si $A=(x_1;y_1)$ y $B=(x_2;y_2)$ entonces su representante en el origen es: $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1)$

c) Indicar las componentes del vector $\overrightarrow{HG}$ que dibujaste anteriormente.

Igualdad entre vectores

Dos vectores $\vec{v}$,$\vec{w}$ son iguales si sus respectivas componentes lo son.
Si $\vec{v}=(v_x;v_y)$ y $\vec{w}=(w_x;w_y)$ resulta que $\vec{v}=\vec{w}$ cuando $v_x=w_x$ y $v_y=w_y$.

$$\boxed{\vec{v}=\vec{w} \iff v_x=w_x \wedge v_y=w_y}$$

Ejemplo:
Hallar k real para que suceda que $\vec{v}=\vec{w}$ siendo $\vec{v}=(k^2;\ 2k+3)$ y $\vec{w}=(4;\ 1+k)$.
Dijimos que se necesita que: $v_x=w_x$ y $v_y=w_y$.

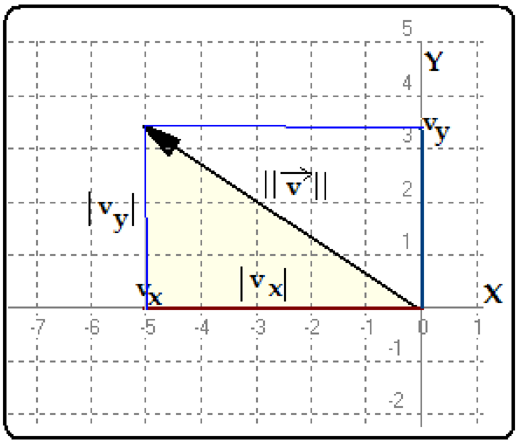
Entonces planteamos las ecuaciones

$$\begin{array}{lcl} k^2=4 & \wedge & 2k+3=1+k \\ |k|=\sqrt{4} & \wedge & 2k-k=1-3 \\ (k=2 \vee k=-2) & \wedge & k=-2 \end{array}$$

El único número que cumple las dos condiciones es k = -2, entonces $\vec{v}=\vec{w} \iff k=-2$

LONGITUD, NORMA O MÓDULO DE UN VECTOR

Si $\vec{v}=(v_x;v_y)$ se puede obtener su longitud que anotamos $\|\vec{v}\|$ utilizando el Teorema de Pitágoras.



Tomando en cuenta el esquema, en el triángulo inferior la hipotenusa toma valor $\|\vec{v}\|$ y los catetos $|v_x|$ y $|v_y|$, donde las barras indican valor absoluto de un número real.

Se tiene $\|\vec{v}\|^2 = |v_x|^2 + |v_y|^2$; como $|v_x|^2 = (v_x)^2$ y $|v_y|^2 = (v_y)^2$ despejando queda:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$

Ejemplos:

Si $\vec{v} = (3;-4)$ entonces la norma , módulo o longitud es :

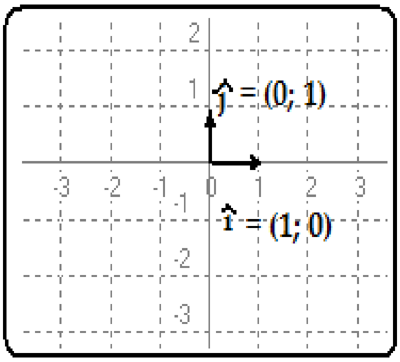
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

La longitud del segmento que representa al vector $\vec{v}$ es 5

Si $\vec{w} = (-2;\ -5)$ es $\|\vec{w}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$.

A los vectores **unitarios** – de tamaño 1– se los llama **versores.**

En particular, a los versores que están en la dirección y sentido de los ejes X e Y positivos, se los llama **versores canónicos** $\breve{i}$ y $\breve{j}$ respectivamente. (Notar que a los versores, se les coloca otro símbolo encima de ellos)



OPERACIONES ENTRE LOS VECTORES Y SUS PROPIEDADES

Suma de vectores

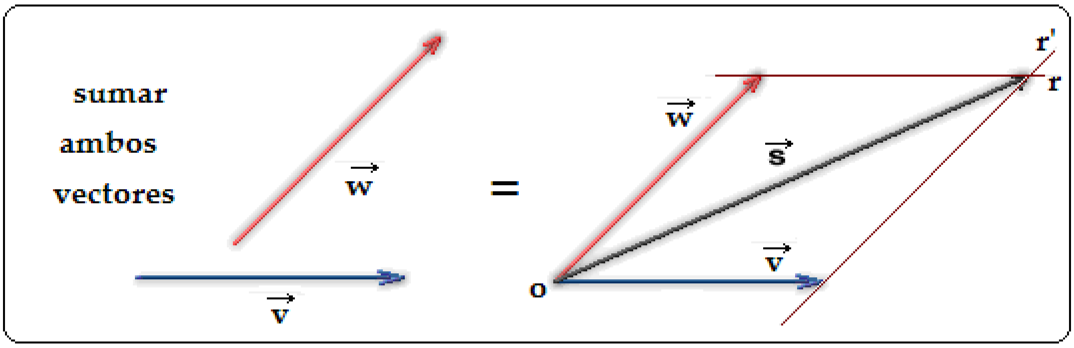
Definimos la suma + entre vectores de R^2 del siguiente modo:

$\vec{s} = \vec{v} + \vec{w} = (v_x;v_y)+(w_x;w_y) = (v_x + w_x;\ v_y + w_y)$ con v_x, v_y, w_x y w_y números reales.

Notar que la suma da un nuevo vector pues al sumar v_x con w_x y v_y con w_y obtenemos nuevamente números reales.

Se dice que + es una ley de **composición interna** en R^2 o que la suma entre vectores es *cerrada*, ya que operamos con dos elementos del mismo conjunto (en este caso R^2) y obtenemos otro elemento del mismo conjunto R^2.

Geométricamente la suma se obtiene a través del **método del paralelogramo**:
Se traslada a un origen común ambos vectores y luego se traza por los extremos de cada vector una recta paralela al otro formándose un paralelogramo. La diagonal principal forma el vector **suma** resultante.

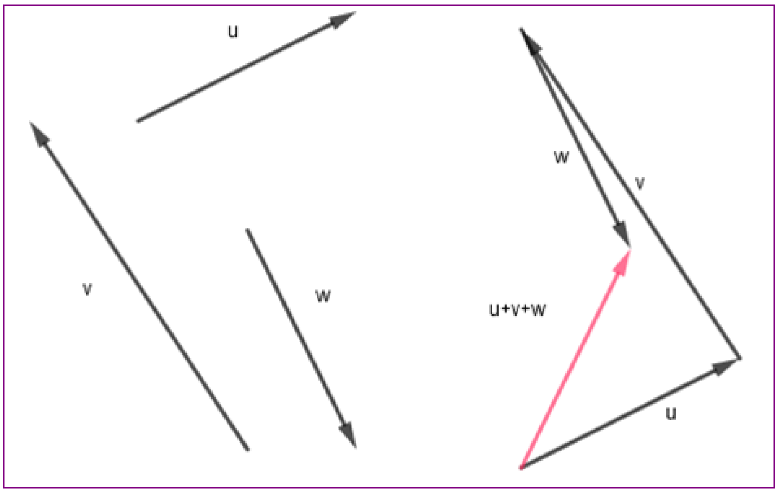


Dados los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{TS}$ con M= (0; 2) , N= (–2; –1); S= (4; –1) y T= (2; 1).¿Cuál es el *representante* de $\overrightarrow{MN}$ que tiene su origen en el (0; 0)? ¿Y para $\overrightarrow{TS}$?
Obtener gráficamente el vector $\vec{r} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{TS}$.
¿Cuánto da la suma de ambos mirando el gráfico? Operar también algebraicamente con las componentes.

Si se deben sumar más de dos vectores o los vectores a sumar son paralelos, conviene aplicar el **método de la poligonal**.

Este método consiste en graficar un vector a continuación de otro; es decir, el origen de uno de los vectores se lleva sobre el extremo del anterior, sobre el extremo de cada vector se dibuja un vector equipolente al próximo, formando una poligonal. Para obtener el vector suma se une el origen del primer vector con el extremo del último vector, el vector resultante será igual a la suma de todos los vectores.

Sumamos los tres vectores:



Revisamos a continuación algunas **propiedades:**

1) La suma de vectores es **asociativa**

Debe valer que para cualquier terna de vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ resulte que

$$\left(\vec{u} + \vec{v}\right) + \vec{w} = \vec{u} + \left(\vec{v} + \vec{w}\right)$$

$$\left(\vec{u} + \vec{v}\right) + \vec{w} = [(u_x;\, u_y) + (v_x;\, v_y)] + (w_x;\, w_y) =_1 (u_x + v_x;\, u_y + v_y) + (w_x;\, w_y)$$

$$=_1 ((u_x + v_x) + w_x;\, (u_y + v_y) + w_y) =_2 (u_x + v_x + w_x;\, u_y + v_y + w_y) \quad [1]$$

donde hemos usado la definición de suma de vectores (1) , suma y propiedad asociativa de la suma de números reales (2)

$$\vec{u} + \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = (u_x;\, u_y) + [(v_x;\, v_y) + (w_x;\, w_y)] =_1 (u_x;\, u_y) + (v_x + w_x;\, v_y + w_y)$$

$$=_1 (u_x + (v_x + w_x);\, u_y + (v_y + w_y)) =_2 (u_x + v_x + w_x;\, u_y + v_y + w_y) \quad [2]$$

Como en [1] y [2] coinciden las expresiones se cumple con $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) + \vec{w} = \vec{u} + \left(\vec{v} + \vec{w}\right)$.

2) Existe un elemento $\vec{O} = (0;0)$ tal que para todo vector $\vec{v}$ resulte que $\vec{O} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{O} = \vec{v}$. [**Elemento neutro**]

3) Cada vector $\vec{v}$ tiene un vector –inverso aditivo u **opuesto**- denotado $\overrightarrow{-v}$ tal que $\vec{v} + \left(\overrightarrow{-v}\right) = \left(\overrightarrow{-v}\right) + \vec{v} = \vec{O}$ **[elemento simétrico respecto a la suma]**

El vector opuesto tiene la misma dirección y longitud que el vector dado pero tiene sentido opuesto.

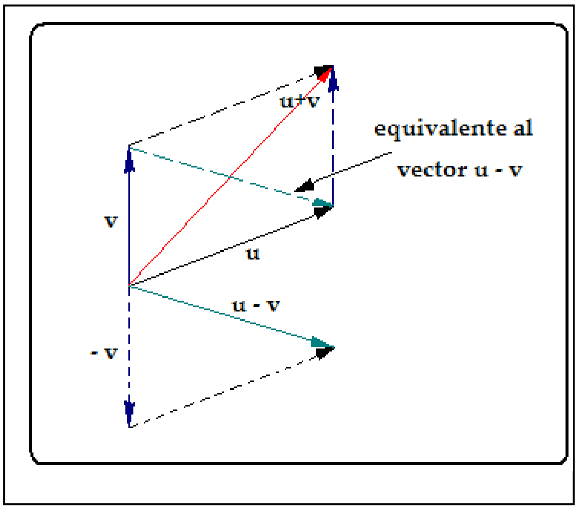
4) Para todo $\vec{v}$ y $\vec{w}$ resulta que $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$. [**conmutatividad**]

Nota: El vector nulo es un vector de características particulares: su intensidad (módulo) es cero, pero carece de dirección (recta donde se encuentra –tiene infinitas opciones-es un punto) y de sentido.

Nota

La resta de vectores puede definirse usando el vector opuesto: $\vec{u}$ - $\vec{\text{v}}$ $=$ $\vec{u}$ $+$ $\left(\overrightarrow{-v}\right)$.

En el esquema se observan los vectores *suma* y *resta*. Dados **u** y **v**, la diagonal principal del paralelogramo que forman da el vector suma; la otra diagonal da el vector resta siendo la orientación desde el *sustraendo* al *minuendo*. (Con la flecha para la flecha del primer vector)



Producto de un escalar por un vector

Dado $\vec{v}=(v_x;v_y)$ y α Є R se define el producto de α por $\vec{v}$ como un nuevo vector $\overrightarrow{\alpha.v}$ donde

$\alpha.\vec{v}=\alpha.(v_x;v_y)=(\alpha.v_x;\alpha.v_y)$

como tanto v_x, v_y y α ЄR, resulta que las componentes $\alpha.v_x$ y $\alpha.v_y$ son también números reales y tenemos por resultado un vector de R^2.

Al relacionar dos conjuntos (R y R^2) se trata de una **ley de composición externa** de R x $R^2 \rightarrow R^2$.

La dirección de $\overrightarrow{\alpha.v}$ coincide con la dirección de $\vec{v}$ $\quad \forall \alpha \neq 0 \wedge \vec{v}\neq\vec{0}$

El sentido de $\overrightarrow{\alpha.v}$ coincide con el sentido de $\vec{v}$ si $\alpha>0$ y es opuesto al sentido de $\vec{v}$ si $\alpha<0$.

Y en cuanto a la norma, se cumple que:

$$\left\|\alpha\vec{v}\right\|=|\alpha|.\left\|\vec{v}\right\| \quad \text{entonces} \quad \begin{cases} \left\|\alpha\vec{v}\right\|<\left\|\vec{v}\right\| & \text{si} \quad |\alpha|<1 \\ \left\|\alpha\vec{v}\right\|=\left\|\vec{v}\right\| & \text{si} \quad |\alpha|=1 \\ \left\|\alpha\vec{v}\right\|>\left\|\vec{v}\right\| & \text{si} \quad |\alpha|>1 \end{cases}$$

Si $\vec{u}=\left(1;\ \sqrt{3}\right)$ Haremos $\vec{v}=3.\vec{u}$

Se puede observar que $\vec{v}=3.\vec{u}=3.\left(1;\ \sqrt{3}\right)=(3;\ 3.\sqrt{3})$,

$\left\|\vec{u}\right\|=\left\|\left(1;\ \sqrt{3}\right)\right\|=\sqrt{(1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}$ = 2;

$$\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{3^2 + \left(3.\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9 + 9.3} = \sqrt{36} = 6$$

Efectivamente las longitudes de $\vec{v}$ y $\vec{u}$ sea una el triple de la otra, resulta que 6 = 3. 2 como se esperaba.

Ejercicio:

Sea A= (2; 4) y $\vec{v} = \overline{OA}$.

a) Graficar $\vec{v}$.

b) Obtener analíticamente $\vec{w} = 2.\vec{v}$ y $\vec{u} = -\frac{1}{2}.\vec{v}$ y graficarlos.

c) Analizar lo que dijimos recién ¿Qué ocurre con el sentido de $\vec{v}$ si se lo multiplica por un número positivo? ¿Y por uno negativo?

d) ¿Qué sucede con el tamaño si se lo multiplica por un número de valor absoluto mayor que uno? ¿Y entre 0 y 1?

• La operación producto de un vector por un escalar tiene las siguientes **propiedades**:

1) $\forall \alpha, \beta \;\varepsilon\; R \;\wedge \forall \vec{v} \;\varepsilon\; R^2$ resulta que $\alpha.(\beta.\vec{v}) = (\alpha.\beta).\vec{v}$ **[asociatividad mixta]**

2) $\forall \alpha, \beta \;\varepsilon\; R \wedge \forall \vec{v} \;\varepsilon\; R^2 \Rightarrow (\alpha+\beta).\vec{v} = \alpha.\vec{v} + \beta.\vec{v}$ **[distributividad del producto respecto a la suma de escalares]**

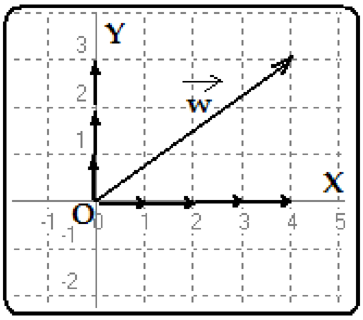
3) $\forall \alpha \;\varepsilon\; R \wedge \forall \vec{v}, \vec{w} \;\varepsilon\; R^2 \Rightarrow \alpha.(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha.\vec{v} + \alpha.\vec{w}$ **[distributividad del producto respecto a la suma de vectores]**

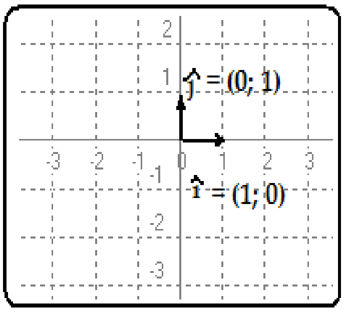
4) La unidad del "cuerpo" de los números reales es elemento neutro para este producto

$\forall \vec{v} \;\varepsilon\; R^2$ resulta que $1.\vec{v} = \vec{v}$. [**Elemento unidad**]

Otra forma de expresar un vector

Tomemos un vector como el (4; 3)





el mismo puede pensarse como 4. (1; 0) + 3. (0; 1)

Usando las operaciones vistas, pensarse como (4; 3) = 4. (1; 0) + 3. (0; 1) = $4\,\breve{i} + 3\,\breve{j}$.

Comentario

Si se tiene un conjunto **A** con la estructura de cuerpo (como los reales) y otro **V** (por ejemplo, $\mathbf{R}^2$) y definimos las operaciones + y · como lo hicimos recién; si además ambas operaciones son cerradas y cumplen las ocho propiedades se dice que **V** es un ***espacio vectorial sobre A***. En nuestro ejemplo es R^2 un espacio vectorial sobre R (también se lo llama espacio vectorial real).

Este concepto lo retomaremos en el módulo 4

EQUIVALENCIA DE VECTORES

¿Será posible operar con vectores que mantengan la equipolencia pero desde el origen de coordenadas?

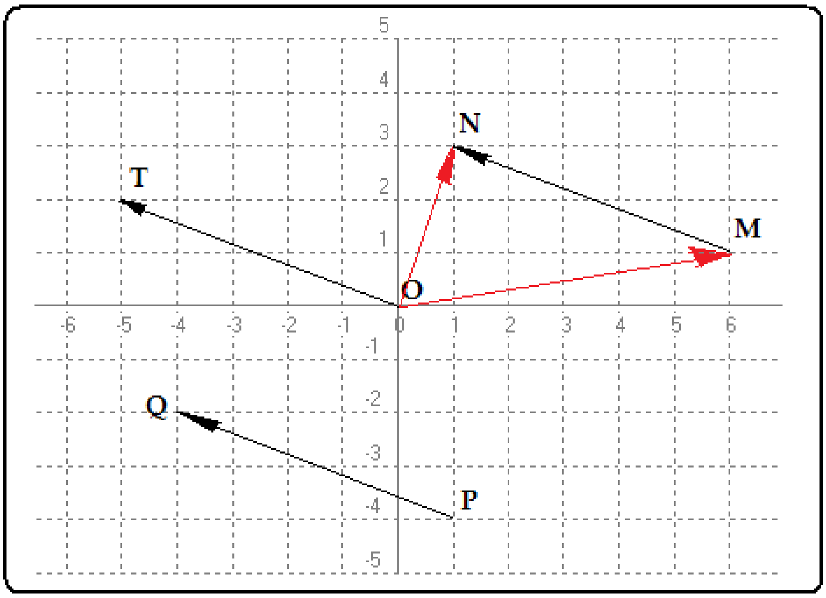
Para eso vamos a definir un nuevo concepto, el de equivalencia entre vectores:

Dos vectores son ***equivalentes*** si trasladados al origen son iguales.

El siguiente esquema nos ayudará a obtener una expresión.

De $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}$, de donde surge $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$.

Si analizamos geométricamente esta última expresión vemos que nos da el vector $\overrightarrow{OT}$. La resta nos lleva a un punto del plano **T** tal que $\overrightarrow{OT}$ sea equivalente a $\overrightarrow{MN}$.



De lo anterior llegamos a que $\overrightarrow{MN}$ es equivalente a $\overrightarrow{PQ}$ si: **N**–**M** = **Q**–**P**.

Ejercicio:

Para el esquema anterior:

a) Indicar las coordenadas de M, N, P, Q y T.

b) Comprobar que se cumple la equivalencia.

c) Si E= (–1; –1), obtener F tal que $\overrightarrow{EF}$ sea equivalente a $\overrightarrow{PM}$. Graficar ambos vectores.

d) Dados los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{TS}$ con M= (0; 2), N= (–2; –1), S= (4; –1) y T= (2; 1) hallar analítica y gráficamente el vector $\vec{s}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{TS}$

PARALELISMO ENTRE VECTORES

Piensa en elegir un vector $\vec{v}=(v_x;v_y)$ cualquiera, no nulo y considerar los diferentes vectores $\vec{w}$ que se obtienen haciendo $\vec{w}=\alpha.\vec{v}$, resulta que los vectores $\vec{w}$ son paralelos a $\vec{v}$.

Resulta que dos vectores no nulos son paralelos, si cualquiera de ellos puede obtenerse multiplicando al otro por un escalar.

$$\vec{v}//\vec{w} \Leftrightarrow \vec{w}=\alpha\,\vec{v} \quad \wedge \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

Dicho de otra forma si $\vec{v}=(v_x;v_y)$ y $\vec{w}=\left(w_x;w_y\right)$ si $\vec{w}=\alpha\,\vec{v} \wedge \alpha\in\mathbb{R}$

$\left(w_x;w_y\right)=\alpha(v_x;v_y)=(\alpha v_x;\alpha v_y)$ entonces por igualdad de vectores y suponiendo que ninguna de las componentes sea 0 , resulta:

$$\begin{cases} w_x=\alpha v_x \Rightarrow \alpha=\dfrac{w_x}{v_x} \\ w_y=\alpha v_y \Rightarrow \alpha=\dfrac{w_y}{v_y} \end{cases}$$

igualando los valores de α entonces $\dfrac{w_x}{v_x}=\dfrac{w_y}{v_y}$

Sintetizando: $\vec{v}//\vec{w} \Leftrightarrow \dfrac{w_x}{v_x}=\dfrac{w_y}{v_y}$

Esto significa que dos vectores son paralelos, si sus componentes son proporcionales.

Ejemplo:

Si M= (5; –2), N= (3; 1), P= (4; 0) y Q= (–2; 9) comprobar que los vectores $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{PQ}$ son paralelos.

$\overrightarrow{MN}//\overrightarrow{PQ}$.

Para empezar, y poder compararlos conseguimos vectores equivalentes a ambos pero que tengan un origen en común, el origen de coordenadas.

Encontramos las componentes del vector $\overrightarrow{MN}$ y del vector $\overrightarrow{PQ}$

$\overrightarrow{MN}$= (3-5 ; 1-(-2)) = (-2 ; 3) $\overrightarrow{PQ}$ =(-2-4; 9-0) = (-6 ; 9)

Nos preguntamos ¿es $\overrightarrow{MN}//\overrightarrow{PQ}$?

¿$\exists\alpha\in\mathbb{R}$ / $\overrightarrow{MN}$= α $\overrightarrow{PQ}$? Observando las componentes vemos que unas son el triple de las otras, o la tercera parte, dependiendo quién nombremos primero.

$(-2 ; 3) = \alpha (-6 ; 9)$ $\begin{cases} -2 = \alpha(-6) \Rightarrow \alpha = \dfrac{-2}{-6} = \dfrac{1}{3} \\ 3 = \alpha\ 9 \qquad \Rightarrow \alpha = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$ existe α ya que en los dos cálculos llegamos al mismo resultado $\alpha = \dfrac{1}{3}$ entonces resulta que $\overrightarrow{MN} // \overrightarrow{PQ}$

De otra manera podemos plantear la proporcionalidad de sus componentes, y analizar si se cumple

$$\frac{-2}{-6} = \frac{3}{9}$$
$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

se cumple, entonces $\overrightarrow{MN} // \overrightarrow{PQ}$

Normalización de un vector o Cálculo del vector unitario (versor) asociado a un vector

Dado un vector $\vec{u}$, no nulo, normalizar dicho vector significa encontrar el versor ($\breve{u}$) asociado a él, que tiene las siguientes características: es un vector unitario (de norma 1), tiene la misma dirección y sentido que $\vec{u}$.

Como debe tener la misma dirección y sentido:

$\breve{u} = k\vec{u}$ y $k > 0$ Aplicando el módulo a ambos miembros

$\|\breve{u}\| = \|k.\vec{u}\|$ aplicando la noma del producto de un número por un vector y que la norma del versor es 1 , resulta

$1 = |k|\|\vec{u}\|$ como dijimos que k debe ser positivo para que tenga el mismo sentido que $\vec{u}$

$1 = k.\|\vec{u}\|$ despejamos k

$k = \dfrac{1}{\|\vec{u}\|}$ significa que, para normalizar un vector distinto del nulo, se debe multiplicar por el inverso de su norma.

$$\breve{u} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$$

Ejemplo:

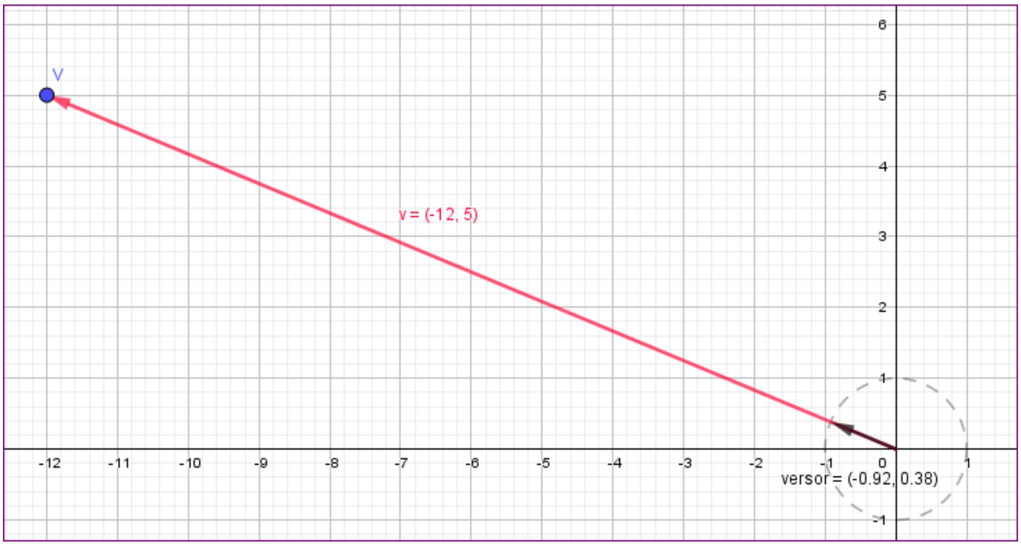
Obtener un vector de tamaño uno (unitario o versor) que tenga la misma dirección y sentido que el vector $\vec{v} = (-12;5)$

Calculamos la norma de $\vec{v}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

Procedemos a multiplicar a $\vec{v}$ por el inverso de su norma $\breve{v} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$

$\breve{v} = \dfrac{1}{13}(-12;5) = \left(-\dfrac{12}{13};\dfrac{5}{13}\right)$ el vector $\left(-\dfrac{12}{13};\dfrac{5}{13}\right)$ tiene norma 1, es paralelo y de igual sentido que $\vec{v}$

Gráficamente,



Nota que el vector $\left(-\dfrac{12}{13};\dfrac{5}{13}\right)$ = (-0,92 ; 0,38) tiene norma 1, su extremo se encuentra sobre la circunferencia de radio 1, tiene la misma dirección y sentido que $\vec{v}$

Ejercicio:

a) Si $\vec{v} = (-5;\ 0)$ y $\vec{u} = (4;\ -3)$ calcular las normas de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{u+v}$ y $\overrightarrow{u-v}$.

b) ¿Cómo se puede hacer para hallar la longitud de un vector $\overrightarrow{MN}$ conociendo M y N? Aplicarlo con M= (5; –2) y N= (3; 1).

c) ¿Cuáles son los valores de x reales para que la distancia de A a B sea 10 sabiendo que A=(x–4; –3) y B= (x+4; x–2)?

Resolver los ejercicios del 1 al 12 del archivo llamado “MÓDULO 2, GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS”

Video de la cátedra que puede ayudarte con estos temas:

Introducción a Geogebra. Vectores en el plano
https://web.microsoftstream.com/video/3a7258b1-9c36-4e87-a6d2-5d19887175b2