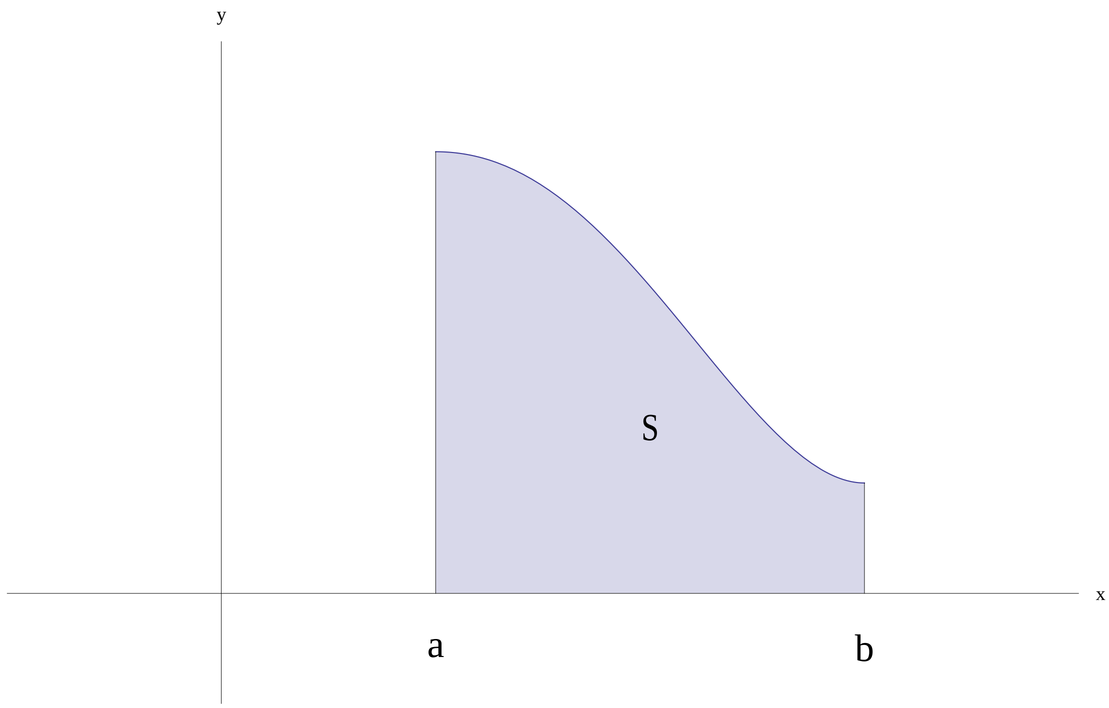
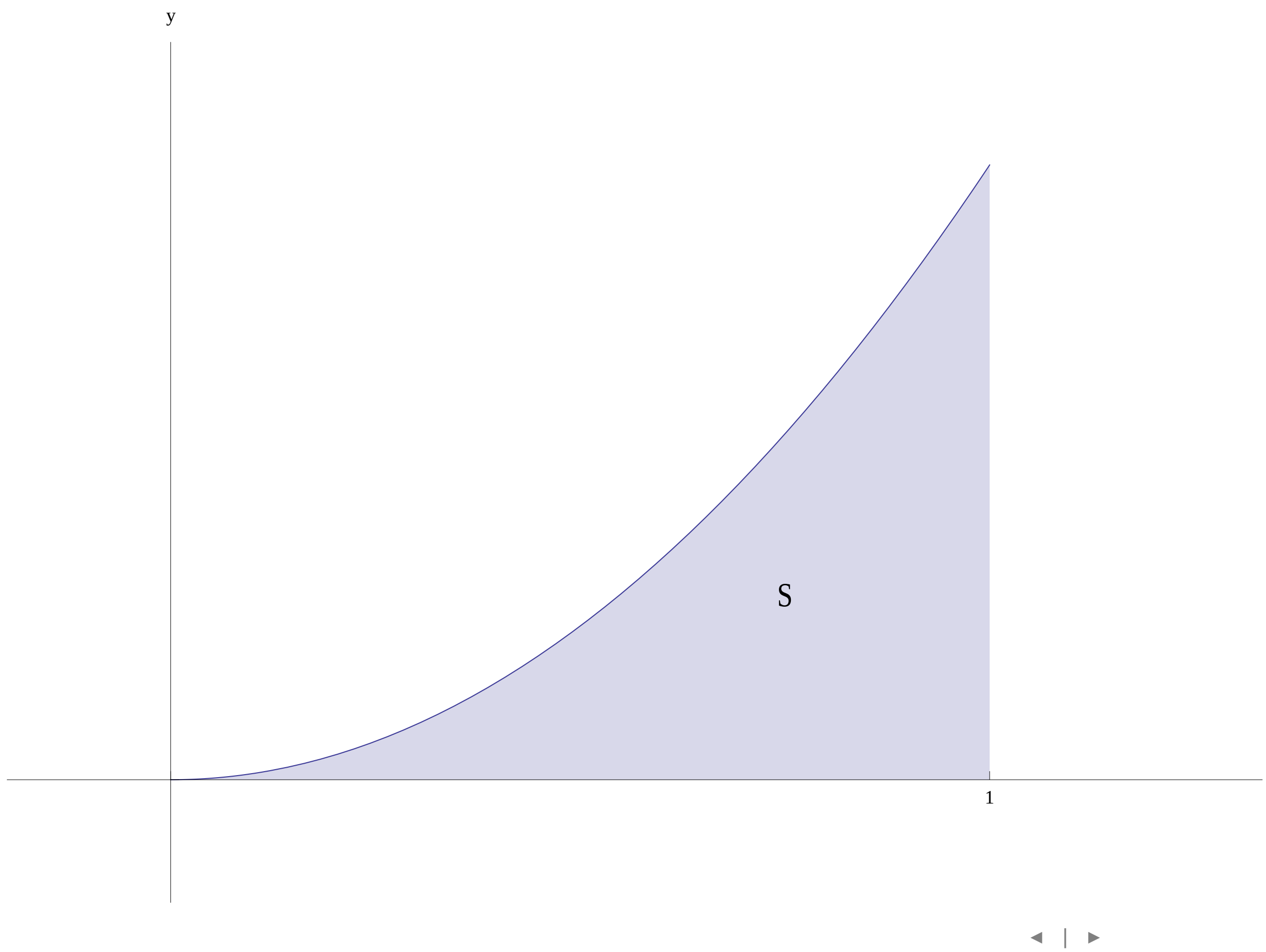
Vamos a intentar resolver el problema del área: hallar el área de la región S que está debajo de la curva y = f(x), desde a hasta b. Esto significa que S está limitada por la gráfica de una función continua f, positiva, las rectas verticales x = a y x = b, como se muestra en la figura:



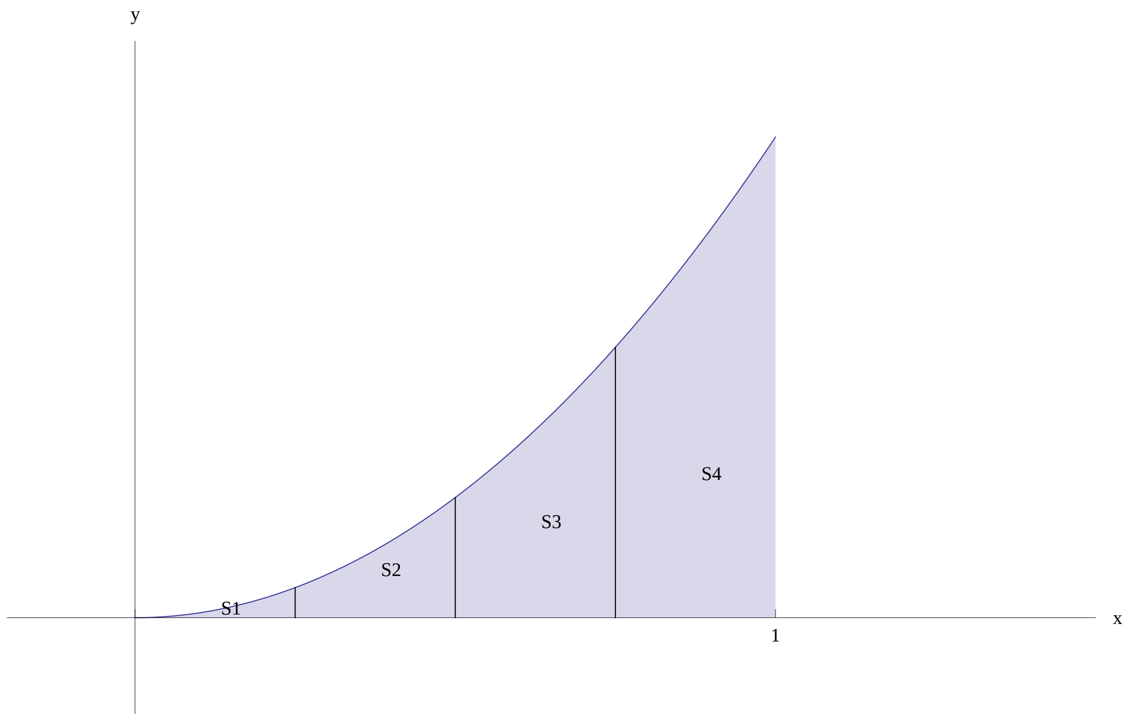
Para resolver este problema comencemos por el siguiente EJEMPLO:

Usar rectángulos para estimar el área debajo de la parábola y = x^2 desde a = 0 a b = 1:

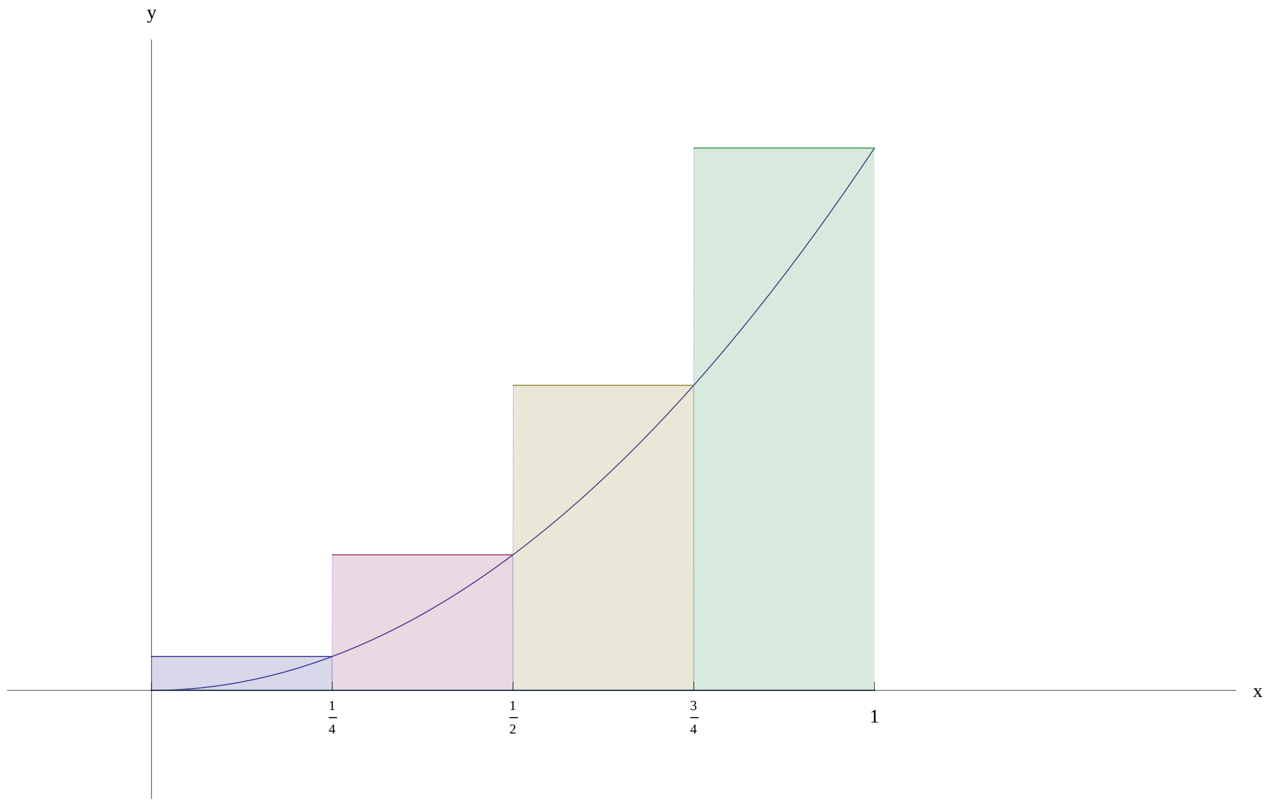


Solución

Una manera de realizar una aproximación del área S es dividirla, por ejemplo, en cuatro franjas: S1, S2, S3, S4, al trazar las rectas verticales: x = 1/4, x = 1/2, x = 3/4 como mostramos a continuación:



Podemos obtener una aproximación de cada franja por medio de un rectángulo cuya base sea la misma que la de la franja y cuya altura sea, por ejemplo, la misma que la del lado derecho de la propia franja, es decir, los valores de la función $y = x^2$ en los puntos x = 1/4; x = 1/2; x = 3/4, como mostramos en la siguiente figura:



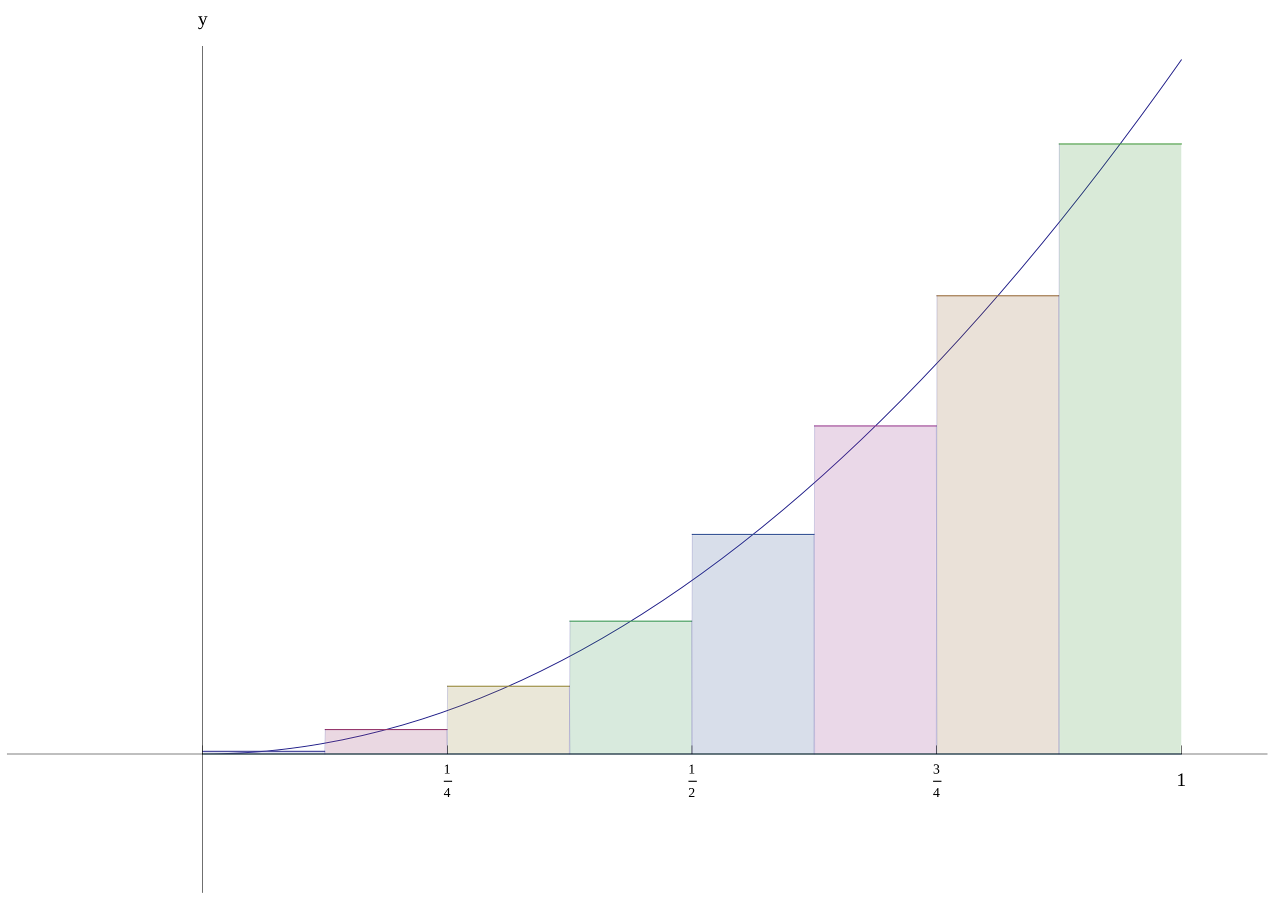
Cada rectángulo tiene un ancho de 1/4 y las alturas son respectivamente: $(1/4)^2$, $(1/2)^2$, $(3/4)^2$ y 1^2. Si sumamos todas las áreas de estos rectángulos tenemos:

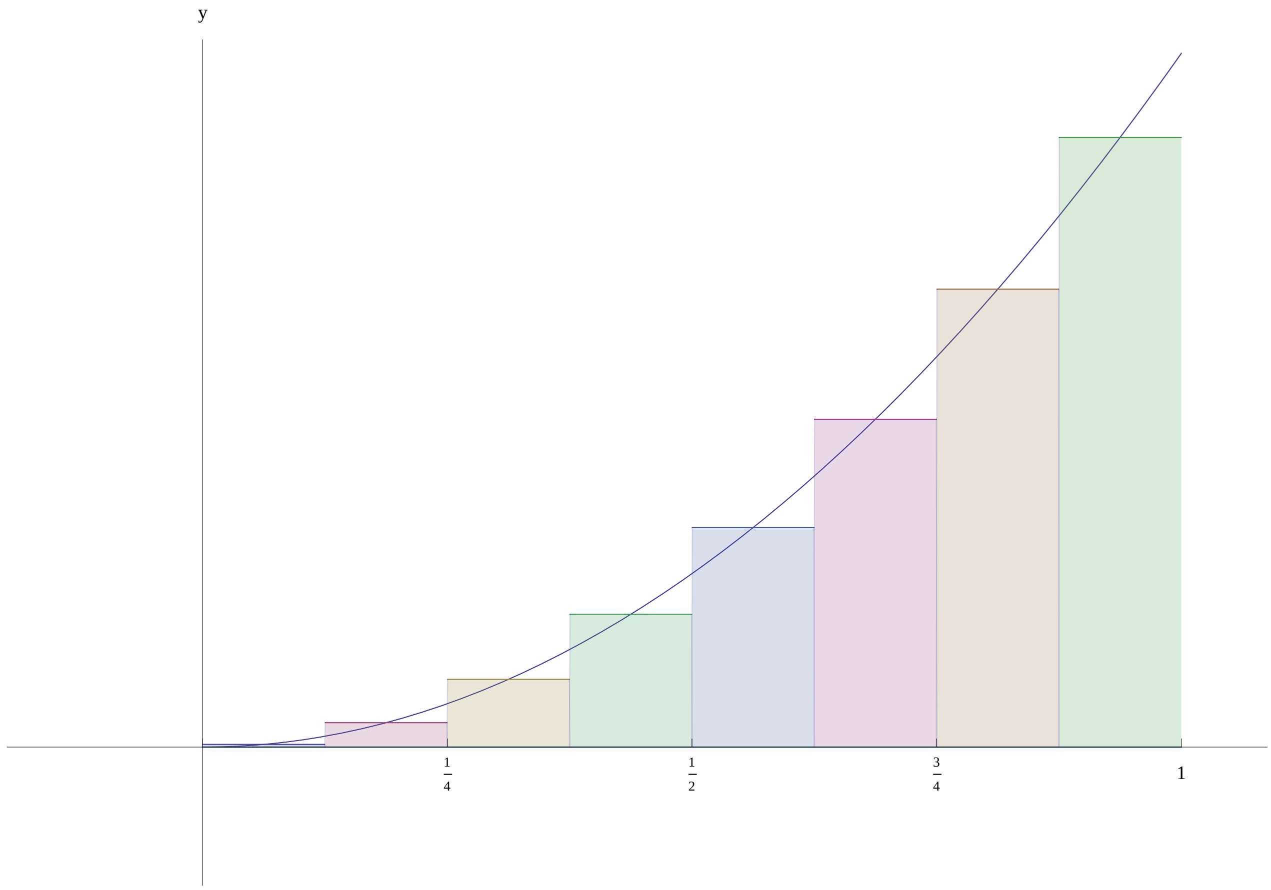
$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}(1)^2 \;//\; N$$

0.46875

Sigamos aproximando el área buscada, que por ahora sabemos que es menor al valor 0.46875 (¿por qué?). Para esto podemos dividir el intervalo [0,1] en 8 partes iguales, quedándonos dividido el intervalo por los siguientes puntos:

$$\left\{0,\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{1}{2},\ \frac{5}{8},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{8},\ 1\right\} \rightarrow \text{PARTICIÓN DE } [0,\ 1]$$





Vamos a tener que sumar el área de 8 rectángulos, cada uno con base 1/8 y altura f(x) donde x es cada uno de los puntos medios de los subintervalos considerados:

$$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{3}{16}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{5}{16}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{7}{16}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{9}{16}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{11}{16}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{13}{16}\right)^2+\frac{1}{8}\left(\frac{15}{16}\right)^2 \;//\; N$$

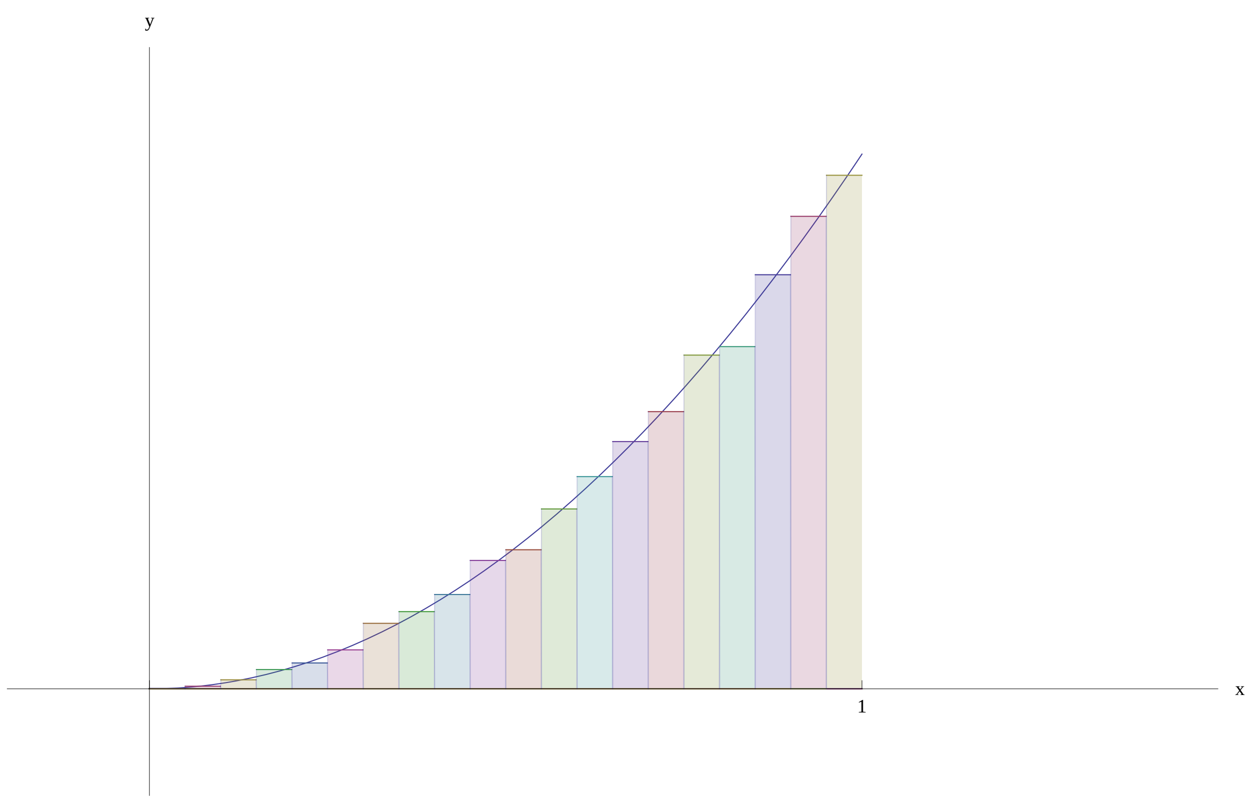
0.33203125`

Queremos una aproximación mejor aún. Dividimos el intervalo [0,1] en 20 partes iguales y para armar los rectángulos, eligiremos un punto CUALQUIERA del subintervalo. Si dividimos el intervalo en 20 partes iguales, obtenemos la partición:

{0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5, 0.55, 0.6, 0.65, 0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 1}

Ahora en cada subintervalo debemos elegir un punto cualquiera para armar los rectángulos con base 1/20 y altura la función en ese punto elegido. Los puntos elegidos son:

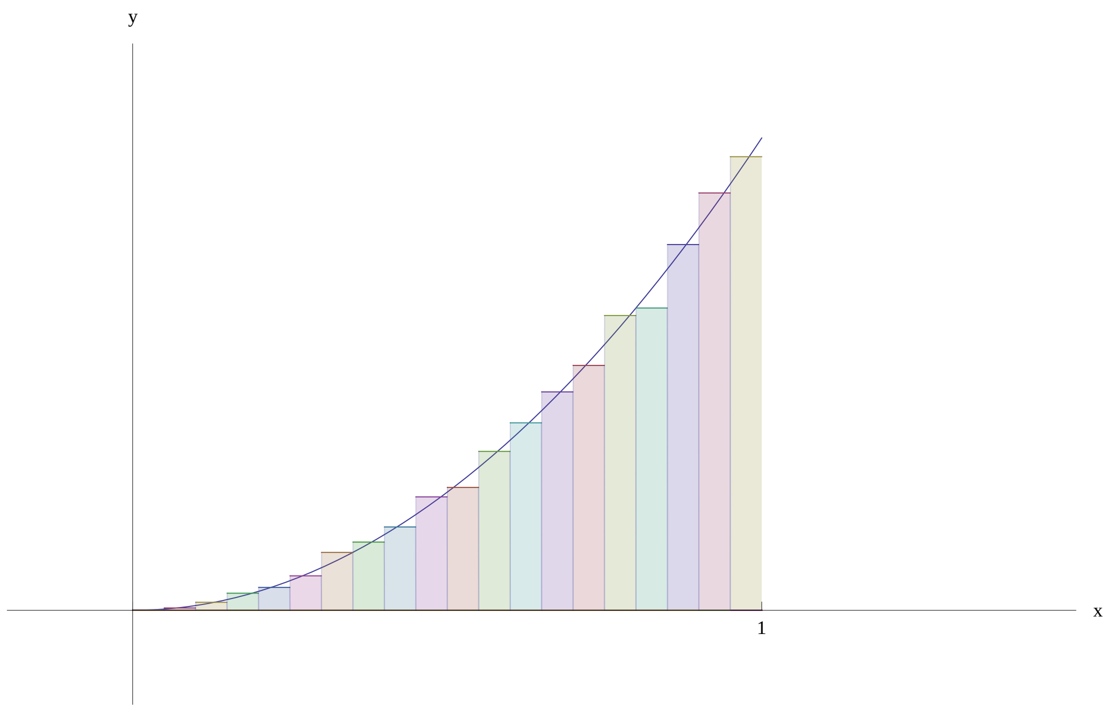
{0.03; 0.07; 0.13; 0.19; 0.22; 0.27; 0.35; 0.38; 0.42; 0.49; 0.51; 0.58 0.63; 0.68; 0.72; 0.79; 0.8; 0.88; 0.94; 0.98} Hagamos la suma de las áreas de esos rectángulos y representémosla gráficamente:



RECORDANDO el área de cada rectángulo: base x altura = Δx f(x)

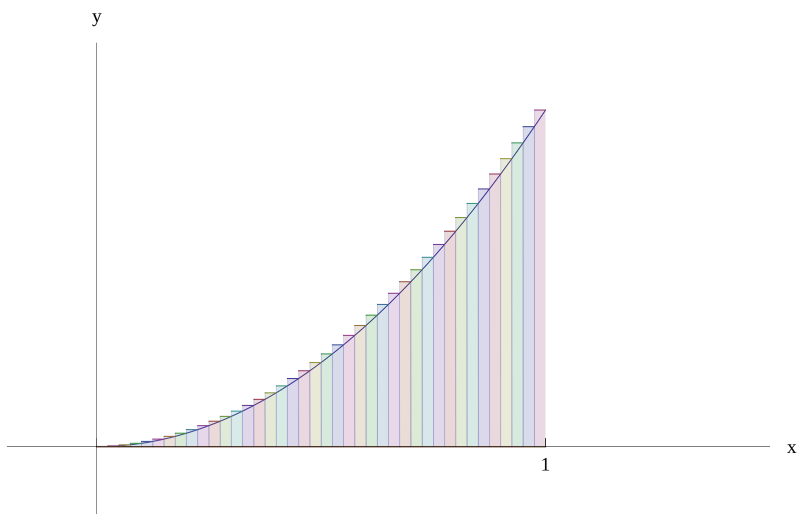
$$\frac{1}{20}(0.03)^2+\frac{1}{20}(0.07)^2+\frac{1}{20}(0.13)^2+\frac{1}{20}(0.19)^2+\frac{1}{20}(0.22)^2+\frac{1}{20}(0.27)^2+\frac{1}{20}(0.35)^2+\frac{1}{20}(0.38)^2+\frac{1}{20}(0.42)^2+\frac{1}{20}(0.49)^2+\frac{1}{20}(0.51)^2+\frac{1}{20}(0.58)^2+\frac{1}{20}(0.63)^2+\frac{1}{20}(0.72)^2+\frac{1}{20}(0.79)^2+\frac{1}{20}(0.8)^2+\frac{1}{20}(0.88)^2+\frac{1}{20}(0.94)^2+\frac{1}{20}(0.98)^2$$

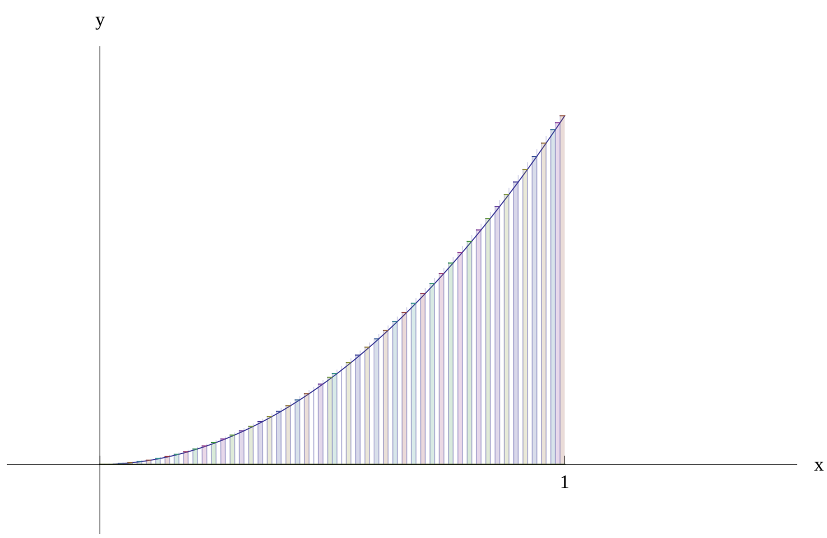
0.31289



Esta es OTRA aproximación al área buscada, que todavía no sabemos si es una mejor aproximación o no, respecto a la que hallamos con ocho rectángulos, al valor exacto del área de la región S.

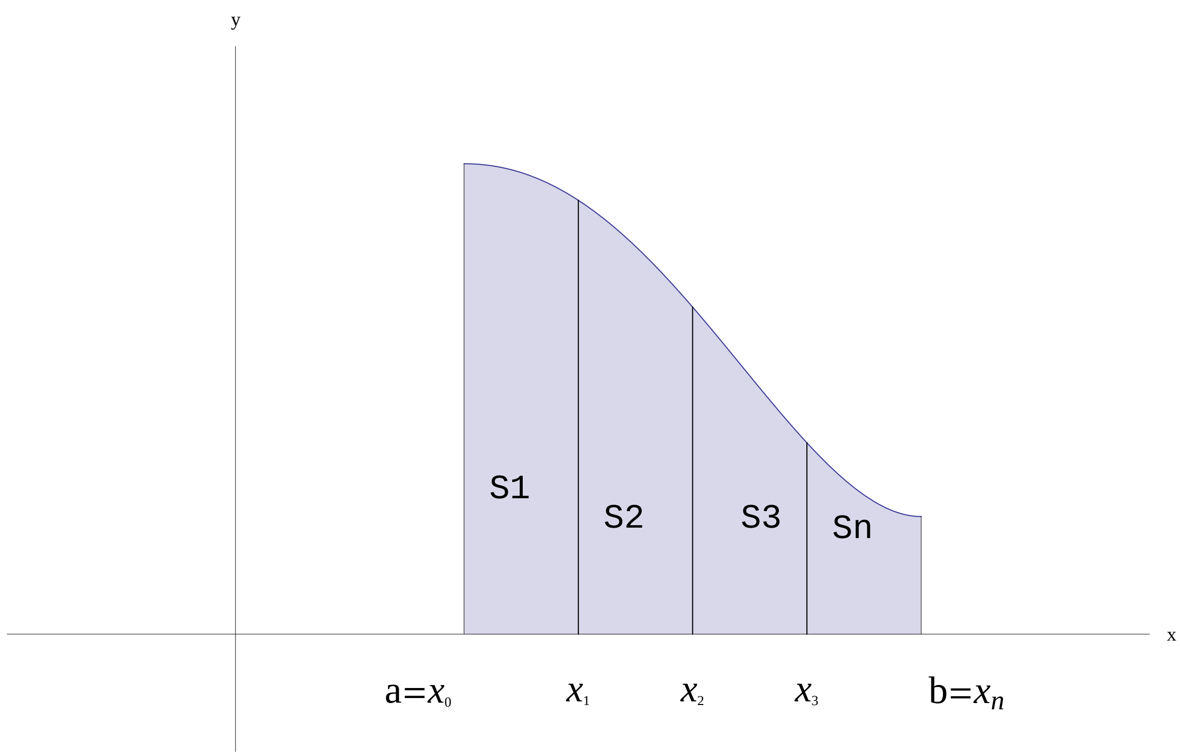
Gráficos de rectángulos de aproximación para n = 40 y n = 100





Generalizando

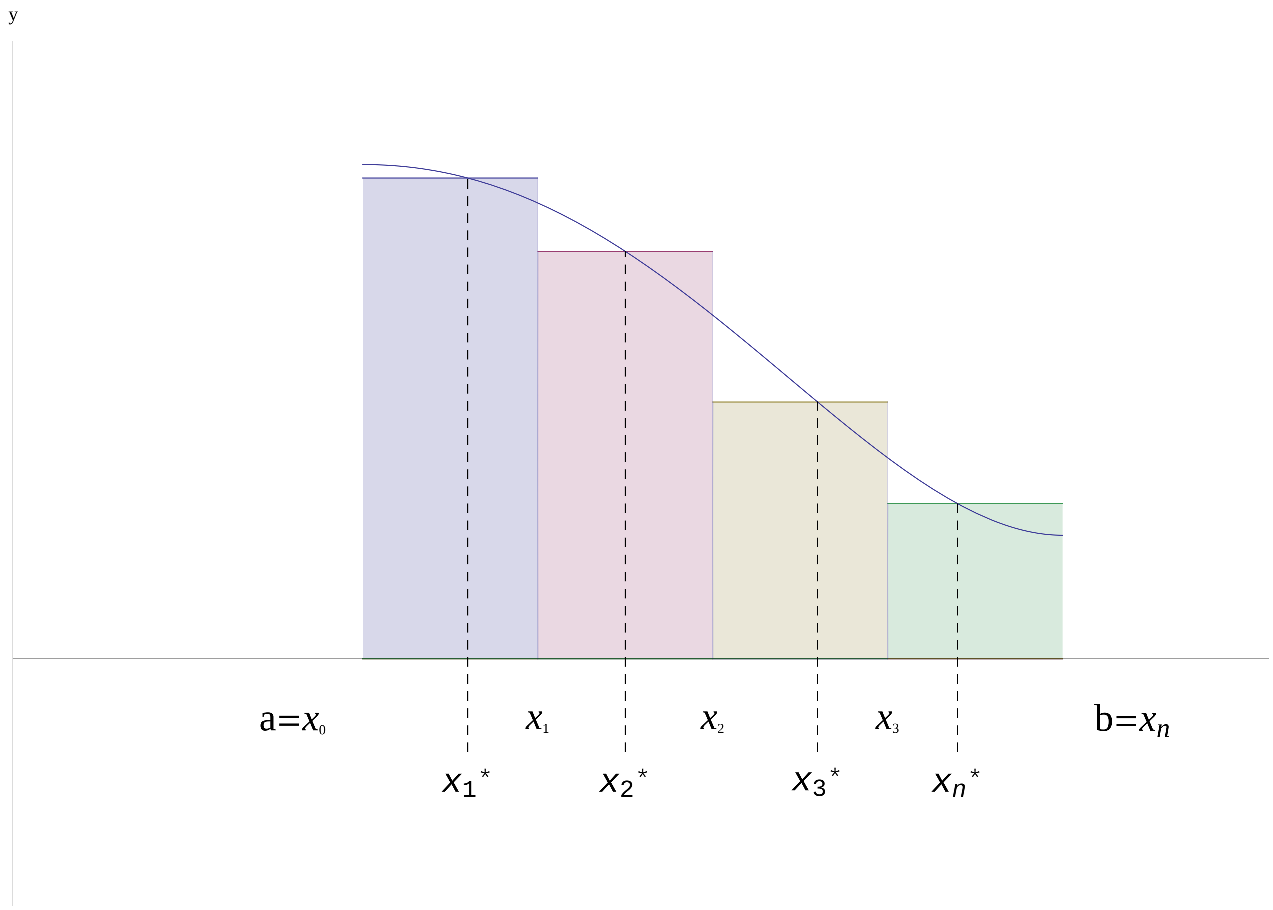
Podemos entonces hacer lo mismo para la función que planteamos al comienzo de la clase. Es decir dividirla en franjas de anchos iguales y aproximar cada una de ellas por el área de un rectángulo. Si la longitud del intervalo [a,b] es b-a y queremos dividirlo en n partes iguales el ancho de cada franja es $\Delta x = (b-a)/n$



Estas franjas dividen el intervalo [a,b] en n subintervalos: $[x_0, x_1],[x_1, x_2],[x_2, x_3],......,[x_{n-1}, x_n]$, donde a = x_0 y b=x_n. Esa sucesión de puntos forma lo que se llama partición del intervalo [a,b]. Lo que haremos a continuación (al igual que en el ejemplo) es tomar un rectángulo para aproximar cada franja. Esos rectángulos tendrán base en cada uno de los subintervalos y altura la imagen de la función en un punto cualquiera del mismo al que llamamos x_i^*

◂ | ▸

Gráficamente:



Planteamos la suma de las áreas de estos rectángulos:

$\Delta x \quad f(x_1{}^*) + \Delta x \quad f(x_2{}^*) + \Delta x \quad f(x_3{}^*) + \ldots + \Delta x \quad f(x_n{}^*) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x \, f\left(x_i{}^*\right)$

Definición

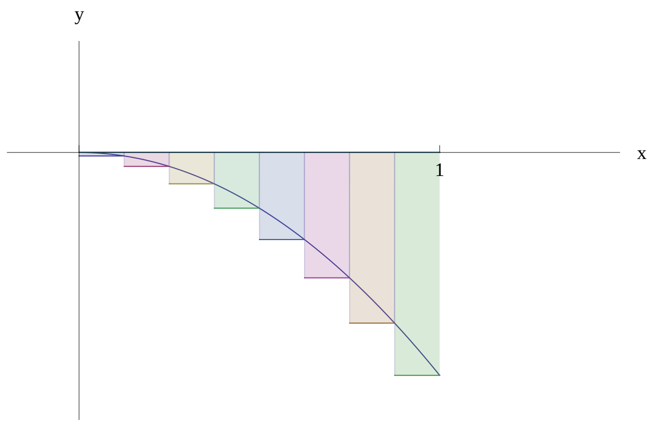
Como vimos en el ejemplo, esta aproximación puede mejorarse cuanto más franjas tomemos, es decir hacemos tender n a infinito. Entonces DEFINIMOS al área A de la región S que se encuentra debajo de la gráfica de f entre las rectas x = a y x =b hasta el eje x como el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x \; f\,(x_i^{*}) = \int_a^b f(x)\, dx$$

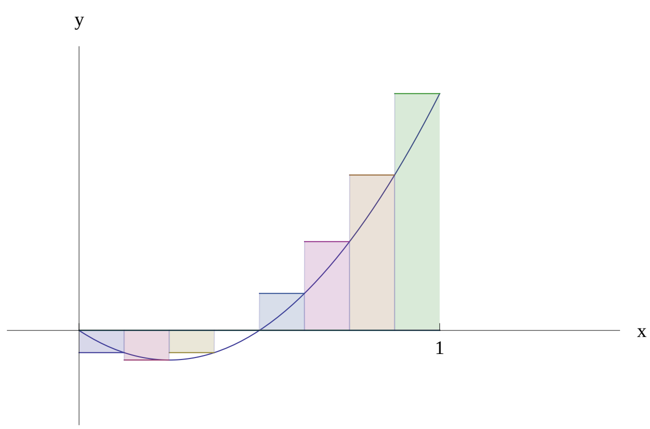
si el límite existe (si la función es continua se puede demostrar que ese límite existe). A este número lo llamamos integral definida de f en [a,b] y diremos que la función es integrable en dicho intervalo.

Observación

Podemos hacer lo mismo que hasta ahora con una función totalmente negativa:



o que cambie el signo en el intervalo:



pero los valores obtenidos NO COINCIDEN con el área delimitada por el gráfico de f y el eje x.