Recordemos el método de ortogonalización (Gram Schmidt)

▸*Tenemos una base para un subespacio W y queremos encontrar una nueva base donde los vectores sean ortogonales.*

$B_W=\{v_1, v_2, v_{3,\ldots\ldots,} v_k\}$

$B'_W = \{w_1, w_2, w_{3,\ldots\ldots,} w_k\}$ *con* $\langle w_i, w_j\rangle = 0$, $\forall\ i \neq j$

▸*Conservamos el primer vector de la base vieja : ése va a ser el primer vector de la base nueva* $\therefore \boxed{w_1 = v_1}$

▸*El segundo vector de la base nueva va a ser el segundo vector de la base vieja más un múltiplo escalar del primer vector de*

la base nueva $\therefore \boxed{w_2 = v_2 + \alpha_{21}.w_1}$

Usamos un subíndice doble para indicar que estamos calculando el segundo vector de la base nueva y la combinación lineal

es del primer vector de la base nueva.

Queremos que sean ortogonales $\therefore\ \langle w_{2,} w_1\rangle = 0 \quad \therefore\ \langle v_2 + \alpha_{21}.w_1, w_1\rangle = 0$

Aplicando las propiedades del producto interior $\langle v_2, w_1\rangle + \alpha_{21}.\langle w_1, w_1\rangle = 0 \quad \therefore\ \alpha_{21} = -\frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}$

Este coeficiente está definido porque $\langle w_1, w_1\rangle \neq 0$ *.Por propiedad de producto interior este denominador es mayor que cero y*

sólo es cero si $w_1 = v_1 = \overline{0}$ *pero* $v_1 \neq \overline{0}$ *porque no sería un vector de una base de* W.

¿Que pasaría si el numerador fuese cero? Entonces $\alpha_{21} = 0\ \therefore\ w_2 = v_2$ *o sea* v_1 *y* v_2 *ya eran ortogonales.*

▸*El tercer vector de la base nueva va a ser el tercer vector de la base vieja más un múltiplo escalar del segundo y del primer*

vector de la base nueva $\therefore\ \boxed{w_3 = v_3 + \alpha_{32}.w_2 + \alpha_{31}.w_1}$.

Queremos que w_3 *sea ortogonal a* w_2 *y a* w_1 $\therefore$ *Pedimos que* $\langle w_3, w_2\rangle = 0$ *y* $\langle w_3, w_1\rangle = 0$

Si $\langle w_3, w_2\rangle = 0\ \therefore\ \langle v_3 + \alpha_{32}.w_2 + \alpha_{31}.w_1, w_2\rangle = 0\ \therefore\ \langle v_3, w_2\rangle + \alpha_{32}.\langle w_2, w_2\rangle + \alpha_{31}.\langle w_1, w_2\rangle = 0$

pero como w_1 *y* w_2 *eran ortogonales,*

$\langle w_1, w_2\rangle = 0 \quad \therefore\ \alpha_{32} = -\frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle}$

Si $\langle w_3, w_1\rangle = 0\ \therefore\ \langle v_3 + \alpha_{32}.w_2 + \alpha_{31}.w_1, w_1\rangle = 0\ \therefore\ \langle v_3, w_1\rangle + \alpha_{32}.\langle w_2, w_1\rangle + \alpha_{31}.\langle w_1, w_1\rangle = 0$

pero como w_1 *y* w_2 *eran ortogonales,*

$\langle w_1, w_2\rangle = 0 \quad \therefore\ \alpha_{31} = -\frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle}$

▸*El cuarto vector será* $\boxed{w_4 = v_4 + \alpha_{43}.w_3 + \alpha_{42}.w_2 + \alpha_{41}.w_1}$

y así siguiendo hasta el último vector.

Se observa que $\boxed{\alpha_{ij} = -\frac{\langle v_i, w_j\rangle}{\langle w_j, w_j\rangle}}$

Recordemos que, obtenida una base ortogonal (una base donde todos sus vectores son ortogonales entre sí), podremos

obtener una base ortonormal (una base ortogonal donde,además, los vectores son unitarios) dividiendo cada vector por su norma.

Ejercicio 7: Encontrar bases ortogonales para los siguientes subespacios.

a)$W \subseteq \mathbb{R}^3 \quad W = \{(x_1, x_2, x_3)/2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\}, \mathbb{R}^3$ *con el producto usual*
Primero encontremos una base para W.
Los vectores de W verifican la ecuación $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \therefore x_3 = -2x_1 + 3x_2$ *por lo tanto tienen la forma*
$(x_1, x_2, -2x_1 + 3x_2) = x_1.(1,0,-2) + x_2.(0,1,3)$. *Estos dos vectores generan W y como son Li , forman una base para W*
$B_W = \{v_1, v_2\} = \{(1,0,-2),(0,1,3)\}$
Estos vectores no son ortogonales. En efecto $\langle(1,0,-2),(0,1,3)\rangle = -6 \neq 0$
Vamos a encontrar una nueva base para W. $B'_W = \{w_1, w_2\}$ *donde* $\langle w_1, w_2\rangle = 0$
$w_1 = v_1 = (1,0,-2)$

$w_2 = v_2 + \alpha_{21}.w_1 \to \alpha_{21} = -\frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} = -\frac{\langle(0,1,3),(1,0,-2)\rangle}{\langle(1,0,-2),(1,0,-2)\rangle} = -\frac{-6}{5} = \frac{6}{5} \therefore w_2 = (0,1,3) + \frac{6}{5}.(1,0,-$
o también

$w_2 = (6,5,3)$ *Entonces* $\boxed{B'_W = \{(1,0,-2),(\frac{6}{5},1,\frac{3}{5})\}}$ *o bien* $B'_W = \{(1,0,-2),(6,5,3)\}$

b) $W \subseteq \mathbb{R}^4, \quad W = gen\{(-1,2,3,0),(-1,-1,-1,1),(3,2,1,3)\}, \mathbb{R}^4$*con el producto usual*
Estos vectores son generadores, y como verifiqué que son Li (haganlo también ustedes), forman una base paraW.
▸$B_W = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(-1,2,3,0),(-1,-1,-1,1),(3,2,1,3)\}$
▸$B'_W = \{w_1, w_2, w_3\}$

▸$w_1 = v_1 = (-1,2,3,0)$

▸$w_2 = v_2 + \alpha_{21}.w_1 \quad \therefore \quad \alpha_{21} = -\frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} = \frac{\langle(-1,-1,-1,1),(-1,2,3,0)\rangle}{\langle(-1,2,3,0),(-1,2,3,0)\rangle} = \frac{2}{7} \therefore \quad w_2 = (-1,-1,-1,1) + \frac{2}{7}.(-1,2,3,0$

▸$w_3 = v_3 + \alpha_{32}.w_2 + \alpha_{31}.w_1 \to \alpha_{32} = -\frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} = -\frac{\langle(3,2,1,3),(-\frac{9}{7},-\frac{3}{7},-\frac{1}{7},1)\rangle}{\langle(-\frac{9}{7},-\frac{3}{7},-\frac{1}{7},1),(-\frac{9}{7},-\frac{3}{7},-\frac{1}{7},1)\rangle} = \frac{13}{20}$

$$\alpha_{31} = -\frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} = -\frac{\langle(3,2,1,3),(-1,2,3,0)\rangle}{\langle(-1,2,3,0),(-1,2,3,0)\rangle} = -\frac{2}{7}$$

$\therefore w_3 = (3,2,1,3) + \frac{13}{20}.(-\frac{9}{7},-\frac{3}{7},-\frac{1}{7},1) - \frac{2}{7}.(-1,2,3,0) = (\frac{49}{20},\frac{23}{20},\frac{1}{20},\frac{73}{20})$

Entonces

$$\boxed{B'_W = \{(-1,2,3,0),(-\frac{9}{7},-\frac{3}{7},-\frac{1}{7},1),(\frac{49}{20},\frac{23}{20},\frac{1}{20},\frac{73}{20})\}}$$

c)$W \subseteq P^3_{[\mathbb{R}]}, \quad W = gen\{p_{(t)} = t^2, q_{(t)} = 2t+2, r_{(t)} = -3\} = gen\{t^2, 2t+2, -3\}$ *con*

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t).g(t).dt$$

Estos vectores son generadores, y como verifiqué que son Li (haganlo), forman una base paraW.

▸ $B_W = \{v_1, v_2, v_3\} = \{t^2, 2t+2, -3\}$

▸ $B'_W = \{w_1, w_2, w_3\}$

▸ $w_1 = v_1 = t^2$

▸ $w_2 = v_2 + \alpha_{21}.w_1 \quad \therefore \alpha_{21} = -\frac{\langle v_2,w_1\rangle}{\langle w_1,w_1\rangle}$

$$\langle v_2, w_1\rangle = \int_{-1}^{1}(2t+2).t^2.dt = \int_{-1}^{1}(2t^3+2t^2).dt = \frac{t^4}{2} + \frac{2t^3}{3}\Big]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

$$\langle w_1, w_1\rangle = \int_{-1}^{1} t^2.t^2.dt = \int_{-1}^{1} t^4.dt = \frac{t^5}{5}\Big]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$$

$\alpha_{21} = -\frac{10}{3} \therefore \quad w_2 = 2t+2-\frac{10}{3}t^2$

▸ $w_3 = v_3 + \alpha_{32}.w_2 + \alpha_{31}.w_1 \quad \therefore \ \alpha_{32} = -\frac{\langle v_3,w_2\rangle}{\langle w_2,w_2\rangle} \qquad \alpha_{31} = -\frac{\langle v_3,w_1\rangle}{\langle w_1,w_1\rangle}$

$$\langle v_3, w_2\rangle = \int_{-1}^{1} -3.(2t+2-\tfrac{10}{3}t^2)dt = -3.[t^2+2t-\tfrac{10}{9}t^3]_{-1}^{1} = -\frac{16}{3}$$

$$\langle w_2, w_2\rangle = \int_{-1}^{1}(2t+2-\tfrac{10}{3}t^2)^2.dt = \frac{56}{9}$$

$$\langle v_3, w_1\rangle = \int_{-1}^{1} -3.t^2.dt = -2$$

$\alpha_{32} = -\frac{\langle v_3,w_2\rangle}{\langle w_2,w_2\rangle} = -\frac{-\frac{16}{3}}{\frac{56}{9}} = \frac{6}{7} \qquad \alpha_{31} = -\frac{\langle v_3,w_1\rangle}{\langle w_1,w_1\rangle} = -\frac{-2}{\frac{2}{5}} = 5$

$w_3 = -3 + \frac{6}{7}(2t+2-\frac{10}{3}t^2) + 5t^2 = \frac{15}{7}t^2 + \frac{12}{7}t - \frac{9}{7}$

$$\boxed{B'_W = \{t^2, -\tfrac{10}{3}t^2+2t+2, \tfrac{15}{7}t^2+\tfrac{12}{7}t-\tfrac{9}{7}\}}$$

COMPLEMENTO ORTOGONAL. PROYECCIONES ORTOGONALES

Ahora los espero hasta que lean , detenida y reiteradamente, el libro de Hernandez pags 370 a 377

Las cosas que tienen que quedar en claro son:

1) Dos subespacios $W_1 y W_2$ de un espacio euclídeo E se dicen ortogonales, si todos los vectores de W_1son ortogonales a
todos los vectores de W_2. Entonces diremos que W_1es el complemento ortogonal de W_2 ,en

símbolos $W_1 = W_2^{\perp}$ *y viceversa.*
2)Para saber si dos subespacios son ortogonales, basta probar que todos los vectores de una base de un subespacio son
ortogonales a todos los vectores de una base del otro subespacio.
3) Si dos subespacios son ortogonales, lo único que tienen en común es el vector nulo.
4)Si W es un subespacio de un espacio euclídeo E, entonces cualquier vector de E se puede escribir de manera única como
la suma de un vector de W y otro de $W^{\perp}$*.O sea* $\forall x \in E$*,existe una descomposición única* $x = P + Q \quad con\ P \in W, \quad Q \in W^{\perp}$
5)El vector P es la proyección ortogonal del vector x sobre W y el vector Q es la proyección ortogonal del vector x sobre$W^{\perp}$
6)dim(W) *+dim* $(W^{\perp})$ *=dim*(E)
7) La norma del vector Q es la distancia de un vector de E al subespacio W
8) El dibujo del plano y la recta perpendicular, con los vectores correspondientes. En los ejercicios en donde no trabajamos
en $\mathbb{R}^3$ *igual nos sirve de inspiración.*
9) Si un conjunto de vectores son ortogonales, entonces son linealmente independientes.

Ejercicio 10
Hallar el complemento ortogonal a cada uno de los subespacios dados en el ejercicio 7

a) $W \subseteq \mathbb{R}^3 \quad W = \{(x_1,x_2,x_3)/2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\}, \mathbb{R}^3$ *con el producto usual*
Para encontrar $W^{\perp}$*uso 2) y tengo presente 6)*
Tomemos una base de W (que en este caso tiene dos vectores) y pidamos que los vectores de $W^{\perp}$*sean ortogonales a todos los*
vectores de la base de W *.*
Como no conocemos los vectores de $W^{\perp}$*,los vamos a indicar con* (a,b,c)*.*
Ahora nos preguntamos ¿Cual base tomar?
▸*Si tomamos* $B_W = \{(1,0,-2),(0,1,3)\}$
$\langle(1,0,-2),(a,b,c)\rangle = 0 \ \therefore\ a - 2c = 0$
$\langle(0,1,3),(a,b,c)\rangle = 0 \ \therefore\ b + 3c = 0$
Resolviendo el sistema nos queda $(2c,-3c,c)$ *que efectivamente nos dá un subespacio de dimensión 1 como hace preveer 6).*
Por lo tanto $\boxed{B_{W^{\perp}} = \{(2,-3,1)\}}$
▸*Si tomamos* $B_W^{'} = \{(1,0,-2),(\frac{6}{5},1,\frac{3}{5})\}$ *que era la base ortogonal, nos quedará*
$\langle(1,0,-2),(a,b,c)\rangle = 0 \ \therefore\ a - 2c = 0$
$\langle(\frac{6}{5},1,\frac{3}{5}),(a,b,c)\rangle = 0 \ \therefore\ 6a + 5b + 3c = 0$
Este sistema es equivalente al anterior $\therefore$ $\boxed{B_{W^{\perp}} = \{2,-3,1\}}$

▸*Entonces, a los efectos de encontrar* $W^{\perp}$*, podemos partir de cualquier base de W.*
▸ *Pero... a esta altura de la cursada, ya se habrán dado cuenta....en Álgebra no se da puntada sin hilo: si tenemos bases*

para W *y* $W^{\perp}$, *tenemos una base para* $E=\mathbb{R}^3$

▸ ▸*Si tomamos* $B_W = \{(1,0,-2),(0,1,3)\}$ *y* $B_{W^{\perp}} = \{(2,-3,1)\}$ $\therefore$ $B_{\mathbb{R}^3} = \{(1,0,-2),(0,1,3),(2,-3,1)\}$ *Esta base no es ortogonal*
▸ ▸*Si tomamos* $B'_W = \{(1,0,-2),(\frac{6}{5},1,\frac{3}{5})\}$ *y* $B_{W^{\perp}} = \{(2,-3,1)\}$ $\therefore$ $B_{\mathbb{R}^3} = \{(1,0,-2),(\frac{6}{5},1,\frac{3}{5}),(2,-3,1)\}$ *Esta es ortogonal*

b) $W \subseteq \mathbb{R}^4$, $\quad W = gen\{(-1,2,3,0),(-1,-1,-1,1),(3,2,1,3)\}, \mathbb{R}^4$ *con el producto usual*

$B_W = \{(-1,2,3,0),(-\frac{9}{7},-\frac{3}{7},-\frac{1}{7},1),(\frac{49}{20},\frac{23}{20},\frac{1}{20},\frac{73}{20})\}$ *o bien* $B_W = \{(-1,2,3,0),(-9,-3,-1,7),(49,23,1,73)\}$

$\langle(-1,2,3,0),(a,b,c,d)\rangle = 0 \;\therefore\; -a+2b+3c = 0$
$\langle(-9,-3,-1,7),(a,b,c,d)\rangle = 0 \;\therefore\; -9a-3b-c+7d = 0$
$\langle(49,23,1,73),(a,b,c,d)\rangle = 0 \;\therefore\; 49a+23b+c+73d = 0$
Resolviendo el sistema nos queda $(\frac{7}{2}d,-11d,\frac{34}{4}d,d)$ $\therefore$ $\boxed{B_{W^{\perp}} = \{(\frac{7}{2},-11,\frac{34}{4},)\}}$

c) $W \subseteq P^3_{[\mathbb{R}]}$, $\quad W = gen\{p_{(t)} = t^2, q_{(t)} = 2t+2, r_{(t)} = -3\} = gen\{t^2, 2t+2, -3\}$ *con* $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t).g(t).dt$

$B_W = \{t^2, -\frac{10}{3}t^2+2t+2, \frac{15}{7}t^2+\frac{12}{7}t-\frac{9}{7}\}$

$\langle t^2, at^3+bt^2+ct+d\rangle = 0 \;\therefore\; \int_{-1}^{1}(at^5+bt^4+ct^3+dt^2).dt = 0 \;\therefore \frac{2}{5}b+\frac{2}{3}d = 0$

$\langle -\frac{10}{3}t^2+2t+2, at^3+bt^2+ct+d\rangle = 0 \;\therefore\; \int_{-1}^{1}(-\frac{10}{3}t^2+2t+2).(at^3+bt^2+ct+d).dt = 0 \;\therefore$

$\frac{4}{5}a+\frac{4}{3}c+\frac{16}{9}d = 0$

$\langle \frac{15}{7}t^2+\frac{12}{7}t-\frac{9}{7}, at^3+bt^2+ct+d\rangle = 0 \;\therefore\; \int_{-1}^{1}(\frac{15}{7}t^2+\frac{12}{7}t-\frac{9}{7}).(at^3+bt^2+ct+d).dt = 0$

$\therefore\; 6a+3b+10c-10d = 0$

Resolviendo el sistema nos queda $(-\frac{5}{3}c,0,c,0) \;\therefore\; -\frac{5}{3}ct^3+0t^2+ct+0 \;\therefore$ $\boxed{B_{W^{\perp}} = \{-\frac{5}{3}t^3+t\}}$

Ejercicio 12
Hallar la proyección ortogonal de:

a) $(-1,0,0,2)$*sobre el subespacio generado por* $b_1 = (2,1,1,-1),\quad b_2 = (1,1,3,0)$
Para hallar la proyección ortogonal del vector sobre el subespacio podemos pensar : Si tenemos una base para el
subespacio, podemos encontrar una base para su complemento ortogonal. Luego, tenemos también una base para el espacio
euclídeo donde habrá algunos vectores que pertenezcan al subespacio y algunos vectores de su complemento ortogonal.
Por 4) y 5) podemos descomponer al vector como suma de un vector que pertenezca al subespacio y otro vector que
pertenezca al complemento ortogonal
$B_W=\{(2,1,1,-1),(1,1,3,0)\}$
Encontramos una base para $W^\perp$
$\langle(2,1,1,-1),(a,b,c,d)\rangle = 0 \ \therefore\ 2a+b+c-d = 0$
$\langle(1,1,3,0),(a,b,c,d)\rangle = 0 \ \therefore\ a+b+3c = 0$
Resolviendo el sistema queda $(2c+d,-5c-d,c,d) \ \therefore\ c.(2,-5,1,0)+d.(1,-1,0,1)$
Estos dos vectores son generadores y son LI, $B_W^\perp = \{(2,-5,1,0),(1,-1,0,1)\}$ *Verifiquen que:* $dim(W)$ *+dim* $(W^\perp)$ *=dim*(E)
Tenemos una base para $\mathbb{R}^4$ $B_{\mathbb{R}^4} = \{(2,1,1,-1),(1,1,3,0),(2,-5,1,0),(1,-1,0,1)\}$ *donde los dos primeros vectores pertenecen*
a W *y los dos segundos a* $W^\perp$
Ahora podemos expresar el vector $(-1,0,0,2)$ *como combinación lineal de los vectores de una base de* $\mathbb{R}^4$
$(-1,0,0,2)= k_1.(2,1,1,-1)+k_2.(1,1,3,0)+k_3.(2,-5,1,0)+k_3.(1,-1,0,1)$
Resolviendo el sistema queda
$(-1,0,0,2)= -\frac{38}{41}.(2,1,1,-1)+\frac{17}{41}.(1,1,3,0)-\frac{13}{41}.(2,-5,1,0)+\frac{44}{41}.(1,-1,0,1)$
Operando con los dos primeros que pertenecen a W *y con los dos segundos que pertenecen a* $W^\perp$
$(-1,0,0,2)=(-\frac{59}{41},-\frac{21}{41},\frac{13}{41},\frac{38}{41})+(\frac{18}{41},\frac{21}{41},-\frac{13}{41},\frac{44}{41})$
Entonces la proyección ortogonal del vector $(-1,0,0,2)$ *sobre el subespacio pedido es el vector*

$\boxed{(-\frac{59}{41},-\frac{21}{41},\frac{13}{41},\frac{38}{41})}$

Ejercicio 13
a) Dado un vector v en un espacio euclídeo$(E,\langle,\rangle)$ y W un subespacio del mismo. ¿qué significa que el vector proyección ortogonal de v sobre W es el que minimiza la distancia de v a ese subespacio?
Significa que, de todos los vectores que pertenecen a W, el vector proyección ortogonal sobre ese subespacio es el que está más cerca del vector v. Complementa la respuesta el enunciado del item b)

b) En cada caso del ejercicio anterior, encontrar la distancia de cada vector al subespacio de proyección. Compruebe en algún caso que tomando otro vector cualquiera del subespacio, distinto de su proyección ortogonal, la distancia del vector dado a ese vector elegido es mayor que la distancia calculada anteriormente.
En el ejercicio anterior habíamos llegado a descomponer el vector dado en dos vectores

ortogonales. El primero (P) es la proyección ortogonal sobre el subespacio W y el segundo (Q) es la proyección sobre el subespacio ortogonal.

$(-1,0,0,2)=(-\frac{59}{41},-\frac{21}{41},\frac{13}{41},\frac{38}{41})+(\frac{18}{41},\frac{21}{41},-\frac{13}{41},\frac{44}{41})$

La norma de Q es la distancia del vector dado al subespacio.

$\|Q\| = \|(\frac{18}{41},\frac{21}{41},-\frac{13}{41},\frac{44}{41})\| = \frac{\sqrt{18^2+21^2+13^2+44^2}}{41} = \frac{\sqrt{2870}}{41}$

Ahora tomemos un vector cualquiera de W. ¿cual? Cualquiera. Existen infinitos vectores que pertenecen a W. Uno! Necesitamos uno! Nos preguntamos, por ejemplo si el $(1,2,3,4) \in W$. Seguro que pertenece a $\mathbb{R}^4$ pero para saber si pertenece a W tendríamos que ver como nos definieron a W.

W era generado por $b_1 = (2,1,1,-1)$, $b_2 = (1,1,3,0)$ Tendríamos que ver si el $(1,2,3,4)$ es una combinación lineal de b_1 y b_2. Estarán todos de acuerdo, que para no trabajar tanto, conviene tomar uno de los generadores.

Tomemos entonces al $(2,1,1,-1)$

▸La distancia del $(2,1,1,-1)$ al $(-1,0,0,2)$ será $\|(2,1,1,-1)-(-1,0,0,2)\| = 2\sqrt{5} \simeq 4.472$

▸La distancia del$(\frac{18}{41},\frac{21}{41},-\frac{13}{41},\frac{44}{41})$ al $(-1,0,0,2)$ era $\frac{\sqrt{2870}}{41} \simeq 1.306$