Composición

Ejemplo 1

Sean las funciones $f(x,y) = x^2y + sen(xy)$ y $g(u,v) = (u^2+v^2, uv^3)$. Se pide determinar $f \circ g$

Una de las condiciones que se deben cumplir para poder realizar la composición es que la imagen de g este contenida en el dominio de f. Teniendo en cuenta esto veamos lo siguiente:

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$g: B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

Por lo tanto $f \circ g$ estará dada como:

$$f \circ g = f\big(g(u,v)\big) = f(g_1, g_2) = (g_1)^2(g_2) + sen\big((g_1)(g_2)\big)$$

Siendo

$$g_1 = u^2 + v^2 \qquad\qquad g_2 = uv^3$$

$$f \circ g = (u^2+v^2)^2(uv^3) + sen\big((u^2+v^2)(uv^3)\big)$$

Y así

$$f \circ g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

En este caso, realizamos la composición entre un ***campo vectorial de*** $\mathbb{R}^2$ ***y una función escalar de dos variables***.

Ejemplo 2

Sean las funciones $f(x,y) = 2x^3y^2 + \cos^2(x+y)$ y $g(t) = (e^t, \cos(t))$. Se pide determinar $f \circ g$

Tenemos que

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$g: B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

Por lo tanto $f \circ g$ estará dada como:

$$f \circ g = f(g_1, g_2) = 2(e^t)^3(\cos(t))^2 + \cos^2(e^t + \cos(t))$$

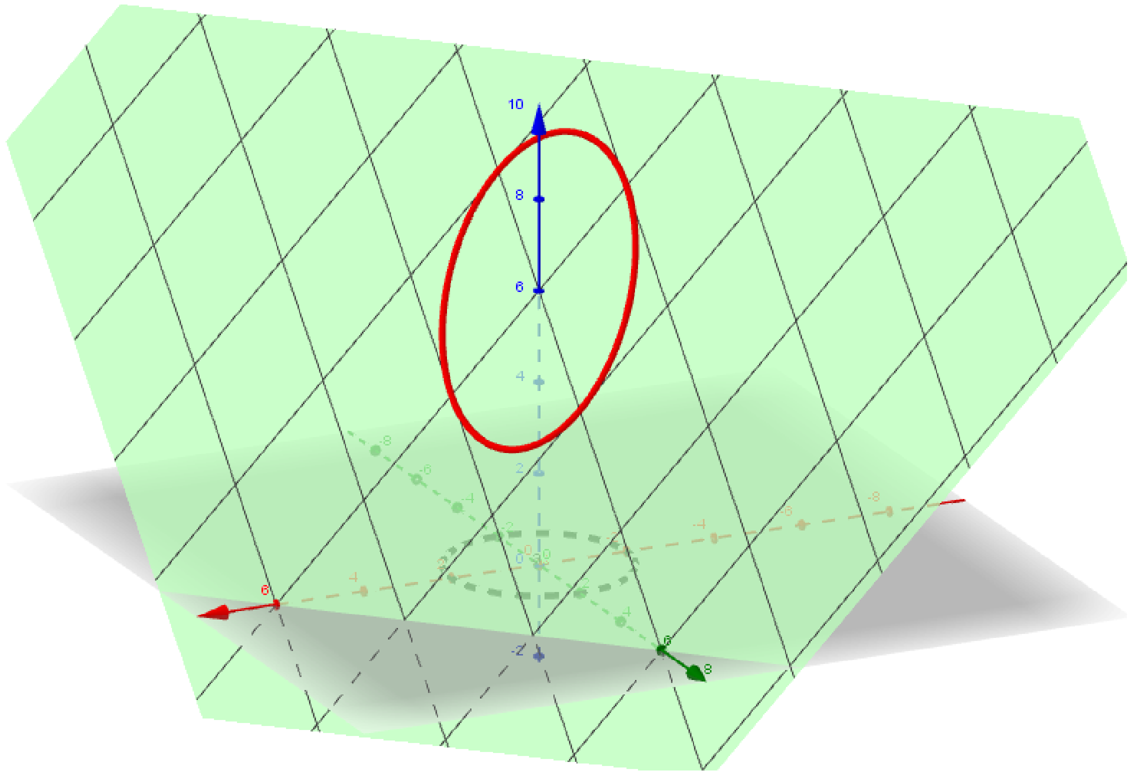
Y así

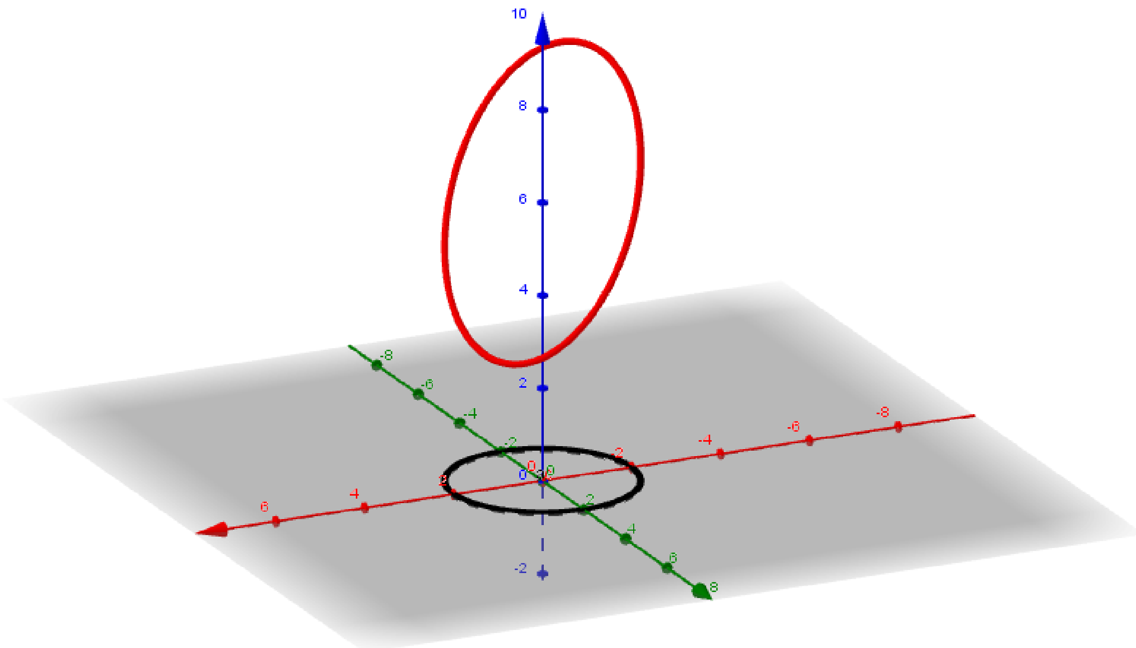
$$f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

En este caso, realizamos la composición entre una ***trayectoria en*** $\mathbb{R}^2$ ***y una función escalar***

$$f(x,y) = 6 - x - y \qquad \alpha(t): [0,2\pi] \to \mathbb{R} \qquad \alpha(t) = \big(2cos(t), 2sen(t)\big)$$

$$¿\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}?$$





Límites

EJEMPLO 1

Calcular el siguiente limite aplicando propiedades.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(x)sen(3y)}{2xy}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(x)}{x} \cdot \frac{sen(3y)}{y} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(x)}{x} \cdot \frac{sen(3y)}{y} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(x)}{x} \cdot \frac{sen(3y)}{3y} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

EJEMPLO 2

Calcular los limites radiales.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x + y^2}{x + y^2}$$

El límite radial, es cuando la trayectoria elegida es una recta que pasa por el punto del limite (x_0, y_0). Es decir, la recta $y = m(x - x_0) + y_0$

- En este caso seria $y = mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left.\frac{2x + y^2}{x + y^2}\right|_{\substack{y=mx \\ x\neq 0}} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y=mx}} \frac{2x + (mx)^2}{x + (mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(2 + m^2x)}{x(1 + m^2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2 + m^2x}{1 + m^2x} = 2$$

- Por la recta vertical $x = 0$ $(y \neq 0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left.\frac{2x + y^2}{x + y^2}\right|_{\substack{x=0 \\ y\neq 0}} = \lim_{y\to 0} \frac{2(0) + y^2}{(0) + y^2} = 1$$

No existe el límite.

Veamos qué pasa con los limites iterados.

Limites iterados o sucesivos

$$L_1 = \lim_{y \to y_0} \left[\lim_{x \to x_0} f(x,y) \right] = \lim_{y \to y_0} \phi(x) \qquad L_2 = \lim_{x \to x_0} \left[\lim_{y \to y_0} f(x,y) \right] = \lim_{x \to x_0} \phi(x)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x + y^2}{x + y^2}$$

$$L_1 = \lim_{y \to 0} \left[\lim_{x \to 0} \frac{2x + y^2}{x + y^2} \right] = \lim_{y \to 0} \frac{y^2}{y^2} = 1$$

$$L_2 = \lim_{x \to 0} \left[\lim_{y \to 0} \frac{2x + y^2}{x + y^2} \right] = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x} = 2$$

Cabe aclarar, que los limites iterados son útiles en el caso que existan y sean diferentes, ya que pueden no existir, y aun así, existir el límite doble.

EJEMPLO 3

Calcular los limites radiales.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x + 2y}{2x + y}$$

- Por la recta vertical $x = 0$ $(y \neq 0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left. \frac{x + 2y}{2x + y} \right|_{\substack{x=0 \\ y \neq 0}} = \lim_{y \to 0} \frac{(0) + 2y}{2(0) + y} = 2$$

- Familia de rectas $y = mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left. \frac{x + 2y}{2x + y} \right|_{\substack{y=mx \\ x \neq 0}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y = mx}} \frac{x + 2mx}{2x + mx} = \lim_{x \to 0} \frac{x(1 + 2m)}{x(2 + m)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + 2m}{2 + m} = no\ existe$$

En este caso, el límite radial depende de m, lo que significa que para cada recta la función se aproxima a un valor distinto.

EJEMPLO 4

Verificar la existencia del siguiente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+3y^2}$$

Limite doble

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+3y^2} = \frac{0}{0}\ indeterminado$$

Limites iterados.

$$L_1 = \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} \frac{2x^2y}{x^4+3y^2}\right] = \lim_{y\to 0} \frac{0}{3y^2} = 0$$

$$L_2 = \lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} \frac{2x^2y}{x^4+3y^2}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = 0$$

Limite radial

- Por la recta vertical $x = 0\ (y \neq 0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left.\frac{2x^2y}{x^4+3y^2}\right|_{\substack{x=0\\ y\neq 0}} = \lim_{y\to 0} \frac{2(0)^2y}{(0)^4+3y^2} = 0$$

- Familia de rectas $y = mx$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left.\frac{2x^2y}{x^4+3y^2}\right|_{\substack{y=mx\\ x\neq 0}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{2x^2(mx)}{x^4+3(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3m}{x^4+3m^2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x^3m}{x^2(x^2+3m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2xm}{(x^2+3m^2)} = \frac{0}{3m^2} = 0$$

Limite por trayectorias

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left.\frac{2x^2y}{x^4+3y^2}\right|_{\substack{y=x^2\\ x\neq 0}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} \frac{2x^2x^2}{x^4+3(x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^4}{x^4+3x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^4}{4x^4} = \frac{1}{2}$$

El límite doble no existe.

EJEMPLO 5

Hallar los valores de a y b tal que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,-2)} \frac{x\cdot(y^2-b)}{y\cdot sen(x)+a\cdot sen(x)}=-4$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,-2)} \frac{x\cdot(y^2-b)}{(y+a)sen(x)}=-4$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,-2)} \frac{x}{sen(x)}\cdot\frac{y^2-b}{y+a}=-4$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{sen(x)}=1$$

$$\lim_{y\to -2} \frac{y^2-b}{y+a}=-4$$

$$\frac{4-b}{-2+a}=-4$$

$$4-b=8-4a$$

$$b=4a-4$$

Continuidad

Definición (Continuidad). Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida en el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$ y sea el par $(x_0, y_0) \in A$. Se dice que f es continua en (x_0, y_0) si se cumple la igualdad:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

EJEMPLO 1

Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

¿Es continua en (0,0)?.

Se debe verificar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

$f(0,0) = 0$

Veamos si existe el límite y cuánto vale.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} =$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 3y \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} =$$

Sabemos que

$$0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2$$

$$\frac{0}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}$$

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

Es decir, que la expresión $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ es acotada., por lo tanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 3y\frac{x^2}{x^2+y^2} = 0$$

La función $f(x,y)$ es continua en (0,0).

EJEMPLO 2

¿Es continua la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos(2x+y)-1}{2x+y} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

en el origen?

Para que sea continua en el origen, se debe cumplir que el límite doble

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

Vemos que

$$f(0,0) = 1$$

La función está definida en el punto, estudiamos ahora la existencia del límite.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(2x+y)-1}{2x+y} =$$

Tomando $u = 2x + y$

Vemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x + y = 0 = \lim_{u\to 0} u$$

Sustituyendo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(2x+y)-1}{2x+y} = \lim_{u\to 0} \frac{\cos(u)-1}{u} =$$

Aplicando L´Hospital-Bernoulli

$$\lim_{u\to 0} \frac{\cos(u)-1}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{-\mathrm{sen}(u)}{1} = 0$$

Vemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0)$$

La función es discontinua en (0,0).

EJEMPLO 3

Dada la siguiente función, que no está definida en $(0,0)$

$$f(x,y) = \frac{5x^2y^2}{x^3+y^6}$$

¿Es posible definir el valor $f(0,0)$ de modo que f sea continua en ese punto?

Para responder esta pregunta, debemos verificar si existe el límite en el origen.

Limite doble

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y^2}{x^3+y^6} = \frac{0}{0} \quad indeterminado$$

Limites radiales

- Por la recta vertical $x = 0$ $(y \neq 0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y^2}{x^3+y^6}\bigg|_{\substack{x=0\\y\neq 0}} = \lim_{y\to 0} \frac{5(0)^2y^2}{(0)^3+y^6} = 0$$

- Por la recta Horizontal $y = 0$ $(x \neq 0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y^2}{x^3+y^6}\bigg|_{\substack{y=0\\x\neq 0}} = \lim_{y\to 0} \frac{5x^2(0)^2}{x^3+(0)^6} = 0$$

- Familia de rectas $y = mx$

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y^2}{x^3+y^6}\bigg|_{\substack{y=mx\\x\neq 0}} = \lim_{\substack{x\to 0\\y=mx}} \frac{5x^2(mx)^2}{x^3+(mx)^6} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^4m^2}{x^3(1+x^3m^6)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{5xm^2}{1+x^3m^6} = \frac{0}{1} = 0$$

Limite por trayectorias

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2y^2}{x^3+y^6}\bigg|_{\substack{y=x^2\\x\neq 0}} = \lim_{\substack{x\to 0\\y=x^2}} \frac{5x^2(x^2)^2}{x^3+(x^2)^6} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^6}{x^3(1+x^9)} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^3}{1+x^9} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left.\frac{5x^2y^2}{x^3+y^6}\right|_{\substack{y=x^3\\x\neq 0}} = \lim_{\substack{x\to 0\\y=x^3}} \frac{5x^2(x^3)^2}{x^3+(x^3)^6} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^8}{x^3(1+x^{15})} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{1+x^{15}} = \frac{0}{1} = 0$$

No podemos asegurar que el límite doble existe

Veamos que la trayectoria $x = y^2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left.\frac{5x^2y^2}{x^3+y^6}\right|_{\substack{y^2=x\\x\neq 0}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left.\frac{5x^2y^2}{x^3+y^6}\right|_{\substack{y^2=x\\x\neq 0}} = \lim_{\substack{y\to 0\\y^2=x}} \frac{5(y^2)^2y^2}{(y^2)^3+y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{5y^6}{y^6+y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{5y^6}{2y^6} = \frac{5}{2}$$

No existe el límite, por lo tanto, es imposible definir a la función $f(x,y)$ tal que sea continua en el punto (0,0).