UNLa M
UNIDAD 1
ESPACIOS VECTORIALES Y SUBESPACIOS
EJEMPLOS

Espacio Vectorial de los Polinomios

$(P_n[\mathbb{R}], +, \mathbb{R}, \cdot)$

$P_n[\mathbb{R}] = \{$ polinomios de grado menor o igual a m, polinomio nulo $\}$

$P_3[\mathbb{R}] \Rightarrow gr \geq 3, gr \geq 2, gr \geq 1, gr \geq 0$　　↓ polinomio nulo　　　　$\bar{v}, \bar{u} \in \mathbb{V}$

$y \quad p(x) \Rightarrow gr(p) = 3 \qquad ej : x^3, 1$

$q(x) \Rightarrow gr(q) = 3 \qquad -x^3, 2x \qquad \dfrac{p+q = 2x+1}{t(x) = 4x^0 = 4}$ neutro

1) $v + w \in \mathbb{V}$
　↓　↓
　$\in \mathbb{V}$ $\in \mathbb{V}$　　　$P_n[\mathbb{R}]$ polinomios de orden m

$*$ '+' : suma de polinomios

$p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + \dots + b_0$

$p(x) + q(x) = (a_m + b_m)x^m + (a_{m-1} + b_{m-1})x^{m-1} + \dots + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_0 + b_0)$

$*$ Elemento neutro : $O_{P_m[\mathbb{R}]}$　　　　　$P_3[\mathbb{R}] \rightarrow 0x^2 + 0x + 0$
　　　　　　　　$0x^m + 0x^{m-1} + \dots + 0x^2 + 0x + 0$　　$O_{P_3[\mathbb{R}]}$

$*$ Opuesto : $-p(x) = -a_m x^m - a_{m-1}x^{m-1} - \dots - a_2 x^2 - a_1 x - a_0$　(vector nulo)

$*$ '·' : $k \cdot p(x) = k a_m x^m + k a_{m-1} x^{m-1} + \dots + k a_0, x$

$k \cdot p(x) ; \quad k = -3$ $\left.\begin{array}{l} \\ p(x) = 2x^2 - x + 1 \end{array}\right\} -3(2x^2 - x + 1) = -6x^2 + 3x - 3$

Ej

$\underline{m=3}$ $(P_3[\mathbb{R}], +, \mathbb{R}, \cdot)$ esp. vect.

$gr \, 0 \rightarrow 5, -\frac{1}{2}$　　$gr \, 3 \rightarrow -x^3 \cdot 2$　　　$P_3[\mathbb{R}] \begin{array}{l}a=0\\b=0\\c=0\end{array}$

$gr \, 1 \rightarrow 5x-1$　　$0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = 0_{P_3[\mathbb{R}]}$

$gr \, 2 \rightarrow x^2 - x$

$S = \{ p(x) \in P_3[\mathbb{R}] / p(0) = p(-1) \}$ $\quad S \subset P_3[\mathbb{R}]$ por def. $\quad x+1 \notin S$

$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\quad\quad d = -a + b - c + d$

$p(0) = d$ $\quad\quad\quad\quad a = b - c + d - d$

$p(-1) = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d = -a + b - c + d$ $\quad \boxed{a = b-c}$

$p(x) = (b-c)x^3 + bx^2 + cx + d$ $\quad q(x) = (b'-c')x^3 + b'x^2 + c'x + d'$

$p(x) \in S, q(x) \in S, p+q = (b-c)x^3 + bx^2 + cx + d + (b'-c')x^3 + b'x^2 + c'x + d'$

$p + q = [(b+b') - (c+c')]x^3 + (b+b')x^2 + (c+c')x + d + d' \in S$

$\overbrace{\quad\quad}^{a'}$

$¿ 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \in S ? \rightarrow \begin{array}{l}a = b-c\\0 = 0-0\end{array}$ es verdadero $\left\{\begin{array}{l}3x^2 + 2x - x + 1 \in S\\ 3 = 2 \cdot (-1)\end{array}\right.$

$k \in \mathbb{R}, \quad p(x) \in S, \quad k \cdot p(x)$

$k \cdot p(x) = k[(b-c)x^3 + bx^2 + cx + d] = (kb - kc)x^3 + kbx^2 + kcx + kd \in S$

$*$ $(S, +, \mathbb{R}, \cdot)$ es ESPACIO VECTORIAL,

$S \subset P_3[\mathbb{R}] \rightarrow (S, +, \mathbb{R}, \cdot)$ es un subespacio de $(P_3[\mathbb{R}], +, \mathbb{R}, \cdot)$

"S es un subespacio de $P_3[\mathbb{R}]$"

$*$ S es un subespacio de $\mathbb{V}$, si y solo sí

1) $\underline{S \subset \mathbb{V}}$ por def. $¿ 0_\mathbb{V} \in S ?$

2) $S \neq \emptyset$; $¿ 0_{P_3[\mathbb{R}]} \in S ? \rightarrow 0_{P_3[\mathbb{R}]} \notin S \therefore S$ no es subespacio de $\mathbb{V}$

3) $\forall v_1 \in S \; \forall v_2 \in S$　　$0_{P_3[\mathbb{R}]} \in S \rightarrow pasa a la cond. 3$

$v_1 \in S \wedge v_2 \in S \Rightarrow v_1 + v_2 \in S$

4) $k \in \mathbb{R} \wedge v_1 \in S \Rightarrow k \cdot v_1 \in S$

Hay 6 ax. que S hereda por estar incluido en $\mathbb{V}$

- Propiedades en $(\mathbb{V}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ esp. vect.

1) $0 \cdot v = 0_\mathbb{V}$

2) $k \cdot 0_\mathbb{V} = 0_\mathbb{V}$

3) $k \cdot v = 0_\mathbb{V} \Rightarrow k = 0 \vee v = 0_\mathbb{V}$

4) $k \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{V}, \quad -k \cdot v = k \cdot (-v)$

Ej: $\mathbb{W} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{2 \times 2} / \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} x = x \cdot \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} \right\}$

demostrar que $\mathbb{W}$ es subespacio $(\mathbb{R}^{2\times2}, +, \mathbb{R}, \cdot)$ $\quad k \cdot \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$

1) $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}^{2\times2}$ por definición de $\mathbb{W}$

2) $\mathbb{W} \neq \emptyset$ $\quad x = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ $\left.\begin{array}{}\\ \end{array}\right\rfloor \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} \in \mathbb{W} \; \therefore \mathbb{W} \neq \emptyset$

$\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

3) $x_1 \in \mathbb{W} \wedge x_2 \in \mathbb{W} \Rightarrow x_1 + x_2 \in \mathbb{W}$ ← tesis equivalente

$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$

dem) $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}(x_1+x_2) = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}x_1 + \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}x_2 = x_1\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} = (x_1+x_2)\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$

　　prop. distrib. de　　$x_1 \in \mathbb{W}$　　prop. f.c.
　　el prod. respecto de la suma　　$x_2 \in \mathbb{W}$

4) $k \in \mathbb{R} \wedge x \in \mathbb{W} \Rightarrow k \cdot x \in \mathbb{W}$ tesis equiv. $\quad \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}(kx) = (kx)\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$

dem) $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}(kx) = k\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} \cdot x = k \cdot x\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix} = (kx)\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$

　　prop. de la multip. de x y matriz　　　asoc.
　　　　　　　　del prod. escalar y matriz.

$\mathbb{W}$ es un SUBESPACIO de $\mathbb{R}^{2\times2}$