ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA I

MÓDULO 3- GEOMETRÍA ANALÍTICA - TERCERA CLASE

DISTANCIAS

DISTANCIA ENTRE PUNTOS

Recordando lo estudiado en las clases de vectores, para calcular la distancia entre dos puntos, se construye el vector que los tiene como origen y extremo y se calcula la norma o módulo de dicho vector.

En el plano R^2

Si $A=(x_1, y_1)$ y $B=(x_2, y_2)$ Recurriendo al Teorema de Pitágoras, será

dist (A, B) = $\left\|\overline{AB}\right\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

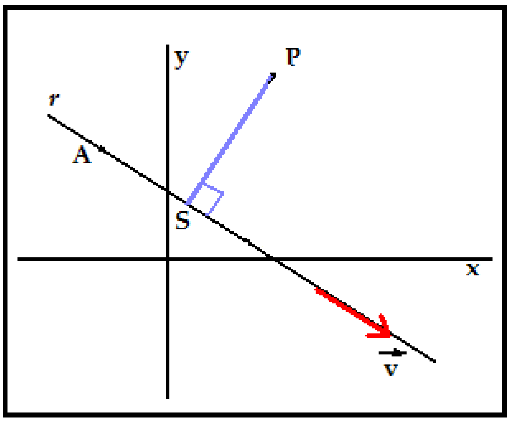
En el plano R^3

Si $A=(x_1, y_1, z_1)$ y $B=(x_2, y_2, z_2)$ el cálculo es:

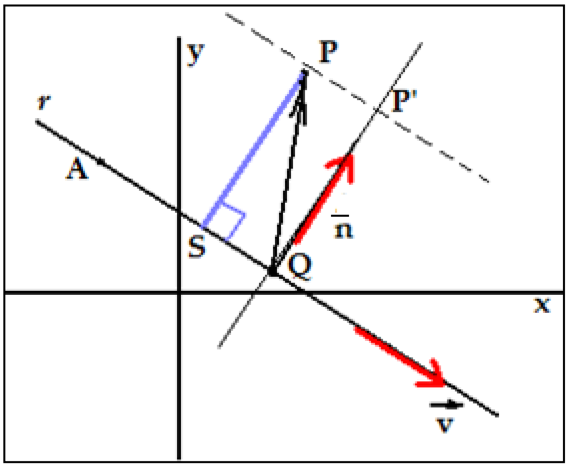
dist (A, B) = $\left\|\overline{AB}\right\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA EN EL PLANO

Sea la recta r: (x, y) = $\lambda.\vec{v}$ +A y P un punto del plano (no incluido en r sino la distancia a determinar es cero). Debemos determinar la longitud del segmento $\overline{PS}$.



Sea S la proyección ortogonal de P sobre *r* (o el pie de la recta perpendicular a *r* que pasa por P) y $\vec{n}$ un vector perpendicular a $\vec{v}$; Q es un punto cualquiera que elijamos de *r*.



La proyección escalar de $\overrightarrow{QP}$ sobre $\vec{n}$ nos da el segmento $\overline{QP'}$ (a lo sumo con signo opuesto) que es congruente con $\overline{SP} = dist(P,r)$.

O sea que dist(P, *r*) = $\left| proy.escalar_{\vec{n}} \overrightarrow{QP} \right| = \dfrac{\left| \overrightarrow{QP} \bullet \vec{n} \right|}{\left\| \vec{n} \right\|}$

Ejemplo:

Dada la recta r: 3x –2y = 6 y P = (1, 2) obtener la distancia de r a P.

Primero vemos que P no pertenece a *r*: 3.1 –2.2 = –1 $\neq$ 6
Si *r* está dada en forma implícita los coeficientes 3 y –2 que acompañan a x e y dan las coordenadas de <u>*un*</u> vector perpendicular al vector director.
r': 3x –2y = 0 es una recta paralela a *r* que pasa por el origen; un punto (x, y) pertenece a dicha recta si cumple con la ecuación dada que puede escribirse como (3, –2)•(x, y) =0
O sea que todo (x, y) de *r'* es ortogonal al vector (3, –2) que resulta ser un vector normal tanto de *r'* como de *r* (eran paralelas).

Elijamos Q = (2, 0) como punto de *r* $\rightarrow$ $\overrightarrow{QP}$ = P– Q = (1, 2) – (2, 0) = (–1, 2)

$$\text{dist(P, r)} = \frac{\left| \overrightarrow{QP} \bullet \vec{n} \right|}{\left\| \vec{n} \right\|} = \; = \frac{\left|(-1;2)\bullet(3;-2)\right|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} = \frac{\left|-3-4\right|}{\sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{13}}$$

Nota que si tienes la ecuación implícita de la recta $r: Ax + By + C = 0$, es posible calcular la distancia $P(x_1, y_1)$ a r , haciendo

$$\text{dist}(P, r) = \frac{|A.x_1 + B.y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

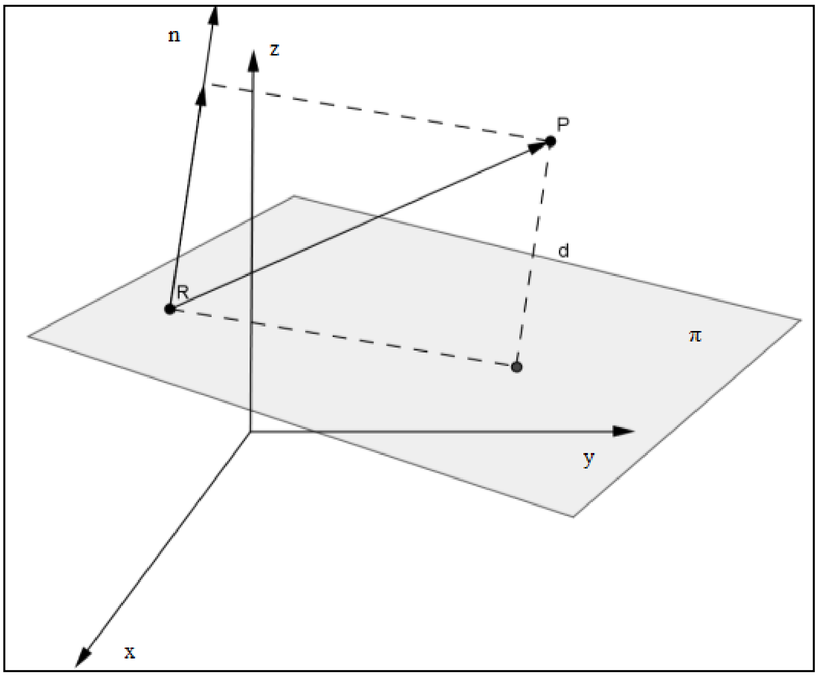
DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

La distancia de un punto $P(x_1, y_1, z_1)$ a un plano $\pi : A.x + B.y + C.z + D = 0$ está dada por la fórmula $dist(P, \pi) = = \dfrac{|A.x_1 + B.y_1 + C.z_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Consideremos un punto $R(x_0, y_0, z_0) \in \pi$ cualquiera perteneciente al plano

Con origen en el punto R consideramos el vector normal al plano $\bar{n} = (A, B, C)$

Si se considera como origen el vector R y como extremo el punto P queda definido un vector $\overrightarrow{RP}$ de manera que si lo proyectamos sobre la dirección del vector normal se obtiene un vector cuya longitud es igual a la distancia buscada entre el punto P y el plano.



Las componentes del vector $\overrightarrow{RP}$ son $(x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0)$

$$dist(P, \pi) = \left\| proy_{\vec{n}} \overrightarrow{RP} \right\| =$$

$$\frac{\left|\overrightarrow{RP}\ .\vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|} = \frac{|(x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0).(A; B; C)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|A.(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

Operando resulta:

$$= \frac{\left| Ax_1 + By_1 + Cz_1 - \left(Ax_0 + By_0 + Cz_0 \right) \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

Para cualquiera sea el punto $R(x_0, y_0, z_0) \in \pi$ se cumple que $A.x_0 + B.y_0 + C.z_0 + D = 0$ entonces $-\left(Ax_0 + By_0 + Cz_0 \right) = D$

Al reemplazar en la fórmula anterior resulta:

$$dist(P, \pi) = \frac{\left| Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ejemplo

Calcularemos la distancia existente entre el punto P_1 (2;4;1) y el plano de ecuación:
3x + 4 y +12 z -7 = 0 siguiendo los pasos anteriores.

En este caso un vector normal es $\bar{n} = (A, B, C) = (3,4,12)$

Consideremos un punto $R(x_0, y_0, z_0) \in \pi$ cualquiera perteneciente al plano, por ejemplo, el punto $R(-3,1,1)$

Verifica que pertenece al plano 3(-3) + 4.1 +12.1 -7 = 0

Indica las coordenadas de otros puntos que puedan ser considerados como el punto *R*

………………………………………………………………………………………

Calculamos la distancia entre el punto y el plano como el módulo de la proyección del vector $\overrightarrow{RP_1}$ sobre el vector normal

$$dist(P_1, \pi) = \frac{\left| \overrightarrow{RP_1} \ .\vec{n} \right|}{\left\| \vec{n} \right\|} = \frac{\left| \left(2 - (-3); 4-1; 1-1 \right) \ .(3;4;12) \right|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} =$$

$$\frac{\left| (5;3;0) \ .(3;4;12) \right|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = \frac{\left| 5.3 + 3.4 + 12 \ .0 \right|}{\sqrt{9 + 16 + 144}} = \frac{|27|}{\sqrt{169}} = \frac{27}{13}$$ es la distancia buscada.

Entonces la distancia existente entre el punto P_1 (2;4;1) y el plano de ecuación :
3x + 4 y +12 z -7 = 0 es $\frac{27}{13}$

Por supuesto que el mismo resultado obtienes si reemplazas directamente en la fórmula:

$$dist(P_1, \pi) = \frac{\left| Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \right|}{\left\| \vec{n} \right\|} = \frac{\left| Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\left| 2.3 + 4.4 + 12 \ .1 - 7 \right|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = \frac{27}{13}$$

$$dist(P_1,\pi) = \ = \frac{|2.3+4.4+12\ \ .1-7|}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}} = \frac{27}{13}$$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA EN EL ESPACIO.

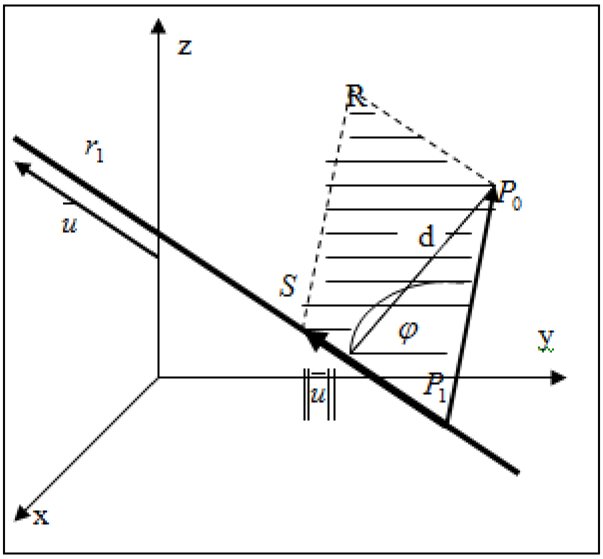
Existen diversas formas para calcularla. Ahora te mostraremos dos, en otros archivos de esta misma carpeta encontrarás otras formas.

Primera forma:

Sean el punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ y la recta $r_1: \frac{x-x_1}{u_x} = \frac{y-y_1}{u_y} = \frac{z-z_1}{u_z}$, que no contiene a P_0, y tiene vector director $\vec{u}$, calcularemos la distancia desde P_0 a la recta r_1 para ello analizaremos el paralelogramo determinado por los puntos P_1P_0RS donde $\overline{P_1S}$ es un vector coincidente en longitud con $\|\overline{u}\|$ es decir $\|\overline{P_1S}\| = \|\overline{u}\|$.

Recordando lo visto en producto vectorial, podemos entonces decir que

Área $P_1P_0RS = \|\overline{u} \times \overline{P_1P_0}\| = \|\overline{u}\|.\|\overline{P_1P_0}\|.sen\hat{\varphi}$:



Vemos que la altura del paralelogramo P_1P_0RS coincide con la distancia (perpendicular trazada desde el punto P_0 a la recta r_1) desde P_0 a r_1 ($dist(P_0,r_1) = h$) y cuyo valor será: $h = \|\overline{P_1P_0}\|.sen\hat{\varphi}$

Sustituyendo h en el área resulta:

$$\|\overline{u} \times \overline{P_1P_0}\| = \|\overline{u}\|.h$$

Entonces:

$$dist(P_0,r_1) = h = \frac{\|\overline{u} \times \overline{P_1P_0}\|}{\|\overline{u}\|}$$

Ejemplo:

Calcular la distancia del punto $P_0(-2,7,-5)$ a la recta de ecuación

$r_1: (x,y,z) = (-1,4,-2) + \gamma.(6,-3,2)$

De acuerdo a la ecuación de recta dada, el vector $\bar{u}=(6,-3,2)$ es paralelo a la recta y el punto $P_1(-1,4,-2)$ pertenece a la recta.

Construimos el vector $\overline{P_1P_0}=$ (-2; 7 ;-5) - (-1; 4 ;-2) = (-1; 3;-3)

Realizamos el producto vectorial entre $\overline{P_1P_0}$ y $\bar{u}$

$$\bar{u}\times\overline{P_1P_0}=\begin{vmatrix}\breve{i} & \breve{j} & \breve{k}\\ 6 & -3 & 2\\ -1 & 3 & -3\end{vmatrix}=3\breve{i}+16\breve{j}+15\breve{k}$$

Antes de continuar, verifica el cálculo, por ejemplo, comprobando que es perpendicular a cada uno de los vectores dados.

…………………………………………………………………………………………………

Calculamos su norma $\left\|\bar{u}\times\overline{P_1P_0}\right\|=\left\|3\breve{i}+16\breve{j}+15\breve{k}\right\|=\sqrt{3^2+16^2+15^2}=\sqrt{490}=7\sqrt{10}$

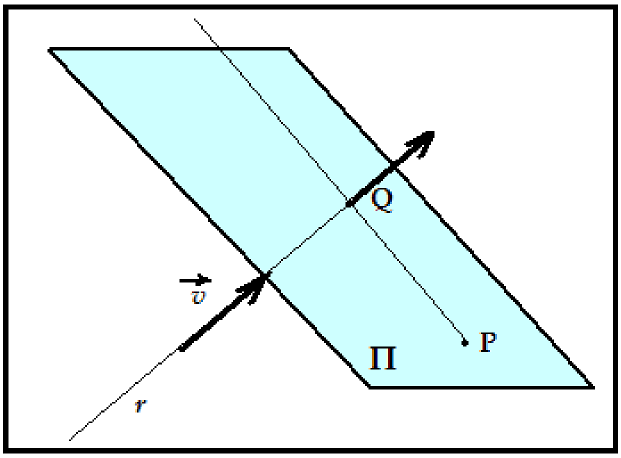
El módulo del vector $\bar{u}$ es: $\left\|\bar{u}\right\|=\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}=\sqrt{49}=7$

Entonces la distancia del punto a la recta es:

$$dist(P_0,r)=\frac{\left\|\bar{u}\times\overline{P_1P_0}\right\|}{\left\|\bar{u}\right\|}=\frac{7\sqrt{10}}{7}=\sqrt{10}$$

Segunda forma

En esta otra manera calcularemos el punto de la recta más cercano al que queremos calcular la distancia, el pie de la recta perpendicular a r que pasa por el punto.



La distancia del punto P a la recta r es la norma del vector $\overrightarrow{QP}$ donde Q es el punto de r más cercano a P y por ende el vector $\overrightarrow{QP}$ es perpendicular a dicha recta.

Podemos construir el plano Π que tenga por normal a $\vec{v}$ (vector director de *r*) y que pase por P (así nos garantizamos que plano y recta sean ortogonales).

Obtenido Π calculamos Q = *r* ∩ Π; por último se consigue la distancia como $\|\overrightarrow{QP}\|$.

Ejemplo:
Encontrar la distancia de P= (4, –5, 3) a la recta r: (x, y, z) = λ. (1, –4, –5) + (–3, 11, 14).

Armamos la ecuación del plano Π:
(x, y, z)•(1, –4, –5) = (4, –5, 3)•(1, –4, –5) → x– 4y – 5z= 4+ 20 –15 → Π: x– 4y – 5z= 9

Obtenemos Q= Π ∩ *r*.

Un punto de r satisface $\begin{cases} x = \lambda - 3 \\ y = -4\lambda + 11 \\ z = -5\lambda + 14 \end{cases}$ y las reemplazamos en la ecuación del plano:

$\lambda - 3 - 4.(-4\lambda + 11) - 5.(-5\lambda + 14) = 9 \rightarrow 42\lambda - 117 = 9 \rightarrow 42\lambda = 126 \rightarrow \lambda = 3 \rightarrow$

Q: $\begin{cases} x = 3 - 3 = 0 \\ y = -4.3 + 11 = -1 \\ z = -5.3 + 14 = -1 \end{cases} \rightarrow$ Q = (0, –1, –1) → dist(P, *r*) = $\|\overrightarrow{QP}\| = \|(4,-5,3)-(0,-1,-1)\| =$

$\|(4,-4,4)\| = \|4.(1,-1,1)\| \rightarrow$ dist(P, *r*) = $4.\sqrt{3}$

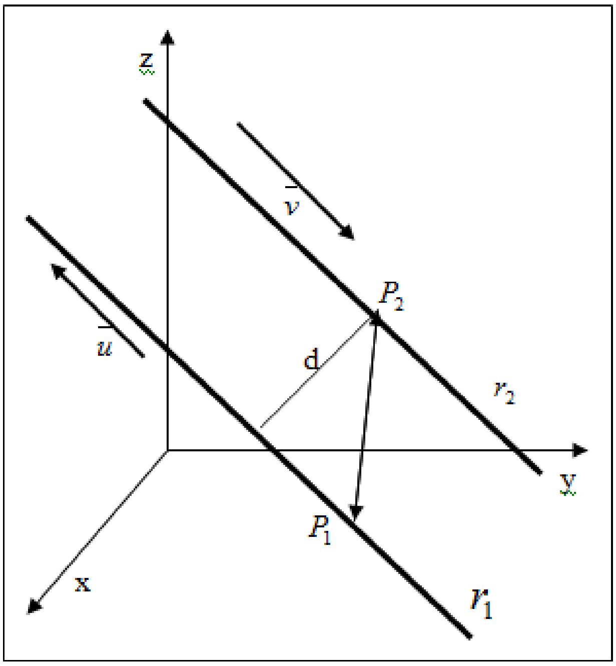
Distancia entre rectas paralelas.

Sean las rectas paralelas r_1 y r_2 es decir que: $\bar{u} = k.\bar{v}$ y cuyas ecuaciones son:

$$r_1 : \frac{x - x_1}{u_x} = \frac{y - y_1}{u_y} = \frac{z - z_1}{u_z}$$

$$r_2 : \frac{x - x_2}{v_x} = \frac{y - y_2}{v_y} = \frac{z - z_2}{v_z}$$

Si consideramos el vector $\overline{P_1P_2}$ que une los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ pertenecientes a cada una de las rectas, el problema de encontrar la distancia entre las dos rectas paralelas, se reduce a hallar la distancia de un punto de una recta a la otra recta: (P_1 a la recta r_2) o (P_2 a la recta r_1) entonces:
Procediendo de la forma vista antes, calculamos:



$$d(r_1,r_2)=\frac{\left\|\overline{u}\times\overline{P_1P_2}\right\|}{\left\|\overline{u}\right\|} \quad \text{o} \quad d(r_2,r_1)=\frac{\left\|\overline{v}\times\overline{P_2P_1}\right\|}{\left\|\overline{v}\right\|}$$

Es posible encontrar la distancia entre dos rectas paralelas, luego de determinar que efectivamente las rectas son paralelas, considerar un punto cualquiera de una de las rectas y calcular la distancia de ese punto a la otra recta.

DISTANCIA ENTRE RECTAS ALABEADAS

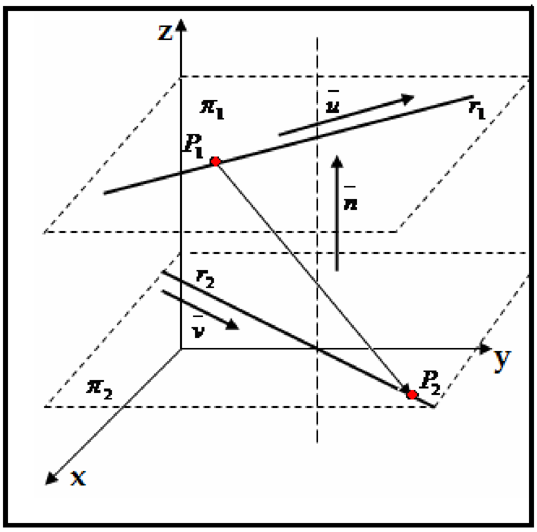
Recordemos que dos rectas r_1 y r_2 son alabeadas si no son paralelas ni secantes, **no** existe un plano que incluya a ambas rectas.

Sean:

$$r_1:\frac{x-x_1}{u_x}=\frac{y-y_1}{u_y}=\frac{z-z_1}{u_z}$$

$$r_2:\frac{x-x_2}{v_x}=\frac{y-y_2}{v_y}=\frac{z-z_2}{v_z}$$

y r_1 <u>no paralela a</u> r_2 y $r_1\cap r_2=\phi$



La distancia entre r_1 y r_2 estará dada por la proyección del vector $\overline{P_1P_2}$ (que une las rectas r_1 y r_2 en dos de sus puntos P_1 y P_2 respectivamente) sobre la normal a los vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$ directores de ambas rectas.

$$dist(r_1,r_2)=\left|\Pr oy_{\overline{n}}\,\overline{P_1P_2}\right|=\frac{\left|\overline{P_1P_2}\bullet\overline{n}\right|}{\left\|\overline{n}\right\|}$$

Un vector normal a ambos vectores puede obtenerse realizando el producto vectorial entre ellos: $\overline{n}=\overline{u}\times\overline{v}$ ya que $\overline{u}x\overline{v}\perp\overline{u}$ y $\overline{u}x\overline{v}\perp\overline{v}$, entonces:

Reemplazando resulta: $$dist(r_1,r_2)=\frac{\left|\overline{P_1P_2}\bullet\left(\overline{u}\times\overline{v}\right)\right|}{\left\|\overline{u}\times\overline{v}\right\|}$$

Ejemplo:

Calcular la distancia entre las rectas

$$r_1:\begin{cases} x=-4+2.\gamma \\ y=4-\gamma \\ z=-1-2\gamma \end{cases} \quad \text{y} \quad r_2: \frac{x+5}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-5}{-5}$$

De la recta r_1 un vector director es $\bar{u}=(2,-1,-2)$ y un punto perteneciente a ella es $P_1(-4,4,-1)$ y en la recta r_2 un vector director es $\bar{v}=(4,-3,-5)$ y un punto perteneciente a ella es $P_2(-5,5,5)$

Construimos el vector $\overline{P_1P_2}=$ (-5;5;5) - (- 4;4;-1) = (-1; 1; 6)

Necesitamos también el vector $\bar{u}\times\bar{v}$, realizamos el producto vectorial

$$\bar{u}\times\bar{v}=\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix}=-1\breve{i}+2\breve{j}-2\breve{k}$$

Verifica que es normal a $\bar{u}$ y a $\bar{v}$. ……………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

Calculamos su norma:

$$\left\|\bar{u}\times\overline{P_1P_0}\right\|=\left\|-\breve{i}+2\breve{j}-2\breve{k}\right\|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3$$

Calculamos el producto escalar para completar el producto mixto:

$\overline{P_1P_2}\bullet\left(\bar{u}\times\bar{v}\right)$ = (-1; 1;6) . (-1; 2; -2) = 1+2-12= -9

Resulta entonces:

$$dist(r_1,r_2)=\frac{\left|\overline{P_1P_2}\bullet\left(\bar{u}\times\bar{v}\right)\right|}{\left\|\bar{u}\times\bar{v}\right\|}=\frac{|-9|}{3}=3$$

Las rectas dadas en el caso anterior son alabeadas. La distancia entre ellas es de 3 unidades.

¿Qué hubiera pasado en el desarrollo anterior si eran secantes?

…………………………………………………………………………………………………

¿Y si eran paralelas? ¿En qué paso del desarrollo nos hubiéramos dado cuenta?

…………………………………………………………………………………………………

Resolver los ejercicios 36 al 56 del archivo llamado “MÓDULO 3, GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS”

Puedes empezar a resolver los ejercicios propuestos como EJERCITACIÓN INTEGRADORA

Videos de la cátedra que pueden ayudarte con estos temas:

Cuestiones de distancias 1
https://www.youtube.com/watch?v=U092GguHI0k

Cuestiones de distancias 2
https://www.youtube.com/watch?v=gX8g-XA2Lm8

Ejercicio con Planos y distancia
https://www.youtube.com/watch?v=JdJiRKEYs_o&list=PLrIBAgsbPZH2FouIVFZ_Lbv-7aDHTtkDU&index=3