31. a. (1) $5x^2+4xy+2y^2-\frac{25}{\sqrt{5}}x-\frac{4}{\sqrt{5}}y+4=0$

Vamos a tratar de escribir a esta ecuación en forma canónica. Para ello, primero escribiremos la ecuación en forma matricial de la siguiente manera:

(2) $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{-25}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$ . Escrito de esta forma matricial hay tres términos. Los productos en el primer término dan los términos cuadráticos, en el segundo los lineales y el tercer término es el independiente. Es fácil verificar que:

$$\begin{pmatrix} \frac{-25}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\frac{-25}{\sqrt{5}}x-\frac{4}{\sqrt{5}}y$$

ya que en la izquierda se tiene un producto de una matriz fila de 1x2 por una columna de 2x1 lo queda una matriz de 1x1, o sea un número. Observar la forma en que se obtiene la matriz que dará los coeficientes cuadráticos (en este caso $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ) en la que los elementos de la diagonal principal son los coeficientes que acompañan a $x^2$ y a $y^2$ y los otros dos elementos, que van en la diagonal secundaria, son la mitad del coeficiente que acompaña a $xy$ que se llama rectangular, en nuestro caso: $\frac{4}{2}=2$ . La matriz de los coeficientes cuadráticos es siempre simétrica.

Una vez que obtenemos esta expresión matricial, vamos a aprovechar los conocimientos que tenemos sobre diagonalización de matrices simétricas. Para esto hay que observar que si la matriz de los términos cuadráticos tuviera 0 en los elementos de la diagonal secundaria al realizar el producto se obtendría una expresión de la forma $ax^2+by^2$ con $a,b\in\mathbb{R}$ de manera tal que se estaría obteniendo una expresión sin el término rectangular con $xy$ . Para obtener esto es que se procederá a diagonalizar la matriz en cuestión.

$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=C_{BE}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}C_{EB}$ donde $B=\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\frac{1}{\sqrt{5}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}$ (realizar la diagonalización de matrices para verificar esto y hallar $C_{BE}$ y $C_{EB}$ siendo $E$ la base canónica y $B$ la base de autovectores, por cuestiones que consideraremos mas adelante es necesario normalizar la base $B$ )

Bien, hasta aquí tenemos (3) $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}C_{BE}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}C_{EB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{25}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$ .

Nuestro objetivo final es obtener una ecuación equivalente a la dada en otras variables en las cuales ésta se pueda escribir en forma canónica. Para ello, vamos a considerar las variables $x'$ e $y'$ cuya relación con $x$ e $y$ será la siguiente: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=C_{EB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ o equivalentemente $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=C_{BE}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ .

Reemplazando en la ecuación (3) obtenemos:

(4) $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}C_{BE}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -\frac{25}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}C_{BE}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$ . Hemos logrado que aparezcan las nuevas variables $x'$ e $y'$ , sólo falta ver cómo hacer lo mismo en la primera matriz.

Para ello debemos recordar algunas cuestiones (propiedades de matrices) ya vistas en la materia:

- Sean $A$ y $B$ matrices cuadradas, entonces $(A.B)^t=B^t.A^t$ .
- Si C es una matriz ortonormal entonces $C^{-1}=C^t$ .Teniendo en cuenta estos puntos

tenemos $\left((x \quad y)C_{BE}\right)^t = C_{BE}^t.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_{EB}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ , de lo cual se deduce que $(x \quad y)C_{BE} = (x' \quad y')$ , obteniendo finalmente

(5) $(x' \quad y')\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{25}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} C_{BE}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (4) = (0)$ , es decir, la ecuación (1) pero luego de un cambio de variables.

Realizando las operaciones entre las matrices obtendremos lo siguiente:

(6) $6x'^2 + y'^2 - \frac{54}{5}x' - \frac{17}{5}y' + 4 = 0$ ahora completaremos cuadrados por un lado para $x'$ y por otro para $y'$ , luego realizaremos un manejo algebraico para obtener la forma canónica de alguna cónica.

Primero trabajamos con los términos que tienen $x'$ : (7) $6x'^2 - \frac{54}{5}x'$ que hay que llevarlo a la forma $a^2 + 2ab + b^2$ .

Para ello, reescribimos a (7) como sigue: $(\sqrt{6}x')^2 - \frac{54}{5}x'$ , de lo que deducimos que $a = \sqrt{6}x'$ .

Nos falta lograr que aparezca el término $2ab$ entonces, $(\sqrt{6}x')^2 - 2\sqrt{6}x'\frac{1}{2\sqrt{6}}\frac{54}{5}$ aquí observamos que el término $b$ será $\frac{27}{5\sqrt{6}}$ , el cuál será elevado al cuadrado y luego sumado y restado a fin de obtener el término $b^2$ .

Luego, la expresión (7) quedará $(\sqrt{6}x')^2 - 2\sqrt{6}x'\frac{27}{5\sqrt{6}} + \left(\frac{27}{5\sqrt{6}}\right)^2 - \left(\frac{27}{5\sqrt{6}}\right)^2$ , luego aplicando la propiedad del cuadrado del binomio $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ obtenemos (8) $\left(\sqrt{6}x' - \frac{27}{5\sqrt{6}}\right)^2 - \left(\frac{27}{5\sqrt{6}}\right)^2$ .

A continuación deberán hacer lo mismo con los términos que tienen $y'$ : $y'^2 - \frac{17}{5}y'$ obteniendo la siguiente expresión: (9) $\left(y' - \frac{17}{10}\right)^2 - \left(\frac{17}{10}\right)^2$ .

Luego, reemplazando las expresiones (8) y (9) en la ecuación (6) obtenemos

(10) $\left(\sqrt{6}x' - \frac{27}{5\sqrt{6}}\right)^2 + \left(y' - \frac{17}{10}\right)^2 - \left(\frac{27}{5\sqrt{6}}\right)^2 - \left(\frac{17}{10}\right)^2 + 4 = 0$ .

Recordemos que nuestro objetivo es escribir a esta última ecuación de la forma $\frac{(x-a)^2}{c} + \frac{(y-b)^2}{d} = 1$ (forma canónica de la elipse).

Por eso reescribimos la ecuación (10) como sigue: $\left(\frac{x' - \frac{27}{5}}{\frac{1}{\sqrt{6}}}\right)^2 + \left(y' - \frac{17}{10}\right)^2 = \left(\frac{27}{5\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{17}{10}\right)^2 - 4$

luego, resolviendo el lado derecho de la desigualdad se obtiene $\frac{\left(x' - \frac{27}{5}\right)^2}{\frac{1}{6}} + \left(y' - \frac{17}{10}\right)^2 = \frac{15}{4}$ , luego, pasando el resultado obtenido dividiendo obtendremos $\frac{\left(x'-\frac{27}{5}\right)^2}{\frac{2}{45}}+\frac{\left(y'-\frac{17}{10}\right)^2}{\frac{15}{4}}=1$ , luego $\frac{\left(x'-\frac{27}{5}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{45}}\right)^2}+\frac{\left(y'-\frac{17}{10}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2}=1$ obteniendo finalmente la ecuación en la forma buscada, siempre teniendo en cuenta que las nuevas incógnitas $x'$ e $y'$ no son las originales, pero están relacionadas con las originales mediante la base hallada.