

T P 04 Ej. 9-d

Verificar que la siguiente función es diferenciable en todo punto del dominio indicado y encontrar la expresión del diferencial en un punto arbitrario:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{en } U = \mathbf{R}^3 - \{ (0,0,0) \}$$

Lo primero que debemos hacer en este tipo de ejercicios es verificar que la función es diferenciable en todo punto del dominio que en este caso son todos los puntos de \mathbf{R}^3 con excepción del origen.

Para eso vamos a hacer uso del teorema que dice:

Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, sea $p \in A$

Si todas las derivadas parciales de una función están definidas y son continuas en un entorno de p incluido en A , entonces f es diferenciable en p .

Cálculo de las derivadas parciales de f

$$f_x(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} (2x) = \frac{-x}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$$

$$f_y(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} (2y) = \frac{-y}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$$

$$f_z(x, y) = -\frac{1}{2\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} (2z) = \frac{-z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}$$

Las tres derivadas parciales tienen una discontinuidad solamente en el punto $(0,0,0)$, el cual está excluido del dominio de f , por lo tanto, las tres derivadas parciales son continuas en todo el dominio de f .

Luego, f es diferenciable en todo el dominio de la función.

Cálculo de la expresión del diferencial en un punto arbitrario

Para una función de tres variables, la expresión del diferencial es la siguiente:

$$df = f_x(x, y, z)\Delta x + f_y(x, y, z)\Delta y + f_z(x, y, z)\Delta z$$

Entonces en el caso de la función f de este ejercicio tenemos que la expresión del diferencial en un punto arbitrario $(x_0, y_0, z_0) \in U$ es:

$$df = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \Delta x + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \Delta y + \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \Delta z$$