TP 7. Ejercicios adicionales-01

Transformaciones afines

Ejercicio 4 - d

Graficar la región de integración R y resolver la integral I.

$$R:\{(x,y)\epsilon R^2/\ |x|+|y|\leq 1\}$$

$$I=\iint_R e^{x+2y}dxdy$$

En base a la definición de la función modulo:

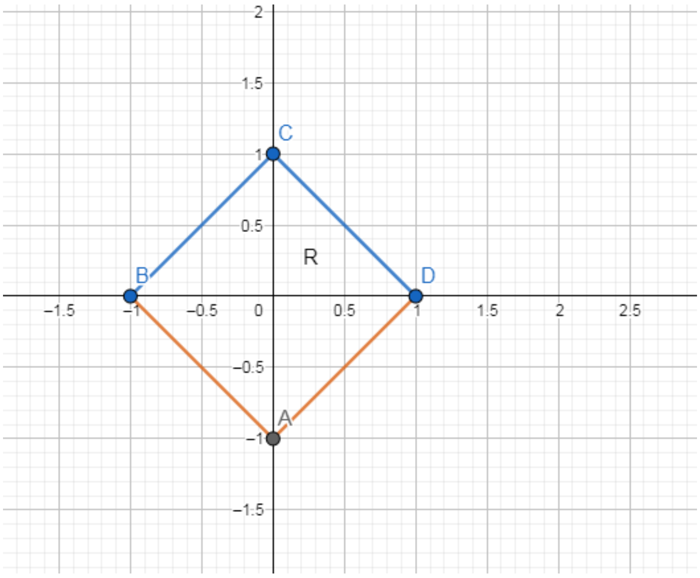
$$|a|=\begin{cases} a & si\ a\geq 0 \\ -a & si\ a<0 \end{cases}$$

Si x≥0 e y≥0➔$x+y\leq 1$

Si x≥0 e y<0➔$x-y\leq 1$

Si x<0 e y≥0➔$-x+y\leq 1$

Si x<0 e y<0➔ $-x-y\leq 1$



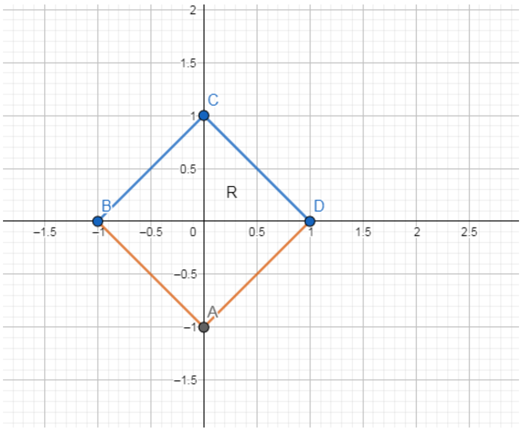
$A=(0,-1)$
$B=(-1,0)$
$C=(0,1)$
$D=(1,0)$

Verificando la Integral (Aplicando Teorema de Transformaciones Lineales Afines).

Según el teorema, el resultado de la integral es el mismo aplicando transformaciones lineales afines, estas se encontraran expresadas de la forma:

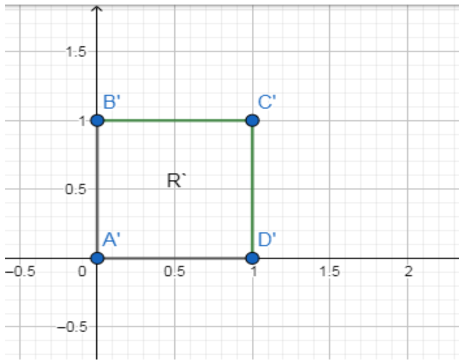
$$(x, y) = T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

Aplicada sobre un recinto derivado de R, llamado R', dependiente de (u,v) el cual tiene como objetivo proveer una integral con menos particiones.



==>

R' de ejemplo



También es posible encontrarse con su inversa la cual se debe despejar:

$$(u, v) = T^{-1}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

Sumemos el hecho de que el Jacobino de la transformación (modulo del determinante de la matriz jacobina de T) cobra un papel importante en el teorema:

$$|J| = \left| |J[T(u,v)]| \right| = \left\| \begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix} \right\| = |x_u y_v - x_v y_u|$$

$$I = \iint_R e^{x+2y} dxdy = \iint_{R'} e^{x(u,v)+2y(u,v)} |J| dudv$$

$$I = \frac{2}{3}(e^2 - e - e^{-1} + e^{-2})$$

Aplicando Teorema de TLA, Método I (TLAI).

Buscamos similitudes en las rectas del recinto:

$$\begin{matrix} \text{Si x} \geq 0 \text{ e y} \geq 0 \rightarrow x + y \leq 1 \\ \text{Si x} < 0 \text{ e y} < 0 \rightarrow -x - y \leq 1 \end{matrix} \quad ==> \quad \begin{matrix} x + y \leq 1 \\ x + y \geq -1 \end{matrix}$$

Utilizamos dicha similitud para armar parte de la transformación:

$$u = x + y$$

Utilizamos dicha similitud para completar de la transformación:

$$\begin{matrix} \text{Si x} \geq 0 \text{ e y} < 0 \rightarrow x - y \leq 1 \\ \text{Si x} < 0 \text{ e y} \geq 0 \rightarrow -x + y \leq 1 \end{matrix} \quad ==> \quad \begin{matrix} x - y \leq 1 \\ x - y \geq -1 \end{matrix}$$

$$v = x - y$$

Por lo tanto, nos encontramos con su inversa:

$$(u, v) = T^{-1}(x, y) = (x + y, x - y)$$

Usando sumas y restas:

$$\begin{matrix} u + v = 2x \\ u - v = 2y \end{matrix} \quad ==> \quad \begin{matrix} x = \dfrac{u + v}{2} \\ y = \dfrac{u - v}{2} \end{matrix}$$

$$(x, y) = T(u, v) = (\frac{u + v}{2}, \frac{u - v}{2})$$

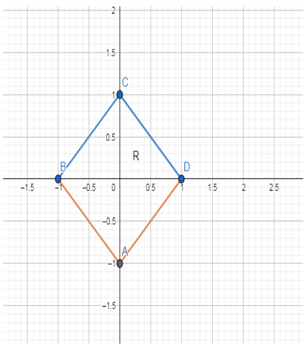
Hallando R':

$$A = (0, -1) ==> A' = T^{-1}(0, -1) = (-1,1)$$

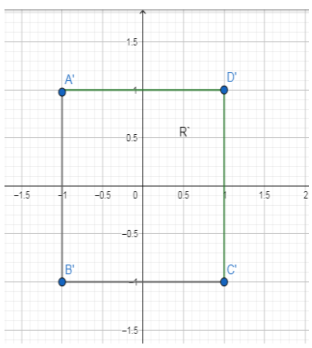
$$B = (-1,0) ==> B' = T^{-1}(-1,0) = (-1, -1)$$

$$C = (0,1) ==> C' = T^{-1}(0,1) = (1, -1)$$

$$D = (1,0) ==> D' = T^{-1}(1,0) = (1,1)$$



==>



$$=> R': \begin{cases} -1 \leq u \leq 1 \\ -1 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

Hallando el Jacobino:

Dado:

$$(x,y) = T(u,v) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$$

Entonces:

$$|J| = \left\| \begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix} \right\| = |(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) - (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})|$$

$$|J| = \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

Aplicando la transformacion al argumento de la integral $x(u,v) + 2y(u,v)$:

Dado:

$$(x,y) = T(u,v) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$$

Entonces

$$x + 2y = \frac{u+v}{2} + u - v = \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}v$$

Armado de la integral:

$$I = \iint_R e^{x+2y} dxdy = \iint_{R'} e^{x(u,v)+2y(u,v)} |J| \, dudv$$

$$I = \int_{v=-1}^{v=1} \int_{u=-1}^{u=1} e^{\frac{3}{2}u - \frac{1}{2}v} \left(\frac{1}{2}\right) du \, dv$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{v=-1}^{v=1} \left[\frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}u - \frac{1}{2}v}\right]_{u=-1}^{u=1} dv$$

$$I = \frac{1}{3} \int_{v=-1}^{v=1} e^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}v} - e^{-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}v} \, dv$$

$$I = \frac{1}{3} \left[-2e^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}v} + 2e^{-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}v}\right]_{v=-1}^{v=1}$$

$$I = \frac{2}{3} \left[-e^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}v} + e^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}v}\right]_{v=-1}^{v=1}$$

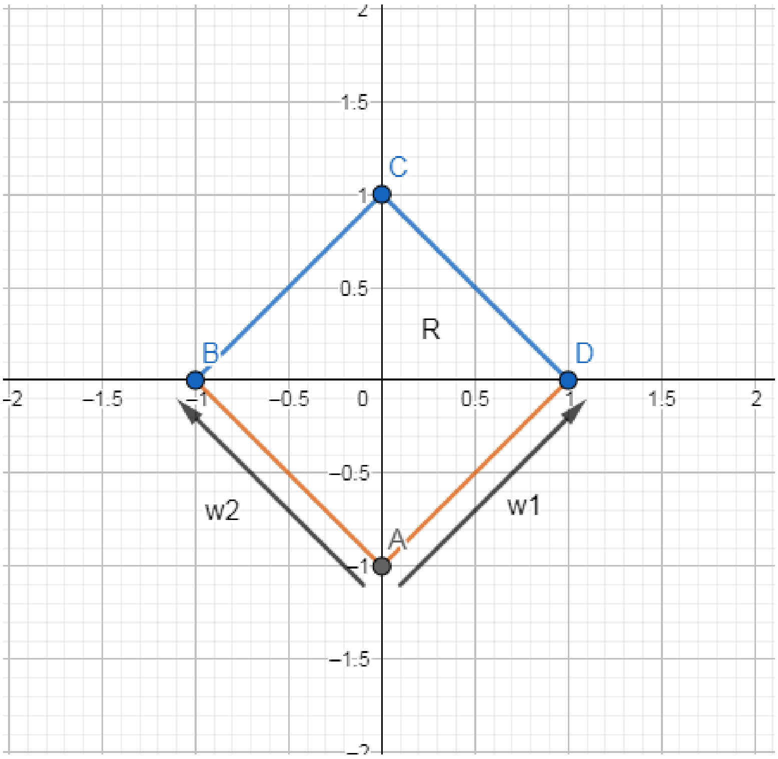
$$I = \frac{2}{3} \left[\left(-e^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} + e^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}\right) - \left(-e^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} + e^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$I = \frac{2}{3} \left[(-e^{1} + e^{-2}) - (-e^{2} + e^{-1})\right]$$

$$I = \frac{2}{3}(e^{2} - e - e^{-1} + e^{-2})$$

Aplicando Teorema de TLA, Método II (TLAII).

Buscamos dos direcciones que acompañen las rectas del grafico de R:



Estos vectores son la diferencia entre los puntos extremo e inicial:

$$\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{D - A} = (1,1)$$

$$\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{B - A} = (-1,1)$$

Entonces los podemos asociar a parametros u y v de manera parametrica, con origen en A:

$$(x,y) = T(u,v) = A + u\overrightarrow{w_1} + v\overrightarrow{w_2}$$

$$(x,y) = T(u,v) = (0,-1) + u(1,1) + v(-1,1)$$

$$(x,y) = T(u,v) = (u - v, -1 + u + v)$$

Usando sumas y restas:

$$\begin{matrix} x + y = -1 + 2u \\ x - y = -2v + 1 \end{matrix} \implies \begin{matrix} u = \dfrac{x + y + 1}{2} \\ y = \dfrac{-x + y + 1}{2} \end{matrix}$$

$$(u,v) = T^{-1}(x,y) = \left(\frac{x + y + 1}{2}, \frac{-x + y + 1}{2}\right)$$

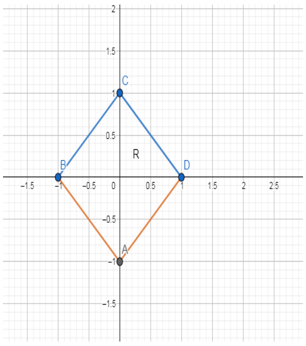
Hallando R':

$$A = (0,-1) ==> A' = T^{-1}(0,-1) = (0,0)$$

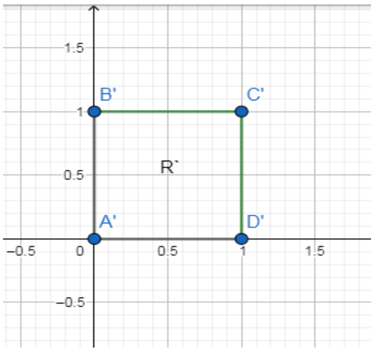
$$B = (-1,0) ==> B' = T^{-1}(-1,0) = (0,1)$$

$$C = (0,1) ==> C' = T^{-1}(0,1) = (1,1)$$

$$D = (1,0) ==> D' = T^{-1}(1,0) = (1,0)$$



==>



$$=> R': \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 1 \end{cases}$$

Hallando el Jacobino:

Dado:

$$(x, y) = T(u, v) = (u - v, -1 + u + v)$$

Entonces:

$$|J| = \left\| \begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\| = |(1)(-1) - (1)(1)|$$

$$|J| = |-1 - 1| = |-2| = 2$$

Aplicando la transformacion al argumento de la integral $x(u, v) + 2y(u, v)$:

$$x + 2y = u - v + 2(-1 + u + v) = 3u + v - 2$$

Armado de la integral:

$$I = \iint_R e^{x+2y} dxdy = \iint_{R'} e^{x(u,v)+2y(u,v)} |J| \, dudv$$

$$I = \int_{v=0}^{v=1} \int_{u=0}^{u=1} e^{3u+v-2} (2) du \, dv$$

$$I = 2\int_{v=0}^{v=1} \left[\frac{1}{3}e^{3u+v-2}\right]_{u=0}^{u=1} dv$$

$$I = \frac{2}{3}\int_{v=0}^{v=1} e^{1+v} - e^{v-2}\, dv$$

$$I = \frac{2}{3}\ \left[e^{1+v} + e^{v-2}\right]_{v=0}^{v=1}$$

$$I = \frac{2}{3}\ \left[(e^{2} + e^{-1}) - (e^{1} + e^{-2})\right]$$

$$I = \frac{2}{3}(e^{2} - e - e^{-1} + e^{-2})$$

Aplicando Teorema de TLA, Método III. (TLAIII)

Usamos el argumento de la integral para definir parte de la transformación:

$$u = x + 2y$$

Buscamos similitudes en las rectas para completar de la transformación:

$$\begin{matrix} \text{Si } x \geq 0 \text{ e } y < 0 \Rightarrow x - y \leq 1 \\ \text{Si } x < 0 \text{ e } y \geq 0 \Rightarrow -x + y \leq 1 \end{matrix} \quad ==> \quad \begin{matrix} x - y \leq 1 \\ x - y \geq -1 \end{matrix}$$

$$v = x - y$$

Por lo tanto, nos encontramos con su inversa:

$$(u, v) = T^{-1}(x, y) = (x + 2y, x - y)$$

Usando sumas y restas:

$$\begin{matrix} u + 2v = 3x \\ u + v = y \end{matrix} \quad ==> \quad \begin{matrix} x = \dfrac{u + 2v}{3} \\ y = u + v \end{matrix}$$

$$(x, y) = T(u, v) = (\frac{u + 2v}{3}, u + v)$$

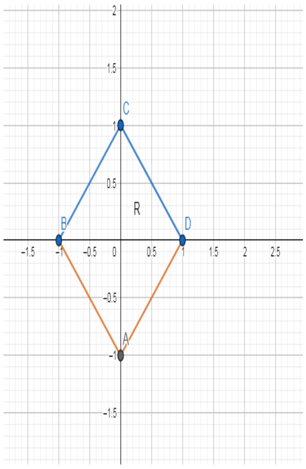
Hallando R':

$$A = (0, -1) ==> A' = T^{-1}(0, -1) = (-2,1)$$

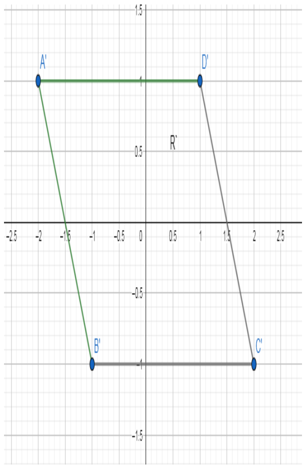
$$B = (-1,0) ==> B' = T^{-1}(-1,0) = (-1, -1)$$

$$C = (0,1) ==> C' = T^{-1}(0,1) = (2, -1)$$

$$D = (1,0) ==> D' = T^{-1}(1,0) = (1,1)$$



==>



Con tipo 1

u dependiente de v

$$=> R': \begin{cases} -\dfrac{3}{2} - \dfrac{v}{2} \leq u \leq \dfrac{3}{2} - \dfrac{v}{2} \\ -1 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

Hallando el Jacobino:

Dado:

$$(x, y) = T(u, v) = (\frac{u + 2v}{3}, u + v)$$

Entonces:

$$|J| = \left\|\begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{matrix}\right\| = |(\frac{1}{3})(1) - (-\frac{2}{3})(1)|$$

$$|J| = \left|\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right| = \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$$

Aplicando la transformacion al argumento de la integral $x(u, v) + 2y(u, v)$:

$$x + 2y = u$$

Recordemos que fue impuesto al inicio.

Armado de la integral :

$$I = \iint_R e^{x+2y} dxdy = \iint_{R'} e^{x(u,v)+2y(u,v)} |J|\, dudv$$

$$I = \int_{v=-1}^{v=1} \int_{u=-\frac{3}{2}-\frac{v}{2}}^{u=\frac{3}{2}-\frac{v}{2}} e^u \left(\frac{1}{3}\right) du\, dv$$

$$I = \frac{1}{3} \int_{v=-1}^{v=1} \left[e^u\right]_{u=-\frac{3}{2}-\frac{v}{2}}^{u=\frac{3}{2}-\frac{v}{2}} dv$$

$$I = \frac{1}{3} \int_{v=-1}^{v=1} e^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}v} - e^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}v}\, dv$$

$$I = \frac{1}{3} \left[-2e^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}v} + 2e^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}v}\right]_{v=-1}^{v=1}$$

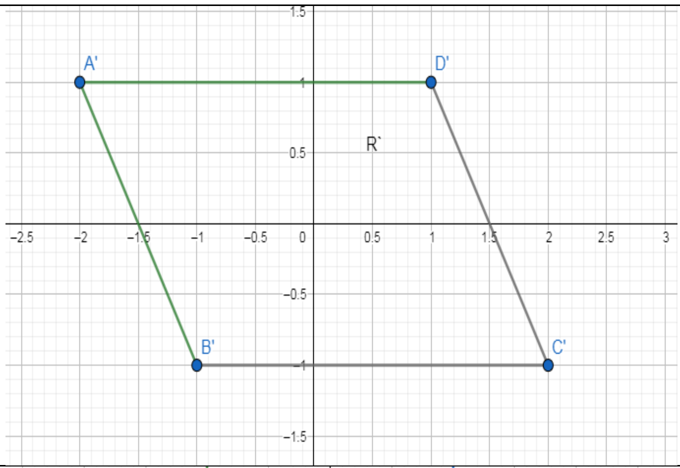
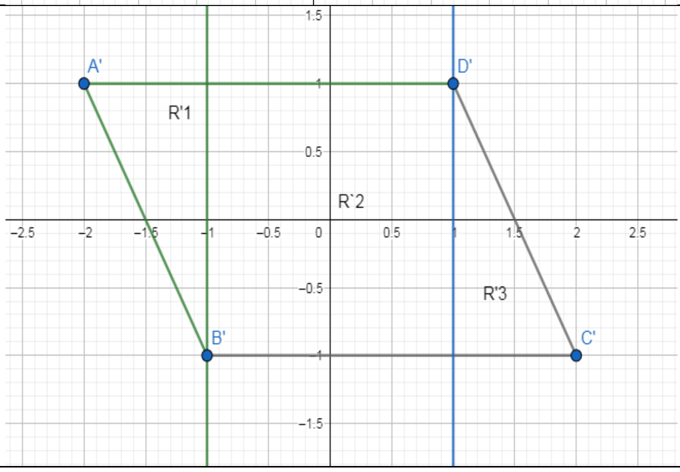
$$I = \frac{2}{3} \left[(-e^1 + e^{-2}) - (-e^2 + e^{-1})\right]$$

$$I = \frac{2}{3}(e^2 - e - e^{-1} + e^{-2})$$

Corolario:

Despues de aplicada la transformacion. En todos los metodos sabemos que se puede aplicar Tipo I y Tipo II.

Observar en el Metodo 3.

	Con tipo 1 u dependiente de v $$=> \ R': \begin{cases} -\frac{3}{2}-\frac{v}{2} \leq u \leq \frac{3}{2}-\frac{v}{2} \\ -1 \leq v \leq 1 \end{cases}$$
	Con tipo 2 v dependiente de u Se debe partir el recinto en 3 partes

A los fines practicos, antes de aplicar transformaciones afines, resolviamos la integral con un minimo de 2 particiones.

Uno de los objetivos de las transformaciones es la sensillez de operatoria, la cual habla de dicha cantidad de particiones.

Por lo cual no seria <u>*"conveniente"*</u> resolver en este caso la integral con TLAIII y recorrido tipo2.

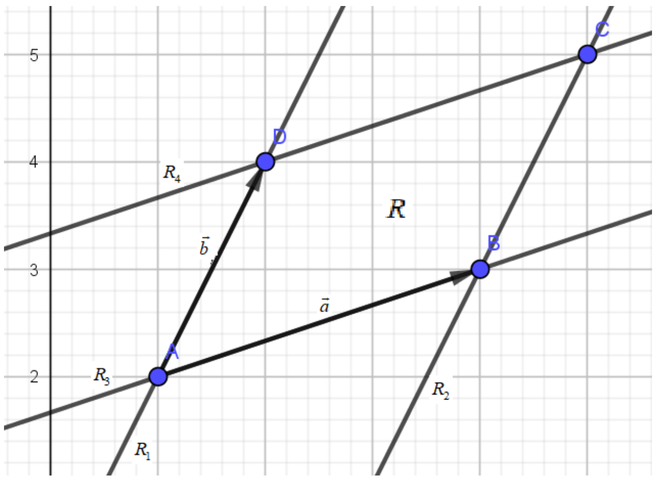
Adicional:

$\iint_R \frac{sen(2x-y)}{3y-x-4} dxdy =$

para R la región del paralelogramo de vértices $(1,2),(4,3),(5,5)y(2,4)$

Se destaca, que la integral $\int \frac{senx}{x} dx$ no tiene primitiva elemental.

Propuestas de resolución vectorial y por rectas.



Método vectorial:

$$\vec{a} = (3,1)$$

$$,\vec{b} = (1,2)$$

$$\forall (x,y) \in R: (x,y) = u\,\vec{a} + v\,\vec{b} \text{ con } 0 \leq u \leq 1, \text{y, } 0 \leq v \leq 1$$

$(x,y) = u(3,1) + v(1,2) + (1,2) = (3u+v+1, u+2v+2)$

$\begin{cases} x_{(u,v)} = 3u+v+10 \leq u \leq 1 \\ y_{(u,v)} = u+2v+20 \leq v \leq 1 \end{cases}, \; R' = [0,1] \times [0,1]$

$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left\|\begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}\right\| = 5$

Nótese que $Area(R) = |\vec{a} \times \vec{b}| = |(3,1) \times (1,2)| = 5$ y $Area(R') = 1$

$$f_{(x,y)} = \frac{sen(2x-y)}{3y-x-4}$$

$$f_{(x_{(u,v)},y_{(u,v)})} = \frac{sen(2(3u+v+1)-(u+2v+2))}{3(u+2v+2)-(3u+v+1)-4} = \frac{sen(5u)}{5v+1}$$

$$\iint_R \frac{\mathrm{sen}(2x-y)}{3y-x-4}dxdy = \iint_{R'} \frac{\mathrm{sen}(5u)}{5v+1}5dudv =$$

$$= \int_{v=0}^{1}\int_{u=0}^{1} \frac{sen(5u)}{5v+1}5dudv = \frac{(1-cos\,5)\,ln\,6}{5}$$

Método por rectas:

$$\begin{cases} R_1: y = 2x \overset{Argseno}{\Leftrightarrow} 2x - y = 0 \\ R_2: y = 2x - 5 \Leftrightarrow 2x - y = 5 \\ u = 2x - y 0 \leq u \leq 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} R_3: y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \overset{Denom}{\Leftrightarrow} 3y - x - 4 = 1 \\ R_4: y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3y - x - 4 = 6 \\ v = 3y - x - 4 1 \leq v \leq 6 \end{cases}$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \overset{\substack{Transf\\Afín\\Biyect}}{\cong} \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} = \begin{Vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$f_{(x,y)} = \frac{sen(\overbrace{2x-y}^{u})}{\underbrace{3y-x-4}_{v}}$$

$$\iint_R \frac{\mathrm{sen}(2x-y)}{3y-x-4}dxdy = \iint_{R'} \frac{\mathrm{sen}(u)}{v}\frac{1}{5}dudv =$$

$$= \int_{v=1}^{6}\int_{u=0}^{1} \frac{sen(u)}{v}\frac{1}{5}dudv = \frac{(1-cos\,5)\,ln\,6}{5}$$

Ejercicio 12

Calcular el área de la región de R por medio de integrales.

$$R:\{(x,y)\epsilon R^2/\ \ |x|+|y|\leq 1\}$$

Resolución:

En base a la definición de la función modulo:

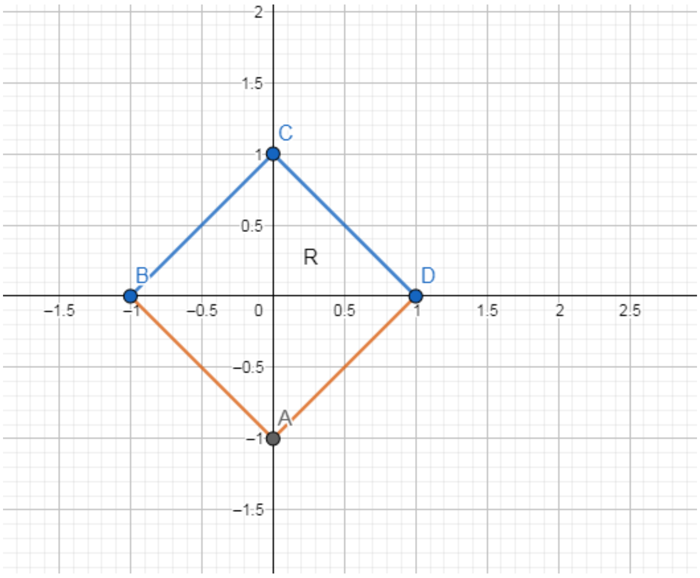
$$|a|=\begin{cases} a & si\ a\geq 0 \\ -a & si\ a<0 \end{cases}$$

Si x≥0 e y≥0➔$x+y\leq 1$

Si x≥0 e y<0➔$x-y\leq 1$

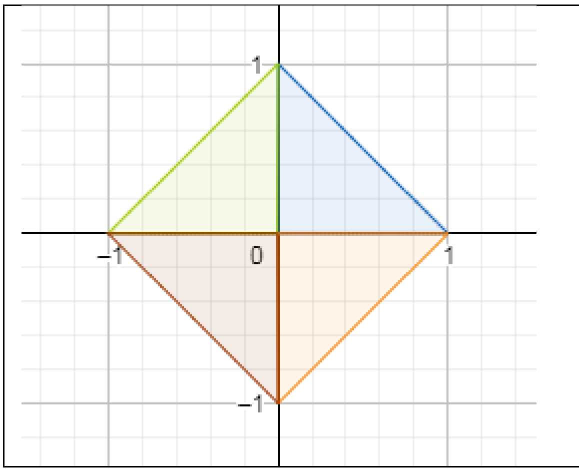
Si x<0 e y≥0➔$-x+y\leq 1$

Si x<0 e y<0➔ $-x-y\leq 1$



$A=(0,-1)$
$B=(-1,0)$
$C=(0,1)$
$D=(1,0)$

Antes de resolver, podemos anticipar el resultado:



Tenemos 4 triángulos del mismo tamaño.

$$A_R = 4A_T$$
$$A_T = \frac{bh}{2}$$
$$A_R = 4\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

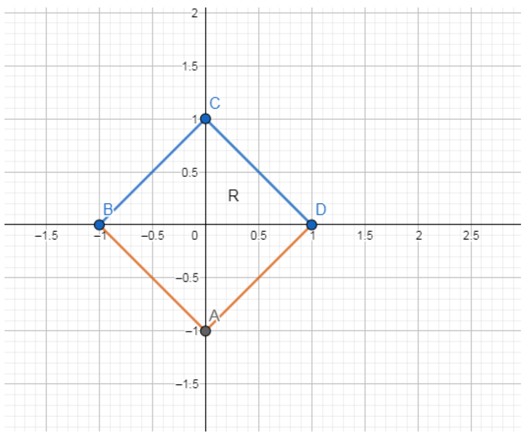
Si R es una región del plano, se proporciona su área mediante la integral

$$I = \iint_R 1dxdy$$

Según el teorema de transformaciones afines, el resultado de la integral es el mismo aplicando transformaciones lineales afines, estas se encontraran expresadas de la forma:

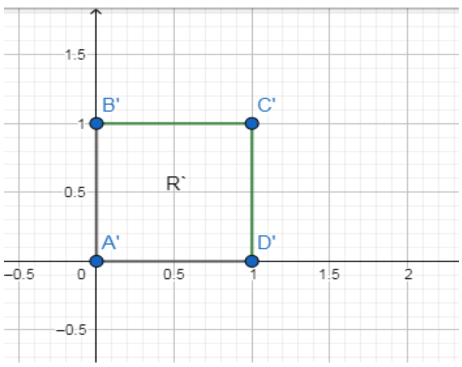
$$(x, y) = T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

Aplicada sobre un recinto derivado de R, llamado R', dependiente de (u,v) el cual tiene como objetivo proveer una integral con menos particiones.



==>

R' de ejemplo



También es posible encontrarse con su inversa la cual se debe despejar:

$$(u, v) = T^{-1}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

Sumemos el hecho de que el Jacobino de la transformación (modulo del determinante de la matriz jacobina de T) cobra un papel importante en el teorema:

$$|J| = \left||J[T(u,v)]|\right| = \left\|\begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix}\right\| = |x_u y_v - x_v y_u|$$

$$I = \iint\limits_{R} dxdy = \iint\limits_{R'} |J| dudv$$

$$I = 2$$

Aplicando Teorema de TLA, Método I (TLAI).

Buscamos similitudes en las rectas del recinto:

$$\begin{matrix} \text{Si x} \geq 0 \text{ e y} \geq 0 \rightarrow x + y \leq 1 \\ \text{Si x} < 0 \ e \ y < 0 \rightarrow -x - y \leq 1 \end{matrix} \ ==> \ \begin{matrix} x + y \leq 1 \\ x + y \geq -1 \end{matrix}$$

Utilizamos dicha similitud para armar parte de la transformación:

$$u = x + y$$

Utilizamos dicha similitud para completar de la transformación:

$$\begin{matrix} \text{Si x} \geq 0 \text{ e y} < 0 \rightarrow x - y \leq 1 \\ \text{Si x} < 0 \ e \ y \geq 0 \rightarrow -x + y \leq 1 \end{matrix} \ ==> \ \begin{matrix} x - y \leq 1 \\ x - y \geq -1 \end{matrix}$$

$$v = x - y$$

Por lo tanto, nos encontramos con su inversa:

$$(u,v) = T^{-1}(x,y) = (x + y, x - y)$$

Usando sumas y restas:

$$\begin{matrix} u + v = 2x \\ u - v = 2y \end{matrix} ==> \begin{matrix} x = \dfrac{u + v}{2} \\ y = \dfrac{u - v}{2} \end{matrix}$$

$$(x,y) = T(u,v) = \left(\frac{u + v}{2}, \frac{u - v}{2}\right)$$

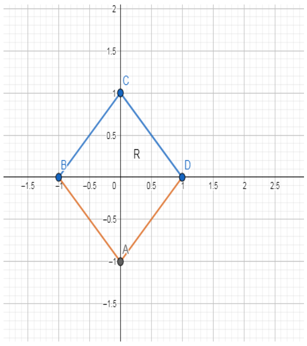
Hallando R':

$$A = (0,-1) ==> A' = T^{-1}(0,-1) = (-1,1)$$

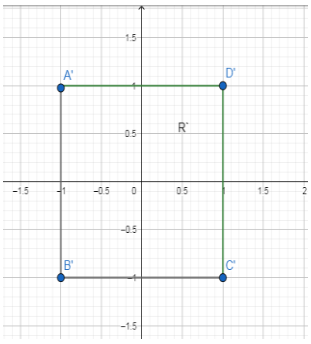
$$B = (-1{,}0) ==> B' = T^{-1}(-1{,}0) = (-1,-1)$$

$$C = (0{,}1) ==> C' = T^{-1}(0{,}1) = (1,-1)$$

$$D = (1{,}0) ==> D' = T^{-1}(1{,}0) = (1{,}1)$$



==>



$$=> \; R': \begin{cases} -1 \leq u \leq 1 \\ -1 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

Hallando el Jacobino:

Dado:

$$(x, y) = T(u, v) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$$

Entonces:

$$|J| = \left\| \begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix} \right\| = |(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) - (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})|$$

$$|J| = \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$$

Armado de la integral:

$$I = \iint_R dxdy = \iint_{R'} |J| \, dudv$$

$$I = \int_{v=-1}^{v=1} \int_{u=-1}^{u=1} \left(\frac{1}{2}\right) du\, dv$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{v=-1}^{v=1} [u]_{u=-1}^{u=1} \, dv$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{v=-1}^{v=1} 1 - (-1) \, dv$$

$$I = \int_{v=-1}^{v=1} 1\, dv$$

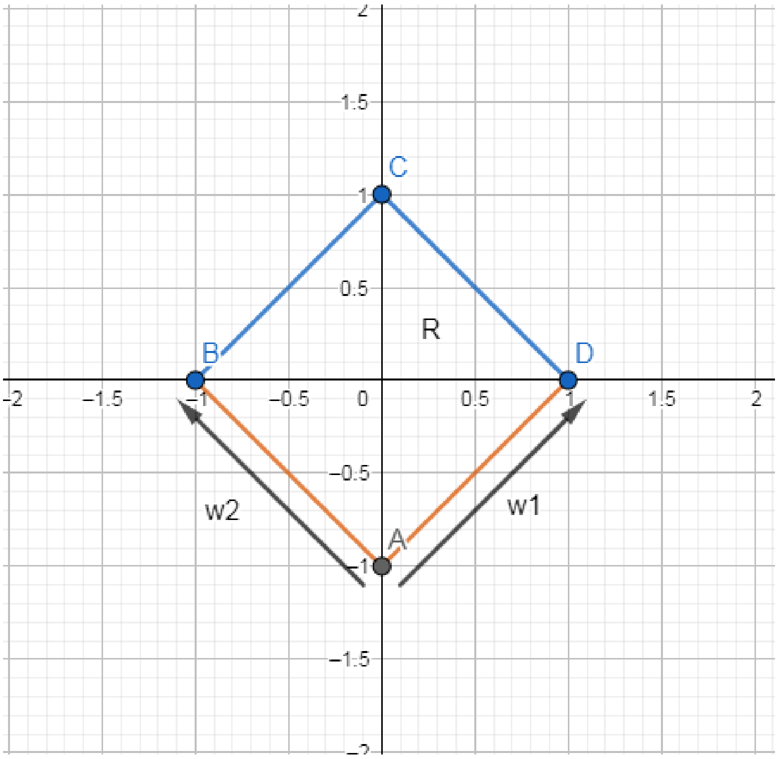
$$I = [v]_{v=-1}^{v=1}$$

$$I = 1 - (-1)$$

$$I = 2$$

Aplicando Teorema de TLA, Método II (TLAII).

Buscamos dos direcciones que acompañen las rectas del grafico de R:



Estos vectores son la diferencia entre los puntos extremo e inicial:

$$\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{D - A} = (1,1)$$

$$\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{B - A} = (-1,1)$$

Entonces los podemos asociar a parametros u y v de manera parametrica, con origen en A:

$$(x, y) = T(u, v) = A + u\overrightarrow{w_1} + v\overrightarrow{w_2}$$

$$(x, y) = T(u, v) = (0, -1) + u(1,1) + v(-1,1)$$

$$(x, y) = T(u, v) = (u - v, -1 + u + v)$$

Usando sumas y restas:

$$\begin{matrix} x + y = -1 + 2u \\ x - y = -2v + 1 \end{matrix} \implies \begin{matrix} u = \dfrac{x + y + 1}{2} \\ y = \dfrac{-x + y + 1}{2} \end{matrix}$$

$$(u, v) = T^{-1}(x, y) = (\frac{x + y + 1}{2}, \frac{-x + y + 1}{2})$$

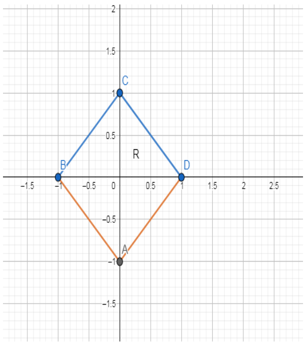
Hallando R':

$$A = (0,-1) ==> A' = T^{-1}(0,-1) = (0,0)$$

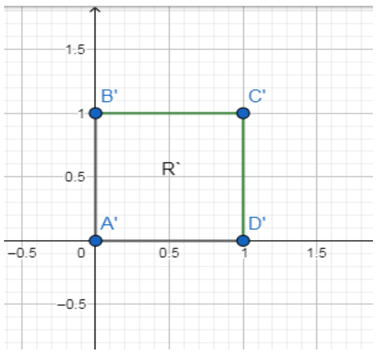
$$B = (-1,0) ==> B' = T^{-1}(-1,0) = (0,1)$$

$$C = (0,1) ==> C' = T^{-1}(0,1) = (1,1)$$

$$D = (1,0) ==> D' = T^{-1}(1,0) = (1,0)$$



==>



$$=> R': \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

Hallando el Jacobino:

Dado:

$$(x, y) = T(u, v) = (u - v, -1 + u + v)$$

Entonces:

$$|J| = \left\| \begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\| = |(1)(-1) - (1)(1)|$$

$$|J| = |-1 - 1| = |-2| = 2$$

Armado de la integral:

$$I = \iint_R dxdy = \iint_{R'} |J| \, dudv$$

$$I = \int_{v=0}^{v=1} \int_{u=0}^{u=1} (2) du \, dv = 2 \int_{v=0}^{v=1} dv \int_{u=0}^{u=1} du$$

$$I = 2(1)(1)$$

$$I = 2$$