ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA I

MODULO 1

EXPRESIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES
MATRIZ INVERSA Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Si tenemos un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas podemos representarlo como A.X= B con A€R^{nxn}, X y B €R^{nx1}.

Si A es inversible resulta que $A^{-1}.(A.X) = A^{-1}.B$ premultiplicando por la inversa de A

→ $(A^{-1}.A).X = A^{-1}.B$ por asociatividad del producto de matrices

→ $(I^{nxn}).X = A^{-1}.B$ por definición de inversa de una matriz

→ $X = A^{-1}.B$ por elemento neutro del producto matricial

La expresión obtenida nos permite hallar X. $\boxed{X = A^{-1}.B}$

Si lo dicho anteriormente te resulta nuevo, relee páginas 4 y 5 del archivo "MÓDULO 1 - SEL-SEGUNDA CLASE" que lo encuentras en la carpeta de la CLASE 2

Ejemplo:

Sea el sistema $\begin{cases} 2x-3y-5z=0 \\ x-y-2z=0 \\ -x+3y+5z=1 \end{cases}$.

a) Resolverlo por Gauss (tarea para el lector).

b) El sistema puede expresarse como $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

La matriz A de coeficientes del sistema es cuadrada y vale $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; su inversa (la obtuvimos en la tercera clase) es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Por ende $X = A^{-1}.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ → x= 1; y= –1; z= 1 (compararlo con el resultado obtenido en a)

Una cuestión puede haber surgido:

¿Qué tan conveniente es obtener a *X* de este modo, donde hallar la inversa resultó ser más largo que resolver el sistema de ecuaciones?

La **ventaja** puede radicar en la necesidad de hallar la solución para varios sistemas con *igual matriz A* y diferentes B (B, B', B'', …); cada solución (X, X', X'', …) se obtiene efectuando el producto de A^{-1} por la matriz de términos independientes correspondiente.

Así para el ***nuevo*** sistema $\begin{cases} 2x-3y-5z=-3 \\ x-y-2z=2 \\ -x+3y+5z=-4 \end{cases}$ la solución es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 23 \\ -16 \end{pmatrix}$

→ x= –7; y= 23; z= –16.

ECUACIONES CON MATRICES

Una ecuación que contiene matrices y su incógnita es una matriz se llama ecuación matricial.
Ya hemos resuelto algunas, por ejemplo, recientemente

A.X= B   que al aplicar la inversa de A, que debe existir para que la ecuación tenga solución , resulta

$X = A^{-1}.B$

Para resolver una ecuación matricial, se deben aplicar las operaciones y propiedades de las matrices, vistas fundamentalmente en la clase 1.

Veamos algunos ejemplos:

1) Calcular la matriz $X \in R^{2x3}$, si existe, que cumpla que $(4.X+B)^t = C$ Siendo

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Procederemos primero a despejar X , aplicando las operaciones y propiedades:
Como cualquier ecuación, se debe respetar la jerarquía de las operaciones, buscando siempre cual es la última operación u operador que se aplica.

En $(4.X+B)^t = C$ el último operador es la trasposición, para poder eliminarla del primer miembro, aplicamos la traspuesta miembro a miembro

$\left[(4.X+B)^t\right]^t = C^t$ la traspuesta de la traspuesta es la misma matriz

$4.X+B=C^t$	ahora para eliminar *B* del primer miembro, sumamos a ambos miembros la matriz opuesta de *B (-B)* , sabemos que para cualquier matriz existe su opuesta
$(4.X+B)+(-B)=C^t+(-B)$	aplicamos asociativa de la suma de matrices y la definición de resta de matrices
$4.X+\left(B+(-B)\right)=C^t-B$	la suma de una matriz y su opuesta es la matriz nula N
$4.X+N=C^t-B$	La matriz nula es la neutro en la suma de matrices
$4.X=C^t-B$	Por último, para despejar la X debemos eliminar el escalar que la está multiplicando. Para ello multiplicamos, miembro a miembro, por su inverso multiplicativo. Y sabemos que el inverso multiplicativo de 4 es el $\frac{1}{4}$.
$\frac{1}{4}.(\ 4.X)=\frac{1}{4}\left(C^t-B\right)$	aplicamos asociatividad mixta
$\left(\frac{1}{4}.4\right)X=\frac{1}{4}\left(C^t-B\right)$	el producto de un número por su recíproco es 1
$1.X=\frac{1}{4}\left(C^t-B\right)$	por la propiedad de elemento unidad, resulta
$X=\frac{1}{4}\left(C^t-B\right)$	

Nota que en este ejemplo hemos especificado cada paso con la propiedad usada.

Ahora que logramos X, vamos a hacer las cuentas con las matrices $X=\frac{1}{4}\left(C^t-B\right)$

Primero la traspuesta de C $\quad C^t=\begin{bmatrix}-2 & 4 & -1\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}$

$C^t-B=\begin{bmatrix}-2 & 4 & -1\\ -3 & 1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 3 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 0\end{bmatrix}$ y por último multiplicamos por $\frac{1}{4}$

$$X=\frac{1}{4}\left(C^t-B\right)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-4 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ -\frac{1}{2} & 0 & 0\end{bmatrix}$$

La solución entonces es : $X=\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Como cualquier ecuación, es posible verificarla

$(4.X+B)^t=C$ $$\left(4.\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^t=\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^t=\begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}=\mathrm{C}$$

La matriz X hallada cumple la ecuación , es la solución pedida

Otro ejemplo:

Hallar la matriz X / $X.A+C=X.B$ siendo

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Analicemos primero el tamaño que debe tener *X*:

La matriz X está multiplicando a A y el producto sumado a C , como C es de 2x3, para poder sumarlas, X.A también debe ser de 2x3

$$\underset{mxn}{X} \times \underset{3x3}{A} = \underbrace{X.A}_{2x3}$$

A es de 3x3 resulta entonces que *X* debe tener 2 filas, igual que la cantidad de filas de *C*, y debe tener 3 columnas igual que la cantidad de filas de A (para que se puedan multiplicar)

La matriz buscada X debe ser de 2x3

$$\underset{2x3}{X} \times \underset{3x3}{A} = \underbrace{X.A}_{2x3}$$

Procedamos a resolver la ecuación:

$X.A+C=X.B$

Necesitamos que las dos apariciones de la incógnita estén en el mismo miembro, sumamos los opuestos. Y usamos propiedad asociativa de la suma

$X.A+C+(-C)+(-X.B)=X.B+(-X.B)+(-C)$

$X.A+N+(-X.B)=N+(-C)$

la suma de una matriz y su opuesta es la matriz nula, conmutando y sabiendo que la matriz nula es elemento neutro en la suma, resulta:

$X.A+(-X.B)=-C$

$X.\left(A+(-B)\right)=-C$

Aplicamos distributividad del producto de matrices con respecto a la suma. Como si sacáramos la matriz X de factor común

$X.(A-B)=-C$

Si la matriz A-B es inversible, multiplicamos a derecha por su inversa

$X.(A-B).(A-B)^{-1}=-C.(A-B)^{-1}$

asociando, usando la matriz Identidad, resulta:

$X.I_3=-C.(A-B)^{-1}$

I_3 es el neutro para el producto de matrices

$\rightarrow \quad X=-C.(A-B)^{-1}$ siempre que $\exists \ (A-B)^{-1}$

Realicemos las cuentas: $A-B=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&2\\5&-3&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&2&0\\1&3&2\\5&-3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Buscamos la inversa de A-B

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}-1&0&1&1&0&0\\0&-1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{c}f_1\\f_2\\f_3\end{array}$$ el único cero que falta es en el elemento 1,3

$$\rightarrow \quad f_1-f_3\left(\begin{array}{ccc:ccc}-1&0&0&1&0&-1\\0&-1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$ $\rightarrow$Multiplicamos las dos primeras filas por -1 y resulta:

$$\begin{array}{c}-f_1\\-f_2\\ \\\end{array}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-1&0&1\\0&1&0&0&-1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$ entonces $(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Observa que la matriz A-B es igual a su inversa.

Ahora premultiplicamos por – C (la opuesta de C)

$$X=-C(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}2&-4&1\\3&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix}-2&4&3\\-3&1&3\end{pmatrix}$$

Verifica que la matriz X obtenida, cumple la ecuación y es la solución pedida.

DETERMINANTES

No obstante ser el concepto de determinantes uno de los primeros en surgir en el Algebra Lineal lo abordaremos instrumentalmente pues su uso se relaciona con la *inversa de una matriz, la solución única de un sistema de ecuaciones lineales de nxn, la independencia y dependencia lineal de vectores* y a la *obtención de autovalores* (tema que queda más allá de nuestro curso, Y abordarán en Álgebra II).

El determinante se define para **matrices cuadradas de orden n y n** y su resultado es un número que, en nuestro caso es un número real pues sólo trabajaremos con matrices de coeficientes reales. El determinante es una función que tiene como conjunto Dominio al conjunto de las matrices cuadradas y como conjunto de llegada, al conjunto de los números reales.

Si la matriz es de orden 1x1: su determinante coincide con su único elemento

$$A=\left(a_{11}\right)\rightarrow \det(A)=\left|a_{11}\right|=a_{11}$$

Es conocida la expresión para matrices 2x2; si A es la matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ su determinante se define como $a_{11}.a_{22} - a_{12}.\ a_{21}$:

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}.\ a_{22}-a_{21}.\ a_{12}$$

Deténgase un instante sobre la notación: o antecedemos **"det"** a la matriz o le colocamos unas barras –tipo valor absoluto- a la matriz en vez del corchete –o paréntesis usual. Es decir $\left[A\right]$es una matriz y $\left|A\right|$ o det (A) es un escalar (un número).

Ejemplos:

a) $\det\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -7 & -4 \end{vmatrix}=(-5).(-4)-(-7).3=20+21=41$.

b) $\det\begin{bmatrix} t-2 & 2 \\ 5t & 6 \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} t-2 & 2 \\ 5t & 6 \end{vmatrix}=6.(t-2)-5t.2=6t-12-10t=-4t-12$

La obtención del valor de un determinante puede hacerse de ***tres maneras diferentes***:
Por aplicación de *propiedades*.
A través del *desarrollo de Laplace*.
Un *mix* (mezcla o combinación) de propiedades y el desarrollo de Laplace según nos sea más conveniente.

PROPIEDADES del DETERMINANTE

Como hemos dicho, el determinante de una matriz cuadrada real es una operación que involucra a todos los elementos de la matriz y que da por resultado un número real.
Si A es una matriz que pertenece a R^{nxn}, definimos como determinante de orden n a una aplicación D: $R^{nxn} \rightarrow R$, que cumple con *ciertas propiedades*. Obviamente puede haber muchas aplicaciones que operando sobre una matriz cuadrada den por resultado un escalar.
Pero además el determinante cumple con las siguientes propiedades que están expresadas sobre las filas, pero se mantienen si las definimos sobre las columnas.

1) Si una matriz tiene una fila de ceros el determinante es nulo, $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & a_{1,N} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ a_{N,1} & a_{N,2} & . & . & a_{N,N} \end{vmatrix} = 0$

2) Si una matriz tiene una fila de la cual se puede extraer un número que es factor común de todos los elementos de la fila, el determinante de dicha matriz es igual al producto de dicho factor común por el determinante de la matriz en la cual la fila anterior está simplificada extrayéndole dicho factor común. En el caso que nos ocupa el factor común α que está multiplicando a toda la fila i sale del determinante como un escalar que lo multiplica.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & a_{1,N} \\ . & . & . & . & . \\ \alpha.a_{i,1} & \alpha.a_{i,2} & . & . & \alpha.a_{i,N} \\ . & . & . & . & . \\ a_{N,1} & a_{N,2} & . & . & a_{N,N} \end{vmatrix} = \alpha. \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & a_{1,N} \\ . & . & . & . & . \\ a_{i,1} & a_{i,2} & . & . & a_{i,N} \\ . & . & . & . & . \\ a_{N,1} & a_{N,2} & . & . & a_{N,N} \end{vmatrix}$$

Lógicamente esto puede ocurrir con todas las filas que pueden tener factores comunes diferentes. Luego se extraen todos, se simplifican las filas y el determinante es el producto de todos los factores por el determinante de la matriz simplificada.

Ejemplo:

det (A)= $\begin{vmatrix} -20 & 2 & -6 \\ -25\sqrt{2} & 10\sqrt{2} & 15\sqrt{2} \\ -30 & -8 & -9 \end{vmatrix} = \sqrt{2}. \begin{vmatrix} -20 & 2 & -6 \\ -25 & 10 & 15 \\ -30 & -8 & -9 \end{vmatrix}$ ya que……………………………………..

det $(A) = -5.\sqrt{2}. \begin{vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & -8 & -9 \end{vmatrix}$ ya que ……………………………………………………………..

det $(A) = -5.\sqrt{2}.5. \begin{vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & -8 & -9 \end{vmatrix} = -25.\sqrt{2}. \begin{vmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & -8 & -9 \end{vmatrix}$ pues ………………………………………..

$$\det(A) = -25.\sqrt{2}.2.\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & -8 & -9 \end{vmatrix} = -50.\sqrt{2}.\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & -8 & -9 \end{vmatrix} \text{ debido a que ....}$$

$$\det(A) = -50.\sqrt{2}.3.\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & -8 & -3 \end{vmatrix} = -150.\sqrt{2}.\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & -8 & -3 \end{vmatrix} \text{ pues ....}$$

3) Observar que si todas las filas de la matriz tienen el mismo factor común, entonces el determinante es igual a ese factor común multiplicado n veces por sí mismo (o sea elevado a la n) por el determinante de la matriz simplificada. O sea $\det(k.A) = k^n.\det A$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ entonces $3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -3 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

Esta propiedad nos dice que : $\det(3.A) = 3^3.\det A$ El 3 del exponente se debe a que la matriz es de 3x3, tiene 3 filas y 3 columnas

4) Si en una fila de una matriz, sus elementos pueden ser expresados como suma de otros dos números, el determinante de la matriz resulta igual a la suma de los determinantes de dos matrices. En ambas todas las filas son iguales, salvo aquella cuyos elementos pueden expresarse como suma de otros dos números. En la primera matriz se escribe uno de los conjuntos de números que forman esa fila especial y en la segunda se escribe el otro conjunto.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & a_{1,N} \\ . & . & . & . & . \\ a_{i,1}+b_{i,1} & a_{i,2}+b_{i,2} & . & . & a_{i,N}+b_{i,N} \\ . & . & . & . & . \\ a_{N,1} & a_{N,2} & . & . & a_{N,N} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & a_{1,N} \\ . & . & . & . & . \\ a_{i,1} & a_{i,2} & . & . & a_{i,N} \\ . & . & . & . & . \\ a_{N,1} & a_{N,2} & . & . & a_{N,N} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & . & . & a_{1,N} \\ . & . & . & . & . \\ b_{i,1} & b_{i,2} & . & . & b_{i,N} \\ . & . & . & . & . \\ a_{N,1} & a_{N,2} & . & . & a_{N,N} \end{vmatrix}$$

En lo señalado más arriba, en la fila i puede considerarse que cada elemento puede expresarse como la suma de otros dos. De ser eso así, es posible separar el determinante en dos, uno conteniendo la fila i de todos los elementos $a_{i,j};\, j = 1,...,N$ y el otro conteniendo la fila i de todos los elementos $b_{i,j};\, j = 1,...,N$.

Aplicarlo para obtener $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3-\pi & -1+2\pi & 2+\pi \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$

5) Si una matriz B se obtiene a partir de una matriz A intercambiando dos de sus filas, se tiene $|B| = -|A|$, o sea los determinantes son números opuestos.

Veámoslo en matrices de 2x2

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \text{ se cumple que } \begin{array}{l} |A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=a.d-b.c \\ |B|=\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}=c.b-d.a=b.c-a.d=-(ad-bc) \end{array}$$

Las dos matrices tienen determinantes opuestos

6) Si una matriz tiene dos filas iguales su determinante es cero.

Supongamos que tenemos la siguiente matriz

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \text{ y hallamos su determinante } |\mathrm{A}|$$

Ahora permutamos sus filas 1 y 2 y la llamamos B (aunque es similar a A)

$$B=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \text{ y hallamos su determinante } |\mathrm{B}|$$

Por la propiedad anterior , hemos permutado dos filas por lo tanto

$|\mathrm{B}|=-|\mathrm{A}| \rightarrow |\mathrm{B}|+|\mathrm{A}|=0$

pero la matriz B=A (solamente la llamamos diferente para indicar que habíamos permutado las filas)

$|\mathrm{A}|+|\mathrm{A}|=2|\mathrm{A}|=0 \rightarrow |\mathrm{A}|=0$ que es lo que se quería demostrar

7) El determinante de una matriz triangular superior, inferior o diagonal es el producto de los elementos de la diagonal principal.

Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{pmatrix};\det(A)=a.e.h.j$$

8) $|\mathrm{A}|=|\mathrm{A}^t|$ **; el determinante de la transpuesta de A es igual al determinante de A.**

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=a.d-b.c$$

$$|A^t|=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=a.d-c.b$$

9) Si B se obtiene a partir de A sumándole a una fila de A un múltiplo de otra fila de A el determinante no cambia.

Sea

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ y B} = \begin{pmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & \dots & a_{1n}+ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La matriz B se obtiene a partir de la matriz A sumándole a la primera fila de A su segunda fila multiplicada por un escalar k. Con $k \in$ a R

Si queremos hallar el det(B) y tenemos en cuanta las propiedades 4), 2) y 6) (en ese orden) resulta:

$$|\mathrm{B}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & \dots & a_{1n}+ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + k.0 =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A|$$

El determinante de la matriz que está multiplicada por k es 0 porque tiene dos filas iguales.
Por lo tanto det(B) = det(A) + 0 = det(A)

10) $|\mathrm{A.B}| = |\mathrm{A}||\mathrm{B}|$**; el determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes individuales.**

Esta propiedad es solamente enunciada pero una demostración de la misma (basada en el uso de matrices elementales) puede ser analizada en el libro "Álgebra Lineal, una introducción moderna de D. Poole".

11) Si una matriz tiene filas o columnas proporcionales, su determinante es 0

Calcularemos $|P| = \begin{vmatrix} 3a & b & -a \\ 3d & e & -d \\ 3g & h & -g \end{vmatrix}$, la columna 1 y 3 son proporcionales $C_1 = -3C_3$

$$|P| = -3\begin{vmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ g & h & g \end{vmatrix}$$ por aplicación de la propiedad de extraer un factor en la columna 1 y 3.

Pero ahora resulta que tiene dos columnas iguales, entonces su determinante es 0

$|P| = -3.0 = 0$

12) Determinante de la matriz inversa.

Usando las propiedades vamos a probar que si una matriz A tiene inversa –y por ende su determinante es distinto de cero– vale la fórmula:

$$\boxed{|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}}$$

Si A tiene inversa, entonces cumple $A.A^{-1} = I \rightarrow |A.A^{-1}| = |I_n|$

Por la propiedad del determinante de un producto de matrices: $|A.A^{-1}| = |A| . |A^{-1}|$

El determinante de la identidad $|I_n|$ es uno pues se trata de una matriz diagonal con todos unos.

Luego $|A| . |A^{-1}| = 1$, lo cual nos indica que el determinante de una matriz y el de su inversa son inversos multiplicativos (ninguno de esos determinantes puede ser nulo).

Por lo tanto $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

Esta fórmula deducida, nos permite afirmar que una matriz es inversible, si su deteminante es distinto de 0.

UNA "NO" PROPIEDAD

El determinante de la suma de matrices no es necesariamente igual a la suma de los determinantes.

Si A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ su determinante vale 1 , Si B=$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ su determinante vale 1

Ahora A+B=$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y su determinante vale cero

Luego $|A| + |B| \neq |A + B|$

Algunas de las propiedades de esta lista son redundantes porque pueden ser demostradas a partir de otras de la misma lista, pero lo que hemos tratado de hacer es resumir todas las propiedades que cumplen los determinantes que hacen además que la definición de los mismos sea única.

Ejemplo:

Veamos cómo podemos usufructuar de las propiedades para obtener el determinante de una matriz.

Hallaremos el $\det(T) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Si hacemos $f_1.(-3) + f_2 \rightarrow f_2$ y $f_1 + f_3 \rightarrow f_3$, resulta que el determinante no cambia

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Si intercambiamos f_4 y f_2 para obtener un 1 en la posición t_{22} cambia el determinante, es el opuesto:

$\det(T) = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ y efectuando $f_2.(-3) + f_3 \rightarrow f_2$ y $f_2.6 + f_4 \rightarrow f_4$

$\det(T) = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 11 & 13 \end{vmatrix}$; si realizamos $f_3.\dfrac{11}{4} + f_4 \rightarrow f_4$ resulta

$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{4} \end{vmatrix} = -1.1.(-4).\dfrac{19}{4} = 19$ pues hemos obtenido una matriz triangular superior.

Resolver los ejercicios 34, 35, 38, 39, 40, 44 y 47 del archivo llamado "MÓDULO 1, GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS Y APLICACIONES"

Videos de la cátedra:

De ejercicio de inversa y propiedades del determinante:

https://www.youtube.com/watch?v=bAmP0mMXyfA