T P 04 Ej. 1-a

DIFERENCIABILIDAD

Una curva parametrizada en R^2, R^3resulta ser la imagen de una función vectorial continua $\mathbb{C}$: $\vec{r}(t)$ definida para los puntos $t \, \mathcal{E} \, [a\, ,b] \complement \, R$. La variable independiente t se denomina parámetro de la curva, y la ecuación vectorial definida por $\vec{r}(t)$ se denomina parametrización de la curva.

$$Sí\,\vec{r}(t){:}\,R^2 \rightarrow R, la\ curva\ definida\ por\ esta, es\ plana. Sí\,\vec{r}(t){:}\,R^3 \rightarrow R, la\ curva\ definida\ es\ espacial\ o\ alaveada.$$

Sabiendo que:

$$\check{\imath} = (1\,,0\,,0\,) \quad ; \quad \check{\jmath} = (0\,,1\,,0) \quad ; \quad \check{k} = (0\,,0\,,1)$$

Representan los vectores unitarios (versores) de una terna de ejes X , Y , Z, podemos definir a una curva $\mathbb{C}$ de la siguiente manera:

$$C{:}\,\vec{r}(t) = x(t).\check{\imath} + y(t).\check{\jmath} + z(t).\check{k} \qquad ó\ bienC{:}\,\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$$

La ausencia de alguna de estas componentes de la terna, transformaría a la misma en un par. Esto nos indicaría que la curva se corresponde con una trayectoria plana.

Por otra parte sabemos que:

a. La derivada primera de la función trayectoria representa el vector velocidad de la misma. Evaluando al mismo para algún valor de $t\, \mathcal{E}\, [a\,,b]\ con\ a\ y\ b\ \mathcal{E}\, R$, obtenemos la velocidad instantánea, cuyo vector representativo es tangente a la curva $\mathbb{C}$ en el punto "t" analizado.
b. La derivada segunda de la función trayectoria representa al vector aceleración de la misma. Evaluado en el punto "t" de análisis, la aceleración instantánea.

Finalmente, la ecuación vectorial de la recta tangente a una curva $C{:}\,\vec{r}(t)\ con\ t_0 \mathcal{E}\, [a\,,b]$ viene dada por:

$$\underline{L}_{tg}{:}\,T(t) = \dot{r}(t_0).t + \vec{r}(t_0)$$

Siendo:

$$\dot{r}(t_0)\ el\ vector\ director\ de\ la\ recta\ \underline{L}.\ \vec{r}(t_0)\ un\ punto\ perteneciente\ a\ la\ misma.$$

Ejercicio

Para la siguiente trayectoria, determinar el vector velocidad, el vector aceleración y la ecuación de la recta tangente, para los valores de “t” indicados

$$\vec{r}(t) = 6i\ + 2t^2 j\ + 4t^3 k \qquad en\ t_0 = 0$$

Otra forma de escribir esta parametrización es la siguiente:

$$C: \vec{r}(t) = \big(x(t)\,, y(t)\,, z(t)\big) = (6\ , 2t^2\,, 4t^3)$$

Como sabemos, el vector velocidad es la derivada primera del vector trayectoria con respecto al parámetro “t”

$$\vec{V}(t) = \dot{r}(t) = \big(x(\dot{t})\,, y(\dot{t})\,, z(\dot{t})\big) = (0\,, 4t\,, 12t^2)$$

La velocidad instantánea en t_0=0 será:

$$\vec{V}(0) = \dot{r}(0) = \big(\dot{x}(0)\,, \dot{y}(0)\,, \dot{z}(0)\big) = (0\,, 0\,, 0)$$

Por otra parte, el vector aceleración surge de derivar el vector velocidad con respecto a “t”, o bien lo que es lo mismo, derivar dos veces el vector trayectoria:

$$\vec{a}(t) = \ddot{r}(t) = \big(\ddot{x}(t)\,, \ddot{y}(t)\,, \ddot{z}(t)\big) = (0\,, 4\,, 24t)$$

$$\vec{a}(0) = (0\,, 4\,, 0)$$

<u>Ecuación de la Recta Tangente:</u>

$$\underline{L}_{tg}: T(t) = \dot{r}(t_0).t\ + \overrightarrow{r}(t_0)$$

$$\dot{r}(0) = (0\,, 0\,, 0)$$

$$\vec{r}(0) = (6\,, 0\,, 0)$$

Finalmente, como se observa, la curva definida por la parametrización r(t) no posee recta tangente en t_0=0, puesto que su velocidad allí es nula.