# Matemática Discreta

CLASE N°7

Ing.Marcela Bellani
UNLAM | FLORENCIO VARELA 1903 .B1754.SAN JUSTO.BUENOS AIRES |

En esta clase se desarrollarán los siguientes temas:

-Grafos: notación, vértices, aristas, grado, propiedades, matriz de adyacencia, matriz de incidencia, grafo completo, grafo conexo, grafo bipartito.
Dígrafo: matriz de adyacencia, matriz de incidencia.

- Subgrafo; subdígrafo. Istmo; puente; conjunto desconectante; conjunto de conectividad.

Para todas las clases contamos con la ayuda del sitio de la cátedra [http://discretaunlam.net.ar](http://discretaunlam.net.ar) donde encontrarás videos, ejercicios, explicaciones, autoevaluaciones de todos los temas de Matemática Discreta.

# Grafos y dígrafos

La palabra grafo se utiliza para describir cierto tipo de estructuras que surgen de diversos planteamientos como ser mapas de rutas, diagramas de circuitos o de flujo. Ampliamente, son diagramas que, interpretados de forma correcta, proporcionan variada información y nos interesan por las relaciones que se dan entre sus elementos.

***Ejemplos:***

Resultados posibles del experimento de tirar una moneda al aire

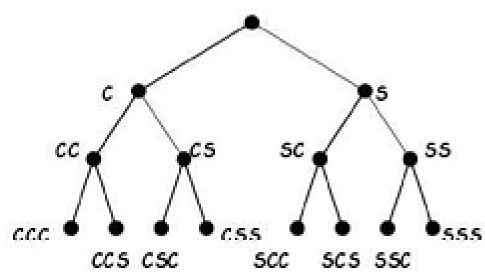
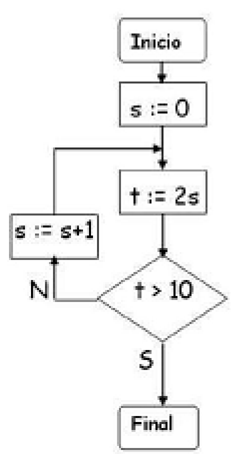
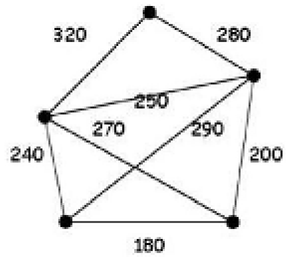



Diagrama de flujo




Mapa de rutas con indicación de distancias




¿Qué tienen en común estos diagramas? Todos están formados por objetos (puntos, rectángulos, círculos, etc.) unidos por líneas y/o flechas que indican una determinada relación entre ellos.

## Definición formal de GRAFO y DÍGRAFO:

Un GRAFO se representa formalmente por medio de una terna

$G = (V, A, \varphi)$ con $V \neq \emptyset$,

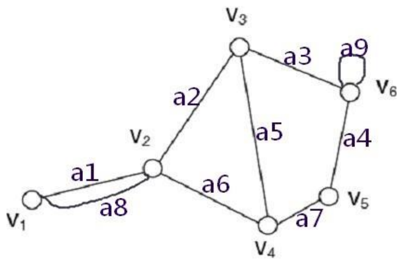
siendo:

**V** = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$: conjunto finito de vértices o nodos.
**A** = $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$: conjunto finito de aristas o lados, y
$\varphi$: Función de incidencia, $A \rightarrow V^*$, siendo $V^* = \{H \subseteq V / |H| = 1 \text{ ó } |H| = 2\}$. Es decir, es una función que asigna a cada arista un *par no ordenado* de vértices, que pertenecen a H, que es un subconjunto de V, formado por 1 elemento como mínimo y 2 como máximo. Son los extremos de la arista.

**Notación**: Si $\varphi(a) = \{u, v\}$ se dice que:

- u y v son los extremos de la arista *a*
- u y v son vértices adyacentes
- la arista a es incidente en los vértices u y v

***Ejemplo 1***




G = (V, A, $\varphi$ ) siendo V= {$v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$, $v_5$} ;
A={$a_1$,$a_2$,$a_3$,$a_4$,$a_5$,$a_6$,$a_7$,$a_8$,$a_9$} y la función de incidencia $\varphi$:

$\varphi(a1) = \{v_1, v_2\}$ $\varphi(a5) = \{v_3, v_4\}$ $\varphi(a9) = \{v_6\}$

$\varphi(a2) = \{v_2, v_3\}$ $\varphi(a6) = \{v_2, v_4\}$ $\varphi(a4) = \{v_6, v_5\}$

$\varphi(a3) = \{v_3, v_6\}$ $\varphi(a7) = \{v_5, v_4\}$ $\varphi(a8) = \{v_1, v_2\}$

Un DÍGRAFO se representa formalmente por medio de una terna:

DG= (V, A, $\delta$ ) con V$\neq\varnothing$,

siendo:

**V** = {$v_1$, $v_2$,…, $v_n$}: conjunto finito de vértices o nodos.

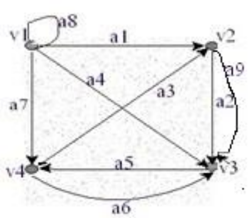
**A** = {$a_1$, $a_2$,…, $a_n$}: conjunto finito de aristas o arcos, y

$\delta$ : Función de incidencia dirigida, $A \to V \times V$ . Es decir, es una función que asigna a cada arco un par *ordenado* de vértices. El arco *a* sale de un vértice y entra en el otro.

**Notación**: Si $\delta(a) = (v, w)$ se dice que:

- v es extremo inicial de la arista a y w es el extremo final de *a*
- w y v son vértices adyacentes
- la arista a incide positivamente en w y negativamente en v.

***<u>Ejemplo 2</u>***:
DG = (V, A, $\delta$ ) siendo V= {$v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_4$} ;
A={$a_1$,$a_2$,$a_3$,$a_4$,$a_5$,$a_6$,$a_7$,$a_8$,$a_9$} y la función de incidencia $\delta$ :




$\delta(a1) = (v1, v2)$ $\delta(a4) = (v1, v3)$ $\delta(a7) = (v1, v4)$

$\delta(a2) = (v2, v3)$ $\delta(a5) = (v3, v4)$ $\delta(a8) = (v1, v1)$

$\delta(a3) = (v4, v2)$ $\delta(a6) = (v4, v3)$ $\delta(a9) = (v2, v3)$

## Definiciones relativas a grafos (y dígrafos)

- Una arista es un lazo (o bucle) si:

  $|\varphi(a)| = 1, \quad \varphi(a) = (v)$, es decir que tiene un único extremo de incidencia (G-grafo)

  $\delta(a) = (v, v)$, es decir el vértice inicial y el vértice final es el mismo (DG-dígrafo)

- Dos aristas son paralelas cuando poseen los mismos extremos en el G o coincide el extremo inicial y el extremo final en el DG. Es decir un G o un DG posee aristas paralelas si y sólo si $\varphi$ y $\delta$ no son inyectivas. Por lo tanto, dado $\boldsymbol{a}_1 \in A$ y $\boldsymbol{a}_2 \in A$, $\boldsymbol{a}_1$ y $\boldsymbol{a}_2$ son aristas paralelas si y sólo si $\varphi(\boldsymbol{a}_1) = \varphi(\boldsymbol{a}_2)$ para el G y $\delta(\boldsymbol{a}_1) = \delta(\boldsymbol{a}_2)$ para el DG.
- Dos aristas son antiparalelas, en DG, si tienen los mismos extremos pero distinta dirección. Es decir, el vértice inicial de una de las aristas coincide con el vértice final de la otra arista y viceversa.
- Dos aristas no paralelas, son adyacentes si tienen un solo extremo en común.
- Un Grafo o Dígrafo se denomina simple, si no posee lazos ni aristas paralelas.
- Se denomina Multigrafo al G que puede tener aristas paralelas y no tiene bucles.

  Por lo tanto, todo grafo simple es un multigrafo pero no todo multigrafo es un grafo simple.
- Un multigrafo dirigido es un DG que puede tener aristas múltiples.
- Se denomina Pseudografo al G que puede tener aristas paralelas y bucles.
- Un G o DG es finito, si y sólo si A y V son conjuntos finitos.

## ⌧ *En el Ejemplo 1*:

a) $a_1$ y $a_8$ son aristas paralelas, pues $\varphi(a_1)=\varphi(a_8)$

b) $a_9$ es un lazo ya que $|\varphi(a_9)|=1$

c) $a_2$ y $a_3$ son aristas adyacentes , ya que $\{v_3\}=\varphi(a_2)\cap\varphi(a_3)=\{v_2,v_3\}\cap\{v_3,v_6\}$

d) Es un grafo no simple, pues tiene aristas paralelas y lazo. Es un multígrafo.

e) Es un grafo finito : $|A|=9\ y\ |V|=6$

## ⌧ *En el Ejemplo 2*:

a) $a_2$ y $a_9$ son aristas paralelas, pues $\delta(a_2)=\delta(a_9)$

b) $a_8$ es un lazo ya que $\delta(a_8)=(v1,v1)$

c) $a_5$ y $a_2$ son aristas adyacentes , ya que $\delta(a_5)=(v_3,v_4)\ y\ \delta(a_2)=(v_2,v_3)$

d) $a_1$ y $a_2$ son aristas adyacentes porque $\delta(a_1)=(v_1,v_2)\ y\ \delta(a_2)=(v_2,v_3)$

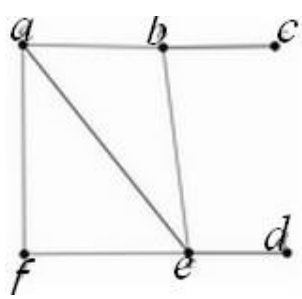
e) Es un dígrafo no simple, pues tiene aristas paralelas y lazo.

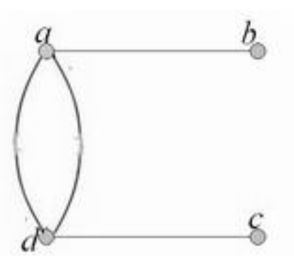
f) $a_5$ y $a_6$ son aristas antiparalelas ya que $v_3\neq v_4\ y\ \delta(a_5)=(v_3,v_4)\ y\ \delta(a_6)=(v_4,v_3)$

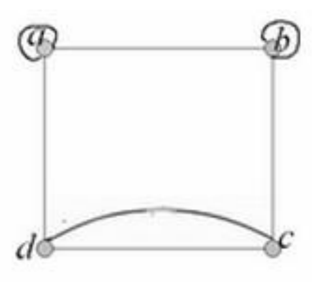
g) Es un dígrafo finito : $|A|=9\ y\ |V|=4$

## ➢ *Ejercicio resueltos*:

**1-**¿Cuáles de los siguientes grafos son simples? Para los grafos no simples, ¿cuál es el menor número de aristas que se deben quitar para hacerlos simples?




G I G II G III

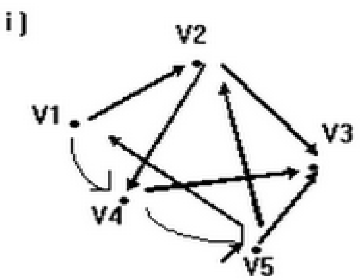
*Solución*

G I es un grafo simple porque no tiene aristas paralelas ni lazos.

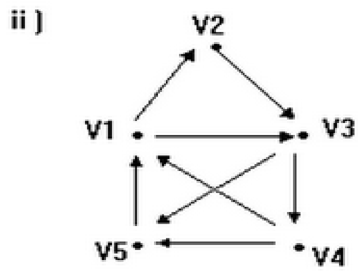
G II  no es un grafo simple ya que tiene aristas paralelas (multígrafo). Para ser un grafo simple hay que eliminar una de las aristas paralelas.

G III no es un grafo simple ya que tiene aristas paralelas y lazos (pseudografo). Para ser un grafo simple hay que eliminar una de las aristas paralelas y los lazos.

**2-** Definir el dígrafo para cada uno de los siguientes diagramas:




DG I




DG II

*Solución*

DG I = (V, A, $\delta$ ) siendo V= $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ;
A=$\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9\}$ y la función de incidencia $\delta$

| $x$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\delta(x)$ | $(v_1;v_2)$ | $(v_2;v_3)$ | $(v_5;v_3)$ | $(v_4;v_5)$ | $(v_1;v_4)$ | $(v_2;v_4)$ | $(v_4;v_3)$ | $(v_5;v_1)$ | $(v_5;v_2)$ |

*DG II = (V, A, $\delta$ ) siendo V= $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$; A= $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8\}$ y la función de incidencia $\delta$*

| $x$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\delta(x)$ | $(v_1;v_2)$ | $(v_2;v_3)$ | $(v_3;v_4)$ | $(v_4;v_5)$ | $(v_5;v_1)$ | $(v_1;v_3)$ | $(v_3;v_5)$ | $(v_4;v_1)$ |

# Representación matricial de grafos y dígrafos

Además de la forma pictórica de representar un grafo (dígrafo), existe la representación por medio de matrices. Esta es mucho más eficiente, ya que permite almacenar un gran número de vértices y aristas (arcos) en una computadora. Por lo que decimos, que cada grafo (dígrafo) tiene una matriz asociada.

Existen dos tipos de matrices: la de adyacencia y la de incidencia.

## MATRIZ DE ADYACENCIA.

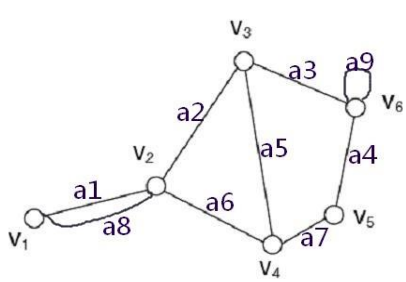
Es una matriz cuadrada, cuyas filas y columnas, representan los vértices del grafo (dígrafo) ordenados de $v_1$ a $v_n$:

$Ma(G) = p_{ij}$, de orden nxn, donde $p_{ij}$ representa el número de aristas(arcos) que van desde $v_i$ hasta $v_j$.

Si no existen aristas (arcos) desde $v_i$ hasta $v_j$., entonces $\mathbf{p_{ij}=0}$

Se denomina Matriz asociada a G (DG) o matriz de adyacencia de vértices.

**<u>Ejemplo:</u>**




En el pseudografo del Ejemplo 1, su matriz de adyacencia será:

$$Ma(G) = \begin{array}{c} v1 \\ v2 \\ v3 \\ v4 \\ v5 \\ v6 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si se trata de un grafo (dígrafo) simple, la matriz de adyacencia será una matriz booleana o de bits:

En grafos:

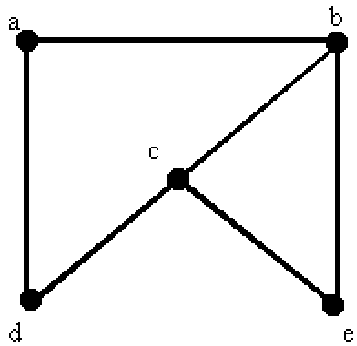
$$Ma(G)\begin{cases}1 & si\ \{v_i,v_j\}\in G\\ 0 & si\{v_i,v_j\}\notin G\end{cases}$$

En dígrafos:

$$Ma(D)\begin{cases}1 & si\ (v_i,v_j)\in D\\ 0 & si(v_i,v_j)\notin D\end{cases}$$

*Ejemplo*

En un grafo simple:




$$A=\begin{array}{c} \\ a\\ b\\ c\\ d\\ e\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}a & b & c & d & e\end{array}\\ \left|\begin{array}{ccccc}0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right|\end{array}$$

**Propiedades de la matriz de adyacencia**:

1- Existe una matriz de adyacencia única para cada grafo (dígrafo) (sin considerar las permutaciones de filas o columnas, en el caso de los grafos), y viceversa.

2- En grafos la matriz de adyacencia es simétrica, en cambio en dígrafos no necesariamente debe ser simétrica.

3- En la matriz de adyacencia de los grafos los lazos se indican con 1 en la diagonal principal de la matriz.

## MATRIZ DE INCIDENCIA

Es una matriz rectangular de n vértices por m aristas (arcos) , cuyas filas representan a los vértices ordenados de $v_1$ a $v_n$, y sus columnas a las aristas ( arcos)

Mi(G) = $p_{ij}$ , de orden nxm, donde $p_{ij}$ representa la incidencia entre vértice y arista, de la siguiente forma:

## Para grafos

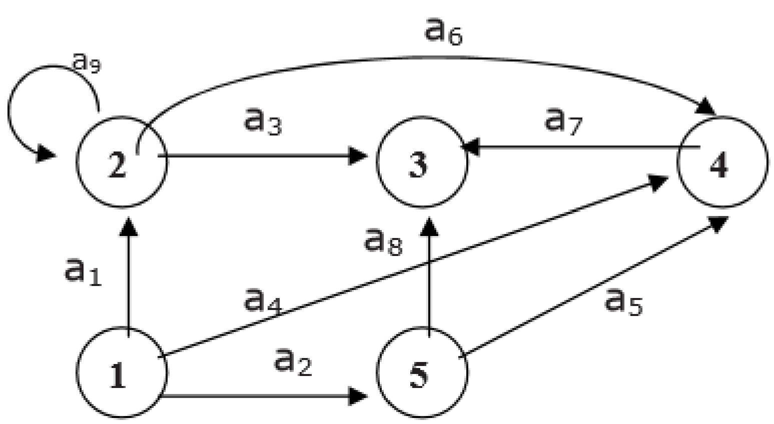
$$M_i = \begin{cases} 1 \text{ si } a_j \text{ y } v_i \text{ son incidentes} \\ 0 \text{ si } a_j \text{ y } v_i \text{ no son incidentes} \end{cases}$$

## Para dígrafos

$$M_i = \begin{cases} 1 \text{ si } v_i \text{ es vértice final de } a_j \\ -1 \text{ si } v_i \text{ es vértice inicial de } a_j \\ 0 \text{ si } a_j \text{ y } v_i \text{ no son incidentes} \end{cases}$$

*Ejemplo*

La matriz de incidencia para el siguiente dígrafo es:



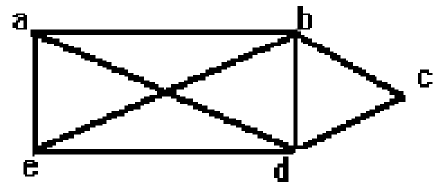

$$Mi = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

**SUGERENCIA ANTES DE AVANZAR:**

Mirá los videos "Matriz de adyacencia y Matriz de incidencia" en el sitio de la cátedra http://discretaunlam.net.ar sección Apuntes-Relaciones.

- *Ejercicios resueltos.*

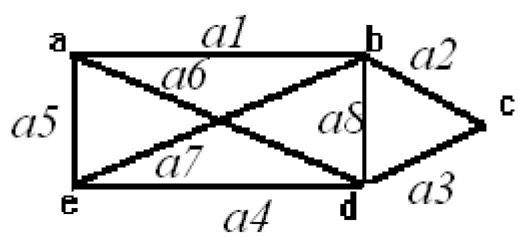
**1-** Hallar la matriz de adyacencia, la de incidencia y la función $\varphi$, de:




**Matriz de adyacencia**:

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow Ma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para hallar la función $\varphi$ y la matriz de incidencia, debemos nombrar las aristas:




| x | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi(x)$ | $\{a,b\}$ | $\{b,c\}$ | $\{c,d\}$ | $\{d,e\}$ | $\{e,a\}$ | $\{a,d\}$ | $\{e,b\}$ | $\{b,d\}$ |

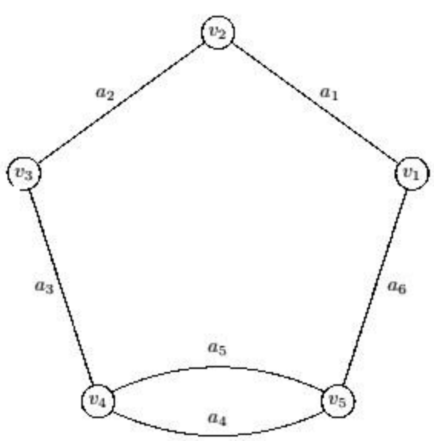
**Matriz de incidencia**:

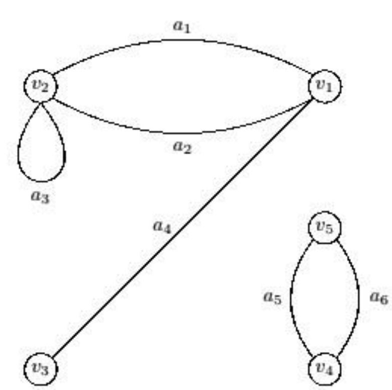
$$\begin{array}{c|cccccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ \hline a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ c & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ e & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow M_i(G) = \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\}$$

**2-** Dibujar el grafo que corresponde a cada matriz de incidencia:

$$Mi(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Mi(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$




## Grado de un vértice o valencia de un grafo G

El grado de un vértice $v_i$, g ($v_i$), es el número de aristas incidentes en él, contando doble en el caso de un lazo.

Si g (v)=0, se trata de un vértice aislado.

Si g (v)=1, se trata de un vértice colgante.

Si g (v)= k, para todo vértice del grafo, entonces es *un grafo k-regular*

## Propiedades

1) En $G = (V, A, \varphi)$

$$\sum_{i=1}^{n} g(v_i) = 2|A|$$

Es decir, que la suma de los grados de los vértices de un grafo es igual al doble de la cantidad de aristas del mismo.

2) En todo grafo, el número de vértices de grado impar es par.

⌦ ***<u>En el Ejemplo 1</u>***:

$$g(v1) = 2 \quad g(v2) = 4, \quad g(v3) = 3, \quad g(v4) = 3, \quad g(v5) = 2, \quad g(v6) = 4$$

$$\sum_{i=1}^{6} g(v_i) = 2 + 4 + 3 + 3 + 2 + 4 = 18 = 2 \bullet 9 = 2|A|$$

$$\text{Vértices de grado impar: } 2$$

## *Grado de un vértice o valencia de un dígrafo DG*

**Grado positivo de un vértice:** $g^+(v)$: es la cantidad de aristas que llegan a v.

**Grado negativo de un vértice:** $g^-(v)$: es la cantidad de aristas que salen de v.

<u>Observaciones</u>:

1) El lazo, se cuenta como arista que incide negativa y positivamente, por lo tanto se cuenta para $g^+(v)$ y para $g^-(v)$.
2) Si $g^+(v) = g^-(v) = 0$, entonces v es un vértice aislado.

**Grado total de un vértice:** $g = g^{+}(v) + g^{-}(v)$

**Grado neto de un vértice:** $g_n = g^{+}(v) - g^{-}(v)$

## *Propiedades:*

1) En $D=(V,A,\delta)$,

$$\sum_{i=1}^{m} g^{+}(v_i) = \sum_{i=1}^{m} g^{-}(v_i) = |A|$$

Es decir, que la suma de los grados positivos de los vértices es igual a la suma de los grados negativos y es igual a la cantidad de aristas del dígrafo.

2) En $D=(V,A,\delta)$ $$\sum_{i=1}^{m} g_n(v_i) = 0$$

***3)*** En $D=(V,A,\delta)$, $$\sum_{i=1}^{m} g_t(v_i) = 2|A|$$

⌦ En el Ejemplo 2:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $g^{+}(v1)=1$ | $g^{-}(v1)=4$ | $g_t(v1)=5$ | $g_n(v1)=-3$ |
| $g^{+}(v2)=2$ | $g^{-}(v2)=2$ | $g_t(v2)=4$ | $g_n(v2)=0$ |
| $g^{+}(v3)=4$ | $g^{-}(v3)=1$ | $g_t(v3)=5$ | $g_n(v3)=3$ |
| $g^{+}(v4)=2$ | $g^{-}(v4)=2$ | $g_t(v4)=4$ | $g_n(v4)=0$ |

$$\sum g^{+}(v_i) = 9 = |A| \qquad \sum g_t(v_i) = 18 = 2 \bullet |A|$$

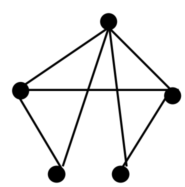
$$\sum g^{-}(v_i) = 9 = |A| \qquad \sum g_n(v_i) = 0$$

- *Ejercicios resueltos*

**1**- ¿Cuántas aristas tiene un grafo simple que tiene la siguiente sucesión de grados: (4, 3, 3, 2, 2)? Dibujarlo.

*Solución*

$$\sum_{i=1}^{n} g(v_i) = 2|A| \rightarrow\ 4\ + 2.3\ +\ 2.2\ =\ 2.|A| \rightarrow\ 14\ =\ 2.|A| \rightarrow |A| = \frac{14}{2} =\ 7$$



**2-** ¿Existe algún grafo simple de cinco vértices con los grados siguientes?

a)3, 3, 3, 3,4; b)1, 1, 3, 4,4; c)0, 1, 2, 2,3.

*Solución*

a)

$$\sum_{i=1}^{n} g(v_i) = 2|A|$$

$\rightarrow 4.3 + 4 = 2.\ |A| \rightarrow\ |A| = \frac{16}{2} = 8$

Por lo tanto, existe un grafo simple con 5 vértices y la sucesión de grados dada en el punto a)

b)

$$\sum_{i=1}^{n} g(v_i) = 2|A|$$

$\rightarrow 2.1 + 3 + 2.4 = 2\ .|A| \rightarrow\ |A| = \frac{13}{2} \notin N \rightarrow$ no existe un grafo simple con esta sucesión de grados.

c)

$$\sum_{i=1}^{n} g(v_i) = 2|A|$$

$\rightarrow$ 0 +1 + 2.2 + 3 = 2. $|A| \rightarrow |A| = \frac{8}{2} = 4$

Por lo tanto, existe un grafo simple con 5 vértices y la sucesión de grados dada en el punto c)

**3**- Determinar el cardinal de V ($|V|$) para los siguientes grafos G:

a) G tiene nueve aristas y todos los vértices tienen grado 3

b) G es regular con 15 aristas

c) G tiene diez aristas con dos vértices de grado 4 y los restantes tienen grado 3.

*Solución*

a)

Los grafos regulares son grafos cuyos vértices tienen el mismo grado.

$$\sum_{i=1}^{n} g(v_i) = 2|A|$$

$\rightarrow$ n.3 = 2.9 $\rightarrow$ n = $\frac{18}{3}$ = 6

Por lo tanto, el grafo tiene 6 vértices con 9 aristas.

b)

$$\sum_{i=1}^{n} g(v_i) = 2|A|$$

$\rightarrow$ n. g(vi) =2.15 $\rightarrow$ g(vi) = $\frac{30}{n}$ $\rightarrow$ g(vi) son los divisores de 30.

c)

$$\sum_{i=1}^{n} g(v_i) = 2|A|$$

$\rightarrow$ 2.4 +(n-1).3 = 2.10 $\rightarrow$ 8 + 3 n - 3 = 20 $\rightarrow$ 5 +3n = 20 $\rightarrow$

3n = 15 $\rightarrow$ n = $\frac{15}{3}$ = 5 $\rightarrow$ el grafo tiene 5 vértices.

**4**-Sabiendo que un grafo donde los vértices tienen el mismo grado se denomina grafo regular. Y además que si **g(v) = k** para todos los vértices v, entonces el grafo es k-regular.

Responder:

a) ¿Es posible tener un grafo 4-regular con 10 aristas?

b) ¿Es posible tener un grafo 4-regular con 15 aristas?

c) Dibujen los posibles grafos que cumplan con las condiciones dadas.

*Solución*

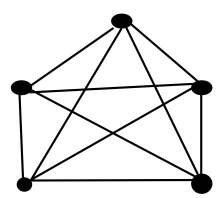
a) $\sum_{i=1}^{n} g(v_i) = 2|A|$ → n. g(vi) =2.10 → n.k = 20 → n.4 = 20 → n = 5

Por lo tanto, existe un grafo 4-regular con 5 vértices y 10 aristas.

b) $\sum_{i=1}^{n} g(v_i) = 2|A|$ → n. g(vi) =2.15 → n.k = 30 → n.4 = 30 → $n = \frac{30}{4} \notin N$ →

No existe un grafo 4-regular con 15 aristas.

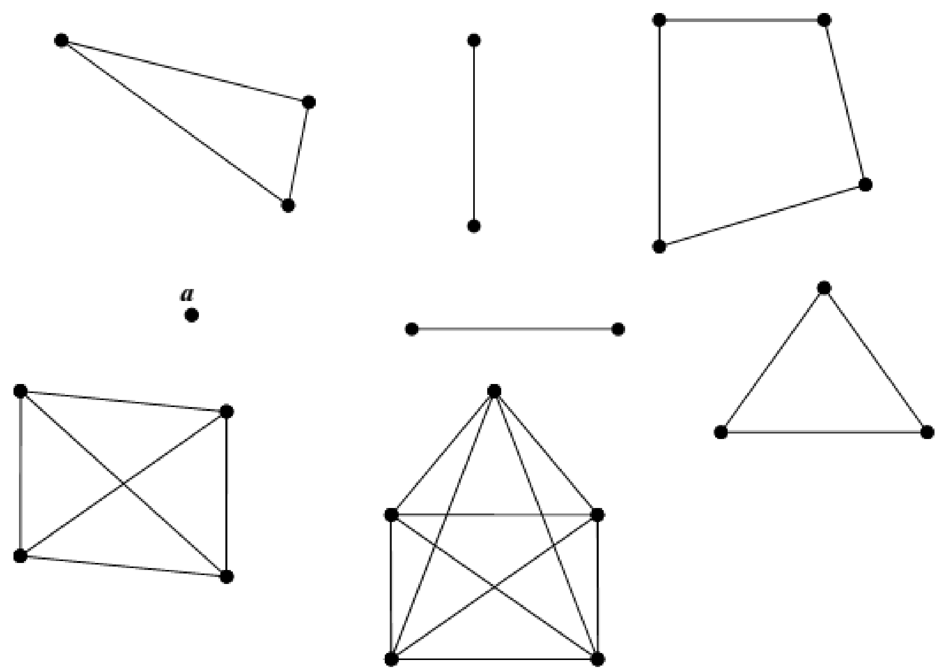
c)



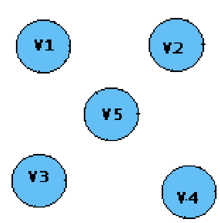
# TIPOS DE GRAFOS

***Grafos simples***: Son los que no tienen aristas paralelas ni lazos.

**Ejemplos**:




***Grafo nulo*.** Se dice que un grafo es nulo cuando los vértices que lo componen no están conectados, esto es, que son vértices aislados.




***Grafo regular.*** Aquel con el mismo grado en todos los vértices. Si ese grado es k lo llamaremos k-regular.

***Grafo completo***: Es un grafo simple en el cual cada pareja de vértices está conectada por una arista. Es decir, desde cualquier vértice podemos encontrar un camino hacia otro vértice con solo recorrer una arista.

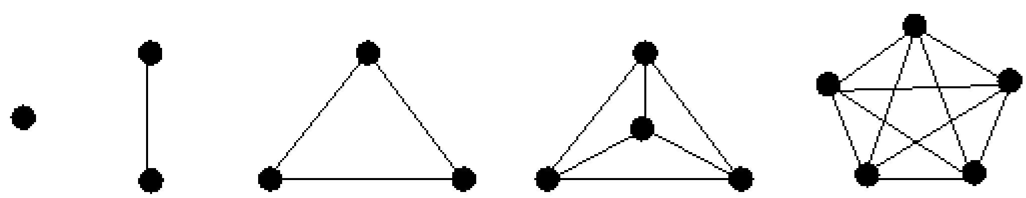
El conjunto de los grafos completos es denominado usualmente K, siendo ***Kn*** el grafo completo de n vértices.

Todo grafo completo ***Kn*** es un grafo regular. Por lo tanto, el grado de un vértice cualquiera es **(n - 1)** siendo n la cantidad de vértices del grafo.

La relación entre cantidad de vértices y cantidad de aristas es la siguiente: Si n es la cantidad de vértices y **|A|** el cardinal de aristas, se cumple lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{n} g(v_i) = 2|A| \rightarrow n.(n-1) = 2\,|A| \rightarrow |A| = n.\,(n-1)/2$$

A continuación, mostramos la representación gráfica de algunos de los grafos completos.



$K_1$ $K_2$ $K_3$ $K_4$ $K_5$

Ejemplo:

Se desea unir 6 ciudades por carreteras en todas las formas posibles, ¿Cuántas carreteras se pueden formar?

*Solución*

Como se trata de un grafo completo de 6 vértices, la cantidad de carreteras corresponde a la cantidad de aristas del grafo. Por lo tanto

$|A| = n.\,(n-1)/2 \rightarrow 6.\,5\ /\ 2 = 15$

Se pueden formar 15 carreteras.

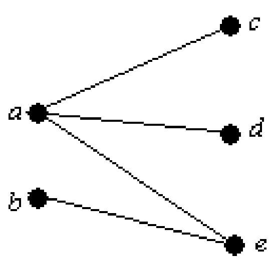
## Grafo bipartito:

Un grafo G = (V, A; $\varphi$) es bipartito si

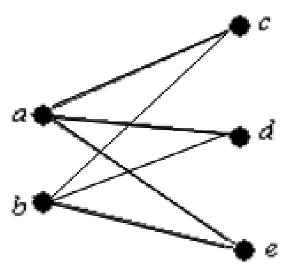
- $V = V_1 \cup V_2$
  $V_1 \cap V_2 = \varnothing$
- y cada arista de G es de la forma {a, b} con $a \in V_1$ y $b \in V_2$.

Es decir un grafo es bipartito si es un grafo simple cuyo conjunto de vértices está dividido en dos subconjunto $V_1$ y $V_2$ tales que cada arista del grafo conecta un vértice de $V_1$ con un vértice de $V_2$ .
Si cada vértice de $V_1$ está unido con los vértices de $V_2$, se tiene un ***grafo bipartito completo***. En este caso, si **| *V1* | = *m*, | *V2* | = *n*** el grafo se nota con ***Km,n.***

**Ejemplo:**




GRAFO BIPARTITO




GRAFO BIPARTITO COMPLETO

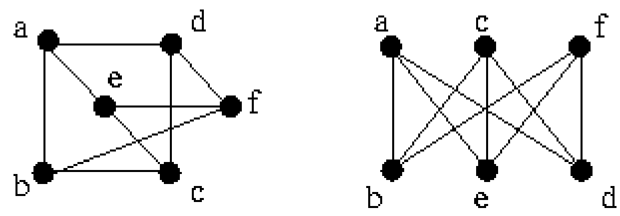
*Propiedades:*

En general para Grafos bipartitos completos del tipo Km,n :

$$|V| = m + n \quad \wedge \quad |A| = m.n$$

*Ejemplo*

Determinar si los siguientes grafos son bipartitos. En caso afirmativo, indicar cada conjunto de vértices:




**I** **II**

***S**olución:*

En el grafo I tenemos que se pueden formar dos conjuntos disjuntos que serían:

$$V_1 = \{a, c, f\} \qquad V_2 = \{b, d, e\}$$

Aquí podemos observar que en el conjunto $V_1$, el vértice "a" no es adyacente (no se encuentran unidos por una arista) al vértice "c" ni al vértice "f" y lo mismo sucede para el vértice "c" y "f" en relación con los demás vértices del conjunto. En $V_2$ sucede lo mismo como podemos constatarlo.

Para el grafo II, los conjuntos disjuntos serían (los mismos que en el anterior, una coincidencia):

$$.V_1 = \{a, c, f\} \qquad V_2 = \{b, d, e\}$$

**SUGERENCIA ANTES DE AVANZAR:**

Mirá el video "Grafos bipartitos" en el sitio de la cátedra [http://discretaunlam.net.ar sección Apuntes-Relaciones](http://discretaunlam.net.ar).

- *Ejercicio resuelto*

En una reunión hay dos grupos de personas, $V_1$ = {Juan; Teresa; María} y $V_2$ = {Pedro; Luis; Federico; Julieta; Mabel}. Se pretende que hagan una actividad por parejas formadas por una persona de cada uno de los grupos. ¿Cuántas parejas se pueden formar?

*Solución*

Se trata de un grafo bipartito completo $K_{3,\,5}$ en el cual las parejas que se pueden formar corresponden a las aristas del mismo. Por lo tanto,

$$|A| = n.\ m = 3.5 = 15$$

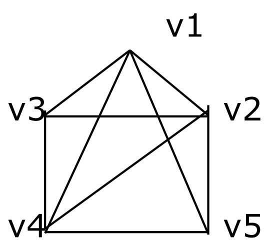
Se pueden formar 15 parejas.

- *Ejercicio resuelto*

**1-** Hallar la matriz de adyacencia para el grafo completo de 5 vértices $K_5$ y para el gráfico bipartito completo $K_{2,\,3}$.

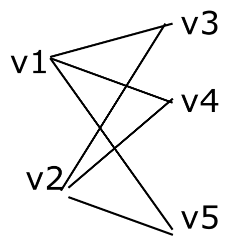
*Solución*

$$M_{K5} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{K2,\,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$




**$K_5$**

Bipartito completo **$K_{2,\,3}$**




***GRAFO CONEXO***:
Un grafo es conexo cuando hay un camino entre cualquier par de vértices.

## *SUBGRAFO-SUBDÍGRAFO*

De acuerdo a lo anterior un grafo conexo (dígrafo conexo) consta de una "pieza", mientras que un grafo no conexo consta de una o más piezas. Estas "piezas" son subgráficas del grafo original (dígrafo original). Es decir, una subgráfica G´de un grafo (dígrafo) se obtiene eligiendo ciertas aristas y vértices del grafo G (dígrafo DG) teniendo en cuenta que si elegimos cierta arista a en el grafo G (dígrafo DG) que sea incidente en los vértices v y w, entonces debemos incluir a v y w en la subgráfica G´ (DG´).

Definición

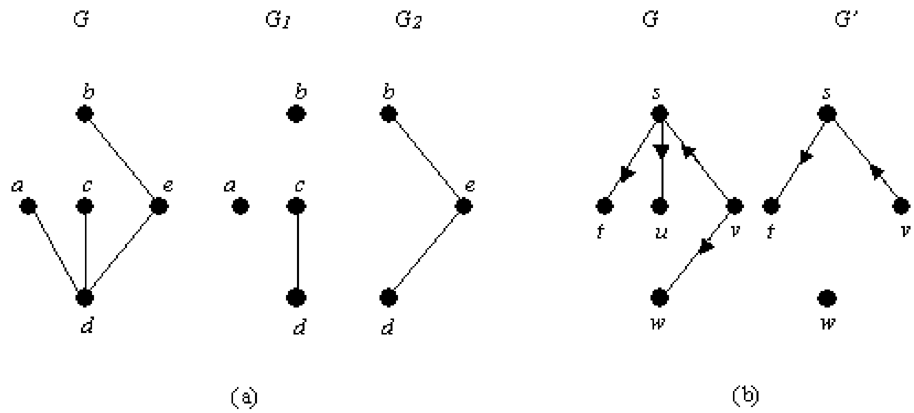
Un grafo $G'=(V',A',\phi')$ es un subgrafo del $G=(V,A,\varphi)$ si y solo si:

i)V´ $\subseteq$ V; ii)A´ $\subseteq$ A; iii) $\phi'=\phi/A$

Las subgráficas (subgrafos, subdígrafos) se pueden obtener a partir del grafo–dígrafo original:

1) Suprimiendo un vértice o más de un vértice y todas las aristas incidentes en ellos.

2) Suprimiendo una o más aristas.




**Ejemplos:**

La figura nos muestra un grafo G y dos de sus subgrafos $G_1$ y $G_2$.
Los vértices a, b son aislados en el subgrafo $G_1$.

La parte b) de la figura nos muestra un ejemplo de dígrafo DG. Aquí el vértice w es aislado en DG'.

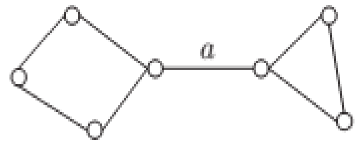
Notación

Si se suprime un vértice v, el subgrafo (dígrafo) restante es $G'_v$ ($DG'_v$)

Si se suprime una arista a, el subgrafo (dígrafo) restante es $G'_a$ ($DG'_a$)

- Un vértice v se llama ***ISTMO*** o punto de corte de G o de DG si la subgráfica, que se obtiene al eliminar el vértice v y las aristas que poseen a v como extremo, no es conexa.
- Se llama **CONJUNTO DE CONECTIVIDAD** al conjunto formado por el menor número de vértices cuya supresión desconecta al grafo o dígrafo.

Una arista a de un grafo G o de un dígrafo se llama ***PUENTE*** si la subgráfica, que se obtiene al eliminarla del grafo o del dígrafo, no es conexa.




En el grafo, si eliminamos a, el mismo queda dividido en dos partes conexas. Por lo tanto, la arista a, es puente.

- ***CONJUNTO DESCONECTANTE***: es el conjunto de aristas que debemos sacar para que el grafo deje de ser conexo.

*Ejemplo*

Para el grafo:

| X | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi(x)$ | $\{v_1, v_2\}$ | $\{v_1, v_2\}$ | $\{v_4, v_1\}$ | $\{v_4, v_2\}$ | $\{v_2, v_3\}$ | $\{v_2, v_4\}$ | $\{v_3, v_4\}$ |

Hallar:

a) $G'_{v1}$ ; $G'_{a2}$

b) Indicar si hay istmos

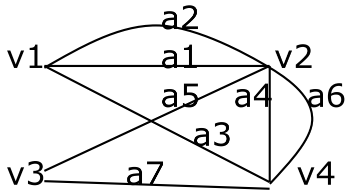
c) Indicar si hay puentes

d) Hallar un conjunto desconectante y un conjunto de corte

e) Hallar un conjunto de conectividad

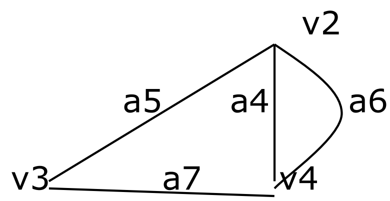
*Solución*

$G = (V, A, \varphi)$ ;V={v1,v2,v3,v4};
A={a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7}




a) Subgrafo que se obtiene eliminando el vértice v1

$G'_{v1} = (V', A', \varphi/_{A'})$




V´= V- {v1} = {v2, v3, v4}

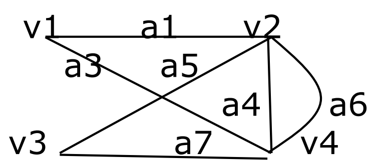
A´=A- {a1, a2, a3} = {a4, a5, a6, a7}

| **X** | $\mathbf{a_4}$ | $\mathbf{a_5}$ | $\mathbf{a_6}$ | $\mathbf{a_7}$ |
|---|---|---|---|---|
| **φ(x)/A** | $\{\mathbf{v_4, v_2}\}$ | $\{\mathbf{v_2, v_3}\}$ | $\{\mathbf{v_2, v_4}\}$ | $\{\mathbf{v_3, v_4}\}$ |

Subgrafo que se obtiene eliminando la arista a2

$G'_{a2} = (V', A', \varphi/_{A'})$

-




V´= V = {v1, v2, v3, v4}; A = A - {a2}={a1,a3,a4,a5,a6,a7};

| **X** | $\mathbf{a_1}$ | $\mathbf{a_3}$ | $\mathbf{a_4}$ | $\mathbf{a_5}$ | $\mathbf{a_6}$ | $\mathbf{a_7}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **φ(x)/A** | $\{\mathbf{v_1, v_2}\}$ | $\{\mathbf{v_4, v_1}\}$ | $\{\mathbf{v_4, v_2}\}$ | $\{\mathbf{v_2, v_3}\}$ | $\{\mathbf{v_2, v_4}\}$ | $\{\mathbf{v_3, v_4}\}$ |

b) No tiene itsmos ya que no es posible obtener una subgráfica no conexa eliminando un vértice.

c) No tiene puentes ya que no es posible obtener una subgráfica no conexa eliminando una arista.
d) Conjunto desconectante = {a1, a2, a5};
e) Conjunto de conectividad= {v1, v2, v3}


Para finalizar con esta parte te proponemos que ingreses al sitio de la cátedra " https://discretaunlam.net.ar " para leer y hacer la primera autoevaluación correspondientes al tema "Grafos-Dígrafos".
Luego comienza a hacer los ejercicios de Grafos-dígrafos de la guía de ejercicios para el segundo parcial.
Tené en cuenta que todas las actividades que realices forman parte del seguimiento académico que hará tu tutor.