UNIDAD 4

Consideremos la matriz asociada a una transformación lineal definida de V en V

Autovalores y Autovectores de una matriz cuadrada.

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
$\bar{v} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$
$\lambda \in \mathbb{R}$
$I \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$A\bar{v} = \lambda \bar{v}$ ⟵ $f(v) = \lambda v$

$A\bar{v} - \lambda \bar{v} = 0^{n\times 1}$

$(A - \lambda I)\bar{v} = 0^{n\times 1}$ SIST. HOMOGENEO SCI $\bar{v} \neq \bar{0}$

$\to |A - \lambda I| = 0$

λ es la incógnita

ecuación característica

$|A - \lambda I| = P(\lambda) \to$ polinomio característico en λ y sus raíces son los AUTOVALORES de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$
(POR EL TEO. FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA TIENE A LO SUMO n RAÍCES DISTINTAS)

EJEMPLO 1

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Hallar los autovalores y autovectores de A

I) $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

II) $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(3-\lambda)\,[(2-\lambda)\cdot(2-\lambda) - 0] - 0 + 0 = 0$

$(3-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(2-\lambda) = 0 \to 3-\lambda = 0 \to \lambda_1 = 3$
$2-\lambda = 0 \quad \lambda_2 = 2$
$2-\lambda = 0 \quad \lambda_3 = 2$

Autovalores: 3, 2, 2

3 es una raíz simple → multiplicidad algebraica (3) = 1
2 " " " doble (2) = 2

$m.a(3) = 1 \; ; \; m.a(2) = 2$

III) Buscamos autovectores

$\lambda_1 = 3$ $(A - \lambda I)\cdot\bar{v} = 0^{n\times 1}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} a - b = 0 \to a = b \\ 4a - c = 0 \to 4a = c \end{cases} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} a \\ a \\ 4a \end{pmatrix} \to$ AUTOVECTORES $V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ 4a \end{pmatrix} ; a \neq 0 \right\}$

$E_{(3)} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ 4a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} / \; a \in \mathbb{R} \right\}$ SUBESPACIO ASOCIADO A $\lambda = 3$
" INVARIANTE

$B_{E(3)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$; $\dim E_3 = 1$; multiplicidad geométrica (3) = 1
$m.g(3) = 1$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to 1.a + 0b + 0c = 0$
$a = 0$

$\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix} \to$ AUTOVECTORES $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix} ; b \neq 0 \vee c \neq 0 \right\}$

$E_{(2)} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} / \; a = 0 \right\}$ $B_{E(2)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \to \dim E_2 = 2$ $m.a(2) = 2$
$m.g(2) = 2$

ACLARACIÓN:

$\sim [b = 0 \wedge c = 0]$
$\sim (b = 0) \vee \sim (c = 0)$
$b \neq 0 \vee c \neq 0$

PROPIEDAD 1 "Autovectores asociados a autovalores distintos son SIEMPRE linealm. independientes"

PROPIEDAD 1

H) $A.u_1 = \lambda_1 u_1$
$A.u_2 = \lambda_2 u_2$
$\lambda_1 \neq \lambda_2$

T) $\alpha u_1 + \beta u_2 = 0 \wedge \alpha = \beta = 0$

D) $A(\alpha u_1 + \beta u_2) = A.0_{n\times 1}$
$\alpha.Au_1 + \beta Au_2 = 0$
$\alpha.\lambda_1 u_1 + \beta\lambda_2 u_2 = 0$ (1)

$\lambda_1(\alpha u_1 + \beta u_2) = \lambda_1.0$
$\alpha\lambda_1 u_1 + \beta\lambda_1 u_2 = 0$ (2)

(1)-(2) $\beta\lambda_2 u_2 - \beta\lambda_1 u_2 = 0 \Rightarrow \beta(\lambda_2 - \lambda_1)u_2 = 0 \Rightarrow \beta = 0$

En la ecuación de la tesis $\alpha u_1 + 0.u_2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

Si tuviéramos 3 vectores T) $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$ H) $\{u_1, u_2\}$ l.i $\{u_2, u_3\}$ l.i. $\{u_1, u_3\}$ l.i

D) $A(\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3) = A.0$
$\alpha\lambda_1 u_1 + \beta\lambda_2 u_2 + \gamma\lambda_3 u_3 = 0$ (1)
si $\lambda_1 \neq 0 \to \lambda_1(\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3) = \lambda_1.0$ (2), restando m.a.m., $\beta(\lambda_2 - \lambda_1)u_2 - \gamma(\lambda_3 - \lambda_1)u_3 = 0$

como u_2 y u_3 son linealmente independientes
y $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_3 - \lambda_1 \neq 0$
son $\beta = \gamma = 0$
y en la ecuación de la tesis $\alpha u_1 + 0u_2 + 0u_3 = 0$
resulta → $\alpha = 0$

EJEMPLO 2

Hallar los autovectores y autovalores de A.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Autovalores

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(1-\lambda)\,[(-1-\lambda)(-2-\lambda) - 2] + 3\,[1 + 1(-1-\lambda)] = 0$
$(1-\lambda)\,[2 + \lambda + 2\lambda + \lambda^2 - 2] + 3(-\lambda) = 0$
$(1-\lambda)\,(\lambda^2 + 3\lambda) - 3\lambda = 0$
$\lambda^2 + 3\lambda - \lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda = 0$
$\lambda^2(-\lambda - 2) = 0 \to \lambda_1 = 0 \; ; \; \lambda_2 = 0 \; ; \; \lambda_3 = -2$

$\lambda = -2$

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\begin{cases} y + z = 0 \to z = -y \\ x - y = 0 \to x = y \end{cases} \; ; \; \begin{pmatrix} y \\ y \\ -y \end{pmatrix} ;$ $E_{(-2)} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} / \; x = y \wedge z = -y \right\}$

$B_{E(-2)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$\lambda = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \begin{cases} y + z = 0 \to -z = y \\ x + 3z = 0 \to -3z = x \end{cases}$ $\begin{pmatrix} -3z \\ -z \\ z \end{pmatrix}$

$E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} / \; y = -z \wedge x = -3z \right\}$ $B_{E_0} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

RELACIÓN ENTRE LAS MULTIPLICIDADES

multiplicidad algebraica de λ: es la multiplicidad de λ como raíz de la ecuación característica.

multiplicidad geométrica de λ: es la dimensión de $E\lambda$.

PROPIEDAD 2 $0 < mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$