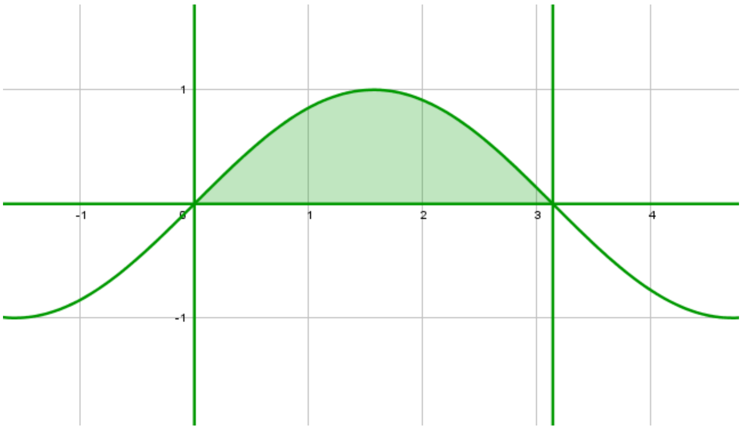
T P 7 Ej 4 e

Dibujar las regiones de integración y calcular la integral:

$$\iint_R (x^2 - y^2)\, dxdy \qquad R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi \,, 0 \leq y \leq sen(x)\}$$

Veamos el recinto de integración R



Obsérvese que los valores de x estan definidos entre 0 y π, mientras que los valores de y son aquellosque se ubican entre 0 y la función $y = sen(x)$

Vemos que en este caso la región de integración a utilizar es de TIPO 1.

De esta manera, el recinto R, queda determinado de la siguiente manera:

$$R = [0, \pi] \times [0, sen(x)]$$

Y la integral está dada como

$$\int_{x=0}^{\pi} \left(\int_{y=0}^{sen(x)} (x^2 - y^2)\, dy \right) dx$$

Resolvemos la integral que está dentro del paréntesis.

$$\int_{y=0}^{sen(x)} (x^2 - y^2)\, dy = x^2 y - \frac{y^3}{3}\Bigg|_{y=0}^{sen(x)} = x^2 \cdot sen(x) - \frac{sen^3(x)}{3}$$

Reemplazando en la integral original

$$\int_{x=0}^{\pi} x^2 \cdot sen(x) - \frac{sen^3(x)}{3} dx = \int_{x=0}^{\pi} x^2 \cdot sen(x) dx - \frac{1}{3} \int_{x=0}^{\pi} sen^3(x) dx$$

Resolviendo la primera integral mediante el método de integración por parte nos queda:

$$\int x^2 \cdot sen(x) dx = -x^2 \cdot \cos(x) + 2x \cdot \mathrm{sen}(x) + 2\cos(x)$$

La segunda integral la vamos a resolver de la siguiente manera:

$$\int sen^3(x)dx = \int sen(x)\cdot sen^2(x)dx = \int sen(x)\cdot(1-\cos^2(x))dx =$$

$$\int sen(x) - sen(x)\cdot\cos^2(x)\,dx = \int sen(x)\,dx + \int \cos^2(x)\cdot\big(-sen(x)\big)dx$$

De estas dos ultimas integrales tenemos que la primera es inmediata y la segunda, aunque no lo parezca también, por que podemos aplicar la siguiente integral inmediata

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$$

Por lo tanto, nos queda que

$$\int sen^3(x)dx = -\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3}$$

Entonces, la integral buscada es:

$$\int_{x=0}^{\pi} x^2\cdot sen(x) - \frac{sen^3(x)}{3}dx = -x^2\cdot\cos(x) + 2x\cdot\operatorname{sen}(x) + 2\cos(x) - \frac{1}{3}\left(-\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3}\right)$$

$$= -x^2\cdot\cos(x) + 2x\cdot\operatorname{sen}(x) + 2\cos(x) + \frac{1}{3}\cos(x) - \frac{\cos^3(x)}{3}$$

$$= -x^2\cdot\cos(x) + 2x\cdot\operatorname{sen}(x) + \frac{7}{3}\cos(x) - \frac{\cos^3(x)}{9}\Bigg|_{x=0}^{\pi}$$

$$= -\pi^2\cdot(-1) + \frac{7}{3}\cdot(-1) + \frac{1}{9} - \left(\frac{7}{3} - \frac{1}{9}\right)$$

$$\int_{x=0}^{\pi}\left(\int_{y=0}^{sen(x)} (x^2 - y^2)\,dy\right)dx = \pi^2 - \frac{40}{9}$$