Resolución TP5:

Ejercicio 4 - c

Tomando $F(x,y,z) = xyze^z \ln(z) - 3x + 3y = 0$ Determinar si la ecuación dada define una función implícita $z = f(x,y)$ en el punto $P = (1,1,1)$ y si es así calcular sus derivadas parciales.

Herramientas:

- Se deben cumplir las 3 condiciones del teorema para $F(x,y,z) = 0$ e $z = f(x,y)$
  - $P \epsilon F(x,y,z) = 0$
  - Las derivadas F_x , F_yy F_z son continuas en el entorno del punto.
  - $F_z(P) \neq 0$
- Si se cumple TFI entonces existe $z = f(x,y)$ en P y sus derivadas son:
  - $f_x(x_0, y_0) = -\frac{F_x(P)}{F_z(P)}$
  - $f_y(x_0, y_0) = -\frac{F_y(P)}{F_z(P)}$

Resolviendo:

- ¿$F(P) = 0$?

$$xyze^z \ln(z) - 3x + 3y = 0$$
$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot e^1 \ln(1) - 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 0$$
$$1 \cdot e \cdot 0 - 3 + 3 = 0$$

Se cumple el primer enunciado.

- ¿Son F_x , F_yy F_z continuas en $E(P)$?

$$F(x,y,z) = xyze^z \ln(z) - 3x + 3y$$

$$Dom(F) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$$

$$F_x = yze^z \ln(z) - 3$$
$$F_y = xze^z \ln(z) + 3$$
$$F_z = xy\left(e^z \ln(z) + z\left(e^z \ln(z) + \frac{e^z}{z}\right)\right)$$

$$Dom(F) = Dom(F_x) = Dom(F_y) = Dom(F_z) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$$

Son continuas en E(P) y se cumple el segundo enunciado.

- $¿F_z(P) \neq 0?$

$$F_z = xy\left(e^z \ln(z) + z\left(e^z \ln(z) + \frac{e^z}{z}\right)\right)$$
$$F_z(\mathrm{P}) = 1 \cdot 1\left(e^1 \ln(1) + 1\left(e^1 \ln(1) + \frac{e^1}{1}\right)\right)$$
$$F_z(\mathrm{P}) = \big(0 + (0 + e)\big)$$
$$F_z(\mathrm{P}) = e$$

Al ser $F_z(P) = e \neq 0$ se cumple el tercer enunciado.

Se cumple TFI por lo tanto existe $z = f(x, y)$ y sus derivadas se calculan:

$f_x(x_0, y_0) = -\frac{F_x(P)}{F_z(P)}$ e $f_y(x_0, y_0) = -\frac{F_y(P)}{F_z(P)}$

$$F_x = yze^z \ln(z) - 3$$
$$F_y = xze^z \ln(z) + 3$$

$$F_x(\mathrm{P}) = 1 \cdot 1 \cdot e^1 \ln(1) - 3 = -3$$
$$F_y(\mathrm{P}) = 1 \cdot 1 \cdot e^1 \ln(1) + 3 = +3$$
$$F_z(P) = e$$

$$f_x(1{,}1) = -\frac{F_x(P)}{F_z(P)} \qquad f_y(1{,}1) = -\frac{F_y(P)}{F_z(P)}$$

$$f_x(1{,}1) = -\frac{-3}{e} \qquad f_y(1{,}1) = -\frac{+3}{e}$$

$$f_x(1{,}1) = \frac{3}{e} \qquad f_y(1{,}1) = -\frac{3}{e}$$

$$z = f(x, y)$$

$$f\ es\ diferenciable$$

$$\nabla f(x, y) = \big(f_x(x, y), f_y(x, y)\big)$$

$$\nabla f(P) = \big(f_x(P), f_y(P)\big)$$

$$\nabla f(P) = \left(-\frac{F_x(P)}{F_z(P)}, -\frac{F_y(P)}{F_z(P)}\right)$$

$$\nabla f(P) = \left(\frac{3}{e}, -\frac{3}{e}\right)$$