T P 04 Ej. 4-a

Calcular las derivadas parciales de la siguiente función en los puntos indicados.

$$f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \qquad en\ (0,0)\ y\ \left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$$

En este ejercicio vamos a resolver las derivadas parciales en el punto de las dos formas conocidas: por definición y por propiedades.

Empezamos con el punto $(\mathbf{0},\mathbf{0})$:

Por definición

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a^2-(0+h)^2-0^2} - \sqrt{a^2-0^2-0^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a^2-h^2} - \sqrt{a^2}}{h}$$

$$(Aplicando\ L'Hopital) = \lim_{h\to 0}\frac{2h}{2\sqrt{a^2-h^2}} = 0$$

$$f_y(x_0,y_0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0)}{k}$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+\mathrm{k}) - f(0,0)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{\sqrt{a^2-0^2-(0+k)^2} - \sqrt{a^2-0^2-0^2}}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{\sqrt{a^2-k^2} - \sqrt{a^2}}{k}$$

$$(Aplicando\ L'Hopital) = \lim_{k\to 0}\frac{2k}{2\sqrt{a^2-k^2}} = 0$$

Por propiedades

$$f_x(x,y) = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$f_x(0,0) = \frac{0}{2\sqrt{a^2-0^2-0^2}} = 0$$

$$f_y(x,y) = \frac{-2y}{2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$
$$f_y(0,0) = \frac{0}{2\sqrt{a^2 - 0^2 - 0^2}} = 0$$

Finalmente con el punto $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$

Finalmente con el punto $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$

Por definición

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$
$$f_x\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(\frac{a}{2} + h, \frac{a}{2}\right) - f\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2} + h\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{h} =$$

$$(Aplicando\ L'Hopital) = \lim_{h \to 0} \frac{-2\left(\frac{a}{2} + h\right)}{2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2} + h\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}$$
$$= \frac{-2\left(\frac{a}{2} + 0\right)}{2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2} + 0\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{-a}{2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{-a}{2\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}}}$$
$$= \frac{-a}{2\sqrt{\frac{a^2}{2}}} = \frac{\sqrt{2}\,(-a)}{2\,|a|}$$

Entonces $f_x\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ será $\frac{\sqrt{2}}{2}$ si el parámetro a es negativo y $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ si el parámetro a es positivo.

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$
$$f_y\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \lim_{k \to 0} \frac{f\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} + k\right) - f\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} + k\right)^2} - \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{k} =$$

$$(Aplicando\ L'Hopital) = \lim_{h \to 0} \frac{-2\left(\frac{a}{2} + k\right)}{2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} + k\right)^2}}$$

$$= \frac{-2\left(\frac{a}{2} + 0\right)}{2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} + 0\right)^2}} = \frac{-a}{2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{-a}{2\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}}}$$

$$= \frac{-a}{2\sqrt{\frac{a^2}{2}}} = \frac{\sqrt{2}\,(-a)}{2\,|a|}$$

Entonces $f_y\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ será $\frac{\sqrt{2}}{2}$ si el parámetro a es negativo y $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ si el parámetro a es positivo.

Por propiedades

$$f_x(x, y) = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$f_x\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \frac{-2\,\frac{a}{2}}{2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{-a}{2\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}}} = \frac{-a}{2\sqrt{\frac{a^2}{2}}} = \frac{\sqrt{2}\,(-a)}{2\,|a|}$$

Entonces $f_x\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ será $\frac{\sqrt{2}}{2}$ si el parámetro a es negativo y $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ si el parámetro a es positivo.

$$f_y(x, y) = \frac{-2y}{2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$f_y\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \frac{-2\,\frac{a}{2}}{2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{-a}{2\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}}} = \frac{-a}{2\sqrt{\frac{a^2}{2}}} = \frac{\sqrt{2}\,(-a)}{2\,|a|}$$

Entonces $f_y\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ será $\frac{\sqrt{2}}{2}$ si el parámetro a es negativo y $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ si el parámetro a es positivo.