Clase 3

Límite y continuidad

Práctica sobre

- **Cálculo de límites dobles aplicando propiedades.**
- **Límites por trayectorias.**
- **Límites radiales.**
- **Continuidad.**

Cálculo de límites dobles aplicando propiedades

Definición (Límite doble). Sea la función $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde A es un conjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^2$ y sea el par (x_0, y_0) un punto de acumulación de A. Se dice que L es el límite de f cuando $(x, y) \in A \cap D'(x_0, y_0)$, tiende a (x_0, y_0), si para todo $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, existe un $\delta \in \mathbb{R}^+$, tal que:

$$|f(x,y) - L| < \epsilon$$

Siempre que:

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

Y se escribe:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Puede que cuando (x, y) tienda a (x_0, y_0), los valores de $f(x, y)$ no se acerquen a un valor particular, en este caso se dice que el límite no existe. Nótese además que no se requiere que la función esté definida en (x_0, y_0), es decir que tal punto puede o no pertenecer a su dominio, pero sí debe ser un punto de acumulación de tal conjunto.

Calcular un límite por definición consiste en encontrar la relación entre los números ϵ y δ, la cual permitirá establecer qué tan cerca de (x_0, y_0) estará (x, y), si es que se consideran valores de $f(x, y)$ cercanos a L en menos que un cierto ϵ prefijado.

Ejemplo 1. Algunos límites dobles se pueden calcular aplicando propiedades conocidas de límites de una sola variable. Por ejemplo, en el siguiente caso.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

Aquí se aplica el límite conocido

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1$$

Para relacionar el límite doble inicial con el anterior, se aplica la sustitución

$$t = x^2 + y^2$$

Nótese que, en este caso, cuando $(x, y) \to (0,0)$, se cumple que $t \to 0$. Entonces, es válido escribir

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \overset{t=x^2+y^2}{\triangleq} \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1.$$

En conclusión, se tiene el siguiente resultado

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$$

Ejemplo 2. En el siguiente caso

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(3xy)-1}{3xy}$$

Aquí se aplica la sustitución

$$t = xy$$

Y se tiene en cuenta que cuando $(x,y)\to(0,0)$, se verifica que $t\to 0$. Entonces vale escribir la siguiente igualdad

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(3xy)-1}{3xy} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos(3t)-1}{3t}$$

Ahora, para calcular el límite en la variable t, se aplica la Regla de L´Hopital (se cumplen las condiciones para hacerlo), luego

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(3xy)-1}{3xy} = \lim_{t\to 0} \frac{\cos(3t)-1}{3t} = \lim_{t\to 0} \frac{-3\operatorname{sen}(3t)}{3} = 0$$

Con lo cual, se obtiene el valor del límite doble

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(3xy)-1}{3xy} = 0$$

En los dos ejemplos anteriores, se aplica el siguiente resultado, que asegura la existencia del límite doble.

Teorema. Sean las funciones

$$g: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definida sobre el intervalo I de $\mathbb{R}$ y

$$\varphi: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to I$$

definida sobre el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$. Y sean, $t_0 \notin I$ un punto de acumulación de I y el par $(x_0, y_0) \notin A$ un punto de acumulación de A. Sea además la función

$$\psi: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \psi(x, y) = g\big(\phi(x, y)\big)$$

tal que $\psi(A) \subseteq I$. Si

$$\lim_{t \to t_0} g(t) = L$$

y

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varphi(x, y) = t_0$$

entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g[\varphi(x, y)] = L$$

Un resultado similar, pero con distintas condiciones sobre pertenencia de los puntos de estudio y de continuidad la función g es el siguiente.

Teorema. Sean las funciones

$$g: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definida sobre el intervalo I de $\mathbb{R}$ y

$$\varphi: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to I$$

definida sobre el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$. Sea, además, par $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto de acumulación de A y el punto $t_0 \in \mathbb{R}$ un punto interior a I. Si $g(t)$ es continua en t_0, esto es

$$\lim_{t \to t_0} g(t) = g(t_0)$$

Y, además

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varphi(x, y) = t_0$$

entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g[\varphi(x, y)] = g(t_0)$$

Ejemplo 3. Ahora, para el límite doble

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

Se escribe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[x\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)\right]$$

Y ahora se tiene en cuenta que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$$

Es decir que la función $\varphi(x,y) = x$ es un infinitésimo en $(0,0)$. Pero, por otra parte, se verifica

$$0 = \frac{0}{x^2+y^2} \leq \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$$

$$0 \leq \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

$$\left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right| \leq 1$$

Es decir que el segundo factor es una función acotada, se concluye entonces que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \overbrace{\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)}^{\text{acotada}} = 0$$

O sea que el límite doble existe y vale cero, simbólicamente se escribe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$$

Teorema. Sean las funciones

$$\varphi: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

y

$$\psi: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

ambas definidas sobre el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$, y sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto de acumulación de A. Si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varphi(x, y) = 0$$

y si existe algún entorno reducido $D´$ de centro en (x_0, y_0) tal que $D´ \cap A \neq \emptyset$ y un número real positivo M tal que

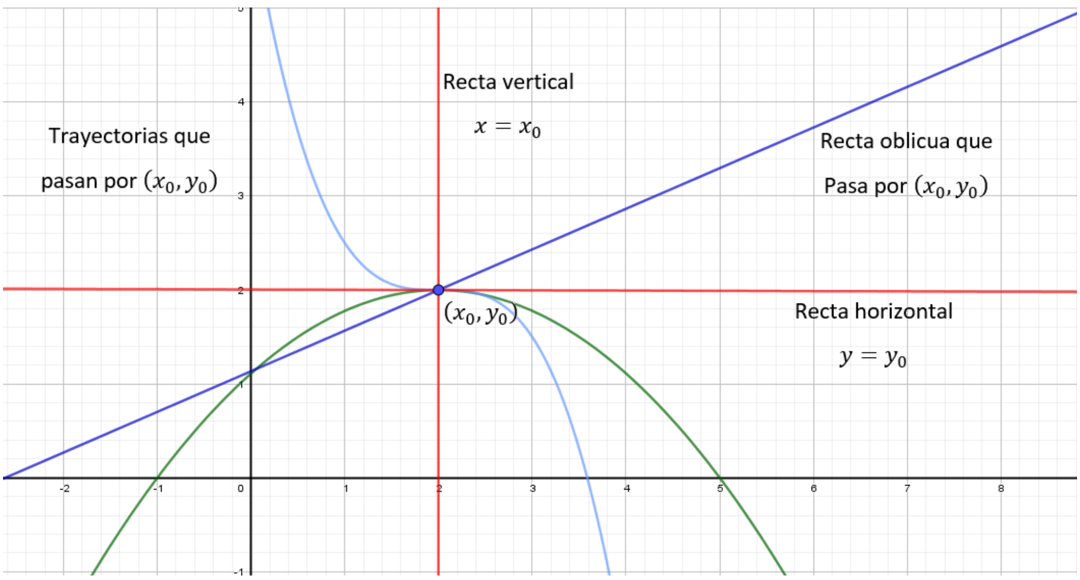
$$|\psi(x, y)| \leq M$$

para todo $(x, y) \in D´ \cap A$, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varphi(x, y) \cdot \psi(x, y) = 0$$

Límite por trayectorias y límites radiales

El estudio del límite de una función de dos variables se puede realizar de infinitas maneras. Estas son precisamente, todas aquellas formas que permiten al par (x, y) del dominio de la función acercarse al punto de estudio (x_0, y_0). En ciertos casos, es útil aplicar una técnica que consiste en estudiar el comportamiento de esa función por ***trayectorias*** particulares, que pasen por el punto en donde se quiere determinar si existe o no el límite doble.



Distintas trayectorias por las cuales se puede estudiar el límite doble

Se llama **límite radial** al límite parcial obtenido cuando se estudia el comportamiento de la función, conforme (x, y) tiende a (x_0, y_0) por trayectorias rectas.

Ejemplo 4. Estudio del límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

i) Por la recta (Límite radial) vertical $x = 0 \;\; (y \neq 0) \quad (0, y)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}\bigg|_{\substack{x=0\\ y\neq 0}} = \lim_{y\to 0} \frac{0y}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Es decir que el límite radial por la recta vertical vale cero.

ii) Por la recta (Límite radial) horizontal $y = 0 \;\; (x \neq 0) \quad (x, 0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}\bigg|_{\substack{y=0\\ x\neq 0}} = \lim_{x\to 0} \frac{x0}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Es decir que el límite radial por la recta horizontal también vale cero.

iii) Por la trayectoria cúbica de ecuación $y = x^3 \;\; (x \neq 0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}\bigg|_{\substack{y=x^3\\ x\neq 0}} = \lim_{x\to 0} \frac{xx^3}{x^2+(x^3)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2+x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2x^2}{x^2(1+x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1+x^4} = 0$$

El límite parcial por la trayectoria $y = x^3$ también vale cero, sin embargo, esto no significa que el límite doble existe y que vale cero. Solamente se ha analizado el límite por dos trayectorias distintas, y como se ha visto, existen infinitas formas posibles a partir de las cuales se puede estudiar el límite de la función. Entonces, de este modo, nunca se puede llegar a saber si existirá, o no, alguna trayectoria que de un límite parcial distinto del valor obtenido en los casos analizados. En el siguiente caso se muestra esta situación.

iii) Por la recta (Límite radial) de ecuación $y = x \;\; (x \neq 0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}\bigg|_{\substack{y=x\\ x\neq 0}} = \lim_{x\to 0} \frac{xx}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Es decir que el límite radial por la recta de ecuación $y = x$ es igual a $\frac{1}{2}$.

Esto permite concluir que **el límite doble**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

no existe, puesto que, de existir, independientemente de cómo el par (x,y) tienda a $(0,0)$, el límite debería dar el mismo valor siempre.

Ejemplo 5. Estudiar el límite doble

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

i) Por la recta vertical $x = 0 \ \ (y \neq 0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left.\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right|_{\substack{x=0\\ y\neq 0}} = \lim_{y\to 0} \frac{0^2y}{0^4+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

Es decir que, el límite radial por la recta vertical existe y vale cero.

ii) Por la recta de ecuación $y = x \ \ (x \neq 0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left.\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right|_{\substack{y=x\\ x\neq 0}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2x}{x^4+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2x}{x^2(x^2+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+1} = 0$$

Es decir que el límite radial por la recta de ecuación $y = x$ existe y también es igual a cero.

iii) Por la familia de rectas $y = mx \ \ (x \neq 0, m \in \mathbb{R})$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left.\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right|_{\substack{y=mx\\ x\neq 0}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2mx}{x^4+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2mx}{x^2(x^2+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{x^2+m^2} = 0$$

Esto muestra que **todos los límites radiales existen y valen cero**. Pero como se ha dicho más arriba, esto no garantiza la existencia del límite doble. A continuación, se muestra que existe una trayectoria distinta para la cual el límite difiere.

iii) Por la trayectoria parabólica de ecuación $y = x^2 \ \ (x \neq 0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left.\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right|_{\substack{y=x^2\\ x\neq 0}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2x^2}{x^4+(x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

O sea que el límite parcial por la trayectoria $y = x^2$ existe y vale $\frac{1}{2}$. De esto, entonces, se deduce que **el límite doble**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

no existe.

Continuidad

Definición (Continuidad). Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida en el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$ y sea el par $(x_0, y_0) \in A$. Se dice que f es continua en (x_0, y_0) si se cumple la igualdad:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

Ejemplo 6. ¿Es continua la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

en el origen?

Para que sea continua en el origen, se debe cumplir que el límite doble

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Exista y sea igual que la imagen de la función en ese punto. Como se sabe, en este caso es

$$f(0,0) = 0$$

Pero según lo realizado en el Ejemplo 4, el límite doble citado no existe, por lo tanto, esta función **no es continua en el origen**.

Ejemplo 7. ¿Es continua la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

en el origen?

En este caso, según lo que se hizo en el Ejemplo 1, se verifica que el límite doble

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

Existe y vale 1, que coincide con el valor de la función en el origen, es decir con $f(0,0)$. Así, se cumple la relación

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1 = f(0,0)$$

Con lo cual, se muestra de este modo que $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$.

Ejemplo 8. ¿Es continua la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)\cos(y)}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

en el origen?

En este caso ocurre que la función está definida por la fórmula que se encuentra en el primer renglón, en **<u>todo el plano menos en el eje vertical y</u>** (precisamente donde se cumple que $x = 0$). Y esto se escribe del siguiente modo

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(y)}{x} \qquad si \quad x \neq 0$$

Por otro lado, **<u>vale cero sobre el eje vertical y</u>**. Esto se exhibe en el segundo renglón de la definición

$$f(x,y) = 0 \qquad si \qquad x = 0$$

Por esta razón, hay que estudiar el límite doble en estas dos situaciones bien distintas.

$a)$ Primer caso, fuera del eje vertical y:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)|_{x\neq 0} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(y)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)(\cos(y))\right]$$
$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos(y) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \lim_{y\to 0} \cos(y) = 1 \cdot 1 = 1$$

Es decir que el límite doble de esta función en el origen, siempre que se estudie fuera del eje vertical es igual a uno. Esto es

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)|_{x\neq 0} = 1$$

$b)$ Segundo caso, sobre el eje vertical y:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)|_{x=0} = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Esto quiere decir que sobre el eje y, el límite de esta función cuando (x, y) tiende a $(0,0)$, es igual a cero.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)\big|_{x=0} = 0$$

Resultado que contrasta con el obtenido anteriormente. De este modo, se concluye que **el límite doble de la función $f(x, y)$ en origen no existe**, y, por lo tanto, **esta función no es continua en ese punto**.

Ejemplo 9. ¿Es continua la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,\mathrm{sen}(x) - y\cos(y)}{x^2 + y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

en el origen?

Para determinar si la función $f(x, y)$ es continua en el origen, es necesario estudiar el límite doble

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,\mathrm{sen}(x) - y\cos(y)}{x^2 + y^2}$$

Para abordar el estudio, inicialmente, se recurre al análisis del límite radial por la recta horizontal $y = 0$. En este caso se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,\mathrm{sen}(x) - y\cos(y)}{x^2 + y^2}\Bigg|_{\substack{y=0\\x\neq 0}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,\mathrm{sen}(x) - 0\cos(0)}{x^2 + 0^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{x^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,\mathrm{sen}(x) - y\cos(y)}{x^2 + y^2}\Bigg|_{\substack{y=0\\x\neq 0}} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} = 1$$

Pero, por otra parte, el límite por la trayectoria $y = x^2$ es

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,\mathrm{sen}(x) - y\cos(y)}{x^2 + y^2}\Bigg|_{\substack{y=x^2\\x\neq 0}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,\mathrm{sen}(x) - x^2\cos(x^2)}{x^2 + (x^2)^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,\mathrm{sen}(x) - y\cos(y)}{x^2 + y^2}\Bigg|_{\substack{y=x^2\\x\neq 0}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{x^2(1 + x^2)} - \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(x^2)}{x^2(1 + x^2)}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,\mathrm{sen}(x) - y\cos(y)}{x^2 + y^2}\Bigg|_{\substack{y=x^2\\x\neq 0}} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1 + x^2)} - \lim_{x\to 0} \cos(x^2) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1 + x^2)}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left.\frac{x\,\mathrm{sen}(x) - y\cos(y)}{x^2+y^2}\right|_{\substack{y=x^2\\x\neq 0}} = 1\cdot 1 - 1\cdot 1 = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left.\frac{x\,\mathrm{sen}(x) - y\cos(y)}{x^2+y^2}\right|_{\substack{y=x^2\\x\neq 0}} = 0$$

Esto muestra que el límite doble

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,\mathrm{sen}(x) - y\cos(y)}{x^2+y^2}$$

no existe. Por lo tanto, la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,\mathrm{sen}(x) - y\cos(y)}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

no es continua en el origen.