GRAFOS SEGUNDA PARTE

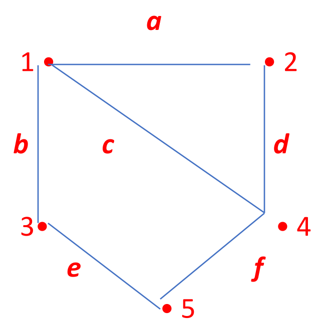
Ejercicio

Dada la matriz de adyacencia de un grafo G, Ma

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a). Representarlo gráficamente. b) Dar, si es posible, un camino de Euler y/o un ciclo de Euler. C) Dar, si es posible, camino y circuito de Hamilton. d) ¿Tiene puente y/o istmo? ¿Tiene conjunto desconectante y/o de conectividad? e) Comprobar analíticamente su número de aristas. f) Hallar un grafo isomorfo con G, y dar su gráfica.

a) LLamaremos a los vértices ***1, 2, 3, 4*** y ***5***; y a las aristas ***a, b, c, ,d, e y f***



b) Recordemos que un camino de Euler es un camino simple que recorre todas las aristas sin repetirlas.

Además por el teorema correspondiente, para que exista camino de Euler el grafo debe tener todos sus vértices de grado excepto dos.

Este grafo cumple con esa condición ya que ***los vértices 1 y 4 son de grado 3 (impar) y los restantes, o sea 2, 3 y 5 son de grado 2 (par).***

Para nombrarlo listamos los vértices y aristas en el orden en que fueron recorridos. Empezando por un vértice de grado impar.

Camino de Euler: 1 ***a*** 2 ***d*** 4 ***f*** 5 ***e*** 3 ***b*** 1 ***c*** 4

Otro : ***4 f 5 e 3 b 1 a 2 d 4 c 1***

Circuito o ciclo de Euler: Es un camino de Euler que comienza y termina en el mismo vértice.

No hay ya que para que exista al menos uno todos los vértices deben tener grado par.

c) Recordemos que un camino de Hamilton es un camino simple que recorre todos los vértices sin repetirlos.

Camino de Hamilton: ***1 a 2 d 4 f 5 e 3***

Otro : ***2 d 4 c 1 b 3 e 5***

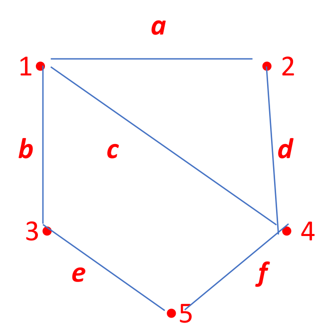
Un circuito o ciclo de Hamilton es un camino de Hamilton que comienza y termina en el mismo vértice.

Circuito de Hamilton : ***2 d 4 f 5 e 3 b 1 a 2***

d) No tiene puente ni istmo.

Recordemos que un ***Conjunto desconectante*** es un ***conjunto de dos o más aristas*** tales que al eliminarlas desconectamos al grafo. No hay un límite.

D_1 = {a,b,c} ***D_2 ={a, c, e}*** ***D_3 = {c, d, e}***



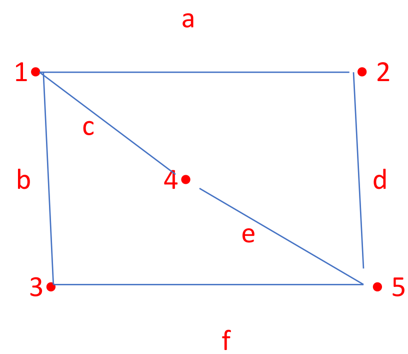
Por otra parte, llamamos ***conjunto de conectividad*** al/los conjunto/s de ***vértices de menor cardinal posible, tales que desconecten al grafo***. En nuestro ejemplo, observamos que para desconectar al grafo, al menos tenemos que eliminar los vértices ***1*** y ***4***, con sus aristas, obvio, y no hay uno de menor cardinal que 2 que lo desconecte, ya que este no posee istmos. ***G*** tiene entonces ***conectividad 2***.

e) Comprobar el número de aristas significa aplicar la propiedad fundamental de los grados de los vértices. En efecto:

gr (1) =3 , gr (2) =2 , gr (3) = 2, gr (4) = 3 y ***gr (5) = 2***

y además $\boldsymbol{3 + 2 + 2 + 3 + 2 = 12 = 2.\,6 = 2.|A|}$

V = {1, 2, 3, 4, 5} y A = {a, b, c, d, e, f}

f) 

$$\text{Ma (2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{Ma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio : Responda justificando:

a) ¿Es posible construir un grafo completo con 90 aristas? b) Dos grafos que tengan el mismo cardinal de aristas son isomorfos c) ¿Es posible que las siguientes listas representen los grados de los vértices de un grafo? Si es afirmativo, dar una resolución del grafo: c.1) 3, 2, 2, 2 y c.2) 1, 2, 2, 3, 4. d) Cuál es el valor de t en $K'_{t,15}$, si el grafo tiene 135 aristas.

a) Un grafo completo es aquel en el que todos sus vértices son adyacentes, o sea sería K_n. Según la fórmula,

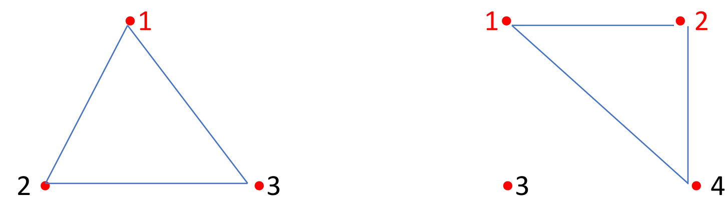
$|A| = \frac{n.(n-1)}{2}$, donde n es el número de vértices. Resulta

$90 = \frac{n.(n-1)}{2} \implies 2.90 = n.(n-1) \implies n^2 - n - 180 = 0,$

esta ecuación cuadrática tiene dos soluciones que son $\boldsymbol{n_1 = 27.851\ldots}$ y $\boldsymbol{n_2 = -25.851\ldots}$

Como ninguna de las dos es una ***solución natural***, no es posible el grafo.

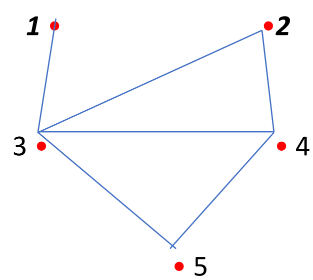
b) ***Falso*** . Ejemplo



c) c.1) 3, 2, 2, 2 . No representan los grados de los vértices de un grafo ya que ***3+2+2+2 = 9*** y como ***9 no es par, no puede ser 2.|A|***

c.2) 1, 2, 2, 3, 4. Si representan los grados de un grafo ya que

1+2+2+3+4 = 12 = 2.6 , entonces si es un grafo con ***5 vértices*** y ***6 aristas.***



d) Cuál es el valor de t en $K'_{t,15}$, si el grafo tiene 135 aristas?

$K'_{t,15}$, es el grafo bipartito completo de orden ***t*** y ***15***. Sabemos que en estos grafos,

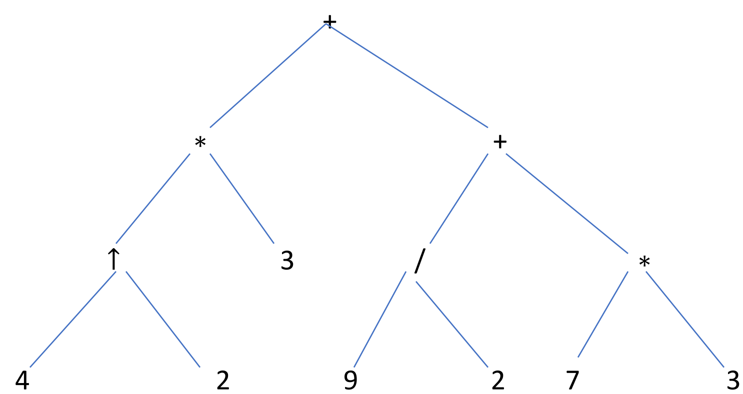
|A| = m.n, en este caso resulta ***|A| = t.15***, o sea,

t.15 = 135 $\Longrightarrow$ t = 135 : 15 = 9

Por lo tanto, el valor de t es 9

ARBOLES

Dado el siguiente árbol etiquetado .



a) Definirlo indicando la raíz y las hojas, y verificar la propiedades de vértices y aristas. b) Indicar su altura. c) Es balanceado? d) es binario? E) es completo? f) Recorrerlo en ***inorden***, en ***preorden*** y en ***post orden*** y dar sus correspondientes notaciones. g) Si es posible hallar su expresión y calcular su valor.

a) Definimos al árbol indicando su raíz, o sea, ***T(+). La raíz es + .***
Además, sabemos que las ***hojas son los vértices colgantes, o sea los de grado 1***. En este caso son *4, 2, 3, 9, 2, 7 y 3.*

Para todo árbol, se cumplen:
1) $\sum_{i=1}^{n} gr(vi) = 2.|A|$ ***, en este caso***

2+3 +3+1+1+1+3+3+3+1+1+1+1 = 24 = 2.12 = 2.|A| y además

2) ***|A| = |V| - 1 o sea 12 = 13 – 1***

b) Recordemos que la ***altura de un árbol*** es el ***mayor nivel alcanzado por sus hojas***, contando ***el nivel de la raíz como nivel 0 (cero)***. Por lo tanto, este árbol tiene ***altura 3.***

c) Un árbol ***$T(v_0)$*** es *balanceado* cuando todas sus hojas están en el nivel ***n ó n – 1***. Por lo tanto, ***T(+)*** es balanceado.

d) T(+) es binario ya que la mayor cantidad de descendientes de sus vértices es 2.

e) T(+) Es ***binario completo*** ya que todos, salvo las hojas tienen exactamente ***dos descendientes.***

f) Recorrer un árbol significa visitar todos sus vértices una sola vez.
Inorden es ***izquierda-raiz-derecha***, o sea : *(hacerlo mirando el árbol)*

4 ↑ 2 * 3 + 9 / 2 + 7 * 3 NOTACION INFIJA Ó USUAL

Preorden es raíz -izquierda-derecha, o sea : *(hacerlo mirando el árbol)*

+ * ↑ 4 2 3 + / 9 2 * 7 3 NOTACIÓN PREFIJA Ó POLACA

Post orden es ***izquierda – derecha- raíz***, o sea: *(hacerlo mirando el árbol)*

4 2 ↑ 3 * 9 2 / 7 3 * + + NOTACIÓN POST FIJA Ó POLACA INVERSA

g) Para hallar ***la expresión***, y, si es posible, calcular su valor, debemos recorrerlo en ***inorden***. Queda entonces:

$(4^2 . 3) + [(9 : 2) + (7 . 3)] = 73.5$ → ***Valor del árbol***