Álgebra y Geometría analítica II

Primer cuatrimestre de 2020

Sea la siguiente función:

$$f: R^{2x2} \to P_2 \,/\, f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a - b - d).x^2 + (c - 2b - a).x + d - a$$

a) Probar que f es transformación lineal

b) Dar una base del núcleo y una base de la imagen de f.
Dar las dimensiones de cada uno y clasificar a f

a) Probar que f es Transformación Lineal

$$f : R^{2x2} \rightarrow P_2 \, / \, f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a - b - d).x^2 + (c - 2b - a).x + d - a$$

Recordemos:

Si $f : V \rightarrow W$ es Transformación Lineal sí y solo sí :

$\Rightarrow$ $i) \; \forall \, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V : f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$

$\Rightarrow$ $ii) \; \forall k \in R \, , \forall \, \vec{v} \in V : f(k.\vec{v}) = k.f(\vec{v})$

Ejemplo Transformación Lineal

$$f: R^{2x2} \rightarrow P_2 \,/\, f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a - b - d).x^2 + (c - 2b - a).x + d - a$$

$$i)\ \forall\, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V : f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$$

Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ dos matrices en R^{2x2}

Queremos ver que: $\mathrm{f}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right] = f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

Ejemplo Transformación Lineal

$$f: R^{2x2} \to P_2 \;/\; f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a - b - d).x^2 + (c - 2b - a).x + d - a$$

Queremos ver que: $\mathrm{f}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right] = f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

$$\mathrm{f}\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right] = f\left[\begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \big(2(a + a') - (b + b') - (d + d')\big).x^2 + \big(c + c' - 2(b + b') - (a + a')\big).x + d + d' - (a + a')$$

$$= (2a + 2a' - b - b' - d - d').x^2 + (\mathrm{c} + \mathrm{c}' - 2b - 2b' - a - a').x + d + d' - a - a'$$

$$= (2a - b - d).x^2 + (c - 2b - a).x + d - a + (2a' - b' - d').x^2 + (c' - 2b' - a').x + d' - a'$$

$$= \qquad f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad + \qquad f\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

Cumple i)

Ejemplo Transformación Lineal

$$f: R^{2x2} \rightarrow P_2 \,/\, f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a - b - d).x^2 + (c - 2b - a).x + d - a$$

$ii)\ \forall k \in R\,, \forall\, \vec{v} \in V\,:\, f(k.\vec{v}) = k.f(\vec{v})$

Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y k $\in R$

Queremos ver que: $f\left[k.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = k.f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Ejemplo Transformación Lineal

$$f: R^{2x2} \to P_2 \;/\; f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a - b - d).x^2 + (c - 2b - a).x + d - a$$

Queremos ver que: $f\left[k.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = k.f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$f\left[k.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = f\left[\begin{pmatrix} k.a & k.b \\ k.c & k.d \end{pmatrix}\right] =$$

$$= (2ka - kb - kd).x^2 + (kc - 2kb - ka).x + kd - ka$$

$$= \mathrm{k}.\underbrace{\left((2a - b - d).x^2 + (c - 2b - a).x + d - a\right)}$$

$$= k. \quad f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Cumple $\boldsymbol{ii}$)

Finalmente, puedo decir que f es una Transformación Lineal

b) Dar una base del núcleo y una base de la imagen de f .
Dar las dimensiones de cada uno y clasificar a f

$$f: R^{2x2} \to P_2 \;/\; f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a - b - d).x^2 + (c - 2b - a).x + d - a$$

Ejemplo Transformación Lineal

$$f: R^{2x2} \to P_2 \,/\, f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a-b-d).x^2 + (c-2b-a).x + d - a$$

$$\boxed{Nu\ f = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R^{2x2} \,/\, f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0x^2 + 0x + 0\right\}}$$

$$(2a-b-d).x^2 + (c-2b-a).x + d - a = 0x^2 + 0x + 0$$

$$\begin{cases} 2a-b-d=0 \\ c-2b-a=0 \\ d-a=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-F_1\to F_3]{F_2+2F_1\to F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3-2F_2\to F_3]{} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} -a+d=0 \\ -b+d=0 \\ c-3d=0 \end{cases} \to \begin{cases} a=d \\ b=d \\ c=3d \end{cases}$$

Ejemplo Transformación Lineal

$$\boxed{Nu\ f = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R^{2x2} \ / \ f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0x^2 + 0x + 0 \right\}}$$

$$\begin{cases} a = d \\ b = d \\ c = 3d \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & d \\ 3d & d \end{pmatrix} = d.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Nu\ f = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

Con un único vector generamos el Núcleo

$$\boxed{B_{Nu\ f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

$$\boxed{\dim Nu\ f = 1}$$

Ejemplo Transformación Lineal

$$f: R^{2x2} \to P_2 \,/\, f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a-b-d).x^2 + (c-2b-a).x + d - a$$

$$\boxed{Im\, f = \left\{ a_2x^2 + a_1x + a_0 \in P_2 \,/\, f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a_2x^2 + a_1x + a_0 \right\}}$$

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a_2x^2 + a_1x + a_0 = (2a-b-d).x^2 + (c-2b-a).x + d - a$$

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = a.(2x^2 - x - 1) + b.(-x^2 - 2x) + c.(x) + d.(-x^2 + 1)$$

$$\boxed{Im\, f = gen\{ 2x^2 - x - 1 \,; -x^2 - 2x \,; x \,; -x^2 + 1\}}$$

Ejemplo Transformación Lineal

$$Im\ f = gen\{2x^2 - x - 1 ; -x^2 - 2x ; x ; -x^2 + 1\}$$

Claramente, como la dimensión del espacio de llegada es 3, estos vectores serán LD. Elijo sacar el cuarto vector y veo si los que me quedan son LI.

$$\alpha_1(2x^2 - x - 1) + \alpha_2(-x^2 - 2x) + \alpha_3 x = 0x^2 + 0x + 0$$

$$\begin{cases} x^2 : \ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \\ x : \ -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0 \\ T.I.: -\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Los vectores elegidos son LI

$$B_{Im\ f} = \{2x^2 - x - 1 ; -x^2 - 2x ; x\}$$

$$\dim Im\ f = 3$$

Ejemplo Transformación Lineal

$$f: R^{2x2} \to P_2 \;/\; f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a - b - d).x^2 + (c - 2b - a).x + d - a$$

Teorema de la dimensión:

$$\boxed{\dim \mathrm{V} = \dim Nu\, f + \dim Im\, f}$$

$$4 \qquad\qquad 1 \qquad\qquad \boxed{3}$$

$$\boxed{Im\, f \subseteq P_2 \;\text{ y }\; \dim Im\, f = 3 \;\Rightarrow Im\, f = P_2}$$

$$\boxed{B_{Im\, f} = E_{P_2} = \{x^2\,;x\,;1\,\}}$$

Clasificar f: $f: V \to W$

f es monomorfismo $\Leftrightarrow \dim Nu\ f = 0$

Como $\dim Nu\ f = 1$, entonces f NO es monomorfismo

f es epimorfismo $\Leftrightarrow \dim Im\ f = \dim W$

Como $\dim Im\ f = 3 = \dim P_2$, entonces f es epimorfismo

f NO es isomorfismo

Sea la siguiente función:

$$f: R^{2x2} \to P_2 \;/\; f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (2a - b - d).x^2 + (c - 2b - a).x + d - a$$

a) Probar que f es transformación lineal ✓

b) Dar una base del núcleo y una base de la imagen de f . Dar las dimensiones de cada uno y clasificar a f

$$\boxed{B_{Nu\ f} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\right\}} \qquad \boxed{\dim Nu\ f = 1}$$

$$\boxed{B_{Im\ f} = \{2x^2 - x - 1\,; -x^2 - 2x\,; x\,\}} \qquad \boxed{\dim Im\ f = 3}$$

f NO es monomorfismo, SI es epimorfismo, y por lo tanto, NO es isomorfismo