Resolución TP7:

Ejercicio 4 - a

Graficar la región de integración R y resolver la integral I.

$$R: Es\ el\ triangulo\ de\ vertices\ A = (0,0), B = (\pi, 0) y\ C = (\pi, \pi)$$

$$I = \iint_R x\cos(x + y)dxdy$$

Resolviendo:

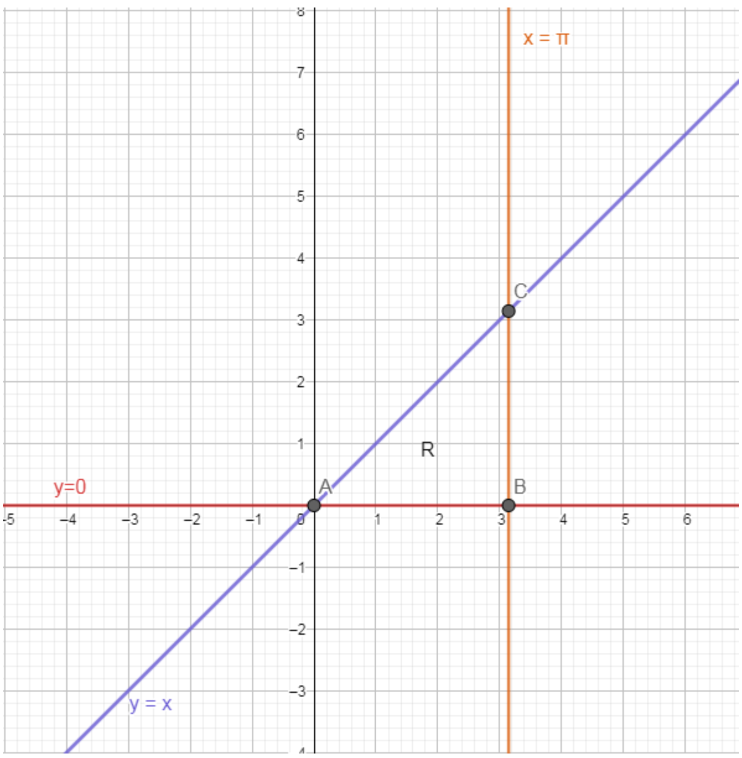
Para poder graficarlo en este caso en geogebra. Vamos a necesitar las ecuaciones de las rectas que definen el recinto.

entre el punto $A = (0,0)\ y\ B = \ (\pi, 0)$ podemos deducir $y = 0$.

entre el punto $B = (\pi, 0) y\ C = (\pi, \pi)$ podemos deducir $x = \pi$.

entre el punto $A = (0,0)\ y\ C = \ (\pi, \pi)$ podemos deducir $y = x$.

Para utilizar un método no deductivo ver al final.



Resolviendo la Integral.

Primero, debemos expresar el orden de integración que vamos a tomar. En este caso será de Tipo I (y dependiente de x).

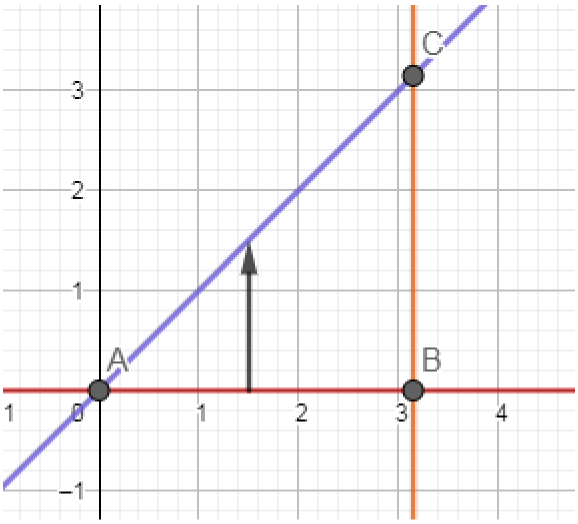
Segundo se debe expresar el recinto para que pueda ser operable en la formula de integral.

$$I = \iint_R xcos(x+y)dxdy = \int_{x=a}^{x=b} \int_{y=p(x)}^{y=t(x)} xcos(x+y)dydx$$

Podemos entonces decir que haber expresado las ecuaciones de las rectas tiene una utilidad directa sobre el cálculo.

Nótese que para expresar el recinto las rectas deben se convierten en inecuaciones.

Al tomar a y como dependiente de x. al observar su comportamiento se deduce que el techo es la recta $y = x$ y el piso $y = 0$:



Así mismo al tomar a x como variable final esta se mueve entre valores constantes 0 y π

$$R: \begin{cases} Es\ el\ triangulo\ de \\ vertices\ A = (0,0), \\ B = (\pi, 0) y\ C = (\pi, \pi) \end{cases} ==> R: \begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$$

$$I = \iint_R xcos(x+y)dxdy = \int_{x=0}^{x=\pi} \int_{y=0}^{y=x} xcos(x+y)dydx$$

Tomando la sustitución $x + y = u; dy = du$

$$I = \int_{x=0}^{x=\pi} \int_{y=0}^{y=x} xcos(u)dudx$$

$$I = \int_{x=0}^{x=\pi} [xsenu]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$I = \int_{x=0}^{x=\pi} [xsen(x + y)]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$I = \int_{x=0}^{x=\pi} (xsen(2x) - \ x\ sen(x))dx$$

$$I = \int_{x=0}^{x=\pi} xsen(2x)dx - \int_{x=0}^{x=\pi} x\ sen(x)dx$$

Ver cálculos auxiliares

$$I = \left(-\frac{1}{2}\pi\right) - (\pi) = -\frac{3}{2}\pi$$

C/A

Aplicando método de integración por partes

$$x = u; \rightarrow dx = du$$

$$sen(2x)dx = dv \rightarrow v = -\frac{1}{2}\cos(2x)$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$I = \left[-\frac{1}{2}xcos(2x) + \frac{1}{4}sen(2x) \right]_{x=0}^{x=\pi}$$

$$x = u; \rightarrow dx = du$$

$$sen(x)dx = dv \rightarrow v = -\cos(x)$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$I = \left[-xcos(x) + sen(x) \right]_{x=0}^{x=\pi}$$

$$I = \int_{x=0}^{x=\pi} xsen(2x)dx - \int_{x=0}^{x=\pi} x\, sen(x)dx$$

$$I = \left[-\frac{1}{2}xcos(2x) + \frac{1}{4}sen(2x) \right]_{x=0}^{x=\pi} - \left[-xcos(x) + sen(x) \right]_{x=0}^{x=\pi}$$

$$I = I_a - I_b$$

Tomemos

$$Ia = \int_{x=0}^{x=\pi} xsen(2x)dx$$

$$Ia = \left[\left(-\frac{1}{2}\pi\cos(2\pi) + \frac{1}{4}sen(2\pi)\right) - \left(-\frac{1}{2}(0)\cos(0) + \frac{1}{4}sen(0)\right)\right]$$

$$Ia = \left[\left(-\frac{1}{2}\pi(1) + \frac{1}{4}(0)\right) - \left(-\frac{1}{2}(0)(1) + \frac{1}{4}(0)\right)\right]$$

$$Ia = \left[\left(-\frac{1}{2}\pi + 0\right) - (-0 + 0)\right] = -\frac{1}{2}\pi$$

$$Ib = \int_{x=0}^{x=\pi} xsen(x)dx$$

$$Ib = [(-\pi\cos(\pi) + sen(\pi)) - (-(0)\cos(0) + sen(0))]$$

$$Ib = [(-\pi(-1) + (0)) - (-(0)(1) + 0)]$$

$$Ib = [(\pi + (0)) - (-0 + 0)] = \pi$$

Verificando la Integral (Aplicando Teorema de Fubbini).

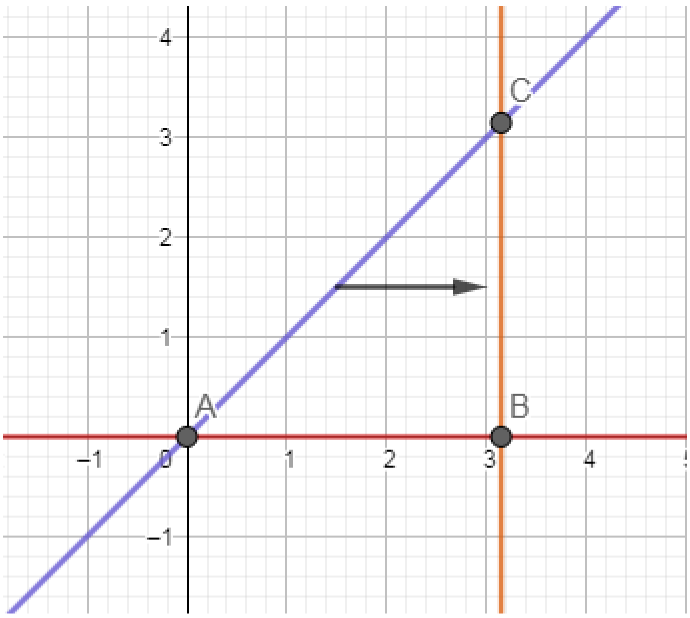
Según el teorema, el resultado de la integral es el mismo aplicando el orden Tipo I (y dependiente de x) o el orden Tipo II (x dependiente de y).

$$I = \iint_R x\cos(x+y)dxdy = \int_{y=a}^{y=b}\int_{x=p(y)}^{x=t(y)} x\cos(x+y)dxdy$$

Podemos entonces decir que haber expresado las ecuaciones de las rectas tiene una utilidad directa sobre el cálculo.

Nótese que para expresar el recinto las rectas deben se convierten en inecuaciones.

Al tomar a x como dependiente de y. al observar su comportamiento se deduce que el piso es la recta $x = y$ y el techo $x = \pi$:



Así mismo al tomar a y como variable final esta se mueve entre valores constantes 0 y π

$$R: \begin{cases} Es\ el\ triangulo\ de \\ vertices\ A = (0,0), \\ B = (\pi, 0) y\ C = (\pi, \pi) \end{cases} ==> R: \begin{cases} 0 \le y \le \pi \\ y \le x \le \pi \end{cases}$$

$$I = \iint_R xcos(x+y)dxdy = \int_{y=0}^{y=\pi}\int_{x=y}^{x=\pi} xcos(x+y)dxdy$$

$$I = \int_{y=0}^{y=\pi}\int_{x=y}^{x=\pi} xcos(x+y)dxdy$$

Aplicando método de integración por partes

$$x = u; \rightarrow dx = du$$

$$\cos(x+y)\,dx = dv \rightarrow v = sen(x+y)$$

$$I = \int_{y=0}^{y=\pi} [xsen(x+y) + \cos\,(x+y)]_{x=y}^{x=\pi} dy$$

$$I = \int_{y=0}^{y=\pi} \pi sen(\pi+y) + \cos(\pi+y) - ysen(2y) - \cos(2y)\,dy$$

$$I = \left[-\pi\cos(\pi+y) + sen(\pi+y) + \frac{1}{2}ycos(2y) - \frac{1}{4}sen(2y) - sen(2y)\right]_{y=0}^{y=\pi}$$

Ver cálculos auxiliares

$$I = \left(-\frac{1}{2}\pi\right) - (\pi) = -\frac{3}{2}\pi$$

C/A

Evaluando la primitiva

$$P(y) = -\pi\cos(\pi+y) + sen(\pi+y) + \frac{1}{2}ycos(2y) - \frac{1}{4}sen(2y) - sen(2y)$$

$$P(\pi) = -\pi\cos(2\pi) + sen(2\pi) + \frac{1}{2}\pi cos(2\pi) - \frac{1}{4}sen(2\pi) - sen(2\pi)$$

$$P(\pi) = -\pi(1) + (0) + \frac{1}{2}\pi(1) - \frac{1}{4}(0) - (0) = -\frac{1}{2}\pi$$

$$P(0) = -\pi\cos(\pi) + sen(\pi) + \frac{1}{2}(0)cos(0) - \frac{1}{4}sen(0) - sen(0)$$

$$P(0) = -\pi(-1) + (0) + \frac{1}{2}(0)(1) - \frac{1}{4}(0) - (0) = \pi$$

C/A

Hallar ecuación de la recta:

Para utilizar un método podemos expresar la ecuación de la recta de forma paramétrica

Entre el punto $A = (0{,}0)\ y\ C = \ (\pi, \pi)$ podemos deducir $y = x$.

.

$$r(t) = A + t(C - A)$$

$$r(t) = (0{,}0) + t(\pi - 0, \pi - 0)$$

$$r(t) = (0{,}0) + t(\pi, \pi)$$

$$r(t) = (\pi t, \pi t)$$

$$r(t) = (x(t), y(t)) = (\pi t, \pi t)$$

$$\begin{cases} x(t) = \pi t \\ y(t) = \pi t \end{cases} => \begin{cases} \dfrac{x}{\pi} = t \\ \dfrac{y}{\pi} = t \end{cases} => t = t => \frac{x}{\pi} = \frac{y}{\pi} => x = y$$

Entre el punto $B = (1{,}2)\ y\ C = \ (5{,}6)$ podemos deducir $y = x$.

.

$$r(t) = A + t(C - A)$$

$$r(t) = (1{,}2) + t(5 - 1{,}6 - 2)$$

$$r(t) = (1{,}2) + t(4{,}4)$$

$$r(t) = (1 + 4t, 2 + 4t)$$

$$r(t) = (x(t), y(t)) = (1 + 4t, 2 + 4t)$$

$$\begin{cases} x(t) = 1 + 4t \\ y(t) = 2 + 4t \end{cases} => \begin{cases} \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{4} = t \\ \dfrac{y}{4} - \dfrac{1}{2} = t \end{cases} => t = t => \frac{x}{4} - \frac{1}{4} = \frac{y}{4} - \frac{1}{2} => x = y + 2$$