T P 04 Ej. 30-iv

Aplicando la regla de la cadena, calcular las derivadas de las funciones compuestas que se indican:

Calcular F_x, F_yy F_y donde F = G o H

$$\begin{cases} G(u,v,w) = \big(G_1(u,v,w), G_2(u,v,w), G_3(u,v,w)\big) = (u+v, u^2v) \\ H(x,y,z) = (u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)) = (x+y+z, z, x-z) \end{cases}$$

Para resolver este ejercicio debemos aplicar, como bien dice el enunciado, la regla de la cadena. La herramienta a usar es la Matriz Jacobiana, ya ejercitado en ejercicios anteriores. Como estamos buscando las derivadas parciales de la composición de dos funciones, El Jacobiano va a obtenerse del producto de dos matrices.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \cdots & \alpha \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z & \cdots & \omega \end{bmatrix}$$

donde g_m son las componentes del campo G y h_n son las componentes del campo H.

Si miramos la matriz resultante, la drivada parcial de la composición con respecto a la primera variable es:

F_{x_1}=(a,b,c,…) las componentes dependen de filas que tenga la matriz resultante

$\vdots$

F_{x_n}=(α, β, γ, ...) las componentes dependen de filas que tenga la matriz resultante.

Ahora, vamos al ejercicio en cuestión:

$$J = \begin{bmatrix} G_{1_u} & G_{1_v} & G_{1_w} \\ G_{2_u} & G_{2_v} & G_{2_w} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix}$$

Operando

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & w^2 & 2wv \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Operando

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2wv & 0 & w^2 - 2wv \end{bmatrix}$$

Ahora lo que hay que haces es reemplazar u y v por su equivalente denotado en la función α:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2z(x-z) & 0 & (x-z)^2 - 2z(x-z) \end{bmatrix}$$

Una vez obtenida esta matriz, expresamos las derivadas parciales:

$F_x = (1,\, 2z(x-z))$

$F_y = (1,0)$

$F_z = (2, (x-z)^2 - 2zx + 2z^2))$