T P 08 Ej. 4-a

Calcular la longitud de la curva definida por:

$$\bar{r}: [0, 2\pi] \to \boldsymbol{R}^2, con\ \bar{r}(t) = (1 + 2\cos t\,, 2 + 2\ sen\ t)$$

Para calcular la longitud de una curva a partir de su parametrización, utilizamos:

$$L(C) = \int_a^b \|\bar{r}'(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

Analicemos la expresión anterior.

Los valores a y b, son los extremos entre los cuales varía la variable t. En nuestro caso son $0\ y\ 2\pi$.

El integrando es la norma de la derivada de la parametrización, por lo que se puede escribir como la raíz cuadrada de la suma de las componentes al cuadrado.

Si tenemos la parametrización $\bar{r}(t) = (1 + 2\cos t\,, 2 + 2\ sen\ t)$, entonces:

$$x(t) = 1 + 2\cos t$$

$$y(t) = 2 + 2\ sen\ t$$

Por lo que sus derivadas serán:

$$x'(t) = -2\operatorname{sen} t$$

$$y'(t) = 2\cos t$$

Entonces tenemos todos los valores necesarios para calcular la integral que precisamos para conocer la longitud de la curva.

$$\int_a^b \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-2\operatorname{sen} t)^2 + (2\cos t)^2}\, dt$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(-2)^2(\operatorname{sen} t)^2 + (2)^2(\cos t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\ sen^2(t) + 4\ cos^2(t)}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\ (sen^2(t) +\ cos^2(t))}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4}\, dt = \int_0^{2\pi} 2\, dt = 2t\Big|_0^{2\pi} = 2(2\pi) - 2(0) = \boldsymbol{4\pi}$$

Por lo tanto, la longitud de la curva es 4π