Integrales dobles
Coordenadas polares 2da parte.
Guía de clase. Com 02

Ejercicio 1

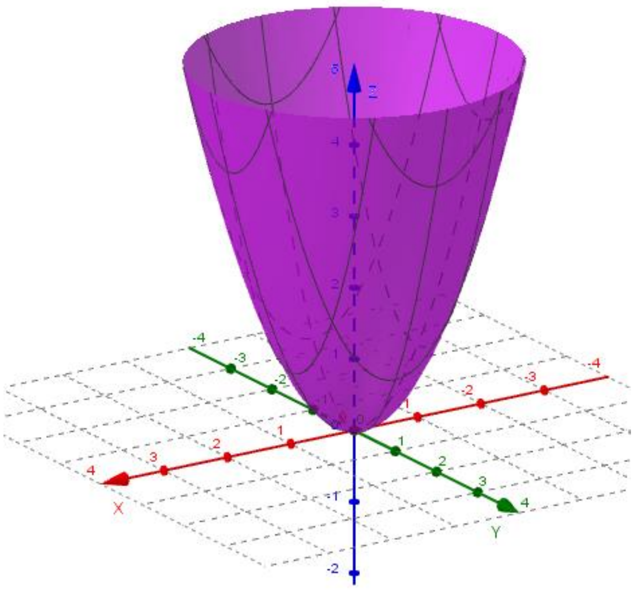
Calcular el volumen delimitado por las superficies

$z = 0$, y, $z = x^2 + y^2$,

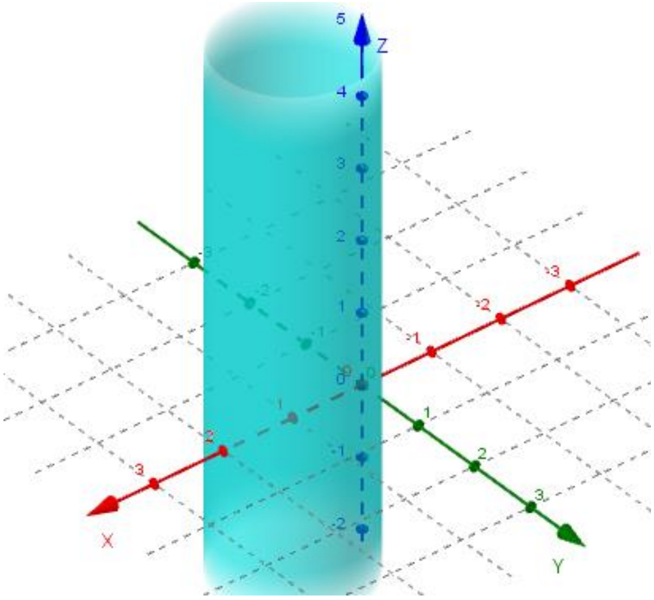
para los puntos (x, y) del recinto $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$

Resolución:($(x-1)^2 + y^2 = 1$)

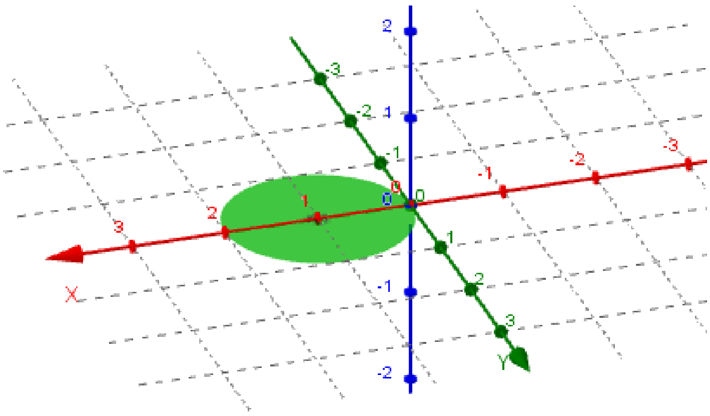
Paraboloide



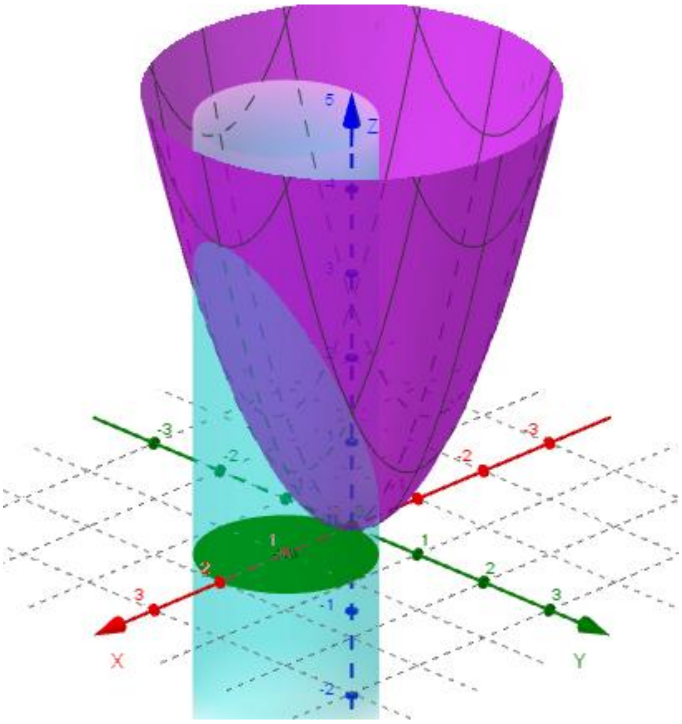
Cilindro $(x-1)^2 + y^2 = 1$



Recinto



Cuerpo



Cálculo del volumen

$$V = \iint_R (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

Descripción del recinto $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ en coordenadas polares

$$\begin{cases} x = 1 + r\cos(\theta) \\ y = r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases} \qquad R': \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\,\pi \end{cases} \qquad |J| = r$$

Aplicando el teorema de cambio de variables para integrales dobles, el cálculo del volumen pedido, en coordenadas polares es

$$V = \iint_R (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \iint_{R'} \left((1 + r\cos(\theta))^2 + (r\,\mathrm{sen}(\theta))^2\right) r\, dr\, d\theta =$$

$$= \iint_{R'} (r + 2r^2\cos(\theta) + r^3)\, dr\, d\theta = \int_{\theta=0}^{2\,\pi} \int_{r=0}^{1} (r + 2r^2\cos(\theta) + r)\, dr\, d\theta = \frac{3}{2}\pi$$

Qué cambiaría en el planteo de la integral si el recinto fuera

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ \ y \geq 0\}$$

$$\begin{cases} x = 1 + r\cos(\theta) \\ y = r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases} \qquad R'\colon \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases} \qquad |J| = r$$

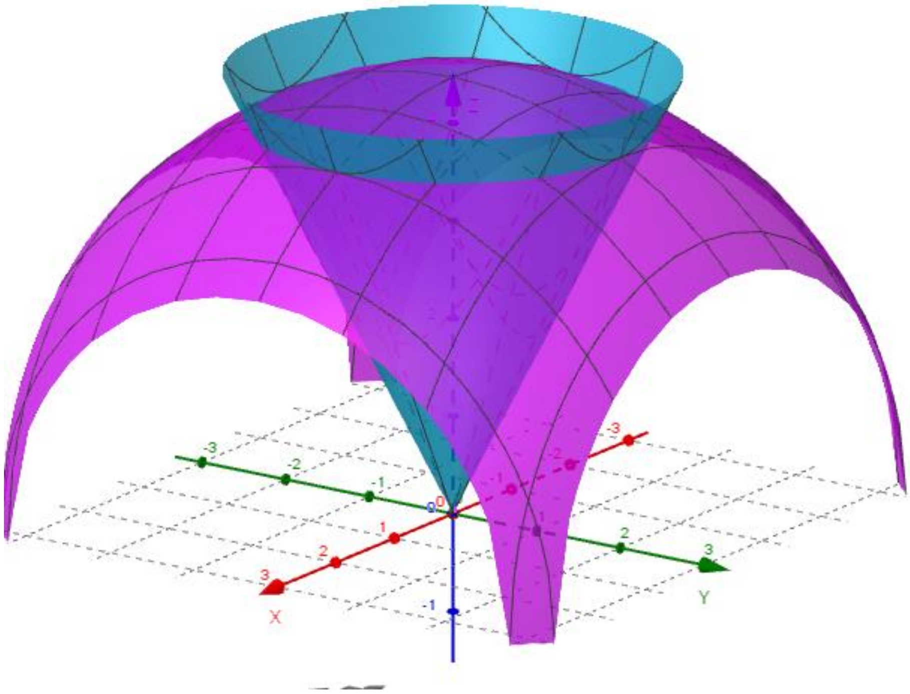
Ejercicio 2

Calcular el volumen delimitado por la superficie del cono de ecuación $z = f(x,y) = 2\sqrt{x^2+y^2}$ y la semiesfera de ecuación $z = g(x,y) = \sqrt{20 - x^2 - y^2}$.

$$\text{Esfera: } x^2+y^2+z^2 = 20$$

$$\text{Cono (doble): } x^2+y^2 = \frac{z^2}{4}$$

$$\text{Cono: } x^2+y^2 = \frac{z^2}{4}, \quad z \ge 0$$



Propiedad

Sean $f, g\colon R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dos funciones continuas de variables x, y.

R un recinto acotado del plano y

$$f(x,y) \le g(x,y) \quad \forall (x,y) \in R$$

Entonces la integral

$$\iint_R \big(g(x,y) - f(x,y)\big)\,dx\,dy$$

Correesponde al volumen del cuerpo delimitado por las superficies de las gráficas de f y g para puntos $(x,y) \in R$.

Volviendo al ejercicio, el recinto R tendrá como curva frontera la que resulta de hallar los puntos (x, y) dónde $f(x, y) = g(x, y)$

$$z = f(x, y) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = g(x, y) = \sqrt{20 - x^2 - y^2}$$

$$\left(2\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{20 - x^2 - y^2}\right)^2$$

$$4(x^2 + y^2) = 20 - x^2 - y^2$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

Entonces el recinto R es

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$V = \iint_R \big(g(x, y) - f(x, y)\big)\, dx\, dy = \iint_R \left(\sqrt{20 - x^2 - y^2} - 2\sqrt{x^2 + y^2}\right)\, dx\, dy \overset{*}{=}$$

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Frontera del recinto: circunferencia de centro $C = (0,0)$ y radio 2.

En coordenadas polares resulta

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases} \qquad R' : \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \qquad |J| = r$$

$$\overset{*}{=} \iint_{R'} \left(\sqrt{20 - [(r\cos(\theta))^2 + (r\,\mathrm{sen}(\theta))^2]} - 2\sqrt{(r\cos(\theta))^2 + (r\,\mathrm{sen}(\theta))^2}\right) r\, dr\, d\theta =$$

$$= \iint_{R'} \left(\sqrt{20 - r^2} - 2\underbrace{\sqrt{r^2}}_{r \geq 0}\right) r\, dr\, d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{2} \left(\underbrace{r\sqrt{20 - r^2}}_{Sustitución} - 2r^2\right) dr\, d\theta =$$

$$= \frac{40}{3}\sqrt{5}\,\pi - \frac{160}{3}\pi$$

Cálculo de áreas con integrales dobles

$$\int_{x=a}^{b} \underbrace{f(x)}_{h} \underbrace{\underbrace{dx}_{\Delta x \to 0}}_{base}$$

$$\iint_R \underbrace{1}_{h=f(x,y)} \underbrace{dx\,dy}_{dA} =$$

¿Qué interpretación geométrica puede darse a la integral anterior?

Volumen del cuerpo de altura 1 y área de la base R, pero también será el valor numérico del área del recinto R.

$$Valor\ numérico\ área\ (R) = \iint_R 1\,dx\,dy = Área(R)$$

Ejercicio 3

Calcular el área del recinto elíptico (elipse) dado por

$$R\colon \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} \leq 1$$

$$Área(R) = \iint_R 1\,dx\,dy =$$

Recinto en coordenadas polares

$$\left(\frac{x-h}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-k}{b}\right)^2 \leq 1$$

$$(r\cos(\theta))^2 + (r\,\mathrm{sen}(\theta))^2 = r^2 \leq 1$$

$$\begin{cases} x = h + a\,r\cos(\theta) \\ y = k + b\,r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases} \qquad R'\colon \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \qquad |J| = abr$$

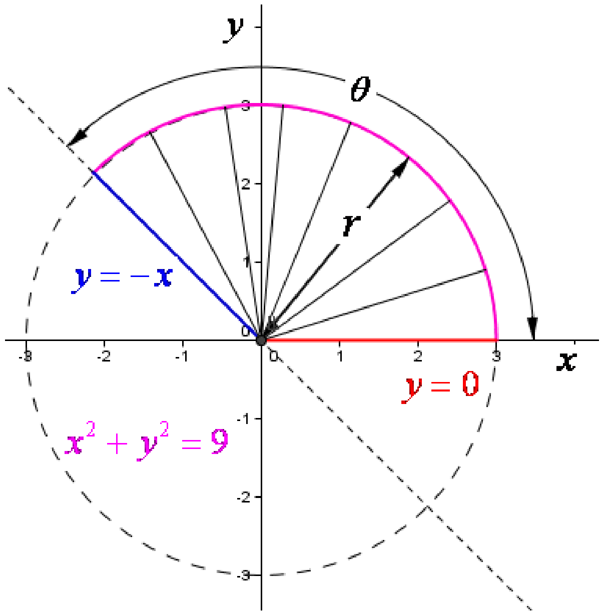
$$Área(R) = \iint_R 1\,dx\,dy = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} 1\,abr\,dr\,d\theta = ab\pi$$

Ejercicio 4

Calcular

$$\iint_S \frac{1}{1+4x^2+4y^2}\, dx\, dy=$$

$$S=\{(x,y)/x^2+y^2\leq 9; y\geq 0; y\geq -x\}$$

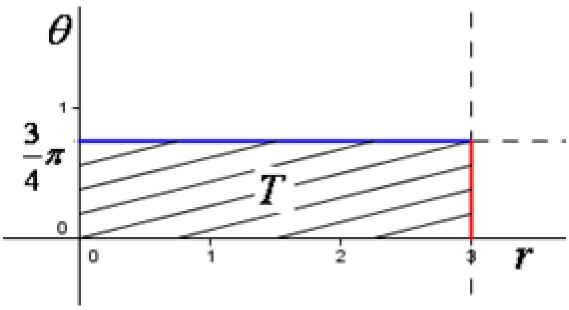


Haciendo

$(x,y)=(x(r,\theta),y(r,\theta))=(r\cos\theta\,, r\,sen\theta)$

la región T se aplica sobre la región S.

$$0\leq r\leq 3; 0\leq\theta\leq\frac{3}{4}\pi$$



Como $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=r$

Queda:

$$\iint_S \frac{1}{1+4x^2+4y^2}\, dx\, dy=\iint_T \frac{1}{1+4r^2}\, r\, dr\, d\theta \overset{*}{=} \int_{\theta=0}^{\frac{3}{4}\pi} d\theta \int_{r=0}^{3} \frac{1}{8}\, \frac{8r}{1+4r^2}\, dr =$$

$$= \frac{3}{4}\pi\frac{1}{8}\left(ln(1+4r^2)\big|_{r=0}^{3}\right) = \frac{3}{4}\pi\frac{1}{8}\left(ln(1+4(3)^2) - \underbrace{ln(1+4.0^2)}_{0}\right) = \frac{3}{32}\pi\, ln\, 3\, 7$$

* Se usó la propiedad

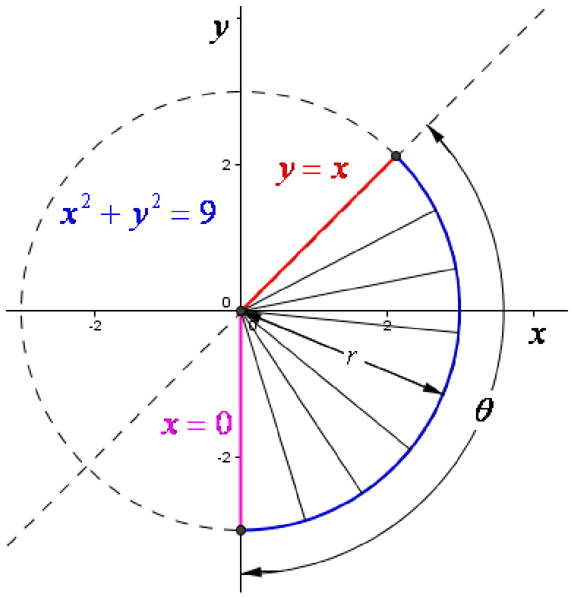
$$\int_{x=a}^{b}\int_{y=c}^{d} f(x)\, g(y)\, dy\, dx = \left(\int_{x=a}^{b} f(x)\, dx\right)\left(\int_{y=c}^{d} g(y)\, dy\right)$$

Ejercicio 5

Calcular

$$\iint_R \frac{2}{1+x^2+y^2}\, dxdy$$

$$R = \{(x,y)/x^2+y^2 \le 9; x \ge 0; y \le x\}$$



$$\theta_i \le \theta \le \theta_s$$

$$\theta_i < \theta_s$$

$$\theta_i = \frac{3}{2}\pi, \theta_s = \frac{9}{4}\pi$$

$$\theta_i = -\frac{\pi}{2}, \qquad \theta_s = \frac{\pi}{4}$$

Haciendo

$$(x, y) = (x(r, \theta), y(r, \theta)) = (r \cos\theta\,, r\, sen\theta)$$

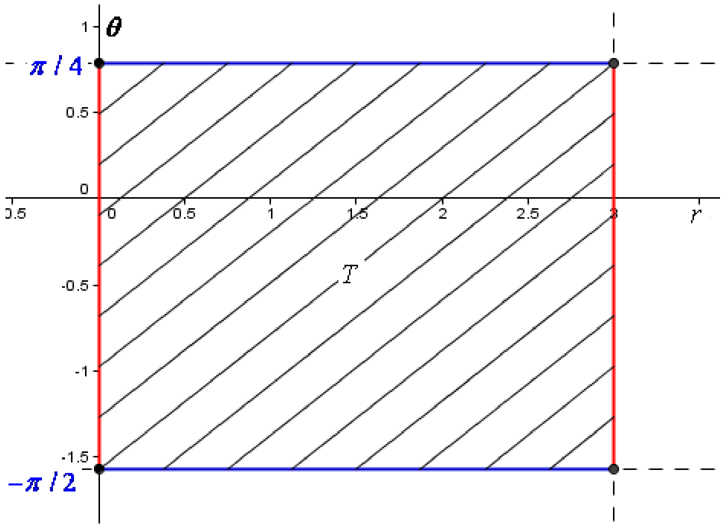
Son equivalentes:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

$$3\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9}{4}\pi$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \quad y \quad 3\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$$

La región T se aplica sobre la región R



Como $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r$

Queda:

$$\iint_R \frac{2}{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy = \iint_T \frac{2}{1 + r^2}\, r\, dr\, d\theta = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/4} \left[\int_{r=0}^{3} \frac{2r}{1 + r^2} dr\right] d\theta$$

$$= \int_{\theta=\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} ln(1 + r^2)\Big|_{r=0}^{3}\, d\theta = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/4} ln\,10\, d\theta = ln\,10\left(\theta\Big|_{\theta=\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$= ln\,10\left(\frac{\pi}{4} - \left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) = \frac{3}{4}\pi\, ln\,10$$

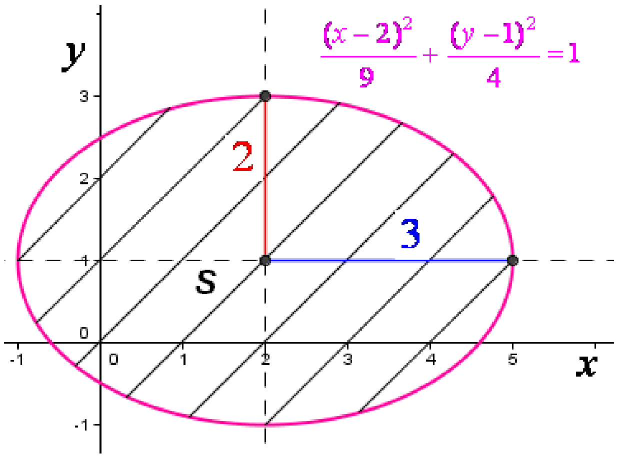
Ejercicio 6

Calcular

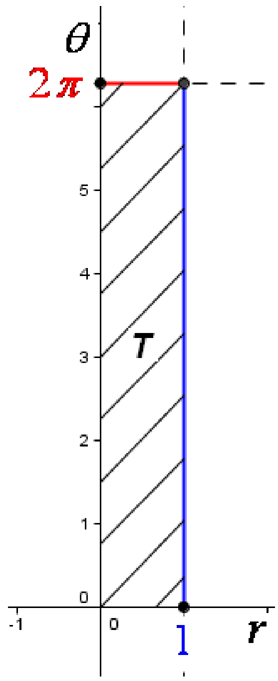
$$\iint_S xy\,dx\,dy =$$

Si

$$S = \left\{(x,y)/\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} \le 1\right\}$$



La función:



$$(x,y) = (x(r,\theta), y(r,\theta)) = (3r\cos\theta + 2, 2r\,sen\theta + 1)$$

aplica la región T sobre la región S con jacobiano

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \left|Det\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix}\right| = \left\|\begin{matrix} 3\cos\theta & -3r\,sen\theta \\ 2\,sen\theta & 2r\cos\theta \end{matrix}\right\| = 6r$$

Luego la nueva integral en coordenadas polares es:

$$\iint_S xy\,dx\,dy = \int_{\theta=0}^{2\pi}\left[\int_{r=0}^{1}(3r\cos\theta+2)(2r\,sen\theta+1)6\,r\,dr\right]d\theta$$

$$= \int_{r=0}^{1}\left[\int_{\theta=0}^{2\pi}(36r^3\cos\theta\,sen\theta + 18r^2\cos\theta + 24r^2 sen\theta + 12r)d\theta\right]dr$$

$$= \int_{r=0}^{1} \left[36r^3 \underbrace{\left(\frac{sen^2\theta}{2} \bigg|_{\theta=0}^{2\pi} \right)}_{0} + 18r^2 \underbrace{\left(sen\theta|_{\theta=0}^{2\pi} \right)}_{0} + 24r^2 \underbrace{\left(-\cos\theta|_{\theta=0}^{2\pi} \right)}_{0} + 12r\left(\theta|_{\theta=0}^{2\pi}\right) \right] dr$$

$$= \int_{r=0}^{1} 24\pi\, r\, dr \ = 24\pi \left(\frac{r^2}{2} \bigg|_{r=0}^{1} \right) = 12\pi$$

Ejercicio 7

Calcular el volumen

$$V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,\ \ z \geq \sqrt{x^2 + y^2},\ \ x \geq 0$$

Ejercicio 8

Calcular el volumen

$$V: \frac{x^2 + y^2}{2} \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$