T P 08 Ej. 19-b

Utilizando el teorema de Green, evaluar la siguiente integral de línea

$$\oint_c (x^2 + y^2)\, dx + \left(\frac{2}{3}x^3y + x\right) dy$$

C es la circunferencia de centro $(1,1)$ y radio 1.

En este ejercicio se pide evaluar una integral de línea utilizando el Teorema de Green; eso quiere decir que en lugar de calcular la integral de línea debemos calcular una integral doble.

El teorema de Green dice:

$$\oint_C P\, dx + Q dy = \iint_R \left[Q_x - P_y\right] dx\, dy$$

Donde R es la región encerrada por la curva c.

Es decir que calcular la integral de línea del campo vectorial $F(x, y) = (P, Q)$ a lo largo de la curva c, da el mismo resultado que calcular la integral doble sobre la región R de $Q_x - P_y$.

Por lo tanto debemos identificar el campo $F(x, y) = (P, Q)$ y obtener Q_x y P_y para luego calcular una integral doble en la región delimitada por la circunferencia del enunciado.

$$F(x, y) = \left(x^2 + y^2, \frac{2}{3}x^3y + x\right)$$

Por lo que

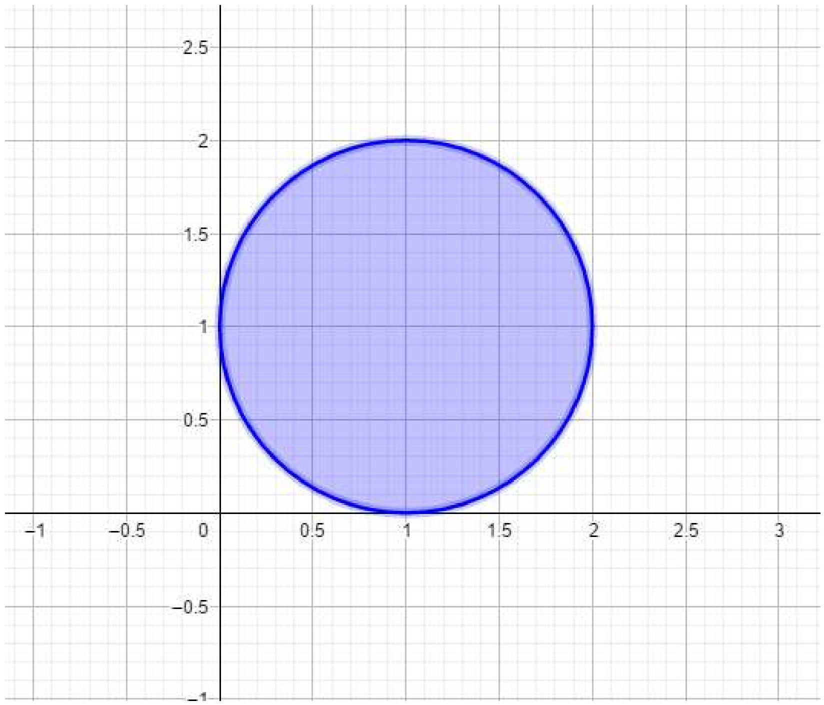
$$Q_x(x, y) = 2x^2y + 1$$

$$P_y(x, y) = 2y$$

Y finalmente

$$Q_x - P_y = 2x^2y - 2y + 1$$

La región sobre la que debemos integral es una circunferencia por lo que vamos a utilizar un cambio a coordenadas polares para resolverla



La integral que deberíamos resolver es:

$$\iint_R [2x^2y - 2y + 1]\, dx\, dy$$

Pero aplicando cambio a coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta + 1$$

$$y = r \operatorname{sen}\theta + 1$$

$$|J| = r$$

$$0 \le r \le 1$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

La integral como:

$$\int_{r=0}^{1} \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} \left(2(r\cos\theta + 1)^2 (r\operatorname{sen}\theta + 1) - 2(r\operatorname{sen}\theta + 1) + 1\right) r\, d\theta \right) dr$$

Resolvemos:

$$\int_{r=0}^{1}\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}(2(r^2\,cos^2\theta+2r\cos\theta+1)(r\operatorname{sen}\theta+1)-2r\operatorname{sen}\theta-2+1)\,r\,d\theta\right)dr$$

$$\int_{r=0}^{1}\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}(2(\,r^3\,cos^2\theta\operatorname{sen}\theta+2r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta+r\operatorname{sen}\theta+r^2\,cos^2\theta+2r\cos\theta+1)-2r\operatorname{sen}\theta-1)\,r\,d\theta\right)dr$$

$$\int_{r=0}^{1}\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}(2r^4\,cos^2\theta\operatorname{sen}\theta+4r^3\cos\theta\operatorname{sen}\theta+2r^2\operatorname{sen}\theta+2r^3\,cos^2\theta+4r^2\cos\theta+2r-2r^2\operatorname{sen}\theta-r)\;\,d\theta\right)dr$$

$$\int_{r=0}^{1}\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}2r^4\,cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\,d\theta\right)dr$$
$$+\int_{r=0}^{1}\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}4r^3\cos\theta\operatorname{sen}\theta\,d\theta\right)dr$$
$$+\int_{r=0}^{1}\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}2r^3\,cos^2\theta\,d\theta\right)dr$$
$$+\int_{r=0}^{1}\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}4r^2\cos\theta\,d\theta\right)dr$$
$$+\int_{r=0}^{1}\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}r\,d\theta\right)dr$$

Tenemos 5 integrales que resolver, pero sólo 3 presentan alguna complicación por lo que vamos a calcularlas por separado y luego volvemos a la integral principal con su primitiva:

Para la integral

$$\int cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

Utilizamos la sustitución:

$$u=\cos\theta$$

$$du=sen\;\theta\;d\theta$$

$$\int u^2du=\frac{u^3}{3}=\frac{\cos\theta^3}{3}$$

Para la integral

$$\int cos\,\theta \operatorname{sen}\theta \; d\theta$$

Utilizamos la sustitución:

$$u = \cos\theta$$

$$du = sen\;\theta\; d\theta$$

$$\int u\; du = \frac{u^2}{2} = \frac{\cos^2\theta}{2}$$

Para la integral

$$\int cos^2\,\theta\; d\theta$$

Vamos a usar la equivalencia trigonométrica:

$$cos^2\,\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

Por lo que la integral se convierte en:

$$\int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\theta)}{2}\right) d\theta = \int \frac{1}{2} d\theta + \int \frac{\cos(2\theta)}{2} d\theta$$

Y para la segunda utilizamos la sustitución:

$$u = 2\theta$$

$$du = 2\; d\theta$$

$$\frac{du}{2} = d\theta$$

$$\frac{1}{2}\theta + \int \frac{\cos(u)}{4} du = \frac{1}{2}\theta + \frac{\operatorname{sen}(u)}{4} = \frac{1}{2}\theta + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4}$$

Con estos resultados volvemos a la integral principal:

$$\int_{r=0}^{1} 2r^4 \left(\frac{\cos\theta^3}{3}\Bigg|_0^{2\pi}\right) dr$$

$$+\int_{r=0}^{1} 4r^3 \left(\frac{\cos^2\theta}{2}\Bigg|_0^{2\pi}\right) dr$$

$$+\int_{r=0}^{1} 2r^3 \left(\frac{1}{2}\theta + \frac{\mathrm{sen}(2\theta)}{4}\Bigg|_0^{2\pi}\right) dr$$

$$+\int_{r=0}^{1} 4r^2 \left(sen\theta\,\Bigg|_0^{2\pi}\right) dr$$

$$+\int_{r=0}^{1} r\left(\theta\Bigg|_0^{2\pi}\right) dr$$

Tanto el seno como el coseno tienen un período de 2π por lo que en todos los casos donde tengamos que evaluar el seno, el coseno o cualquiera de sus potencias en 0 y en 2π, el resultado va a ser el mismo, por lo que se anulan uno con el otro.

Reescribiendo sólo las partes de la integral que no se anulan, obtenemos:

$$\int_{r=0}^{1} 2r^3 \frac{1}{2}(2\pi)\, dr$$

$$+\int_{r=0}^{1} r\left(\theta\Bigg|_0^{2\pi}\right) dr$$

Y terminando de resolver:

$$2\pi\int_{r=0}^{1} r^3\, dr + 2\pi\int_{r=0}^{1} r\, dr = 2\pi\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^1 + 2\pi\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\pi$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\iint_R \left[2x^2y - 2y + 1\right] dx\, dy = \frac{3}{2}\pi}$$