# ALGEBRA II.

## Espacios euclídeos: proyección ortogonal.

---

(14) Sea $(E\ ,\ <,>)$ un espacio euclídeo y $W \subseteq E$ un subespacio de dimensión 2 con base ortonormal $\{v_1,\ v_2\}$. Sea $v \in E$ tal que $\|v\| = 4$, $< v\ ,\ v_1 >= 3/2$ y $< v, v_2 >= 2$. Hallar la distancia de $v$ a $W$.

*Solución.* Del ejercicio 13 (minimización de la distancia a un subespacio) sabemos que la distancia de un vector a un subespacio es simplemente la distancia del vector a su proyección ortogonal, esto es, si $v \in E$, $W$ es subespacio de $E$ y $v_W$ denota la proyección ortogonal de $v$ sobre $W$ entonces

$$dist(v, W) = \inf_{w \in W} \|v - w\| = \|v - v_W\|\,.$$

Por lo tanto, para hallar la distancia de $v$ a $W$, debemos comenzar buscando $v_W$. Ahora, como $\{v_1, v_2\}$ es base ortonormal de $W$ resulta que

$$v_W =< v, v_1 > \cdot v_1+ < v, v_2 > \cdot v_2,$$

y en nuestro caso

$$v_W = \frac{3}{2}v_1 + 2v_2$$

de donde sigue que

$$\begin{aligned}
\|v_W\|^2 \;=\; < v_W, v_W > &= < \tfrac{3}{2}v_1 + 2v_2, \tfrac{3}{2}v_1 + 2v_2 > \\
&= \tfrac{3}{2} < v_1, \tfrac{3}{2}v_1 + 2v_2 > +2 < v_2, \tfrac{3}{2}v_1 + 2v_2 > \\
&= \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 < v_1, v_1 > +\tfrac{3}{2}\cdot 2 < v_1, v_2 > +2\cdot\tfrac{3}{2} < v_2, v_1 > +2^2 < v_2, v_2 > \\
&= \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 \cdot 1 + \tfrac{3}{2}\cdot 2\cdot 0 + 2\cdot\tfrac{3}{2}\cdot 0 + 2^2\cdot 1 \\
&= \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 + 2^2
\end{aligned}$$

o sea

$$\|v_W\| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{5}{2}.$$

**Observación 1** Notemos que *la norma de $v_w$ es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las coordenadas de $v_W$ en la base ortonormal* $\{v_1, v_2\}$, es decir

$$\|v_W\| = \sqrt{< v, v_1 >^2 + < v, v_2 >^2}.$$

Es importante señalar que el cálculo que hemos hecho aquí para obtener esta expresión, puede hacerse en un contexto más general y permite generalizar este resultado.

Volviendo al ejercicio, recordemos que nuestro objetivo es calcular $\|v - v_W\|$ pero hasta ahora conocemos la norma de $v$ y la norma de $v_W$, entonces ¿qué relación hay entre $\|v\|$, $\|v_w\|$ y $\|v - v_w\|$?

Veamos... en principio podemos escribir

$$v = (v - v_W) + v_W$$

donde $v_W \in W$ y $v - v_W \in W^{\perp}$. Luego, como $W \perp W^{\perp}$ en particular tenemos que

$$< v - v_W, v_W >= 0 =< v_W, v - v_W >$$

y así

$$\begin{aligned}
\|v\|^2 &= < (v - v_W) + v_W, (v - v_W) + v_W > \\
&= < v - v_W, v - v_W > + < v - v_W, v_W > + < v_W, v - v_W > + < v_W, v_W > \\
&= < v - v_W, v - v_W > +0 + 0+ < v_W, v_W > \\
&= < v - v_W, v - v_W > + < v_W, v_W > \\
&= \|v - v_W\|^2 + \|v_W\|^2
\end{aligned}$$

es decir

$$\|v\|^2 = \|v - v_W\|^2 + \|v_W\|^2 .$$

(a modo de comentario... la expresión de arriba debería resultarles familiar ya que no es otra cosa que el Teorema de Pitágoras)

Entonces

$$4^2 = \|v - v_W\|^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

y despejando

$$\|v - v_W\| = \sqrt{4^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{39}}{2}$$

por lo tanto, la distancia de $v$ a $W$ es $\frac{\sqrt{39}}{2}$. $\square$

(15) En el espacio euclídeo $C[1,3]$ con el producto interno

$$< f, g >= \int_1^3 f(x)g(x)\ dx,$$

probar que la función constante más próxima a $f(x) = \frac{1}{x}$ es $g(x) = \frac{1}{2}\log(3)$ (aquí log denota logaritmo natural). Calcular $\|g - f\|$ para esta $g$.

*Solución.* Como las funciones constantes son del tipo $g(x) = c = c \cdot 1$ donde $c \in \mathbb{R}$, resulta que $\{1\}$ es base del sub-espacio formado por las funciones constantes al cual llamaremos $W$.

Notemos que nuestro problema no es otra cosa que minimizar la distancia de $f$ al sub-espacio $W \subset C[1,3]$, y sabemos que esto equivale a calcular la distancia de $f$ a su proyección ortogonal sobre $W$. O dicho de otra manera, la función de $W$ más próxima a $f$ es la proyección ortogonal de $f$ sobre $W$, la cual denotamos $f_W$.

Calculemos entonces la proyección ortogonal de $f$ sobre $W$, para ello necesitamos una base ortonormal de $W$. Ahora, como $\{1\}$ es base sigue que $\left\{\frac{1}{\|1\|}\right\}$ es base ortonormal de $W$ (pues como tiene un único elemento ya es ortogonal, luego dividiendo por su norma queda ortonormal). Como

$$\|1\|^2 = \int_1^3 1^2 \, dx = x|_1^3 = 2$$

sigue que

$$\|1\| = \sqrt{2}$$

y entonces $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$ es base ortonormal de $W$.

Sabemos que la proyección ortogonal de $f$ sobre $W$ está dada por

$$f_W(x) =< f, \frac{1}{\sqrt{2}} > \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

donde

$$< f, \frac{1}{\sqrt{2}} >= \int_1^3 \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2}} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^3 \frac{1}{x} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \log(x)|_1^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \log(3).$$

Entonces

$$f_W(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \log(3) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \log(3).$$

Luego, como $f_W(x) = \frac{1}{2}\log(3)$ minimiza la distancia de $f$ a $W$ quiere decir que ésta es la función constante más próxima a $f$ como queríamos mostrar.

Por último calculemos $\|f - f_W\|$:

$$\begin{array}{rcl} \|f - f_W\|^2 \;=\; < f - f_W, f - f_W > & = & \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\log(3)\right)^2 \, dx \\ & = & \int_1^3 \left(\frac{1}{x^2} - \log(3)\frac{1}{x} + \frac{\log^2(3)}{4}\right) \, dx \\ & = & \left(-\frac{1}{x} - \log(3)\log(x) + \frac{\log^2(3)}{4}x\right)\Big|_1^3 \\ & = & \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\log^2(3) \end{array}$$

y entonces

$$\|f - f_W\| = \sqrt{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\log^2(3)}. \quad \square$$