Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\3&3&4\end{pmatrix}$, hallar los autovalores los autovectores y los autoespacios. Decidir si A es diagonalizable.

$|A-\lambda I|=0$ ec. característica

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\2&3-\lambda&2\\3&3&4-\lambda\end{vmatrix}=0;\quad (2-\lambda)\left[(3-\lambda)(4-\lambda)-6\right]-1\left[2(4-\lambda)-6\right]+1\left[6-3(3-\lambda)\right]=0$$

$$(2-\lambda)(6-3\lambda-4\lambda+\lambda^2)-1(2-2\lambda)+1\left[-3+3\lambda\right]=0$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+6)-2(1-\lambda)+(-3)(1-\lambda)=0$$

$$-(2-\lambda)(\lambda-6)(-\lambda+1)-2(1-\lambda)+(-3)(1-\lambda)=0$$

$\lambda^2-7\lambda+6$: $\dfrac{7\pm\sqrt{49-4.6}}{2}=\dfrac{7\pm5}{2}\begin{matrix}\nearrow 6\\ \searrow 1\end{matrix}$

$$(1-\lambda).\left[-(2-\lambda)(\lambda-6)-2-3\right]=0\rightarrow \lambda_1=1 \quad (1-\lambda)=0$$

$m=3\rightarrow 3$ autovalores

$A\in\mathbb{R}^{3\times3}$

$$-(2-\lambda)(\lambda-6)-5=0$$

$$-(2\lambda-12-\lambda^2+6\lambda)-5=0;\quad \lambda^2-8\lambda+7=0\begin{matrix}\nearrow \lambda_2=1\\ \searrow \lambda_3=7\end{matrix}$$

$\dfrac{8\pm\sqrt{64-4.7}}{2}=\dfrac{8\pm\sqrt{36}}{2}\begin{matrix}\nearrow 7\\ \searrow 1\end{matrix}$

$m.a(1)=2$; $m\,a(7)=1$

$\lambda=1$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\{1a+1b+1c=0\rightarrow c=-a-b\rightarrow\begin{pmatrix}a\\b\\-a-b\end{pmatrix}$$

$$V_1=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\-a-b\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times1}:\ a\neq0\vee b\neq0\right\}\qquad \neg(a=0\wedge b=0)$$

$E_1=\Lambda(1)=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$; $\dim\Lambda(1)=2$; $mg(1)=2$

$\lambda=7$

$$\begin{pmatrix}-5&1&1\\2&-4&2\\3&3&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}-5&1&1\\2&-4&2\\3&3&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-5&1&1\\12&-6&0\\-12&6&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-5&1&1\\-2&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-5a+b+c=0\\-2a+b=0\end{cases}\longrightarrow -5a+2a+c=0;\quad -3a+c=0$$

$\rightarrow b=2a$ $\qquad c=3a\quad\forall a\in\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix}a\\2a\\3a\end{pmatrix}$$

$V(7)=\left\{\begin{pmatrix}a\\2a\\3a\end{pmatrix}:\ a\neq0\right\}$; $\Lambda(7)=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$; $\dim\Lambda(7)=1$

$\forall\lambda,\ m(a)\lambda=m(g)\lambda$ $\qquad mg(7)=1$

$U=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}\rightarrow$ base formada solamente por autovectores

AUTOBASE. $\qquad \dim\mathbb{R}^{3\times1}=3$

$\therefore$ A es diagonalizable

A es diagonalizable $\Leftrightarrow$ $\exists P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\-1&-1&3\end{pmatrix}$ invertible

$A=P.D.P^{-1}$ / $D=P^{-1}.A.P$

$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&7\end{pmatrix}$

Verificación

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\2&3&2\\3&3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\14\\21\end{pmatrix}=7\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ es autovector

7 es el autovalor.

A es una matriz diagonalizable porque encontramos la AUTOBASE. Esto equivale a decir que A es diagonalizable porque existe P invertible

$P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\-1&-1&3\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ y se verifica que $D=P^{-1}.A.P$ (ecuación de diagonalización)

ó $A=P.D.P^{-1}$ (ecuación de factorización)

POR SER A UNA MATRIZ DIAGONALIZABLE SE VERIFICA QUE

- $\sum\dim E(\lambda)=2+1=3\rightarrow 3$ es el orden de la matriz A
- $\forall\lambda,\ ma(\lambda)=mg(\lambda)$