Resolución TP8:

T P 08 Ej. 20-extra

Aplicar el teorema de Green para el campo y el camino dado.

$$\oint_C x^2\,dx + e^{x+2y}dy$$

$$C: \{(x,y)\epsilon R^2 / \ |x| + |y| = 1\}$$

En este ejercicio se pide Aplicar el teorema de Green, por lo que podemos empezar por repasar su enunciado:

Dado $F(x,y) = (x^2, e^{x+2y})$

$$\oint_C P\,dx + Qdy = \iint_R [Q_x - P_y]\,dx\,dy = \iint_R (e^{x+2y} - 0)\,dxdy$$

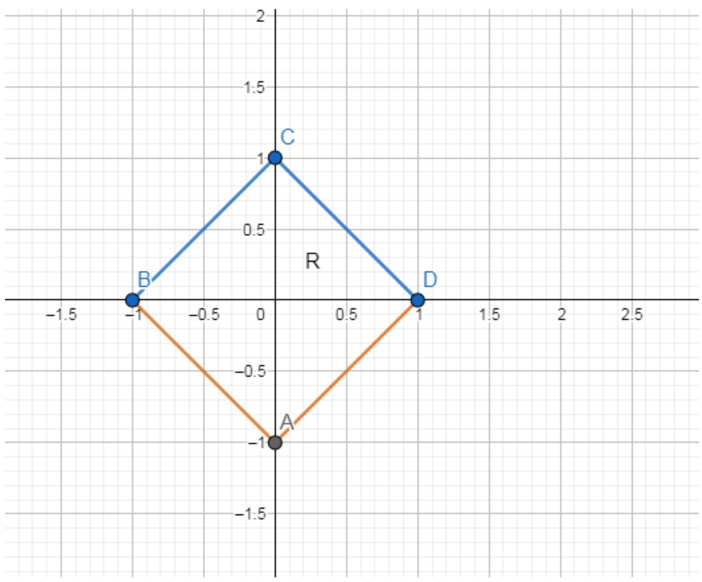
Dónde R es la región encerrada por la curva c y la curva es recorrida en sentido positivo.

Si x≥0 e y≥0➔$x + y = 1$

Si x≥0 e y<0➔$x - y = 1$

Si x<0 e y≥0➔$-x + y = 1$

Si x<0 e y<0➔ $-x - y = 1$



$A = (0,-1)$
$B = (-1,0)$
$C = (0,1)$
$D = (1,0)$

Es decir que calcular la integral de línea del campo vectorial $F(x, y) = (P, Q)$ a lo largo de la curva c, da el mismo resultado que calcular la integral doble sobre la región R de $Q_x - P_y$.

$$R: \{(x, y) \epsilon R^2 / \ |x| + |y| \leq 1\}$$

$$I = \iint_R e^{x+2y} dxdy$$

Resolviendo la Integral (Aplicando Teorema de Transformaciones Lineales Afines).

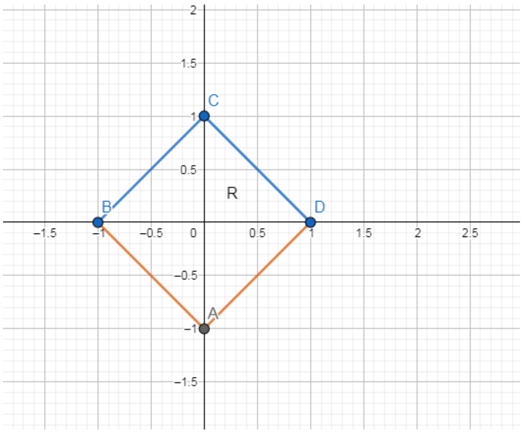
Según el teorema, el resultado de la integral es el mismo aplicando transformaciones lineales afines, estas se encontraran expresadas de la forma:

$$(x, y) = T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

$$|J| = \left| |J[T(u, v)]| \right| = \left\| \begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix} \right\| = |x_u y_v - x_v y_u|$$

$$I = \iint_R e^{x+2y} dxdy = \iint_{R'} e^{x(u,v)+2y(u,v)} |J| dudv$$

Aplicando Teorema de TLA, Método I (TLAI).



Buscamos similitudes en las rectas del recinto:

$$\begin{matrix} \text{Si } x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \rightarrow x + y \leq 1 \\ \text{Si } x < 0 \text{ } e \text{ } y < 0 \rightarrow -x - y \leq 1 \end{matrix} ==> \begin{matrix} x + y \leq 1 \rightarrow y = 1 - x \\ x + y \geq -1 \rightarrow y = -1 - x \end{matrix}$$

Utilizamos dicha similitud para armar parte de la transformación:

$$u = x + y$$

Utilizamos dicha similitud para completar de la transformación:

$$\begin{matrix} \text{Si } x \geq 0 \text{ e } y < 0 \rightarrow x - y \leq 1 \\ \text{Si } x < 0 \text{ } e \text{ } y \geq 0 \rightarrow -x + y \leq 1 \end{matrix} ==> \begin{matrix} x - y \leq 1 \\ x - y \geq -1 \end{matrix}$$

$$v = x - y$$

Por lo tanto, nos encontramos con su inversa:

$$(u, v) = T^{-1}(x, y) = (x + y, x - y)$$

Usando sumas y restas:

$$\begin{matrix} u + v = 2x \\ u - v = 2y \end{matrix} ==> \begin{matrix} x = \dfrac{u + v}{2} \\ y = \dfrac{u - v}{2} \end{matrix}$$

$$(x, y) = T(u, v) = (\frac{u + v}{2}, \frac{u - v}{2})$$

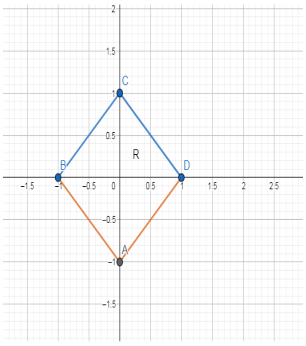
Hallando R':

$$A = (0, -1) ==> A' = T^{-1}(0, -1) = (-1,1)$$

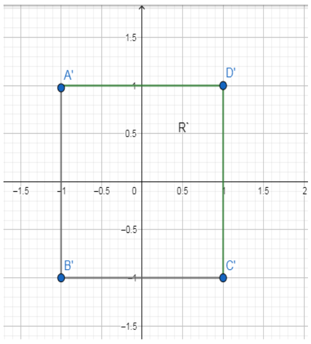
$$B = (-1,0) ==> B' = T^{-1}(-1,0) = (-1, -1)$$

$$C = (0,1) ==> C' = T^{-1}(0,1) = (1,-1)$$

$$D = (1,0) ==> D' = T^{-1}(1,0) = (1,1)$$



==>



$$=> \; R': \begin{cases} -1 \le u \le 1 \\ -1 \le v \le 1 \end{cases}$$

Hallando el Jacobino:

Dado:

$$(x, y) = T(u, v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

Entonces:

$$|J| = \left\| \begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix} \right\| = |(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) - (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})|$$

$$|J| = \left|-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

Aplicando la transformacion al argumento de la integral $x(u, v) + 2y(u, v)$:

Dado:

$$(x, y) = T(u, v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

Entonces

$$x + 2y = \frac{u+v}{2} + u - v = \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}v$$

Armado de la integral:

$$I = \iint\limits_{R} e^{x+2y} dxdy = \iint\limits_{R'} e^{x(u,v)+2y(u,v)} |J| \, dudv$$

$$I = \int_{v=-1}^{v=1} \int_{u=-1}^{u=1} e^{\frac{3}{2}u - \frac{1}{2}v} \left(\frac{1}{2}\right) \, du \, dv$$

$$I = \frac{1}{2} \int_{v=-1}^{v=1} \left[\frac{2}{3} e^{\frac{3}{2}u - \frac{1}{2}v}\right]_{u=-1}^{u=1} dv$$

$$I = \frac{1}{3} \int_{v=-1}^{v=1} e^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}v} - e^{-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}v} \, dv$$

$$I = \frac{1}{3} \left[-2e^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}v} + 2e^{-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}v}\right]_{v=-1}^{v=1}$$

$$I = \frac{2}{3} \left[-e^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}v} + e^{-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}v}\right]_{v=-1}^{v=1}$$

$$I = \frac{2}{3} \left[\left(-e^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}} + e^{-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}\right) - \left(-e^{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} + e^{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$I = \frac{2}{3} \left[(-e^{1} + e^{-2}) - (-e^{2} + e^{-1})\right]$$

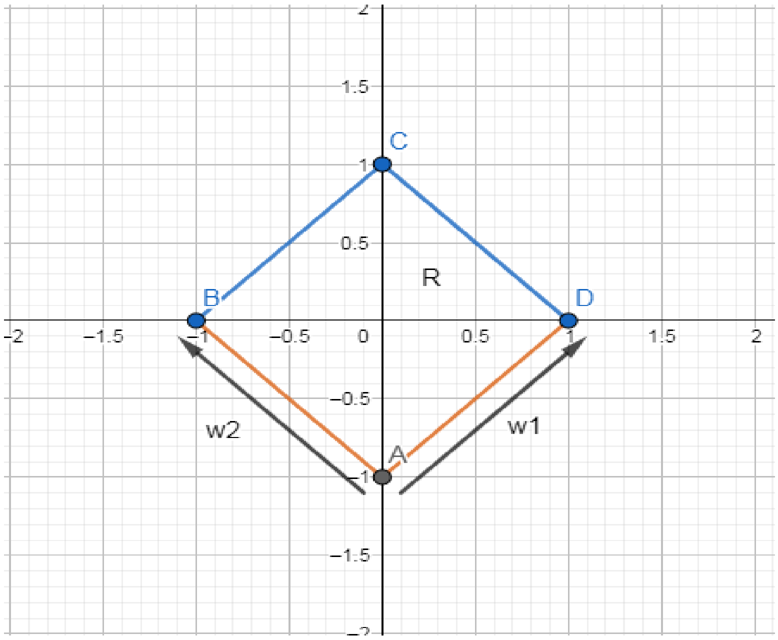
$$I = \frac{2}{3}(e^{2} - e - e^{-1} + e^{-2})$$

Finalmente:

$$\oint_C P \, dx + Q dy = \frac{2}{3}(e^{2} - e - e^{-1} + e^{-2})$$

Aplicando Teorema de TLA, Método II (TLAII).

Buscamos dos direcciones que acompañen las rectas del grafico de R:



Estos vectores son la diferencia entre los puntos extremo e inicial:

$$\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{D - A} = (1,1)$$

$$\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{B - A} = (-1,1)$$

Entonces los podemos asociar a parametros u y v de manera parametrica, con origen en A:

$$(x, y) = T(u, v) = A + u\overrightarrow{w_1} + v\overrightarrow{w_2}$$

$$(x, y) = T(u, v) = (0, -1) + u(1,1) + v(-1,1)$$

$$(x, y) = T(u, v) = (u - v, -1 + u + v)$$

$$x = u - v$$

$$y = -1 + u + v$$

$$(u, v) = (0,0) \to T(0,0) = (0, -1) = A$$

$$(u, v) = (1,0) \to T(1,0) = (1,0) = D$$

$$(u, v) = (0,1) \to T(0,1) = (0 - 1, -1 + 0 + 1) = (-1,0) = B$$

$$(u, v) = (1,1) \to T(1,1) = (1 - 1, -1 + 1 + 1) = (0,1) = C$$

$$0 \leq u \leq 1 \quad 0 \leq v \leq 1$$

Usando sumas y restas:

$$\begin{array}{l} x + y = -1 + 2u \\ x - y = -2v + 1 \end{array} ==> \begin{array}{l} u = \dfrac{x + y + 1}{2} \\ v = \dfrac{-x + y + 1}{2} \end{array}$$

$$(u, v) = T^{-1}(x, y) = (\frac{x + y + 1}{2}, \frac{-x + y + 1}{2})$$

Hallando R':

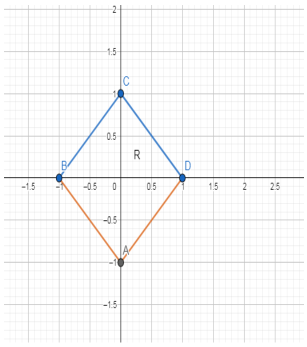
$$T^{-1}(x, y) = (\frac{x + y + 1}{2}, \frac{-x + y + 1}{2})$$

$$A = (0, -1) ==> A' = T^{-1}(0, -1) = (0,0)$$

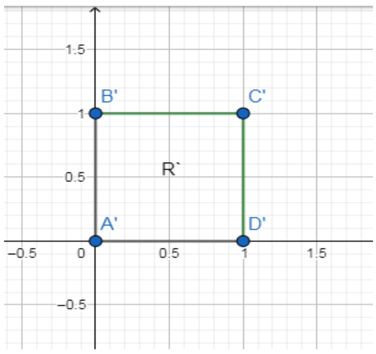
$$B = (-1,0) ==> B' = T^{-1}(-1,0) = (0,1)$$

$$C = (0,1) ==> C' = T^{-1}(0,1) = (1,1)$$

$$D = (1,0) ==> D' = T^{-1}(1,0) = (1,0)$$



==>



$$=> R': \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

Hallando el Jacobino:

Dado:

$$(x, y) = T(u, v) = (u - v, -1 + u + v)$$

Entonces:

$$|J| = \left\| \begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\| = |(1)(-1) - (1)(1)|$$

$$|J| = |-1 - 1| = |-2| = 2$$

Aplicando la transformacion al argumento de la integral $x(u, v) + 2y(u, v)$:

$$x + 2y = u - v + 2(-1 + u + v) = 3u + v - 2$$

Armado de la integral:

$$I = \iint_R e^{x+2y} dxdy = \iint_{R'} e^{x(u,v)+2y(u,v)} |J| \, dudv$$

$$I = \int_{v=0}^{v=1} \int_{u=0}^{u=1} e^{3u+v-2} (2) du \, dv$$

$$I = 2 \int_{v=0}^{v=1} \left[\frac{1}{3} e^{3u+v-2} \right]_{u=0}^{u=1} dv$$

$$I = \frac{2}{3} \int_{v=0}^{v=1} e^{1+v} - e^{v-2} \, dv$$

$$I = \frac{2}{3} \; [e^{1+v} - e^{v-2}]_{v=0}^{v=1}$$

$$I = \frac{2}{3} \; [(e^2 - e^{-1}) - (e^1 - e^{-2})]$$

$$I = \frac{2}{3} (e^2 - e - e^{-1} + e^{-2})$$

Finalmente:

$$\oint_C P \, dx + Q dy \overset{TG}{\cong} \iint_R Q_x - P_y dxdy \overset{TA}{\cong} \iint_{R'} e^{x(u,v)+2y(u,v)} |J| dudv$$

$$\oint_C P \, dx + Q dy = \frac{2}{3} (e^2 - e - e^{-1} + e^{-2})$$

Aplicando Teorema de TLA, Método III. (TLAIII)

$$I = \iint_{R} e^{x+2y} dxdy = \iint_{R\prime} e^{u} |J| dudv$$

Usamos el argumento de la integral para definir parte de la transformación:

$$u = x + 2y$$

Buscamos similitudes en las rectas para completar de la transformación:

$$\begin{matrix} \text{Si x} \geq 0 \text{ e y} < 0 \Rightarrow x - y \leq 1 \\ \text{Si x} < 0\ e\ y \geq 0 \Rightarrow -x + y \leq 1 \end{matrix} \quad ==> \quad \begin{matrix} x - y \leq 1 \\ x - y \geq -1 \end{matrix}$$

$$v = x - y$$

Por lo tanto, nos encontramos con su inversa:

$$(u, v) = T^{-1}(x, y) = (x + 2y, x - y)$$

Usando sumas y restas:

$$\begin{matrix} u + 2v = 3x \\ u + v = y \end{matrix} \quad ==> \quad \begin{matrix} x = \dfrac{u + 2v}{3} \\ y = u + v \end{matrix}$$

$$(x, y) = T(u, v) = (\frac{u + 2v}{3}, u + v)$$

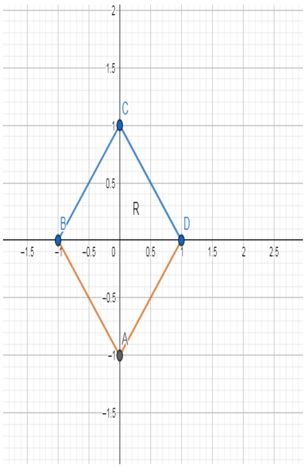
Hallando R':

$$A = (0, -1) ==> A' = T^{-1}(0, -1) = (-2,1)$$

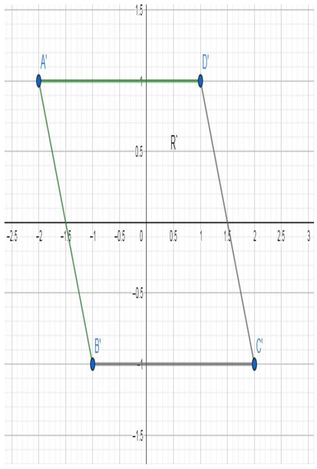
$$B = (-1,0) ==> B' = T^{-1}(-1,0) = (-1, -1)$$

$$C = (0,1) ==> C' = T^{-1}(0,1) = (2, -1)$$

$$D = (1,0) ==> D' = T^{-1}(1,0) = (1,1)$$



==>



Con tipo 2
u dependiente de v

$$=> \ R': \begin{cases} -\frac{3}{2} - \frac{v}{2} \leq u \leq \frac{3}{2} - \frac{v}{2} \\ -1 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

Hallando el Jacobino:

Dado:

$$(x, y) = T(u, v) = (\frac{u + 2v}{3}, u + v)$$

Entonces:

$$|J| = \left\| \begin{matrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\| = |(\frac{1}{3})(1) - (-\frac{2}{3})(1)|$$

$$|J| = \left| \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right| = \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3}$$

Aplicando la transformacion al argumento de la integral $x(u, v) + 2y(u, v)$:

$$x + 2y = u$$

Recordemos que fue impuesto al inicio.

Armado de la integral :

$$I = \iint\limits_{R} e^{x+2y} dxdy = \iint\limits_{R'} e^{x(u,v)+2y(u,v)} |J| \, dudv$$

$$I = \int_{v=-1}^{v=1} \int_{u=-\frac{3}{2}-\frac{v}{2}}^{u=\frac{3}{2}-\frac{v}{2}} e^u \left(\frac{1}{3}\right) \, du \, dv$$

$$I = \frac{1}{3} \int_{v=-1}^{v=1} \left[e^u\right]_{u=-\frac{3}{2}-\frac{v}{2}}^{u=\frac{3}{2}-\frac{v}{2}} dv$$

$$I = \frac{1}{3} \int_{v=-1}^{v=1} e^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}v} - e^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}v}\, dv$$

$$I = \frac{1}{3} \left[-2e^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}v} + 2e^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}v}\right]_{v=-1}^{v=1}$$

$$I = \frac{2}{3} \left[(-e^{1} + e^{-2}) - (-e^{2} + e^{-1})\right]$$

$$I = \frac{2}{3}(e^{2} - e - e^{-1} + e^{-2})$$

Finalmente:

$$\oint_C P\, dx + Q dy = \frac{2}{3}(e^{2} - e - e^{-1} + e^{-2})$$