T P 8. Ejercicio adicional campo conservativo

Dado el campo vectorial $\vec{F}_{(x,y)} = (4\,x - 3\,y^2,\ \ y^2 - 6\,x\,y)$, y la curva $\mathcal{C}$ de ecuación paramétrica $\vec{\alpha}\,(t) = (cos^3(t), sen^3(t))$, con $0 \le t \le \pi/2$, indicar en qué sentido debe recorrerse la curva dada, de modo que la integral de línea de $\vec{F}$ sobre dicha curva, sea positiva.

Res: $\vec{F} \in C^1$ en $\mathbb{R}^2$, veamos si $\vec{F}$ es un campo gradiente:

$P(x,y) = 4\,x - 3\,y^2 \qquad P_y = -6\,y$

$Q(x,y) = y^2 - 6\,x\,y \qquad Q_x = -6\,y$

cómo $P_y = Q_x$, existe $z = g(x,y)$ tal que $\vec{F} = \nabla g$, esto es

$$\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = \nabla g(x,y) = \left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}\right)$$

Búsqueda de g

$$g(x,y) = \int P(x,y)dx = \int (4\,x - 3\,y^2)\,dx + h(y) = 2\,x^2 - 3\,x\,y^2 + h(y)$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2\,x^2 - 3\,x\,y^2 + h(y)) = -6\,x\,y + h'(y) = Q(x,y)$$

cómo $Q(x,y) = y^2 - 6\,x\,y$, resulta $h'(y) = y^2$, entonces $h(y) = \frac{y^3}{3} + k$

Finalmente la función potencial es:

$$g(x,y) = 2\,x^2 - 3\,x\,y^2 + \frac{y^3}{3} + k$$

Se calculará la integral de línea desde el extremo inicial de la curva dada, esto es, $\vec{\alpha}(0) = (1,0) = A$ hasta el extremo final, es decir, $\vec{\alpha}(\pi/2) = (0,1) = B$.

$$\int_{\overset{\frown}{(1,0),(0,1)}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \ = g(0,1) - g(1,0) = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}$$

cómo el resultado obtenido es negativo, la curva dada debe recorrerse desde (0,1) hasta (1,0), es decir, en sentido contrario al de la parametrización dada.