Regla de la cadena

Caso I

De la teoría de funciones de una variable se sabe que la regla de la cadena permite calcular la derivada de una función compuesta

$$h(t) = f[g(t)]$$

a partir de la fórmula

$$h'(t) = f'[g(t)]\ g'(t)$$

o en escritura de Leibniz

$$\frac{dh}{dt}(t) = \frac{df}{dx}\big(g(t)\big)\ \frac{dg}{dt}(t)$$

O bien

$$\frac{dh}{dt}(t) = \frac{df}{dx}\big(g(t)\big)\ \frac{dg}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)\bigg|_{x=g(t)}\ \frac{dg}{dt}(t)$$

En la misma, se muestra que la derivada de la composición se obtiene multiplicando las derivadas de las funciones que intervienen. Recuérdese que la validez de esta fórmula está asegurada si se verifica que el conjunto imagen de g está incluido o es igual al dominio de f, es decir

$$g[Dom\ g] \subseteq Dom\ f$$

y, además, cada función es derivable en su dominio. Para ilustrar esta situación, considérese las funciones

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} /\ y = f(x) = \cos(x)$$

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} /\ x = g(t) = t^2$$

En este caso se cumple que

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$$

$$g'(t) = 2t$$

Sea entonces la composición

$$h(t) = f[g(t)] = f[t^2] = \cos(t^2)$$

Según la regla de la cadena, se cumple

$$h'(t) = f'[g(t)] \cdot\ g'(t) = -\operatorname{sen}(t^2) \cdot 2t$$

Esta regla se extiende a funciones de varias variables y se dan distintos casos según las características de las funciones que intervienen.

Un primer caso es el que se presenta cuando se quiere calcular la derivada de la función de una variable

$$h(t) = f[\alpha(t)]$$

que resulta de componer la función escalar de n variables

$$f: Dom\, f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} /\ y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

y la trayectoria en

$$\alpha: I = [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n / \alpha(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\big)$$

Donde se considera siempre que $\alpha[I] \subset Dom\, f$. Para este caso se tiene el siguiente teorema.

Teorema 1. (Regla de la Cadena: Caso I) Sea el campo escalar

$$f: Dom\, f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} /\ y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

y sea la trayectoria

$$\alpha: I = [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n / \alpha(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\big)$$

que aplica el intervalo I en el dominio $Dom\, f$, esto es

$$\alpha[I] \subset Dom\, f$$

Considérese la función compuesta

$$h(t) = f[\alpha(t)] = f\big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\big)$$

para $t \in I$. Supóngase que α es de clase C^1 en I y que f es de clase C^1 en $\alpha[I] \subset Dom\, f$. Existe entonces la derivada $h'(t)$ y es igual al producto escalar

$$h'(t) = \nabla f\big(\alpha(t)\big) \cdot \alpha'(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(\alpha(t)\big), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\big(\alpha(t)\big)\right) \cdot \left(\frac{dx_1}{dt}(t), \dots, \frac{dx_n}{dt}(t)\right)$$

Ejemplo 1. Sean

$$f\colon Dom\, f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}/\; z = f(x,y) = x^2 + 3y^2$$

y

$$\alpha\colon I = [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2/\alpha(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (e^t, \cos(t))$$

Se puede calcular la derivada de la composición

$$h\colon I = [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}/h(t) = f[\alpha(t)] = (f \circ \alpha)(t)$$

sin obtener su formula explícita, utilizando la regla de la cadena enunciada en el Teorema 1. O sea

$$h'(t) = \nabla f\big(\alpha(t)\big) \cdot \alpha'(t) = (2x, 6y)_{(e^t, \cos(t))} \cdot (e^t, -\operatorname{sen}(t))$$

$$h'(t) = (2e^t, 6\cos(t)) \cdot (e^t, -\operatorname{sen}(t)) = 2e^{2t} - 6\cos(t)\operatorname{sen}(t)$$

esto es

$$h'(t) = 2e^{2t} - 6\cos(t)\operatorname{sen}(t)$$

Ejemplo 2. Sean

$$f\colon Dom\, f \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}/\; w = f(x,y,z) = \frac{z^2}{1 + x^2 + y^2}$$

y

$$\alpha\colon I = [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3/\alpha(t) = \Big(x(t), y(t), \big(z(t)\big)\Big) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$$

Se calcula la derivada de la composición

$$h\colon I = [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}/h(t) = f[\alpha(t)] = (f \circ \alpha)(t)$$

a partir de la regla de la cadena, según la fórmula

$$h'(t) = \nabla f\big(\alpha(t)\big) \cdot \alpha'(t)$$

concretamente se tiene

$$h'(t) = \left(\frac{-2xz^2}{1 + x^2 + y^2}, \frac{-2yz^2}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2z}{1 + x^2 + y^2}\right)_{(\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)} \cdot (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 1)$$

$$h'(t) = \left(\frac{-2\cos(t)t^2}{1 + \cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t)}, \frac{-2\operatorname{sen}(t)\, t^2}{1 + \cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t)}, \frac{2t}{1 + \cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t)}\right) \cdot (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 1)$$

$$h'(t) = \left(\frac{-2\cos(t)t^2}{1+1}, \frac{-2\,\mathrm{sen}(t)\,t^2}{1+1}, \frac{2t}{1+1}\right) \cdot (-\,\mathrm{sen}(t), \cos(t), 1)$$

$$h'(t) = (-\cos(t)t^2, -\,\mathrm{sen}(t)\,t^2, t) \cdot (-\,\mathrm{sen}(t), \cos(t), 1)$$

$$h'(t) = \cos(t)\,\mathrm{sen}(t)\,t^2 - \mathrm{sen}(t)\cos(t)\,t^2 + t$$

$$h'(t) = t$$

Ejemplo 3. (Fórmula de la derivada direccional). Sea la función escalar de dos variables

$$f: Dom\ f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / z = f(x, y)$$

de clase C^1 en $Dom\ f$, y sea el punto $P_0 = (x_0, y_0)$, interior a su dominio. Esto quiere decir que existe un entorno circular (o disco) D de centro en (x_0, y_0) y radio $\delta > 0$,totalmente incluido en $Dom\ f$, es decir

$$D[(x_0, y_0), \delta] \subset Dom\ f$$

Además, sea el vector unitario $\vec{v} = (a, b)$ y el segmento sin extremos $S \subset D[(x_0, y_0), \delta]$ parametrizado por la trayectoria

$$\alpha: (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 / \alpha(t) = (x_0 + at, y_0 + bt)$$

Nótese que $\alpha(0) = P_0 = (x_0, y_0)$. Considerando ahora la función compuesta

$$h: (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} / h(t) = f[\alpha(t)] = (f \circ \alpha)(t)$$

La fórmula de la derivada $h'(t)$, es la siguiente

$$h'(t) = \nabla f\big(\alpha(t)\big) \cdot \alpha'(t) = \nabla f\big(\alpha(t)\big) \cdot (a, b)$$

o de manera equivalente

$$h'(t) = \nabla f\big(\alpha(t)\big) \cdot \vec{v}$$

Calculando $h'(0)$, queda

$$h'(t) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{v}$$

que es la Fórmula del gradiente para la derivada direccional

Propiedad

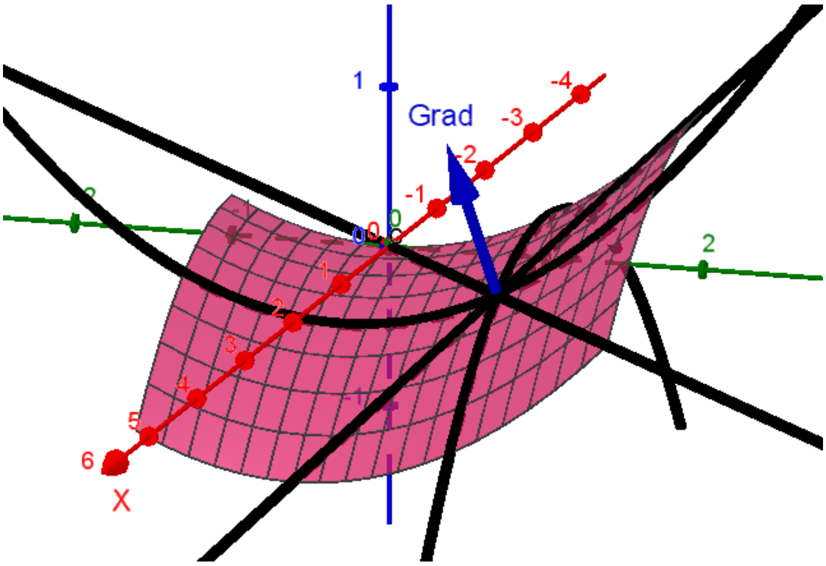
A continuación, se usará este teorema para probar que el gradiente es perpendicular a los conjuntos de nivel, tanto a las curvas de nivel si f tiene su dominio en $\mathbb{R}^2$, como a las superficies de nivel si f tiene su dominio en $\mathbb{R}^3$.

Consideremos una función $w = f_{(x,y,z)}$, con derivadas parciales continuas en su dominio

$(f \in C^1)$ y $P = (x_0, y_0, z_0) \in dom\, f$, llamemos N_k a la superficie de nivel $k = f_{(x_0,y_0,z_0)}$ y C a cualquier curva suave contenida en N_k que pase por P , si llamamos $\vec{\alpha}$ a la parametrización de C y $\vec{\alpha}'(t) \neq \vec{0}$, entonces se tiene que $f(\vec{\alpha}(t)) = k$ y por regla de la cadena caso I,

$\frac{df(\vec{\alpha}(t))}{dt} = \nabla f(\vec{\alpha}(t)) \cdot \vec{\alpha}'(t) = \frac{dk}{dt} = 0$, lo que indica que los vectores $\nabla f(\vec{\alpha}(t))$ y $\vec{\alpha}'(t)$ son perpendiculares.

Como este razonamiento es válido para cualquier curva suave contenida en la superficie de nivel N_k que pasa por P , se tiene que todas las curvas son perpendiculares al gradiente de f en P resultando entonces la perpendicularidad entre dicho gradiente y N_k en P .



Propiedad:

Si la función $w = f_{(x,y,z)}$, tiene derivadas parciales continuas en su dominio $(f \in C^1)$ y

$P = (x_0, y_0, z_0) \in dom\, f$, entonces el $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es perpendicular a la superficie de nivel $f_{(x,y,z)} = f_{(x_0,y_0,z_0)}$ en (x_0, y_0, z_0).

Caso II

Supóngase ahora que se define la función de dos variables

$$h(u,v) = f[\alpha(u,v)] = (f \circ \alpha)(u,v)$$

a partir de componer las funciones

$$f: Dom\ f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / \ z = f(x,y)$$

Y

$$\alpha: Dom\ \alpha \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / \alpha(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$$

Siendo $\alpha[Dom\ \alpha] \subseteq Dom\ f$, y ambas de clase C^1 en sus respectivos dominios. Se quiere calcular las derivadas parciales de la composición $h(u,v)$, es decir

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) \qquad \frac{\partial h}{\partial v}(u,v)$$

Las fórmulas para estas derivadas parciales se obtienen aplicando el primer caso de la regla de la cadena, en dos momentos distintos. Primero, cuando se deriva respecto de la variable u y la variable v se considera constante. Y luego, cuando se deriva respecto v, y la variable u es la que se considera constante.

$a)$ Cálculo de $\frac{\partial h}{\partial u}(u,v)$.

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = \nabla f\big(\alpha(u,v)\big) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\right)$$

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\big(\alpha(u,v)\big), \frac{\partial f}{\partial y}\big(\alpha(u,v)\big)\right) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\right)$$

Nótese que el segundo factor se obtiene al derivar a $\alpha(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$ respecto de u. Calculando el producto escalar, queda

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\alpha(u,v)\big)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\alpha(u,v)\big)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)$$

$b)$ Cálculo de $\frac{\partial h}{\partial v}(u,v)$.

Procediendo análogamente a como se hizo en $a)$ resulta

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\alpha(u,v)\big)\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\alpha(u,v)\big)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)$$

En definitiva, las derivadas parciales de $h(u,v) = f[\alpha(u,v)] = (f \circ \alpha)(u,v)$, son las siguientes

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\alpha(u,v)\big)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\alpha(u,v)\big)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\alpha(u,v)\big)\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\alpha(u,v)\big)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)$$

Ejemplo 4. Aplicando las fórmulas obtenidas en el apartado anterior, se pueden calcular las derivadas parciales $\frac{\partial h}{\partial u}(u,v)$ y $\frac{\partial h}{\partial v}(u,v)$ de la función

$$h(u,v) = f[\alpha(u,v)] = (f \circ \alpha)(u,v)$$

la cual se genera al componer las funciones dos variables

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / \, z = f(x,y) = xy$$

$$\alpha: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / \alpha(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big) = (uv^2, u - v)$$

En principio se calculan los elementos involucrados en los cálculos

$$\nabla f\big(\alpha(u,v)\big) = \nabla f(x,y)|_{\alpha(u,v)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\Bigg|_{\alpha(u,v)} = (y,x)|_{(uv^2, u-v)} = (u - v, uv^2)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\right) = (v^2, 1)$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\right) = (2uv, -1)$$

Luego

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\alpha(u,v)\big)\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(\alpha(u,v)\big)\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)$$

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = \ (u - v)\, v^2 + \ uv^2\, (1) = 2uv^2 - v^3$$

Es decir

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u,v) = 2uv^2 - v^3$$

Por otra parte

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,v)=\frac{\partial f}{\partial x}\big(\alpha(u,v)\big)\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)+\frac{\partial f}{\partial y}\big(\alpha(u,v)\big)\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,v)=(u-v)\cdot 2uv+\ uv^2\cdot(-1)=2u^2v-3uv^2$$

O sea

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u,v)=2u^2v-3uv^2$$

El procedimiento efectuado para calcular las derivadas parciales de la composición anterior se puede aplicar, exactamente de la misma manera, para obtener las fórmulas de las derivadas parciales de la función escalar de m variables

$$h(u_1,u_2,\dots,u_m)=f[\alpha(u_1,u_2,\dots,u_m)]=(f\circ\alpha)(u_1,u_2,\dots,u_m)$$

obtenida al componer las funciones

$$f\colon Dom\ f\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}/\ y=\ f(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

y

$$\alpha\colon Dom\ \alpha\subset\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n/\alpha(u_1,u_2,\dots,u_m)$$
$$=\big(x_1(u_1,u_2,\dots,u_m),x_2(u_1,u_2,\dots,u_m),\dots,x_n(u_1,u_2,\dots,u_m)\big)$$

Verificándose que el conjunto imagen de α esté totalmente incluido en el dominio de f, esto es

$$\alpha[Dom\ \alpha]\subseteq Dom\ f$$

y siendo ambas de clase C^1 en sus respectivos dominios. En este caso se obtendrán m derivadas parciales, las cuales vienen dadas por la fórmula

$$\frac{\partial h}{\partial u_1}(u_1,u_2,\dots,u_m)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha)\frac{\partial x_1}{\partial u_1}(u_1,u_2,\dots,u_m)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\alpha)\frac{\partial x_n}{\partial u_1}(u_1,u_2,\dots,u_m)$$

$$\frac{\partial h}{\partial u_2}(u_1,u_2,\dots,u_m)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha)\frac{\partial x_1}{\partial u_2}(u_1,u_2,\dots,u_m)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\alpha)\frac{\partial x_n}{\partial u_2}(u_1,u_2,\dots,u_m)$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial h}{\partial u_m}(u_1,u_2,\dots,u_m)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\alpha)\frac{\partial x_1}{\partial u_m}(u_1,u_2,\dots,u_m)+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\alpha)\frac{\partial x_n}{\partial u_m}(u_1,u_2,\dots,u_m)$$

O bien, adoptando escritura de subíndices

$$\frac{\partial h}{\partial u_j}(u_1, u_2, \dots, u_m) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\alpha(u_1, u_2, \dots, u_m)\big)\frac{\partial x_i}{\partial u_j}(u_1, u_2, \dots, u_m) \quad j = 1,2, \dots, m$$

Este resultado se establece formalmente en el siguiente Teorema.

Teorema 2. (Regla de la Cadena: Caso II) Sean las funciones

$$\alpha: Dom\ \alpha \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n / \alpha(u_1, u_2, \dots, u_m)$$
$$= \big(x_1(u_1, u_2, \dots, u_m), x_2(u_1, u_2, \dots, u_m), \dots, x_n(u_1, u_2, \dots, u_m)\big)$$

y

$$f: Dom\ f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} / \ y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Tales que

$$\alpha[I] \subseteq Dom\ f$$

Y siendo cada una de clase C^1 en su dominio. Entonces, las derivadas parciales de la composición

$$h(u_1, u_2, \dots, u_m) = (f \circ \alpha)_{(u_1, u_2, \dots, u_m)} = f[\alpha(u_1, u_2, \dots, u_m)]$$

existen y están dadas por

$$\frac{\partial h}{\partial u_j}(u_1, u_2, \dots, u_m) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\alpha(u_1, u_2, \dots, u_m)\big)\frac{\partial x_i}{\partial u_j}(u_1, u_2, \dots, u_m) \quad j = 1,2, \dots, m$$

Escritura sintética

Suele ser oportuno utilizar una escritura más simple para denotar a las derivadas que intervienen en las fórmulas de la regla de la cadena, omitiendo los símbolos de dependencia. Por ejemplo, para la composición

$$h(t) = (f \circ g)_{(t)}$$

de las dos funciones de una variable real

$$y = f(x) \qquad x = g(t)$$

se escribe

$$\frac{d(f \circ g)}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dg}{dt}$$

Para la composición de Caso I

$$h(t) = (f \circ g)_{(t)}$$

de las funciones

$$z = f(x, y) \qquad g(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

Se escribe

$$\frac{d(f \circ \alpha)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dx}{dt}$$

Y para la composición general del Caso II

$$h(u_1, u_2, \dots, u_m) = (f \circ \alpha)_{(u_1, u_2, \dots, u_m)}$$

se escribe

$$\frac{\partial(f \circ \alpha)}{\partial u_j} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_j} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_j} \qquad j = 1,2, \dots, m$$

Esquemas de dependencia

Es posible determinar la fórmula correcta de la regla de la cadena en una situación dada, a partir de la construcción de un esquema de dependencia, exhibiendo cuáles variables dependen de cuáles. Por ejemplo, en el Caso I, la función escalar $z = f(x, y)$ depende de x e y, y se hizo depender a estas dos, respecto de la variable t a través de la función $\alpha(t)$. El esquema correspondiente es el siguiente

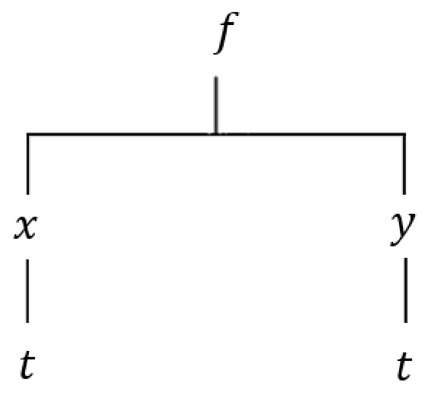


Figura 1. Esquema de dependencia para el Caso I.

La fórmula de la regla de la cadena correspondiente involucra un término por cada camino que va desde f hasta t. Por ejemplo, el camino que va desde f, que pasa por x hasta llegar a t, genera el término

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}$$

y el camino que va desde f, que pasa por y hasta llegar a t, produce el término

$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dx}{dt}$$

Así, la fórmula de la regla de la cadena correspondiente se escribe

$$\frac{d(f\circ\alpha)}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dx}{dt}$$

Ahora, en la situación particular del Caso II, donde f depende de x e y, y estas dos dependen de u y v, a través de la función $\alpha(u,v)$, el esquema correspondiente es

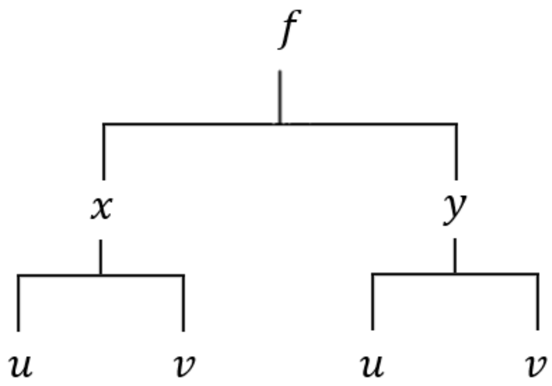


Figura 2. Esquema de dependencia para un ejemplo particular del Caso II.

Nótese que las últimas dos son las variables de la función compuesta $(f\circ\alpha)$. Teniendo en cuenta entonces, que aquí se han de obtener dos derivadas parciales, derivando, en un momento respecto de u, y en otro respecto de v. Se dan las fórmulas

$$\frac{\partial(f\circ\alpha)}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial(f\circ\alpha)}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Que son las que se obtienen según el Teorema 2.

Regla de la cadena general

Matriz jacobiana o matriz de las derivadas parciales

Dada una función $\vec{F}: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $\vec{F}(x,y,z) = \big(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z), f_4(x,y,z)\big)$

La matriz jacobiana de $\vec{F}$ es $J\vec{F}$:

$$J\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_{1\,x} & f_{1\,y} & f_{1\,z} \\ f_{2\,x} & f_{2\,y} & f_{2\,z} \\ f_{3\,x} & f_{3\,y} & f_{3\,z} \\ f_{4\,x} & f_{4\,y} & f_{4\,z} \end{pmatrix}$$

En la primera fila se encuentran todas las derivadas parciales de la componente 1, en la segunda fila, todas las derivadas parciales de la componente 2 y así las filas 3 y 4.

En la primera columna se encuentran todas las componentes derivadas respecto a x, en la segunda columna, todas las componentes derivadas respecto de y, y la tercera columna las componentes derivadas respecto de z.

$$J\vec{F} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$$

En general, si $\vec{F}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ su matriz jacobiana pertenece al conjunto $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Teorema (caso general):

Dadas las funciones $\vec{G}: V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ y $\vec{F}: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, donde U y V son conjuntos abiertos y $\vec{G}(V) \subseteq U$. Siendo $\vec{G}$ diferenciable en $\vec{x}_0$ y $\vec{F}$ diferenciable en $\vec{G}(\vec{x}_0) \in U$ entonces, la función

$\vec{F} \circ \vec{G}: V \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ es diferenciable en $\vec{x}_0$ y su matriz jacobiana es:

$$J\big(\vec{F} \circ \vec{G}\big)(\vec{x}_0) = J\vec{F}\big(\vec{G}(\vec{x}_0)\big)\, J\vec{G}(\vec{x}_0)$$

Ejemplo 5:

$$\begin{cases} \vec{G}(u,v) = (u^2 v\,, 2v - u) \\ \vec{H}(x,y) = \left(u_{(x,y)}\,, v_{(x,y)}\right) = (2x - 3y\,, x + y) \end{cases}$$

Si $\vec{F}(x,y) = (\vec{G} \circ \vec{H})(x,y) = \vec{G}(\vec{H}(x,y))$, hallar $J\vec{F}$.

Debemos calcular $J\vec{F} = J(\vec{G} \circ \vec{H})(\mathrm{x,y}) = J\vec{G}(\vec{H}(x,y))\, J\vec{H}(x,y)$

$$J\vec{G}(u,v) = \begin{pmatrix} g_{1\,u} & g_{1\,v} \\ g_{2\,u} & g_{2\,v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2uv & u^2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J(\vec{G} \circ \vec{H})(x,y) = J\vec{G}(\vec{H}(x,y)) = \begin{pmatrix} 2(2x-3y)(x+y) & (2x-3y)^2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$J\vec{H}(x,y) = \begin{pmatrix} h_{1\,x} & h_{1\,y} \\ h_{2\,x} & h_{2\,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J\vec{F}(x,y) = J\vec{G}(\vec{H}(x,y))\, J\vec{H}(x,y)$$

$$= \begin{pmatrix} 2(2x-3y)(x+y) & (2x-3y)^2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 16xy - 3y^2 & -8x^2 - 6xy + 27y^2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Entonces $\vec{F}_x = (12x^2 - 16xy - 3y^2,\ 0)$

$\vec{F}_y = (-8x^2 - 6xy + 27y^2, 5)$

Las filas de la matriz jacobiana contienen las componentes de los vectores gradientes, componente a componente, las columnas de la matriz jacobiana contienen las derivadas parciales de la función.

Biblioteca digital. Cap 5, p. 185. Cálculo varias variables. W Mora.

Link contenidos pertinentes (Ctrl+Clic mouse para ir al enlace)

Khan Academy

https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives