Razonamientos

Un razonamiento es un conjunto de proposiciones ordenadas de cierta manera. Los puntos de partida (uno o más) se llaman **premisas** y sirven de fundamento a otra proposición llamada **conclusión**, la cual se afirma sobre la base de las primeras.

De los razonamientos no se predica que sean verdaderos o falsos. Las que son verdaderas o falsas son las proposiciones que los integran. Los razonamientos son **válidos** o **no válidos.**

Forma del razonamiento

$$\left.\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array}\right\} \text{premisas}$$

$$\begin{array}{ll} \ldots\ldots & \\ \hline q & \text{conclusión} \end{array}$$

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \ldots) \Rightarrow q$$

MÉTODOS PARA PROBAR LA VALIDEZ DE UN RAZONAMIENTO

MÉTODOS

- Directo
- Del condicional asociado
- Demostrativo (reglas de inferencia)
- Absurdo

1. MÉTODO DIRECTO Partiendo de la verdad de las premisas, se va trabajando con ellas hasta llegar a la conclusión

2. MÉTODO DEL CONDICIONAL ASOCIADO Consiste en armar un condicional cuyo antecedente es la conjunción de todas las premisas, y su consecuente es la conclusión. Luego debe demostrarse que dicho condicional es verdadero. Si lo es, el razonamiento será válido.

3. METODO DEMOSTRATIVO Es un método más formal y ordenado, que elabora una lista de proposiciones lógicas con el objetivo de llegar a tener en elemento de la lista a la conclusión del razonamiento

4. METODO DEL ABSURDO Supone que la conclusión es Falsa. Se empieza a “subir” hacia las premisas, utilizando el valor obtenido para comprobar la veracidad de las mismas. Si el razonamiento es válido, se dará una “contradicción”, generando que el valor de una de las premisas resulte falso

Ejemplo: “El ladrón tenía llave de la puerta o entró por la ventana. Si entró por la ventana, pisoteó las macetas. Las macetas no están pisoteadas. Por lo tanto, el ladrón tenía llave de la puerta.

PREMISAS

P1: “El ladrón tenía llave de la puerta o entró por la ventana”. $p \vee v$

P2: “Si entró por la ventana, pisoteó las macetas”. $v \Rightarrow m$

P3: “Las macetas no están pisoteadas” $\sim m$

CONCLUSIÓN “el ladrón tenía llave de la puerta.” $\therefore p$

Si consideramos el siguiente diccionario:

p: “El ladrón tenía llave de la puerta”

v: “El ladrón entró por la ventana”

m: “El ladrón pisoteó las macetas”

Ejemplo: "El ladrón tenía llave de la puerta o entró por la ventana. Si entró por la ventana, pisoteó las macetas. Las macetas no están pisoteadas. Por lo tanto, el ladrón tenía llave de la puerta.

1. MÉTODO DIRECTO

$p \vee v$

$v \Rightarrow m$

$\sim m$

$\therefore p$

Como $v(\sim m) = V$ por ser premisa entonces $v(m) = F$

Luego, como $v(v \Rightarrow m) = V$ por ser premisa, y $v(m) = F$ entonces $v(v) = F$

Por último, como $v(p \vee v) = V$ por ser premisa, y $v(v) = F$ entonces $v(p) = V$

Y esta es la con[illegible]e resulta ser necesariamente verdadera

Razonamiento Válido

2. MÉTODO DEL CONDICIONAL ASOCIADO

$$[\,(p \vee v) \wedge (v \Rightarrow m) \wedge (\sim m)\,] \Rightarrow p$$

En este caso deberíamos hacer la tabla de verdad de 8 renglones (pues hay 3 proposiciones simples distintas), y ver que sea una tautología.

3. METODO DEMOSTRATIVO

Las reglas de inferencia son pequeños razonamientos que ya se sabe que son válidos, y sirven para probar la validez de razonamientos mas complejos. Cada una de ellas, tiene un nombre que la identifica y dos siglas.

REGLAS DE INFERENCIA

1. Modus Ponens (MP) $\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{p \qquad} \\ \therefore q \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{l} \sim p \Rightarrow q \\ \underline{\sim p \qquad} \\ \therefore q \end{array}$	**2. Modus Tollens (MT)** $\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{\sim q \qquad} \\ \therefore \sim p \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{l} \neg p \rightarrow \neg q \\ \underline{q \qquad} \\ \therefore p \end{array}$	**3. Silogismo hipotético (SH)** $\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{q \Rightarrow r} \\ \therefore p \Rightarrow r \end{array}$
4. Silogismo Disyuntivo $\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\sim q \qquad} \\ \therefore p \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\sim p \qquad} \\ \therefore q \end{array}$	**5. Adición** $\begin{array}{l} \underline{p \qquad} \\ \therefore p \vee q \end{array}$	**6. Dilema constructivo** $\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ r \Rightarrow s \\ \underline{p \vee r \qquad} \\ \therefore q \vee s \end{array}$
7. Demostración por casos $\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ \underline{q \rightarrow r \qquad} \\ \therefore (p \vee q) \Rightarrow r \end{array}$	**8. Simplificación** $\begin{array}{l} \underline{p \wedge q} \\ \therefore p \end{array}$	**9. Conjunción** $\begin{array}{l} p \\ \underline{q \qquad} \\ \therefore p \wedge q \end{array}$

Ejemplo: "El ladrón tenía llave de la puerta o entró por la ventana. Si entró por la ventana, pisoteó las macetas. Las macetas no están pisoteadas. Por lo tanto, el ladrón tenía llave de la puerta.

$p \vee v$

$v \Rightarrow m$

$\sim m$

$\therefore p$

1)	$p \vee v$	**PREMISA**
2)	$v \Rightarrow m$	**PREMISA**
3)	$\sim m$	**PREMISA**
4)	$\sim v$	**M.T. entre 2, 3**
5)	p	**S.D. entre 1, 4**

Razonamiento Válido

Prueba de invalidez

Para probar la invalidez de un RAZONAMIENTO que tiene pocas variables proposicionales, nos basta emplear el método del condicional asociado: Si el condicional formado por la conjunción de las premisas y la conclusión no es tautológico, decimos que se trata de una forma no válida.

Si el razonamiento es complejo, podemos usar un método muy sencillo llamado “MÉTODO DE ASIGNACIÓN DE VALORES“, que consiste en lo siguiente:

1- Hallamos la forma lógica.

2- Si la forma es inválida, tendrá que suceder que podamos encontrar por lo menos un caso que tenga premisas verdaderas y conclusión falsa.

Ejemplo: Si c … a: $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \vee p) \wedge r] \Rightarrow q$

Razonamiento No Válido

Asignan … premisas toman el valor V y la conclusión F, con lo qu … forma dada.

Inducción Completa

El principio de inducción completa proporciona un método de demostración en vastas aplicaciones en matemática relativas al conjunto de números naturales.

Una descripción informal de la inducción matemática puede ser ilustrada por el efecto dominó, donde ocurre una reacción en cadena con una secuencia de piezas de dominó cayendo una detrás de la otra.

U = {1, 2, 3, 4, ………} fichas de dominó numeradas

P(n): n se cae

Premisa 1 P(1): la ficha 1 se cae

Premisa 2 $P(n) \rightarrow P(n+1)$

Conclusión Todas las fichas se caen a partir de la 1ra

Principio de Inducción Completa

Sea p (x) un predicado con dominio en el conjunto IN de los números naturales todas las p (n) son verdaderas si

1) p (1) es verdadera

2) p (h) es verdadera $\Rightarrow$ p (h + 1) es verdadera

1) **Base inductiva** p (1) es verdadera

2) **Paso inductivo**

Hipótesis inductiva	**HI)** p (h)
Tesis inductiva	**TI)** p (h + 1)

Si se verifica 1) y se demuestra 2) entonces la p (n) es verdadera

Ejemplo: **Demostrar que**

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

1) Base inductiva para n = 1 $\sum_{i=1}^{1} i = 1$ $\frac{1(1+1)}{2} = 1 \Rightarrow$ 1 = 1 es verdadero

2) Paso inductivo

HI) para n = h $\sum_{i=1}^{h} i = \frac{h(h+1)}{2}$

TI) para n = h + 1 $\sum_{i=1}^{h+1} i = \frac{(h+1)(h+2)}{2}$

Demostración

$$\sum_{i=1}^{h+1} i = \underbrace{1+2+3+4+..........+h}_{\sum_{i=1}^{h} i}+(h+1)$$

$$\sum_{i=1}^{h+1} i = \sum_{i=1}^{h} i + (h+1)$$

$$\sum_{i=1}^{h+1} i = \frac{h(h+1)}{2}+(h+1)$$

por hipótesis

$$\sum_{i=1}^{h+1} i = \;= \frac{h(h+1)+2(h+1)}{2} =$$

$$\sum_{i=1}^{h+1} i = \frac{(h+1)(h+2)}{2}$$

Resulta entonces que es válida

para todo número natural **n**

Ejemplo: Demostrar que $n^3 - n$ es múltiplo de 3

(es lo mismo que probar que $n^3 - n = 3\,k$ con $k \in IN_0$)

1) Base inductiva para $n = 1$ $1 - 1 = 0 = 3.0$ es verdadero

2) Paso inductivo

HI) para $n = h$ $h^3 - h = 3\,k$, $k \in IN_0$

TI) para $n = h + 1$ $(h + 1)^3 - (h + 1) = 3\,k'$, $k' \in IN_0$

Demostración $(h + 1)^3 - (h + 1) = h^3 + 3\,h^2 + 3\,h + 1 - h - 1$

$= h^3 - h + 3\,h^2 + 3\,h$

$= 3\,k + 3\,h^2 + 3\,h$ por H.I.

$= 3\,(k + h^2 + h) = 3\,k'$ con $k' = (k + h^2 + h) \in IN_0$

Resulta entonces que es válida para todo número natural **n**