## Derivación de funciones dadas en forma implícita I

Repaso del caso de una variable de análisis I

Dada la ecuación $F(x,y) = x^2y - \ln(2x-3y) + \cos(xy-2) - 5 = 0$, y el punto $(2,1)$, considerando $y = y(x)$, hallar $y'(2)$.

Para resaltar la relación funcional de $y$ con $x$, antes de proceder con la derivación de la ecuación dada, suele reescribirse ésta como:

$$F(x, y(x)) = x^2y(x) - \ln\big(2x - 3y(x)\big) + \cos(x\, y(x) - 2) - 5 = 0$$

Con esto lo que se pretende es poner énfasis en que la variable $y$ es una función de $x$.

Aplicando derivada respecto de $x$ a toda la ecuación nos queda:

$$\frac{dF}{dx}(x, y(x)) = \frac{d}{dx}\Big(x^2y(x) - \ln\big(2x - 3y(x)\big) + \cos(x\, y(x) - 2) - 5\Big) = \frac{d0}{dx}$$

Aplicando las reglas de derivación, la ecuación derivada respecto de $x$ queda:

$$2\, x\, y(x) + x^2\, y'(x) - \frac{1}{2x - 3y(x)}\big(2 - 3\, y'(x)\big) - \operatorname{sen}(x\, y(x) - 2)\, (y(x) + x\, y'(x)) = 0$$

Como nuestra incógnita es $y'(x)$, procedemos algebraicamente a hallar dicha expresión, y dejaremos la notación $y(x)$

$$2\, x\, y - \frac{2}{2x - 3y} - y \operatorname{sen}(x\, y - 2) + x^2\, y'(x) + \frac{3}{2x - 3y}\, y'(x) - x \operatorname{sen}(x\, y - 2)\, y'(x) = 0$$

$$y'(x)\left(x^2 + \frac{3}{2x - 3y} - x \operatorname{sen}(x\, y - 2)\right) = -\left(2\, x\, y - \frac{2}{2x - 3y} - y \operatorname{sen}(x\, y - 2)\right)$$

$$y'(x) = -\frac{2\, x\, y - \frac{2}{2x - 3y} - y \operatorname{sen}(x\, y - 2)}{x^2 + \frac{3}{2x - 3y} - x \operatorname{sen}(x\, y - 2)}$$

$$y'(2) = -\frac{2}{7}$$

En varias variables tenemos el siguiente teorema para el caso anterior.

**Teorema** de la derivación implícita primera parte

Dada la función $z = f(x,y)$ y $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(x_0, y_0) = 0$, además $f \in C^1$ en un disco de centro $(x_0, y_0)$ y también se cumple $f_y(x_0, y_0) \neq 0$, entonces $f(x,y) = 0$, define implícitamenten una relación funcional diferenciable $y = y(x)$, con dominio en un entorno de $x_0$, tal que $y_0 = y(x_0)$, en las cercanías de $(x_0, y_0)$ con derivada

$$y' = y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

Para el ejemplo anterior recalculemos $y'(2)$ mediante el uso de la última fórmula.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2\,x\,y - \frac{2}{2x - 3y} - y\,sen(xy - 2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2{,}1) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + \frac{3}{2x - 3y} - x\,sen(xy - 2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 7$$

$$y' = y'(2) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(2{,}1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(2{,}1)} = -\frac{2}{7}$$

Veamos ahora el caso para funciones implícitas de varias variables

**Teorema de la función implícita I.** Sea la función

$$F: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} / w = F(x, y, z)$$

de clase $\mathcal{C}^1$ en el conjunto abierto no vacío $A$ de $\mathbb{R}^3$. Sea $P = (x_0, y_0, z_0) \in A$, un punto para el cual se cumplen las condiciones

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

Entonces existe un entorno $E_1$ de $z_0$, un entorno $E_2$ de $P' = (x_0, y_0)$, donde $E_2 \times E_1 \subseteq A$, y una única función

$$g: E_2 \to E_1 / z = g(x, y)$$

( *$g$ es la función implícita*) de clase $\mathcal{C}^1$ en $E_2$, que para cada $(x, y) \in E_2$ satisface $F\big(x, y, g(x, y)\big) = 0$ y además $z_0 = g(x_0, y_0)$, cuyas derivadas parciales en $P' = (x_0, y_0)$ están dadas por las fórmulas

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}$$

**Ejemplo 1.** A partir de la ecuación

$$F(x,y,z) = e^{x\cdot y - z} - x^2\, y^3\, z = 0$$

es posible definir una relación funcional implícita $z = f(x,y)$, en las cercanías del punto $P = (x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$. Nótese que $F \neq f$!!!.

Esta afirmación se basa en que se cumplen las condiciones del Teorema de la función implícita I. Nótese pues que

$$F(1,1,1) = e^{1\cdot 1 - 1} - 1^2 1^3 1 = 0 \quad \text{y} \quad \left.\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)\right|_{(1,1,1)} = -e^{x\cdot y - z} - x^2\, y^3\big|_{(1,1,1)} = -2 \neq 0$$

y además, la función $F$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en todo $\mathbb{R}^3$. Basta con ver que las funciones derivadas parciales

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = y\, e^{x\cdot y - z} - 2x\, y^3 z$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = x\, e^{x\cdot y - z} - 3x^2\, y^2\, z$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = -e^{x\cdot y - z} - x^2\, y^3$$

son continuas en todo $\mathbb{R}^3$, ya que se trata de funciones que resultan de realizar operaciones algebraicas y composiciones de funciones continuas.

Por otra parte, teniendo en cuenta que

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)\right|_{(1,1,1)} = \; y e^{x\cdot y - z} - 2x\, y^3 z\big|_{(1,1,1)} = -1 \neq 0$$

y

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)\right|_{(1,1,1)} = \; x e^{x\cdot y - z} - 3x^2\, y^2\, z\big|_{(1,1,1)} = -2 \neq 0$$

también es posible definir funciones implícitas de la forma

$$x = g(y,z) \qquad \text{y} \qquad y = h(x,z)$$

en las cercanías del punto $P = (x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$.

**Ejemplo 2.** Para la función $z = f(x,y)$ definida implícitamente por

$$F(x,y,z) = e^{x\cdot y - z} - x^2\, y^3\, z = 0$$

en las cercanías del punto $P = (x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$, calcular la derivada direccional de

$z = f(x, y)$ en $P' = (x_0, y_0) = (1,1)$, en la dirección y sentido del vector $\vec{u} = (2,1)$.

El Teorema de la función implícita I asegura que la función implícita $z = f(x, y)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en algún entorno $E_2$ de $P' = (x_0, y_0) = (1,1)$, con lo cual (según el Teorema de condición suficiente de diferenciabilidad) es claramente diferenciable en ese punto. De esto resulta que para $f$, vale la fórmula del gradiente para la derivada direccional

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{v}$$

donde $P' = (x_0, y_0) = (1,1)$, y el vector $\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

A su vez, para calcular el gradiente

$$\nabla f(1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\right)$$

se utilizan las fórmulas para las derivadas parciales ofrecidas en el Teorema de la función implícita I, las cuales son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)}$$

y en definitiva

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -\frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -1$$

De esta manera, resulta que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \vec{v} = \left(-\frac{1}{2}, -1\right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

es decir

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

**Ejemplo 3.** Para la función $z = f(x, y)$ definida implícitamente por

$$F(x, y, z) = e^{x \cdot y - z} - x^2 y^3 z = 0$$

en las cercanías del punto $P = (x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$, hallar las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a su gráfica en $P = (x_0, y_0, z_0) = \left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right) = (1,1,1)$.

Teniendo en cuenta que se trata de una función $z = f(x, y)$, diferenciable en $P' = (x_0, y_0) = (1,1)$, para hallar las ecuaciones pedidas, es posible aplicar las fórmulas detalladas en las consecuencias de la diferenciabilidad de una función, es decir

*Ecuación del plano tangente al gráfico de* $z = f(x, y)$ *en* $P' = (x_0, y_0)$

$$\pi:\ z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

*Ecuación de la recta normal al gráfico de* $z = f(x, y)$ *en* $P' = (x_0, y_0)$

$$R^{\perp}: \alpha(t) = P + t \cdot \vec{N} = \big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big) + t \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right), \qquad t \in \mathbb{R}$$

En este caso, las derivadas parciales se calculan según lo como se hizo en el Ejemplo 15.

Otra manera de hallar las ecuaciones pedidas consiste en proceder según como se realizó en el Ejemplo 12.

Sea cual sea la elección, se obtendrán los siguientes resultados

*Ecuación del plano tangente al gráfico de* $z = f(x, y)$ *en* $P' = (x_0, y_0)$

$$\pi: x + 2y + 2z = 5$$

*Ecuación de la recta normal al gráfico de* $z = f(x, y)$ *en* $P' = (x_0, y_0)$

$$R^{\perp}: \alpha(t) = (1 - t, 1 - 2t, 1 - 2z), \quad t \in \mathbb{R}.$$

---

Biblioteca digital. Cap 5, p. 191. Cálculo varias variables. W Mora.

Link contenidos pertinentes (Ctrl+Clic mouse para ir al enlace)
Khan Academy
*Este tema no se trata en este sitio.*