T P 03 Ej. 2.1-f

Demostrar por definición de límite que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$$

Planteo del ejercicio

Se trata de demostrar el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$$

utilizando la definición $\epsilon - \delta$ (épsilon – delta) de límite doble, presentada en el apunte teórico de esta unidad. A saber

> **Definición 1. (Límite doble)** Sea la función $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde A es un conjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^2$ y sea el par (x_0, y_0) un punto de acumulación de A. Se dice que L es el límite de f cuando $(x,y) \in A \cap D'(x_0, y_0)$, tiende a (x_0, y_0), si para todo $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, existe un $\delta \in \mathbb{R}^+$, tal que:
>
> $$|f(x,y) - L| < \epsilon$$
>
> Siempre que:
>
> $$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$
>
> Y se escribe:
>
> $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

La resolución consiste en demostrar que para todo $\epsilon > 0$, siempre es posible hallar un $\delta > 0$ de modo tal que

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \text{ implica } |f(x,y) - L| < \epsilon$$

Teniendo en cuenta que en este caso en particular se tiene

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \qquad (x_0, y_0) = (0,0) \qquad L = 1$$

se escribe

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \text{ implica } \left|\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} - 1\right| < \epsilon$$

Para hallar la relación $\epsilon - \delta$ buscada, se procede del siguiente modo.

Resolución

En principio, de Análisis Matemático I, hay que recordar la Fórmula de Taylor de primer orden (Véase, por ejemplo, la sección 7.5. pág. 341 del libro Calculus Tomo I de Tom M. Apostol). Recuérdese que para la función

$$g: U = (a, b) \to \mathbb{R} / y = g(t)$$

Con derivadas continuas hasta el orden 2 en algún intervalo $U = (a, b)$ que contenga a t_0, para todo $t \in U$, se cumple

$$g(t) = g(t_0 + h) = g(t_0) + g'(t_0) \cdot h + \frac{1}{2} \cdot g''(\lambda) \cdot h^2$$

Donde

$$t = t_0 + h$$

y λ es un número real entre t y t_0. Particularmente, si $t_0 = 0$, se tiene la Fórmula de McLaurin

$$g(t) = g(h) = g(0) + g'(0) \cdot h + \frac{1}{2} \cdot g''(\lambda) \cdot h^2 = g(0) + g'(0) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g''(\lambda) \cdot t^2$$

Es decir

$$g(t) = g(0) + g'(0) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g''(\lambda) \cdot t^2$$

Nótese que en esta situación se tiene que $t = h$, puesto que se ha tomado $t_0 = 0$.

Entonces, para la función

$$g(t) = \operatorname{sen}(t)$$

el resultado anterior, vale para todo intervalo $U = (a, b)$ que contenga a $t_0 = 0$. Obsérvese que la función $g(t) = \operatorname{sen}(t)$ posee derivada de segundo orden (y de todos los órdenes también) continua en toda la recta real.

Ahora bien, se tiene

$$g(t) = \operatorname{sen}(t) \to g(0) = 0$$

$$g'(t) = \cos(t) \to g'(0) = 1$$

$$g''(t) = -\sin(t) \to g''(\lambda) = -\sin(\lambda)$$

La Fórmula de McLaurin correspondiente es la siguiente

$$g(t) = \text{sen}\ (t) = \ g(0) + g'(0) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g''(\lambda) \cdot t^2 = 0 + 1 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \sin(\lambda) \cdot t^2$$

O sea

$$\text{sen}\ (t) = t - \frac{1}{2} \cdot \sin(\lambda) \cdot t^2$$

Que vale para todo $t \in U = (a, b)$ en el que está contenido $t_0 = 0$.

Ahora bien, tomando esta última fórmula, y dividiendo a cada lado por $t \neq 0$, queda

$$\frac{\text{sen}\ (t)}{t} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \sin(\lambda) \cdot t$$

Y entonces, se deduce la siguiente

$$\frac{\text{sen}\ (t)}{t} - 1 = -\frac{1}{2} \cdot \sin(\lambda) \cdot t$$

Luego, aplicando valor absoluto a cada lado de esta identidad, resulta

$$\left|\frac{\text{sen}\ (t)}{t} - 1\right| = \left|-\frac{1}{2} \cdot \sin(\lambda) \cdot t\right| = \frac{1}{2} \cdot |\sin(\lambda)| \cdot |t|$$

Pero teniendo en cuenta que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se verifica la propiedad

$$|\sin(\lambda)| \leq 1$$

Ya que $g(t) = \text{sen}(t)$ es una función acotada, se deduce que

$$\left|\frac{\text{sen}\ (t)}{t} - 1\right| = \frac{1}{2} \cdot |\sin(\lambda)| \cdot |t| \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot |t| = \frac{1}{2} \cdot |t|$$

O más brevemente

$$\left|\frac{\text{sen}\ (t)}{t} - 1\right| \leq \frac{1}{2} \cdot |t|$$

Que por las condiciones establecidas previamente a la Formula de Taylor de primer orden, se mantiene verdadera para todo número real no nulo.

Ahora bien, para relacionar esto con el límite doble planteado inicialmente, se considera la sustitución

$$t = x^2 + y^2$$

Y reemplazando en la expresión obtenida anteriormente, a saber

$$\left|\frac{\text{sen}\ (t)}{t} - 1\right| \leq \frac{1}{2} \cdot |t|$$

se obtiene la relación

$$\left|\frac{\text{sen }(x^2+y^2)}{x^2+y^2}-1\right| \leq \frac{1}{2}\cdot|x^2+y^2| = \frac{1}{2}\cdot(x^2+y^2)$$

Esto es

$$\left|\frac{\text{sen }(x^2+y^2)}{x^2+y^2}-1\right| \leq \frac{1}{2}\cdot(x^2+y^2)$$

Debe recordarse ahora que, se busca demostrar que para todo $\epsilon > 0$, siempre es posible hallar un $\delta > 0$ de modo tal que

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \text{ implica } \left|\frac{\text{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}-1\right| < \epsilon$$

Utilizando entonces, el hecho de que

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

Y la expresión que se ha logrado deducir, resulta

$$\left|\frac{\text{sen }(x^2+y^2)}{x^2+y^2}-1\right| \leq \frac{1}{2}\cdot(x^2+y^2) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}^2 < \frac{1}{2}\cdot\delta^2$$

Esto es

$$\left|\frac{\text{sen }(x^2+y^2)}{x^2+y^2}-1\right| < \frac{1}{2}\cdot\delta^2$$

Que se verifica para (x, y) tendiendo al origen y para todo número real $\delta > 0$, siempre que estos estén relacionados según

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

En estos términos entonces, se cumple que, para todo número real $\varepsilon > 0$, y para todo número real $\delta > 0$, que satisfacen la desigualdad

$$\frac{1}{2}\cdot\delta^2 \leq \varepsilon$$

O equivalentemente

$$\delta \leq \sqrt{2\cdot\varepsilon}$$

Se concluye que, a partir de la relación

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

se implica la siguiente

$$\left|\frac{\operatorname{sen}\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2}-1\right|<\frac{1}{2}\cdot\delta^2\leq\varepsilon$$

O brevemente

$$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta \text{ implica } \left|\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}-1\right|<\epsilon$$

Lo que prueba verdaderamente el límite doble inicial

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=1$$

Que es lo que se quería demostrar.

■

<u>Nota</u>: El objetivo de estos ejercicios consiste en hallar la relación $\epsilon-\delta$, que en el caso del límite planteado es la siguiente

$$\delta\leq\sqrt{2\cdot\varepsilon}$$

Esta expresión muestra una dependencia entre ambas cantidades. Ahora bien, hay que aclarar que no siempre existe una dependencia tal. Por ejemplo, para la función constante

$$f(x,y)=C$$

resulta que para todo número real $\varepsilon>0$, independientemente del real $\delta>0$, siempre se verifica el límite doble

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=C.$$

Queda claro, además, que resolver límites por definición no es una tarea sencilla. Por tal motivo, tomando como punto de partida el formalismo presentado en la definición $\epsilon-\delta$ se busca deducir teoremas que faciliten el cálculo.