CLASE 1

Introducción a las funciones de varias variables

Práctica sobre

- **Funciones escalares de varias variables.**
- **Conjuntos de nivel.**
- **Trayectorias.**

Funciones escalares de varias variables

Definición 1. Una *función (o campo) escalar* de $n \geq 2$ variables reales es una regla que asigna a cada elemento $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ del conjunto $Dom\, f \subseteq \mathbb{R}^n$, un único número real $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Se escribe:

$$f: Dom\, f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}: y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

El conjunto $Dom\, f \subseteq \mathbb{R}^n$ se llama *dominio* de f. El conjunto de números reales $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ obtenidos a partir de la acción de la función f sobre cada elemento de $Dom\, f$, se llama *rango (o imagen)* de f.

Es usual referirse a la función

$$f: Dom\, f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} /\ y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

indicando solamente la regla que asocia a cada $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in U$, el número real $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, es decir que se ofrece la formula

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

sin dar explícitamente el dominio $Dom\, f$. En tal situación deberá entenderse que el dominio de f es el conjunto $Dom\, f \subseteq \mathbb{R}^n$ más amplio posible para el cual la regla $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tenga sentido en el conjunto de los números reales. En tales circunstancias se habla del *dominio natural* de f.

Este tipo de funciones se utilizan para representar la distribución espacial de magnitudes escalares. Por ejemplo, la densidad $\rho(x, y, z)$ de un sólido Ω en el punto (x, y, z), la temperatura $T(x, y, z)$ en la posición (x, y, z) del espacio, el potencial gravitacional $P(x, y, z)$ en el punto (x, y, z) en el campo gravitatorio.

En lo sucesivo, la mayor parte de los ejemplos presentados, serán de funciones de dos y de tres variables. Vale entonces decir, que en estos casos se adopta una escritura literal conveniente que consiste en abandonar la notación subindexada. En concreto, para el caso de funciones de dos variables se utilizan x e y para referirse a las variables independientes y se emplea la letra z para denotar a la variable dependiente. Se escribe entonces

$$z = f(x, y) = \sqrt{x \cdot y}$$

De forma similar, para funciones de tres variables, se escribe

$$w = f(x, y, z)$$

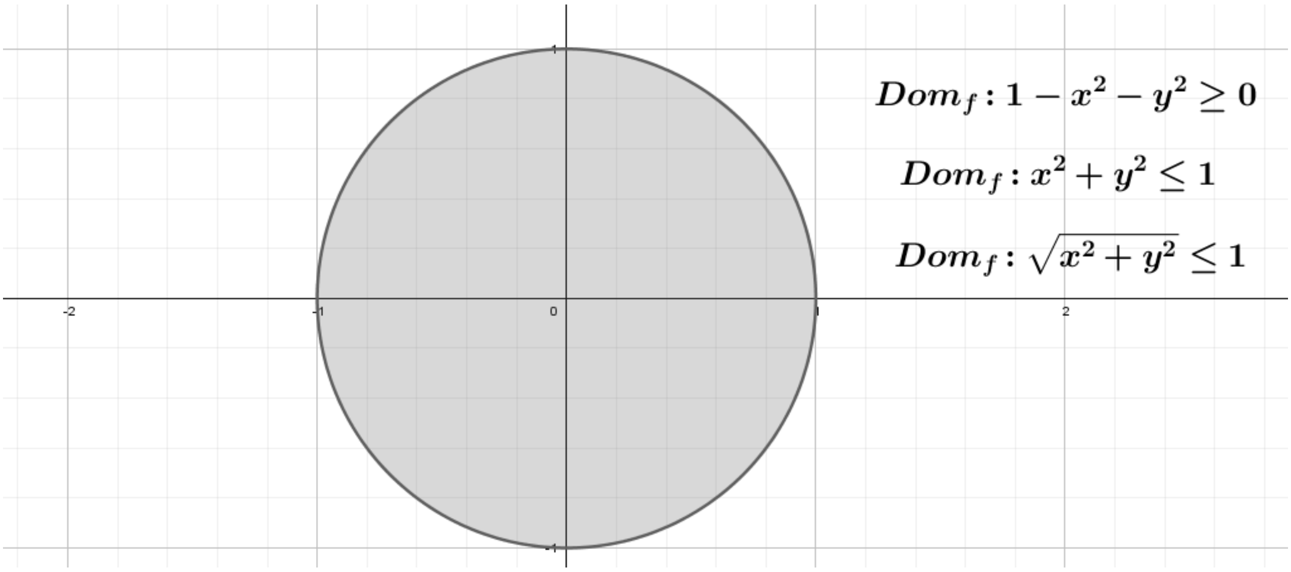
Ejemplo 1. El dominio natural de la función de dos variables definida por la fórmula

$$z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

es el conjunto

$$Dom\ f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq 1 - x^2 - y^2\}$$

Se trata del círculo de centro en el origen y radio unitario que se muestra en la siguiente figura. Nótese que la condición que define al dominio de la función se obtiene del requisito de no negatividad del radicando en la fórmula de f.



El dominio natural de la función de dos variables definida según $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ es un círculo de centro en el origen y radio 1.

Nótese que la inecuación que define al conjunto surge a partir de que el radicando debe ser mayor o igual a cero. Además, esta expresión se puede escribir equivalentemente como

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$1 \geq x^2 + y^2$$

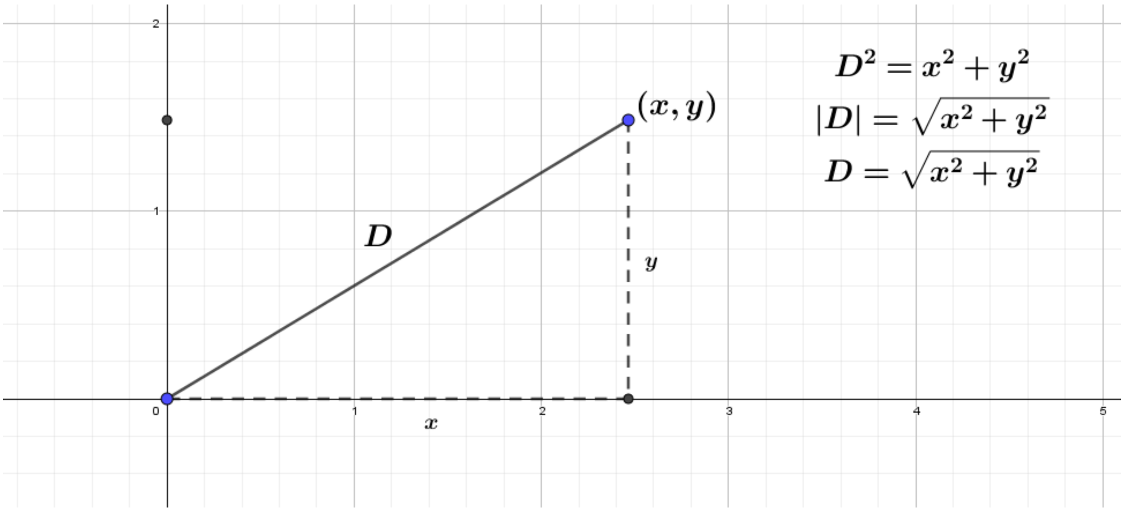
$$\sqrt{1} \geq \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$$

Recordando ahora que la raíz cuadrada

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

Ofrece la distancia al origen de par (x, y). La última inecuación se refiere entonces a "todos los pares (x, y) cuya distancia al origen es menor o igual a cero".



<u>Interpretación gráfica de la relación entre el par (x, y) y el valor asociado $\sqrt{x^2 + y^2}$. Este valor es igual a la distancia al origen del par (x, y).</u>

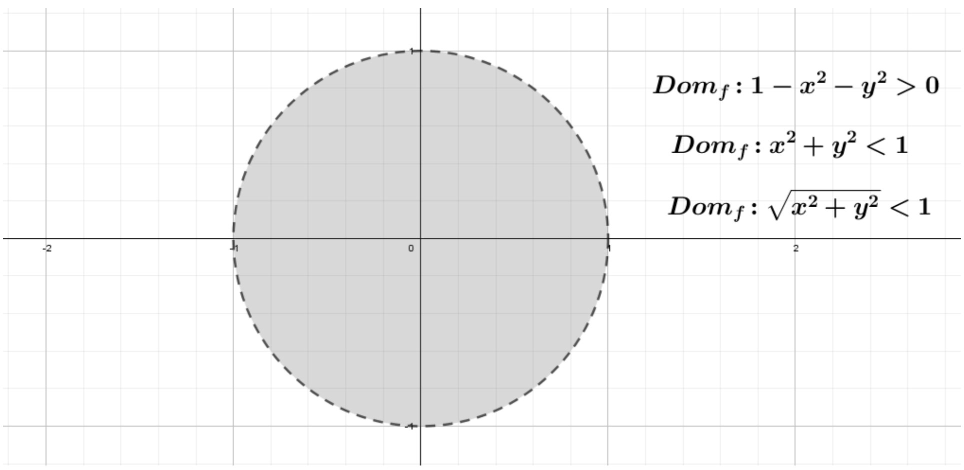
Es decir que se trata de un círculo de centro en el origen y radio 1, tal como se ha mencionado más arriba.

Ejemplo 2. El dominio natural de la función de dos variables definida por la fórmula

$$z = f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

es el conjunto

$$Dom\ f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$



<u>El dominio natural de la función de dos variables definida según $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ es un círculo de centro en el origen y radio 1, sin la circunferencia frontera.</u>

Ejemplo 3. El dominio natural de la función escalar de tres variables definida por la fórmula

$$w = f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$$

Se define como

$$Dom\ f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0\}$$

O bien, procediendo como en el Ejemplo 1, este se define como

$$Dom\ f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 1\right\}$$

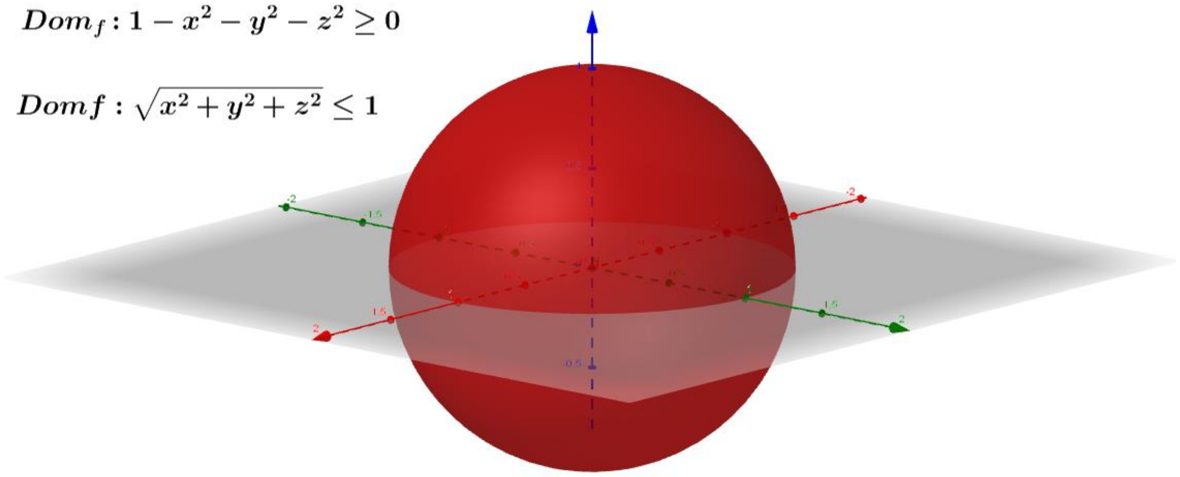
Y recordando que la expresión

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ofrece la distancia al origen, $(0,0,0)$, del punto (x, y, z). La lectura de la inecuación que caracteriza al dominio permite establecer que este conjunto está formado por todas las ternas (x, y, z) cuya distancia al origen es menor o igual a 1. Con esto se concluye que el dominio de la función

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$$

Es un sólido esférico de centro en el origen y radio 1.



Representación gráfica del dominio natural de la función de tres variables definida por $\boldsymbol{f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$

Ejemplo 4. El dominio natural de la función escalar de dos variables definida por

$$z = f(x, y) = \ln(y - x^2)$$

es el conjunto definido de la siguiente manera

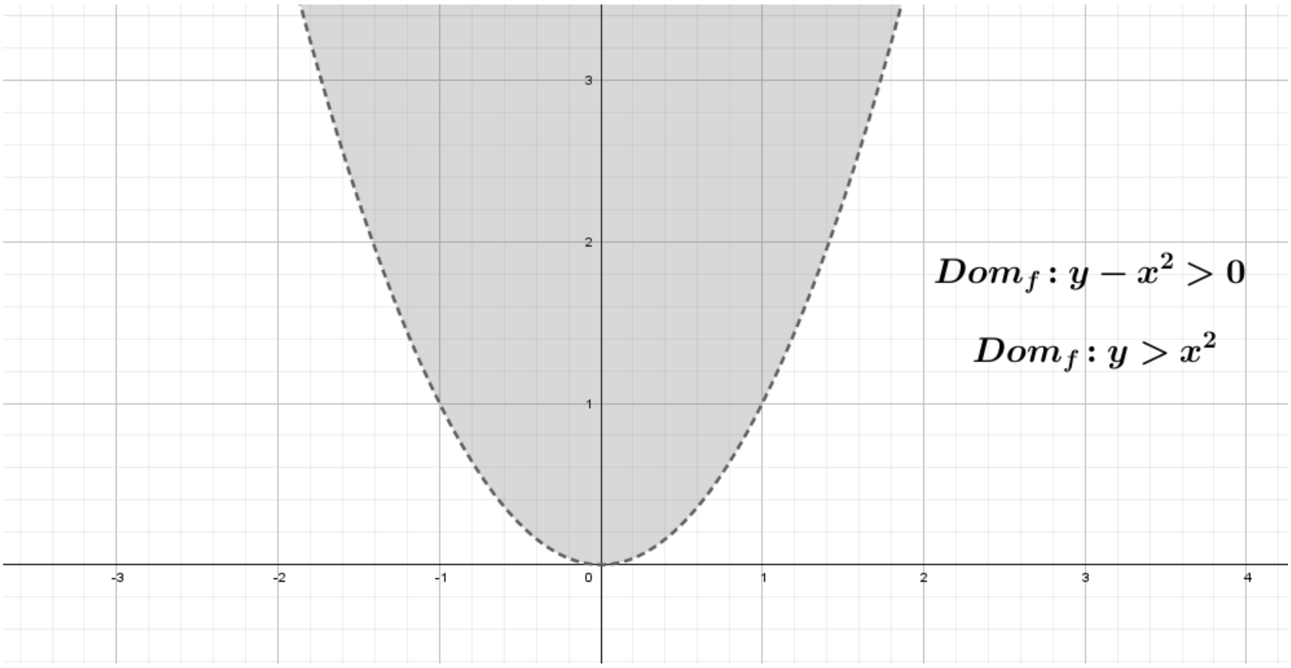
$$Dom\ f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 > 0\}$$

La inecuación que condiciona a los pares (x, y) también se puede escribir del siguiente modo

$$y - x^2 > 0$$

$$y > x^2$$

Esta inecuación define toda la región del plano que se encuentra "por encima" de la parábola de ecuación $y = x^2$ (que claramente no está incluida en el dominio.



Representación gráfica del dominio natural de la función de dos variables definida por $f(x,y) = \ln(y - x^2)$

Gráfica de una función escalar de varias variables

Definición 2. La gráfica de la función escalar de $n \geq 2$ variables reales

$$f : Dom\ f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} /\ y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Se define como el conjunto

$$Graf(f) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in Dom\ f \wedge y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

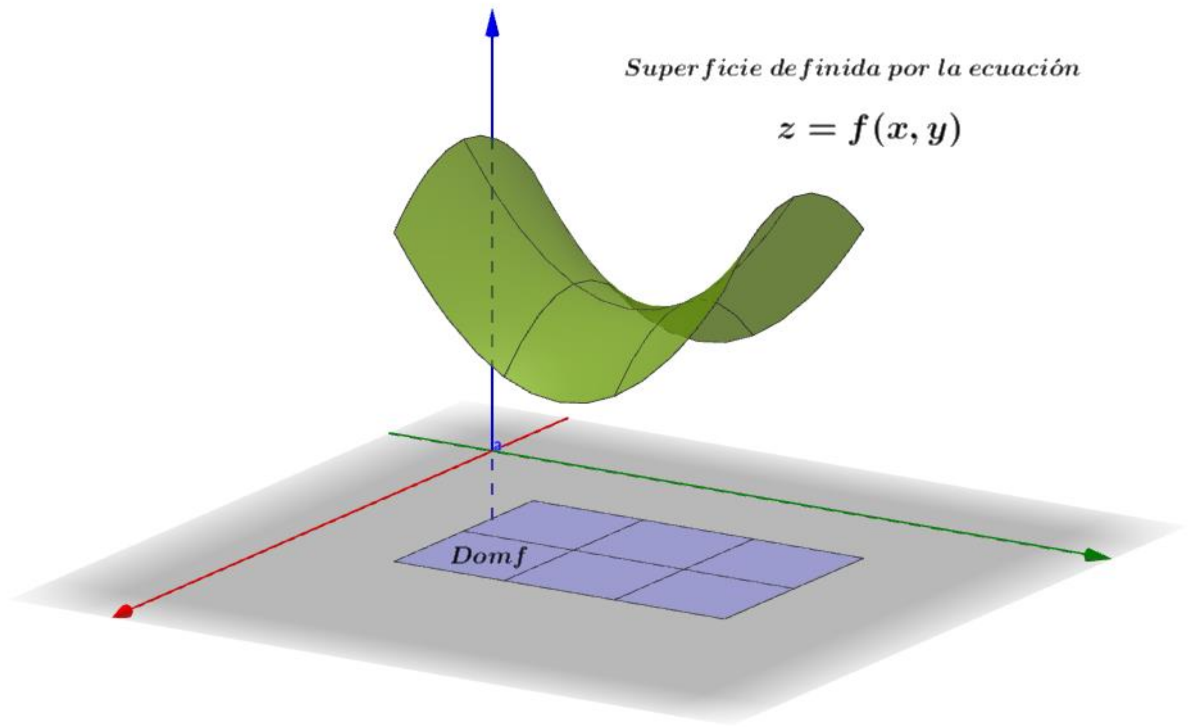
Se dice que la gráfica de la función $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una hipersuperficie n-dimensional en el espacio $\mathbb{R}^{n+1}$. Cuando se trata de una función de dos variables la gráfica de la función

$$f : Dom\ f \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} /\ z = f(x, y)$$

resulta ser la superficie en $\mathbb{R}^3$ que se define como

$$Graf(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in Dom\, f \wedge z = f(x, y)\}$$

cuya representación geométrica es la que se muestra en la siguiente figura



Ejemplo 5. La gráfica de la función

$$z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

es la parte positiva de la esfera de centro en el origen y radio 3.

En efecto, escribiendo la ecuación que define a f en la forma

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

se deduce que $z \geq 0$. Luego, procediendo del siguiente modo

$$z^2 = 9 - x^2 - y^2$$

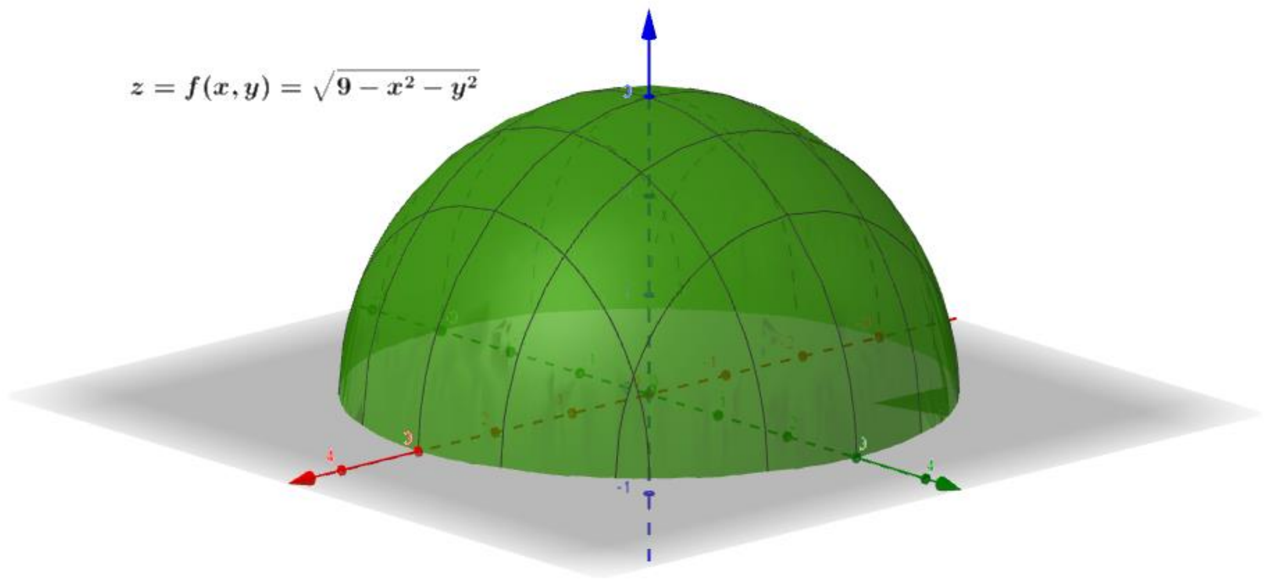
resulta la expresión

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

y luego, la siguiente

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 3$$

que es aquella que define al conjunto de ternas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ cuya distancia al origen de coordenadas es igual a 3.



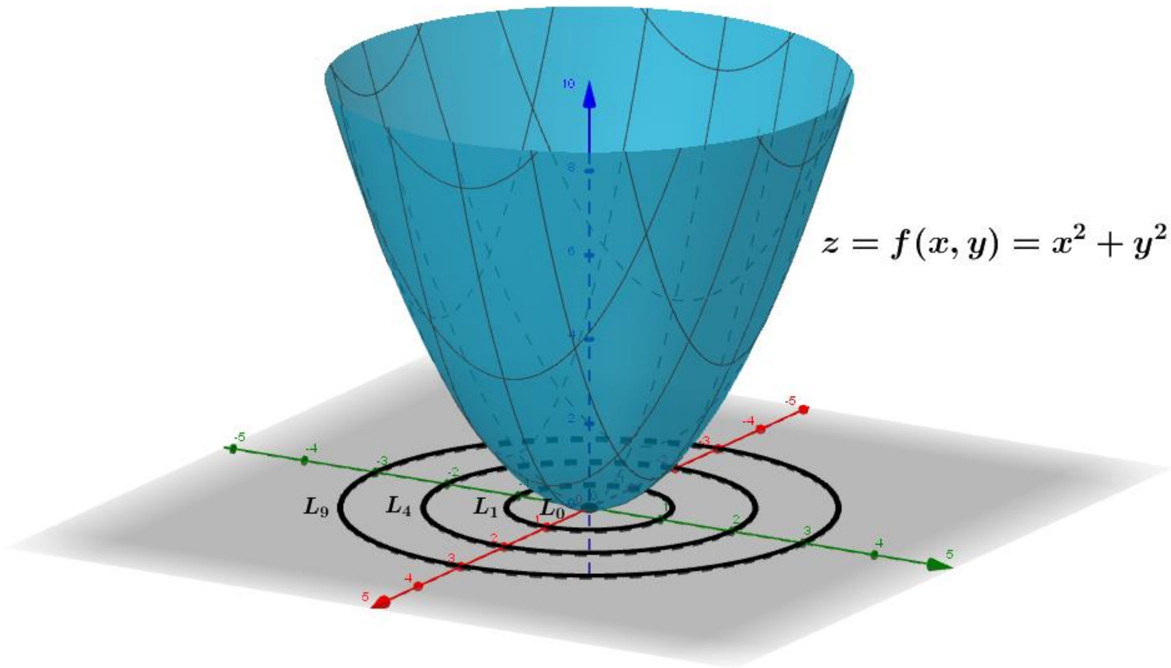
Gráfica de la función de dos variables definida por la fórmula $z = f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Conjuntos de nivel

Una manera de contar con una representación gráfica parcial de la función escalar $z = f(x,y)$ es la que se obtiene a partir de generar un mapa topográfico en el plano xy, indicando niveles constantes de esta función. Esto es, establecido un nivel C, se define el conjunto de puntos del dominio $Dom\ f$, donde la función asume ese valor constante. Este concepto es el de *conjunto de nivel*, que para el caso comentado viene dado por:

$$L_C = \{(x,y) \in Dom\ f : f(x,y) = C\}$$

El conjunto L_C puede interpretarse geométricamente como la proyección vertical sobre el plano xy de la intersección de la gráfica de la función $z = f(x,y)$ con el plano horizontal de ecuación $z = C$. Claro que, si dicha intersección no existe, el conjunto de nivel es el conjunto vacío. Ahora bien, cuando tal intersección existe, el conjunto de nivel obtenido, si es que se trata de una curva, se llama *curva de nivel*. En la siguiente figura se exhiben, el gráfico y algunas curvas de nivel de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$.

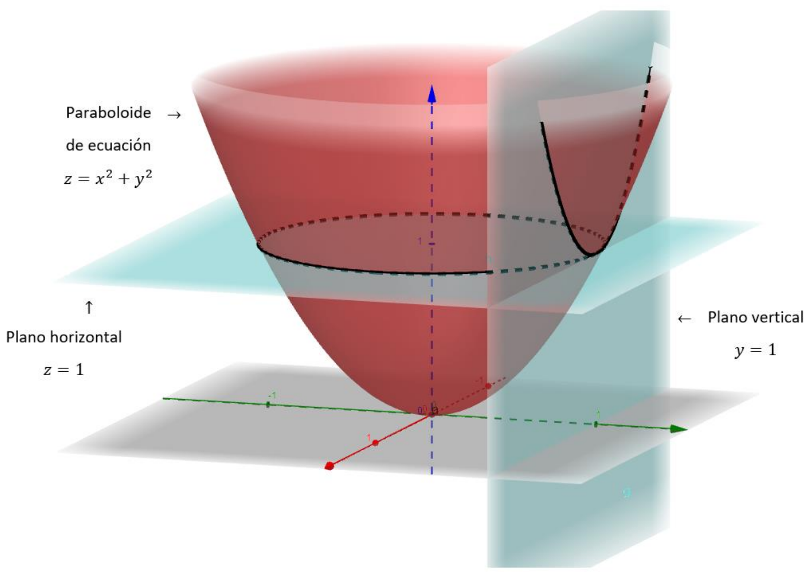


<u>Se muestra la gráfica de $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ y los conjuntos de nivel L_0, L_1, L_4 y L_9</u>

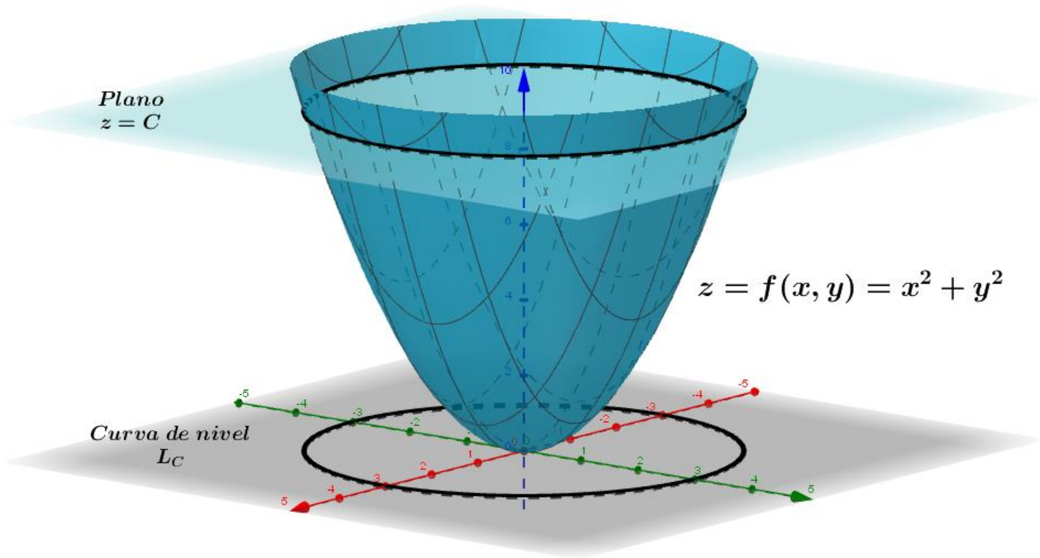
La gráfica de $f(x, y) = x^2 + y^2$ es un <u>paraboloide circular</u> y conjuntos de nivel L_C son:

- Circunferencias de centro en el origen y radio $\sqrt{C}$, cuando $C > 0$.
- El origen de coordenadas $(0,0)$, cuando $C = 0$.
- El conjunto vacío cuando $C < 0$.

Nota. Descripción del paraboloide circular de eje z, de ecuación $z = x^2 + y^2$



Una manera de graficar el paraboloide circular de ecuación $z = x^2 + y^2$ consiste en determinar cortes (o secciones) horizontales y verticales. Como se ve en este ejemplo, los cortes horizontales son circunferencias y los verticales son parábolas.



La curva de nivel L_C se corresponde con la proyección de la curva intersección entre la gráfica de la función $z = f(x,y)$ y el plano horizontal $z = C$

Ejemplo 6. Representar gráficamente las curvas de nivel (en caso de que existan) del siguiente campo escalar en el plano, para los distintos valores de C propuestos.

$$z = f(x,y) = \frac{y}{1 - x^2}$$

$$C = 0; \quad C = -1; \quad C = 1; \quad C = 3$$

Caracterice los conjuntos de nivel según el valor C.

Resolución: El conjunto de nivel se define del siguiente modo

$$L_C = \left\{(x,y) \in Dom\, f : f(x,y) = \frac{y}{1 - x^2} = C\right\}$$

Nótese que

$$Dom\, f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 < 0 \vee 1 - x^2 > 0\} = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 = 0\}$$

Es decir que el dominio de f es todo $\mathbb{R}^2$ menos las dos rectas verticales de ecuación $x = -1, x = 1$. Los puntos que forman parte de cada conjunto de nivel deben tomarse, como se aclara en la definición, del dominio de la función.

$i)$ $C = 0$. Es este caso la igualación queda expresada del siguiente modo

$$\frac{y}{1-x^2} = 0$$

Y esta se cumple para todos los pares (x, y) dentro del dominio de la función en los que $y = 0$. Ahora bien, dado que esta ecuación define al eje horizontal x, queda claro entonces que el conjunto de nivel L_0 es el eje x, menos los pares $(-1,0)$ y $(1,0)$.

$ii)$ Para los casos en los que $C \neq 0$, la ecuación

$$\frac{y}{1-x^2} = C$$

Se transforma en la siguiente

$$y = C \cdot (1-x^2) = C \cdot (1-x)(1+x)$$

Que para distintos valores de la constante $C \neq 0$, define parábolas de eje de simetría coincidente con el eje vertical y, que siempre tienen intersección con el eje horizontal x, en los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$. Pero como ya se sabe, estos no forman parte del dominio de la función. Además, cuando $C > 0$, las parábolas poseen concavidad negativa. Cuando $C < 0$, la concavidad es positiva. En el siguiente gráfico se muestran los conjuntos de nivel pedidos en el enunciado.

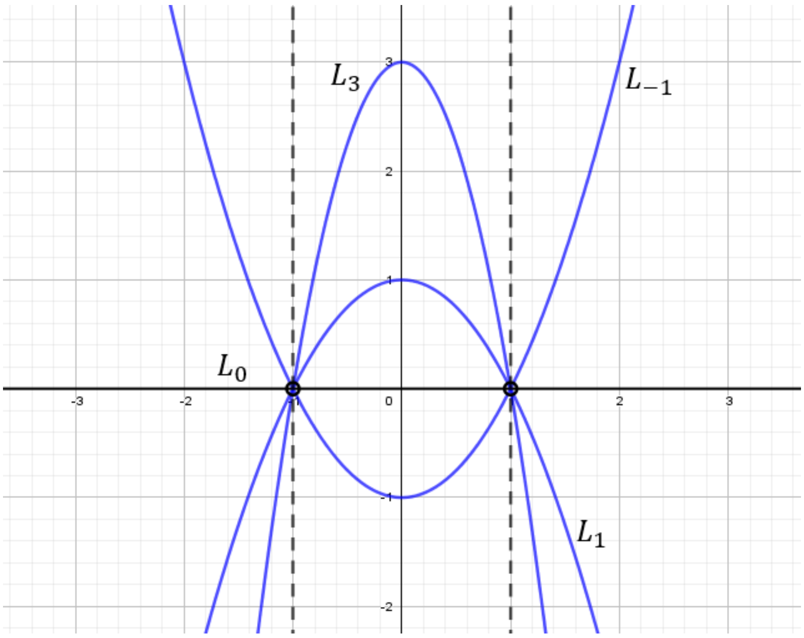


Gráfico de los conjuntos L_{-1}; L_0; L_1 y L_3 de nivel Ejemplo 6

Trayectorias en $\mathbb{R}^n$: Algunos ejemplos en $\mathbb{R}^2$

Definición 3. Una *trayectoria* en $\mathbb{R}^n$ es una función

$$\alpha: [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n / \alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)\big)$$

donde $I = [a,b]$ es el dominio de α llamado *intervalo paramétrico* y la variable t el *parámetro*. La imagen de α sobre I, denotada por $C = \alpha[I]$, se llama curva parametrizada por α y los puntos $\alpha(a) \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha(b) \in \mathbb{R}^n$ se llaman extremos inicial y final, respectivamente. Se dice que α es una *trayectoria regular* si existe la derivada $\alpha'(t) \neq \vec{0}$ y es continua en el intervalo abierto $I' = (a,b)$.

Este tipo de funciones se utilizan para modelar el recorrido realizado por un objeto en movimiento, en el plano, en el espacio o, en general, en $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, $\alpha(t_0) \in \mathbb{R}^3$ puede simbolizar la posición de una partícula en el espacio, en el instante t_0. De este modo, así como se muestra en la Figura 1, a medida que la variable t recorre el intervalo I, desde a hasta b, la función α va trazando la curva $C \subset \mathbb{R}^3$.

Ejemplo 7. Determine la ecuación cartesiana correspondiente a la siguiente trayectoria

$$\vec{\alpha}(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (2+t, 3-t^2) \qquad -1 \leq t \leq 2$$

Luego graficar la curva parametrizada por esta función.

<u>Resolución:</u> Para obtener la ecuación cartesiana, se plantean las dos ecuaciones que establecen la relación entre x, y, y el parámetro t. Esto es:

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3-t^2 \end{cases}$$

Ahora, se procede algebraicamente para obtener una ecuación que involucre solamente a x e y, eliminando el parámetro t. Aquí, se despeja t de la primera y se reemplaza en la segunda. Entonces queda

$$y = 3 - t^2 = 3 - (x-2)^2 = 3 - x^2 + 4x - 4$$

Que en definitiva es

$$y = -x^2 + 4x - 1$$

Esta la ecuación de una parábola. La relación obtenida permite concluir que “la curva parametrizada por la función vectorial $\vec{\alpha}$ está situada en esa parábola”. O bien es un subconjunto de esta, o la parábola completa. Eso, en general, depende del intervalo paramétrico. Se verá a continuación que la función $\vec{\alpha}$ dada en el enunciado, parametriza un arco de la parábola mencionada. Para esto, se calcula la imagen de $\vec{\alpha}$ en los dos extremos de su dominio.

$$\vec{\alpha}(-1) = \big(x(-1), y(-1)\big) = (2-1, 3-(-1)^2) = (1,2)$$

$$\vec{\alpha}(2) = \big(x(2), y(2)\big) = (2+2, 3-2^2) = (4,-1)$$

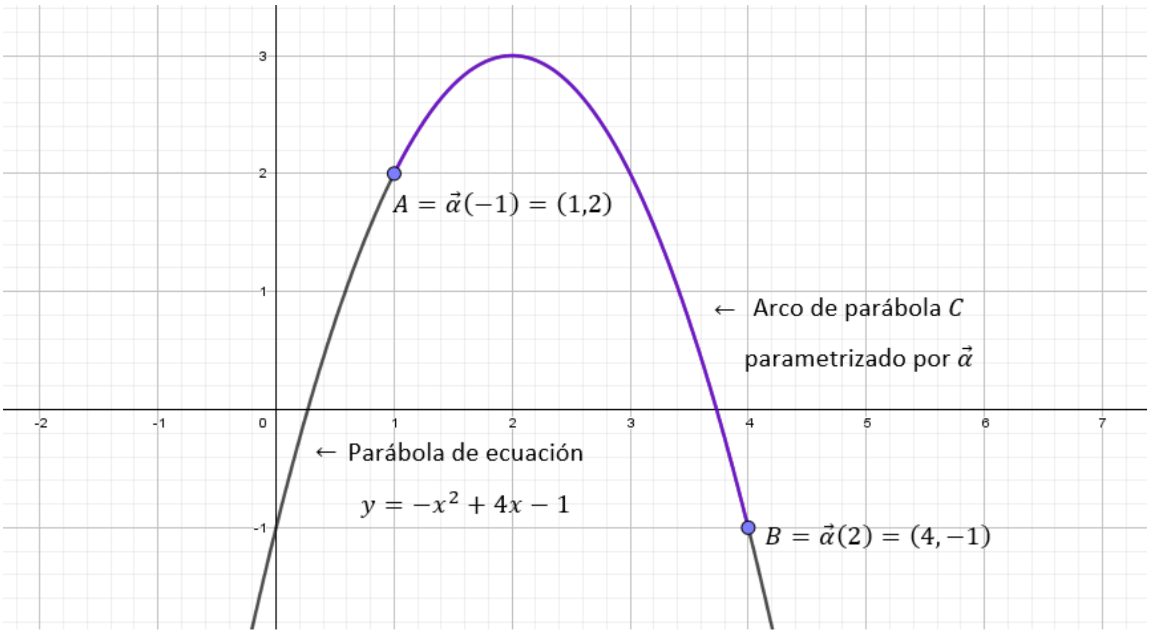
De este modo se han identificado los extremos A y B, inicial y final de la curva C, que son

$$A = \vec{\alpha}(-1) = (1,2)$$

$$B = \vec{\alpha}(2) = (4,-1)$$

La función $\vec{\alpha}$ parametriza (dibuja) el arco C de la parábola de ecuación $y = -x^2 + 4x - 1$, desde el extremo inicial $A = (1,2)$, hasta el extremo final $B = (4,-1)$, a medida que el parámetro t, recorre el intervalo paramétrico $[-1,2]$.

En la siguiente figura se exhibe la parábola completa dada por la ecuación cartesiana $y = -x^2 + 4x - 1$, y el arco C, incluido en esta, recorrido desde $A = (1,2)$, hasta final $B = (4,-1)$.



Representación gráfica e la imagen de la trayectoria $\vec{\alpha}$

Ejemplo 8. Determine la ecuación cartesiana correspondiente a la siguiente trayectoria

$$\vec{\alpha}(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)) \qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Luego graficar la curva parametrizada por esta función.

Resolución: En este caso, x e y, están relacionadas con el parámetro t del siguiente modo

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \operatorname{sen}(t) \end{cases}$$

Para eliminar el parámetro, se tienen en cuenta las fórmulas de x e y, y la identidad trigonométrica fundamental

$$\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) = 1$$

Así, se realiza la elevación al cuadrado de x e y, y luego se suman los resultados.

$$x^2 + y^2 = \cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) = 1$$

Esto es

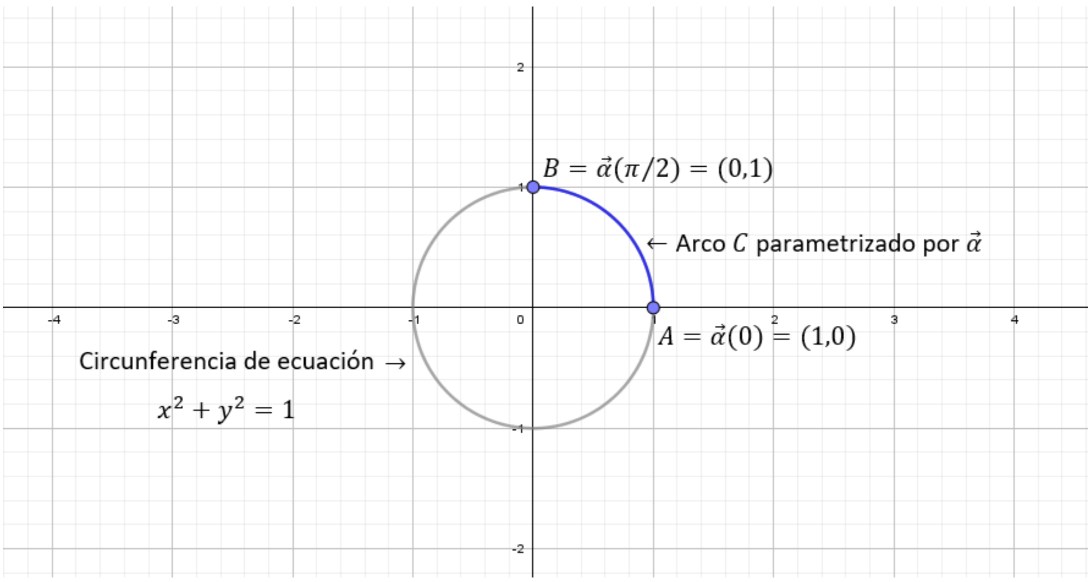
$$x^2 + y^2 = 1$$

Que es la ecuación cartesiana de la circunferencia de centro en el origen y radio igual a 1. Allí, precisamente, se encuentra la imagen de la trayectoria $\vec{\alpha}$. Ahora se calculan los extremos.

$$A = \vec{\alpha}(0) = (1,0)$$

$$B = \vec{\alpha}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1)$$

Se ve entonces que $\vec{\alpha}$ parametriza el arco de la circunferencia mencionada, desde $(1,0)$ hasta $(0,1)$. Y dado que en el intervalo paramétrico las funciones componentes son inyectivas, se produce solamente, la parametrización del arco de la circunferencia que se encuentra en el primer cuadrante.



Representación gráfica del arco C parametrizado por $\vec{\alpha}$

Ejemplo 9. Determine la ecuación cartesiana correspondiente a la siguiente trayectoria

$$\vec{\alpha}(t) = \big(x(t), y(t)\big) = \left(t, \sqrt{1-t^2}\right) \qquad 0 \le t \le 1$$

Luego graficar la curva parametrizada por esta función.

<u>**Resolución:**</u> Las funciones componentes muestran que x e y, se relacionan con el parámetro t de la siguiente forma

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

Reemplazando $x = t$ en la $y = \sqrt{1-t^2}$, y luego elevando al cuadrado, queda

$$y^2 = 1 - x^2$$

Es decir

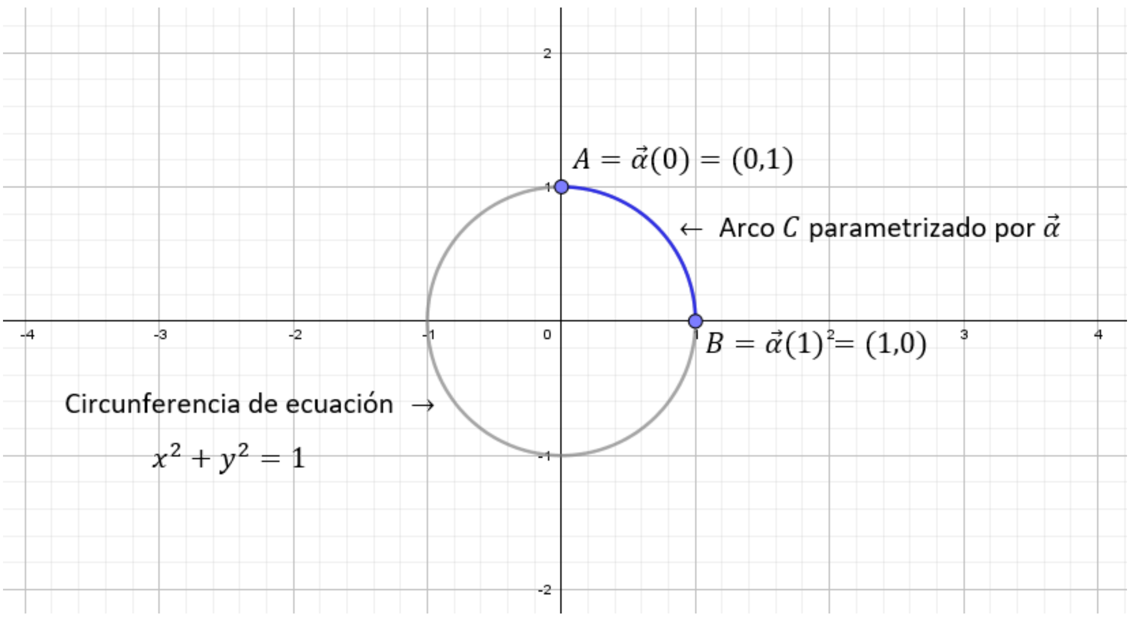
$$x^2 + y^2 = 1$$

Con lo cual, la imagen de la función $\vec{\alpha}$ de este ejercicio, así como en el ejercicio anterior, también se encuentra en la circunferencia de centro en el origen y radio 1. Se calculan los extremos

$$A = \vec{\alpha}(0) = (0,1)$$

$$B = \vec{\alpha}(1) = (1,0)$$

Se trata entonces, del mismo arco C de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, pero recorrido en sentido opuesto al del ejercicio anterior.



<u>**Representación gráfica del arco C parametrizado por $\vec{\alpha}$**</u>