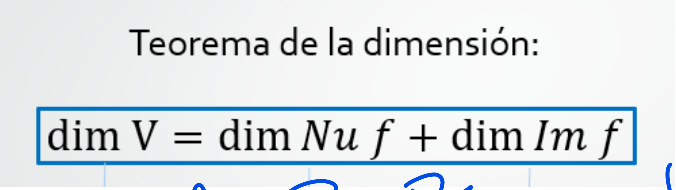
SEA $f: V \to W$ una TL


Teorema de la dimensión:

$$\boxed{\dim \mathrm{V} = \dim Nu\ f + \dim Im\ f}$$

$f: \mathbb{R}^3 \to P_1$ 2

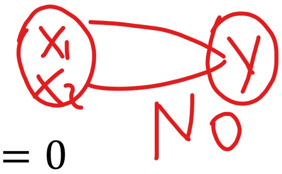
$\dim Nu f = 1$

$\Downarrow$

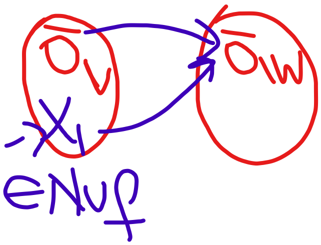
$\dim Im f: \overset{1}{2} \to Im f = P_1 \quad B\, Im f = \{1, x\}$

CLASIFICACIÓN DE TL

MONOMORFISMO (EQUIVALENTE A INYECTIVA) →



$$f \text{ es monomorfismo} \Leftrightarrow \dim Nu\ f = 0$$



Si $\dim Nu f \neq 0$,

$\exists x_1 \neq \bar{0}_V, x_1 \in V / f(x_1) = \bar{0}_W$

Además $f(\bar{0}_V) = \bar{0}_W$ $\Big] \Rightarrow f$ no es inyectiva

$\Rightarrow$ no mono

EPIMORFISMO (EQUIVALENTE A SOBREYECTIVA)

$$f \text{ es epimorfismo} \Leftrightarrow \dim Im\ f = \dim W$$

ISOMORFISMO (EQUIVALENTE A BIYECTIVA)

$$f \text{ es isomorfismo} \Leftrightarrow f\ es\ monomorfismo\ y\ epimorfismo$$

TEOREMA (Teorema fundamental de las transformaciones lineales)

Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos espacios vectoriales, sea $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$ y $\{w_1, w_2, \dots, w_n\} \subset \mathbb{W}$. Entonces existe una única transformación lineal $T\colon \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ que verifica

$$\begin{cases} T(v_1) = w_1 \\ T(v_2) = w_2 \\ \quad\vdots \\ T(v_n) = w_n \end{cases}$$

CASOS: EJEMPLOS

$$f : \underline{\mathbb{R}^3} \to \mathbb{R}^2$$

CASO 1

$$\begin{cases} f(1,1,1) = (1,0) \\ f(0,1,1) = (2,1) \\ f(0,0,1) = (1,-1) \end{cases}$$

existe una única TL pues está definida sobre l base del esp de partida

CASO 2

$f(1,1,1) = (1,0)$

$f(0,1,1) = (2,1)$

→ ~~$f(1,2,2) = (3,1)$~~

existen ∞ TL que cumplen

CASO 3

$$\left\{\begin{array}{l} f(1,1,1) = (1,0) \\ f(0,1,1) = (2,1) \\ f(1,2,2) = (1,1) \end{array}\right.$$

] no se cumple las prop de TL

no existe ninguna TL que cumple

Ej 3 adicionales

3. Hallar en cada caso, cuando sea posible, una transformación lineal que cumpla con los requisitos enunciados. Cuando no sea posible hallarla, explicar por qué y cuando sí sea posible decir si es o no única.

(a) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ epimorfismo y $Nu\,f\subseteq\{(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^3 : x_1+x_2-x_3=0\}$. $\left.\text{T dim Im} f = 1\right\}$

(b) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^{2\times2}$ tal que $Nuf=\{(x;y;z)\in\mathbb{R}^3=(1;-1;1)\cdot(x;y;z)=0\}$.

(c) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ tal que el núcleo sea el plano de ecuación 2x - y + z = 0, $(1,2)\in Imf$ $(-2;2)\in Imf$. ↳ 2 $\dim Im f \geq 2$

(d) $f:\mathbb{R}^3\to\mathcal{P}_3[\mathbb{R}]$ que satisfaga $Nu\,f=gen\{(0;1;-1);\underset{①}{(1;-1;0)}\}$ y $Imf=gen\{\underset{②}{x^2-x+1}\}$

d) Chequeo si existe

M corto

① $\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\to$ LI

$$\boxed{\begin{array}{l}B_{Nuf}=\{(1,-1,0),(0,1,-1)\}\\ \dim Nuf=2 \quad ①\end{array}}$$ ✓

② $$\boxed{B_{Imf}=\{x^2-x+1\} \quad ② \quad \dim Imf=1}$$ ✓

Teo Dim $\dim\mathbb{R}^3=\dim Nuf+\dim Imf$

$3 = 2 + 1$ ✓

existe!

$$\begin{cases} f(1,-1,0)=\bar{0}_{P_3} \\ f(0,1,-1)=\bar{0}_{P_3} \\ f(0,0,1)=x^2-x+1 \end{cases}$$

dato ①

dato ②

↳ $\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\to$ elijo LI

5 f) $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ base de V

$f : V \to W$

$$\begin{cases} f(v_1) = 2v_1 - v_2 \\ f(v_2) = v_1 - v_2 + 3v_3 \\ f(v_3) = v_2 - 6v_3 \end{cases}$$

$$\operatorname{Im} f = \text{gen}\{\underbrace{2v_1 - v_2}_{w_1} ; \underbrace{v_1 - v_2 + 3v_3}_{w_2} ; \underbrace{v_2 - 6v_3}_{w_3}\}$$

LI? $\dim \operatorname{Im} f = 2 \Rightarrow \boxed{\dim Nu = 1}$

$w_1 = 2w_2 + w_3$

$w_1 - 2w_2 - w_3 = \bar{0}_W$

$f(v_1) - 2f(v_2) - f(v_3) = \bar{0}_W$

$f(v_1 - 2v_2 - v_3) = \bar{0}_W$

$$\boxed{Nu f = \{v_1 - 2v_2 - v_3\}}$$