T P 06 Ej 12-f

Hallar los puntos críticos de la función y determinar si son máximos, mínimos o puntos de ensilladura. Calcular sus imágenes.

$$f_{(x,y)} = \ln(3 + 2\,\text{sen}(xy))$$

Resolución

Dominio de f es todo $\mathbb{R}^2$

Cálculo de las derivadas parciales primeras

$$f_x = \frac{2y\cos(xy)}{\underbrace{3 + 2\,\text{sen}(xy)}_{\neq 0}}$$

$$f_y = \frac{2x\cos(xy)}{\underbrace{3 + 2\,\text{sen}(xy)}_{\neq 0}}$$

Cálculo de los puntos críticos:

$$\begin{cases} \dfrac{2y\cos(xy)}{3 + 2\,\text{sen}(xy)} = 0 \to \begin{cases} y = 0 \\ \cos(xy) = 0 \to xy = k\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \\ \dfrac{2x\cos(xy)}{3 + 2\,\text{sen}(xy)} = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ \cos(xy) = 0 \to xy = k\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Primer punto crítico: $P_1 = (0,0)$

Los otros puntos críticos están sobre hipérbolas de ecuación $xy = k\frac{\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$. En estos casos se van tomando diferentes valores de k, y para cada k se elige un punto de la curva, por ejemplo, si $k = 1$, se puede tomar $(x,y) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, para evaluar el determinante de la matriz hessiana y así disponer de un valor numérico para saber cómo continuar.

Cálculo de las derivadas parciales segundas

De $f_x(x,y) = \frac{2y\cos(xy)}{3+2\,\text{sen}(xy)}$

$$f_{xx} = \frac{-2y^2\,\text{sen}(xy)\,(3 + 2\,\text{sen}(xy)) - 2\cos(xy)\;\,2\,y\cos(xy)}{(3 + 2\,\text{sen}(xy))^2}$$

$$f_{xy} = \frac{(2\cos(xy) - 2xy\,\text{sen}(xy))(3 + 2\,\text{sen}(xy)) - 4xy\,(\cos(xy))^2}{(3 + 2\,\text{sen}(xy))^2}$$

De $f_y = \frac{2x\cos(xy)}{3+2\,\text{sen}(xy)}$

$$f_{yy} = \frac{-2x^2\,\text{sen}(xy)\,(3 + 2\,\text{sen}(xy)) - 4x^2\cos(xy)}{(3 + 2\,\text{sen}(xy))^2}$$

Evaluación de las derivadas segundas en los puntos críticos. Comenzamos con $P_1 = (0,0)$

$$f_{xx}(0,0) = 0 = f_{yy}(0,0),\ f_{xy}(0,0) = \frac{2}{3}$$

$$Hf(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{4}{9} < 0$$

Entonces f tiene en $P_1 = (0,0)$ un punto de ensilladura con $f(P_1) = f(0,0) = ln3$

Cálculo de las derivadas parciales segundas en $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

$$f_{xx}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{10}$$

$$f_{yy}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{5}$$

$$f_{xy}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{5}$$

$$Hf\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{vmatrix} -\frac{\pi^2}{10} & -\frac{\pi}{5} \\ -\frac{\pi}{5} & -\frac{2}{5} \end{vmatrix} = 0$$

Con este resultado no es posible extraer conclusión alguna sobre el punto crítico $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$. Se requieren de otros procedimientos como por ejemplo sustituir $xy = u$, para llevar la función f de dos variables a una función $g(u)$ y luego aplicarle a ésta herramientas de una variable del estudio de funciones. Para este curso lo dejaremos aquí.