ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA I-
MÓDULO 5- TRANSFORMACIONES LINEALES – TERCERA CLASE
EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA

COMPOSICIÓN E INVERSA DE T.L.

1) Hallar la composición $g \circ f$ en los siguientes casos:

a) f:R $^{2}\rightarrow R^2$ / $f((x_1,x_2)) = (x_1+x_2, x_1-x_2)$

g:R $^{2}\rightarrow R^3$/ $g((x_1,x_2)) = (x_1-2x_2, 2x_1+x_2, 3x_1+2x_2)$

b) f:R $^{2}\rightarrow R^2$ es la rotación del plano con ángulo de 90º en sentido antihorario.

g:R $^{2}\rightarrow R^2$ es la proyección ortogonal sobre la recta x= 0

2) En los siguientes casos, verificar si la transformación lineal f es un isomorfismo, y en caso afirmativo, hallar la transformación inversa:

a) f: $R^3 \rightarrow R^3$ /$f((x_1,x_2,x_3)) = (x_1+2x_2-x_3, x_1+x_2, x_2+2x_3)$

b) f:R $^{2}\rightarrow R^2$ / $f((x_1,x_2)) = (x_1+2x_2, 2x_1-x_2)$

3) Hallar g o f si:

$f: \mathsf{R}^4 \rightarrow \mathsf{R}^3, f((x_1,x_2,x_3,x_4)) = (x_1+x_2-x_3, x_1+x_3+x_4, -x_1+x_4)$

g: $R^3 \rightarrow R^3$ /$g((x_1,x_2,x_3)) = (2x_1+3x_2-x_3, x_1-x_3, 2x_2+2x_3)$.

Hallar una base y la dimensión del núcleo y la imagen.

4) Hallar la transformación lineal inversa de f: $\mathsf{R}^4 \rightarrow \mathsf{R}^4$ (expresión y matriz)

$f((x,y,z,w)) = (x+y+z+w, y+z+w, z+w, w)$

5) Sean f:R^3→ R^4 y g: R^2→ R^3 transformaciones lineales.

Si $M(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, g(x, y) = (x; –2y; 2x + y) $\wedge$ h = f∘g.

a) Demostrar que g es una TL.

b) Calcule la expresión de h y bases de su núcleo y de su imagen. Clasificarla.

6) Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformación lineal cuya matriz es $M_f = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Calcular la expresión de f^{-1} y dar base de la $Im(f^{-1})$.

7) Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ transformaciones lineales tales que

$f\big((1;0;0)\big) = (0;3); f\big((-1;1;0)\big) = (1;1); f\big((0;0;1)\big) = (0;1)$ y $M_g = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Hallar la matriz de la transformación gof.
b) Usándola calcular (gof)(-1; 2;-1).
c)¿Puede ser que gof resulte epimorfismo?

8) Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que $f\big((1;0;0)\big) = (1;2;3)$; $f\big((-1;1;1)\big) = (0;2;0); f\big((0;0;2)\big) = (0;4;-2)$ y $g\big((x;y;z)\big) = (x+y;-2x-2y;z)$
a) Hallar la matriz de la transformación gof.
b) Encontrar 2 bases del $Nu(gof)$ y una base de $Im(gof)$.
c) ¿Existe $(gof)^{-1}$? Justificar

9) Sea $f: R^3 \to R^3$ t.l que verifica que $f(1;0;0) = (1;0;1), f(0;1;0) = (-1;2;0)\ y$ $f(0;0;1) = (-1;1;0)$.
a) Justificar porque existe f^{-1} y encontrar la expresión de f^{-1}.
b) Sea $g: R^4 \to R^3$ t.l cuya matriz es $M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$: Hallar la matriz de $f°g$.
c) Usando la matriz obtenida en b), determinar si $(5;0;-4;1) \in Nu(f°g)$.
d) Explique por que $f°g$ no puede ser monomorfismo.

10) Dadas las T.L f: $R^3 \to R^2$ y g:$R^2 \to R^3$; se sabe que M(f) = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \wedge\ g(x;\ y) =$ $(2x - y; -x\ ;\ 5y)$.
a) Dar la expresión $f \circ g$.
b) Si la transformación lineal $f \circ g$ tiene inversa, encuentre su matriz. Si no tiene inversa, justifique adecuadamente porque.
c) Dar la matriz de $g \circ f$.
d) i) Encontrar base de la imagen de $g \circ f$, y decidir en base a ello si es epimorfismo.
ii) Usando el teorema de la dimensión y lo obtenido en i), indicar la dimensión de núcleo de $g \circ f$ y decidir si eso implica que $(1;0;0) \in Nu\ (g \circ f)$.

11) H es la transformación final que se obtiene al aplicar a un punto P= (x; y) sucesivamente una simetría axial respecto al **eje y**, y por último la transformación f: $R^2 \to R^2$, f(x, y)= (–3x + y, x + 2y).
a) Encuentre la expresión de H(x, y) para todo (x, y) del plano.
b) Hallar analíticamente y representar al conjunto $\{P \varepsilon R^2 / H(P)$ pertenece a **r**: x + 2y= 12}.