CÁLCULO DE LA INVERSA DE UNA MATRIZ USANDO LA ADJUNTA

Calcularemos la inversa de la matriz A $\qquad A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Calculamos primero su determinante. Si este es 0, la matriz no tiene inversa.
Lo desarrollamos por la columna 2, aprovechando que ya tiene un cero. Primero conseguimos otro cero.

$$\text{Det (A)} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1.(10-1) = -9$$

$$f_2 + f_1 \rightarrow f_2$$

Podríamos haber elegido otra fila o columna.

Necesitamos la matriz adjunta.

Para armarla reemplazamos cada elemento por su adjunto y luego trasponemos

Esquema a usar: $\quad \text{Adj (A)}=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} \end{bmatrix}^t$

$$\text{Adj (A)} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -2 & 6 & -(-1) \\ 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} = Adj(A)$$

Para terminar

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A) = \frac{1}{-9} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{-9} & \frac{-2}{-9} & \frac{1}{-9} \\ \frac{-3}{-9} & \frac{6}{-9} & \frac{-3}{-9} \\ \frac{1}{-9} & \frac{1}{-9} & \frac{-5}{-9} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} \end{bmatrix}$$

Verifiquen ustedes que A . A^{-1}=I