Resolución TP4:

Ejercicio 5 - a

Utilizando regla, calcular para $f(x,y) = x + 2xy - 3y^2$ su derivada direccional en $P = (1,2) y\ \vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$:

Para empezar:

- Al tratarse de una función de 2 variables $f(x,y)$ posee dos derivadas posibles, una en x y otra en y
  - $f_x(x,y)$
  - $f_y(x,y)$
- $Dom(f) = \mathbb{R}^2$
- Se debe utilizar un vector normalizado $\vec{v} = (a,b)$, es decir $\sqrt{a^2+b^2} = 1$
- La formula por regla es una extencion de la definicion de derivacion direccional:
  - $f_{\vec{v}}(P) = \lim_{t \to 0}\left(\frac{f(x_0+at, y_0+bt) - f(x_0,y_0)}{t}\right) = \lim_{t \to 0}\left(\frac{g(t_0+\Delta t) - g(t_0)}{t}\right) = g'(t_0) \overset{\substack{Se\ sabe \\ t_0=0}}{\cong} g'(0)$
  - O tambien.
  - $f_{\vec{v}}(P) = \lim_{t \to 0}\left(\frac{f(x_0+at, y_0+bt) - f(x_0,y_0)}{t}\right) \overset{L'H}{\cong} \lim_{t \to 0}\left(\frac{f'(x_0+at, y_0+bt) - 0}{1}\right) =$
  - $\lim_{t \to 0} f'(x_0 + at, y_0 + bt) = \lim_{t \to 0} g'(t) = g'(0)$
  - Finalmente: $f_{\vec{v}}(P) = g'(0)$ con $g(t) = f(x_0 + at, y_0 + bt)$

Resolvemos:

Primero se verifica que el vector este normalizado:

$$\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \rightarrow \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = 1$$

Se puede entonces usar el vector tal como probiene del enunciado.

$$g(t) = f\left(1 + \frac{3}{5}t, 2 + \frac{4}{5}t\right) = 1 + \frac{3}{5}t + 2\left(1 + \frac{3}{5}t\right)\left(2 + \frac{4}{5}t\right) - 3\left(2 + \frac{4}{5}t\right)^2$$

$$g(t) = 1 + \frac{3}{5}t + 2\left(2 + \frac{4}{5}t + \frac{6}{5}t + \frac{12}{25}t^2\right) - 3\left(4 + \frac{16}{5}t + \frac{16}{25}t^2\right)$$

$$g(t) = 1 + \frac{3}{5}t + \left(4 + \frac{20}{5}t + \frac{24}{25}t^2\right) - \left(12 + \frac{48}{5}t + \frac{48}{25}t^2\right)$$

$$g(t) = f(r(t)) = -7 - 5t - \frac{24}{25}t^2$$

Derivamos g

$$g'(t) = 0 - 5 - \frac{48}{25}t = -5 - \frac{48}{25}t$$

Finalmente

$$f_{\vec{v}}(1{,}2) = g^{'}(0) = -5 - \frac{48}{5} \cdot 0 = -5$$
$$f_{\vec{v}}(1{,}2) = -5$$

$$g(t) = f\left(1 + \frac{3}{5}t, 2 + \frac{4}{5}t\right) = -7 - 5t - \frac{24}{25}t^2$$
$$g(0) = f\left(1 + \frac{3}{5} * 0{,}2 + \frac{4}{5} * 0\right) = f(1{,}2) = f(x_0, y_0)$$

$$t = 0 \rightarrow P = (x_0, y_0)$$
$$g'(t) \rightarrow la\ derivada\ en\ el\ punto$$
$$g'(0) \rightarrow la\ derivada\ en\ el\ punto\ P = (x_0, y_0)$$