T P 04 Ej. 24-ii

En los siguientes ítems, se da la ecuación de una superficie S y un vector N ϵ $\mathbf{R}^3$. Determinar los puntos de S para los que N es un vector Normal a S:

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1 \qquad N = (-2,3,6)$

Para resolver este ejercicio primero debemos entender algo; en geometría, un vector normal a una cantidad geométrica (línea, curva, superficie, etc) es un vector de un espacio con producto escalar que contiene tanto a la entidad geométrica como al vector normal. Este vector tiene la propiedad de ser ortogonal a todos los vectores tangentes a la entidad geométrica.

En el caso tridimensional, una superficie normal a un punto P es un vector que es perpendicular al plano tangente a esa superficie en P. La herramienta que utilizamos para obtener a este vector normal es el Vector Gradiente.

El vector gradiente tiene la siguiente forma:

$\nabla f(\mathrm{P}) = \left(\frac{\partial f(\mathrm{P})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathrm{P})}{\partial x_2}, \ldots\ldots, \frac{\partial f(\mathrm{P})}{\partial x_n}\right)$

Donde cada componente del vector es la derivada parcial para cada una de las variables que tiene la función original.

Una vez que obtuvimos el vector Normal a la superficie S, lo que tenemos que hacer es observar si dicho vector es Colineal al vector N dado en el enunciado. Un Vector Colineal a otro tiene la siguiente particularidad: Se trata de aquellos vectores que aparecen en la misma recta o que resultan paralelos a una cierta recta.

En nuestro caso nos interesan los que están sobre la misma recta. Para saber si el Vector Normal de la superficie S es Colineal a N debemos realizar la siguiente cuenta:

$\nabla f(\mathrm{P}) = \lambda \mathrm{N}$ donde λ es un escalar que permite diferenciar la intensidad entre los vectores.

Entonces en nuestro ejercicio obtendríamos el siguiente Sistema de ecuaciones:

$\left(\frac{\partial f(\mathrm{x,y,z})}{\partial \mathrm{x}}, \frac{\partial f(\mathrm{x,y,z})}{\partial \mathrm{y}}, \frac{\partial f(\mathrm{x,y,z})}{\partial \mathrm{z}}\right) = \lambda(-2, 3, 6)$

Resolviendo las derivadas y distribuyendo lambda obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones igualando componente a componente:

$$\begin{cases} 2x = -\lambda 2 \\ 4y = \lambda 3 \\ 6z = \lambda 6 \end{cases}$$

Donde $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$, ya que si no ponemos esta condición en el sistema, tendríamos un sistema incompatible.

Operando y simplificando obtenemos:

$$x = -\lambda$$
$$y = \lambda 3/4$$
$$z = \lambda$$

Sustituyendo en la función *f* obtenemos:

$(-\lambda)^2 + 2(3/4.\lambda)^2 + 3\lambda^2 = 1$ Sumando obtenemos

$41/8\lambda^2 = 1$ Resolviendo obtenemos

$\lambda^2 = 8/41$ Resolviendo obtenemos

$\lambda_1 = \sqrt{\frac{8}{41}}, \lambda_2 = -\sqrt{\frac{8}{41}}$

Una vez que obtuvimos los lambdas que resuelven el Sistema, reemplazamos en la equivalencia para obtener el punto donde N es Normal a S.

$P_1 = \left(-\sqrt{\frac{8}{41}}; \frac{3}{4}\sqrt{\frac{8}{41}}; \sqrt{\frac{8}{41}}\right)$ y $P_2 = (\sqrt{\frac{8}{41}}; -\frac{3}{4}\sqrt{\frac{8}{41}}; -\sqrt{\frac{8}{41}})$.

Sobre ambos dos puntos el vector gradiente y N son colineales; pero N coincide en el cuadrante con P_1, por lo tanto el punto que resuelve el enunciado es P_1.