Campos conservativos

Independencia de la integral de línea

Práctica sobre

- **Campos conservativos.**
- **Función potencial.**
- **Obtención de la función potencial por integrales indefinidas.**
- **Cálculo de la integral de línea aplicando la función potencial.**

Campos conservativos – Independencia de la integral de línea

Teorema. (Segundo teorema fundamental del cálculo para integrales de línea). Sea el campo escalar

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: z = f(x,y)$$

de clase C^1 en el conjunto conexo abierto U, y sean $A \in U$ y $B \in U$, dos puntos cualesquiera, unidos por una curva C regular a trozos totalmente incluida en U, se tiene entonces

$$\int_C \nabla f \, d\alpha = \int_C \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy = \int_A^B \nabla f \, d\alpha = f(x,y) \Big|_A^B = f(B) - f(A)$$

Este resultado garantiza que la integral de línea del gradiente de una función escalar, en las condiciones establecidas, no depende de cómo estén conectados los puntos $A \in U$ y $B \in U$, si no, que depende solamente de estos mismos.

Una consecuencia inmediata de este resultado es la que permite afirmar que la integral de línea del gradiente de una función de clase C^1 en el conjunto conexo abierto U, al lo largo de toda curva cerrada en U, es igual a cero. Es decir

$$\oint_C \nabla f \, d\alpha = 0$$

Ejemplo 1. Considérese la función escalar

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

su gradiente

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$$

que se ajustan a los requerimientos del teorema precedente. Y considérese, además, la curva parametrizada

$$C: \alpha(t) = (t, 1+t), \;\; 0 \le t \le 2$$

De extremo inicial

$$A = \alpha(0) = (0,1)$$

Y extremo final

$$B = \alpha(2) = (2,3)$$

Se tiene que la integral de línea del gradiente es

$$\int_C \nabla f \, d\alpha = \int_A^B \nabla f \, d\alpha = \int_{t=a}^{t=b} \nabla f[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t) \, dt$$

Es decir

$$\int_C \nabla f \, d\alpha = \int_A^B \nabla f \, d\alpha = \int_{t=0}^{t=2} \nabla f(t, 1+t) \bullet (1,1) \, dt$$

$$\int_C \nabla f \, d\alpha = \int_A^B \nabla f \, d\alpha = \int_{t=0}^{t=2} \big(2t, 2(1+t)\big) \bullet (1,1) \, dt = \int_{t=0}^{t=2} (2t + 2 + 2t) \, dt$$

$$\int_C \nabla f \, d\alpha = \int_A^B \nabla f \, d\alpha = \int_{t=0}^{t=2} (4t + 2) \, dt = (2t^2 + 2t) \Big|_{t=0}^{t=2} = 12$$

Es decir

$$\int_C \nabla f \, d\alpha = \int_{A=(0,1)}^{B=(2,3)} \nabla f \, d\alpha = 12$$

Por otra parte, la cuenta

$$f(x,y) \Big|_A^B = f(B) - f(A)$$

En este caso es

$$f(x,y) \Big|_A^B = (x^2 + y^2) \Big|_{A=(0,1)}^{B=(2,3)} = (2^2 + 3^2) - (0^2 + 1^2) = 13 - 1 = 12$$

Es decir que, en este caso, realmente se verifica la relación

$$\int_C \nabla f \, d\alpha = \int_A^B \nabla f \, d\alpha = f(x,y) \Big|_A^B = f(B) - f(A)$$

Definicion. (De campo conservativo y de funcion potencial) Sea el campo vectorial

$$F: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2: F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$$

definido en el conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Se dice que F es un campo conservativo si satisface simultáneamente las siguientes tres condiciones

i) Existe una función escalar

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: z = f(x,y)$$

cuyo gradiente es el campo vectorial F, esto es

$$F = \nabla f$$

La función escalar f se llama potencial escalar de F.

ii) La integral de línea de F no depende de la trayectoria en U.

iii) La integral de línea de F a lo largo de toda curva cerrada C en U es nula.

Bajo ciertas condiciones de continuidad del campo vectorial y de características topológicas del conjunto U de referencia, se demuestra que las tres propiedades que definen a un campo conservativo son equivalentes. El siguiente teorema establece dichas condiciones.

Teorema. (De condición suficiente para que un campo sea conservativo) Sea el campo vectorial

$$F: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2: F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$$

de clase $\mathcal{C}^1$ en el conjunto conexo abierto U de $\mathbb{R}^2$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

i) F es el gradiente de una función escalar

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: z = f(x,y)$$

De clase $\mathcal{C}^2$ en U.

ii) La integral de línea de F a lo largo de una trayectoria

$$C: [a,b] \to U: \alpha(t) = \big(x(t), y(t)\big)$$

regular a trozos, de clase $\mathcal{C}^1$ en $[a,b]$, depende solamente de los extremos inicial $A = \alpha(a)$ y final $B = \alpha(b)$ de la trayectoria y se tiene

$$\int_C F\, d\alpha = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_A^B F\, d\alpha = f(B) - f(A)$$

$iii)$ La integral de línea del campo vectorial F, a lo largo de toda curva cerrada C, totalmente incluida en U, es igual a cero, es decir

$$\oint_C F\, d\alpha = 0$$

Condición de integrabilidad

Sea que el campo vectorial

$$F: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$$

De clase $\mathcal{C}^1$ en el conjunto conexo abierto U de $\mathbb{R}^2$. Por el teorema precedente, se sabe que F es un campo conservativo. Entonces existe la función potencial

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : z = f(x,y)$$

de clase $\mathcal{C}^2$ en U, tal que

$$F(x,y) = \nabla f(x,y)$$

Es decir que

$$\big(P(x,y), Q(x,y)\big) = \Big(f_x(x,y), f_y(x,y)\Big)$$

O sea

$$P(x,y) = f_x(x,y)$$

$$Q(x,y) = f_y(x,y)$$

Derivando la primera ecuación respecto de y, y la segunda ecuación respecto de x, se tienen las siguientes relaciones

$$P_y(x,y) = f_{xy}(x,y)$$

$$Q_x(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

Ahora, dado que la función potencial f es de clase $\mathcal{C}^2$ en U, en ese conjunto se satisface la igualdad de las derivadas segundas mixtas

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

Lo cual implica que

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y)$$

Esta última igualdad se conoce como la *condición de integrabilidad* y constituye una condición necesaria para que el campo vectorial F sea conservativo.

Ejemplo 2. El campo vectorial

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

satisface la condición de integrabilidad. En efecto, se tiene

$$P_y(x,y) = \frac{-(x^2+y^2) - (-y)(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$Q_x(x,y) = \frac{(x^2+y^2) - x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Es decir que

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y)$$

En todo su dominio natural

$$U = Dom\ F = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Sin embargo, este campo vectorial no es conservativo. Obsérvese que la integral de línea de F a lo largo de la curva cerrada

$$C: x^2 + y^2 = 1$$

recorrida en sentido positivo, no es igual a cero. Concretamente, se tiene

$$C: \alpha(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Luego, se calcula la derivada de la parametrización

$$\alpha'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t))$$

Por otra parte, el campo vectorial

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

evaluado en la parametrización ofrece el resultado

$$F[\alpha(t)] = \Big(P\big(\alpha(t)\big), Q\big(\alpha(t)\big)\Big) = \big(P(\cos(t)\,, \operatorname{sen}(t)), Q(\cos(t)\,, \operatorname{sen}(t))\big)$$

$$F[\alpha(t)] = \left(\frac{-\operatorname{sen}(t)}{(\cos(t))^2 + (\operatorname{sen}(t))^2}, \frac{\cos(t)}{(\cos(t))^2 + (\operatorname{sen}(t))^2}\right) = (-\operatorname{sen}(t)\,, \cos(t))$$

Esto es

$$F[\alpha(t)] = (-\operatorname{sen}(t)\,, \cos(t))$$

Luego, calculando el producto escalar de los elementos obtenidos, resulta

$$F[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t) = (-\operatorname{sen}(t)\,, \cos(t)) \bullet (-\operatorname{sen}(t)\,, \cos(t)) = (\operatorname{sen}(t))^2 + (\cos(t))^2 = 1$$

Es decir

$$F[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t) = 1$$

De este modo, la integral de línea de F a lo largo de la circunferencia

$$C: x^2 + y^2 = 1$$

es igual a

$$\oint_{C^+} F\, d\alpha = \oint_{C^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t=0}^{t=2\pi} \vec{F}[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t)\, dt$$

Es decir

$$\oint_{C^+} F\, d\alpha = \int_{t=0}^{t=2\pi} \vec{F}[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t)\, dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} 1\, dt = t\,\Big|_{t=0}^{t=2\pi} = 2\pi$$

$$\oint_{C^+} F\, d\alpha = 2\pi \neq 0$$

O sea que, así como se anticipó, la integral de línea del campo vectorial

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

a lo largo de la circunferencia

$$C: x^2 + y^2 = 1$$

(particularmente recorrida en sentido positivo) no es igual a cero. Esto quiere decir que, si bien el campo F verifica la condición de integrabilidad, este no es un campo conservativo. Se muestra así, que esta condición es necesaria pero no suficiente.

Por otra parte, nótese que el campo vectorial

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

es el gradiente de la función escalar

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

función cuyo dominio natural es

$$\widetilde{U} = Dom\, f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$$

no pudiendo ser redefinida de manera tal que sea continua en el eje vertical. Por tal razón, si bien se verifica que

$$F(x,y) = \nabla f(x,y)$$

en todo $\widetilde{U}$, <u>el campo vectorial F y la función escalar f no se ajustan a las condiciones del Teorema de condición suficiente para que un campo sea conservativo</u>. Obsérvese además que el conjunto abierto $\widetilde{U}$ no es conexo.

Entonces, se mostró a partir del ejemplo anterior que la condición de integrabilidad es una condición necesaria pero no suficiente. Sin embargo, ocurre que bajo ciertas condiciones de continuidad del campo vectorial F y con ciertas características topológicas del conjunto U, la condición de integrabilidad, se convierte en una condición suficiente para que el campo vectorial sea conservativo. A continuación, se da un detalle de ese tipo de propiedades topológicas a las que se hace referencia en este apartado.

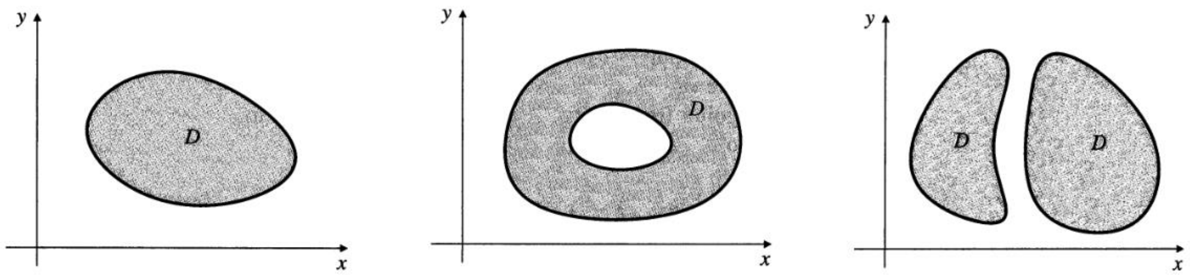
Conjuntos simplemente conexos

Definición. Se dice que un conjunto U de $\mathbb{R}^2$ es un conjunto simplemente conexo si se cumple que para toda curva cerrada simple C, totalmente incluida en U, se verifica que el interior de la curva C, denotado por

$$Int(C)$$

está totalmente incluido en U.

Intuitivamente, un conjunto simplemente conexo del plano, "es un conjunto que no tiene agujeros". La siguiente figura muestra esta idea gráficamente



El conjunto de la izquierda representa a un conjunto simplemente conexo, el conjunto del medio y el de la derecha no lo son. En cada situación se tiene que $\boldsymbol{D = C \cup Int(C)}$

Ejemplos de conjuntos simplemente conexo son, el plano completo $\mathbb{R}^2$, semiplanos, los círculos, los rectángulos, las regiones tipo I y tipo II, etc.

Teorema (de condición suficiente para que un campo vectorial sea conservativo). Sea el campo vectorial

$$F: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$$

De clase $\mathcal{C}^1$ en el conjunto abierto y simplemente conexo U de $\mathbb{R}^2$. Si se cumple la condición de integrabilidad

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y)$$

En todo U, entonces el campo vectorial F es un campo conservativo en U.

Ejemplo 3. El campo vectorial

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = (2x + y^2, 2xy + 3)$$

Es conservativo en todo el plano.

Nótese que este campo vectorial en de clase $\mathcal{C}^1$ en

$$U = Dom\ f = \mathbb{R}^2$$

y que este <u>conjunto es abierto y simplemente conexo</u>. Por otra parte, para cada punto de este conjunto se cumple la <u>condición de integrabilidad</u>. Obsérvese pues que

$$P_y(x,y) = 2y$$

$$Q_x(x,y) = 2y$$

Es decir que

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y)$$

En todo el abierto simplemente conexo $U = \mathbb{R}^2$. Por lo tanto, en virtud del Teorema de condición suficiente para que un campo vectorial sea conservativo, se tiene que el campo vectorial

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = (2x + y^2, 2xy + 3)$$

Es conservativo en $U = \mathbb{R}^2$.

<u>Método de construcción de funciones potenciales a partir de integrales indefinidas</u>

(Ejemplos)

Ejemplo 4. Del Ejemplo anterior se sabe que el campo vectorial

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = (2x + y^2, 2xy + 3)$$

Es conservativo. Por lo tanto, existe una función potencial escalar

$$f: U = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: z = f(x,y)$$

De clase $\mathcal{C}^2$ en U, de modo que su campo de gradientes coincide con el campo vectorial F, esto es

$$F(x,y) = \nabla f(x,y)$$

O sea

$$\left(P(x,y),Q(x,y)\right)=\left(f_x(x,y),f_y(x,y)\right)$$

Concretamente

$$f_x(x,y)=P(x,y)=2x+y^2$$

Y

$$f_y(x,y)=Q(x,y)=2xy+3$$

Esto quiere decir que de la función potencial se conocen las fórmulas de sus derivadas parciales y estas son precisamente

$$f_x(x,y)=P(x,y)=2x+y^2 \qquad (1)$$

$$f_y(x,y)=Q(x,y)=2xy+3 \qquad (2)$$

<u>Primera forma de reconstrucción</u>: El comienzo de la reconstrucción comienza integrando $P(x,y)$ respecto de x.

$$f(x,y)=\int f_x(x,y)dx+g(y)$$

Nótese que el último término involucra a los términos constantes, como así también a los términos dependientes solamente de la variable y. Resulta entonces

$$f(x,y)=\int P(x,y)\,dx+g(y)$$

$$f(x,y)=\int (2x+y^2)\,dx+g(y)$$

$$f(x,y)=x^2+xy^2+g(y)$$

Derivando ahora respecto de y, resulta

$$f_y(x,y)=2xy+g'(y) \qquad (3)$$

Pero teniendo en cuenta que de la fórmula (2), se sabe que

$$f_y(x,y)=Q(x,y)=2xy+3 \qquad (2)$$

Comparando (2) y (3), se concluye que

$$g'(y)=3$$

Y, por lo tanto, la función g de variable y más general posible que satisface la condición anterior, es

$$g(y)=3y+c_0$$

Y esto permite obtener la fórmula de la función potencial escalar del campo vectorial F, y esta es

$$f(x,y) = x^2 + xy^2 + g(y) = x^2 + xy^2 + 3y + c_0$$

Es decir

$$f(x,y) = x^2 + xy^2 + 3y + c_0$$

Se cumple

$$F(x,y) = \nabla f(x,y) = (2x + y^2, 2xy + 3)$$

<u>Segunda forma de reconstrucción</u>: El comienzo de la reconstrucción comienza integrando $Q(x,y)$ respecto de la variable y.

$$f(x,y) = \int f_y(x,y)dy + h(x)$$

En este caso, el término $h(x)$ involucra a todos los términos constates y los que dependen, a lo más, de la variable x.

$$f(x,y) = \int Q(x,y)dy + h(x)$$

$$f(x,y) = \int (2xy + 3)dy + h(x)$$

$$f(x,y) = xy^2 + 3y + h(x)$$

Derivando respecto de x

$$f_x(x,y) = y^2 + h'(x)$$

Y comparando con lo que muestra la ecuación (1)

$$f_x(x,y) = P(x,y) = 2x + y^2 \qquad (1)$$

Resulta que

$$h'(x) = 2x$$

y así, la función $h(x)$ más general posible que satisface esta relación es

$$h(x) = x^2 + c_0$$

siendo c_0 una constante real. De esta manera, se obtiene que la función potencial es

$$f(x,y) = xy^2 + 3y + h(x)$$

$$f(x,y) = x^2 + xy^2 + 3y + c_0$$

Tal como se sabía.

Ejemplo 5. El campo vectorial

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = \left(\frac{2x}{1+x^2} + ye^{xy}, xe^{xy}\right)$$

Es conservativo en todo el plano. En principio nótese que el campo es de clase $\mathcal{C}^1$ en el conjunto

$$U = Dom\, f = \mathbb{R}^2$$

Y que en todo este conjunto satisface la condición de integrabilidad

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y)$$

Pues se tiene que

$$P_y(x,y) = e^{xy} + xye^{xy}$$

$$Q_x(x,y) = e^{xy} + xye^{xy}$$

Entonces, por el Teorema de condición suficiente para que un campo vectorial sea conservativo, queda garantizada esta propiedad para el campo F. En consecuencia, existe la función potencial escalar f tal que

$$F(x,y) = \nabla f(x,y)$$

<u>Reconstrucción de la función potencial.</u>

Sabiendo que la relación entre el campo vectorial y las derivadas parciales de la potencial está dada por las ecuaciones

$$P(x,y) = f_x(x,y) = \frac{2x}{1+x^2} + ye^{xy}$$

$$Q(x,y) = f_y(x,y) = xe^{xy}$$

Según lo realizado en el ejemplo anterior, la función potencial se puede obtener por integrales indefinidas como

$$f(x,y) = \int Q(x,y)dy + h(x)$$

O sea

$$f(x,y) = \int xe^{xy}dy + h(x)$$

$$f(x,y) = e^{xy} + h(x)$$

Derivando ahora respecto de x, resulta

$$f_x(x,y) = ye^{xy} + h'(x)$$

Y comparando ahora con la fórmula exacta de la derivada parcial respecto de x de esta función, relación que viene dada por la igualdad

$$P(x,y) = f_x(x,y) = \frac{2x}{1+x^2} + ye^{xy}$$

Se concluye que

$$h'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

y así, la función más general posible que satisface esta igualdad es

$$h(x) = \ln(1+x^2) + c_0$$

con lo cual, la función potencial del campo vectorial

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = \left(\frac{2x}{1+x^2} + ye^{xy}, xe^{xy}\right)$$

Es

$$f(x,y) = e^{xy} + h(x)$$

$$f(x,y) = e^{xy} + \ln(1+x^2) + c_0$$

Siendo c_0 una constante real.

Aplicación de la función potencial al cálculo de la integral de línea de un campo conservativo

Ejemplo 6. Se pide calcular la integral de línea del campo vectorial

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = \left(\frac{2x}{1+x^2} + ye^{xy}, xe^{xy}\right)$$

A lo largo de la curva

$$C: \alpha(t) = (1+t^2, 4t^2 - 2t + 1), 0 \le t \le 1$$

Tal como se sabe, este valor se puede obtener a partir de la integral

$$\int_C F\,d\alpha = \int_A^B F\,d\alpha = \int_{t=0}^{t=1} F[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t)\,dt$$

Pero, teniendo en cuenta que F es un campo conservativo, lo cual se ha demostrado en el Ejemplo anterior, el valor de la integral de línea pedida se puede obtener según la relación entre el campo vectorial y la función potencial, que viene dado por la igualdad

$$\int_C F\,d\alpha = \int_A^B F\,d\alpha = f(x,y)\Big|_A^B = f(B) - f(A)$$

Recuérdese que la integral de línea del campo conservativo no depende de la trayectoria, solamente depende de los extremos inicial y final.

Ahora, sabiendo que la función potencial del campo vectorial F es

$$f(x,y) = e^{xy} + \ln(1+x^2) + c_0$$

Y teniendo en cuenta que los extremos inicial y final de la curva

$$C\colon \alpha(t) = (1+t^2, 4t^2-2t+1), 0 \le t \le 1$$

Son

$$A = \alpha(0) = (1+0^2, 4\cdot 0^2 - 2\cdot 0 + 1) = (1,1)$$

Y

$$B = \alpha(1) = (1+1^2, 4\cdot 1^2 - 2\cdot 1 + 1) = (2,3)$$

Se tiene entonces que

$$\int_C F\,d\alpha = \int_{A=(1,1)}^{B=(2,3)} F\,d\alpha = f(x,y)\Big|_{A=(1,1)}^{B=(2,3)} = f(2,3) - f(1,1)$$

O sea

$$\int_C F\,d\alpha = \int_{A=(1,1)}^{B=(2,3)} F\,d\alpha = \left(e^{xy} + \ln(1+x^2) + c_0\right)\Big|_{A=(1,1)}^{B=(2,3)}$$

$$\int_C F\,d\alpha = \int_{A=(1,1)}^{B=(2,3)} F\,d\alpha = \left(e^{2\cdot 3} + \ln(1+2^2) + c_0\right) - \left(e^{1\cdot 1} + \ln(1+1^2) + c_0\right)$$

$$\int_C F\, d\alpha = \int_{A=(1,1)}^{B=(2,3)} F\, d\alpha = e^6 + \ln(5) - e - \ln(2) = e^6 - e + \ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

Es decir que el valor de la integral de línea del campo vectorial

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = \left(\frac{2x}{1+x^2} + ye^{xy}, xe^{xy}\right)$$

A lo largo de la curva

$$C: \alpha(t) = (1+t^2, 4t^2 - 2t + 1), 0 \le t \le 1$$

Es

$$\int_C F\, d\alpha = \int_{A=(1,1)}^{B=(2,3)} F\, d\alpha = f(x,y)\ \Big|_{A=(1,1)}^{B=(2,3)} = e^6 - e + \ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

Es decir

$$\int_C F\, d\alpha = e^6 - e + \ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

Ejemplo 7. Calcular la integral de línea del campo vectorial

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{1+x^2} + ye^{xy}, xe^{xy}\right)$$

a lo largo de la curva

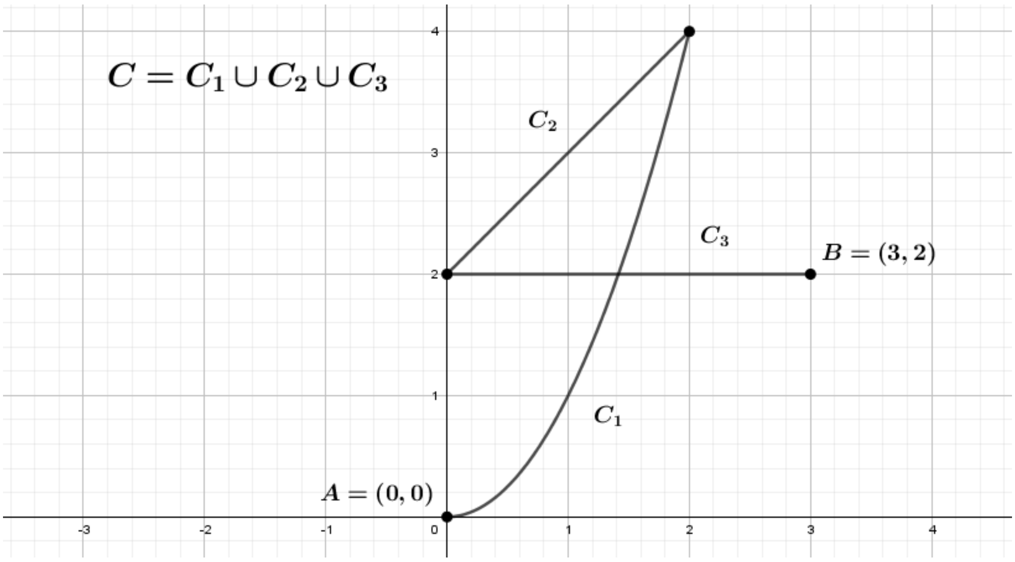
$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$$

Siendo

$$C_1:\ \alpha_1(t) = (t, t^2) \quad 0 \le t \le 2.$$

$$C_2:\ \alpha_2(t) = (2-t, 4-t) \quad 0 \le t \le 2.$$

$$C_3:\ \alpha_3(t) = (t, 2) \quad 0 \le t \le 3.$$



Representación geométrica de la curva C

De lo realizado en el Ejemplo anterior, se sabe que el campo F es conservativo, que su función potencial es

$$f(x, y) = e^{xy} + \ln(1 + x^2) + c_0$$

Y que el valor de la integral de línea se puede calcular según la fórmula

$$\int_C F\, d\alpha = \int_{A=(0,0)}^{B=(3,2)} F\, d\alpha = \left(e^{xy} + \ln(1 + x^2) + c_0\right)\Big|_{A=(0,0)}^{B=(3,2)}$$

Es decir

$$\int_C F\, d\alpha = \int_{A=(0,0)}^{B=(3,2)} F\, d\alpha = \left(e^6 + \ln(10) + c_0\right) - \left(e^0 + \ln(1) + c_0\right)$$

O sea

$$\int_C F\, d\alpha = \int_{A=(0,0)}^{B=(3,2)} F\, d\alpha = e^6 - 1 + \ln(10)$$

Método de construcción de funciones potenciales a partir de integrales de línea

Supóngase que F es un campo conservativo en el conjunto abierto y simplemente conexo $U \subseteq \mathbb{R}^2$. En esta situación, se sabe que el valor de la integral de línea de F a lo largo de toda curva $C \subset U$ que va desde el punto A hasta el punto B es independiente de C y se puede obtener a partir de la función potencial f según la relación

$$\int_C F\,d\alpha = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = f(B) - f(A)$$

Considérese entonces los puntos

$$A = (x_0, y_0)$$

$$B = (x, y)$$

Se tiene así que

$$\int_C F\,d\alpha = f(x,y) - f(x_0, y_0)$$

O lo que es lo mismo

$$f(x,y) = \int_C F\,d\alpha + f(x_0, y_0)$$

Y llamando $f(x_0, y_0) = c_0$, queda

$$f(x,y) = \int_C F\,d\alpha + c_0$$

O equivalentemente

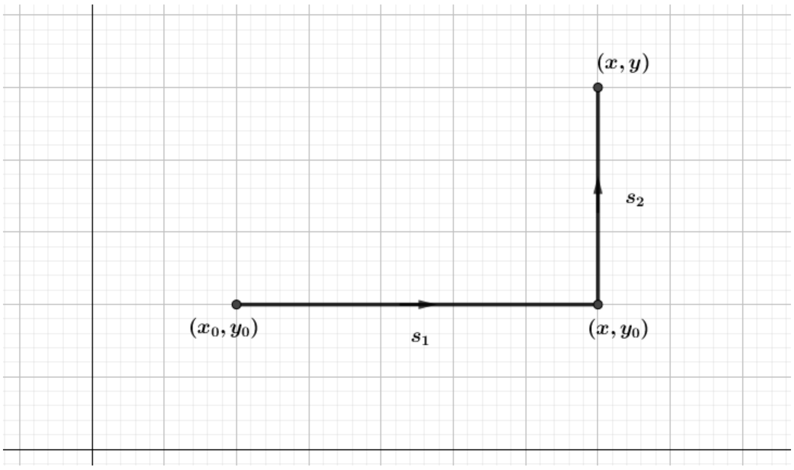
$$f(x,y) = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy + c_0$$

Esta expresión muestra que es posible obtener la expresión de la función potencial a partir de una integral de línea F conveniente.

A continuación, se ofrece un ejemplo. Supóngase que la poligonal

$$C = s_1 + s_2$$

está totalmente incluida en $U \subseteq \mathbb{R}^2$, siendo s_1 el segmento de recta que va desde (x_0, y_0) hasta (x, y_0) y s_2 el segmento de recta que va desde (x, y_0) hasta (x, y).



Poligonal $C = s_1 + s_2$

Se tendrá entonces que

$$f(x, y) = \int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy + c_0$$

$$f(x, y) = \int_{s_1} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{s_2} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + c_0$$

Teniendo en cuenta las parametrizaciones

$$s_1 \colon \alpha_1(t) = (t, y_0) \quad x_0 \leq t \leq x$$

$$s_2 \colon \alpha_2(s) = (x, s) \quad y_0 \leq s \leq y$$

Resulta entonces

$$f(x, y) = \int_{t=x_0}^{t=x} P(t, y_0)dt + \int_{s=y_0}^{s=y} Q(x, s)ds + c_0$$

Ejemplo 8. Obtención de la función potencial del campo conservativo en $U = \mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = \big(P(x, y), Q(x, y)\big) = (2x + y^2, 2xy + 3)$$

A partir de la integral de línea

$$f(x, y) = \int_{t=x_0}^{t=x} P(t, y_0)dt + \int_{s=y_0}^{s=y} Q(x, s)ds + c_0$$

En este caso, tómese

$$A = (0,0)$$

$$B = (x, y)$$

Resulta entonces que

$$f(x,y) = \int_{t=x_0}^{t=x} P(t, y_0)dt + \int_{s=y_0}^{s=y} Q(x,s)ds + c_0$$

$$f(x,y) = \int_{t=0}^{t=x} P(t, 0)dt + \int_{s=0}^{s=y} Q(x,s)ds + c_0$$

$$f(x,y) = \int_{t=0}^{t=x} 2tdt + \int_{s=0}^{s=y} (2xs + 3)ds + c_0$$

$$f(x,y) = t^2 \Big|_{t=0}^{t=x} + (xs^2 + 3s) \Big|_{s=0}^{s=y} + c_0$$

$$f(x,y) = x^2 + xy^2 + 3y + c_0$$

Es decir que la función potencial del campo conservativo

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = (2x + y^2, 2xy + 3)$$

Es

$$f(x,y) = x^2 + xy^2 + 3y + c_0$$

Tal como se obtuvo anteriormente en el Ejemplo 4.