Técnicas de demostración

Razonamiento

Las leyes/reglas de inferencia son esquemas válidos de razonamiento que nos permiten resolver razonamientos más complejos.

La siguiente tabla muestra algunas de las leyes de inferencia.

REGLAS DE INFERENCIA		
1. *Modus Ponens (MP)* $\dfrac{p \Rightarrow q \quad p}{\therefore q}$ $\quad$ $\dfrac{\sim p \Rightarrow q \quad \sim p}{\therefore q}$	**2. *Modus Tollens (MT)*** $\dfrac{p \to q \quad \sim q}{\therefore \sim p}$ $\quad$ $\dfrac{\neg p \to \neg q \quad q}{\therefore p}$	**3. *Silogismo hipotético (SH)*** $\dfrac{p \to q \quad q \to r}{\therefore p \Rightarrow r}$
4. *Silogismo Disyuntivo* $\dfrac{p \vee q \quad \sim q}{\therefore p}$ $\quad$ $\dfrac{p \vee q \quad \sim p}{\therefore q}$	**5. *Adición*** $\dfrac{p}{\therefore p \vee q}$	**6. *Conjunción*** $\dfrac{p \quad q}{\therefore p \wedge q}$
7. *Simplificación* $\dfrac{p \wedge q}{\therefore p}$		

Ejercicio 1

Dado el siguiente razonamiento en lenguaje coloquial pasarlo a lenguaje simbólico y determinar la validez de dicho razonamiento.

"Si Rosa obtiene el puesto de supervisora y trabaja mucho entonces obtendrá un aumento. Si obtiene un aumento entonces comprara un auto nuevo. Ella no ha adquirido un auto nuevo. Por lo tanto, no ha obtenido el puesto de supervisora o no ha trabajado mucho."

Las proposiciones simples que lo integran son:

p : " Rosa obtiene el puesto de supervisora"

q : " Rosa trabaja mucho "

r : " Rosa obtendrá un aumento"

s : " Rosa comprará un auto nuevo "

Lenguaje simbólico		Razonamiento
$p \wedge q \to r$	1)	4) $p \wedge q \to s$ por Silogismo Hipotético de 1 y 2
$r \to s$	2)	5) $\neg (p \wedge q)$ por Modus Tollens de 4 y 3
$\neg s$	3)	6) $\neg p \vee \neg q$ por Ley de De Morgan de 5
$\neg p \vee \neg q$		

<u>Ejercicio 2</u>

Justificar la validez de los siguientes razonamientos

2.1.

		Justificación
$h \wedge w$	1)	5) $p \to q$ por contra recíproco de 2
$\neg q \to \neg p$	2)	6) r por Modus Ponens de 4 y ~~6~~ 5
$\neg (r \vee t) \vee s$	3)	7) $r \vee t$ por Adición
$(p \to q) \to r$	4)	8) s por Silogismo Disyuntivo de 3 y 7
$S \wedge h$		9) h por Simplificación de 1
		10) $s \wedge h$ por conjunción de 10 y 9

2.2.

Justificación

		Justificación
$(\neg p \vee q) \to r$	1)	5) $\neg u$ por Simplificación de 3
$r \to s \vee t$	2)	6) $\neg t$ por Modus Ponens de 4 y 5
$\neg s \wedge \neg u$	3)	7) $\neg s$ por simplificación de 3
$\neg u \to \neg t$	4)	8) $\neg s \wedge \neg t$ por Conjunción de 7 y 6
P		9) $\neg (s \vee t)$ por Ley de De Morgan
		10) $\neg r$ por Modus Tollens de 2 y 9
		11) $\neg (\neg p \vee q)$ por Modus Tollens de 1 y 10
		12) $(p \wedge \neg q)$ por Ley de De Morgan y por Involución de 11
		13) p por Simplificación de 12

2.3.

Justificación

		Justificación
$q \leftrightarrow s$	1)	5) $(q\to s) \wedge (s\to q)$ por Equiv. Logica de 1
$p \vee t$	2)	6) $(q\to s)$ por Simplificación de 5
$(t \vee w) \to h$	3)	7) $\neg p$ por Modus Tollens de 4 y 6
$p \to \neg (q \to s)$	4)	8) t por Silogismo Diyuntivo de 2 y 7
$t \wedge h$		9) $t \vee w$ por Adición de 8
		10) h por Modus Ponens de 3 y 9
		11) $t \wedge h$ por Conjunción de 8 y 10

Ejercicio 3

Probar utilizando el principio de inducción completa.

3.1.

$4\ n^3 + 5n$ es divisible por 3 $\quad \forall\ n \in \mathbb{N}$

Para el desarrollo de la demostración considerar que se tiene la proposición

$P(n) = 4n^3 + 5n = 3 \cdot q$, para $q \in \cancel{\mathbb{N}}\,\mathbb{Z}$

1) Paso base n = 1:

$P\ (1) = 4\ (1)^3 + 5.\ (1) = 9$

la proposición p (1) es verdadera porque al evaluarla se obtiene como resultado el número 9 el cual es múltiplo de 3.

2) Paso inductivo

Hipótesis inductiva n = h

$P\ (h) = 4h^3 + 5h = 3 \cdot q$, para $q \in \cancel{\mathbb{N}}\,\mathbb{Z}$

Se asume que la proposición p (h) es verdadera.

Tesis inductiva n = h + 1:

$$P\ (h + 1) = 4(h+1)^3 + 5(h+1) = 3 \cdot q_1, \text{ para } q_1 \in \cancel{\mathbb{N}}\,\mathbb{Z}$$

Demostración

$4(h+1)^3 + 5(h+1) = 4(h^3+3.h^2+3.h+1)+5h +5=4h^3+12.h^2+12.h+4+5h +5$

Reemplazando por hipótesis inductiva

$= 3q +12.h^2+12.h+9$ **= 3.** $(q +4.h^2+ 4.h+3)$ **=3.** q_1 siendo

$q_1= (q +4.h^2+4.h+3)$

Como se cumple la igualdad, la proposición *p* (h +1) es verdadera, por lo tanto,

$$P(n) = 4n^3 + 5n = 3 \cdot q, \text{ para } q \in \cancel{\mathbb{N}}\,\mathbb{Z}$$

3.2.

$$\sum_{i=1}^{n} 5^{i-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1) \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Para el desarrollo de la demostración considerar que se tiene la proposición

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} 5^{i-1} = \frac{1\,(5^n - 1)}{4} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

1)Paso base, n = 1

$$\sum_{i=1}^{\cancel{n}\,1} 5^{i-1} = 5^{1-1} = 5^0 = 1$$

$$\frac{1\,(5^n - 1)}{4} = \frac{(5^1 - 1)}{4} = 1$$

Como se obtiene el mismo resultado en la sumatoria de términos y en la fórmula que es la solución de la sumatoria entonces la proposición *p* (1) es verdadera y la demostración continúa en el paso inductivo.

2)Paso inductivo

Hipótesis inductiva, n = h

$$P(h) = \sum_{i=1}^{h} 5^{i-1} = \frac{1\,(5^{h} - 1)}{4}$$

Se asume que la proposición *p* (h) es verdadera

Tesis inductiva, n = h + 1

$$P(h+1) = \sum_{i=1}^{h+1} 5^{i-1} = \frac{1\,(5^{h+1} - 1)}{4}$$

Demostración

$$\sum_{i=1}^{h+1} 5^{i-1} = \sum_{i=1}^{h} 5^{i-1} + 5^{(h+1)-1} = \frac{1.(5^{h} - 1)}{4} + 5^{h} = \frac{5^{h}}{4} - \frac{1}{4} + 5^{h} = \frac{5^{h} - 1 + 4.5^{h}}{4} =$$

por hipótesis inductiva

$$= \frac{5.5^{h} - 1}{4} = \frac{5^{h+1} - 1}{4}$$

Como se cumple la igualdad, la proposición P (h + 1) es verdadera, por lo tanto,

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} 5^{i-1} = \frac{1\ (5^{n} - 1)}{4} \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

3.3.

$$\sum_{i=1}^{n} i\ 5^{i} = \frac{5 + (4n - 1)\ 5^{n+1}}{16} \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Para el desarrollo de la demostración considerar que se tiene la proposición

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} i.5^{i} = \frac{5 + (4n-1)\ 5^{n+1}}{16} \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

1)Paso base, n = 1

$$\sum_{i=1}^{n} i.5^{i} = 1.\ 5^{1} = 5 = 5$$

$$\frac{5 + (4n-1)\ 5^{n+1}}{16} = \frac{5 + (4.1-1)\ 5^{1+1}}{16} = \frac{5 + 3.\ 25}{16} = 5$$

Como se obtiene el mismo resultado en la sumatoria de términos y en la fórmula que es la solución de la sumatoria entonces la proposición *p* (1) es verdadera y la demostración continúa en el paso inductivo.

2)Paso inductivo

Hipótesis inductiva, n = h

$$P(h) = \sum_{i=1}^{h} i.5^i = \frac{5+(4h-1)\,5^{h+1}}{16}$$

Se asume que la proposición *p* (h) es verdadera

Tesis inductiva, n = h + 1

$$P(h+1) = \sum_{i=1}^{h+1} i.5^i = \frac{5+(4(h+1)-1)\,5^{h+1+1}}{16} = \frac{5+(4h+3)\,5^{h+2}}{16} =$$

Demostración

$$\sum_{i=1}^{h+1} i5^i = \sum_{i=1}^{h} i5^i + (h+1).5^{(h+1)} = \frac{5+(4h-1)\,5^{h+1}}{16} + (h+1).5^{(h+1)} =$$

por hipótesis inductiva

$$= \frac{5+(4h-1)5^{h+1}+16.(h+1).5^{h+1}}{16} = \frac{5+4h5^{h+1}-5^{h+1}+16h5^{h+1}+16.5^{h+1}}{16} =$$

$$\frac{5+20h5^{h+1}+15\,5^{h+1}}{16} = \frac{5+5.4h5^{h+1}+3.5\,5^{h+1}}{16} = \frac{5+4h5^{h+2}+3\,5^{h+2}}{16} =$$

$$= \frac{5+4h5^{h+2}+3\,5^{h+2}}{16} = \frac{5+(4h+3)\,5^{h+2}}{16}$$

Como se cumple la igualdad, la proposición P (h + 1) es verdadera, por lo tanto,

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} i.5^i = \frac{5+(4n-1)\,5^{n+1}}{16} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$