ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA I

MÓDULO 2- SEGUNDA CLASE

VECTORES EN R^3

Ya hemos trabajado en el plano (R^2) y se hace necesario agregar una tercera dimensión (**z** o **x_3** generalmente).

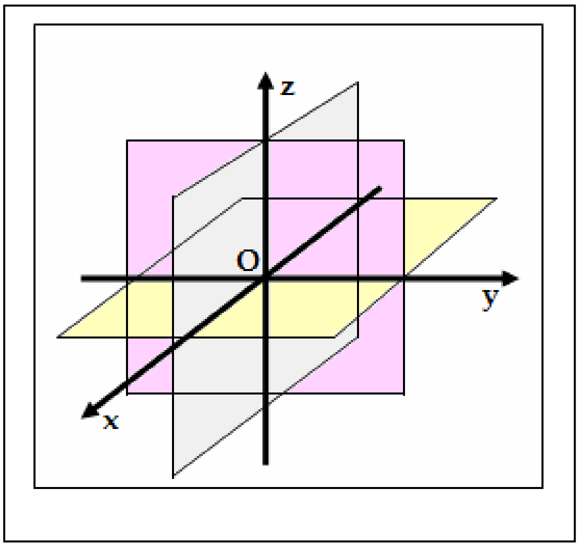
Para la ubicación de puntos (y por ende de vectores) en R^3 utilizaremos una terna de referencia de tres ejes ortogonales entre sí:

x **-eje de abscisas-**

y **-eje de ordenadas-**

z **-eje de cotas-**

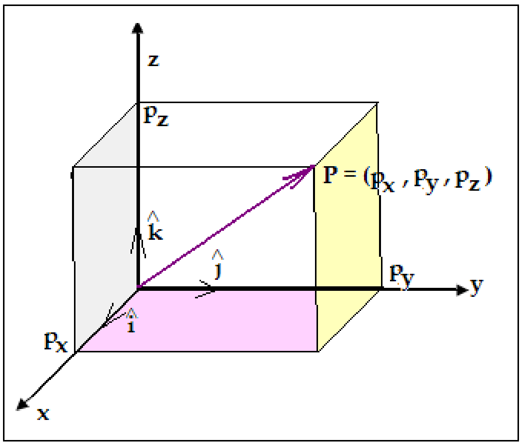
cortándose en el punto O llamado **origen de coordenadas.**

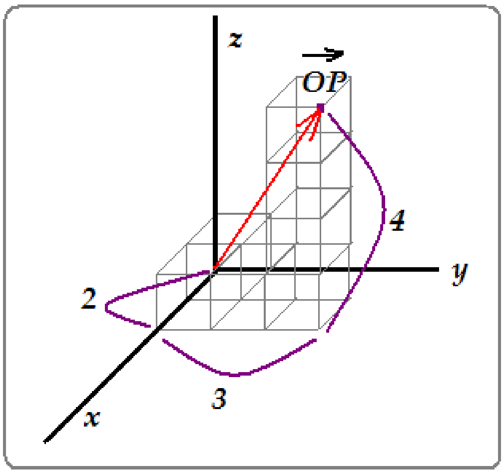


Los planos determinados por cada par de ejes se llaman **planos coordenados**: pl(x,y); pl(x,z) y pl(y,z).

Todo **punto** $P = (p_x, p_y, p_z) \in R^3$ está asociado a un **vector posición** que va desde el origen hasta dicho punto del plano.

Tenemos $\overline{p} = \overline{OP} = (p_x, p_y, p_z)$ terna ordenada de números reales.





Un punto como S= (2; 3; 4) indica 2 unidades en la dirección *x*, 3 en la *y* y 4 en la *z*.

Además (2; 3; 4) = (2; 0; 0) + (0; 3; 0) + (0; 0; 4)= 2.(1; 0; 0) + 3.(0; 1; 0) + 4.(0; 0; 1) = $2.\hat{i} + 3.\hat{j} + 4.\hat{k}$ donde $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ son los **versores canónicos**.

Las operaciones vistas en R^2 se adaptan en R^3 del siguiente modo:

$\vec{v} = (x, y, z)$, $\vec{v}' = (x', y', z')$ vectores de R^3 y $\alpha \in R$ entonces:

$\vec{v} + \vec{v}' = (x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$

$\alpha.\vec{v} = \alpha.(x, y, z) = (\alpha.x\ , \alpha.y\ , \alpha.z)$

y las interpretaciones geométricas se mantienen.

Ejemplo:

Dados los vectores de $\vec{a} = (3, -2,\ 0)$, $\vec{b} = (2,\ 2,\ 1)$, $\vec{c} = (-1,\ 4,\ 2)$, $\vec{d} = (0,\ 3,\ 4)$ hallar analíticamente $\vec{l}$ para que $\frac{1}{3}\vec{l} - \vec{a} + \vec{b} - 2.\vec{c} = \vec{d}$

Para poder averiguar $\vec{l}$ en $\frac{1}{3}\vec{l} - \vec{a} + \vec{b} - 2.\vec{c} = \vec{d}$ procedemos a despejar

$\frac{1}{3}\vec{l} = \vec{d} + \vec{a} - \vec{b} + 2.\vec{c} \qquad \Rightarrow \vec{l} = 3.\left(\vec{d} + \vec{a} - \vec{b} + 2.\vec{c}\right)$

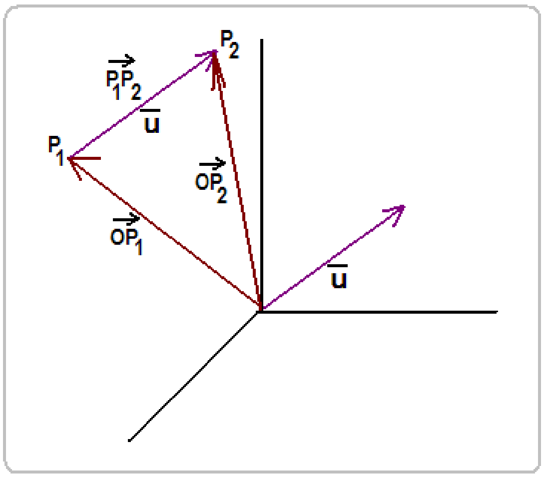
Reemplazamos por las componentes de los vectores y operamos

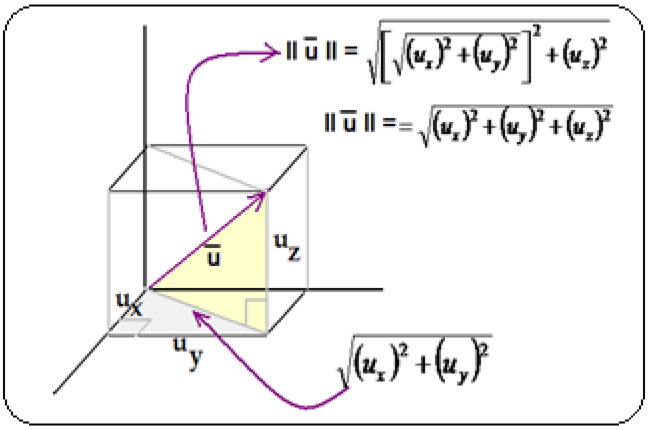
$\vec{l} = 3.((0,\ 3,\ 4) + (3, -2,\ 0) - (2,\ 2,\ 1) + 2.(-1,\ 4,\ 2))$

$\vec{l} = 3.((1;\ -1;\ 3) + (-2;\ 8;\ 4)) = 3.(-1;\ 7;\ 7)\ = (-3; 21; 21)$

NORMA, MÓDULO O LONGITUD DE UN VECTOR EN R^3

La norma o módulo de un vector $\overline{P_1P_2}$ está dada por la longitud del vector equivalente $\vec{u} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$ que tiene su punto de inicio en el origen de coordenadas.





Si $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ son origen y extremo del vector, respectivamente, resulta:

$\bar{u} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$

Si recurrimos al Teorema de Pitágoras, **la norma de un vector** será

$\|\bar{u}\| = \sqrt{u_x^{\,2} + u_y^{\,2} + u_z^{\,2}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Si A= (–2, 3, 0) y B = (–1, 5, –2) resulta que la distancia de A a B es:

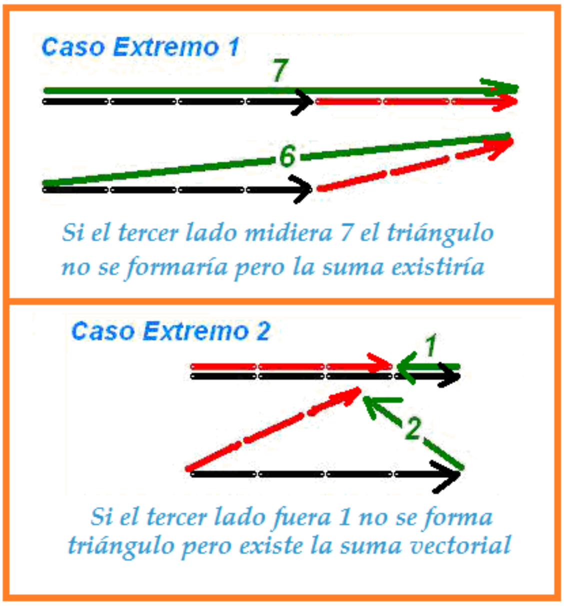
d(A; B) = $\|\overline{AB}\| = \|B - A\| = \|(1,\ 2,\ -2)\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$

Propiedades de la norma de un vector

Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos vectores cualesquiera:

1.- $\|\overline{u}\| \geq 0$ [la norma es un número real positivo o nulo.]

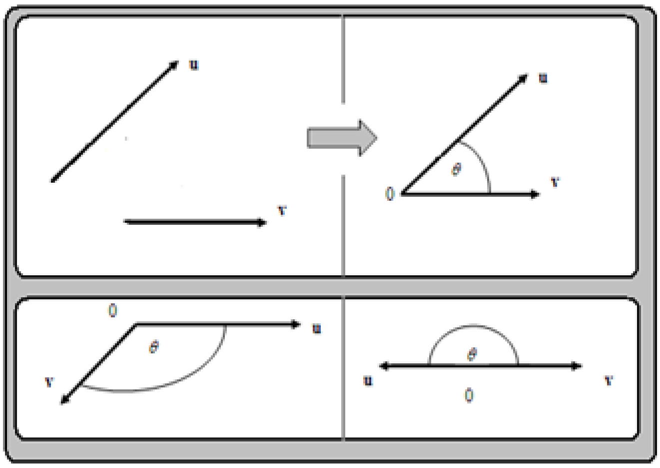
2.- $\|\overline{u+v}\| \leq \|\overline{u}\| + \|\overline{v}\|$ [*Desigualdad triangular*]



3.- que $|k|.\|\overline{u}\| = \|k.\overline{u}\|\quad \forall k \in R \wedge \forall \overline{u} \in R^3$

Ángulo entre vectores

Si dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son no nulos, se entiende por ángulo entre ellos al número real $\hat{\theta} = ang(\vec{u},\vec{v})$ (entre 0 y π) siendo $\hat{\theta}$ el ángulo entre las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cuando se trasladan a un origen común.



Para vectores *paralelos* el ángulo es 0º o π; si son *perpendiculare*s es ½π y se dirá que son *ortogonales*.

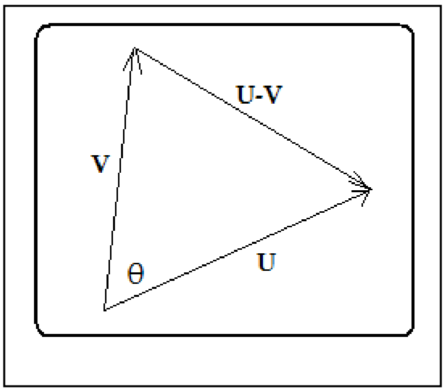
PRODUCTO ESCALAR O INTERIOR Ó PUNTO EN R^2 y R^3

Se define una nueva operación entre vectores denominada **producto escalar** entre vectores de R^2 R^3 (también para R^n) y cuyo resultado es un número real (de allí el término escalar):

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores entonces el producto interior entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es:

$$\bar{u}\bullet\bar{v}=\begin{cases}\|\bar{u}\|.\|\bar{v}\|.\cos\theta & si \quad \bar{u}\neq\bar{0}\wedge\bar{v}\neq\bar{0}\\ 0 & si \quad \bar{u}=\bar{0}\vee\bar{v}=\bar{0}\end{cases}$$

Para el cálculo del producto escalar, tal como indica la definición debemos conocer el ángulo entre los vectores, que a veces no es de simple determinación, entonces te mostraremos otra forma de calcularlo. Para no perder generalización, lo haremos en R^3 .



El **teorema del coseno** en un triángulo cualquiera establece que "el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto entre ambos y el coseno del ángulo que forman" (trabajaste con él en el curso de ingreso).

Simbólicamente: $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2.\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\theta$

Sean $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ y $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$; $\vec{u}\bullet\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\,\theta$; reemplazando llegamos a:

$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (u_x-v_x)^2+(u_y-v_y)^2+(u_z-v_z)^2 = (u_x)^2-2.u_x.v_x+(v_x)^2+(u_y)^2-2.u_y.v_y+(v_y)^2+(u_z)^2-2.u_z.v_z+(v_z)^2$

$\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2.\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\theta = (u_x)^2+(u_y)^2+(u_z)^2+(v_x)^2+(v_y)^2+(v_z)^2-2.\,\vec{u}\bullet\vec{v}$

Comparando ambos miembros derechos y simplificando términos comunes,

$-2.u_x.v_x-2.u_y.v_y-2.u_z.v_z=-2.\,\vec{u}\bullet\vec{v}$

y dividiendo por –2 se obtiene:

$$\boxed{\vec{u}\bullet\vec{v}=u_x.v_x+u_y.v_y+u_z.v_z}$$

En R^2 , siendo $\vec{u}=(u_x,u_y)$ y $\vec{v}=(v_x,v_y)$ resultará $\vec{u}\bullet\vec{v}=u_x.v_x+u_y.v_y$

Por ejemplo $(-3;2)\bullet(4;5)=-3.\,4+2.\,5=-12+10=-2$

Ejemplos:

1) Sean $\vec{v} = (2, -5, 1)$ y $\vec{v}' = (4, 3, -3)$.

Obtener el producto escalar entre ambos y el ángulo que forman.

$\vec{v} \bullet \vec{v}' = 2.\ 4 + (-5).\ 3 + 1.\ (-3) = 8 - 15 - 3 = -10$

Además $\|\vec{v}\| = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30}$ y $\|\vec{v}'\| = \sqrt{16+9+9} = \sqrt{34}$.

Como $\vec{v} \bullet \vec{v}' = \|\vec{v}\|.\|\vec{v}'\|.\cos\theta \rightarrow -10 = \sqrt{30}.\sqrt{34}.\cos\theta \rightarrow$

$\cos\theta = \dfrac{-10}{\sqrt{30}.\sqrt{34}} -0{,}313112145 \rightarrow \theta = 1{,}889264519$ (rad) (aproximadamente 108º 14' 49'')

2) Si $\vec{g} = (k-3, 0, 2)$ y $\vec{h} = (-3, k, 2k-1)$. Encontrar para qué valores de k resultan perpendiculares ambos vectores. Indicar los vectores resultantes para esos valores de k.

Los vectores deben ser ortogonales, es decir el ángulo entre los vectores debe ser de 90º; como cos90º = 0 resulta que su producto escalar es cero.

Calculamos $\vec{g} \bullet \vec{h}$ y lo igualamos a cero

$-3.(k-3) + 0.k + 2.\ (2k-1) = 0 \rightarrow -3k + 9 + 4k - 2 = 0 \rightarrow$ **$k = -7$**

Y reemplazando obtenemos $\vec{g} = (-10, 0, 2)$ y $\vec{h} = (-3, -7, -15)$.

Verificamos, efectivamente el producto escalar vale $-10.(-3) + 0.\ (-7) + 2.\ (-15) = 30 + 0 - 30 = 0$

Propiedades del producto interior entre vectores (en R^3 pero vale para R^n)

a) $\forall\ \bar{u}, \bar{v} \in R^3 : \bar{u} \bullet \bar{v} = \bar{v} \bullet \bar{u}$ (**conmutatividad**)

b) $\forall\ \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in R^3 : \bar{u} \bullet (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \bullet \bar{v} + \bar{u} \bullet \bar{w}$ (**distributividad respecto de la suma de vectores**)

c) $\forall\ \alpha \in R \wedge \forall\ \bar{u}, \bar{v} \in R^3 : (\alpha.\bar{u}) \bullet \bar{v} = \bar{u} \bullet (\alpha.\bar{v}) = \alpha.(\bar{u} \bullet \bar{v})$ (**extracción de un escalar**)

d) $\forall\ \bar{u}, \bar{v} \in R^3 \wedge \bar{u} \neq \bar{0} \wedge \bar{v} \neq \bar{0} : \bar{u} \bullet \bar{v} = 0 \Leftrightarrow \acute{a}ng(\bar{u};\bar{v}) = \pi/2$ (**perpendicularidad de vectores no nulos**)

e) $\forall\ \bar{u}, \bar{v} \in R^3 : \bar{u} \bullet \bar{v} = 0 \Rightarrow \bar{u} = \bar{0} \vee \bar{v} = \bar{0} \vee \bar{u} \perp \bar{v}$

f) $\forall\ \bar{u} \in R^3 : \bar{u} \bullet \bar{u} = \|\bar{u}\|^2$; $\forall\ \bar{u} \in R^3 : \|\bar{u}\| = \sqrt{\bar{u} \bullet \bar{u}}$ (**relación producto interior y norma de un vector**)

Te mostraremos algunos ejemplos de ejercicios que para poder resolverlos, es indispensable emplear estas propiedades.

Ejemplos

1) Calcule $\|\vec{u}\|$ sabiendo que se cumplen simultáneamente $\begin{cases} ang(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\pi}{3} \\ \|\vec{v}\| = 4 \\ (\vec{u}-\vec{v}) \perp \vec{u} \end{cases}$

Como $\left(\vec{u}-\vec{v}\right) \perp \vec{u}$ el producto escalar entre ambos vectores es nulo.

$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\bullet\vec{u}=0 \quad \rightarrow \quad \vec{u}\bullet\vec{u}-\vec{v}\bullet\vec{u}=0 \quad \rightarrow \quad \vec{u}\bullet\vec{u}=\vec{v}\bullet\vec{u} \quad \rightarrow \quad \|\vec{u}\|^2=\|\vec{v}\|.\|\vec{u}\|.\cos(\theta)$

Como ninguno de los vectores es nulo (forman ángulo) resulta que $\|\vec{u}\| \neq 0$ y podemos dividir la última ecuación por este número.

$\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|.\cos(\theta) \quad \rightarrow \quad \|\vec{u}\|=4.½=2$

2) ¿Es cierto que $(\bar{u}+\bar{v})\bullet(3.\bar{u}-\bar{v})=3.\|\bar{u}\|^2-\|\bar{v}\|^2+2.\bar{u}\bullet\bar{v}$?

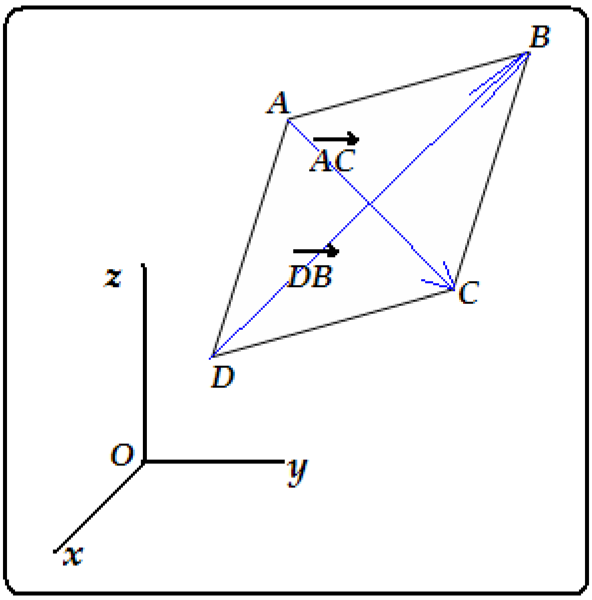
$\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\bullet\left(3.\vec{u}-\vec{v}\right)=$ aplicando la propiedad distributiva

$\vec{u}\bullet\left(3.\vec{u}-\vec{v}\right)+\vec{v}\bullet\left(3.\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}\bullet\left(3.\vec{u}\right)-\vec{u}\bullet\vec{v}+\vec{v}\bullet\left(3.\vec{u}\right)-\vec{v}\bullet\vec{v}=$ aplicando la propiedad de la norma y extracción de factor

$3.\vec{u}\bullet\vec{u}-\vec{u}\bullet\vec{v}+3.\vec{v}\bullet\vec{u}-\|\vec{v}\|^2=$ por conmutatividad

$3.\|\vec{u}\|^2-\vec{u}\bullet\vec{v}+3.\vec{u}\bullet\vec{v}-\|\vec{v}\|^2= \quad =3.\|\vec{u}\|^2+2.\vec{u}\bullet\vec{v}-\|\vec{v}\|^2$ (la igualdad es cierta)

3) Probar que en todos los rombos sus diagonales son perpendiculares.
Consideremos a A, B, C, D los cuatro puntos del rombo ordenado ABCD.



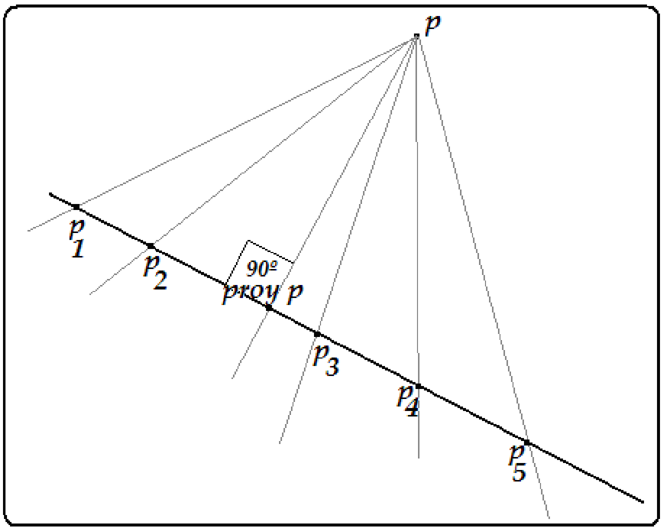
Nuestro objetivo es probar que $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}$ o sea que (C–A) • (B–D) = 0 que reescribiremos como (C–A) • B – (C–A) • D y confirmaremos que esta cuenta nos da cero.

Recordamos que la característica de un rombo es la de tener sus cuatro lados de igual longitud:
$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{CD}\| = \|\overrightarrow{DA}\|$
Elevemos al cuadrado todos los miembros:
$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{CD}\|^2 = \|\overrightarrow{DA}\|^2$
Desarrollamos $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2$
(B–A)•(B–A) = (C–B)•(C–B)
B•B – B•A – A•B + A•A = C•C – C•B – B•C + B•B
simplificando y usando propiedad conmutativa del producto escalar
$-2B \bullet A + \|A\|^2 = \|C\|^2 - 2B \bullet C \;\; \rightarrow \;\; 2B \bullet C - 2B \bullet A = \|C\|^2 - \|A\|^2$
$\rightarrow \; 2B \bullet (C - A) = \|C\|^2 - \|A\|^2$
$B \bullet (C - A) = ½.\{ \|C\|^2 - \|A\|^2 \}$

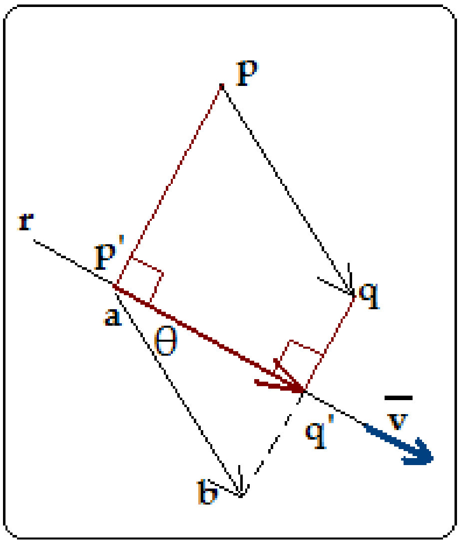
De igual forma $\|\overrightarrow{CD}\|^2 = \|\overrightarrow{DA}\|^2 \;\; \rightarrow (D - C) \bullet (D - C) = (A - D) \bullet (A - D)$
$D \bullet D - D \bullet C - C \bullet D + C \bullet C = A \bullet A - A \bullet D - D \bullet A + D \bullet D - 2\, D \bullet C + \|C\|^2 = \|A\|^2 - 2\, D \bullet A \;\; \rightarrow$
$-2D \bullet C + 2D \bullet A = \|A\|^2 - \|C\|^2 \rightarrow$
$-2D \bullet (C - A) = \|A\|^2 - \|C\|^2 \rightarrow$
$-D \bullet (C - A) = ½\{ \|A\|^2 - \|C\|^2 \}$
Realicemos la cuenta buscada:
(C–A) • B – (C–A) • D =
B • (C–A) –D • (C–A)   [por propiedad conmutativa del producto escalar]
Reemplazando por las expresiones obtenidas:
$½\{ \|C\|^2 - \|A\|^2 \} + ½\{ \|A\|^2 - \|C\|^2 \}$
$= ½\{ \|C\|^2 - \|A\|^2 + \|A\|^2 - \|C\|^2 \} = ½.\{0\} = 0$ que es lo que se pretendía probar.

Proyección de un vector sobre una dirección

En geometría, la proyección ortogonal de un punto sobre una recta está dada por un punto ubicado sobre la recta que es la intersección entre dicha recta y la perpendicular a ella, trazada desde el **punto** cuya proyección estamos buscando.
En el gráfico la proyección está marcada con ese nombre. No lo son p_1, p_2, p_3, p_4 y p_5.



La proyección de p es p' y de q es q'; la del vector $\overrightarrow{pq}$ es $\overrightarrow{p'q'}$.



Comencemos con un ángulo θ que sea nulo o agudo.

Traslademos $\overrightarrow{pq}$ con comienzo en p' y nos da el vector que denotaremos $\overrightarrow{ab}$.

Las **longitudes** entre los segmentos $\overline{p'q'}$ y $\overline{ab}$ están relacionados por el coseno de θ:

$$\cos\theta = \frac{\left\|\overline{p'q'}\right\|}{\left\|\overline{ab}\right\|} \;\rightarrow\; \left\|\overline{ab}.\right\| \;\cos\theta = \left\|\overline{p'q'}\right\|$$

La dirección de la recta r nos la da un vector director $\vec{v}$.

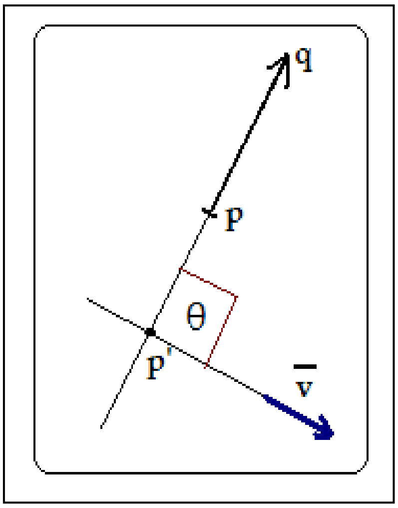
Si multiplicamos $\left\|\overline{ab}.\right\| \;\cos\theta = \left\|\overline{p'q'}\right\|$ por $\left\|\vec{v}\right\|$ tenemos:

$$\left\|\overline{ab}\right\|.\;\cos\theta.\;\left\|\vec{\mathrm{v}}\right\| = \left\|\overline{p'q'}\right\|.\;\left\|\vec{\mathrm{v}}\right\| \rightarrow \overrightarrow{ab} \bullet \vec{v} = \left\|\overline{p'q'}\right\|.\;\left\|\vec{v}\right\| \rightarrow \overrightarrow{pq} \bullet \vec{v} = \left\|\overline{p'q'}\right\|.\;\left\|\vec{v}\right\|$$

ya que $\overrightarrow{pq}$ y $\overrightarrow{ab}$ son equivalentes.

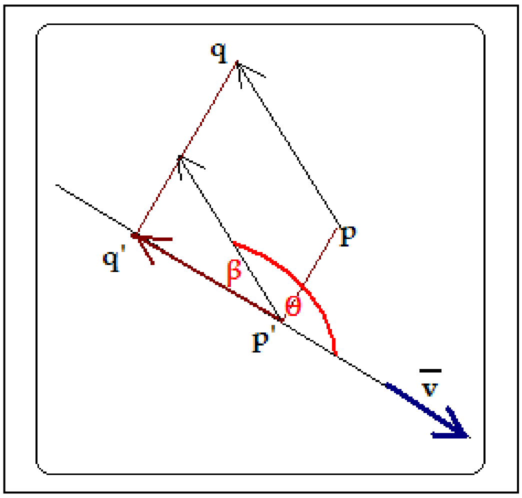
Despejando:

$$\frac{\overrightarrow{pq}\bullet\vec{v}}{\|\vec{v}\|}=\|\overline{p'q'}\|=proy.escalar_{\vec{v}}\overrightarrow{pq}$$



Si ángulo θ fuera recto, el coseno es cero, el producto escalar también y lo mismo la $proy.escalar_{\vec{v}}\overrightarrow{pq}$.

Veamos la situación de un ángulo obtuso o llano.



Los ángulos θ y β son suplementarios (y β menor a un recto) y por lo tanto el cosθ es negativo (además vale que cosθ = –cosβ).
Lo primero que uno nota es que el vector $\overrightarrow{p'q'}$ es colineal, con sentido opuesto al vector $\vec{v}$ lo cual no es un dato menor.

Si al desarrollo recién hecho lo repetimos usando a β en reemplazo de θ seguimos teniendo una relación de longitudes:
$\|\overline{ab}.\|\ \cos\beta.\ \|\vec{v}\|=\|\overline{p'q'}\|.\ \|\vec{v}\|$

Pero si nosotros queremos <u>significar</u> un sentido opuesto al sentido de $\vec{v}$, a $\overline{p'q'}$ debemos asociarle un valor negativo con lo cual debemos definir que:

$$-\|\overline{p'q'}\|.\|\vec{v}\|=-\|\overline{ab}\|.\ \cos\beta.\ \|\vec{v}\|=\|\overline{pq}\|\ .(-\cos\beta)\ .\|\vec{v}\|=\|\overline{pq}\|\ .(\ \cos\theta)\ .\|\vec{v}\|=\overrightarrow{pq}\bullet\vec{v}$$

Y si de allí surge que nuevamente:

$$\frac{\overrightarrow{pq}\bullet\vec{v}}{\|\vec{v}\|}=-\|\overline{p'q'}\|=proy.escalar_{\vec{v}}\overrightarrow{pq}$$

Resumiendo:
La *proyección escalar* de un vector $\overrightarrow{pq}$ en la dirección de un vector $\vec{v}$ es un número (positivo, negativo o cero) que geométricamente indica la norma -asociada a un signo- de la proyección perpendicular del vector $\overrightarrow{pq}$ sobre $\vec{v}$.

Si el ángulo entre $\vec{v}$ y $\overrightarrow{pq}$ es menor a 90º el valor es positivo y coincide con la norma del vector proyección; si el ángulo supera los 90º (hasta 180º) el resultado es negativo y es el opuesto de la norma del vector proyección.

$$\boxed{proy.escalar_{\vec{v}}\overrightarrow{pq} = \frac{\overrightarrow{pq} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|}}$$

El vector proyección lo podemos obtener multiplicando al versor en la dirección y sentido de $\vec{v}$ por el número (el escalar) que es la $proy.escalar_{\vec{v}}\overrightarrow{pq}$

$$proy_{\vec{v}}\overrightarrow{pq} = proy.escalar_{\vec{v}}\overrightarrow{pq} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\overrightarrow{pq} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} =$$

Colocando a todos los escalares adelante, resulta:

$$\boxed{proy_{\vec{v}}\overrightarrow{pq} = = \frac{\overrightarrow{pq} \bullet \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}.\vec{v}}$$

que es el vector proyección del vector $\overrightarrow{pq}$ en la dirección del vector $\vec{v}$

Si trabajamos con $\vec{v}$ un vector normalizado (consideramos a $\breve{v}$) la expresión se reduce a:

$$proy_{\breve{v}}\overrightarrow{pq} = \left(\overrightarrow{pq} \bullet \breve{v}\right).\breve{v} \quad \text{y} \quad proy.esc_{\breve{v}}\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{pq} \bullet \breve{v}$$

Ten siempre presente que la proyección es un vector y la proyección escalar es un número.

Ejemplo

Sea $\vec{A} = (3, -4, 0)$ y $\vec{B} = (2, -2, -1)$.
Obtener las proyecciones escalares y las proyecciones de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$ y de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$.

La representación gráfica la encuentras en https://www.geogebra.org/3d/wfrtvvkk

Calculemos primero las normas de los vectores

$\|\vec{A}\| = \sqrt{9+16+0} = 5$ $\qquad\qquad$ $\|\vec{B}\| = \sqrt{4+4+1} = 3$

Calculamos primero $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$

$$proy.escalar_{\vec{B}}\overrightarrow{A}=\frac{\overrightarrow{A}\bullet\overrightarrow{B}}{\left\|\overrightarrow{B}\right\|}=\frac{3\cdot2+(-4)(-2)+0(-1)}{3}=\frac{14}{3}$$

El vector proyección es:

$$proy_{\vec{B}}\overrightarrow{A}=\frac{14}{3}\frac{\vec{B}}{\left\|\vec{B}\right\|}=\frac{14}{3}\frac{\vec{B}}{3}=\frac{14}{9}\vec{B}=\frac{14}{9}(2;-2;-1)=\left(\frac{28}{9};-\frac{28}{9};-\frac{14}{9}\right)$$

Ahora calculamos de $\vec{B}$ sobre $\overrightarrow{A}$

$$proy.escalar_{\vec{A}}\vec{B}=\frac{\vec{A}\bullet\vec{B}}{\left\|\vec{A}\right\|}=\frac{14}{5}$$

Y el vector proyección es: $proy_{\vec{A}}\vec{B}=\frac{14}{5}\frac{\vec{A}}{\left\|\vec{A}\right\|}=\frac{14}{5}\frac{\vec{A}}{5}=\frac{14}{25}(3;-4;0)=\left(\frac{42}{25};-\frac{56}{25};0\right)$

Resumiendo: $proy.escalar_{\vec{B}}\overrightarrow{A}=\frac{14}{3}$; $proy_{\vec{B}}\overrightarrow{A}=\left(\frac{28}{9};-\frac{28}{9};-\frac{14}{9}\right)$,

$proy.escalar_{\vec{A}}\vec{B}=\frac{14}{5}$; $proy_{\vec{A}}\vec{B}=\left(\frac{42}{25};-\frac{56}{25};0\right)$

Desigualdad de Cauchy-Schwartz

Si ,$\vec{u}$, $\vec{v}$ € R^n (n€N) se cumple: $\boxed{\left|\vec{u}\bullet\vec{v}\right|\leq\left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|}$

donde las barras simples indican valor absoluto de un número real, ya que producto escalar es un número.

Demostración:

a) Si alguno de los vectores es nulo tanto el producto escalar con otro vector como su norma se anula y por lo tanto se satisface la igualdad.

b) Sean entonces ambos vectores *no nulos* y efectuemos el siguiente producto escalar:

$\left(\vec{u}+\lambda.\vec{v}\right)\bullet\left(\vec{u}+\lambda.\vec{v}\right)=\left\|\left(\vec{u}+\lambda.\vec{v}\right)\right\|^2$ donde λ es un número real.

La igualdad <u>da un número real no negativo</u> (la norma no puede serlo) y varía con λ.

Desarrollamos el lado izquierdo:

$$\left(\vec{u}+\lambda.\vec{v}\right)\bullet\left(\vec{u}+\lambda.\vec{v}\right)=\vec{u}\bullet\vec{u}+\vec{u}\bullet\left(\lambda.\vec{v}\right)+\left(\lambda.\vec{v}\right)\bullet\vec{u}+\left(\lambda.\vec{v}\right)\bullet\left(\lambda.\vec{v}\right)=\left\|\vec{u}\right\|^2+\lambda\vec{u}\bullet\vec{v}+\lambda\vec{v}\bullet\vec{u}+\lambda.\lambda\vec{v}\bullet\vec{v}=$$

$$=\left\|\vec{u}\right\|^2+2\lambda.\vec{u}\bullet\vec{v}+\lambda^2.\left\|\vec{v}\right\|^2=f(\lambda)$$

Respecto a λ tenemos una función cuadrática con coeficiente principal positivo ($\|\vec{v}\|^2$).

Como siempre es $f(\lambda) \geq 0$ (recordar el subrayado de más arriba) tiene una o ninguna raíz real (a lo sumo corta una sola vez al eje λ).

Por ende *el discriminante es ≤ 0*.

$$\left(2.\vec{u} \bullet \vec{v}\right)^2 - 4.\|\vec{v}\|^2.\|\vec{u}\|^2 \leq 0 \rightarrow 4.\left(\vec{u} \bullet \vec{v}\right)^2 \leq 4.\|\vec{v}\|^2.\|\vec{u}\|^2$$

$$\rightarrow \left(\vec{u} \bullet \vec{v}\right)^2 \leq \|\vec{v}\|^2.\|\vec{u}\|^2 \rightarrow \sqrt{\left(\vec{u} \bullet \vec{v}\right)^2} \leq \sqrt{\|\vec{v}\|^2.\|\vec{u}\|^2}$$

$|\vec{u} \bullet \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$ que es lo que se pretendía probar.

Resolver los ejercicios 13 al 40 del archivo llamado “MÓDULO 2, GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS”

Videos de la cátedra que pueden ayudarte con estos temas:

Ejercicio de producto escalar
https://www.youtube.com/watch?v=r369jxqJ3ew&list=PLrIBAgsbPZH2FouIVFZ_Lbv-7aDHTtkDU&pbjreload=10

Vectores 2. Propiedades del producto escalar
https://www.youtube.com/watch?v=HTedUcJkKqs