Integral definida. RESUMEN

Definición:

Sea $y = f(x)$ una función continua en $[a,b]$ Su integral definida en ese intervalo la definimos como:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i{}^*)\Delta x$$

donde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ y el punto $x_i{}^*$ pertenece al subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Los puntos $P = \{x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b\}$ forman una partición del intervalo cuya "norma" es $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Cada punto se forma sumando al anterior Δx.

Teorema fundamental del Cálculo

Primera parte: si una función y = f(x) es continua en el intervalo $[a,b]$, definimos la función integral como:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Entonces $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$ (es decir F es primitiva de f en **ese** intervalo)

Segunda parte (regla de Barrow): sea una función y = f(x) es continua en el intervalo $[a,b]$, y G una primitiva de f entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

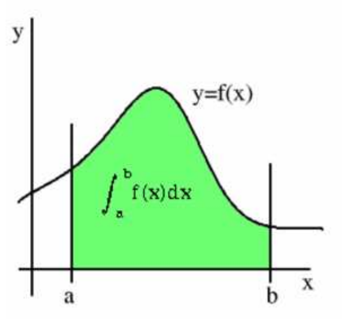
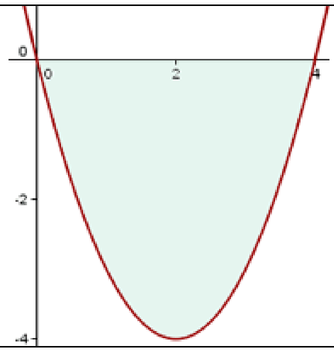
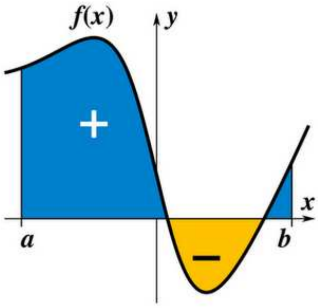
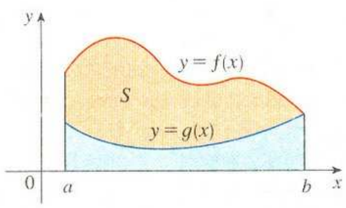
Teorema del valor medio para el cálculo integral

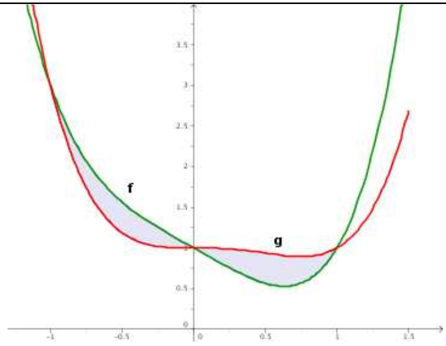
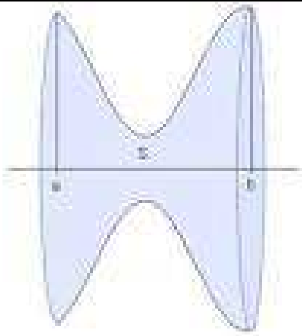
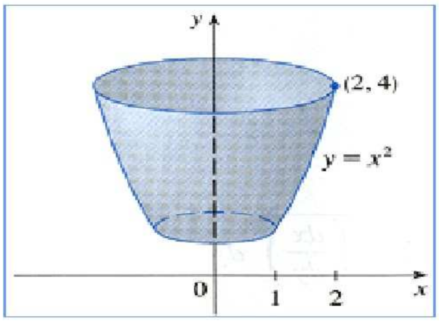
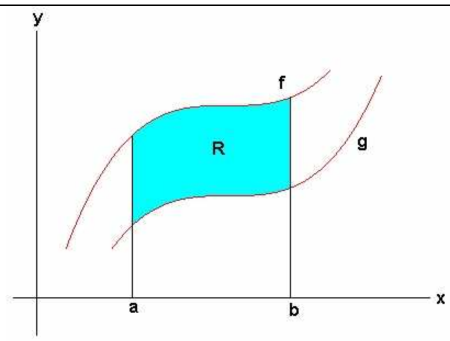
Sea una función y = f(x) es continua en el intervalo $[a,b]$, entonces existe un punto c interior al intervalo (a < c < b) en el cual se verifica:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

A este valor se lo llama valor promedio o valor medio.

Aplicaciones de la integral definida

Aplicación	Casos	Gráfico	Fórmula
Área que forma una función con el eje x en el intervalo $[a,b]$	Función totalmente positiva en el intervalo $[a,b]$		$A=\int_a^b f(x)dx$
	Función totalmente negativa en el intervalo $[a,b]$		$A=\int_a^b -f(x)dx$
	Función que cambia de signo en el intervalo $[a,b]$	 En este caso tenemos que calcular en $[a,b]$ dos integrales (una correspondiente a la región azul y otra a la región amarilla) y luego hacer la suma.	Supongamos que llamamos c al punto de cambio de signo: $A=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b -f(x)dx$
Área entre curvas	Un solo caso: sólo tenemos que fijarnos cuál es la función "mayor" y cuál la "menor". Puede ser que	 FIGURA 3 $A=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx$	$A=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$

<table>
<tr><td></td><td>tengamos que dividir el área en partes de acuerdo a esa relación de mayor y menor que hay entre las funciones. Es el ejemplo del segundo gráfico</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Volumen de un sólido de revolución</td><td>La curva gira alrededor del eje x</td><td></td><td>$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$</td></tr>
<tr><td>La curva gira alrededor del eje y</td><td>Supongamos que c = f(a) y d=f(b) y x = g(y) (es decir es la función inversa)
</td><td>$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$</td></tr>
<tr><td>Lo que gira alrededor del eje x es la región delimitada por dos curvas. En este caso R</td><td></td><td>$$V = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - g(x)^2\right)dx$$</td></tr>
</table>