ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA I

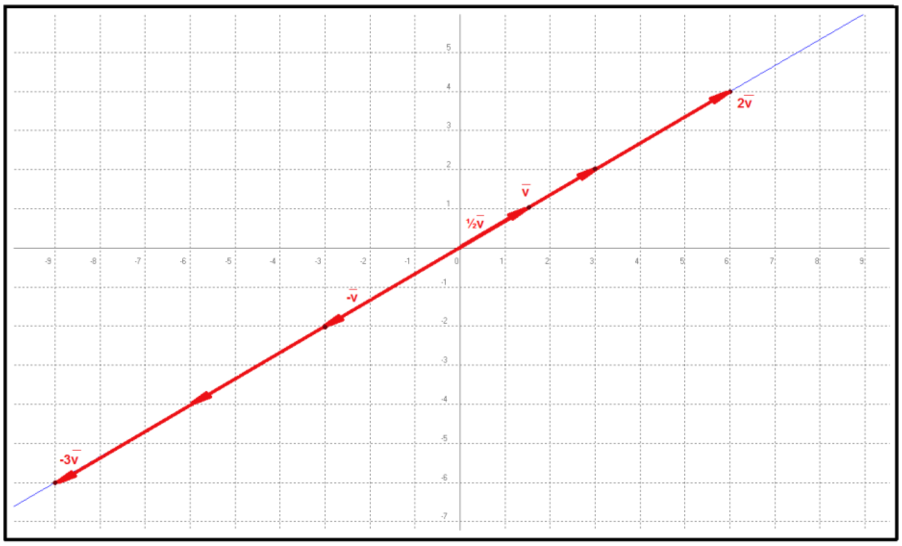
MÓDULO 3- GEOMETRÍA ANALÍTICA - PRIMERA CLASE

RECTAS EN EL PLANO

Recta por y fuera del origen en el plano.

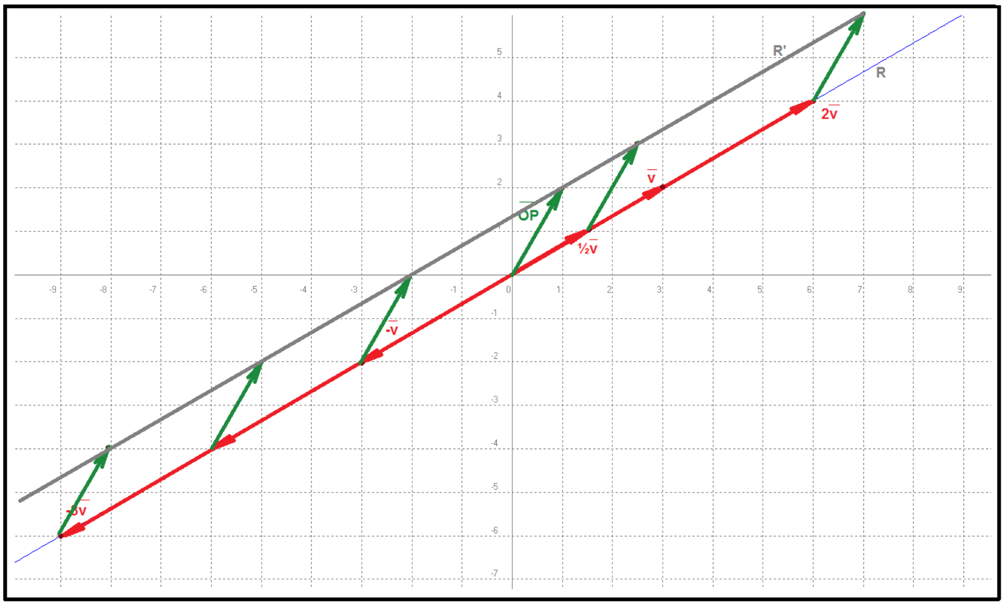
Dado un vector no nulo $\vec{v}=(v_x;v_y)$, que llamamos **vector director,** consideramos los vectores que se obtienen al multiplicar a $\vec{v}$ por cualquier valor real α.

O sea $\vec{w}=\alpha.\vec{v}$; $\vec{w}=\alpha.(v_x;v_y)$ $=(\alpha\ v_x;\ \alpha\ v_y)$.



En el gráfico se han marcado diferentes puntos que son los extremos de los respectivos vectores $\vec{w}$; el tomar todos los valores posibles de α se genera la recta **R** graficada.

¿Qué ocurriría si pretendemos obtener todos los $\vec{u}=\alpha.\vec{v}+P$ con P= (p_x, p_y) un punto del plano?



Se ha vuelto a dibujar la recta R dirigida por $\vec{v}$ y una serie de puntos de ella. A cada uno de éstos se le ha sumado el vector libre $\vec{t} = \overline{OP}$ obteniendo así una serie de puntos de una recta R' paralela a R y que pasa por P.

La expresión r: $\vec{u} = \vec{x} = \alpha.\vec{v} + P$ o $(u_x; u_y) = (x ; y) = \alpha.(v_x ; v_y) + (p_x ; p_y)$ con α Є R, se denomina **ecuación vectorial** de la recta r.

Resolviendo las operaciones entre los vectores de la expresión anterior, se obtiene $\begin{cases} x = \alpha.v_x + p_x \\ y = \alpha.v_y + p_y \end{cases}$

Son las **ecuaciones paramétricas cartesianas** de la recta; notar que la determinan ***dos*** ecuaciones.

Si todas las componentes del vector $\vec{v}$ son distintas de 0, entonces podemos despejar α de las dos ecuaciones e igualar, resultando

$\dfrac{x - p_x}{v_x} = \dfrac{y - p_y}{v_y}$ es la llamada **ecuación simétrica** de la recta

Esta ecuación puede transformarse hasta llegar a otros dos tipos de ecuaciones de rectas.

1) Si igualamos la expresión a cero:

$$v_y(x - p_x) = v_x(y - p_y)$$
$$v_y.x - v_y.p_x = v_x.y - v_x.p_y$$
$$v_y.x - v_x.y + (v_x.p_y - v_y.p_x) = 0$$

nota que todo lo que está entre paréntesis es un escalar, un número, no contiene ninguna de las dos variables.

Si en esta última expresión hacemos
$A = v_y \;\; ; B = -v_x \;\; ; C = v_x.p_y - v_y.p_x$ la expresión resulta:
$A\,x + B\,y + C = 0$ que se llama **ecuación implícita** o general de la recta

Los coeficientes de x e y en esta última forma (A y B) son las componentes de un vector perpendicular a la recta , $(A;B) = (v_y; -v_x) \perp$ r

Ya que es normal al vector director de la recta
$(A;B) \bullet \vec{v} = (v_y; -v_x) \bullet (v_x; v_y) = v_y \cdot v_x + (-v_x) \cdot v_y = 0$

Esta forma implícita tomará relevancia en los próximos temas por su similitud a la ecuación de un plano en el espacio

2) Si despejamos y en la ecuación simétrica:

$$\frac{x-p_x}{v_x}=\frac{y-p_y}{v_y} \qquad \Rightarrow \qquad v_y(x-p_x)=v_x(y-p_y)$$

La ecuación queda

$$v_y.x-v_y.p_x=v_x.y-v_x.p_y$$
$$v_y.x-v_y.p_x+v_x.p_y=v_x.y$$
$$\frac{v_y.x-v_y.p_x+v_x.p_y}{v_x}=y$$
$$\frac{v_y}{v_x}.x+\frac{-v_y\cdot p_x+v_x.p_y}{v_x}=y$$

Haciendo $m=\dfrac{v_y}{v_x}$; $b=\dfrac{-v_y\cdot p_x+v_x.p_y}{v_x}$

La ecuación queda y = m x + b que es la **forma explícita** de la recta, que ya conocías de la escuela media y el curso de ingreso.

m es la pendiente de la recta y b es la ordenada al origen

Nota que el vector $(1;m)=\left(1;\dfrac{v_y}{v_x}\right)$ es un vector director de la recta, es paralelo a $\vec{v}$, es $\dfrac{1}{v_x}\vec{v}$

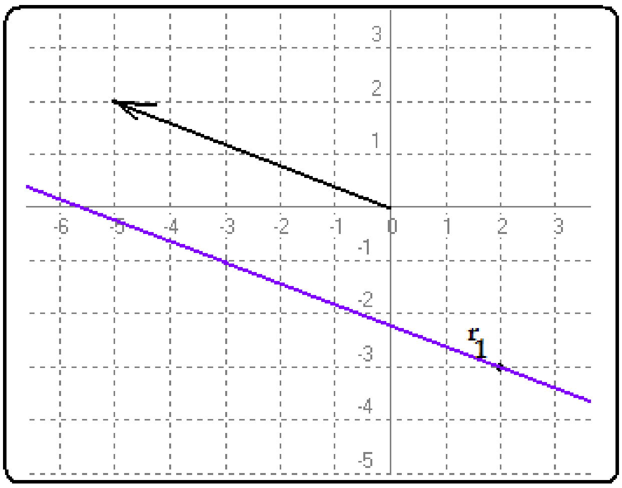
Ejemplo

1)a) Obtener la ecuación de la recta $\mathbf{r_1}$ que pasa por el punto (2; –3) si el vector director es $\vec{v}$ = (–5; 2). Graficar $\mathbf{r_1}$.

(x; y) = (2; –3) + α. (–5; 2) con α∈R (**ecuación vectorial de la recta**) o

$$\begin{cases} x=2-5.\alpha \\ y=-3+2.\alpha \end{cases}$$ (**ecuaciones paramétricas cartesianas)**

Para graficar, ubicamos el punto (2 ; - 3) en un sistema de ejes y graficamos el vector $\vec{v}$ = (–5; 2) , la recta pedida es la paralela al vector que pasa por el punto dibujado



b) Dar 3 puntos de la recta diferentes al (2; –3).

Si sustituimos al parámetro α por distintos números reales, podemos obtener puntos pertenecientes a la recta

Si α = 2 se tiene A= (2; –3) + 2.(–5; 2) = (–8; 1);

α = –1, B= (2; –3) –1.(–5; 2) = (7; –5);

α = ½, C= (2; –3) +½.(–5; 2) = (–½; –2).

c) ¿El punto (–68; 24) pertenece a la recta?

Para que el punto pertenezca a la recta debe existir un valor de α que cumpla (–68; 24) = (2; –3) + α.(–5; 2)

–68 = 2 –5. α → –70/(–5) = 14 = α

24= –3 + 2. α → 27/2= 13,5 = α

Como α no es el mismo para ambas ecuaciones el punto (–68; 24) **no pertenece** a la recta.

d) ¿Qué punto Q de la recta cumple con la condición que la abscisa sumada al duplo de la ordenada da cero?

x + 2y = 0 → usando las ecuaciones paramétricas, reemplazamos x e y:

2 – 5.α + 2. (–3 + 2.α) = 0 → –4 –α = 0 → –4 = α

Luego Q = (2 –5.(–4) ; –3 + 2. (–4)) = (22; –11) –efectivamente x + 2y da cero-

Vamos a continuar buscando, en este ejemplo, los otros tipos de ecuaciones de rectas, que mencionamos**.**

En $\begin{cases} x = 2 - 5.\alpha \\ y = -3 + 2.\alpha \end{cases}$ podemos despejar α en las dos y al igualar obtener las ecuaciones simétrica.

Nos queda: $\frac{x-2}{-5} = \frac{y+3}{2}$

1) Para llevarla a la forma implícita:

$2 \cdot (x-2) = -5(y+3)$

$2x - 4 = -5y - 15$

$2x + 5y - 11 = 0$

$2x + 5y - 11 = 0$ es la ecuación implícita de la recta , y el vector (2 ; 5) es perpendicular a la recta.

2) Para pasar a la forma explícita, despejamos y:

$5y = -2x + 11$

y= $-\frac{2}{5}$ x $-\frac{11}{5}$ que es la **forma explícita** de la recta y la que comúnmente usaste en la escuela media y en el curso de ingreso.

Pasaje de la forma explícita a la vectorial

Si partimos de la forma explícita, ¿cómo llegamos a la vectorial?

(x, y) ε r si es de la forma $(x, y) = (x, -\frac{2}{5}x - \frac{11}{5}) = (x, -\frac{2}{5}x) + (0, -\frac{11}{5}) = x.\,(1, -\frac{2}{5}) + (0, -\frac{11}{5})$

Ahora x cumple el rol del parámetro.

De esta última expresión vemos que un vector director es el $(1, -\frac{2}{5}) = (1 ; m)$ –podría serlo cualquier múltiplo no nulo, como ser el (–5, 2)– y un punto de la recta es el $(0, -\frac{11}{5})$.

RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES

Dadas las rectas r: $\vec{x} = \alpha.\vec{v} + P$ y r': $\vec{x} = \beta.\vec{v'} + P'$.

Toma una hoja y represéntelas imaginando e interpretando a $\vec{v}$, $\vec{v'}$, P y P'.

¿Cuál estima es la condición para que ambas rectas sean ***paralelas***?

Dos rectas son paralelas si y solo si, sus vectores directores son paralelos.

Trabaja en tu cuaderno

A partir de lo obtenido analiza si las siguientes 4 rectas son paralelas entre sí:

r_A: (x; y) = (0; 2) + α. (–1; 1) r_B: (x; y) = (1; –4) + β. (⅔; –⅔) r_C: x + y = 6

Graficar cada una de ellas y confirmar su análisis.

Dos rectas no paralelas en el plano, se cortan en un punto, se llaman **rectas secantes**, su intersección es un punto del plano.

De acuerdo al ángulo que forman las rectas al cruzarse, pueden ser perpendiculares u oblicuas.

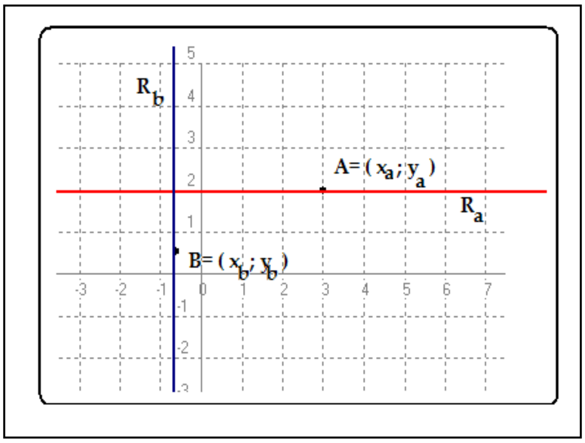
Analicemos la ***perpendicularidad*** en el plano.

1) Supongamos que R_a es una recta horizontal y por ende su perpendicular es una recta R_b vertical. Sus ecuaciones pueden escribirse como:

R_a: $\vec{u} = \lambda.\,(h; 0) + (x_a; y_a)$ con $h \neq 0$ (¿por qué?)

R_b: $\vec{u} = \lambda.\,(0; k) + (x_b; y_b)$ con $k \neq 0$ (¿por qué?)

Los vectores directores de ambas rectas son $\vec{v_a} = (h; 0)$ y $\vec{v_b} = (0; k)$ respectivamente.



2) Si R_a no es horizontal resulta que R_b no es vertical (o viceversa). Se puede escribir a cada recta del siguiente modo (elegimos la forma explícita para ver que son consistentes con todo nuestro desarrollo vectorial).

R_a: $y = m_a \cdot x + b$
R_b: $y = m_b \cdot x + b'$

En la escuela la condición de perpendiculares en R^2 era que $m_a \cdot m_b = -1$ o $m_b = -\dfrac{1}{m_a}$

Ahora trabajando con los vectores directores $(1; m_a)$ y $(1; m_b)$ al cumplirse $m_a \cdot m_b = -1$ significa que $1 + m_a \cdot m_b = 0$ y esta suma de productos, es precisamente el producto escalar entre los vectores directores $(1; m_a)$ y $(1; m_b)$

$$1 + m_a \cdot m_b = 0 \Rightarrow (1; m_a) \bullet (1; m_b) = 0 \Rightarrow (1; m_a) \perp (1; m_b)$$

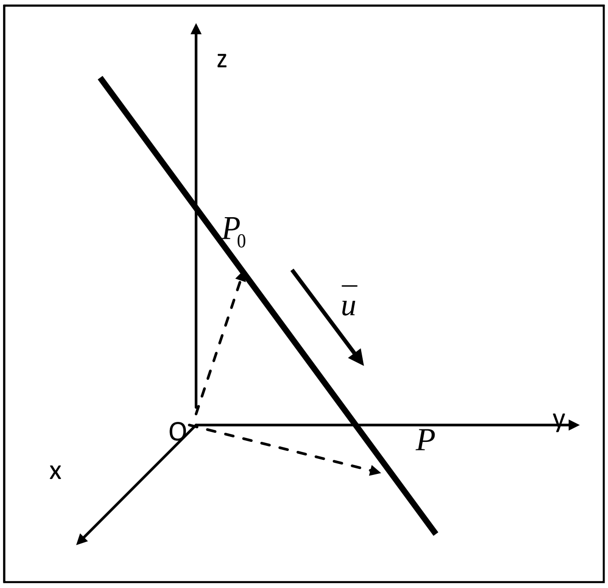
Dos rectas son perpendiculares, si y solo si, sus vectores directores son perpendiculares.

ECUACIONES DE LA RECTA EN R^3

Así como al estudiar la ecuación de la recta en R^2 comprobamos que conociendo un punto perteneciente a la recta y un vector director, paralelo a la recta, que fije la dirección de la misma, tenemos datos suficientes para definir, de manera única, una recta; lo mismo sucede en el espacio de tres dimensiones y por lo tanto, podemos definir de igual forma las ecuaciones: vectorial de la recta, paramétrica vectorial, paramétricas cartesianas y simétricas de la recta en R^3 -

Dado el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$
y el vector director $\overline{u} = (u_x, u_y, u_z)$
Siendo P un punto genérico de la recta la ecuación vectorial de la recta r en R^3 está dada por :

$$r : \overline{OP} = \overline{OP_0} + \overline{P_0P}$$



El vector $\overline{P_0P}$ tiene la dirección de la recta y por lo tanto la misma dirección del vector $\overline{u}$
Significa que es un múltiplo de $\overline{u}$, es el vector $\overline{u}$ multiplicado por algún número real λ

$\overline{P_0P} = \lambda \overline{u}$ entonces

$r : \overline{OP} = \overline{OP_0} + \lambda . \overline{u}$ que es la **ecuación vectorial** de la recta

Si reemplazamos cada vector por sus componentes obtenemos:

$r : (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda .(u_x, u_y, u_z)$ que es la **ecuación paramétrica vectorial de la recta en** R^3

Si operamos entre los vectores del segundo miembro resulta:

$$r:(x,y,z)=(x_0+\lambda.u_x, y_0+\lambda.u_y, z_0+\lambda.u_z)$$

Y al igualar las componentes obtenemos:

$$r:\begin{cases} x = x_0+\lambda.u_x \\ y = y_0+\lambda.u_y \\ z = z_0+\lambda.u_z \end{cases} \quad \forall\lambda\in R$$ llamadas **ecuaciones paramétricas** de la recta

Si todas las componentes del vector $\overline{u}$ son distintas de 0, entonces podemos despejar λ de las tres ecuaciones e igualar, resultando las

$$\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}=\frac{z-z_0}{u_z}$$ llamadas **ecuaciones simétricas** de la recta

Ejemplo:

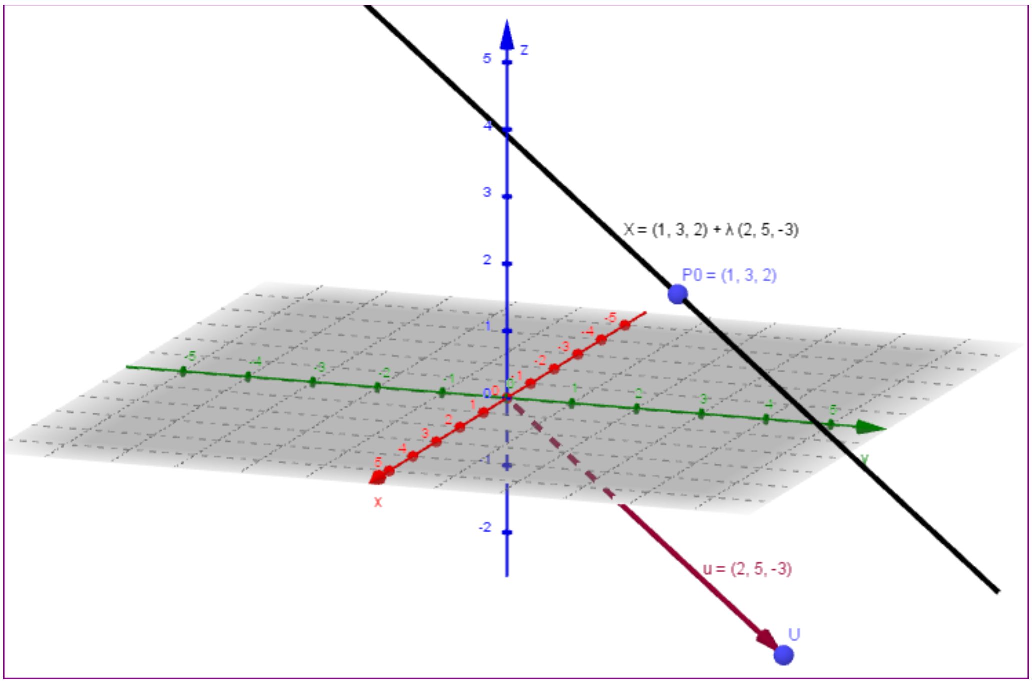
Dado el punto $P_0(1,3,2)$ y el vector director $\overline{u}=(2,5,-3)$ encontraremos la ecuación de la recta que pasa por el punto P_0 y es paralela al vector $\overline{u}$

$r:\overline{OP}=\overline{OP_0}+\lambda.\overline{u}$

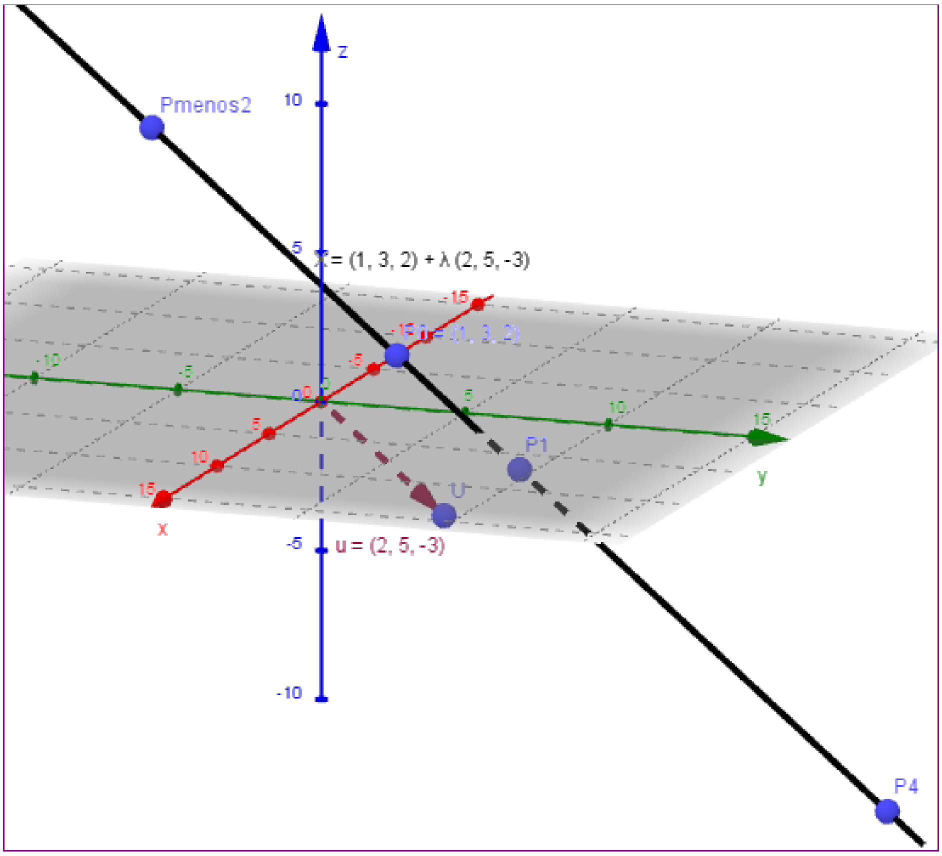
$r:(x,y,z)=(1,3,2)+\lambda.(2,5,-3)$ **ecuación paramétrica vectorial de la recta en** R^3

Resolviendo las operaciones entre los vectores, resulta:

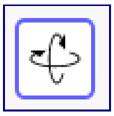
$$r:(x,y,z)=(1+2\lambda,3+5\lambda,2-3\lambda)$$



Advierte que si deseamos conocer distintos puntos que pertenezcan a esta recta, basta con asignarle a λ distintos números reales, por ejemplo, si λ= 1 obtenemos el punto (3 ; 8 ;-1) ; si λ= -2 resulta (-3 ; -7 ; 8), si λ= 4 (9 ; 23 ; -10) siendo todos estos, puntos que se encuentran sobre la recta.



En el siguiente link puedes rotar el gráfico anterior y visualizar mejor la ubicación de la recta.
https://www.geogebra.org/classic/ptppcn5t

Para eso utiliza el ícono  cliquéalo, coloca el cursor sobre el gráfico y muévelo manteniendo apretado, para poder rotarlo.

Igualando, obtenemos $r:\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in R$ **las ecuaciones paramétricas** de la recta

Nota que en las ecuaciones anteriores los términos independientes representan las coordenadas de un punto que pertenece a la recta y los coeficientes de λ son las componentes de un vector paralelo a la recta.

Despejamos λ en las tres ecuaciones

$\lambda = \dfrac{x-1}{2};\ \ \lambda = \dfrac{y-3}{5};\ \ \lambda = \dfrac{z-2}{-3}$ e igualando obtenemos las **ecuaciones simétricas** de la recta:

$r:\quad \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z-2}{-3}$

En el caso de trabajar con las ecuaciones simétricas, los números que restan a las variables son las componentes de un punto que pertenece a la recta y los denominadores constituyen las componentes de un vector paralelo a la recta.

ECUACIONES REDUCIDAS DE LA RECTA EN R^3

De las ecuaciones simétricas de la recta:

$\dfrac{x-x_0}{u_x} = \dfrac{z-z_0}{u_z}$ y $\dfrac{y-y_0}{u_y} = \dfrac{z-z_0}{u_z}$ expresadas con anterioridad

Si despejamos x e y en función de z , resulta :

$$x - x_0 = \frac{u_x\left(z - z_0\right)}{u_z} \qquad \text{y} \qquad y - y_0 = \frac{u_y\left(z - z_0\right)}{u_z}$$

$$x = \frac{u_x}{u_z} z - \frac{u_x}{u_z} z_0 + x_0 \qquad \text{y} \qquad y = \frac{u_y}{u_z} z - \frac{u_y}{u_z} z_0 + y_0$$

Si llamamos

$$m = \frac{u_x}{u_z}\ ,\quad p = -\frac{u_x}{u_z} z_0 + x_0 \quad ,\quad n = \frac{u_y}{u_z} \quad \text{y} \quad q = -\frac{u_y}{u_z} z_0 + y_0$$

El sistema anterior se escribe

$\begin{cases} x \ = \ m.z + p \\ y \ = n.z + q \end{cases}$ con $m \neq 0, n \neq 0$ llamadas **ecuaciones reducidas** de la recta

Advierte que en la forma reducida, el vector $\left(m;n;1\right) = \left(\dfrac{u_x}{u_z}\ ,\ \dfrac{u_y}{u_z}\ ,\ 1\right)$ es un múltiplo de $\bar{u} = (u_x, u_y, u_z)$ y por lo tanto es paralelo a él y paralelo a la recta, y si a z le asignamos el valor 0 obtenemos (*p ; q; 0*) , un punto que pertenece a la recta.

En el ejemplo desarrollado antes, obtuvimos las ecuaciones simétricas:

$$r: \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-2}{-3}$$

Escribiremos ahora las ecuaciones reducidas, de $\frac{x-1}{2}=\frac{z-2}{-3}$ y $\frac{y-3}{5}=\frac{z-2}{-3}$

Resulta:

$$x=2.\frac{z-2}{-3}+1 \quad \text{y,} \quad y=5.\frac{z-2}{-3}+3$$

$$x=\frac{-2}{3}z+\frac{4}{3}+1 \quad \text{y,} \quad y=\frac{-5}{3}z+\frac{10}{3}+3$$

$$\begin{cases} x=\frac{-2}{3}z+\frac{7}{3} \\ y=\frac{-5}{3}z+\frac{19}{3} \end{cases}$$

Como dijimos antes el vector $\left(\frac{-2}{3},\frac{-5}{3},1\right)$ es paralelo a $\bar{u}=(2,5,-3)$ y por lo tanto paralelo a la recta, y el punto $\left(\frac{7}{3},\frac{19}{3},0\right)$ pertenece a la recta.

Verifica esto último usando las ecuaciones paramétricas de la recta, ¿Qué valor del parámetro λ permite obtener este punto?

……………………………………………………………………………………

RECTA DETERMINADA POR DOS PUNTOS

Dos puntos en el espacio determinan una única recta, entonces podemos encontrar su ecuación si contamos con las coordenadas de dos puntos como datos.

Ejemplo:

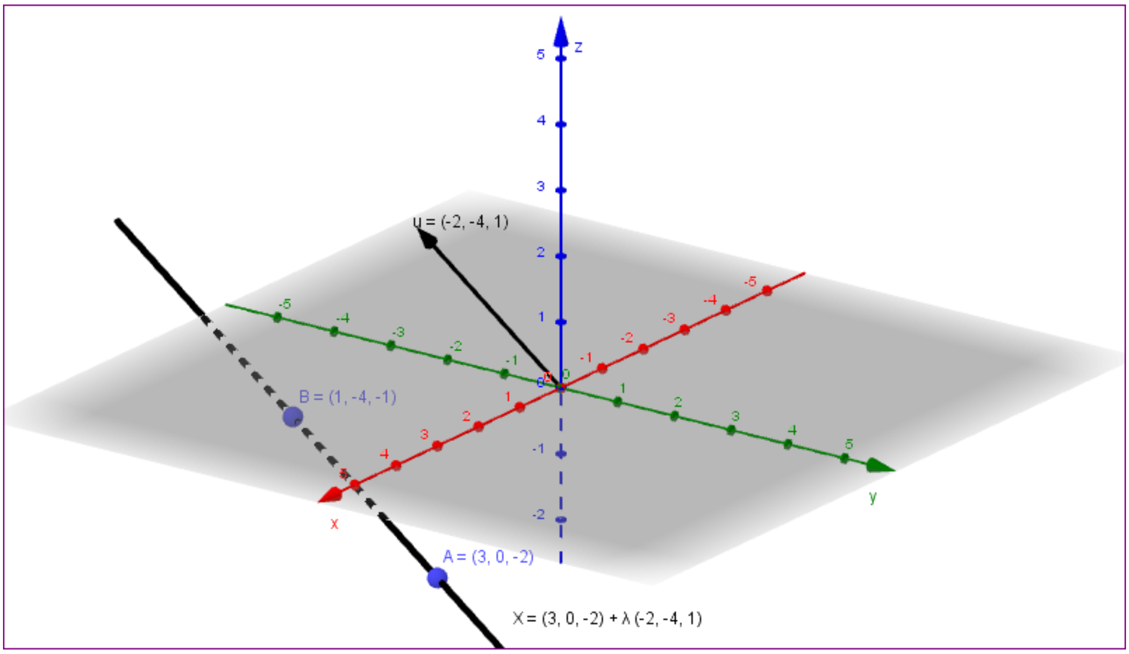
Encontrar las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos A=(3,0,-2) y B=(1,-4,-1)

Si la recta pasa por estos dos puntos usaremos a uno de ellos como punto de la recta (el P_0) y como vector director de la recta al vector determinado por ambos puntos.

Entonces $\bar{u}=\overline{AB}=[(1-3);(-4-0);(-1-(-2))] \Rightarrow \bar{u}=(-2,-4,1)$ y usando el punto A(3,0,-2) como P_0 tendremos:

$$r:(x,y,z)=(3,0,-2)+\gamma.(-2,-4,1)\ ; \qquad r:\begin{cases}x=3-2.\gamma\\ y=-4.\gamma\\ z=-2+\gamma\end{cases}; \qquad r:\frac{x-3}{-2}=\frac{y}{-4}=z+2$$

Evidentemente la recta obtenida pasa por A.



Verifiquemos la respuesta comprobando que el punto B=(1,-4,-1) pertenece a la recta

$\frac{1-3}{-2}=\frac{-4}{-4}=-1+2 \quad \rightarrow \quad 1=1=1$ entonces B cumple las ecuaciones y por lo tanto pertenece a la recta.

ALGUNOS CASOS PARTICULARES DE RECTAS

Cuando la recta solicitada es paralela a algún eje coordenado o paralela a alguno de los planos coordenados las ecuaciones resultan un tanto diferentes.

1- Encontremos la ecuación de la recta que pasa por A=(2;-3;5) y tiene vector director $\bar{u}=(3,0,5)$

$r:(x,y,z)=(2,-3,5)+\lambda.(3,0,5)$ **Ecuación paramétrica vectorial de la recta en** R^3

$$r:\begin{cases} x = 2+3\lambda \\ y = -3 \\ z = 5+5\lambda \end{cases} \qquad \forall \lambda \in R$$

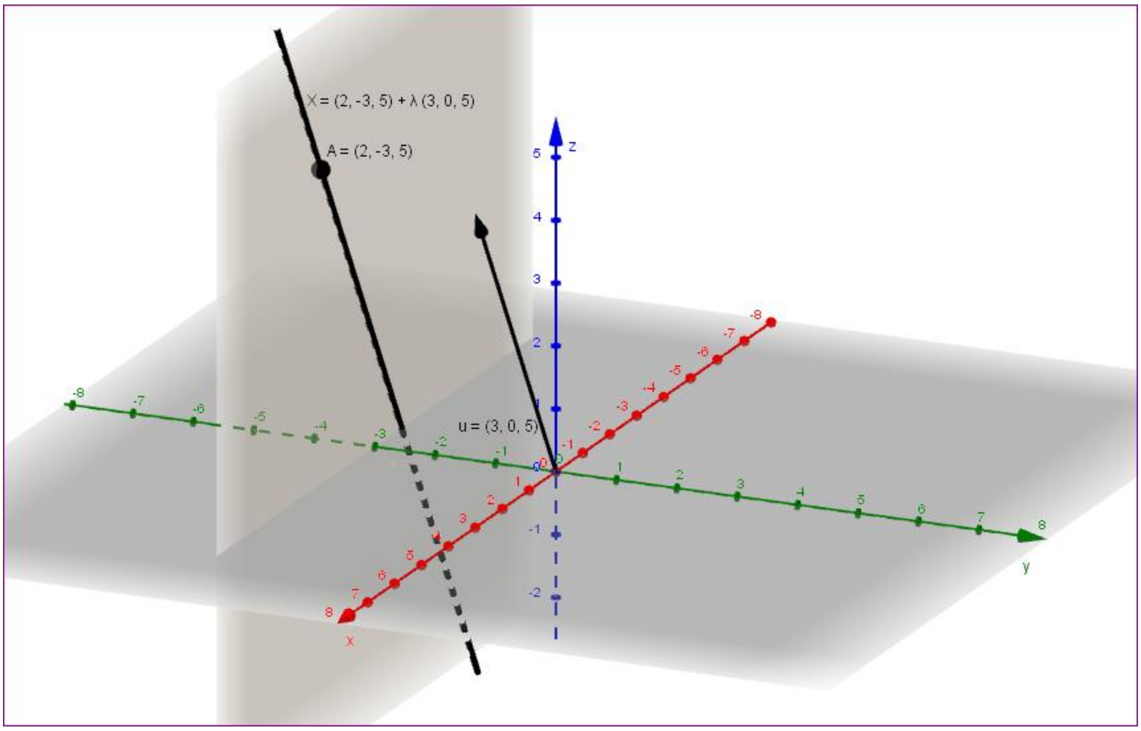
ecuaciones paramétricas

Al despejar λ solo podemos hacerlo de la primera y última ecuación

$$\lambda = \frac{x-2}{3}; \quad \lambda = \frac{z-5}{5}$$

Y las ecuaciones simétricas resultan $r:\begin{cases} \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{z-5}{5} \\ y = -3 \end{cases}$

Como el vector director $\overline{u} = (3,0,5)$ se encuentra contenido en el plano (x;z), la recta es paralela al plano coordenado (x;z) . Veremos más adelante al hablar de planos que se encuentra contenido en el plano y = -3, que es un plano paralelo al plano coordenado (x;z) por el valor -3 del eje y .



En el enlace https://www.geogebra.org/classic/tecmtzmu puedes experimentar con la recta.

2. Encontremos la ecuación de la recta que pasa por A(2;5;-1) y tiene vector director $\overline{u} = (0,0,2)$

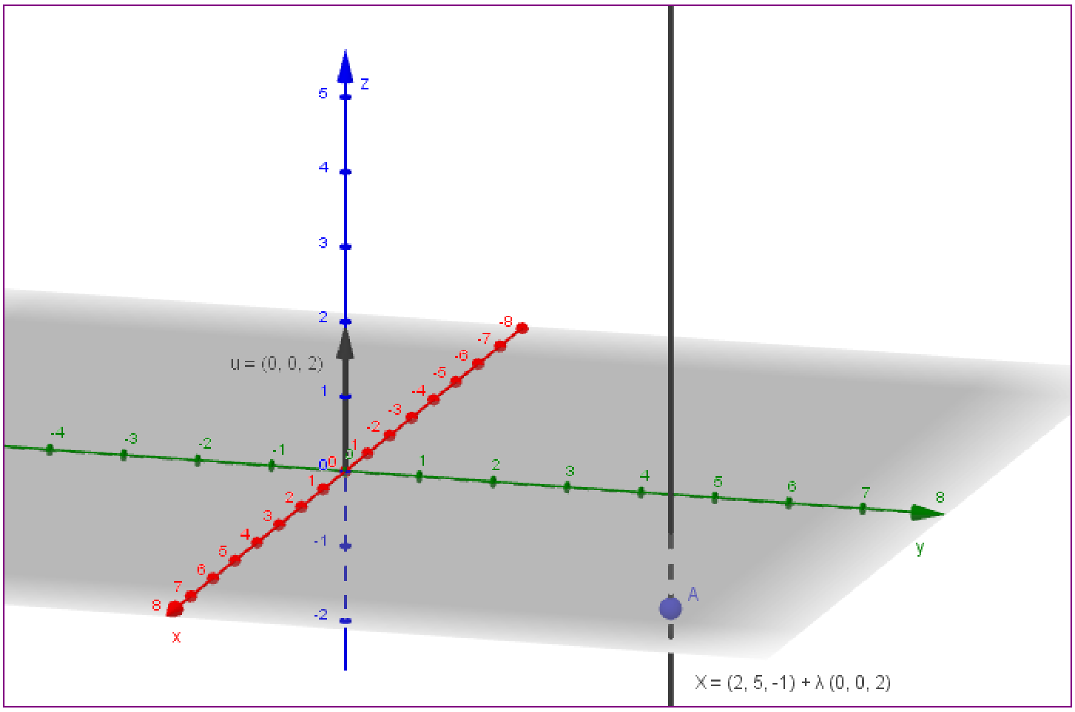
Ahora el vector director tiene la dirección del eje z, por lo tanto la recta es paralela a dicho eje.

$r:(x,y,z) = (2,5,-1) + \lambda.(0,0,2)$ **ecuación paramétrica vectorial de la recta en** R^3

$$r:\begin{cases} x=2 \\ y=5 \\ z=-1+2\lambda \end{cases} \qquad \forall \lambda \in R \qquad \textbf{ecuaciones paramétricas}$$

Como λ solo se encuentra en la última ecuación si la despejamos no contamos con otra para igualarla. No pudiendo escribirse las ecuaciones simétricas en este caso.
La variable z puede tomar cualquier valor, al asignarle a λ los infinitos números reales. Por lo tanto basta dar las dos primeras ecuaciones para determinar la recta y expresando así, que la variable que no figura puede tener cualquier valor.

$r:\begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$ Veremos luego que, de esta forma, la recta solicitada queda definida como la intersección de dos planos, el plano x=2 (paralelo al plano coordenado (y;z) por 2) y el plano y=5 (paralelo al plano coordenado (x;z) por 5)

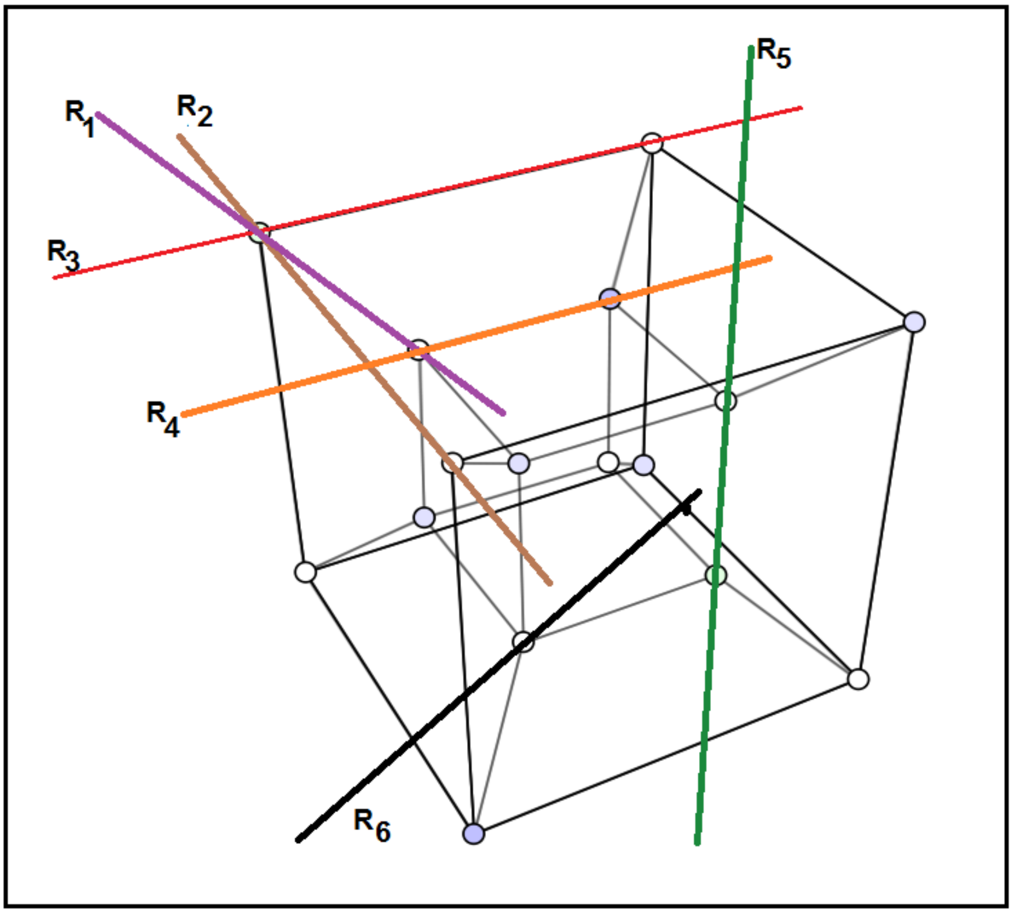


POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS
INTERSECCIÒN DE RECTAS
Rectas paralelas, secantes y alabeadas

Vimos que en el plano dos rectas podían ser secantes (como caso especial ser perpendiculares), paralelas coincidentes o paralelas no coincidentes. Los tres casos nos lleva a que las dos rectas puedan tener un *único punto en común*, *todos los puntos en común* o *ningún punto en común*.

En el espacio la cuestión de la intersección se mantiene, pero aparece un nuevo tipo de relación entre rectas.
Las rectas pueden ser paralelas (coincidentes o no) si sus vectores directores son paralelos, o pueden ser secantes si se cortan en un punto, tienen exactamente un punto en común, pero en R^3 existe otra posibilidad, rectas que no son ni paralelas, ni secantes, se llaman **rectas alabeadas**.

El gráfico, denominado diagrama de Schlegel[1], ayudará a la comprensión.



Las rectas R_1, R_2 y R_3 son *secantes*, esto es, *se cortan en un punto*; además R_2 y R_3 son *perpendiculares* –o sea *forman un ángulo de 90º*-; R_3 y R_4 son *paralelas (no coincidentes)* –sus *vectores directores son paralelos y las rectas no se intersecan*-.
R_5 es *alabeadas* con las cuatro anteriores son R_e –*no se cortan* pero sus *vectores directores no son paralelos*-; además R_5 es perpendicular a R_2 y a R_3. R_6 es alabeada a las demás.

Dos rectas R y R' son **alabeadas** si sus vectores directores **<u>no son paralelos</u>** y **las rectas no se cortan** en ningún punto**.**

Por ende, en R^3 si dos rectas tienen intersección vacía no necesariamente son paralelas.

[1] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/69/Hypercubecentral.svg/500px-Hypercubecentral.svg.png

Ejemplo:

1. Determinar la posición relativa de las rectas de ecuación:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + \gamma \\ y = -3 + 2.\gamma \\ z = -2 - \gamma \end{cases} \quad \text{y} \quad r_2 : \frac{x - 17}{3} = y - 4 = \frac{z + 8}{-1}$$

Para hacerlo debemos buscar si existe algún punto que pertenezca a las dos rectas, es decir que sus coordenadas deben cumplir las ecuaciones de las dos rectas a la vez.

Para ello resulta útil trabajar con las ecuaciones paramétricas de las rectas, escribimos dichas ecuaciones de la recta 2.

$$r_2 : \begin{cases} x = 17 + 3\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -8 - \lambda \end{cases} \qquad \forall \lambda \in R$$

Estamos buscando los puntos (x ; y ; z) que cumplan las ecuaciones de las dos rectas.

Entonces igualamos las ecuaciones y resulta el sistema. $\begin{cases} 1 + \gamma = 17 + 3\lambda \\ -3 + 2\gamma = 4 + \lambda \\ -2 - \gamma = -8 - \lambda \end{cases}$

Las dos rectas serán secantes si el sistema anterior, de 3 ecuaciones con 2 incógnitas es compatible determinado, tiene única solución.

Si el sistema resulta compatible indeterminado, significa que existen infinitos puntos solución, entonces las rectas son coincidentes.

Si el sistema es incompatible significa que las rectas no tienen ningún punto en común, pudiendo ser paralelas o alabeadas.

Para resolverlo aplicaremos el método de eliminación de Gauss.

Para ello primero escribimos las ecuaciones de tal forma que los términos que poseen las incógnitas figuren del mismo miembro y los términos independientes del otro.

$$\begin{cases} \gamma - 3\lambda = 16 \\ 2\gamma - \lambda = 7 \\ -\gamma + \lambda = -6 \end{cases}$$

Armamos la matriz de los coeficientes ampliada con los términos independientes.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 16 \\ 2 & -1 & 7 \\ -1 & 1 & -6 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 16 \\ 0 & 5 & -25 \\ 0 & -2 & 10 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 16 \\ 0 & 5 & -25 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$F_2 \to F_2 - 2.F_1 \qquad F_3 \to F_3 + \frac{2}{5}.F_2$$

$$F_3 \to F_3 + F_1$$

r(A) = 2 r(M) = 2 el sistema es compatible y como el número de incógnitas también es 2 , n=2 es compatible determinado.

De las tres ecuaciones que teníamos una se volvió nula.

$$\begin{cases} \gamma - 3\lambda = 16 \\ 5\lambda = -25 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{-25}{5} = -5 \qquad \text{y} \qquad \gamma - 3.(-5) = 16 \quad \Rightarrow \gamma = 16 - 15 = 1$$

El sistema tiene única solución, las rectas se cortan en un punto, para obtener las coordenadas de dicho punto le asignamos al parámetro γ en la recta1 el valor obtenido -1 o al parámetro λ en la recta2 el valor -5, debiendo obtener en ambos casos el mismo punto

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + 1 = 2 \\ y = -3 + 2.1 = -1 \\ z = -2 - 1 = -3 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 17 + 3.(-5) = 2 \\ y = 4 + (-5) = -1 \\ z = -8 - (-5) = -3 \end{cases}$$

El punto intersección es el punto de coordenadas (2;-1;-3)

$r_1 \cap r_2 = \{(2;-1;-3)\}$ Las rectas son **secantes.**

En el siguiente link puedes visualizar la representación gráfica de las rectas.
https://www.geogebra.org/classic/euzx8ued
Rota la vista gráfica para poder verlo desde distintos puntos

Podemos determinar ahora si son perpendiculares, si se cortan formando un ángulo recto.

Para ello analizamos los vectores directores ¿Qué condición deben cumplir para que las rectas sean perpendiculares?

…………………………………………………………………………………………………

$$r_1 \perp r_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{u_1} \perp \overline{u_2} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{u_1} \bullet \overline{u_2} = 0$$

Recuerda que habíamos dicho que en las ecuaciones paramétricas, los coeficientes del parámetro son las componentes de un vector paralelo a la recta, entonces:

$$\overline{u_1} = (1;2;-1) \quad \text{y} \quad \overline{u_2} = (3;1;-1) \quad \Rightarrow \quad \overline{u_1} \bullet \overline{u_2} = 1.3 + 2.1 + (-1).(-1) = 6 \neq 0$$

Lo que nos indica que los vectores no son ortogonales, entonces las rectas **no son perpendiculares**.

EJERCICIO:

4) Trabajando con los vectores directores de las rectas calcula la amplitud del ángulo que determinan al cortarse.

Otro ejemplo:

2. Determinaremos ahora la posición relativa de las rectas de ecuación:

$$r_1 : \begin{cases} x = 2 - \gamma \\ y = 1 + \gamma \\ z = -2\gamma \end{cases} \quad \text{y} \quad r_2 : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2.\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$$

Buscamos la intersección, igualando las coordenadas:

$$\begin{cases} 2 - \gamma = 1 + \lambda \\ 1 + \gamma = -2.\lambda \\ -2\gamma = 3 + 2\lambda \end{cases} \quad \text{Acomodamos las ecuaciones} \quad \begin{cases} -\gamma - \lambda = -1 \\ \gamma + 2\lambda = -1 \\ -2\gamma - 2\lambda = 3 \end{cases}$$

Armamos la matriz de los coeficientes ampliada con los términos independientes.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$$F_2 \to F_2 + F_1$$
$$F_3 \to F_3 - 2F_1$$

El rango de A es igual a 2 y el rango de M es igual a 3, el sistema es incompatible, no tiene solución. No hay ningún punto que pertenece a las dos rectas a la vez.

Las rectas pueden entonces, ser paralelas o alabeadas. Para determinarlo trabajemos con sus vectores directores.

¿Qué condición deben cumplir los vectores directores para que las rectas sean paralelas?

……………………………………………………………………………………………

$$r_1 \parallel r_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{u_1} \parallel \overline{u_2} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{u_1} = k.\overline{u_2} \quad \wedge \quad k \in R$$

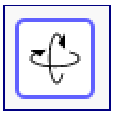
Las componentes de los vectores deben ser proporcionales.

Recuerda que habíamos dicho que en las ecuaciones paramétricas, los coeficientes del parámetro son las componentes de un vector paralelo a la recta, entonces

$$\overline{u_1}=(-1;1;-2) \quad \text{y} \quad \overline{u_2}=(1;-2;2) \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{1}\neq\frac{1}{-2}\neq\frac{-2}{2}$$

Lo que nos indica que los vectores no son paralelos, entonces las rectas no son paralelas.

En el siguiente link puedes rotar el gráfico de las rectas anteriores y visualizar mejor su ubicación en el espacio.
https://www.geogebra.org/classic/wk62r8mh

Para eso utiliza el ícono  cliquéalo, coloca el cursor sobre el gráfico y muévelo manteniendo apretado, para poder rotarlo.

Como las rectas no tienen intersección (no son secantes) y tampoco son paralelas, significa entonces que son **rectas alabeadas**.

Resolver los ejercicios 1 al 19 del archivo llamado "MÓDULO 3, GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS"

Videos de la cátedra que pueden ayudarte con estos temas:

Posiciones entre rectas en R^3. Ejercicio con parámetro

https://www.youtube.com/watch?v=KaVeZr_84To&t=265s