T P 04 Ej. 2-e

Utilizando la definición, calcular (si existen) las derivadas parciales de la siguiente función en el punto indicado:

$$\boldsymbol{f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad en\ (0,0)}$$

Para una introducción a la manera en que se resuelve este tipo de ejercicios, referirse al ejercicio 2-a

$Dom\ f(x,y) = R^2$

La representación geométrica de la función indicada está dada, como se vio anteriormente, por un cono con generatrices a 45°

Entonces:

$$\dot{f}_x(0\,,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0\,,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h\ ,0)-f(0\ ,0)}{h}$$

$$\dot{f}_x(0\,,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0\,,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h\ ,0)-f(0\ ,0)}{h}$$

$$\dot{f}_x(0\,,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0\,,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2+0^2}-0}{h}$$

$$\dot{f}_x(0\,,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0\,,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2}}{h}$$

$$\dot{f}_x(0\,,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0\,,0) = \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$$

$$\boldsymbol{\dot{f}_x(0\,,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+}\frac{h}{h} = 1 & sí\ \ h < 0 \\ \lim\limits_{h\to 0^-}\frac{-h}{h} = -1 & sí\ \ h \geq 0 \end{cases}}$$

Claramente el límite no existe, por lo tanto, tampoco existirá la derivada parcial en la dirección del eje x en (0,0).

Es importante destacar que la determinación de las derivadas parciales implica considerar constante a aquella o aquellas variables en las cuales no se deriva. Por otra parte, calcular la derivada parcial con respecto a x implica cortar a la gráfica de la función $z = f(x,y)$ con un plano paralelo al zx en $(0{,}0)$, esto no es ni más ni menos que dicho plano. La intersección del plano zx con la gráfica de la función determina dos rectas de ecuación $y = x$ e $y = -x$, con lo cual si nos acercamos al punto $(0{,}0)$ por derecha

$h \to 0^+$ entonces $\dot{f}(0{,}0) = 1$ por otra parte si nos acercamos al punto $(0{,}0)$ por izquierda $h \to 0^-$ entonces $\dot{f}(0{,}0) = -1$. Como los límites laterales son distintos, esto implica la NO existencia del límite y por ende de la derivada parcial en $(0{,}0)$

Análogamente:

$$\dot{f}_y(0\,,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0\,,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0\,,h+0) - f(0\,,0)}{h}$$

$$\dot{f}_y(0\,,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0\,,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0\,,h\,) - f(0\,,0)}{h}$$

$$\dot{f}_y(0\,,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0\,,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{0^2 + h^2} - 0}{h}$$

$$\dot{f}_y(0\,,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0\,,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h}$$

$$\dot{f}_y(0\,,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0\,,0) = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

$$\boldsymbol{\dot{f}_y(0\,,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1 & s\text{í} \;\; h < 0 \\ \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 & s\text{í} \;\; h \geq 0 \end{cases}}$$

Ídem, derivada parcial con respecto a x.