Álgebra y Geometría analítica II

Primer cuatrimestre de 2020

Sea
$$S = \{ p \in P_3[R] / p(1) = p(-1) + p(0) \}$$

un subconjunto de $P_3[R]$

- a) Probar que S es subespacio de $P_3[R]$
- b) Dar dos bases distintas de S y su dimensión.

a) Probar que S es subespacio de $P_3[R]$

$$S = \{ p \in P_3[R] / p(1) = p(-1) + p(0) \}$$

Recordemos:

- $\implies i) S \neq \emptyset$ ó bien $\overrightarrow{0}_V \in S$
- \implies $ii) \ \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in S: (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \in S$
- \implies $iii) \forall k \in R$, $\forall \vec{v} \in S: (k, \vec{v}) \in S$

$$S = \{ p \in P_3[R] / p(1) = p(-1) + p(0) \}$$
 donde $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Primero analicemos la condición:

$$p(1) = a \cdot 1^{3} + b \cdot 1^{2} + c \cdot 1 + d = a + b + c + d$$

$$p(-1) = a \cdot (-1)^{3} + b \cdot (-1)^{2} + c \cdot (-1) + d = -a + b - c + d$$

$$p(0) = a \cdot 0^{3} + b \cdot 0^{2} + c \cdot 0 + d = d$$

$$a + b + c + d = -a + b - c + d + d$$

$$2a + 2c = d$$

$$S = \{ p \in P_3[R] / p(1) = p(-1) + p(0) \}$$
 donde $p = ax^3 + bx^2 + cx + d$

i)
$$S \neq \emptyset$$
 Veré que: $\vec{0}_V \in S$ $\vec{0}_V = \vec{0}_{P_3[R]} = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$

Me pregunto:
$$\vec{O}_{P_3[R]} = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \in S$$
?

Cumple con la condición 2a + 2c = d?

$$\vec{0}_{P_3[R]} = 0.x^3 + 0.x^2 + 0.x + 0$$
 $a = b = c = d = 0$
 $2.0 + 2.0 = 0$

Cumple *i*)

$$S = \{ p \in P_3[R] / p(1) = p(-1) + p(0) \}$$
 donde $p = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$(ii) \ \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in S : (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \in S$$

$$\vec{v}_1 = ax^3 + bx^2 + cx + d \in S \implies 2a + 2c = d$$

$$\vec{v}_2 = a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' \in S \implies 2a' + 2c' = d'$$

Hipótesis

Me pregunto: $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \in S$?

Cumple con la condición?

$$2a + 2c = d$$

Hipótesis

$$2a' + 2c' = d'$$

$$2(a + a') + 2(c + c') = d + d'$$
?

$$2(a + a') + 2(c + c') = 2a + 2a' + 2c + 2c'$$

Distribuyo para poder usar las hipótesis

$$2(a + a') + 2(c + c') = 2a + 2c + 2a' + 2c'$$

Reordeno para usar las hipótesis

$$2(a + a') + 2(c + c') = d + d'$$



Cumple *ii*)

$$S = \{ p \in P_3[R] / p(1) = p(-1) + p(0) \}$$
 donde $p = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$iii) \forall k \in R, \forall \vec{v} \in S: (k, \vec{v}) \in S$$

$$\vec{v} = ax^3 + bx^2 + cx + d \in S \implies 2a + 2c = d$$

Hipótesis

Me pregunto: $(k, \vec{v}) \in S$? Cumple con la condición?

$$\mathbf{k}.\overrightarrow{\mathbf{v}} = kax^3 + kbx^2 + kcx + kd$$

$$\frac{1}{6} 2ka + 2kc = kd$$
?

$$2a + 2c = d$$

Hipótesis

$$\frac{1}{6}2ka + 2kc = kd$$
?

$$2ka + 2kc = k.(2a + 2c)$$

Saco factor común para poder usar la hipótesis





Uso hipótesis

$$2ka + 2kc = kd$$



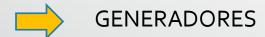
Cumple *iii*)

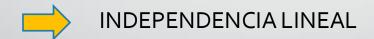
Finalmente, puedo decir que S es un subespacio de $P_3[R]$

b) Dar dos bases distintas de S y su dimensión.

$$S = \{ p \in P_3[R] / p(1) = p(-1) + p(0) \}$$

Recordemos:





$$S = \{ p \in P_3[R] / p(1) = p(-1) + p(0) \}$$



GENERADORES

A cualquier elemento de S lo podré escribir como c.l. de sus generadores

$$p = ax^3 + bx^2 + cx + d \in S \Leftrightarrow 2a + 2c = d$$

Entonces la condición es: d = 2a + 2c

$$d = 2a + 2c$$

$$p = ax^{3} + bx^{2} + cx + d \in S \Leftrightarrow 2a + 2c = d$$

$$(x^{3} + 2) + (x^{2}) + (x^{2}) + (x^{2})$$

$$p = ax^{3} + bx^{2} + cx + 2a + 2c$$

$$p = a(x^3 + 2) + b(x^2) + c(x + 2)$$

A cualquier elemento de W lo podré escribir como c.l. de sus generadores

$$S = gen \{x^3 + 2; x^2; x + 2\}$$

Serán Linealmente independientes?

En este caso, por ser más de dos elementos los generadores encontrados, **NO** podemos ver que como uno no es múltiplo del otro, son LI. LO PROBAREMOS POR DEFINICIÓN

Veamos cómo lo demuestro por Definición:

$$S = gen \{x^3 + 2; x^2; x + 2\}$$

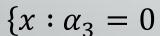
Combinación lineal de los generadores igualada al vector nulo

$$\alpha_1(x^3+2) + \alpha_2(x^2) + \alpha_3(x+2) = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$$

Igualamos término a término para decidir si los escalares son necesariamente 0.

$$\{x^3:\alpha_1=0$$

$$\{x^2:\alpha_2=0$$



$$\{T.I.: 2\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0\}$$



Todos los escalares son necesariamente 0.



Los generadores son L.I.

$$S = gen \{x^3 + 2; x^2; x + 2\}$$

Los generadores son L.I.

$$B_S = \{x^3 + 2 ; x^2 ; x + 2\}$$

$$\dim S = 3$$

$$B'_{S} = \{x^3 + 2; x + 2; x^2\}$$

Sea
$$S = \{ p \in P_3[R] / p(1) = p(-1) + p(0) \}$$

un subconjunto de $P_3[R]$

a) Probar que S es subespacio de $P_3[R]$



b) Dar dos bases distintas de S y su dimensión.

$$B_S = \{x^3 + 2; x^2; x + 2\}$$
 $B'_S = \{x^3 + 2; x + 2; x^2\}$

$$B'_{S} = \{x^3 + 2; x + 2; x^2\}$$

 $\dim S = 3$