T P 04 Ej. 2-f

Utilizando la definición, calcular (si existen) las derivadas parciales de la siguiente función en el punto indicado:

$$\boldsymbol{f(x,y) = ln(x+y) \qquad en\ \ (1,1)}$$

Para una introducción a la manera en que se resuelve este tipo de ejercicios, referirse al ejercicio 2-a

$Dom\, f(x,y) = \{(x,y)\ \mathcal{E}\ R^2 tal\ que\colon x+y>0\}$

$$\dot{f}_x(1\,,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1\,,1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h\ \ ,1)-f(1\,,1)}{h}$$

$$\dot{f}_x(1\,,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1\,,1) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h+1)-\ln(1+1)}{h}$$

$$\dot{f}_x(1\,,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1\,,1) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(2+h)-\ln(2)}{h}$$

Por propiedades de los logaritmos: $\ln(a)-\ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

$$\dot{f}_x(1\,,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1\,,1) = \lim_{h\to 0}\frac{ln\left(\frac{2+h}{2}\right)}{h}$$

Distribuyendo el 2 en el argumento del logaritmo, tenemos:

$$\dot{f}_x(1\,,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1\,,1) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}.\,ln\left(1+\frac{h}{2}\right)$$

Por propiedades de los logaritmos: $a\,.\ln(b) = ln(b)^a$

$$\dot{f}_x(1\,,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1\,,1) = \lim_{h\to 0} ln\left(1+\ \frac{h}{2}\right)^{1/h}$$

Sabiendo que:

$$\lim_{f(x)\to 0}(1+f(x))^{1/f(x)} = \ e \quad para\ indeterminaciones\ del\ tipo\ 1^{\infty}$$

Entonces, elevando todo a las ${}^{2}/_{2}$ y acomodando convenientemente, tenemos:

$$\dot{f}_x(1\,,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1\,,1) = \lim_{h\to 0} ln\left[\left(1+\,\frac{h}{2}\right)^{\frac{2}{h}}\right]^{1/2}$$

$$\dot{f}_x(1\,,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1\,,1) = \ln\left(\lim_{h\to 0}\left[\left(1+\,\frac{h}{2}\right)\right]^{\frac{2}{h}}\right)^{1/2}$$

$$\dot{f}_x(1\,,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1\,,1) = \ln(e)^{1/2}$$

$$\dot{f}_x(1\,,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1\,,1) = \frac{1}{2}\ln(\mathrm{e})$$

$$\boldsymbol{\dot{f}_x(1\,,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1\,,1) = \frac{1}{2}}$$

Realizando el mismo análisis para la derivada parcial con respecto a y, tenemos:

$$\dot{f}_y(1\,,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1\,,1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1\,,1+h)-f(1\,,1)}{h}$$

$$\dot{f}_y(1\,,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1\,,1) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+1+h)-\ln(1+1)}{h}$$

$$\dot{f}_y(1\,,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1\,,1) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(2+h)-\ln(2)}{h}$$

Por propiedades de los logaritmos: $\ln(a)-\ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

$$\dot{f}_y(1\,,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1\,,1) = \lim_{h\to 0}\frac{ln\left(\frac{2+h}{2}\right)}{h}$$

Distribuyendo el 2 en el argumento del logaritmo, tenemos:

$$\dot{f}_y(1\,,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1\,,1) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}.\,ln\left(1+\frac{h}{2}\right)$$

Por propiedades de los logaritmos: $a\,.\ln(b) = ln(b)^a$

$$\dot{f}_y(1\,,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1\,,1) = \lim_{h\to 0} ln\left(1+\,\frac{h}{2}\right)^{1/h}$$

Sabiendo que: $\lim_{f(x)\to 0}(1+f(x))^{1/f(x)} = e \quad para\ indeterminaciones\ del\ tipo\ 1^{\infty}$

Entonces, elevando todo a las $2/2$ y acomodando convenientemente, tenemos:

$$\dot{f}_y(1\,,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1\,,1) = \lim_{h\to 0} ln\left[\left(1+\frac{h}{2}\right)^{\frac{2}{h}}\right]^{1/2}$$

$$\dot{f}_y(1\,,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1\,,1) = \ln\left(\lim_{h\to 0}\left[\left(1+\frac{h}{2}\right)\right]^{\frac{2}{h}}\right)^{1/2}$$

$$\dot{f}_y(1\,,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1\,,1) = \ln(e)^{1/2}$$

$$\dot{f}_y(1\,,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1\,,1) = \frac{1}{2}\ln(\mathrm{e})$$

$$\boldsymbol{\dot{f}_y(1\,,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1\,,1) = \frac{1}{2}}$$

Por lo tanto las derivadas parciales existen y valen $1/2$ para ambos casos.