RESOLUCIÓN DE EJERCICIO nro. 6 y 7 de MÓDULO 5
De EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA - SEGUNDA CLASE

Resuelto por la profesora Julieta Mateucci

6) Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{2x2}$ tal que: $T((x;y)) = \begin{pmatrix} x & x+y \\ x-y & y \end{pmatrix}$

Clasificar la transformación lineal.

Resolución:

Buscamos núcleo e imagen de la transformación

$$Nu(T) = \left\{(x;y) / \begin{pmatrix} x & x+y \\ x-y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x+y = 0 \\ x-y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \boxed{\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}} \end{cases}$$

$Nu(T) = \{(0;0)\}$ y tiene dimensión 0 y es monomorfismo

Además:

$$\begin{pmatrix} x & x+y \\ x-y & y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo que $Im(T) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ que por ser dos y no ser múltiplos entre ellas, es un conjunto LI y forma una base del conjunto imagen, que tiene dimensión 2 y no es epimorfismo.

Como la transformación es monomorfismo pero no epimorfismo, no es isomorfismo.

Verificamos el teorema de la dimensión:

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{R}^2) &= \dim(Nu) + \dim(Im) \\ 2 &= 0 + 2 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

---

7) Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que: $T(v_1) = (1;1)$,$T(v_2) = w_2$, $T(v_3) = w_3$

Indicar dos vectores $w_2, w_3 \in \mathbb{R}^2$ tal que la transformación lineal:

a) Sea un epimorfismo.
b) No sea un epimorfismo.

Para cada uno de los casos anteriores, ¿puede T ser monomorfismo?, ¿puede T ser isomorfismo? Justificar. Dar un ejemplo de una transformación $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que sea isomorfismo. Justificar.

Resolución:

a) Para que sea epimorfismo la dimensión de la imagen tiene que coincidir con la dimensión del espacio de llegada, que en este caso es $\mathbb{R}^2$ y tiene dimensión 2. Además, sabemos que la imagen está generada por:

$$Im(T) = \langle (1;1), w_2, w_3 \rangle$$

Por lo que ese conjunto tiene que tener dimensión 2, es decir que por lo menos uno de los dos vectores debe ser LI con el $(1;1)$, por ejemplo: $w_2 = (0;1)$ y $w_3 = (0;0)$. En este caso, no puede ser monomorfismo por el teorema de la dimensión:

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{R}^3) &= \dim(Nu) + \dim(Im) \\ 3 &= \dim(Nu) + 2 \\ 1 &= \dim(Nu) \end{aligned}$$

En este caso, si T es epimorfismo nunca puede ser Monomorfismo ya que la dimensión del núcleo nunca es cero. Como nunca puede ser monomorfismo, nunca puede ser isomorfismo

b) Para que no sea epimorfismo la dimensión de la imagen no tiene que coincidir con la dimensión del espacio de llegada, que en este caso es $\mathbb{R}^2$ y tiene dimensión 2. Además, sabemos que la imagen esta generada por:

$$Im(T) = \langle (1;1), w_2, w_3 \rangle$$

Por lo que ese conjunto no tiene que tener dimensión 2, es decir que los dos vectores deben ser LD con el $(1;1)$, por ejemplo: $w_2 = (1;1)$ y $w_3 = (0;0)$. En este caso, no puede ser monomorfismo por el teorema de la dimensión:

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{R}^3) &= \dim(Nu) + \dim(Im) \\ 3 &= \dim(Nu) + 1 \\ 2 &= \dim(Nu) \end{aligned}$$

En este caso, si T es epimorfismo nunca puede ser Monomorfismo ya que la dimensión del núcleo nunca es cero. Como nunca puede ser monomorfismo, nunca puede ser isomorfismo.

Ejemplo de isomorfismo de $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (x,y)$

$$Im(F) \to (x,y) = x(1{,}0) + y(0{,}1)$$

$$Im(F) = \langle (1{,}0), (0{,}1) \rangle$$

Que por ser linealmente independientes (no son múltiplos entre sí) el conjunto, también es base de la imagen de F y tiene dimensión 2. Además, por teorema de la dimensión:

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{R}^2) &= \dim(Nu) + \dim(Im) \\ 2 &= \dim(Nu) + 2 \\ 0 &= \dim(Nu) \end{aligned}$$

Por lo que, además es monomorfismo y por lo tanto es isomorfismo.