Resolución de integrales de la forma $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$ (Ejercicio **13** página 81 de la Guía de Trabajos Prácticos)

Este tipo de integrales se resuelven teniendo en cuenta las siguientes primitivas que encontramos en la tabla:

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctgx + C \qquad \int \frac{1}{1-x^2}dx = ArgThx + C$$

Los casos más simples se presentan cuando b = 0. Resolvámoslos por sustitución:

$$\int \frac{1}{9+x^2}dx = \int \frac{1}{9\left(1+\frac{x^2}{9}\right)}dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+z^2}3dz = \frac{1}{3}arctgz + C = \frac{1}{3}arctg\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

Factor común 9

Propiedad de integrales y expresamos $x^2/9$ como $(x/3)^2$

Hacemos la sustitución
z = x/3
dz = dx/3
3dz = dx

De la misma forma (siguiendo los mismos pasos):

$$\int \frac{1}{25+9x^2}dx = \int \frac{1}{25\left(1+\frac{9x^2}{25}\right)}dx = \frac{1}{25}\int \frac{1}{1+\left(\frac{3x}{5}\right)^2}dx = \frac{1}{25}\int \frac{1}{1+z^2}\frac{5}{3}dz =$$

$$= \frac{1}{15}\int \frac{1}{1+z^2}dz = \frac{1}{15}arctgz + C = \frac{1}{15}arctg\left(\frac{3x}{5}\right) + C$$

Hacemos la sustitución
z = (3x)/5
dz = (3/5) dx
(5/3) dz = dx

En esta próxima integral debemos hacer los siguientes pasos algebraicos antes de la sustitución:

$$\int \frac{1}{e^{x}+e^{-x}}\,dx = \int \frac{1}{e^{-x}(e^{2x}+1)}dx = \int \frac{e^{x}}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{e^{x}}{1+(e^{x})^{2}}dx = \int \frac{dz}{1+z^{2}} =$$
$$= arctg z + C = arctg(e^{x}) + C$$

Sustitución:
$z = e^{x}$
$dz = e^{x}\,dx$

A la próxima integral la debemos dividir en dos integrales (aplicando propiedad distributiva y luego propiedad de primitivas), cada una de las cuales las resolveremos aplicando el método de sustitución:

$$\int \frac{x+4}{4x^{2}-9}\,dx = \int \frac{x}{4x^{2}-9}\,dx + \int \frac{4}{4x^{2}-9}\,dx$$

Las resolvemos por separado y luego armamos todo el resultado:

$$\int \frac{x}{4x^{2}-9}\,dx = \int \frac{1}{z}\frac{dz}{8} = \frac{1}{8}\ln|z| + C = \frac{1}{8}\ln\left|4x^{2}-9\right| + C$$

Sustitución:
$z = 4\,x^{2}-9$
$dz = 8x\,dx$
$dz/8 = x\,dx$

$$\int \frac{4}{4x^{2}-9}\,dx = \int \frac{4}{-9\left(1-\frac{4x^{2}}{9}\right)}\,dx = -\frac{4}{9}\int \frac{1}{1-\left(\frac{2x}{3}\right)^{2}}dx = -\frac{4}{9}\int \frac{1}{1-z^{2}}\frac{3}{2}dz =$$
$$= -\frac{2}{3}ArgTh(z) + C = -\frac{2}{3}ArgTh\left(\frac{2x}{3}\right) + C$$

Sustitución:
$z = (2x)/3$
$dz = (2/3)\,dx$
$(3/2)\,dz = dx$

Luego la integral original:

$$\int \frac{x+4}{4x^2-9}\,dx = \int \frac{x}{4x^2-9}\,dx + \int \frac{4}{4x^2-9}\,dx = \frac{1}{8}\ln\left|4x^2-9\right| - \frac{2}{3}ArgTh\left(\frac{2x}{3}\right) + C$$

Observación: notemos que las dos integrales fueron resueltas por sustituciones, ambas diferentes. ¿Cómo nos damos cuenta cuál aplicar? Observemos que en la primera integral el numerador tiene “x” que nos sirve luego para lograr el diferencial de la nueva variable, en cambio en la segunda integral no tenemos “x”, con lo cual la llevamos a Argumento Tangente Hiperbólica o Arco Tangente (según cómo sean los signos).

Para llevar las dos integrales que nos quedan de este ejercicio a una de las dos formas anteriores (arctg o ArgTh) necesitamos escribir el polinomio de segundo grado $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ en forma canónica $y = f(x) = a(x-h)^2 + k$, donde h es la abscisa del vértice de la parábola (y por lo tanto $h = -\frac{b}{2a}$) y k es la ordenada de dicho vértice, es decir k = f(h). Resolvamos $\int \frac{1}{x^2+2x+10}\,dx$

Entonces primero expresamos el polinomio del denominador en forma canónica. En este caso: $h = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$ $\quad k = f(h) = (-1)^2 + 2(-1) + 10 = 9$

Luego $x^2 + 2x + 10 = (x+1)^2 + 9$

$ax^2 + bx + c = a(x-h)^2 + k$
Para nosotros: a = 1; b = 2; c = 10
h = -1; k = 9

$$\int \frac{1}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+9}dx = \int \frac{1}{9+(x+1)^2}dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+\frac{(x+1)^2}{9}}dx =$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{3}\right)^2}dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{1+z^2}3dz = \frac{1}{3}arctg(z) + C = \frac{1}{3}arctg\left(\frac{x+1}{3}\right) + C$$

Sustitución:
z = (x+1)/3
dz = (1/3) dx
3 dz = dx

Ahora siguiendo pasos similares a los que hicimos en la integral anterior resolvemos $\int \frac{1}{8x - x^2 - 7}\,dx$

En la misma a = -1; b = 8 y c = -7; con lo que h = 4 y k = 9. Por lo tanto:

$$-x^2 + 8x - 7 = -(x-4)^2 + 9 = 9 - (x-4)^2$$

En la integral:

$$\int \frac{1}{8x - x^2 - 7}\,dx = \int \frac{1}{9-(x-4)^2}dx = \int \frac{1}{9\left(1 - \frac{(x-4)^2}{9}\right)}dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{1-\left(\frac{x-4}{3}\right)^2}dx =$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{1-z^2}3dz = \frac{1}{3}ArgThz + C = \frac{1}{3}ArgTh\left(\frac{x-4}{3}\right) + C$$

Sustitución:
z = (x-4)/3
dz = (1/3) dx
3dz = dx

Ejercicio 14 (página 82)

Para resolver las integrales de la forma $\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}dx$ procedemos de una manera similar a lo efectuado en el ejercicio 13, pero teniendo en cuenta las siguientes primitivas de la tabla:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = arcsenx + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = ArgChx + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = ArgShx + C$$

Entonces:

$$a) \int \frac{1}{\sqrt{25 - 16x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{25\left(1 - \frac{16x^2}{25}\right)}}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{4x}{5}\right)^2}}dx =$$

Sustitución:
z = (4x)/5
dz = (4/5)dx
(5/4)dz = dx

$$=\frac{1}{5}\int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\frac{5}{4}dz=\frac{1}{4}arcsenz+C=\frac{1}{4}arcsen\left(\frac{4x}{5}\right)+C$$

$$b)\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}}dx=$$

Llevemos el polinomio de grado dos a su forma canónica teniendo en cuenta:

a = -1; b = 4; c =-3 entonces h = 2; k = 1

Luego $-x^2+4x-3=-(x-2)^2+1=1-(x-2)^2$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{1-(x-2)^2}}dx=\int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}dz=arcsenz+C=arcsen(x-2)+C$$

Sustitución:
z = x-2
dz = dx

En las otras dos se siguen los mismos pasos explicados hasta el momento.

Integrales de la forma $\int sen^p x\cos^q x\,dx$ con p y q naturales

<u>Primer caso</u>: p es impar o q es impar

En este caso se separa un factor de la función trigonométrica que está elevada a exponente impar (si las dos lo están se elige una). Este factor nos servirá luego para hacer una sustitución. Por ejemplo el ejercicio 19 a) (página 83):

$a)\int sen^3 x\,dx=\int sen^2 x\,senx\,dx$ luego de separar el factor, la función trigonométrica que nos queda con exponente par la expresamos en función de la otra (es decir, si nos quedó seno en función de coseno y si nos quedó coseno en función de seno, teniendo en cuenta la identidad: $sen^2 x+\cos^2 x=1$) Entonces:

$$a)\int sen^3x\,dx=\int sen^2x\;senx\,dx=\int(1-\cos^2x)senx\,dx=\int(1-z^2)(-dz)=$$

$$=\int(z^2-1)dz=\frac{z^3}{3}-z+C=\frac{\cos^3x}{3}-\cos x+C$$

Sustitución:
z = cosx
dz = -senx dx
-dz = senx dx

<u>Segundo caso</u>: p es par y q es par

En este caso usamos las siguientes identidades:

$$\cos^2x=\frac{1+\cos(2x)}{2}\qquad sen^2x=\frac{1-\cos(2x)}{2}$$

Por ejemplo:

$$b)\int\cos^4x\,dx=\int(\cos^2x)^2dx=\int\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2dx=\int\frac{1+2\cos(2x)+\cos^2(2x)}{4}dx=$$
$$\int\frac{1}{4}dx+\frac{1}{2}\int\cos(2x)dx+\frac{1}{4}\int\cos^2(2x)dx$$

Resolvamos estas integrales por separado y luego armamos todo el resultado. La primera integral es inmediata:

$$\int\frac{1}{4}dx=\frac{1}{4}x+C$$

La segunda integral la resolvemos por sustitución tomando z = 2x, con lo que dz/2 = dx:

$$\frac{1}{2}\int\cos(2x)dx=\frac{1}{2}\int\cos z\;\;\frac{dz}{2}=\frac{1}{4}senz+C=\frac{1}{4}sen(2x)+C$$

En la tercera integral tenemos que volver a utilizar las identidades dadas:

$$\frac{1}{4}\int \cos^2(2x)dx = \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos(4x)}{2} = \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos(4x)dx = \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\int \cos z\,\frac{dz}{4} =$$

$$= \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}sen(4x) + C$$

Luego el resultado final es:

$$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}sen(2x) + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}sen(4x) + C = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}sen(2x) + \frac{1}{32}sen(4x) + C$$