



Álgebra y Geometría analítica II

Primer cuatrimestre de 2020

Generadores de un Espacio o Subespacio Vectorial

¿Qué son los Generadores de un Subespacio y para qué me sirven?

Esta explicación servirá tanto para Generadores de un Subespacio como para Generadores de un Espacio Vectorial

Generadores de un Espacio o Subespacio Vectorial

Ejemplo:

Sea $S = \{(x, y, z) \in R^3 / x - 2y + z = 0\}$ subespacio de R^3

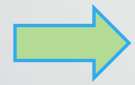
Preguntas:



¿Qué representa S geométricamente?



Un plano que pasa por el origen



¿Cuántos vectores contiene S ?



Infinitos



¿Cómo haría para poder escribir todos? ¿Podré dar algún o algunos representantes de los infinitos elementos que me permitan a partir de ellos, obtener a todos los elementos?



GENERADORES

Generadores de un Espacio o Subespacio Vectorial

GENERADORES



Son vectores que pertenecen al subespacio, y que a partir de ellos, puedo obtener cualquier vector del Subespacio



A CUALQUIER VECTOR DEL SUBESPACIO, LO VOY A PODER ESCRIBIR (U OBTENER) COMO UNA COMBINACIÓN LINEAL DE SUS GENERADORES

Generadores de un Espacio o Subespacio Vectorial

Ejemplo 1:

Sea $S = \{(x, y, z) \in R^3 / x - 2y + z = 0\}$ subespacio de R^3

a) Dar 4 elementos de S

$$\vec{v} = (1; 0; -1)$$

$$\vec{u} = (0; 1; 2)$$

$$\vec{w} = (0; 0; 0)$$

$$\vec{t} = (1; 1; 1)$$

b) Los vectores dados, generan todo el subespacio S ?

¿A cualquier vector de S, lo podré escribir como combinación lineal de estos vectores?

Generadores de un Espacio o Subespacio Vectorial

$$S = \{(x, y, z) \in R^3 / x - 2y + z = 0\}$$

$$\vec{v} = (1; 0; -1)$$

$$\vec{u} = (0; 1; 2)$$

$$\vec{w} = (0; 0; 0)$$

$$\vec{t} = (1; 1; 1)$$

¿A cualquier vector de S, lo podré escribir como combinación lineal de estos vectores?

Vector genérico de S: $(x, y, z) \in R^3 / x = 2y - z \rightarrow \vec{x} = (2y - z; y; z)$

$$(2y - z; y; z) = \alpha_1 \cdot (1; 0; -1) + \alpha_2 \cdot (0; 1; 2) + \alpha_3 \cdot (0; 0; 0) + \alpha_4 \cdot (1; 1; 1)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_4 = 2y - z \\ \alpha_2 + \alpha_4 = y \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 = z \end{cases}$$

Generadores de un Espacio o Subespacio Vectorial

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_4 = 2y - z \\ \alpha_2 + \alpha_4 = y \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 = z \end{cases}$$

Método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2y - z \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y \\ -1 & 2 & 0 & 1 & z \end{array} \right) \xrightarrow{F3+F1 \rightarrow F3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2y - z \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2y \end{array} \right) \xrightarrow{F3-2F2 \rightarrow F3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2y - z \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$rg A = 2, rg M = 2 \text{ y } n = 4$$

Sistema Compatible Indeterminado. Infinitas soluciones para los escalares de la combinación lineal.

¿A cualquier vector de S , lo puedo escribir como combinación lineal de estos vectores?

Si!

Los vectores dados generan todo el subespacio S

Generadores de un Espacio o Subespacio Vectorial

Ejemplo 2:

Sea $S = \{(x, y, z) \in R^3 / x - 2y + z = 0\}$ subespacio de R^3

a) Dar un conjunto generador de S

Vector genérico de S : $(x, y, z) \in R^3 / x = 2y - z \rightarrow \vec{x} = (2y - z; y; z)$

$$\vec{x} \in S \Rightarrow \vec{x} = (2y - z; y; z)$$

$$\vec{x} = (2y; y; 0) + (-z; 0; z)$$

$$\vec{x} = y \cdot (2; 1; 0) + z \cdot (-1; 0; 1)$$

Separo en dos vectores, para separar las variables

Extraigo los escalares para armar la combinación lineal

A cualquier vector de S , lo puedo escribir como combinación lineal de estos vectores $(2; 1; 0)$ y $(-1; 0; 1)$

Generadores de un Espacio o Subespacio Vectorial

A cualquier vector de S , lo puedo escribir como combinación lineal de estos vectores $(2; 1; 0)$ y $(-1; 0; 1)$



Con los vectores $(2; 1; 0)$ y $(-1; 0; 1)$ me puedo generar todos los vectores de S



$$S = \text{gen} \{(2; 1; 0), (-1; 0; 1)\}$$

DEFINICIÓN: Generadores de un Subespacio

Los generadores de un subespacio son vectores que pertenecen a él, y que a partir de combinaciones lineales entre ellos, puedo obtener cada uno de los infinitos elementos del mismo