Simulacro segunda evaluación parcial. Análisis Matemático II (1033) 01/07/21

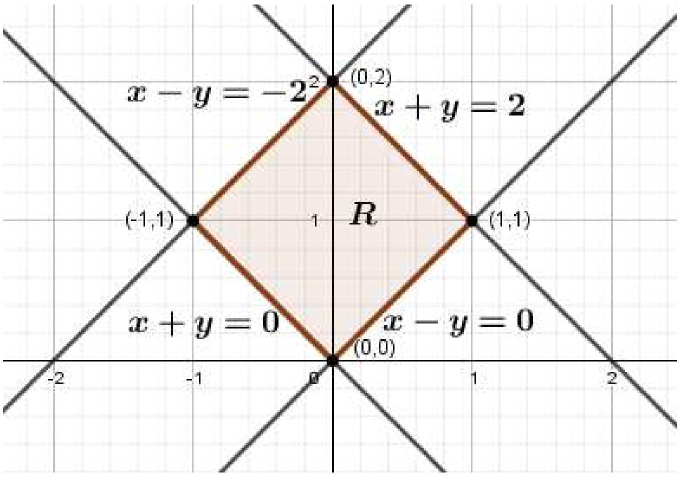
…………RESOLUCIÓN………

1. Resolver la siguiente integral doble, $I = \iint_R (x^2 - y^2)\, dx\, dy$,siendo R, el paralelogramo de vértices $A = (0,0)$; $B = (1,1)$; $C = (0,2)$; $D = (-1,1)$.

Resolución:

Para este tipo de recintos parece adecuado usar las transformaciones afines, el integrando puede expresarse como,

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$
$$u = x + y$$
$$v = x - y$$
$$0 \le u \le 2$$
$$-2 \le v \le 0$$
$$|J| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} = \left\|\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}\right\|^{-1} =$$
$$= |-2|^{-1} = \frac{1}{2}$$

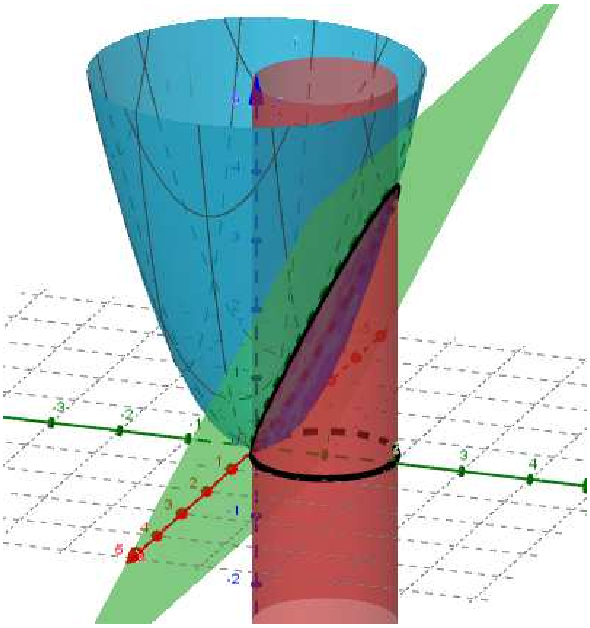


$$I = \iint_R (x^2 - y^2)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_R (x+y)(x-y)\, dx\, dy = \int_{u=0}^{2} \int_{v=-2}^{0} u\, v \frac{1}{2}\, dv\, du = \frac{1}{2} \int_{u=0}^{2} u\, du \int_{v=-2}^{0} v\, dv =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{u^2}{2}\right)\Bigg|_{u=0}^{2} \left(\frac{v^2}{2}\right)\Bigg|_{v=-2}^{0} = \frac{1}{2}\ 2\ (-2) = -2$$

2. Calcular el volumen del cuerpo delimitado por las superficies del paraboloide $S_1: z = x^2 + y^2$, y el plano $S_2: z = 2y$.



Resolución:

Techo: $S_2: z = 2y$

Piso: $S_1: z = x^2 + y^2$

Cálculo de la curva intersección entre S_1 y S_2

$$x^2 + y^2 = 2y$$

$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 0$$

$$C: x^2 + (y-1)^2 = 1$$

Recinto de integración

$$R:\ x^2 + (y-1)^2 \leq 1$$

$$Vol = \iint_{x^2+(y-1)^2\leq 1} [2y - (x^2 + y^2)]\, dx\, dy$$

Cambio a coordenadas polares para un recinto circular desplazado del origen de coordenadas

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = 1 + r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$$

$$y - 1 = r\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$|J| = r$$

$$0 \leq r \leq 1$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$2y - (x^2 + y^2) = -(x^2 + y^2 - 2y) = -(x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1) =$$

$$-(x^2 + (y-1)^2 - 1) = -(r^2 - 1) = 1 - r^2$$

$$Vol = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} (1 - r^2)\, r\, dr\, d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} (r - r^3)\, dr\, d\theta =$$

$$= 2\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{1} = \frac{\pi}{2}$$

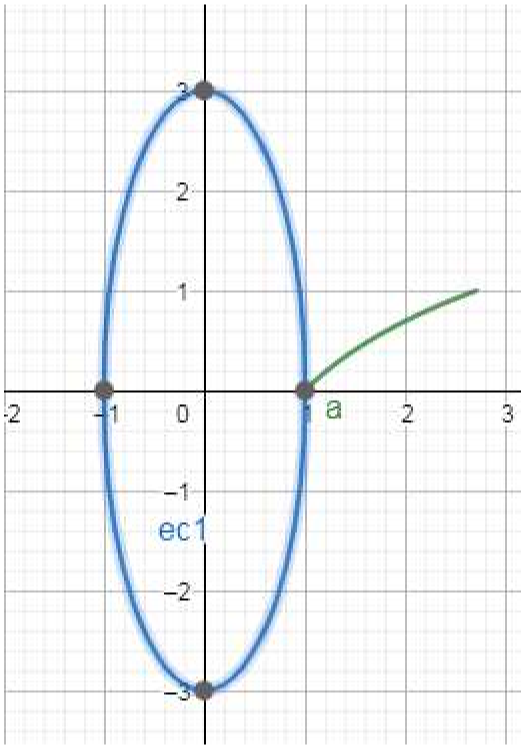
3. Dado el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (3e^{x\,y} + 3xye^{x\,y} - 2x, 3x^2e^{x\,y} + e^y)$, calcular la integral de línea para las curvas:

a). C_1: $y = \ln(x)$ con $1 \le x \le e$

b). C_2: $9\,x^2 + y^2 = 9$, recorrida en sentido positivo.

Resolución:

A primera vista pareciera que la integral de línea sería algo compleja (difícil), veamos si $\vec{F}$es un campo de gradientes.$Dom\ \vec{F} = \mathbb{R}^2$,



$P(x,y) = 3e^{x\,y} + 3xye^{x\,y} - 2x \quad P_y(x,y) = 3xe^{xy} + 3xe^{xy} + 3x^2ye^{xy}$

$Q(x,y) = 3x^2e^{x\,y} + e^y \quad Q_x(x,y) = 6xe^{xy} + 3x^2ye^{xy}$

$P_y(x,y) = Q_x(x,y)$ $\vec{F}$ es un campo de gradientes y como $Dom\ \vec{F} = \mathbb{R}^2$,$\vec{F}$ es un campo conservativo en todo el plano.

Obtención de la función potencial $g(x,y)$ tal que $\nabla g(x,y) = \vec{F}$

$$g(x,y) = \int Q(x,y)\,dy + \alpha(x) = \int (3x^2e^{x\,y} + e^y)\,dy + \alpha(x) = 3xe^{xy} + e^y + \alpha(x)$$

Para hallar $\alpha(x)$, se deriva g respecto de "x" , se compara ésta con $P(x,y)$, obteniéndose una expresión sólo de x para α', a continuación, se la integra para obtener$\alpha(x)$ y así completar g

$$g_x(x,y) = 3e^{xy} + 3xye^{xy} + \alpha'(x) = P(x,y) = 3e^{x\,y} + 3xye^{x\,y} - 2x$$

$$\alpha'(x) = -2x \to \alpha(x) = -x^2$$

Finalmente

$$g(x,y) = 3xe^{xy} + e^{y} - x^{2}$$

Cálculo de las integrales de líneas pedidas

Sobre $\mathcal{C}_1$: $y = \ln(x)$ con $1 \leq x \leq e$

$$\int_{\mathcal{C}_1} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \left(3xe^{xy} + e^{y} - x^{2}\right)\Big|_{(1,0)}^{(e,1)} = 3e^{e+1} - e^{2} + e - 3$$

Sobre $\mathcal{C}_2$: $9\,x^2 + y^2 = 9$, recorrida en sentido positivo

Como $\mathcal{C}_2$ es una curva cerrada y $\vec{F}$ un campo conservativo, la integral de línea de $\vec{F}$ sobre cualquier curva cerrada es cero.

4. Calcular la integral de línea para el campo vectorial $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x^2 y}{9}, -\frac{y^2 x}{4}\right)$ y la curva $\mathcal{C}$la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, recorrida en sentido horario.

Resolución:

Siendo $\vec{F} \in C^1$ y $\mathcal{C}$una curva cerrada, es posible usar el teorema de Green con la variante de multiplicar la integral doble por (-1) ya que la curvaestá orientada en sentido negativo para dicho teorema. Esto es,

$$I = \int_{\mathcal{C}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \; = -\iint_{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leq 1} \left(Q_x(x,y) - P_y(x,y)\right)\,dx\,dy$$

$$P(x,y) = \frac{x^2 y}{9} \rightarrow \;\; P_y(x,y) = \frac{x^2}{9}$$

$$Q(x,y) = -\frac{y^2 x}{4} \rightarrow \;\; Q_x(x,y) = -\frac{y^2}{4}$$

$$I = -\iint_{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leq 1} \left(-\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9}\right)\,dx\,dy = \iint_{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\leq 1} \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}\right)\,dx\,dy$$

Se usarán las transformaciones polares para recintos elípticos

$$\begin{cases} x = 3\,r\cos(\theta) \\ y = 2\,r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$$

$$|J| = 6\,r$$

$$0 \leq r \leq 1$$

$$0 \leq \theta \leq 2\,\pi$$

$$I = \int_{\theta=0}^{2\,\pi} \int_{r=0}^{1} r^2\, 6r\,dr\,d\theta \; = 12\,\pi \left(\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_{r=0}^{1} = 3\,\pi$$

5. Aplicar justificadamente el teorema de la divergencia para calcular la integral de superficie del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (x + y^2, x^2 - y, z\ln(x^2 + y^2))$$

a través de la superficie del sólido

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ y \geq |x| \ \wedge \ 0 \leq z \leq 2\}$$

orientada exteriormente.

Resolución:
Es válido usar el teorema de la divergencia directamente (sin modificaciones) ya que el campo $\vec{F} \in C^1$, la superficie es cerrada (se trata de la frontera de un sólido) y se pide orientada exteriormente.

$$div\ \vec{F}(x,y,z) = \nabla \cdot \vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial(x + y^2)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2 - y)}{\partial y} + \frac{\partial(z\ln(x^2 + y^2))}{\partial z} =$$

$$div\ \vec{F}(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2)$$

Recinto Ω en coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

$$|J| = r$$

$$1 \leq r \leq 2$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\,\pi}{4}$$

$$0 \leq z \leq 2$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\iiint\limits_{\Omega} ln(x^2 + y^2)\ dx\ dy\ dz = \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\,\pi}{4}} \int_{r=1}^{2} \int_{z=0}^{2} \ln(r^2)\ r\ dz\ dr\ d\theta =$$

$$\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\,\pi}{4}} d\theta \int_{z=0}^{2} dz \int_{r=1}^{2} \ln(r^2)\ r\ \ dr =$$

$$\frac{\pi}{2}\ 2 \int_{r=1}^{2} \ln(r^2)\ r\ \ dr =$$

$$\frac{\pi}{2}\ 2 \int_{r=1}^{2} \ln(t)\ \ \frac{dt}{2} =$$

$$\frac{\pi}{2} \int_{r=1}^{2} \ln(t)\ \ \frac{dt}{} =$$

$$\frac{\pi}{2}\ \ [t\ln(t) - t\,] =$$

$$\frac{\pi}{2} \ \ [r^2 \ln(r^2) - r^2 \ ] =$$

$$\frac{\pi}{2} \ \ [\ (4 \ln(4) - 4) - (1 \ln(1) - 1)] =$$

$$\frac{\pi}{2} \ \ [\ (4 \ln(4) - 4) - (\ -1)] =$$

$$\frac{\pi}{2} \ \ [\ 4 \ln(4) \ - 3] =$$

$$4 \ln(4) \frac{\pi}{2} \ \ - 3 \frac{\pi}{2} \ \ =$$

$$2 \ln(4) \pi \ \ - \ \frac{3}{2} \pi =$$