Álgebra y Geometría analítica II

Primer cuatrimestre de 2020

<u>*DEFINICIÓN*</u>:

Sea E un espacio vectorial. Y sea $\langle\ ;\ \rangle$ una función tal que $\langle\ ;\ \rangle: E\text{x}E \rightarrow R$ que opera entre dos vectores del espacio vectorial y devuelve un número real. Diremos que dicha función es un PRODUCTO INTERNO en E sí y sólo si:

1. $\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in E: \langle \vec{v}\ ;\ \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}\ ;\ \vec{v} \rangle$

2. $\forall\, \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \in E: \langle \vec{v}\ ;\ \vec{w} + \vec{u} \rangle = \langle \vec{v}\ ;\ \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}\ ;\ \vec{u} \rangle$

3. $\forall\, \vec{v}, \vec{w} \in E\ y\ \forall k \in R: \langle \vec{v}\ ; k.\vec{w} \rangle = k.\langle \vec{v}\ ;\ \vec{w} \rangle$

4. $\forall\, \vec{v} \in E : \langle \vec{v}\ ; \vec{v} \rangle \geq 0\ \ y\ \ \langle \vec{v}\ ; \vec{v} \rangle = 0 \iff \vec{v} = \overrightarrow{0_E}$

Sea E un espacio vectorial y $\langle\ ;\ \rangle$ un producto interno definido en E :
Diremos que el par $(E, \langle\ ;\ \rangle)$ es un espacio Euclídeo

ALGUNOS EJEMPLOS DE ESPACIOS EUCLÍDEOS:

Ejemplo 1: $(R^n; \langle\ ;\ \rangle)$ con $\langle (x_1, x_2, .., x_n)\ ; (y_1, y_2, .., y_n) \rangle = x_1 . y_1 + x_2 . y_2 + .. + x_n . y_n$

R^n con el producto interno usual (Producto escalar)

Ejemplo 2: $(R^2; \langle\ ;\ \rangle)$ con $\langle (x_1, x_2); (y_1, y_2) \rangle = x_1 . y_1 + x_2 . y_1 + x_1 . y_2 + 2x_2 . y_2$

Ejemplo 3: $(R^{mxn}; \langle\ ;\ \rangle)$ con $\langle A; B \rangle = tr[A . B^t]$

Ejemplo 4: $(P_2; \langle\ ;\ \rangle)$ con $\langle p; q \rangle = p(1) . q(1) + p(0) . q(0) + p(-1) . q(-1)$

Ejemplo 5: $(P_2; \langle\ ;\ \rangle)$ con $\langle a_2 x^2 + a_1 x + a_0\ ; b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \rangle = a_2 b_2 + a_1 b_1 + a_0 b_0$

Espacios con Producto interno (Esp. Euclídeos)

Recordemos..

R^n con el producto interno usual (Producto escalar)

- Ortogonalidad entre dos vectores $\Leftrightarrow \vec{v}.\vec{w} = 0$
- Norma o Longitud de un vector $\Leftrightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}.\vec{v}}$
- Ángulo entre dos vectores $\Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{\vec{v}\,.\,\vec{w}}{\|\vec{v}\|.\|\vec{w}\|}$

¿Para qué necesitamos la ortogonalidad en espacios que no sean R^n?

Más adelante hablaremos de algunas de sus ventajas

Espacios con Producto interno (Esp. Euclídeos)

ALGUNAS DEFINICIONES

$(E, \langle\ ;\ \rangle)$: Espacio euclídeo con un producto interno definido

- Ortogonalidad entre dos vectores $\Leftrightarrow \langle \vec{v}\ ; \vec{w} \rangle = 0$
- Norma o Longitud de un vector $\Leftrightarrow \|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}\ ; \vec{v} \rangle}$
- Ángulo entre dos vectores $\Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{\langle \vec{v}\ ; \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| . \|\vec{w}\|}$

ALGUNAS PROPIEDADES:

- Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $|\langle \vec{v}\ ; \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| . \|\vec{w}\|$
- Desigualdad Triangular: $\big|\|\vec{v}\| - \|\vec{w}\|\big| \leq \|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$

EJEMPLO 1:

Justificar por qué la siguiente función no es un Producto interno en R^2:

$$\langle (x_1, x_2); (y_1, y_2) \rangle = x_1 . y_1$$

Veremos que no se cumple una de las condiciones:

$$4. \forall \, \vec{v} \in E : \langle \vec{v} \, ; \vec{v} \rangle \geq 0 \; y \; \langle \vec{v} \, ; \vec{v} \rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{v} = \overrightarrow{0_E}$$

Sea $\vec{v} = (x_1, x_2) \in R^2$: $\langle \vec{v} \, ; \vec{v} \rangle = \langle (x_1, x_2); (x_1, x_2) \rangle = x_1 . x_1 = (x_1)^2 \geq 0$

$$\langle \vec{v} \, ; \vec{v} \rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; (x_1)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{v} = (0, x_2) \quad \forall \, x_2 \in R$$

No se cumple.. Para probarlo doy un contraejemplo:

$\exists \; \vec{v} = (0,3) \in R^2$; $\langle \vec{v} \, ; \vec{v} \rangle = 0$ y no se cumple que $\vec{v} = (0,0)$

<u>EJEMPLO 2</u>:

Sean $\vec{v} = (0,1)$ y $\vec{w} = (-1,2)$. Hallar lo pedido en cada espacio euclídeo:

1) $(R^2; \langle\ ;\ \rangle)$ con el producto usual. a) $\|\vec{v}\| = ?$ b) Ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w} = ?$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}\,;\vec{v}\rangle}$$

a) $\|\vec{v}\| = \sqrt{(0,1).(0,1)} = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ ⇒ $\boxed{\|\vec{v}\| = 1}$

$$\cos\alpha = \frac{\langle \vec{v}\,;\vec{w}\rangle}{\|\vec{v}\|.\|\vec{w}\|}$$

b) $\cos\alpha = \dfrac{\langle \vec{v}\,;\vec{w}\rangle}{\|\vec{v}\|.\|\vec{w}\|} = \dfrac{\langle (0,1)\,;(-1,2)\rangle}{\|(0,1)\|.\|;(-1,2)\|} = \dfrac{2}{1.\sqrt{5}}$ ⇒ $\boxed{\alpha \cong 27°}$

2) $(R^2; \langle\ ;\ \rangle)$ con $\langle (x_1, x_2); (y_1, y_2)\rangle = x_1.y_1 + x_2.y_1 + x_1.y_2 + 2x_2.y_2$

a) $\|\vec{v}\| = ?$ b) Ángulo entre $\vec{v}$ y $\vec{w} = ?$

a) $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle (0,1); (0,1)\rangle} = \sqrt{0.0 + 1.0 + 0.1 + 2.1.1} = \sqrt{2}$ ⇒ $\boxed{\|\vec{v}\| = \sqrt{2}}$

b) $\cos\alpha = \dfrac{\langle \vec{v}\,;\vec{w}\rangle}{\|\vec{v}\|.\|\vec{w}\|} = \dfrac{\langle (0,1)\,;(-1,2)\rangle}{\|(0,1)\|.\|(-1,2)\|} = \dfrac{3}{\sqrt{2}\,.\sqrt{5}}$ ⇒ $\boxed{\alpha \cong 18°}$

EJEMPLO 3:

Sean $p = x^2 + 1$ y $q = 1 + 2x - x^2$.

Hallar $\|p\|$ y decidir si ambos vectores son ortogonales, en cada espacio euclídeo:

1) $(P_2; \langle\ ;\ \rangle)$ con $\langle a_2x^2 + a_1x + a_0\ ;\ b_2x^2 + b_1x + b_0 \rangle = a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0$

$\|p\| = \sqrt{\langle x^2 + 1\ ; x^2 + 1 \rangle} = \sqrt{1.1 + 0.0 + 1.1} = \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\|p\| = \sqrt{2}}$ $\boxed{\|p\| = \sqrt{\langle p; p \rangle}}$

$\langle p; q \rangle = \langle x^2 + 1; 1 + 2x - x^2 \rangle = 1.(-1) + 0.2 + 1.1 = 0 \Rightarrow$ $\boxed{p\ y\ q \text{ son ortogonales}}$

2) $(P_2; \langle\ ;\ \rangle)$ con $\langle p; q \rangle = p(1).q(1) + p(0).q(0) + p(-1).q(-1)$

$\|p\| = \sqrt{\langle x^2 + 1\ ; x^2 + 1 \rangle} = \sqrt{2.2 + 1.1 + 2.2} = 3 \Rightarrow \boxed{\|p\| = 3}$

$\langle p; q \rangle = \langle x^2 + 1; 1 + 2x - x^2 \rangle = 2.2 + 1.1 + 2.(-2) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ $\boxed{p\ y\ q \text{ NO son ortogonales}}$

EJEMPLO 4:

Sea $(E;\langle\ ;\ \rangle)$ un espacio euclídeo con un cierto producto interno definido.
Sean $\vec{u}, \vec{v}\ y\ \vec{w}$ vectores de E tales que: $\langle 2\vec{u}+\vec{w}\,;-3\vec{v}+2\vec{u}\rangle = 4$ y se sabe que $\vec{v}\ y\ \vec{w}$ son ortogonales y $\langle \vec{u}\,;\ \vec{w}\rangle = \langle \vec{v}\,;\ \vec{u}\rangle = 8$. Hallar $\|\vec{u}\|$

$$\langle 2\vec{u}+\vec{w}\,;-3\vec{v}+2\vec{u}\rangle = 4$$

Aplicamos propiedad del Producto interno (Distrib. para la suma)

$$\langle 2\vec{u}\,;\ -3\vec{v}\rangle + \langle 2\vec{u}\,;2\vec{u}\rangle + \langle \vec{w}\,;\ -3\vec{v}\rangle + \langle \vec{w}\,;2\vec{u}\rangle = 4$$

Aplicamos propiedad del Producto interno (Extracción Escalar)

$$(-6)\langle \vec{u}\,;\vec{v}\rangle + 4\langle \vec{u}\,;\vec{u}\rangle - 3\langle \vec{w}\,;\vec{v}\rangle + 2\langle \vec{w}\,;\vec{u}\rangle = 4$$

Datos: $\vec{v}\ y\ \vec{w}$ son ortogonales y $\langle \vec{u}\,;\ \vec{w}\rangle = \langle \vec{v}\,;\ \vec{u}\rangle = 8$

$$(-6).8 + 4\langle \vec{u}\,;\vec{u}\rangle - 3.0 + 2.8 = 4$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}\,;\vec{u}\rangle}$$

$$4\langle \vec{u}\,;\vec{u}\rangle = 36 \Rightarrow \langle \vec{u}\,;\vec{u}\rangle = 9 \Rightarrow \|\vec{u}\|^2 = 9 \Rightarrow \boxed{\|\vec{u}\| = 3}$$