Álgebra y Geometría analítica II

Primer cuatrimestre de 2020

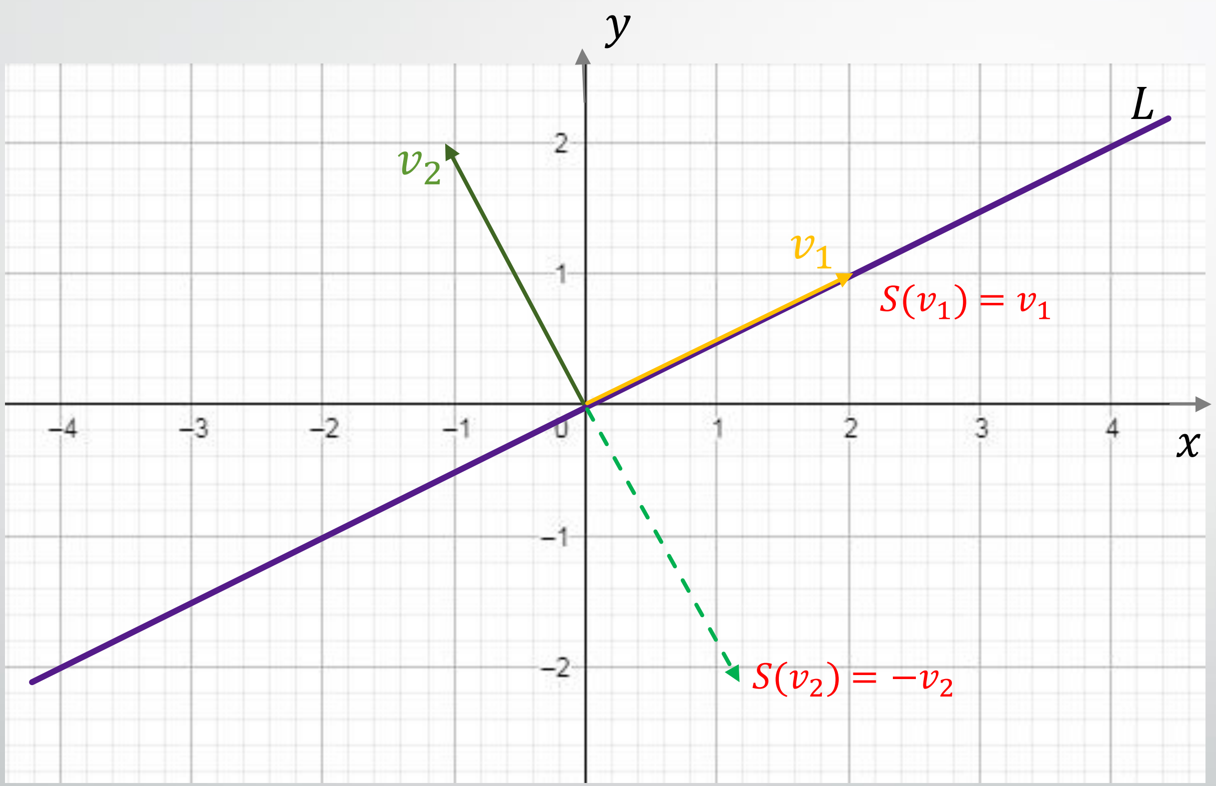
Ejemplos - Aplicaciones – TL Geométricas –Simetría y Proyección

Algunas Transformaciones Geométricas cumplen con ser TL

- Simetrías en R^2 y R^3 ✓
- Proyecciones en R^2 y R^3 ✓
- Rotaciones en R^2 y R^3

Ejemplos - Aplicaciones – TL Geométricas –Simetría y Proyección

SIMETRÍA EN R^2 → $S : R^2 \to R^2$ → Eje de simetría: la recta L



v_1: Cualquier vector director del eje de simetría

$S(v_1) = v_1$

v_2: Cualquier vector perpendicular al eje de simetría

$S(v_2) = -v_2$

Qué cambiaría si la transformación fuera una proyección?

La transformación queda definida sobre una base → $S(v_1) = v_1$
$S(v_2) = -v_2$

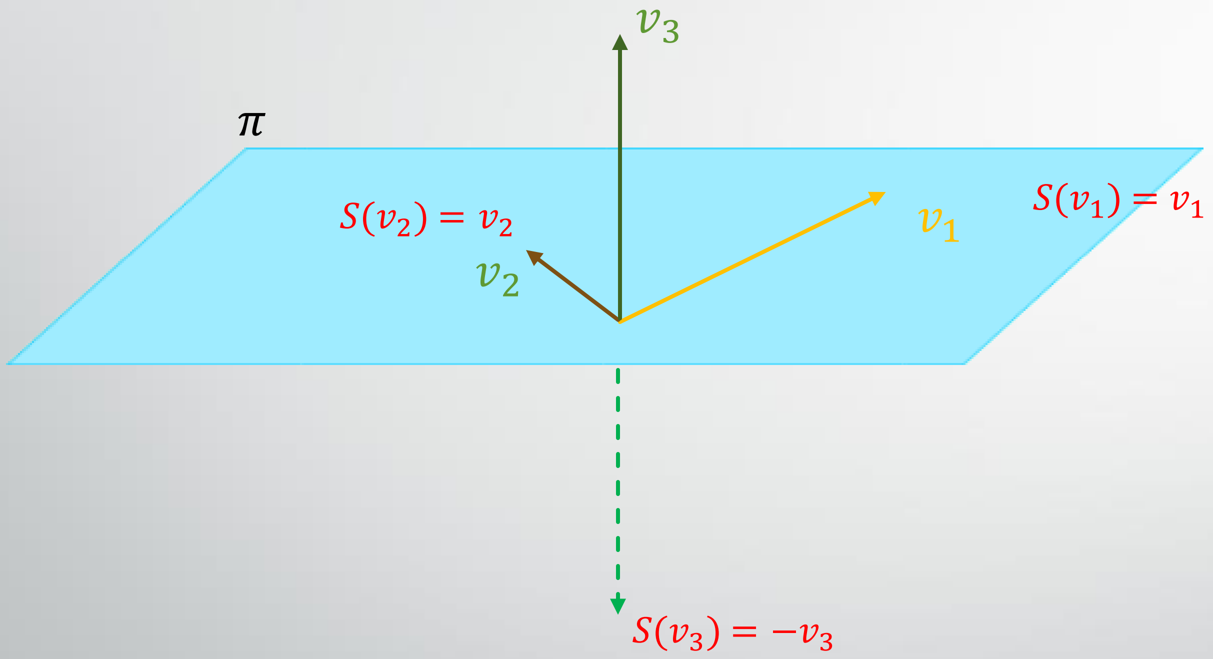
Ejemplos - Aplicaciones – TL Geométricas –Simetría y Proyección

SIMETRÍA EN R^3 → $S : R^3 \to R^3$ → Eje de simetría: Una recta L / Un plano π ✓

v_1 y v_2: Cualquiera dos vectores directores LI del eje de simetría

$S(v_1) = v_1$

$S(v_2) = v_2$



v_3: Cualquier vector perpendicular al eje de simetría (Por ej. Normal del plano)

$S(v_3) = -v_3$

La transformación queda definida sobre una base →

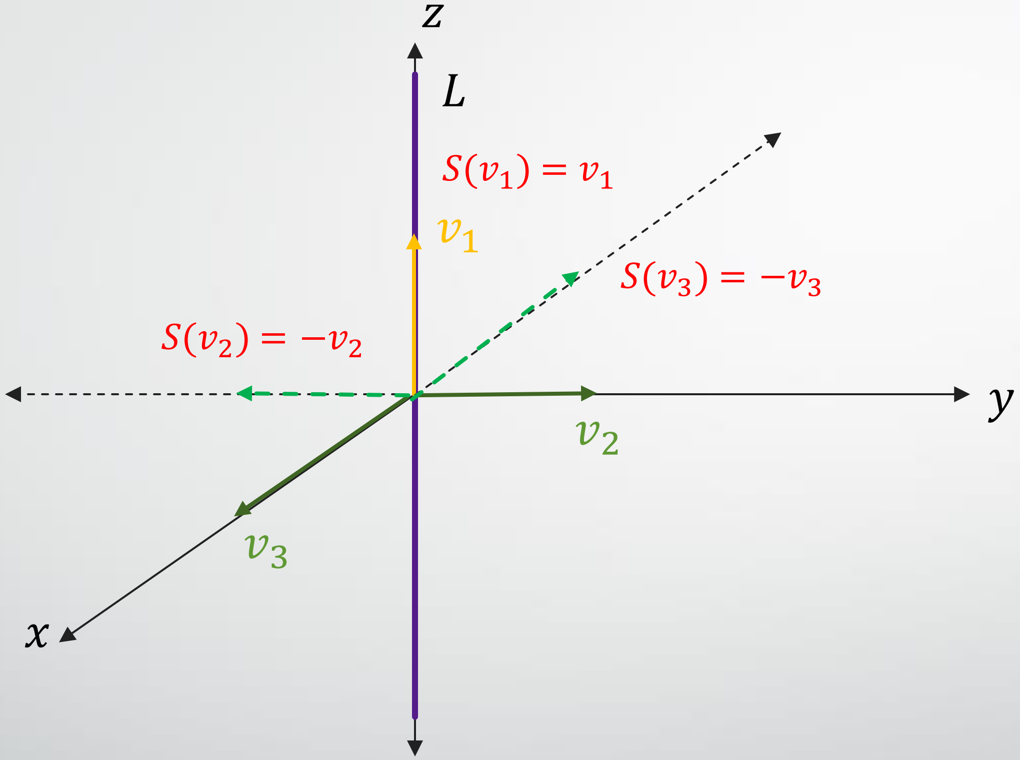
$$S(v_1) = v_1$$
$$S(v_2) = v_2$$
$$S(v_3) = -v_3$$

Qué cambiaría si la transformación fuera una proyección?

Ejemplos - Aplicaciones – TL Geométricas –Simetría y Proyección

SIMETRÍA EN R^3 → $S : R^3 \to R^3$ → Eje de simetría:

- Una recta L ✓
- Un plano π



v_1 : Cualquier vector director del eje de simetría

$$S(v_1) = v_1$$

v_2 y v_3: Cualquiera dos vectores LI perpendiculares al eje de simetría

$$S(v_2) = -v_2$$

$$S(v_3) = -v_3$$

La transformación queda definida sobre una base →

$$\begin{gathered} S(v_1) = v_1 \\ S(v_2) = -v_2 \\ S(v_3) = -v_3 \end{gathered}$$

Qué cambiaría si la transformación fuera una proyección?

EJEMPLO 1

Dar la matriz en base canónica de la simetría en R^2 respecto a la recta $L: 2x - y = 0$. Hallar $S(1,1)$

v_1 : Cualquier vector director del eje de simetría

$$\boxed{S(v_1) = v_1}$$

$$L: 2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x \Rightarrow L: (x; y) = (x; 2x) = x.(1; 2)$$

$$v_1 = (1; 2) \qquad v_2 = (2; -1)$$

v_2: Cualquier vector perpendicular al eje de simetría

$$\boxed{S(v_2) = -v_2}$$

La Simetría queda definida sobre una base

$$\begin{cases} S(1; 2) = (1; 2) \\ S(2; -1) = (-2; 1) \end{cases}$$

Ejemplos - Aplicaciones – TL Geométricas –Simetría y Proyección

La Simetría queda definida sobre una base

$$\begin{cases} S(1;2) = (1;2) \\ S(2;-1) = (-2;1) \end{cases}$$

$$B = \{(1;2);(2;-1)\} \Rightarrow M_{BE}S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} R^2 \arrow[r, "S"] & R^2 \\ B \arrow[dr, "M_{BE}S"] & B \\ E \arrow[u, bend left, "\text{1er paso}"] \arrow[r, "M_{EE}S"'] & E \end{tikzcd}$$

2do paso

$$M_{EE}S = M_{BE}S \,.\, C_{EB}$$

$$C_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

inversa

$$C_{EB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$M_{EE}S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M_{EE}S = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}}$$

EJEMPLO 1

Dar la matriz en base canónica de la simetría en R^2 respecto a la recta $L: 2x - y = 0$. Hallar $S(1,1)$

$$\boxed{M_{EE}S = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}}$$

$$M_{EE}S\,.\left[(1;1)\right]_E = \left[S(1;1)\right]_E$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{S(1,1) = \left(\frac{1}{5}\,;\frac{7}{5}\right)}$$

EJEMPLO 2

Dar la matriz en base canónica de la simetría en R^3 respecto al plano

$\pi: 2x - y + z = 0$. Hallar $S(1,1,1)$

$v_1\ y\ v_2$: Cualquiera dos vectores directores LI del eje de simetría

$\pi: 2x - y + z = 0 \Longrightarrow z = -2x + y$

$\boxed{S(v_1) = v_1}$

$\boxed{S(v_2) = v_2}$

$\pi: (x; y; z) = (x; y; -2x + y) = x(1; 0; -2) + y(0; 1; 1)$

v_3: Cualquier vector perpendicular al eje de simetría (Por ej. Normal del plano)

$v_1 = (1; 0; -2)\quad v_2 = (0; 1; 1)\qquad v_3 = (2; -1; 1)$

La Simetría queda definida sobre una base

$$\begin{cases} S(1; 0; -2) = (1; 0; -2) \\ S(0; 1; 1) = (0; 1; 1) \\ S(2; -1; 1) = (-2; 1; -1) \end{cases}$$

$\boxed{S(v_3) = -v_3}$

Ejemplos - Aplicaciones – TL Geométricas –Simetría y Proyección

La Simetría queda definida sobre una base

$$\begin{cases} S(1;0;-2) = (1;0;-2) \\ S(0;1;1) = (0;1;1) \\ S(2;-1;1) = (-2;1;-1) \end{cases}$$

$$B = \{(1;0;-2);(0;1;1);(2;-1;1)\} \Rightarrow M_{BE}S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

inversa

$$C_{EB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$M_{EE}S = M_{BE}S \,.\, C_{EB}$$

$$M_{EE}S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 2

Dar la matriz en base canónica de la simetría en R^3 respecto al plano

$\pi: 2x - y + z = 0$. Hallar $S(1,1,1)$

$$M_{EE}S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$M_{EE}S\,.[(1;1;1)]_E = [S(1;1;1)]_E$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{S(1,1,1) = \left(-\frac{1}{3}\,;\frac{5}{3}\,;\frac{1}{3}\right)}$$