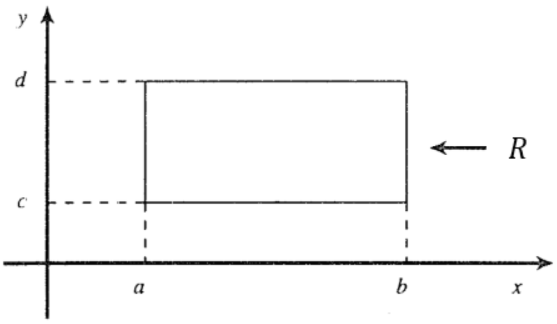
Integral doble de una función escalonada sobre un rectángulo

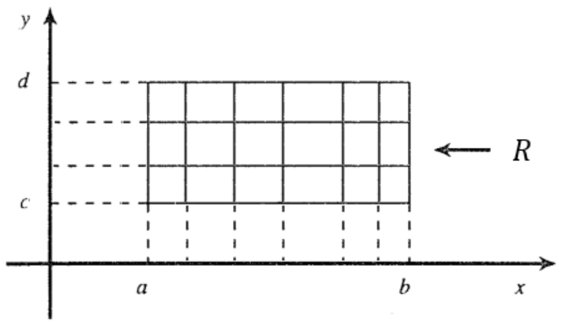
Sea el rectángulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\} = [a, b] \times [c, d]$ y las particiones P_1 y P_2 de $[a, b]$ y $[c, d]$, respectivamente

$$P_1 = \{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n\} \qquad P_2 = \{y_0, y_1, \cdots y_{m-1}, y_m\}$$

donde $x_0 = a, x_n = b, y_0 = c, y_m = d$. Se llama *partición del rectángulo* R al producto cartesiano $P = P_1 \times P_2$.

Dado que P_1 descompone a $[a, b]$ en n subintervalos y P_2 descompone a $[c, d]$ en m subintervalos, la partición $P = P_1 \times P_2$ descompone al rectángulo R en mn sub-rectángulos. Una partición P' de R se dice que es más fina que P si ocurre que $P \subseteq P'$, esto es, si se cumple que cada punto de P esa su vez un punto de P'.

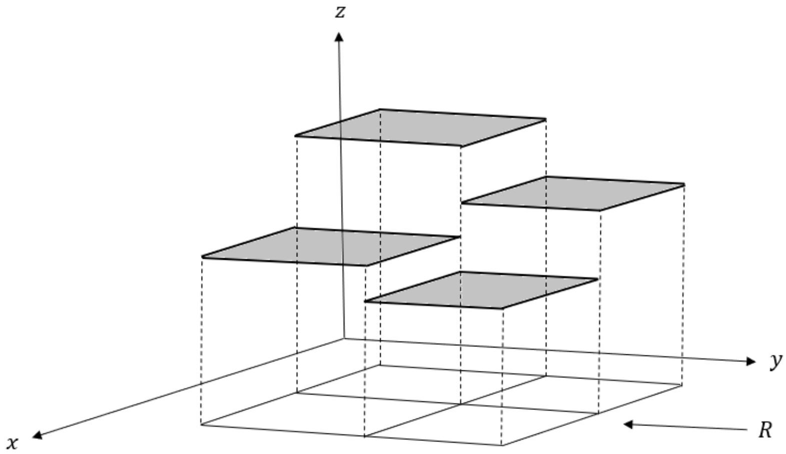




Representación gráfica del rectángulo R y el efecto de una cierta partición P

Definición 1 (Función escalonada). Se dice que la función $\varphi: R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida en el rectángulo R de $\mathbb{R}^2$ es una *función escalonada* si existe una partición P de R tal que φ restringida al interior de cada uno de los sub-rectángulos determinados por P es una función constante.

La función φ posee valores precisos sobre la frontera de los sub-rectángulos de la partición P, sin embargo, estos son irrelevantes para la teoría de integración.



Representación gráfica de una función escalonada
sobre el rectángulo R dividido en cuatro sub-rectángulos

Definición 2 (Integral doble de una función escalonada). Sea $\varphi: R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una función escalonada definida en el rectángulo R de $\mathbb{R}^2$. Supóngase que a partir de la acción de una partición P, R queda dividido en mn sub-rectángulos $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ donde $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, y que C_{ij} es el valor constante que toma φ en el interior de R_{ij}. Se define la *integral doble de la función f sobre el rectángulo R* como

$$\iint_R \varphi(x,y)\,dxdy = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_{ij}\cdot(x_i - x_{i-1})\cdot(y_j - y_{j-1})$$

Nótese que si φ es constante en todo el rectángulo R, es decir que $\varphi(x,y) = k$ para cada par (x,y) del interior de R, pudiendo asumir o no el mismo valor en su frontera, entonces resulta que

$$\iint_R \varphi(x,y)\,dxdy = k\cdot(b-a)\cdot(c-d) = k\cdot \acute{a}rea(R)$$

A su vez, teniendo en cuenta que

$$b - a = \int_a^b dx \quad y \quad c - d = \int_c^d dy$$

Es posible escribir la fórmula para el cálculo de la integral como

$$\iint_R \varphi(x,y)\,dxdy = k\cdot(b-a)\cdot(c-d) = \int_c^d\left(\int_a^b \varphi(x,y)\,dx\right)dy = \int_a^b\left(\int_c^d \varphi(x,y)\,dy\right)dx$$

Se dice que esta fórmula permite obtener el valor de la integral doble por *integración reiterada* o por *integración sucesiva*. Obsérvese además que el resultado no depende del "orden de integración", propiedad que vale en general según como se verá más adelante.

Si se aplica la fórmula obtenida para una función escalonada en el sub-rectángulo R_{ij} se puede escribir:

$$\iint_{R_{ij}} \varphi(x,y)\,dxdy = \int_{y_{j-1}}^{y_j}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(x,y)\,dx\right)dy = \int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_{y_{j-1}}^{y_j} \varphi(x,y)\,dy\right)dx$$

Y por lo tanto la integral doble de la función escalonada φ sobre R se puede calcular según

$$\iint_{R} \varphi(x,y)\,dxdy = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\int_{y_{j-1}}^{y_j}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\int_{y_{j-1}}^{y_j} \varphi(x,y)\,dy\,dx$$

Integral doble de una función acotada sobre un rectángulo

Supóngase que f es una función acotada sobre el rectángulo R, lo que quiere decir que existe un número real M, tal que

$$|f(x,y)| \leq M, \;\; \forall (x,y) \in R$$

De este modo es posible definir sobre R, dos funciones escalonadas constantes

$$\phi(x,y) = -M \quad y \quad \psi(x,y) = M$$

que se encuentran, respectivamente, por debajo y por encima de f en todo el rectángulo.

Para definir el concepto de *integral doble* sobre un rectángulo se consideran dos funciones escalonadas ϕ y ψ cualesquiera tales que:

$$\phi(x,y) \leq f(x,y) \leq \psi(x,y), \;\; \forall (x,y) \in R$$

y se procede del siguiente modo:

Definición 3 (Integral doble de una función acotada sobre un rectángulo).

Sea $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una función acotada definida en el conjunto abierto no vacío U de $\mathbb{R}^2$, y el rectángulo $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$ tal que $R \subset U$. Si existe un único número real I, de modo tal que

$$\iint_{R} \phi(x,y)\,dxdy \leq I \leq \iint_{R} \psi(x,y)\,dxdy$$

Para todas las funciones escalonadas $\phi, \psi: R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tales que:

$$\phi(x,y) \leq f(x,y) \leq \psi(x,y), \;\; \forall (x,y) \in R$$

Se dice que la función f es integrable sobre el rectángulo R, y al número I se lo llama *integral doble de f sobre R* y se escribe:

$$I = \iint_R f(x,y)\, dxdy$$

La definición anterior no aclara cómo obtener el valor de la integral doble de la función acotada f sobre el rectángulo R. Para dar luz sobre este asunto se apela a lo que se conoce como *Integral Inferior* e *Integral Superior*. Como se ha dicho, al considerar que f es una función acotada sobre el rectángulo R se la puede “encerrar” entre dos funciones escalonadas constantes. Considérese ahora dos funciones escalonadas ϕ y ψ cualesquiera tales que:

$$\phi(x,y) \leq f(x,y) \leq \psi(x,y), \;\; \forall (x,y) \in R$$

y llámese $\mathcal{L}$ al conjunto de todos los números

$$\iint_R \phi(x,y)\, dxdy$$

Es decir, al conjunto de todos los valores posibles de la integral doble de las funciones escalonadas que se encuentran “por debajo de f”, y llámese $\mathcal{U}$ al conjunto de todos los números

$$\iint_R \psi(x,y)\, dxdy$$

Esto es, al conjunto formado por todos los valores posibles de la integral doble de las funciones escalonadas que se encuentran “por encima de f”. Dado que la función f es acotada, ocurre que los conjuntos $\mathcal{L}$ y $\mathcal{U}$ son no vacíos. A su vez, puesto que

$$\phi(x,y) \leq f(x,y) \leq \psi(x,y), \;\; \forall (x,y) \in R$$

se verifica

$$\iint_R \phi(x,y)\, dxdy \leq \iint_R \psi(x,y)\, dxdy$$

así que todo número de $\mathcal{L}$ es menor que todo número de $\mathcal{U}$. Por lo tanto, $\mathcal{L}$ tiene un extremo superior $\mathrm{S}(\mathcal{L})$ y $\mathcal{U}$ tiene un extremo inferior $I(\mathcal{U})$, que satisfacen las desigualdades

$$\iint_R \phi(x,y)\, dxdy \leq S(\mathcal{L}) \leq I(\mathcal{U}) \leq \iint_R \psi(x,y)\, dxdy$$

siempre que:

$$\phi(x,y) \leq f(x,y) \leq \psi(x,y), \;\; \forall (x,y) \in R$$

Esto muestra que $S(\mathcal{L})$ y $I(\mathcal{U})$ verifican la desigualdad presente en la definición de integral doble. Así pues, este argumento permite demostrar que la función f acotada sobre el rectángulo R es integrable sobre R si y sólo si $S(\mathcal{L}) = I(\mathcal{U})$, en cuyo caso se tiene

$$I = \iint_R f(x,y)\,dxdy = S(\mathcal{L}) = I(\mathcal{U})$$

El número $S(\mathcal{L})$ se llama *Integral Inferior de f sobre R*, y el número $I(\mathcal{U})$ se llama *Integral Superior de f sobre R*.

En el Ejemplo 1 se verá "una forma" de utilizar este resultado para hallar el valor de una integral doble particular, junto con lo establecido en el Teorema de condición suficiente de integrabilidad para funciones continuas cuyo enunciado es el que sigue:

Teorema (condición suficiente de integrabilidad para funciones continuas sobre rectángulos).

Sea $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una función definida en el conjunto abierto no vacío U de $\mathbb{R}^2$, y el rectángulo

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$$

tal que $R \subset U$. Se cumple que si f es continua en R, entonces f es integrable sobre R.

Ejemplo 1. Calcular la integral doble de la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / f(x,y) = xy$, sobre el rectángulo

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$$

Claramente la función $f(x,y) = xy$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$, por lo que, en virtud del Teorema de condición suficiente de integrabilidad para funciones continuas sobre rectángulos, existe la integral doble de f sobre R, es decir:

$$I = \iint_R f(x,y)\,dxdy$$

Está garantizado entonces que el número I verificará la desigualdad

$$\iint_R \phi(x,y)\,dxdy \leq I \leq \iint_R \psi(x,y)\,dxdy$$

para todas las funciones escalonadas $\phi, \psi: R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tales que:

$$\phi(x,y) \leq f(x,y) \leq \psi(x,y), \quad \forall (x,y) \in R.$$

Además, tal como se mencionó más arriba, el número I resulta ser igual a $S(\mathcal{L})$ y $I(\mathcal{U})$. Ahora, con el objetivo de calcular el valor preciso de I, considérese, convenientemente, las particiones regulares P_1 y P_2 de $[a,b]$ y $[c,d]$, respectivamente (Una partición regular es aquella en la que todos los subintervalos determinados por ella poseen igual longitud)

$$P_1 = \left\{a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, \cdots, a + (n-1)\frac{b-a}{n}, b\right\}$$

$$P_2 = \left\{c, c + \frac{d-c}{m}, c + 2\frac{d-c}{m}, \cdots, c + (m-1)\frac{d-c}{m}, d\right\}$$

Donde ocurre que para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de P_1 se cumple que

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

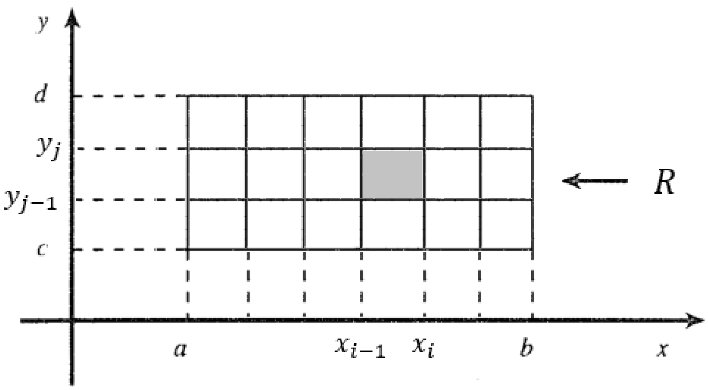
Y análogamente, para cada subintervalo $[y_{j-1}, y_j]$ de P_2 se verifica

$$y_j - y_{j-1} = \frac{d-c}{m} \quad j = 1,2,\cdots,m.$$

Es decir que P_1 divide a $[a,b]$ en n partes iguales de longitud $\frac{b-a}{n}$ y P_2 divide a $[c,d]$ en m partes iguales de longitud $\frac{d-c}{m}$.

Nótese además que la partición $P = P_1 \times P_2$ descompone al rectángulo R en mn sub-rectángulos de área

$$a(R_{ij}) = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{d-c}{m}$$



Representación gráfica del rectángulo R y la subdivisión inducida por la partición regular P

Por otra parte, y nuevamente de manera conveniente, considérese las funciones escalonadas

$$\phi: R \to \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \psi: R \to \mathbb{R}$$

cuyos valores en cada sub-rectángulo $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ sean

$$\phi_{ij}(x,y) = f(x_{i-1}, y_{j-1}) = \left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right)\left(c + (j-1)\frac{d-c}{m}\right)$$

$$\psi_{ij}(x,y) = f(x_i, y_j) = \left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\left(c + j\frac{d-c}{m}\right)$$

En palabras, esto es equivalente a decir que ϕ asume el valor mínimo de f sobre el sub-rectángulo R_{ij}, que resulta ser el valor de esta función en el vértice inferior izquierdo de R_{ij}, y que ψ adopta el valor máximo de f sobre R_{ij}, el cual es el valor que asume tal función en el vértice superior derecho de ese sub-rectángulo. De este modo queda claro que se cumple la condición

$$\phi(x,y) \leq f(x,y) \leq \psi(x,y), \ \ \forall (x,y) \in R.$$

Ocurre entonces que para la función ϕ se verifica:

$$\iint_R \phi(x,y)\,dxdy = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \bar{C}_{ij} \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot \left(y_j - y_{j-1}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left[a + (i-1)\frac{b-a}{n}\right]\left[c + (j-1)\frac{d-c}{m}\right]\left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{d-c}{m}\right) =$$

$$= \left[\frac{b^2-a^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2n}\right]\left[\frac{d^2-c^2}{2} - \frac{(d-c)^2}{2m}\right]$$

O sea:

$$\iint_R \phi(x,y)\,dxdy = \left[\frac{b^2-a^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2n}\right]\left[\frac{d^2-c^2}{2} - \frac{(d-c)^2}{2m}\right]$$

Y por otra parte para ψ se satisface:

$$\iint_R \psi(x,y)\,dxdy = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \bar{\bar{C}}_{ij} \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot \left(y_j - y_{j-1}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left[a + i\frac{b-a}{n}\right]\left[c + j\frac{d-c}{m}\right]\left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{d-c}{m}\right) =$$

$$= \left[\frac{b^2-a^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2n}\right]\left[\frac{d^2-c^2}{2} + \frac{(d-c)^2}{2m}\right]$$

Es decir:

$$\iint_R \psi(x,y)\,dxdy = \left[\frac{b^2-a^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2n}\right]\left[\frac{d^2-c^2}{2} + \frac{(d-c)^2}{2m}\right]$$

De la inecuación

$$\iint_R \phi(x,y)\,dxdy \leq I \leq \iint_R \psi(x,y)\,dxdy$$

Se deduce entonces que

$$\left[\frac{b^2-a^2}{2}-\frac{(b-a)^2}{2n}\right]\left[\frac{d^2-c^2}{2}-\frac{(d-c)^2}{2m}\right] \leq I \leq \left[\frac{b^2-a^2}{2}+\frac{(b-a)^2}{2n}\right]\left[\frac{d^2-c^2}{2}+\frac{(d-c)^2}{2m}\right]$$

Ahora bien, cuando $n \to \infty$ y $m \to \infty$, es decir cuando la cantidad de sub-rectángulos aumenta infinitamente, resulta que:

$$\iint_R \phi(x,y)\,dxdy \to \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)\left(\frac{d^2-c^2}{2}\right)$$

De hecho, para la partición regular considerada y la función escalonada particular ϕ adoptada, se verifica la desigualdad:

$$\iint_R \phi(x,y)\,dxdy < \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)\left(\frac{d^2-c^2}{2}\right)$$

Por lo que el valor

$$\mathrm{S}_\phi = \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)\left(\frac{d^2-c^2}{2}\right)$$

es el extremo superior del conjunto formado por todos los valores posibles de la integral doble de ϕ sobre R, para cualquier partición regular P, con lo cual, este valor satisface la relación:

$$\mathrm{S}_\phi \leq \mathrm{S}(\mathcal{L})$$

Análogamente para la función escalonada ψ, se cumple:

$$\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)\left(\frac{d^2-c^2}{2}\right) < \iint_R \psi(x,y)\,dxdy$$

verificándose además que:

$$\mathrm{S}_\psi = \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)\left(\frac{d^2-c^2}{2}\right)$$

es el extremo inferior del conjunto formado por todos los valores posibles de la integral doble de ψ sobre el rectángulo R, para cualquier partición regular P. Se verifica además que:

$$I(\mathcal{U}) \leq \mathrm{S}_\psi$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que S_ϕ y S_ψ son iguales, se deduce que $\mathrm{S}(\mathcal{L})$ y $I(\mathcal{U})$ también son iguales y se cumple la igualdad:

$$\mathrm{S}_\phi = \mathrm{S}(\mathcal{L}) = I(\mathcal{U}) = \mathrm{S}_\psi$$

De hecho, como se estableció anteriormente, por ser la función f integrable sobre el rectángulo R, la igualdad de $\mathrm{S}(\mathcal{L})$ y $I(\mathcal{U})$ está garantizada. El argumento desplegado permite hallar el valor preciso al cual ambos son iguales, que es el valor exacto de la integral de f sobre R. Resulta entonces que:

$$I = \mathrm{S}(\mathcal{L}) = I(\mathcal{U}) = \iint_R f(x,y)\,dxdy = \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)\left(\frac{d^2-c^2}{2}\right)$$

Teorema (de Fubini para funciones continuas sobre rectángulos). Sea $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una función continua en el conjunto abierto no vacío U de $\mathbb{R}^2$, y el rectángulo

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \le x \le b \wedge c \le y \le d\}$$

tal que $R \subset U$. Se cumple que el valor de la integral doble de f sobre R se puede obtener mediante integración sucesiva según las fórmulas:

$$I = \iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_{x=a}^{x=b}\left(\int_{y=c}^{y=d} f(x,y)dy\right)dx = \int_{y=c}^{y=d}\left(\int_{x=a}^{x=b} f(x,y)dx\right)dy$$

Este resultado ofrece una forma directa de calcular el valor específico de la integral doble mediante integración sucesiva y además establece la independencia del "orden de integración".

Ejemplo 2. Calcular la integral doble de la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / f(x,y) = xy$, sobre el rectángulo

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \le x \le b \wedge c \le y \le d\}$$

aplicando el Teorema de Fubini y comparar el resultado con el obtenido en el Ejemplo 1.

Para el cálculo de la integral en el orden $dxdy$, se procede según la fórmula de integración sucesiva

$$I = \iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_{y=c}^{y=d}\left(\int_{x=a}^{x=b} f(x,y)dx\right)dy$$

En tal caso

$$I = \iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_{y=c}^{y=d}\left(\int_{x=a}^{x=b} xy\,dx\right)dy = \int_{y=c}^{y=d}\left(\left(\frac{x^2}{2}y\right)\Bigg|_{x=a}^{x=b}\right)dy = \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)\int_{y=c}^{y=d} y\,dy =$$

$$= \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=c}^{y=d} = \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)\left(\frac{d^2-c^2}{2}\right)$$

Luego

$$I = \iint_R f(x,y)\,dxdy = \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)\left(\frac{d^2-c^2}{2}\right)$$

Finalmente se obtiene el mismo resultado que en el Ejemplo 1 pero de un modo mucho más sencillo. Por otra parte, utilizando la fórmula para el cálculo de la integral en el orden $dydx$ se procede análogamente y se obtiene el mismo resultado.

Ejemplo 3. Calcular la integral

$$I = \iint_R (xy^2 - 2x^3)\, dxdy$$

Sobre el rectángulo

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 2\} = [0,1] \times [-1,2]$$

Primero en el orden $dydx$ y luego en el $dxdy$.

Según el Teorema de Fubini para funciones continuas sobre rectángulos, vale

$$I = \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=-1}^{y=2} (xy^2 + 3x^3)\, dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=1} \left(x\frac{y^3}{3} + 3x^3 y \right)\Bigg|_{-1}^{2} dx = \int_{x=0}^{x=1} (3x + 9x^3)\, dx = \frac{15}{4}$$

para el cálculo de la integral en el orden $dydx$. Por otra parte, en el orden de integración $dxdy$, resulta:

$$I = \int_{y=-1}^{y=2} \left(\int_{x=0}^{x=1} (xy^2 + 3x^3)\, dy \right) dx = \int_{y=-1}^{y=2} \left(\frac{x^2y^2}{2} + \frac{3}{4}x^4 \right)\Bigg|_{0}^{1} dx = \int_{y=-1}^{y=2} \left(\frac{y^2}{2} + \frac{3}{4} \right) dx = \frac{15}{4}$$

<u>Integrales dobles sobre regiones más generales</u>

Definición 4 (REGIÓN TIPO I).

Sean las funciones reales

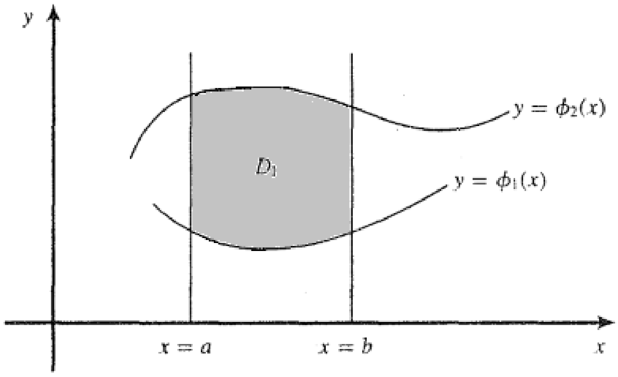
$$\varphi_1 : [a,b] \to \mathbb{R} / y = \varphi_1(x) \qquad \text{y} \qquad \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R} / y = \varphi_2(x)$$

Continuas en todo el intervalo $[a,b]$ y tales que

$$\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x), \quad \forall x \in [a,b]$$

Se llama *región tipo I*, a la región acotada D_1 del plano xy, definida como:

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \wedge \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

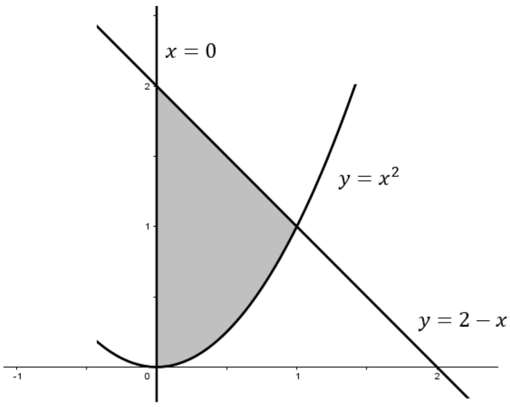


Representación gráfica de una región tipo I del plano

Ejemplo 5. Considérese la región del plano

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \leq 2 \wedge y \geq x^2 \wedge x \geq 0\}$$

Como se muestra en la figura, D está limitada inferiormente por la recta de ecuación $x + y = 2$, superiormente por la parábola de ecuación $y = x^2$ y lateralmente por la recta vertical de ecuación $x = 0$.



Representación gráfica de la región de integración D del Ejemplo 5

Definición 5 (REGIÓN TIPO II).

Sean las funciones reales

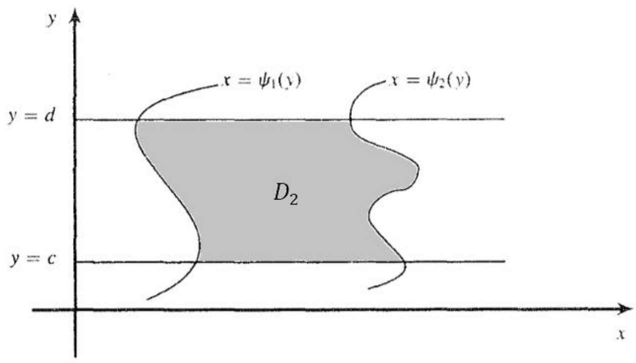
$$\psi_1 : [c, d] \to \mathbb{R} / x = \psi_1(y) \quad \text{y} \quad \psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R} / x = \psi_2(y)$$

Continuas en todo el intervalo $[c, d]$, y tales que

$$\psi_1(y) \leq \psi_2(y), \quad \forall y \in [c, d]$$

Se llama *región tipo II*, a la región acotada D_2 del plano xy, definida como:

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq y \leq d \wedge \psi_1(y) \leq y \leq \psi_2(y)\}$$



Representación gráfica de una región tipo II del plano

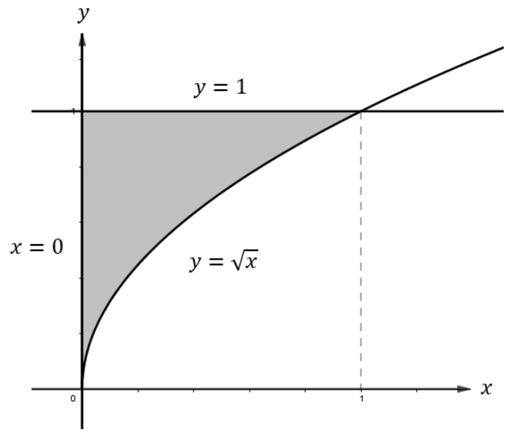
Teorema (de Fubini para funciones continuas sobre regiones Tipo I).

Sea $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una función continua en el conjunto abierto no vacío U de $\mathbb{R}^2$ y la región tipo I

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \wedge \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

tal que $D \subset U$. Se cumple que el valor de la integral doble de f sobre D se puede obtener mediante integración sucesiva según la fórmula:

$$I = \iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$



Representación gráfica de la región de integración D del Ejemplo (Número)

Biblioteca digital. Cap 7, p. 263. Cálculo varias variables. W Mora.

Link contenidos pertinentes (Ctrl+Clic mouse para ir al enlace)
Khan Academy videos

https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/integrating-multivariable-functions#double-integrals-topic

Khan Academy artículos
https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/integrating-multivariable-functions#double-integrals-a