Integrales dobles
Introducción. Guía de clase.
Com 02

Introducción informal a las integrales dobles

Ejemplo 1

Usted tiene frente a sí la siguiente expresión de una integral doble

$$\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{3} 4\,dy\,dx = \int_{x=0}^{2}\left(\int_{y=0}^{3} 4\,dy\right)dx = 24$$

Dónde

$$z = f(x,y) = 4 \quad \text{es el integrando}$$

Siendo que usted ya ha cursado y/o aprobado análisis matemático I, obviamente ha visto integral de una variable, cálculo de primitivas, cálculo de áreas en el plano coordenado xy.
El desafío que se le propone es explicar el posible procedimiento de cálculo e interpretarlo geométricamente, de cómo se llegó al resultado 24.

Se sugiere que transcriba a un papel la integral doble.

Resuelva aparte, la integral que se encuentra entre paréntesis.

$$\int_{y=0}^{3} 4\,dy =$$

Ahora puede continuar por sus medios,

$$\int_{y=0}^{3} 4\,dy = (4\,y)\big|_{y=0}^{3} = 12$$

Reemplace este resultado en la integral doble inicial.

$$\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{3} 4\,dy\,dx = \int_{x=0}^{2}\left(\int_{y=0}^{3} 4\,dy\right)dx = \int_{x=0}^{2} 12\,\,dx$$

Vea si ahora puede resolver la nueva expresión.

$$\int_{x=0}^{2} 12 \ dx =$$

$$\int_{x=0}^{2} 12 \, dx = (12\, x)|_{x=0}^{2} = 24$$

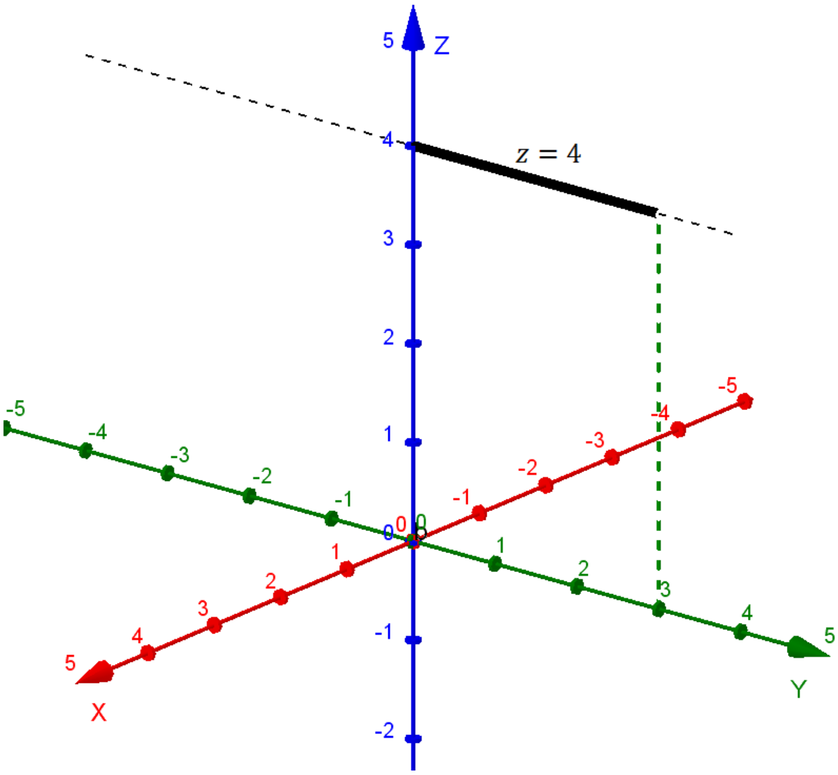
Bien, se ha llegado al resultado expuesto.

Veamos ahora como interpretar geométricamente los pasos realizados hasta llegar al resultado final.

Dibuje los tres ejes coordenados como se acostumbra e interprete geométricamente la primera integral resuelta.

$$\int_{y=0}^{3} 4 \, dy = (4\, y)|_{y=0}^{3} = 12$$

Donde $z = f(x, y) = 4$



La primera integral resuelta

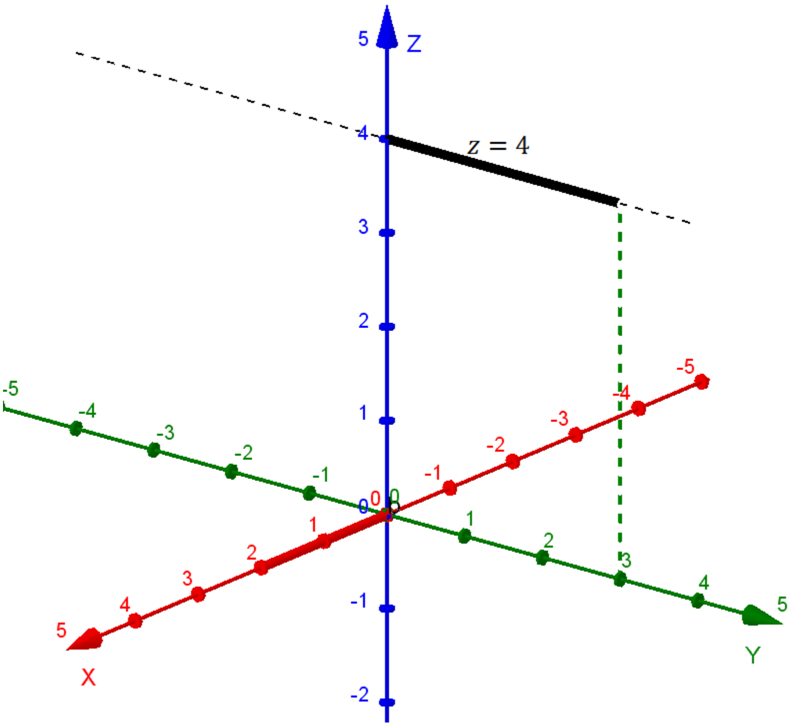
$$\int_{y=0}^{3} 4\,dy = 12$$

Corresponde al valor del área del rectángulo en el plano coordenado yz, delimitado por:

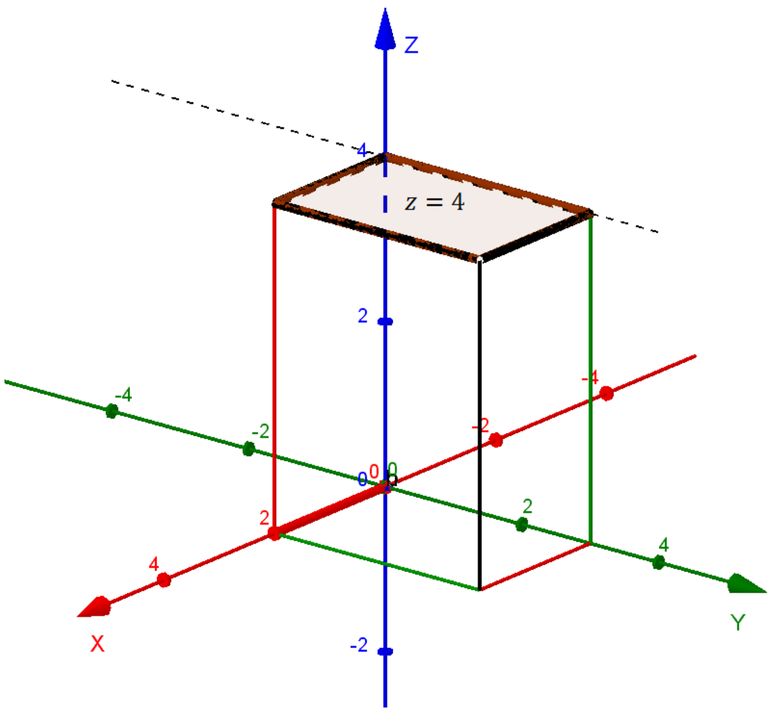
$$0 \leq z \leq 4$$

$$0 \leq y \leq 3$$

Ahora repita el dibujo anterior y resalte sobre el eje x el intervalo [0,2]



Con todo esto ¿que cuerpo puede armar cuya medida sea 24?



El volumen de este paralelepípedo es 24.

La

$$\int_{x=0}^{2}\left(\int_{y=0}^{3} 4\,dy\right)dx = 24$$

geométricamente puede interpretarse como la fórmula para el cálculo del volumen del paralelepípedo de la figura anterior última.

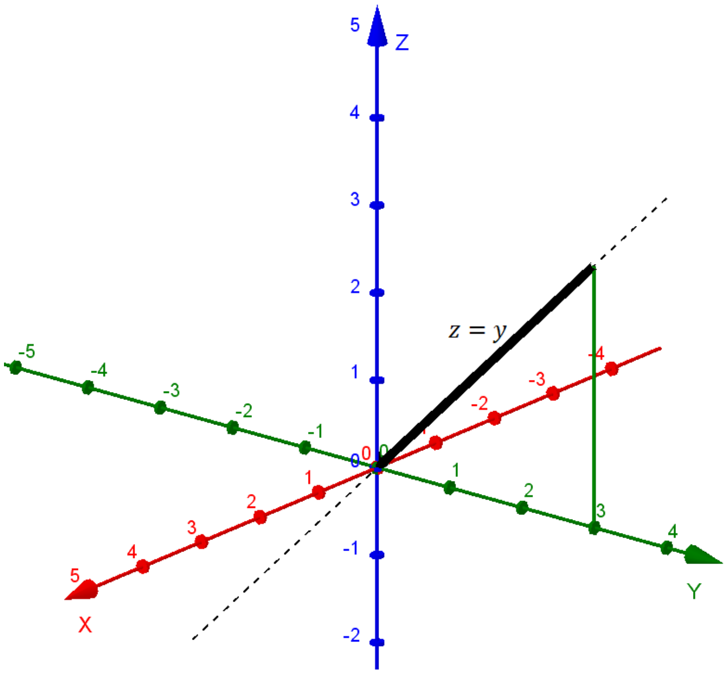
La descripción algebraica de dicho paralelepípedo es:

$$0 \le z \le 4$$
$$0 \le y \le 3$$
$$0 \le x \le 2$$

Ejemplo 2:

$$\int_{x=0}^{2}\left(\int_{y=0}^{3} y\,dy\right)dx = 9$$

Puede seguir el orden propuesto en el ejemplo 1, o puede ahora usted intentar interpretar analítica y geométricamente el resultado anterior, en el orden que le parezca más cómodo a usted.



La primera integral resuelta, la que se encuentra entre paréntesis,

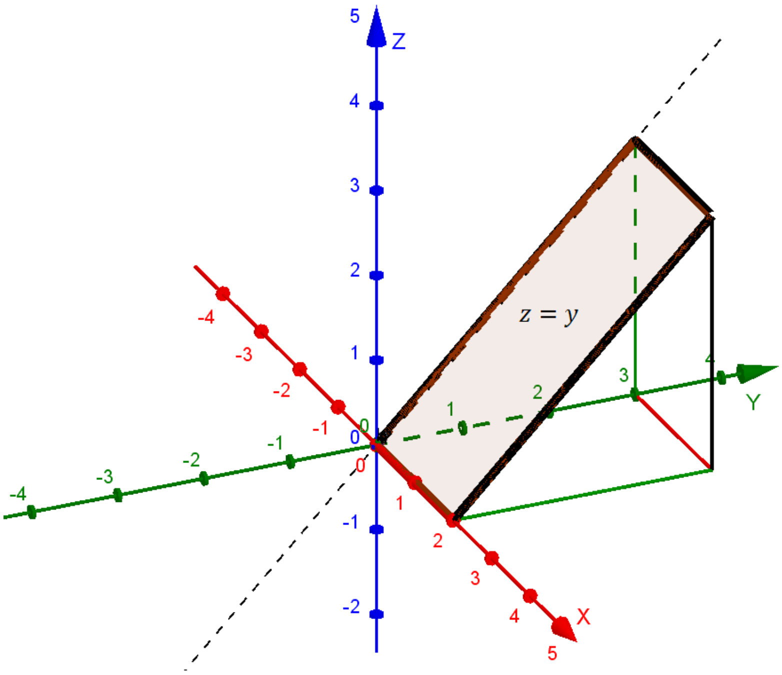
$$\int_{y=0}^{3} y\,dy = \left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{3} = \frac{9}{2}$$

Corresponde al valor del área del triángulo en el plano coordenado yz, delimitado por:

$$0 \le z \le y$$
$$0 \le y \le 3$$

Reemplazando $\frac{9}{2}$ en la integral doble del ejemplo 2, nos queda:

$$\int_{x=0}^{2} \frac{9}{2}\,dx = \left(\frac{9}{2}x\right)\Big|_{x=0}^{2} = 9$$



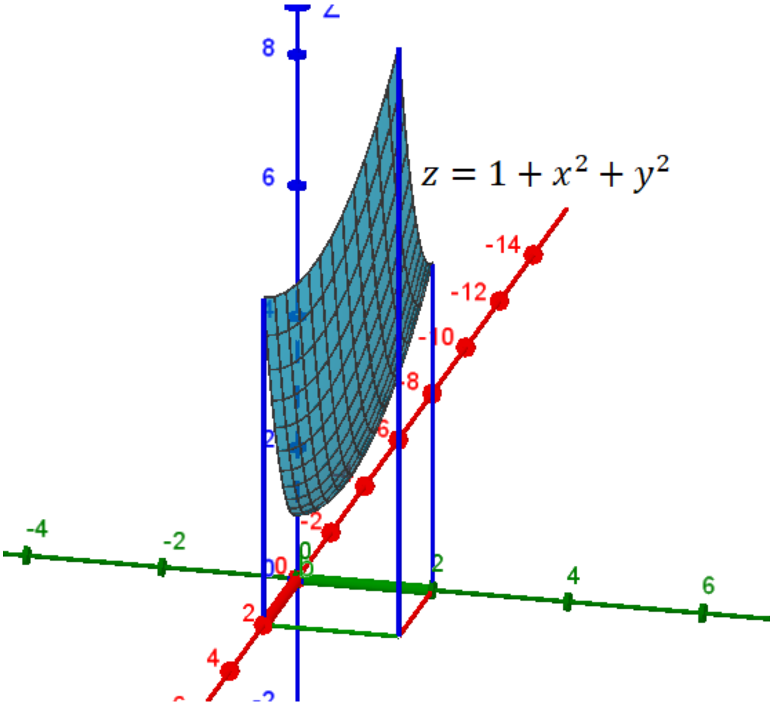
La $\int_{x=0}^{2}\left(\int_{y=0}^{3} y\, dy\right)\, dx = 9$, geométricamente puede interpretarse como la fórmula para el cálculo del volumen del prisma triangular de la figura anterior última.

La **descripción algebraica** de dicho prisma es:

$$0 \leq z \leq y$$
$$0 \leq y \leq 3$$
$$0 \leq x \leq 2$$

Ejemplo 3:

$$\int_{x=0}^{2}\left(\int_{y=0}^{2} (1 + x^2 + y^2)\, dy\right) dx =$$



La integral que se encuentra dentro del paréntesis debe resolverse respecto de la variable y como lo indical el dy, esto es:

$$\int_{y=0}^{2} (1 + x^2 + y^2)\, dy = \left(y + x^2\, y + \frac{1}{3} y^3 \right)\Big|_{y=0}^{2} = 2 + 2x^2 + \frac{8}{3} = 2x^2 + \frac{14}{3}$$

Reemplazamos este resultado en la integral doble

$$\int_{x=0}^{2} \left(\int_{y=0}^{2} (1 + x^2 + y^2)\, dy \right) dx = \int_{x=0}^{2} \left(2x^2 + \frac{14}{3} \right) dx = \left(\frac{2}{3} x^3 + \frac{14}{3} x \right)\Big|_{x=0}^{2} = \frac{44}{3}$$

Este resultado corresponde al volumen del cuerpo delimitado por:

$$\begin{cases} 0 \le z \le 1 + x^2 + y^2 \\ 0 \le y \le 2 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

Lo hecho en los ejemplos previos se conoce como **resolución iterada de integrales dobles**, es decir, resolver una integral doble de **funciones continuas**, para nuestros casos será resolver de a una integral a la vez, **desde dentro hacia afuera**.