ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA I
MÓDULO 4 – ESPACIOS VECTORIALES – CUARTA CLASE
OPERACIONES ENTRE SUBESPACIOS

Lee las páginas 249 a 256 de Apunte III TEJIENDO EL ÁLGEBRA LINEAL.

Realiza todos los ejercicios y actividades propuestas en esas páginas.

En este apunte encontrarás otras explicaciones y ejemplos correspondientes a estos temas.

También en el archivo llamado M4. CUARTA CLASE. EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA están propuestos otros ejercicios y actividades.

Videos de la cátedra que pueden ayudarte con estos temas:

1. Operaciones con subespacios de R^4
https://www.youtube.com/watch?v=R3wlMRn59Ig&t=124s

2. Operaciones con subespacios de R^4
https://www.youtube.com/watch?v=ZNm9riHuZdU

3. Operaciones con subespacios de matrices
https://www.youtube.com/watch?v=kD6LTx7vIK4
https://www.youtube.com/watch?v=QXN9E2l4bXU

4. Operaciones entre subespacios
https://www.youtube.com/watch?v=5OYvLCh90wU

OPERACIONES ENTRE SUBESPACIOS

Escrito por la profesora Gabriela Ocampo

Sean S y T dos subespacios de un mismo espacio vectorial V. Como son subconjuntos del conjunto de elementos que conforman a V es posible plantearse si la intersección S ∩ T y la unión S U T de los conjuntos que forman S y T son también subespacios de V.

INTERSECCIÓN

S ∩ T = $\left\{\vec{v} \in V / \vec{v} \in S \wedge \vec{v} \in T\right\}$, es el conjunto formado por los vectores que pertenecen a S y a T simultáneamente. Es el conjunto formado por los elementos que tienen en común los dos conjuntos.

a) Como el vector nulo pertenece a S (por ser subespacio) y también a T (por el mismo motivo), resulta que el vector nulo pertenece a la intersección.
b) Si tomamos dos vectores *u* y *v* que pertenecen a S ∩ T, esto significa que *u* pertenece a S y a T y *v* pertenece a S y a T. Luego la suma de *u* + *v* pertenece a S y a T, ya que por ser S y T subespacios son cerrados para la suma, y por lo tanto la suma pertenece a la intersección S ∩ T
c) sea *u* un vector que pertenece a S ∩ T , y k un escalar. Como *u* pertenece tanto a S como a T el producto k.u pertenece también tanto a S como a T por ser estos subespacios , luego k.*u* pertenece a S ∩ T.

Luego por la condición necesaria y sufieciente para que un conjunto sea subespacios, la intersección de dos subespacios de V es otro subespacio de V.

Si S y T son dos subespacios de V entonces S ∩ T es un subespacio de V

Dados dos subespacios del mismo espacio vectorial es posible determinar el subespacio intersección entre ellos, hallar una base y la dimensión del mismo.

Ejemplo 1:

Sean W_1 = {(x , y , z) / x + y +2z = 0 } y W_2 < (1,-1,1) , (2,1,-1)> dos subespacios de R^3
Hallaremos el subespacio intersección, una base y su dimensión.

Para que un vector (x, y , z) pertenezca a la intersección , debe cumplir que pertenece a cada uno de los subespacios.
Si (x, y , z) $\in W_2$, existen escalares α, β tales que:
(x , y , z) = α(1 , -1 , 1) + β(2 , 1 , -1) = $(\alpha + 2\beta, -\alpha + \beta, \alpha - \beta)$

Como (x , y , z) también debe $\in W_1$, debe satisfacer la ecuación que define a W_1 .
Entonces reemplazamos lo obtenido en la ecuación de W_1 :

$$x + y + 2z = 0$$
$$(\alpha + 2\beta) + (-\alpha + \beta) + 2(\alpha - \beta) = 0$$
$$\alpha + 2\beta - \alpha + \beta + 2\alpha - 2\beta = 0$$

Resulta: $\beta = -2\alpha$

Sustituimos en la combinación lineal de W_2

Luego: (x , y , z) = $(\alpha + 2(-2\alpha), -\alpha - 2\alpha, \alpha + 2\alpha) = \alpha(-3,-3,3)$
Entonces $W_1 \cap W_2$ =<(-3,-3,3)>

La intersección es el subespacio de R^3 generado por el vector (-3 ; - 3 ; 3) y su dimensión es 1.
dim ($W_1 \cap W_2$) = 1 Base de $W_1 \cap W_2$ = { (-3,-3,3)}

Geométricamente, tanto W_1 como W_2 son dos planos que pasan por el origen (subespacios de dimensión 2)
Su intersección es la recta generada por el vector (-1 ; -1 : 1) que pasa por el origen (dimensión 1).

La intersección entre dos subespacios, nunca es vacía, como mínimo comparten al vector nulo del subespacio.
Además, la dimensión de la intersección como mucho es igual a la dimensión del subespacio que tenga dimensión menor (trabajando con E.V. de dimensión finita).

$\dim(S \cap T) \leq \dim(S)$, $\dim(S \cap T) \leq \dim(T)$

El igual se cumple en el caso de que un subespacio esté incluido en el otro y la dimensión de la intersección será igual a la dimensión del subespacio incluido (el que tenga menor dimensión)

Ejemplo 2

Sean W_1 y W_2 subespacios de R^3, calcularemos su intersección

W_1 = gen {(1,1,-1),(1,0,1) } W_2 = gen {(2,-1,0),(1,-1,2) }

Si (x,y,z) $\in W_1$: (x,y,z) = α_1(1,1,-1) + α_2(1,0,1)
Si (x,y,z) $\in W_2$: (x,y,z) = α_3(2,-1,0) + α_4(1,-1,2)

Si (x , y , z) $\in W_1 \cap W_2$, debe cumplirse:

α_1(1,1,-1) + α_2(1,0,1) = α_3(2,-1,0) + α_4(1,-1,2)
Resulta el sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$F_2 - F_1 \to F_2 \qquad F_3 + 2F_2 \to F_3$$
$$F_3 + F_1 \to F_3$$

La última ecuación resulta $4\alpha_3 + \alpha_4 = 0$

Tomando α_3 como variable libre, al resolver, resulta $\alpha_4 = -4\alpha_3$

Luego al reemplazar en la expresión de W_2 resulta
(x , y , z) = α_3(2,-1,0) + (-4α_3)(1,-1,2) = α_3(-2,3,-8)

Finalmente: $W_1 \cap W_2$ = <(-2,3,-8)>

Nota que si seguimos resolviendo el sistema resulta lo mismo en W_1

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3-\alpha_4=0 \\ \quad -\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4=0 \\ \qquad\quad 4\alpha_3+\alpha_4=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1=-\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4=5\alpha_3+2\alpha_3-4\alpha_3=3\alpha_3 \\ \alpha_2=3\alpha_3+2\alpha_4=3\alpha_3-8\alpha_3=-5\alpha_3 \\ \alpha_4=-4\alpha_3 \end{cases}$$

(x,y,z) = α_1(1,1,-1) + α_2(1,0,1)= 3 α_3(1,1,-1) - 5 α_3(1,0,1) = α_3(-2 ;3; -8)
Obtenemos el mismo resultado $W_1 \cap W_2$ = <(-2,3,-8)>

UNIÓN

Recordemos la definición de unión de dos conjuntos
S U T= $\{\vec{v} \in V / \vec{v} \in S \vee \vec{v} \in T\}$
En la unión de dos conjuntos se encuentran los elementos que pertenecen a uno de los conjuntos o al otro (o a los dos, disyunción inclusiva).

Es fácil demostrar con un contraejemplo que la unión de dos subespacios de un mismo espacio vectorial, <u>no</u> es, generalmente un subespacio.

Siendo S y T dos subespacios del espacio vectorial V.

Supongamos que V =R^2. Sean S y T dos subespacios tales que:

$S=\{(x,y)/y=0\}; T=\{(x,y)/x=0\}$, o sea que S representa a los puntos ubicados sobre el eje de abscisas y T representa a los puntos ubicados sobre el eje de ordenadas.

Tomemos un vector de cada uno (2,0) que pertenece a S (y por lo tanto a S U T) y (0,5) que pertenece a T (y por lo tanto a S U T). Si los sumamos, con la suma usual en R^2, resulta el vector (2,5) que no pertenece ni a S ni a T, por lo que no pertenece a S U T.

Ello demuestra que podemos encontrar al menos dos vectores (2,0) y (0,5) que pertenecen a la unión de S y T que sumados dan como resultado otro vector (2,5) que **no** pertenece a S U T, luego el conjunto S U T no es cerrado para la suma y por lo tanto no cumple con la segunda condición de subespacio.

Entonces la unión de dos subespacios de V, no necesariamente es un subespacio de V, así que no nos dedicaremos a trabajar la unión de subespacios.

SUMA DE SUBESPACIOS

Como los conjuntos con los que estamos trabajando son espacios vectoriales y tienen definida una operación de suma de vectores, es posible, definir una operación de suma de subespacios, operación que no puede realizarse con conjuntos cualesquiera. Por este motivo, si estudiaste conjuntos en otras asignaturas es probable que no hayas estudiado la operación de suma de conjuntos.

Definición:

El conjunto suma S + T de los subespacio S y T está formado por todos los vectores del espacio vectorial V que pueden escribirse como suma de un vector de S y un vector de T .

$$S+T=\left\{\vec{v}\in V\,/\,\vec{v}=\vec{s}+\vec{t}\quad siendo\quad \vec{s}\in S\ \ y\ \ \vec{t}\in T\right\}$$

Se denomina suma de dos subespacios S y T, al menor subespacio que los contiene.

Advierte que cada subespacio está incluido en la suma ya que cada vector de uno de ellos puede escribirse como la suma de él mismo y el vector nulo, y el vector nulo pertenece al otro subespacio. Pero en general, la suma contiene otros vectores además de los S o T , que se originan al sumar uno de cada uno.

Propiedad:

Si S y T son dos subespacios de V entonces S + T es un subespacio de V

Demostración:

1) Se debe probar que S+ T$\neq \phi$ probaremos que el vector nulo pertenece a la suma.

$\vec{0}\ +\ \vec{0}\ =\ \vec{0}\quad ,\quad \vec{0}\ \epsilon\ \text{S}\ \ \text{y}\ \ \vec{0}\ \epsilon\ T$

Entonces $\vec{0}$ pertenece a S + T ya que es la suma de un vector de S (el $\vec{0}$) y un vector de T (el $\vec{0}$)

2) Se debe probar dados dos vectores cualesquiera de S+T , su suma , también pertenece a S + T

Para cualquier $\vec{v}\ \epsilon$ S + T y $\vec{u}\ \epsilon$ S + T se cumple que

$\vec{v}=\ \ \overrightarrow{v_s}+\overrightarrow{v_t}$ y $\overrightarrow{v_s}\ \ \epsilon$ S y $\overrightarrow{v_t}\ \ \epsilon$ T

$\vec{u}=\ \ \overrightarrow{u_s}+\overrightarrow{u_t}$ y $\overrightarrow{u_s}\ \epsilon$ S y $\overrightarrow{u_t}\ \ \epsilon$ T sumamos m. a m.

$\overline{\vec{u}+\ \vec{v}}=\overline{(\overrightarrow{v_s}\ +\ \overrightarrow{v_t})+\ (\overrightarrow{u_s}+\overrightarrow{u_t}}\ )$ asociando y conmutando

$\vec{u}+\ \vec{v}=(\overrightarrow{v_s}\ +\ \overrightarrow{u_s})+\ (\ \overrightarrow{u_t}+\overrightarrow{v_t})$ y $\overrightarrow{v_s}\ +\ \overrightarrow{u_s}\ \epsilon$ S (porque S es un subespacio y es cerrado para la suma) y $\overrightarrow{u_t}+\overrightarrow{v_t}\ \epsilon\ T$ por el mismo motivo

Entonces $\vec{u} + \vec{v} \in$ S + T por ser la suma de un vector de S ($\vec{v_s} + \vec{u_s}$) y un vector de T ($\vec{u_t} + \vec{v_t}$).

3) Se debe probar que para cualquier vector de S+T , al multiplicarlo por cualquier escalar k, el producto pertenece a S + T

Para cualquier $\vec{v} \in$ S + T se cumple $\vec{v} = \vec{v_s} + \vec{v_t}$ y $\vec{v_s} \in$ S y $\vec{v_t} \in$ T

Multiplicamos por cualquier escalar k resulta $k\ \vec{v} = k\,.\,(\vec{v_s} + \vec{v_t})$

Por propiedad distributiva respecto de la suma de vectores $k\ \vec{v} = k\,.\vec{v_s} + k\ \vec{v_t}$ y

$k\,.\vec{v_s} \in$ S por ser S un subespacio cumple la ley externa y k $\vec{v_t} \in$ T por la misma razón.

Entonces, $k\,\vec{v}$ pertenece a S+T por ser la suma de un vector de S (k $\vec{v_s}$) y un vector de T (k $\vec{v_t}$)

De 1) 2) y 3) S + T es un espacio vectorial de V

Ejemplo 3:

Un caso posible de suma de dos subespacios de R^3 es el de dos rectas diferentes que se cortan. Para ser subespacios deben cortarse en el origen.

Sabemos que las rectas son subespacios de dimensión 1, están generadas por un único vector no nulo.
Consideremos los subespacios (rectas) S = gen $\{\vec{s}\}$ y T = gen $\{\vec{t}\}$, siendo $\vec{s}\ y\ \vec{t}$ L.I.

A S pertenecen todos los vectores múltiplos del vector $\vec{s}$ y a T pertenecen todos los vectores múltiplos del vector $\vec{t}$.

Al subespacio suma S + T pertenecen los vectores de R^3 que pueden escribirse como suma de un vector de S y un vector de T.

$\vec{w}$ pertenece a S + T si y solo si $\vec{w} = \vec{v_s} + \vec{v_t}$ pero un vector de S es un múltiplos de $\vec{s}$ y un vector de T es un múltiplo del vector $\vec{t}$, entonces:

$\vec{w}$ pertenece a S + T si y solo si $\vec{w} =$ a. $\vec{s}$ + b $\vec{t}$ que es la ecuación vectorial paramétrica de un plano en el espacio R^3 que pasa por el origen.

La suma de dos subespacios que geométricamente sean dos rectas distintas en R^3 es el plano que las contiene.

Nota: no confundir la suma con la unión, la suma es un subespacio y geométricamente es el plano que contiene a las dos rectas, contiene vectores que no pertenecen a ninguna de las dos rectas. En cambio, la unión de las dos rectas, es sólo los vectores que están en esas dos rectas y no es un subespacio.

BASE DEL SUBESPACIO SUMA

Un sistema de generadores para la suma, se obtiene haciendo la unión (operación entre conjuntos) de un sistema de generadores de S, con un sistema de generadores de T.
Este puede no ser linealmente independiente, entonces luego se debe extraer una base.

Si S = gen $\{\vec{s_1}, \vec{s_2}, \dots \vec{s_n}\}$ y T = gen $\{\vec{t_1}, \vec{t_2}, \dots \vec{t_m}\}$ Entonces $\{\vec{s_1}, \vec{s_2}, \dots \vec{s_n}, \vec{t_1}, \vec{t_2}, \dots \vec{t_m}\}$ es un conjunto de generadores de S + T

Si este conjunto $\{\vec{s_1}, \vec{s_2}, \dots \vec{s_n}, \vec{t_1}, \vec{t_2}, \dots \vec{t_m}\}$ es Li hemos encontrado una base de S+T, si no son linealmente independiente, entonces luego se debe extraer una base (eliminando los vectores que "sobran") .

Recuerda que en cuanto a las dimensiones se cumple siempre que :

$$\dim(S) \leq \dim(S+T) \quad , \quad \dim(T) \leq \dim(S+T)$$

El igual se cumple cuando un subespacio está incluido en el otro. Y en ese caso la dimensión de la suma es la dimensión del subespacio que incluye al otro.

Ejemplo 4

En el espacio vectorial $V = R^{2x2}$, S = gen $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y el subespacio

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in R^{2x2} / -4x + 5y + 6z = 0 \right\}$$ S

Hallaremos la suma de los subespacios S+T:

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de S , son dos vectores L.I. ya que uno no es múltiplo del otro.

dim (S) = 2

Para hallar una base de T $\quad -4x + 5y + 6z = 0 \rightarrow x = \frac{5}{4}y + \frac{3}{2}z$

Si $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in T \rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}y + \frac{3}{2}z & y \\ z & w \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para no trabajar con fracciones, multiplicamos por 4 a la primer matriz y por 2 a la segunda y por cómo están ubicados los ceros son L.I., resulta que:

B'= $\left\{ \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de T dim (T) = 3

La unión de una base de S y otra de T es un conjunto de generadores de la suma, extraemos una base.

$$S+T = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Claramente las 5 matrices no pueden ser linealmente independiente, porque pertenecen al espacio vectorial R^{2x2} que tiene dimensión 4 y recordemos que la dimensión indica la cantidad máxima de vectores L. I . de un E.V.

Es un conjunto de generadores pero no es base, extraemos una.
Colocamos las matrices en fila y escalonamos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \text{resultaron 4 matrices L.I.}$$

dim (S+T)=4, S+T= R^{2x2}

Entonces $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de S+T= R^{2x2}

El subespacio suma coincide con R^{2x2} se podría haber elegido la base canónica.

TEOREMA DE LA DIMENSIÓN DE LA SUMA

Si S y T son dos subespacios de un espacio vectorial V (de dimensión finita)

$$\boxed{\dim (S + T) = \dim (S) + \dim (T) - \dim (S \cap T)}$$

Para el Ejemplo 4 anterior calculamos la intersección resulta:

Si una matriz $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ pertenece a S se cumple que

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 2p \\ -p & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -q & q \\ 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-q & 2p+q \\ -p & q \end{pmatrix}$$

Para pertenecer a la intersección, debe pertenecer también a T, cumplir su ecuación, entonces

Reemplazamos $\quad -4x + 5y + 6z = 0$

- 4 (p – q) + 5 (2 p + q) + 6 (- p) = 0

- 4 p + 4 q + 10 p + 5 q – 6 p = 0 $\rightarrow$ q = 0 y p puede tener cualquier valor

$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ pertenece a S ∩ T $\leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 0.\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Luego S ∩ T = gen $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ y como es un único vector no nulo es L.I.

$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ es una base del subespacio intersección S ∩ T y dim (S ∩ T) = 1

Habíamos calculado antes S + T , veamos ahora que se cumple el teorema de la dimensión:

dim (S + T) = dim (S) + dim (T) - dim (S ∩ T)
4 = 2 + 3 - 1

SUMA DIRECTA

Ejemplo 5:

En R^4 , consideremos los subespacios

S = {(x;y ;z;w) / (x; y ;z;w) = (a ; b ; 0 ; - a – b) con a y b reales }

T = {(x;y ;z;w) / (x; y ;z;w) = (c ; d ; 0 ; c) con c y d reales }

W = gen {(1; 2 ; -1 ; 1) }

Realizaremos S + W y S + T

Comenzamos con S + W

El subespacio suma de S + W está formado por todas las cuaternas de R^4 que se pueden escribir como suma de un vector de S y otro de W

$\vec{v} \in S+W \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{s} + \vec{w} \quad con \quad \vec{s} \in S \quad y \quad \vec{w} \in W$

(x ; y ; z ; w) = (a ; b; 0 ; - a-b) +(g ; 2 g ; -g ; g) = (a +g ; b +2g ; -g ; - a- b+g)

Encontraremos que vectores de S y W se deben sumar para encontrar cada vector de S + W

$$\begin{cases} x = a + g \\ y = b + 2g \\ z = -g \\ w = -a - b + g \end{cases}$$

Si bien el sistema es fácil de resolver despejando, aplicaremos el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & y \\ 0 & 0 & -1 & z \\ -1 & -1 & 1 & w \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & y \\ 0 & 0 & -1 & z \\ 0 & -1 & 2 & w+x \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & y \\ 0 & 0 & -1 & z \\ 0 & 0 & 4 & x+y+w \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 2 & y \\ 0 & 0 & -1 & z \\ 0 & 0 & 0 & x+y+4z+w \end{array}\right)$$

Es sistema es compatible para $\boxed{x + y + 4\,z + w = 0}$ que es la ecuación del subespacio suma de S + W,
Los vectores de R^4 que se pueden escribir como un vector de S y uno de W son aquellos que cumplen que x + y + 4z +w= 0

Y bajo esa condición, las ecuaciones restantes forman un sistema compatible determinado. Esto significa que cada vector de la suma se puede escribir de **forma única** como suma de un vector de S y uno de W

$$\begin{cases} a + g = x \\ b + 2g = y \\ -g = z \end{cases}$$

entonces $\boxed{g = -z}$, b – 2 z = y → $\boxed{b = y + 2\,z}$

a - z = x → $\boxed{a = x + z}$

reemplazando en (x ; y ; z ; w) = (a; b; 0 ; - a-b) +(g; 2 g ; -g ; g)

resulta (x ; y ; z ; w) = (x + z ; y + 2 z ; 0 ; - x – z – y – 2 z) +(- z ; -2 z ; z ; -z)
= (x + z ; y + 2 z ; 0 ; - x – y – 3 z) +(- z ; -2 z ; z ; -z)

Nota que al sumar las componentes obtenemos (x ; y ; z ; - x – y – 4z)

Esta última condición w = - x – y – 4z es la que dijimos que debía cumplir un vector para estar en la suma de los dos subespacios.

Miremos un ejemplo de un vector que pertenezca al subespacio suma

(3 ; -4 ; 2 ; -7) pertenece a S + W 3 + (- 4) + 4 . 2 + (- 7) = 0 cumple su ecuación

Usando la expresión obtenida recién:

(x ; y ; z ; w) = (x + z ; y + 2 z ; 0 ; - x – y – 3 z) +(- z ; -2 z ; z ; -z)

Resulta (3 ; -4 ; 2 ; -7) = (3 + 2 ; - 4 + 2 . 2 ; 0 ; - 3 – (-4) – 3 . 2) + (-2 ; - 2 . 2 ; 2 ; -2)
= (5 ; 0 ; 0 ; - 5) + (-2 ; - 4 ; 2 ; -2)

Expresamos al vector como suma de (5 ; 0 ; 0 ; - 5) que pertenece a S y (-2 ; - 4 ; 2 ; -2) que pertenece a W. Y son los únicos dos vectores de S y W que sumados dan el vector (3 ; -4 ; 2 ; -7)

Volveremos a esto en unos minutos

Ahora calcularemos S + T

El subespacio suma de S + T está formado por todas las cuaternas de R^4 que se pueden escribir como suma de un vector de S y otro de T

$$\vec{v} \in S+T \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{s} + \vec{t} \quad con \quad \vec{s} \in S \quad y \quad \vec{t} \in T$$

$$\vec{v} = \vec{s} + \vec{t} \quad =$$

(x ; y ; z ; w) = (a; b; 0 ; - a-b) +(c; d; 0 ; c) = (a +c ; b +d ; 0 ; - a- b+c) entonces

$$\begin{cases} x = a + c \\ y = b + d \\ z = 0 \\ w = -a - b + c \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z \\ -1 & -1 & 1 & 0 & w \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & -1 & 2 & 0 & w+x \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 2 & 1 & x+y+w \end{array}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 2 & 1 & x+y+w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z \end{array}\right)$$

Se necesita que el sistema sea compatible, para ello z = 0 es la ecuación del subespacio suma.

Siendo z = 0 , el sistema es compatible indeterminado , y por lo tanto se podrá expresar a un vector del subespacio suma (x ; y ; 0 ; w) de infinitas formas como suma de un vector de S y un vector de T .

Con las restantes ecuaciones encontraremos el valor de a , b , c y d .

$$\begin{cases} a + c = x \\ b + d = y \\ 2c + d = x + y + w \end{cases}$$ tomaremos a c como variable libre ; $$\begin{cases} a = x - c \\ b = y - d \\ d = x + y + w - 2c \end{cases}$$

Reemplazando el valor de d de la tercera ecuación en la segunda, resulta

$$\begin{cases} a = x - c \\ b = -x - w + 2c \\ d = x + y + w - 2c \end{cases}$$

Reemplazamos en

(x ; y ; 0 ; w) = (a; b; 0 ;- a-b) +(c; d; 0 ; c) =
(x – c ;- x – w +2 c ; 0 ; -x + c + x + w – 2 c) + (c ; x + y + w – 2 c ; 0 ; c) =
(x – c ; - x – w + 2 c ; 0 ; w – c) + (c ; x + y + w – 2 c ; 0 ; c)

Verifica que al sumar las dos últimas cuaternas se obtiene (x ; y ; 0 ; w)

Es decir, para una cuaterna determinada que pertenezca a la suma, por ejemplo:

(2 ; 3 ; 0 , 6) = (2 – c ; -2 – 6 + 2 c ; 0 ; 6 – c) + (c ; 2 + 3 + 6 – 2 c ; 0 ; c)
(2 – c ; – 8 + 2 c ; 0 ; 6 – c) + (c ; 11 – 2 c ; 0 ; c) Nota que el primer vector cumple las condiciones para pertenecer a S , cualquiera sea el valor de c real y el segundo vector cumple las condiciones para pertenecer a T.

Se podrá expresar a (2 ; 3 ; 0 , 6) de infinitas formas como suma de un vector de S y un vector de T .

Si c = 0 (2 ; 3 ; 0 ; 6) = (2 ; – 8 ; 0 ; 6) + (0 ; 11 ; 0 ; 0)
Si c = 1 (2 ; 3 ; 0 ; 6) = (1 ; – 6 ; 0 ; 5) + (1 ; 9 ; 0 ; 1)
Si c = - 2 (2 ; 3 ; 0 ; 6) = (4 ; – 12 ; 0 ; 8) + (-2 ; 15 ; 0 ; -2)

Entonces, al hacer S + W cada vector de la suma se puede obtener de manera única sumando uno de S y otro de W, en cambio, al hacer S + T cada vector de la suma se puede expresar de infinitas formas sumando un vector de S y otro de T .

Definición:

Sean S y H dos subespacios de V
Se dice que la suma de S + H es directa si para cada vector $\vec{v}$ perteneciente a S + H existen $\overrightarrow{v_1} \in S$ y $\overrightarrow{v_2} \in H$ **únicos**, tales que $\vec{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$. Y se denota S⊕H

Esto significa que existe una sola forma de descomponer cada vector del subespacio suma, como suma de dos vectores, uno de cada subespacio.

La suma de dos subespacios es directa si y sólo si la intersección de los subespacios es el vector nulo S⊕H

$$\boxed{S \oplus H \qquad \leftrightarrow \qquad S \cap H = \{\vec{0}\}}$$

En el ejemplo anterior S + W es una suma directa $S \oplus W$, mientras que S + T no es directa.

En la práctica, suele ser más sencillo comprobar la condición de que la intersección de los subespacios sea sólo el vector nulo $S \cap H = \{\vec{0}\}$ para decidir si la suma es directa o no.

Si la suma es directa, cualquier conjunto formado por un vector de S y otro de H (ambos no nulos) es linealmente independiente. En este caso, la unión de las bases de cada subespacio forman una base del subespacio suma.

El teorema de la dimensión de la suma, como $\dim(T \cap S) = 0$

$$\boxed{\mathbf{dim\ (T \oplus S) = dim\ (T) + dim\ (S)}}$$

Recuerda que siempre, sea directa o no, se cumple:

$$\dim(S \cap T) \leq \left\{ \begin{array}{c} \dim(S) \\ \dim(T) \end{array} \right\} \leq \dim(S + T)$$