DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES SIMÉTRICAS - APLICACIÓN A CÓNICAS FORMULACIÓN GENERAL

En lo que vamos a trabajar a continuación nos basaremos en un teorema del Álgebra Lineal (que no demostraremos) que establece :

Las matrices reales simétricas son diagonalizables con autovalores reales y autovectores ortogonales.

Ese teorema nos asegura entonces que para una matriz simétrica real podremos encontrar siempre sus autovalores reales y sus autovectores serán ortogonales , pudiendose por lo tanto diagonalizarlas. En el caso de autovalores repetidos se podrán encontrar tantos autovectores ortogonales como multiplicidad algebraica de los mismos.

Ejemplo 1

$\begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$, autovectores y autovalores :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 1, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow 3$$

Ejemplo 2

Si sabemos que A es una matriz simétrica real de 2x2 y que sus autovalores son 1 y -2 y que el autovector correspondiente a 1 es (1,-1) , entonces podemos saber que un autovector posible para -2 es el (1,1) y entonces:

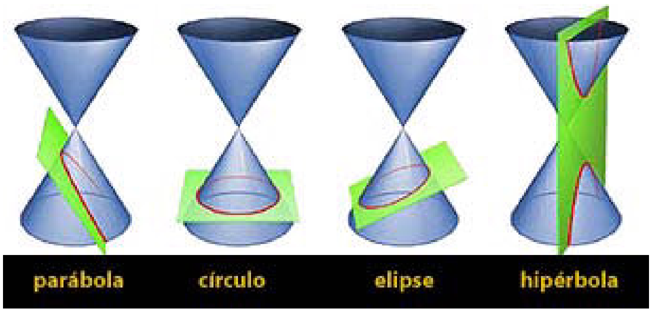
la matriz diagonal será D=$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde hemos ordenado los autovalores de menor a mayor

la matriz de cambio de coordenadas será P=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,ordenada según los autovalores , su inversa será P^{-1}=$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

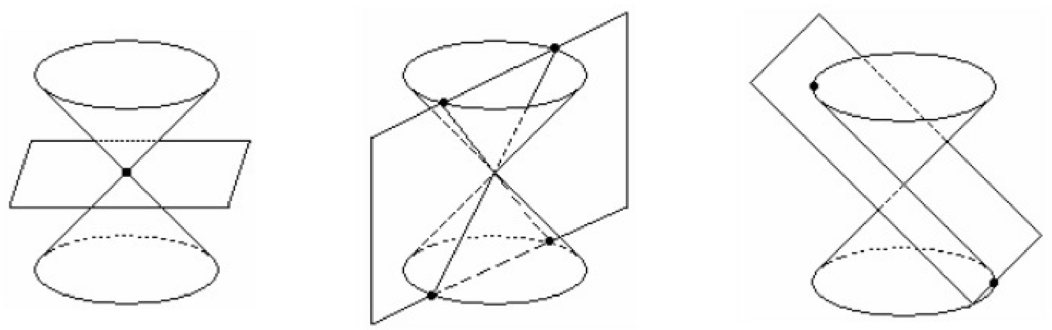
La matriz A será P.D.P^{-1}=$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

APLICACIÓN A CÓNICAS

Recordemos que las cónicas surgen de intersectar a un doble cono recto con un plano.



y que existen las llamadas secciones cónicas degeneradas que se convierten en un punto , dos rectas o una recta



La expresión general de una cónica es de la forma

$$\underbrace{Ax^2 + Bxy + Cy^2}+\underbrace{Dx + Ey}+\underbrace{F} = 0$$

donde lo que está encerrado en la primer llave es la parte cuadrática , lo de la segunda llave la parte lineal y la tercera la parte constante

Si nosotros planteamos la siguiente matriz

T= $\begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix}$ y efectuamos el producto $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$

$x\left(Ax + \frac{1}{2}By\right) + y\left(\frac{1}{2}Bx + Cy\right) =: Ax^2 + Bxy + Cy^2$

por lo tanto se obtiene la parte cuadrática de la cónica representada por una matriz simétrica (que siempre es diagonalizable con autovalores reales y autovectores ortogonales que pueden ser normalizados)

Luego existirá una base B ortonormal tal que T $=$ PDP^{-1} , donde P$=$C$_{BE}$ y P^{-1} es su inversa que , por lo visto en otros apuntes resulta ser igual a P^{t} , pues P es matriz ortogonal que cumple P^{-1} $=$ P^{t}.

D= $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Entonces $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}P}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\underbrace{P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$

donde la primera llave representa un cambio de base y se tienen otras coordenadas $\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}P$

y de la segunda llave $P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ que surge de

$$[\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}]^t = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = [\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}P]^t = P^t\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^t = P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Así que toda la primera parte queda como

$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$, y desaparece el término cruzado en xy.

Como sabemos que estamos pasando de una base ortonormal a otra base ortonormal , estamos realizando en R^2 una rotación de los vectores de la base que mantiene los ángulos entre los vectores y la longitud de los mismos.

La segunda parte (la lineal) la podríamos expresar como el producto de las matrices

$$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Dx \\ Ey \end{pmatrix}$$

Pero $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, de donde la expresión anterior resulta en

$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ y la parte lineal también queda expresada en términos de $\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}$

Por lo tanto la expresión $\underbrace{Ax^2 + Bxy + Cy^2} + \underbrace{Dx + Ey} + \underbrace{F} = 0$ queda escrita

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + F = 0$$

Y lo que hay que hallar son los autovalores y autovectores de la matriz T , y eventualmente completar cuadrados a posteriori.

EJEMPLO 1

Sea la cónica $2x - 2x^2 + y^2 + 4xy - 1 = 0$

La matriz T será $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, sus autovectores serán

$\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 2, \left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow -3$, correspondientes a los autovalores 2 y -3

Luego la matriz P de autovectores normalizados será $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, la matriz diagonal será $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$, la parte cuadrática será $2x'^2 - 3y'^2$

la parte lineal se calculará a partir de $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} & -\frac{4}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5}x' - \frac{4}{5}\sqrt{5}y' \\ 0 \end{pmatrix}$

luego $2x = \frac{2}{5}\sqrt{5}x' - \frac{4}{5}\sqrt{5}y'$

Luego toda la expresión queda como

$2x'^2 - 3y'^2 + \frac{2}{5}\sqrt{5}x' - \frac{4}{5}\sqrt{5}y' - 1 = 0 = 2(x'^2 + \frac{1}{5}\sqrt{5}x') - 3(y'^2 + \frac{4}{15}\sqrt{5}y') - 1 = 0$

Completando cuadrados resulta $(x' + \frac{\sqrt{5}}{10})^2 = x'^2 + \frac{1}{5}\sqrt{5}x' + \frac{1}{20}$ y $(y + \frac{2\sqrt{5}}{15})^2 = y'^2 + \frac{4}{15}\sqrt{5}y' + \frac{4}{45}$

De donde resulta que $x'^2 + \frac{1}{5}\sqrt{5}x' = (x' + \frac{\sqrt{5}}{10})^2 - \frac{1}{20}$ y $y'^2 + \frac{4}{15}\sqrt{5}y' = (y + \frac{2\sqrt{5}}{15})^2 - \frac{4}{45}$

y por lo tanto

$2(x'^2 + \frac{1}{5}\sqrt{5}x') - 3(y'^2 + \frac{4}{15}\sqrt{5}y') - 1 = 2((x' + \frac{\sqrt{5}}{10})^2 - \frac{1}{20}) - 3((y' + \frac{2\sqrt{5}}{15})^2 - \frac{4}{45}) - 1 =$
$2((x' + \frac{\sqrt{5}}{10})^2) - 3((y' + \frac{2\sqrt{5}}{15})^2\ ) - \frac{1}{10} + \frac{4}{15} - 1 = 0 = 2((x' + \frac{\sqrt{5}}{10})^2) - 3((y' + \frac{2\sqrt{5}}{15})^2\ ) - \frac{5}{6} = 0$

Toda la cónica se puede expresar entonces como

$2((x' + \frac{\sqrt{5}}{10})^2) - 3((y + \frac{2\sqrt{5}}{15})^2\ ) - \frac{5}{6} = 0$

llamando a $x' + \frac{\sqrt{5}}{10} = x''$ y $y' + \frac{2\sqrt{5}}{15} = y''$ la expresión queda como

$2x''^2 - 3y''^2 - \frac{5}{6} = 0$

o lo que es lo mismo $2x''^2 - 3y''^2 = \frac{5}{6}$ o simplificando

$\frac{12}{5}x''^2 - \frac{18}{5}y''^2 = 1$, que es una hiperbola

Si queremos graficar los ejes que corresponden a (x', y') y (x'', y'') podemos ver las expresiones que les corresponden

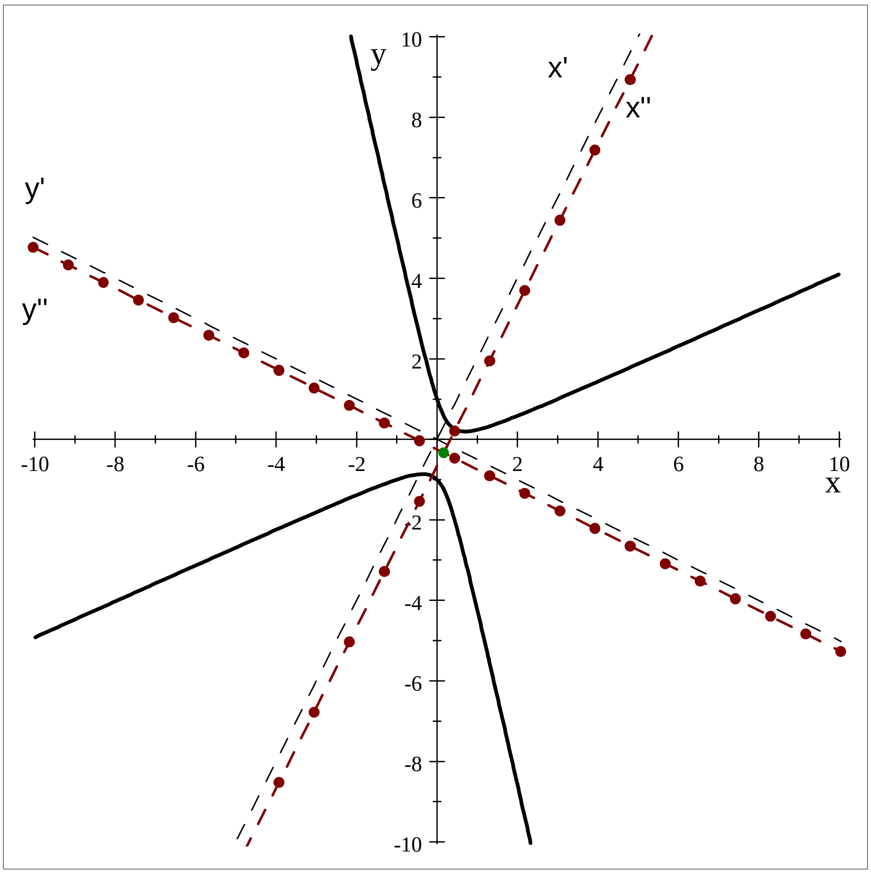
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5} & \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}\sqrt{5}x + \frac{2}{5}\sqrt{5}y \\ \frac{1}{5}\sqrt{5}y - \frac{2}{5}\sqrt{5}x \end{pmatrix}$ de donde surge que el sistema de ejes (x', y') está representado por las rectas $y = +2x$

y $y = -\frac{1}{2}x$ respectivamente y el cruce de ambos ejes coincide con el canónico.

Mientras que el sistema (x'', y'') lo está por las rectas $y = 2x - \frac{2}{3}$ y $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

El nuevo origen está desplazado respecto al canónico y se encuentra en el punto $(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3})$ que surge de igualar de despejar utilizando las dos últimas rectas.

Graficando



EJEMPLO 2

Sea la cónica dada por la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 7x - 5y + 7 = 0$

La matriz de la parte cuadrática es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,y $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 0, \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 2$ son sus autovectores y autovalores. Luego normalizando los autovectores resultan $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ para el autovalor 0 y $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ para el autovalor 2. La matriz P será $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, y su inversa es la transpuesta que es la misma matriz. La matriz diagonal D $= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y la parte cuadrática queda reducida a $2y'^2$

La parte lineal es el producto de $\begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{2}\sqrt{2} & -\frac{7}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{5}{2}\sqrt{2} & -\frac{5}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2}\sqrt{2}x' - \frac{7}{2}\sqrt{2}y' \\ -\frac{5}{2}\sqrt{2}x' - \frac{5}{2}\sqrt{2}y' \end{pmatrix}$$

Luego la ecuación transformada será

$$2y'^2 + \frac{7}{2}\sqrt{2}x' - \frac{7}{2}\sqrt{2}y' - \frac{5}{2}\sqrt{2}x' - \frac{5}{2}\sqrt{2}y' + 7 = 2y'^2 + \sqrt{2}x' - 6\sqrt{2}y' + 7 = 0$$

Completando cuadrados en y' resulta

$2y'^2 - 6\sqrt{2}y' = 2(y'^2 - 3\sqrt{2}y') = 2[(y' - 3\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \frac{9}{2}] = 2(y' - 3\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 9$

De tal forma que la ecuación queda entonces $2(y' - 3\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 9 + \sqrt{2}x' + 7 = 0$, o lo que es lo mismo $2(y' - 3\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \sqrt{2}x' - 2 = 2(y' - 3\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \sqrt{2}(x' - \sqrt{2}) = 0$

Haciendo $x'' = x' - \sqrt{2}$ y $y'' = y' - 3\frac{\sqrt{2}}{2}$ queda $2y''^2 + \sqrt{2}x'' = 0$ y pasando de término $2y''^2 = -\sqrt{2}x''$ que representa una parábola sobre el eje x''

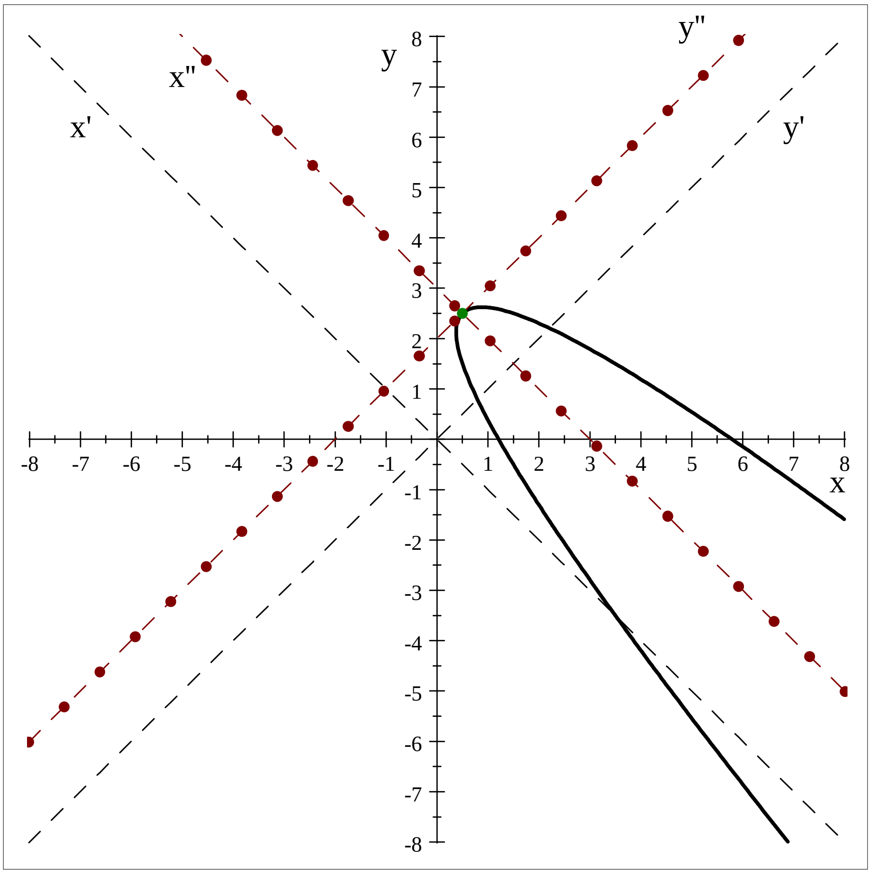
Si buscamos los ejes (x', y') y (x'', y'') resultan

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}y - \frac{1}{2}\sqrt{2}x \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{2}y \end{pmatrix}$ de donde surge que el sistema de ejes (x', y') está representado por las rectas $y = -x$ y $y = x$ respectivamente y el cruce de ambos ejes coincide con el canónico.

Mientras que el sistema (x'', y'') lo está por las rectas $y = -x + 3$ y $y = x + 2$

El nuevo origen está desplazado respecto al canónico y se encuentra en el punto $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ que surge de igualar de despejar utilizando las dos últimas rectas.

Graficando



EJEMPLO 3

Sea la cónica dada por la ecuación $3x^2 + 3y^2 - 2xy + 2x - 4y + 1 = 0$

La matriz de la parte cuadrática es $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, y sus autovalores y autovectores son : $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 2, \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 4$

Luego normalizando los autovectores resultan $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ para el autovalor 2 y $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ para el autovalor 4. La matriz P será $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, y su inversa es la transpuesta $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. La matriz diagonal D $=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y la parte cuadrática queda reducida a $2x'^2 + 4y'^2$

La parte lineal es el producto de $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}x' - \sqrt{2}y' \\ 2\sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}y' \end{pmatrix}$

Luego la ecuación transformada será
$2x'^2 + 4y'^2 + \sqrt{2}x' - \sqrt{2}y' + 2\sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}y' + 1 = 2x'^2 + 4y'^2 + 3\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' + 1 = 0$

Disponiendo para completar cuadrados resulta $2(x'^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}x') + 4(y'^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}y') + 1 = 0$

El primer término se puede expresar como $2((x' + \frac{3\sqrt{2}}{4})^2 - \frac{9}{8}) = 2(x' + \frac{3\sqrt{2}}{4})^2 - \frac{9}{4}$

El segundo término se puede expresar como $4((y' + \frac{\sqrt{2}}{8})^2 - \frac{1}{32}) = 4(y' + \frac{\sqrt{2}}{8})^2 - \frac{1}{8}$

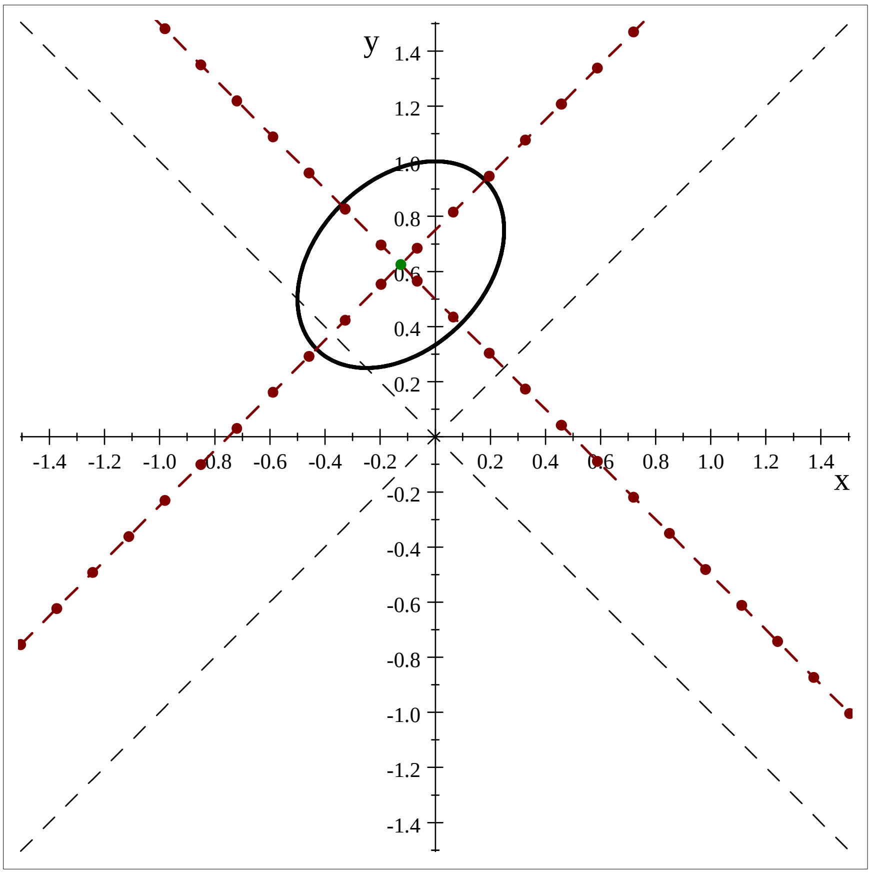
Luego agrupando resulta
$2(x' + \frac{3\sqrt{2}}{4})^2 - \frac{9}{4} + 4(y' + \frac{\sqrt{2}}{8})^2 - \frac{1}{8} + 1 = 2(x' + \frac{3\sqrt{2}}{4})^2 + 4(y' + \frac{\sqrt{2}}{8})^2 - \frac{3}{8} = 0$

Haciendo $(x' + \frac{3\sqrt{2}}{4}) = x''$ y $(y' + \frac{\sqrt{2}}{8}) = y''$ nos queda $2x''^2 + 4y''^2 = \frac{3}{8}$

Dividiendo por $\frac{3}{8}$ resulta $\frac{x''^2}{\frac{3}{16}} + \frac{y''^2}{\frac{3}{32}} = 1$ que resulta ser una elipse.

El sistema (x',y') está dado por las rectas $y = x$ e $y = -x$ que se cortan en el origen.

El sistema (x'',y'') está dado por las rectas $y = x + \frac{3}{4}$ e $y = -x + \frac{1}{2}$ que se cortan en el punto $(-\frac{1}{8}, \frac{5}{8})$



CARACTERIZACION DE LAS CÓNICAS A PARTIR DEL DETERMINANTE DE LA MATRIZ SIMÉTRICA

La matriz simétrica que nos permite rotar el sistema y eliminar la componente xy en la ecuación de la cónica , nos da también información acerca del tipo de cónica con la que estamos trabajando

Sabemos que $A = P.D.P^{-1}$, donde A es la matriz que representa a la parte cuadrática de la cónica , P es la matriz de cambio de coordenadas , P^{-1} es su inversa y D la matriz diagonal con los autovalores de A.

Luego $\det(A)=\det(P.D.P^{-1})=\det(P).\det(D).\det(P^{-1}) = \det(D)$ (recordar propiedades de determinantes de matrices).

Entonces el det(A) toma el valor del producto de los autovalores y de esa forma podrá ser positivo , negativo o cero.

Si $\det(A) > 0$, los autovalores son de igual signo y tenemos una elipse

Si $\det(A) > 0$, los autovalores son de distinto signo y tenemos una hipérbola

Si $\det(A) = 0$, uno de los autovalores es nulo y tenemos una parábola.