Ejercicio resuelto del Trabajo Práctico 6

Ejercicio 12.h - TP - 6. Hallar y clasificar todos los puntos críticos de la función

$$f(x,y)=2x-3y+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+5\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\qquad Dom\ f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x\neq 0\}$$

Resolución: Se calculan las derivadas parciales. Para el caso de la derivada parcial respecto de x

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2+\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2}+5\frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=2+\frac{x}{x^2+y^2}-5\frac{\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{x^2}{x^2}$$

Se tiene entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2+\frac{x}{x^2+y^2}-5\frac{y}{x^2+y^2}$$

Procediendo de manera análoga, se obtiene la derivada parcial respecto de y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-3+\frac{y}{x^2+y^2}+5\frac{x}{x^2+y^2}$$

Luego, el sistema de puntos críticos es

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2+\dfrac{x}{x^2+y^2}-5\dfrac{y}{x^2+y^2}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-3+\dfrac{y}{x^2+y^2}+5\dfrac{x}{x^2+y^2}=0\end{cases}$$

Se puede escribir

$$\begin{cases}\dfrac{2(x^2+y^2)+x-5y}{x^2+y^2}=0\\ \dfrac{-3(x^2+y^2)+y+5x}{x^2+y^2}=0\end{cases}$$

Teniendo en cuenta que en el dominio de la función

$$x^2+y^2\neq 0$$

Resulta

$$\begin{cases}2(x^2+y^2)+x-5y=0 & (I)\\ -3(x^2+y^2)+y+5x=0 & (II)\end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por 3, y la primera por 2, queda

$$\begin{cases}6(x^2+y^2)+3x-15y=0\\ -6(x^2+y^2)+2y+10x=0\end{cases}$$

Sumando las ecuaciones se obtiene la relación

$$3x-15y+2y+10x=0$$

O bien

$$13x-13y=0$$

Es decir

$$y=x\qquad\qquad (III)$$

Reemplazando (III) en (I), se tiene

$$2(x^2+y^2)+x-5y=0$$
$$2(x^2+x^2)+x-5x=0$$
$$4x^2-4x=0$$
$$4x(x-1)=0$$

Y de esta ecuación se obtiene dos soluciones. Una es $x_0=0$, la cual se descarta ya que los pares (x,y) en el dominio de la función son tales que $x\neq 0$. La otra solución de la ecuación cuadrática es

$$x_1=1$$

Y así, el valor correspondiente de y es

$$x_1=1 \quad \rightarrow \quad \overbrace{y_1=x_1}^{y=x}=1$$

Entonces, el único punto crítico de la función es

$$P_1=(x_1,y_1)=(1,1)$$

Por otra parte, las derivadas segundas de la función son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{-x^2+y^2+10xy}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{-5x^2+5y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{x^2-y^2-10xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Evaluadas en el punto crítico $P_1=(x_1,y_1)=(1,1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_1)=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(P_1)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(P_1)=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_1)=-\frac{10}{4}=-\frac{5}{2}$$

Luego, el hessiano en ese punto crítico es

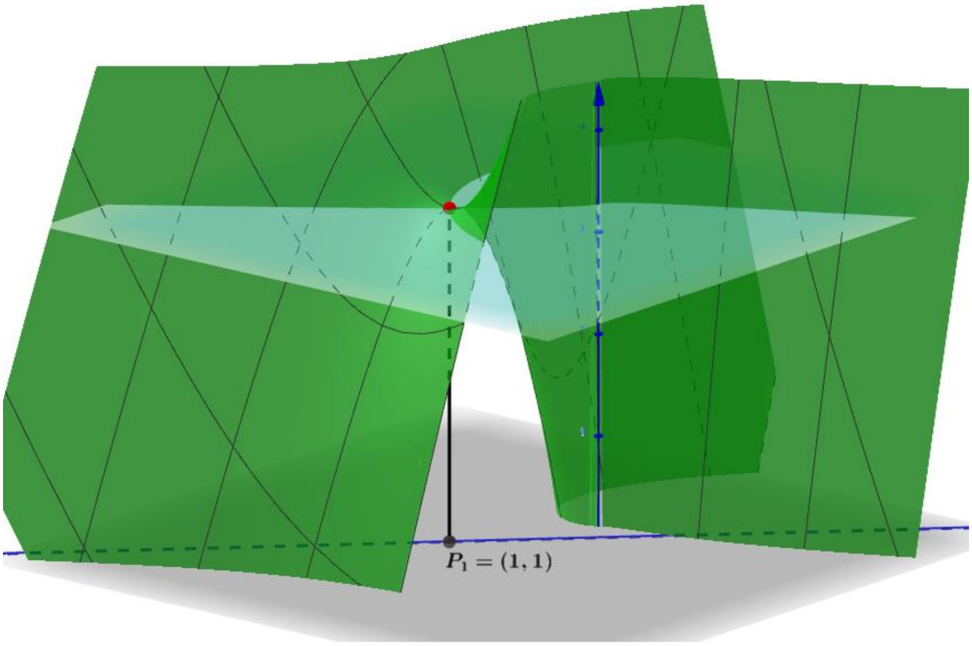
$$\Delta_f(P_1)=\det\left[H_f(P_1)\right]=\det\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(P_1)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(P_1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_1)\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\end{vmatrix}=\frac{-25-1}{4}=-\frac{26}{4}$$

$$\Delta_f(P_1)=\det=\begin{vmatrix}\frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\end{vmatrix}=\frac{-25-1}{4}=-\frac{26}{4}=-\frac{13}{2}<0$$

En consecuencia, la función

$$f(x,y)=2x-3y+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+5\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Posee un punto de ensilladura en el punto crítico $P_1=(x_1,y_1)=(1,1)$.



Representación geométrica de la gráfica de la función $z = f(x, y)$, el punto crítico $P_1 = (1, 1)$ y el plano horizontal, tangente a la gráfica de f en el punto $P = \big(1, 1, f(1, 1)\big)$