Limite de funciones de varias variables

Casos de varias variables que pueden resolverse con herramientas de una variable.

Ejemplo 1

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x+y)-1}{x+y}$$

Si llamamos $u = u(x,y) = x + y$, como, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y) = 0 = \lim_{u\to 0} u$

Sustituyendo en el límite dado queda:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x+y)-1}{x+y} = \lim_{u\to 0}\frac{\cos u - 1}{u} \overset{L'H}{\cong} \lim_{u\to 0}\frac{-\operatorname{sen} u}{1} = 0$$

Ejemplo 2

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{xy}$$

Llamamos $u = u(x,y) = x\,y$, como, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x\,y) = 0 = \lim_{u\to 0} u$

Nos queda:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{xy} = \lim_{u\to 0}\frac{e^{u}-1}{u} \overset{L'H}{\cong} \lim_{u\to 0}\frac{e^{u}}{1} = 1$$

Ejemplo 3

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\, sen\, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Llamamos $u = u(x,y) = x^2 + y^2$, como, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2) = 0 = \lim_{u\to 0} u$

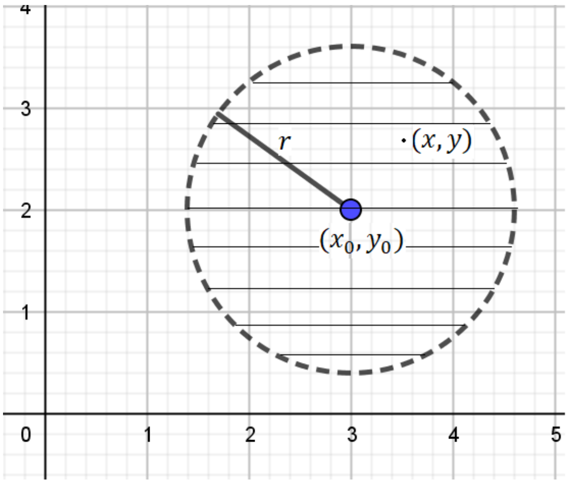
Nos queda:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\, sen\, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{u\to 0} \underbrace{u}_{\to 0}\ \underbrace{sen\, \frac{1}{\sqrt{u}}}_{Acotado} = 0$$

Para introducirnos en la definición de límite, primero necesitamos definir en el plano los conceptos de disco y punto de acumulación.

Disco: Dado un punto fijo del plano, (x_0, y_0), y un radio no nulo, $r > 0$, se define como disco de centro (x_0, y_0) y radio r, al conjunto de puntos del plano que están a una distancia menor que r del punto (x_0, y_0), esto es:

$$D[(x_0, y_0), r] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$$



Llamaremos D' al disco D sin el centro

Punto de acumulación

Dado un punto (x_0, y_0) y un conjunto A no vacío del plano, diremos que (x_0, y_0) es un punto de acumulación del conjunto A, si se verifica:

$$D'[(x_0, y_0), r] \cap A \neq \emptyset$$

Para todo $r > 0$

Pasemos ahora a lo que es la definición de límite doble.

Definición 1. Sea la función $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde A es un conjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^2$ y sea el par (x_0, y_0) un punto de acumulación de A. Se dice que L es el límite de f cuando $(x, y) \in A \cap D'(x_0, y_0)$, tiende a (x_0, y_0), si para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, existe un $\delta \in \mathbb{R}^+$, tal que:

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon$$

Siempre que:

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

Y se escribe:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

Puede que cuando (x, y) tienda a (x_0, y_0), los valores de $f(x, y)$ no se acerquen a un valor particular, en este caso se dice que el límite no existe. Nótese además, que no se requiere que la función esté definida en (x_0, y_0), es decir que tal punto puede o no pertenecer a su dominio, pero sí debe ser un punto de acumulación de tal conjunto.

Calcular un límite por definición consiste en encontrar la relación entre los números ε y δ, la cual permitirá establecer qué tan cerca de (x_0, y_0) estará (x, y), si es que se consideran valores de $f(x, y)$ cercanos a L en menos que un cierto ε prefijado.

Ejemplo 1. La función

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2},\ \ \mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$$

tiene límite en el origen. Específicamente es:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$$

En este caso hay que mostrar que para todo $\varepsilon>0$, siempre es posible hallar un $\delta>0$ de forma tal que

$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ implica $|f(x,y)-0|<\varepsilon$

Observando que para todo par (x,y) del dominio de f se cumple que $0\leq x^2\leq x^2+y^2$, y de esta manera

$$0\leq\frac{x^2}{x^2+y^2}\leq 1$$

se deduce la siguiente relación:

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=|y|\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|\leq|y|\leq\sqrt{x^2+y^2}$$

Es decir que $|f(x,y)-0|\leq\sqrt{x^2+y^2}$. Por otra parte, de existir el número δ, este debe satisfacer la desigualdad $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$. Por lo tanto, siempre que se tome $\delta\leq\varepsilon$ será cierto que

$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ implica $|f(x,y)-0|\leq\sqrt{x^2+y^2}<\delta\leq\varepsilon$

En palabras, esto significa que, estando los pares (x,y) del dominio de f, cerca de (x_0,y_0) en menos que δ, los valores de f asociados a tales pares (x,y), estarán cerca de 0 (el límite) en menos que el ε prefijado.

Límite por trayectorias y límites radiales

Dado que el estudio del límite de una función se puede realizar de infinitas maneras, que son precisamente aquellas que permiten al par (x,y) del dominio de la función acercarse al punto de estudio (x_0,y_0), se emplea una técnica que consiste en estudiar el comportamiento de esa función por *trayectorias* particulares, que pasen por el punto de estudio, con el fin de obtener un posible valor de ese límite, si es que este existe.

Ejemplo 2. Estudiar el comportamiento de la función

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

Conforme (x,y) tiende al origen.

Si se estudia el comportamiento de f por los ejes de coordenadas, resulta que el límite "parcial" en tal caso es cero. Por ejemplo, para el eje de las abscisas se cumple:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)|_{\substack{y=0\\x\neq 0}} = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{2x0}{x^2 + 0^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Con lo cual, de existir el límite, este debería ser cero. Sin embargo, si el estudio se realiza por los puntos de la recta de ecuación $y = x$, se obtiene un valor distinto al anterior.

Véase pues:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)|_{\substack{y=x\\x\neq 0}} = \lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2 + x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Así, esta diferencia en los valores obtenidos muestra que el límite doble

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

no existe.

Cuando la trayectoria utilizada para estudiar el comportamiento de la función es una recta, los límites obtenidos se llaman "*límites radiales*".

Ejemplo 3. Investigar el comportamiento de la función

$$f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4 + y^2}$$

Cuando (x,y) se aproxima al origen.

En este caso todos los límites radiales valen cero. En el caso de la recta vertical el valor, evidentemente, es cero. Por otra parte, para los puntos de la recta $y = kx$ $(x \neq 0)$ resulta:

$$f(x,kx) = \frac{2x^3k}{x^4 + k^2x^2} = \frac{2kx}{x^2 + k^2}$$

Nótese que si $k = 0$ (el caso de la recta horizontal), la función f es constantemente nula, con lo cual, el límite obtenido en tal situación es también igual a cero. Por otro lado, cuando $k \neq 0$ se obtiene el siguiente resultado

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)|_{\substack{y=kx\\x\neq 0\\k\neq 0}} = \lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{2kx}{x^2 + k^2} = 0$$

Entonces, como se dijo antes, todos los límites radiales existen y valen cero. Ahora bien, es necesario comprender que, con tal información, solamente es posible asegurar que "de existir el límite doble, este debería ser cero", pero que no es posible aun asegurar la existencia cabal del límite doble, puesto que puede ocurrir que por otra trayectoria que permita hacer tender el par (x, y) al origen, se obtenga un valor de límite distinto de cero.

Tal cuestión ocurre en este caso al considerar la trayectoria $y = x^2,\ x \neq 0$.

$$f(x, x^2) = \frac{2x^4}{x^4 + x^4} = 1$$

Esto muestra que el valor que arroja f sobre cada punto de la curva de ecuación $y = x^2$, con $x \neq 0$, es constantemente igual a 1, luego:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)|_{\substack{y=x^2 \\ x\neq 0}} = \lim_{x\to 0} f(x, x^2) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Resultado que garantiza la no existencia del límite doble.

<u>Continuidad</u>

Definición 2. Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida en el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$ y sea el par $(x_0, y_0) \in A$. Se dice que f es continua en (x_0, y_0) si se cumple la igualdad:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Nótese que en la definición de continuidad sí se requiere que la función esté definida en (x_0, y_0).

Ejemplo 4. La función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & si\ (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ \ (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua en todo el plano. Fuera del origen es simple notar este hecho ya que se trata de un cociente de funciones polinómicas, siendo el denominador no nulo. Por otra parte, es también continua en el origen ya que (teniendo en cuenta el resultado del Ejemplo 1 se cumple la igualdad:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0,0).$$

Ejemplo 5. La función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2y}{x^4+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

es continua en todo el conjunto $A=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, pero no es continua en el origen.

Recordando lo visto en el Ejemplo 3, se sabe que el límite doble

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$

no existe, por lo cual es imposible que se verifique la igualdad requerida en la Definición 2 de continuidad. En conclusión, la función f no es continua en el origen.

Discontinuidad

Si ocurre el caso de que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=l\in\mathbb{R}$, pero $f(x_0,y_0)\neq l$, entonces estamos ante el caso de una discontinuidad evitable, al igual que si no estuviera definida $f(x_0,y_0)$ pero $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=l\in\mathbb{R}$, en ambos casos puede definirse $f(x_0,y_0)=l$, resultando ahora f continua en (x_0,y_0).

Si por el contrario, no existe el límite de f en (x_0,y_0), entonces estamos ante una discontinuidad no evitable.

Biblioteca digital. Cap 5, p. 167. Cálculo varias variables. W Mora.