UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA MATANZA
ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA II

CAMBIO DE BASE

En el ejercicio presente se intenta mostrar las particularidades del cambio de base (en realidad cambio de coordenadas) en un espacio vectorial.

Empezaremos buscando una base de un subespacio vectorial. Sea el mismo el conjunto siguiente : $W = \{(x, y, z) \in R^3 / x - 2y - z = 0\}$. Luego resulta que los vectores pertenecientes a W cumplen
$z = x - 2y, \to (x, y, z) \in W / (x, y, x - 2y) = (x, 0, x) + (0, y, -2y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, -2)$.
Por lo tanto los vectores $\{(1,0,1);(0,1,-2)\}$ generan W , son linealmente independientes , luego forman una base de dicho subespacio.
Ampliemos dicha base de W a una base de todo el espacio vectorial R^3. Para hacerlo solo debemos agregar un vector linealmente independientes con ellos. Elegimos por conveniencia el vector (1,0,0).
Entonces $B = \{\overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2}; \overrightarrow{v_3}\} = \{(1,0,1);(0,1,-2);(1,0,0)\}$ es una base de R^3.
Por ser una base de R^3 cada vector de dicho espacio vectorial se escribe como combinación ***única*** de los vectores que forman la base y la misma genera a ***todos*** los vectores de R^3.

Luego $(x, y, z) \in R^3 / (x, y, z) = \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,-2) + \gamma(1,0,0)$; donde α, β, γ son las ***coordenadas*** del vector (x,y,z) en la base B. Es fácil demostrar que las coordenadas de un dado vector en una base son únicas. Por lo tanto especificando valores para (x,y,z) encontraremos las coordenadas del mismo en dicho base. Eso se logra resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$x = \alpha + \gamma$$
$$y = \beta$$
$$z = \alpha - 2\beta$$

De donde resulta que $\alpha = 2y + z; \beta = y; \gamma = x - 2y - z$
Si elegimos el vector (2,1,5) expresado en la base canónica de R^3 (E = {(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)}) sus coordenadas en la base B serán (7,1,-5)
Y lo expresamos como $[2,1,5)]_B = (7,1,-5)$.
Si hubiésemos elegido el vector (3,1,1) sus coordenadas en la base B serían (3,1,0).¿Puede explicar porqué la última coordenada es nula?
Obviamente el sistema lineal que nos da las coordenadas se puede resolver matricialmente , ya que en forma matricial se expresaría como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Y como lo que pretendemos es (α, β, γ) como combinación de (x, y, z) tendremos que resolver

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&-2&0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&1&0\\1&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

En realidad estamos resolviendo un caso de cambio de coordenadas entre la "querible" base canónica y la base B.

A partir de este sencillo ejemplo podemos analizar como proceder en el caso de trabajar con dos bases arbitrarias de R^3 , sean estas una base $B=\{\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\}$ y otra $B^{´}=\{\overrightarrow{w_1};\overrightarrow{w_2},\overrightarrow{w_3}\}$.

Procediendo como en el caso anterior y sabiendo que ambas son bases , esto implica que cualquier vector de R^3 se puede expresar de manera unívoca como combinación de los vectores de una de ellas. En particular los vectores $\{\overrightarrow{w_1};\overrightarrow{w_2},\overrightarrow{w_3}\}$ se podrán expresan como combinación lineal de los $\{\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\}$.

Luego resulta

$$\begin{aligned}\overrightarrow{w_1}&=a_{11}\overrightarrow{u_1}+a_{21}\overrightarrow{u_2}+a_{31}\overrightarrow{u_3}\\ \overrightarrow{w_2}&=a_{12}\overrightarrow{u_1}+a_{22}\overrightarrow{u_2}+a_{32}\overrightarrow{u_3}\\ \overrightarrow{w_3}&=a_{13}\overrightarrow{u_1}+a_{23}\overrightarrow{u_2}+a_{33}\overrightarrow{u_3}\end{aligned}$$

donde $(a_{11},a_{21},a_{31});(a_{12},a_{22},a_{32});(a_{13},a_{23},a_{33})$ son las coordenadas de los vectores $\{\overrightarrow{w_1};\overrightarrow{w_2},\overrightarrow{w_3}\}$ respecto de los vectores $\{\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\}$ dispuestas ya como columnas de una matriz A , cuya expresión será

$$\text{A} = \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$$

Sea ahora un vector (x,y,z) cuyas coordenadas respecto a la base B´ son (a,b,c) , luego $(x,y,z)=a\overrightarrow{w_1}+b\overrightarrow{w_2}+c\overrightarrow{w_3}$.¿Cuáles serán sus coordenadas en la base B?

Desarrollando resulta

$$(x,y,z)=a.(a_{11}\overrightarrow{u_1}+a_{21}\overrightarrow{u_2}+a_{31}\overrightarrow{u_3})+b.(a_{12}\overrightarrow{u_1}+a_{22}\overrightarrow{u_2}+a_{32}\overrightarrow{u_3})+c.(a_{13}\overrightarrow{u_1}+a_{23}\overrightarrow{u_2}+a_{33}\overrightarrow{u_3})$$

Reagrupando

$$(x,y,z)=(a.a_{11}+b.a_{12}+c.a_{13})\overrightarrow{u_1}+(a.a_{21}+b.a_{22}+c.a_{23})\overrightarrow{u_2}+(a.a_{31}+b.a_{32}+c.a_{33})\overrightarrow{u_3}$$

de donde resulta que cada una de las expresiones encerradas entre los paréntesis representan las coordenadas del vector (x,y,z) en la base B.

Expresándolo matricialmente

$$\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right]_B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right]_{B^{´}}$$

De donde se deduce que las coordenadas de un vector en la base B conocidas las coordenadas de dicho vector en la base B´ se calculan multiplicando la matriz que expresa en forma de columnas las coordenadas de los vectores de la base B´ respecto de la base B por las coordenadas del vector en la base B´.

Si a la matriz A la llamamos $C_{B^{´}B}$, podemos escribir $[\vec{v}]_B=C_{B^{´}B}[\vec{v}]_{B^{´}},\forall\vec{v}\in R^3$

La matriz $C_{B'B}$ tiene por características :a) es cuadrada , b) es siempre invertible. ¿Puede explicar porqué ?
Elijamos ahora otra base de R^3 . Trabajando con el mismo subespacio del inicio podemos tomar como un vector componente de la nueva base al (1,-2,-1) y ampliamos a una base de R^3 con los vectores (2,1,0) y (0,-1,2). Luego nuestros vectores B´={$\overrightarrow{w_1};\overrightarrow{w_2},\overrightarrow{w_3}$} serán B´={(1,-2,-1) ;(2,1,0);(0,-1,2)}. Analice los vectores elegidos (no lo fueron al azar) ¿Descubrió algo? ¿Cómo comprobaría que realmente forman una base?(el docente puede estar engañándolo)
Ahora corresponde expresar a estos vectores como combinación lineal de B=$\{(1,0,1);(0,1,-2);(1,0,0)\}$

$$(1,-2,-1) = (-5)(1,0,1) + (-2)(0,1,-2) + 6(1,0,0)$$
$$(2,1,0) = 2(1,0,1) + 1(0,1,-2) + 0(1,0,0)$$
$$(0,1,-2) = 0(1,0,1) + 1(0,1,-2) + 0(1,0,0)$$

Luego la matriz del cambio de coordenadas de B´a B será

$$C_{B'B} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mientras que la matriz de cambio de coordenadas de B a B´será

$$\left(C_{B'B}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & 5/12 \\ -1/2 & 1 & -1/12 \end{pmatrix} = C_{BB'}$$

Si tomamos el vector cuyas coordenadas en la canónica eran (2,1,5) y en la base B eran (7,1,-5) , en la base B´ resultarán ser

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & 5/12 \\ -1/2 & 1 & -1/12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/6 \\ 17/12 \\ -25/12 \end{pmatrix}$$

Si en cambio buscáramos las coordenadas en B´ del vector cuyas coordenadas en la base canónica son (3,1,1) y en la base B son (3,1,0) el resultado sería

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & 5/12 \\ -1/2 & 1 & -1/12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Recuerde que al principio del ejercicio se le pidió que explicara porque la última coordenada del vector (3,1,1) en la base B era nula. Relacione ello con el hecho de que la primera coordenada del mismo vector en la base B´ es también nula. La explicación sirve para entender porque en ocasiones se realiza un cambio de base. Supongamos que las

coordenadas respecto a la base B´de un vector $\vec{v} \in W$ sean (α, β, χ) .¿Podría expresar en estas coordenadas una ecuación que cumplan todos los vectores de W?
En algún lugar del ejercicio se ha calculado la matriz que permite hacer el cambio de coordenadas de la base canónica E a la base B. Identifíquela.
Recordando las propiedades de producto de matrices exprese las matrices que permiten cambiar las coordenadas de la base E a la B´ y su inversa.
Como ejercitación complementaria elija una terna de números que representen las coordenadas de un vector en la base B´y encuentre sus coordenadas tanto en la base B como en la canónica E.

APLICACIÓN A LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

Dada una transformación lineal de un espacio vectorial V en otro espacio vectorial W , de dimensiones n y m respectivamente (T:V → W) , y siendo las siguientes bases :
$B = \{v_1, v_2, v_3, ...v_n\}; B' = \{w_1, w_2, w_3, ...w_m\}$ respectivamente de V y W ; es posible encontrar una matriz que representa a la transformación lineal en dichas bases.
Para ello planteamos
$T(v_1) = t_1, T(v_2) = t_2, T(v_3) = t_3, ...T(v_n) = t_n$; donde $t_1, t_2, t_3, ...t_n$ son n vectores del espacio vectorial W , o sea son los vectores transformados de los $v_i, i = 1, 2, ...n$
Como los vectores transformados pertenecen al espacio vectorial de llegada de la transformación y B´ es una base del mismo , entonces dichos vectores se pueden escribir como combinación lineal de los vectores de la base B´.

$$T(v_1) = t_1 = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3 + ... + a_{m1}w_m$$
$$T(v_2) = t_2 = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3 + ... + a_{m2}w_m$$
$$T(v_3) = t_3 = a_{13}w_1 + a_{23}w_2 + a_{33}w_3 + ... + a_{m3}w_m$$
$$..$$
$$T(v_n) = t_n = a_{1n}w_n + a_{2n}w_2 + a_{3n}w_3 + ... + a_{mn}w_m$$

Las coordenadas de los vectores t en la base B´ se escriben de tal forma que pueden ser ubicados como los elementos de una matriz mxn , o sea que tiene tantas filas como dimensión de W y tantas columnas como dimensión de V.
Ahora analicemos que función cumple dicha matriz. Sea v un vector del espacio vectorial V. Entonces puede ser escrito como una combinación lineal de los vectores de la base B.

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + ... + c_n v_n$$

Luego , desarrollando la expresión de T(v) respecto a la combinación lineal que representa al vector en el espacio vectorial de partida , resulta

$$
\begin{aligned}
&T(v) = T(c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + ... + c_nv_n) = \\
&c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + c_3T(v_3) + ...c_nT(v_n) = \\
&c_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + a_{31}w_3 + ... + a_{m1}w_m) + \\
&c_2(a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + a_{32}w_3 + ... + a_{m2}w_m) + \\
&c_3(a_{13}w_1 + a_{23}w_2 + a_{33}w_3 + ... + a_{m3}w_m) + \\
&.. \\
&c_n(a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + a_{3n}w_3 + ... + a_{mn}w_m) = \\
&(c_1a_{11} + c_2a_{12} + c_3a_{13} + ... + c_na_{1n})w_1 + \\
&(c_1a_{21} + c_2a_{22} + c_3a_{23} + ... + c_na_{2n})w_2 + \\
&(c_1a_{31} + c_2a_{32} + c_3a_{33} + ... + c_na_{3n})w_3 + \\
&... \\
&(c_1a_{m1} + c_2a_{m2} + c_3a_{m3} + ... + c_na_{mn})w_m
\end{aligned}
$$

Obtenemos así al vector transformado de v {T(v)} expresado en la base B´ donde las expresiones encerradas entre paréntesis y que multiplican a los vectores de la base B´, son las coordenadas del vector transformado T(v) en dicha base.

Pero dichas coordenadas pueden ser halladas mediante la multiplicación de las siguiente matrices

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & .... & a_{3n} \\ .. & .. & .. & .... & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & .... & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ .. \\ c_n \end{pmatrix}
$$

Por lo tanto la matriz de dimensión mxn que hemos hallado y que llamaremos “ matriz que representa a la transformación T: V→ W en las bases B y B´” , cumple la función que al multiplicarla por las coordenadas del vector v del espacio vectorial de partida expresado en la base B , da como resultado las coordenadas del vector transformado en el espacio vectorial de llegada expresado en la base B´.

$$
M_{BB'}(T) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & .... & a_{3n} \\ .. & .. & .. & .... & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & .... & a_{mn} \end{pmatrix}
$$

Veamos un ejemplo

Sea T:R^3 → R^2 , T(x,y,z,) = (2x-3y+z , x+y+z)

Si queremos hallar la matriz que representa a esta transformación lineal partiendo de la base canónica de R^3 y llegando a la base canónica de R^2 tendremos que calcular los transformados de los vectores de partida y expresarlos como combinación lineal de los de llegada.

T(1,0,0) = (2,1) = 2 (1,0) + 1 (0,1)
T(0,1,0) = (-3,1) = -3 (1,0) + 1 (0,1)
T(0,0,1) = (1,1) = 1(1,0) + 1 (0,1)
Luego la matriz que representa a la transformación lineal será

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos plantearnos como será la matriz de la transformación lineal partiendo de la base B{(1,1,1); (1,1,0);(1,0,0)} y llegando a la base B´={(1,2);(0,1)}
T(1,1,1) = (0,3) = 0 (1,2) + 3 (0,1)
T(1,1,0) = (-1,2) = -1 (1,2) + 4 (0,1)
T(1,0,0) = (2,1) = 2 (1,2) + -3 (0,1)
Luego la $M_{BB'}(T) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

Podríamos verificar que cumpla con la condición. Sea un vector de R^3 cuyas coordenadas en la base B sean [2,-1,0].
De acuerdo a lo que hemos hecho hasta aquí , podríamos hallar las coordenadas del vector transformado en la base B´ , simplemente multiplicando a la matriz de la transformación por las coordenadas dadas.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lo que significa que las coordenadas del vector transformado en la base B´ son [1,2].
¿Podemos hallar el vector transformado?. Obviamente será 1 (1,2)+2 (0,1) = (1,4)
¿Cuál es el vector de partida en la canónica?. Por supuesto para hallarlo debemos calcular:
2 (1,1,1) + -1 (1,1,0) + 0 (1,0,0) = (1,1,2)
¿Y cuál es el transformado del (1,1,2)?. Si aplicamos T (1,1,2) = (1,4).
Lo que nos indica que al transformar el vector (1,1,2) (expresado en la canónica de partida) da como resultado el (1,4) (expresado en la canónica de llegada).
Pero también podemos igualmente trabajar en las bases B y B´ y obtenemos que al aplicarle la $M_{BB'}$(T) a las coordenadas del mismo vector expresado en base B (que son (2,-1,0)) , da por resultado las coordenadas del transformado en la base B´ (que son (1,2))

Se podría haber hallado esta última matriz utilizando las matrices de cambio de coordenadas (cambio de base)
La expresión general sería $M_{BB'}(T) = C_{E'B'} M_{EE'}(T) C_{BE}$, que se lee como
“ ingreso por el extremo derecho las coordenadas de un vector expresado en la base B , con la acción de la primer matriz transformo las coordenadas a la base E(canónica de R^3) luego aplico la matriz de la transformación expresada en las base E y E´ (respectivamente bases canónicas de R^3 y R^2)y por último al vector transformado que lo tenemos expresado en la base E´, le efectuamos un nuevo cambio de coordenadas pasándolo a expresar en la base B´”
Podemos hallar las matrices de cambio de coordenadas

$$C_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ C_{E'B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego si efectuamos el producto de matrices indicado , resulta

$$C_{E'B'}.M_{EE'}(T).C_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} = M_{BB'}(T)$$