T P 04 Ej. 4-b

Calcular las derivadas parciales de la siguiente función en los puntos indicados.

$$f(x,y) = e^{xy}\ln(x^2+y^2) \qquad en\ (1{,}0)\ y\ (0{,}1)$$

En este ejercicio vamos a resolver las derivadas parciales en el punto de las dos formas conocidas: por definición y por propiedades.

Empezamos con el punto $(\mathbf{1},\mathbf{0})$:

Por definición

$$\boldsymbol{f_x(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

$$f_x(1,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h,0)-f(1{,}0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{(1+h)*0}\ln((1+h)^2+0^2)-\ e^0\ln(1^2+0^2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln((1+h)^2+0^2)-\ 0}{h}$$

$$(Aplicando\ L'Hopital) = \lim_{h\to 0}\frac{2(1+h)}{(1+h)^2} = \lim_{h\to 0}\frac{2}{(1+h)} = 2$$

$$\boldsymbol{f_y(x_0,y_0)} = \lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}$$

$$f_y(1,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(1,0+\mathrm{k})-f(1{,}0)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{e^{0+k}\ln((1)^2+k^2)-\ e^0\ln(1^2+0^2)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{e^k\ln(1+\ k^2)}{k}$$

$$(Aplicando\ L'Hopital) = \lim_{k\to 0} e^k\ln(1+\ k^2)+\ e^k\frac{2k}{(1+k^2)} = 0+1\frac{0}{1} = 0$$

Por propiedades

$$f_x(x,y) = ye^{xy}\ln(x^2+y^2)+e^{xy}\frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\boldsymbol{f_x(1,0)} = 0e^1\ln(1^2+0^2)+e^0\frac{2}{1^2+0^2} = 2$$

$$f_y(x,y) = xe^{xy}\ln(x^2+y^2) + e^{xy}\frac{2y}{x^2+y^2}$$
$$\boldsymbol{f_y(1,0)} = 1e^0\ln(1^2+0^2) + e^0\frac{0}{1^2+0^2} = 0$$

Finalmente con el punto $(\mathbf{0},\mathbf{1})$

Por definición

$$\boldsymbol{f_x(x_0,y_0)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$
$$f_x(0,1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,1)-f(0,1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^{(0+h)*1}\ln((0+h)^2+1^2) - e^0\ln(0^2+1^2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^h\ln(h^2+1) - 0}{h}$$
$$(Aplicando\ L'Hopital) = \lim_{h\to 0} e^h\ln(h^2+1) + e^h\frac{2h}{(h^2+1)}$$
$$= e^0\ln(1) + e^0\frac{0}{(0^2+1)} = 0$$

$$\boldsymbol{f_y(x_0,y_0)} = \lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}$$
$$f_y(0,1) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,1+\mathrm{k})-f(0,1)}{k}$$
$$= \lim_{k\to 0}\frac{e^{0(1+k)}\ln(0^2+(1+k)^2) - e^0\ln(0^2+1^2)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{\ln((1+k)^2)}{k}$$
$$(Aplicando\ L'Hopital) = \lim_{k\to 0}\frac{2(1+k)}{(1+k)^2} = \frac{2(1+0)}{(1+0)^2} = 2$$

Por propiedades

$$f_x(x,y) = ye^{xy}\ln(x^2+y^2) + e^{xy}\frac{2x}{x^2+y^2}$$
$$\boldsymbol{f_x(0,1)} = 1e^0\ln(0^2+1^2) + e^0\frac{0}{0^2+1^2} = 0$$

$$f_y(x,y) = xe^{xy}\ln(x^2+y^2) + e^{xy}\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\boldsymbol{f_y(0,1)} = 0e^0\ln(0^2+1^2) + e^0\frac{2}{0^2+1^2} = 2$$