T P 04 Ej. 20

Verificar que la superficie esférica $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=66$ es ortogonal al paraboloide $z = x^2+y^2$ en $\vec{P}_0 = (2,2,8)$.

Si expresamos las ecuaciones de las superficies dadas en forma implícita, tenemos:

$$\mathbb{S}_1: F(x,y,z) = (x-1)^2+(y-1)^2+z^2-66=0$$
$$\mathbb{S}_2: G(x,y,z) = x^2+y^2-z=0$$

También se cumple que:

$$\vec{P}_0 \in \mathbb{S}_1$$
$$\vec{P}_0 \in \mathbb{S}_2$$

Ahora bien, para que la superficie esférica sea ortogonal al paraboloide en $\vec{P}_0$, es decir $\mathbb{S}_1 \perp \mathbb{S}_2$, se debe cumplir que los planos tangentes de estas superficies en el punto de estudio lo sean.

Por lo tanto, sí:

$$\pi_1: plano\ tangente\ a\ \mathbb{S}_1\ en\ \vec{P}_0$$
$$\pi_2: plano\ tangente\ a\ \mathbb{S}_2\ en\ \vec{P}_0$$

Para que 2 planos sean ortogonales entre sí, sus vectores normales deben serlo también. Es decir, $\vec{\nabla}F(\vec{P}_0) \perp \vec{\nabla}G(\vec{P}_0)$, con lo cual, y recordando una de las propiedades del producto punto o producto escalar entre 2 vectores, tenemos:

$$\vec{\nabla}F(\vec{P}_0) \cdot \vec{\nabla}G(\vec{P}_0) = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla}F(\vec{P}_0) \perp \vec{\nabla}G(\vec{P}_0)$$

Entones:

$$\vec{\nabla}F(x,y,z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) = (2.(x-1)\,;2.(y-1)\,;2.z)$$

$$\vec{\nabla}G(x,y,z) = \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}\right) = (2.x\,;2.y\,;\,-1)$$

$\vec{\nabla}F(2\,,2\,,8) = (2\,,2\,,16)$

$\vec{\nabla}G(2\,,2\,,8) = \ (4\,,4\,,-1)$

Finalmente:

$\vec{\nabla}F(2\,,2\,,8) \cdot \ \vec{\nabla}G(2\,,2\,,8) = 0 \rightarrow$

$\vec{\nabla}F(2\,,2\,,8) \ \cdot \ \vec{\nabla}G(2\,,2\,,8) = \ (2\,,2,16) \ \cdot \ (4\,,4,-1) = 2.4 + 2.4 - 16.1$

$\vec{\nabla}F(2\,,2\,,8) \ \cdot \ \vec{\nabla}G(2\,,2\,,8) = 0$

Por lo tanto, queda demostrado que la esfera y el paraboloide son superficies ortogonales en $\vec{P_0} \ = \ (2,2,8)$.