Superficies parametrizadas.

Ejemplo 1

Trazar la superficie de ecuación

$$\Phi(u,v) = \left(\underbrace{2\cos(u)}_{x}, \underbrace{v}_{y}, \underbrace{2sen(u)}_{z}\right)$$

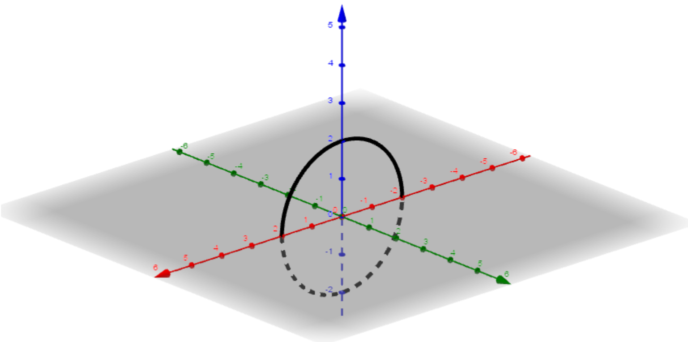
Observemos que

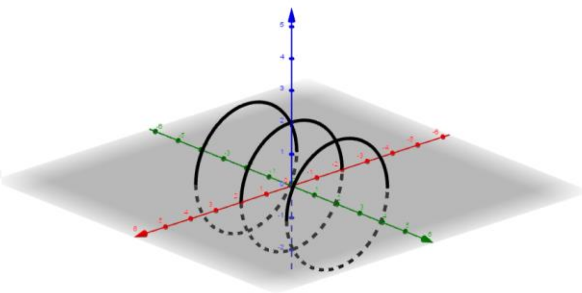
$$x = 2\cos(u)$$
$$y = v$$
$$z = 2sen(u)$$

Nótese que

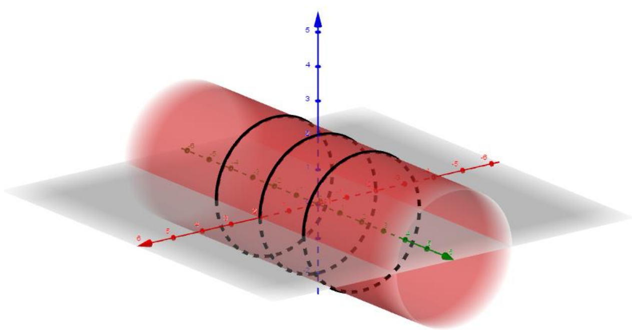
$$x^2 + z^2 = 4\cos^2(u) + 4sen^2(u) = 4$$

Esto significa que las variables xz definen circunferencias de radio 2, quedando la variable y libre ya que no hay restricción





La superficie es un cilindro circular de radio 2.



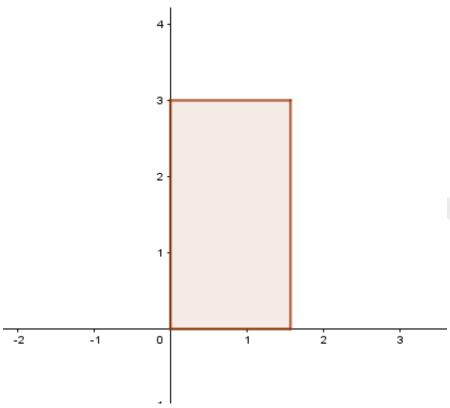
Una variante de ente tipo de superficie, es aquellos casos en los que incluye una restricción.

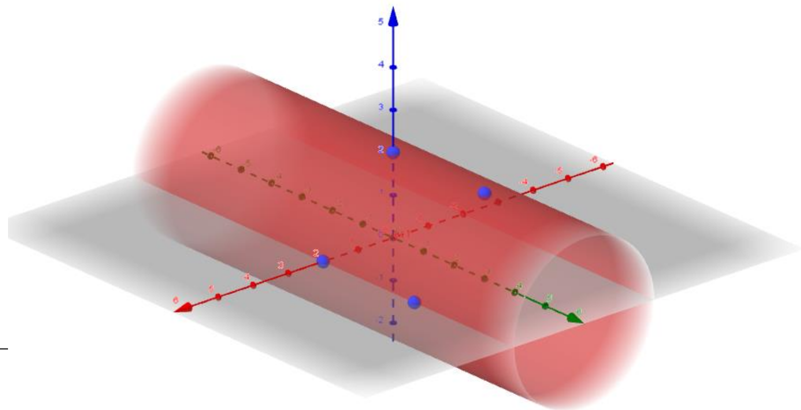
$$\Phi : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0\,, 3] \to \mathbb{R}^3$$

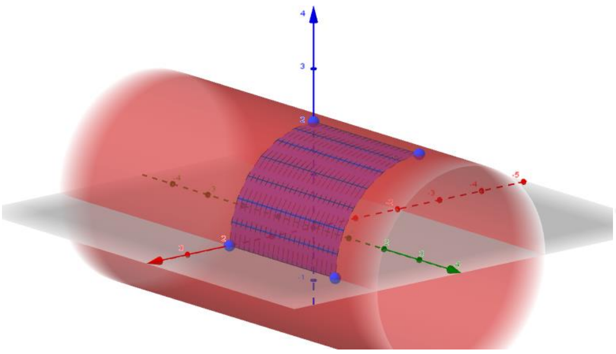
$$\Phi(u, v) = \left(2\cos(u)\,, v, 2sen(u)\right)$$

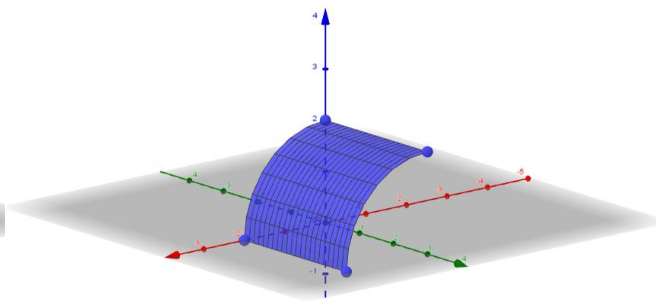
$$0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq v \leq 3$$





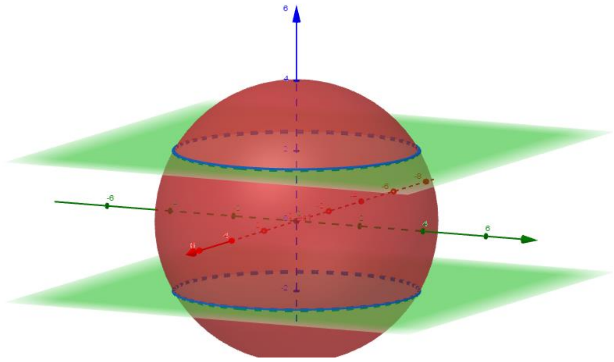




Ejemplo 2

Hallar la representación paramétrica para la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, que esta entre los planos $z = 2$ y $z = -2$

En principio, veamos que parte de la esfera vamos a parametrizar



Tenemos las coordenadas esféricas para poder parametrizar esta sección de la esfera.

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos(\theta) \cdot sen(\phi) \\ y = \rho \cdot sen(\theta) \cdot sen(\phi) \\ z = \rho \cdot \cos(\phi) \end{cases}$$

En este caso, $\rho = 4$

Y por lo tanto la parametrización queda:

$$\Phi(\theta, \phi) = (4 \cdot \cos(\theta) \cdot sen(\phi), 4 \cdot sen(\theta) \cdot sen(\phi), 4 \cdot \cos(\phi))$$

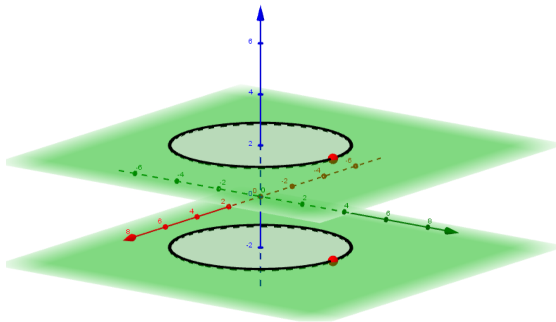
$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\leq \phi \leq$$

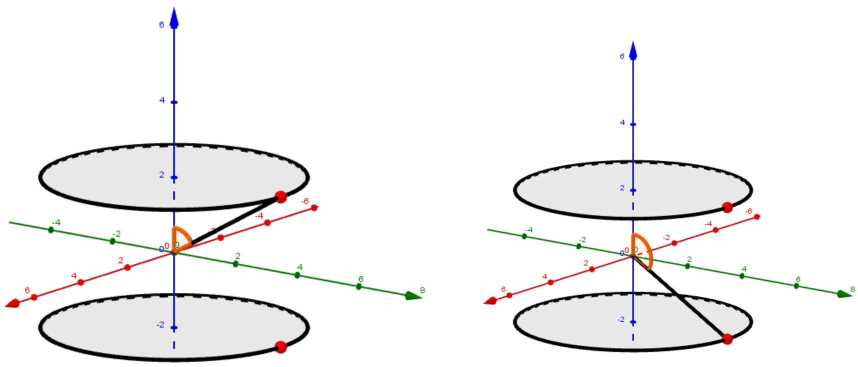
Para hallar el ángulo ϕ, utilizamos las coordenadas esféricas a partir de los puntos obtenidos con las coordenadas cartesianas.

$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ z = 2 \end{cases}$ entonces $x^2 + y^2 = 12$, y, por lo tanto, $P_1 = (0, \sqrt{12}, 2)$

$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ z = -2 \end{cases}$ entonces $x^2 + y^2 = 12$, y, por lo tanto, $P_2 = (0, \sqrt{12}, -2)$



Los puntos P_1 y P_2 definen entre que valores va a variar el ángulo ϕ



Búsqueda del ángulo para $P_1 = \left(0\,,\sqrt{12}\,,2\right)$

Teniendo en cuenta que: $z = 4\cos(\phi)$

$$2 = 4\cos(\phi)$$

$$\phi = \frac{1}{3}\pi$$

Búsqueda del ángulo para $P_2 = \left(0\,,\sqrt{12}\,,-2\right)$

Teniendo en cuenta que: $z = 4\cos(\phi)$

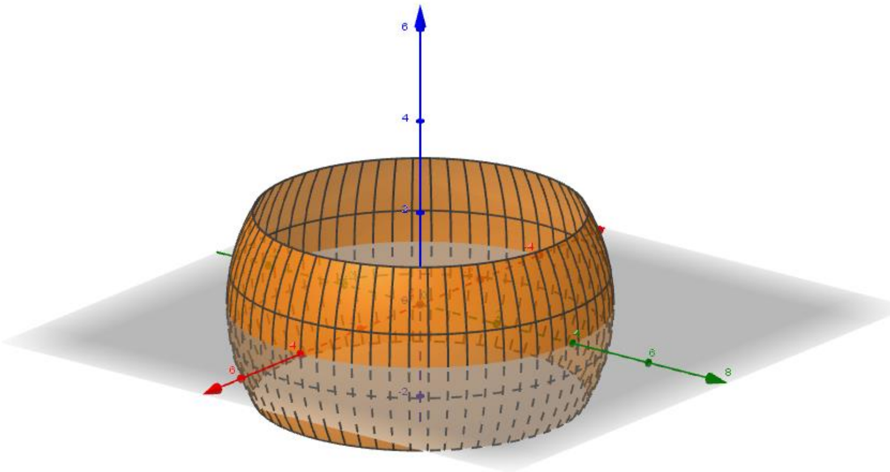
$$-2 = 4\cos(\phi)$$

$$\phi = \frac{2}{3}\pi$$

Por lo tanto, la superficie parametrizada estará dada como:

$$\Phi\colon [0,2\pi\,] \times \left[\frac{1}{3}\pi\,,\frac{2}{3}\pi\right] \to \mathbb{R}^3$$

$$\Phi(u,v) = (4\cdot\cos(u)\cdot sen(v), 4\cdot sen(u)\cdot sen(v), 4\cdot\cos(v))$$



Ejemplo 3

Hallar la representación paramétrica de la superficie cilíndrica $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ para $0 \leq z \leq 2$ e $y \leq 0$.

$$\alpha(t) = (arcos(t) + h, brsen(t) + k)$$

$$\Phi(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

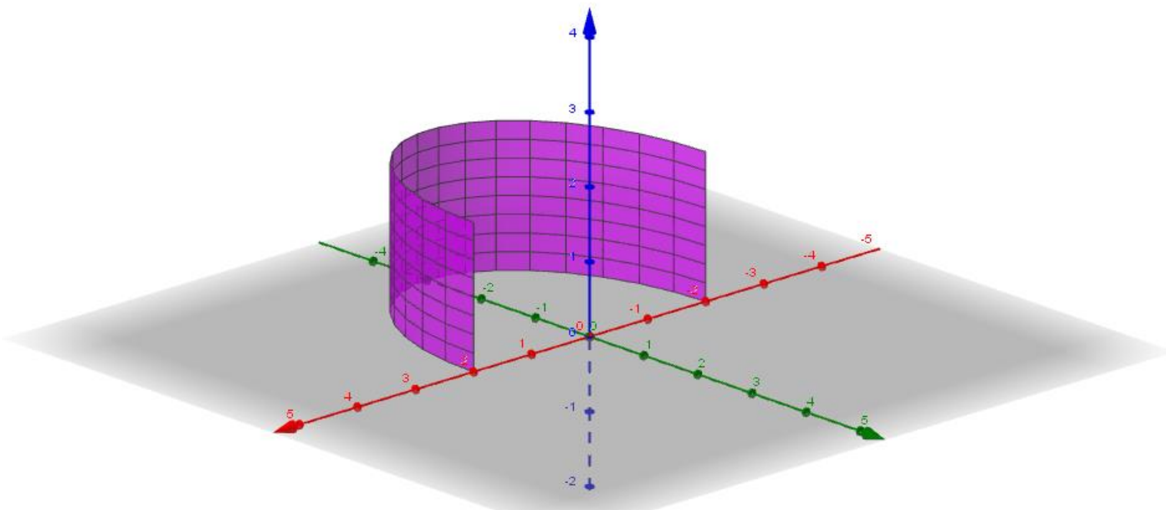
$$x = \text{acos}(u) = 2\cos(u)$$

$$y = bsen(u) = 3sen(u)$$

$$\Phi(u,v) = (2\cos(u), 3sen(u), v)$$

$$\pi \leq u \leq 2\pi$$

$$0 \leq v \leq 2$$



Área de superficie.

Ejemplo 1

Hallar el área de la superficie $z = \frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}\right)$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$

Área de superficie.

Sea $\Phi: U \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(u,v) = \big(x(u,v)\,, y(u,v)\,, z(u,v)\big)$, la parametrización de una superficie suave S.

El área de la superficie determinado por Φ es:

$$Area(S) = \iint_D \|\Phi_{\mathrm{u}}(u,v) \times \Phi_v(u,v)\|\, dudv$$

Para hallar el área en este caso debemos parametriza la superficie, en este caso, consideramos a $x = u$ e $y = v$, con lo cual, las ecuaciones paramétricas quedarían definidas como:

$$x = u \qquad y = v \qquad z = \frac{2}{3}\left(u^{\frac{3}{2}} + v^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$0 \leq u \leq 1$$

$$0 \leq v \leq 1$$

Por lo tanto, la parametrización queda definida como:

$$\Phi: [0,1] \times [0\,,1] \to \mathbb{R}^3,\ \Phi(u,v) = \left(u\,, v\,, \frac{2}{3}\left(u^{\frac{3}{2}} + v^{\frac{3}{2}}\right)\right)$$

Para la cual sus derivadas parciales serian:

$$\Phi_{\mathrm{u}}(u,v) = \left(1\,, 0\,, u^{\frac{1}{2}}\right) \qquad \Phi_{\mathrm{v}}(u,v) = \left(0\,, 1\,, v^{\frac{1}{2}}\right)$$

Obtenemos el producto vectorial:

$$\Phi_{\mathrm{u}}(u,v) \times \Phi_v(u,v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & u^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 1 & v^{\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \left(-u^{\frac{1}{2}}\,, -v^{\frac{1}{2}}\,, 1\right)$$

Y ahora su norma

$$\|\Phi_{\mathrm{u}}(u,v) \times \Phi_v(u,v)\| = \sqrt{\left(-u^{\frac{1}{2}}\right)^2 + \left(-v^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 1}$$

$$\|\Phi_{\mathrm{u}}(u,v) \times \Phi_v(u,v)\| = \sqrt{u+v+1}$$

Por lo tanto, queda definida la integral como:

$$\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{u+v+1}\, dudv$$

Resolviendo la integral respecto de u

$$\int_0^1 \sqrt{u+v+1}\, du = \frac{2}{3}(v+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(v+1)^{\frac{3}{2}}$$

Reemplazando esta expresión en la integral original nos queda:

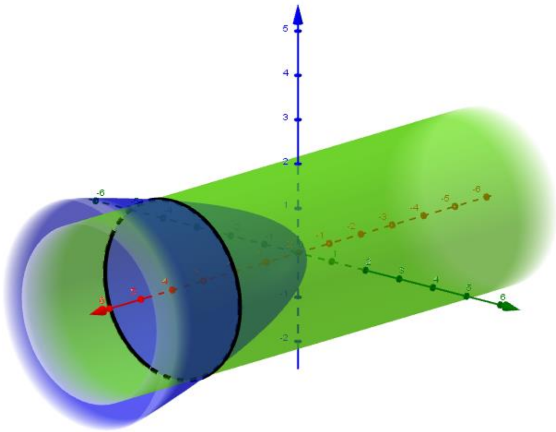
$$\frac{2}{3}\int_0^1 (v+2)^{\frac{3}{2}} - (v+1)^{\frac{3}{2}}\, dv$$

$$\frac{4}{15}\left((v+2)^{\frac{5}{2}} - (v+1)^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^1 = \frac{12}{5}\sqrt{3} - \frac{32}{15}\sqrt{2} + \frac{4}{15}$$

Ejemplo 2

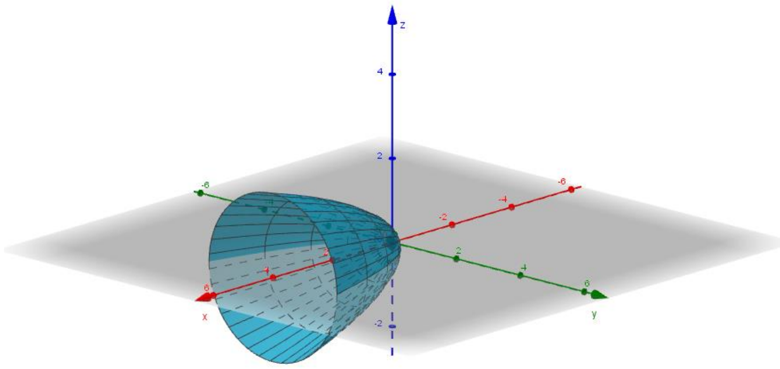
Hallar el área de la superficie de la parte del paraboloide $x = y^2 + z^2$, que esta dentro del cilindro $y^2 + z^2 = 4$

En principio, veamos la representación gráfica de esta situación



Debo hallar una parametrización de la superficie

$$x = y^2 + z^2 \quad con \quad 0 \leq x \leq 4$$



$$\Phi(y, z) = (y^2 + z^2\,, y\,, z)$$

Parametrización utilizando coordenadas polares.

$$y = rcos(\theta)$$

$$z = rsen(\theta)$$

$$\Phi(r, \theta\,) = \left(r^2\,, r \cdot \cos(\theta)\,\,, r \cdot sen(\theta)\right)$$

$$(r\,,\theta) \in [0,2] \times [0,2\pi]$$

Por lo tanto, es área de esta superficie estará dada por la integral:

$$\iint_D \|\Phi_{\mathrm{u}}(r,\theta) \times \Phi_v(r,\theta)\|\, drd\theta$$

Busquemos los elementos necesarios para armar esta integral.

$$\Phi(r,\theta\,) = \left(r^2\,, r \cdot \cos(\theta)\ \,, r \cdot sen(\theta)\right)$$

Para la cual sus derivadas parciales serian:

$$\Phi_{\mathrm{r}}(r,\theta) = \left(2r\,, \cos(\theta)\ \,, sen(\theta)\right) \qquad \Phi_{\theta}(r,\theta) = (0\,, -r \cdot sen(\theta)\,, r \cdot \cos(\theta))$$

Obtenemos el producto vectorial:

$$\Phi_{\mathrm{u}}(u,v) \times \Phi_v(u,v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2r & \cos(\theta) & sen(\theta) \\ 0 & -r \cdot sen(\theta) & r \cdot \cos(\theta) \end{vmatrix} =$$

$$\Phi_{\mathrm{u}}(u,v) \times \Phi_v(u,v) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & sen(\theta) \\ -r \cdot sen(\theta) & r \cdot \cos(\theta) \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2r & sen(\theta) \\ 0 & r \cdot \cos(\theta) \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2r & cos(\theta) \\ 0 & -r \cdot \mathrm{sen}(\theta) \end{vmatrix} k$$

$$\Phi_{\mathrm{u}}(u,v) \times \Phi_v(u,v) = \left(r\,, -2r^2 \cos(\theta)\ \,, -2r^2 sen(\theta)\right)$$

Y ahora su norma

$$\|\Phi_{\mathrm{u}}(u,v) \times \Phi_v(u,v)\| = \sqrt{r^2 + 4r^4 \cos^2(\theta) + 4r^4 sen^2(\theta)}$$

$$\|\Phi_{\mathrm{u}}(u,v) \times \Phi_v(u,v)\| = r\sqrt{1 + 8r^2}$$

Por lo tanto, queda definida la integral como:

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} r\sqrt{1 + 8r^2}\, d\theta dr$$

$$\underbrace{\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)}_{2\pi} \cdot \left(\int_0^2 r\sqrt{1 + 8r^2}\, dr\right) =$$

$\int_0^2 r\sqrt{1+8r^2}\,dr$ para resolver esta integral, aplicamos el método de sustitución, tomando $u = 1+8r^2$, con lo cual me quedaría:

$$\int_0^2 r\sqrt{1+8r^2}\,dr = \frac{1}{24}\cdot\sqrt{(1+8r^2)^3}\Big|_0^2 = \frac{11}{8}\sqrt{33} - \frac{1}{24}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^2\int_0^{2\pi} r\sqrt{1+8r^2}\,d\theta dr = (2\pi)\cdot\left(\frac{11}{8}\sqrt{33} - \frac{1}{24}\right) = \left(\frac{11}{4}\sqrt{33} - \frac{1}{12}\right)\pi$$

Integral de superficie de un campo escalar

Sea el campo escalar

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}: w = f(x, y, z)$$

De clase C^0 en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^3$. Y sea la superficie regular orientable $S \subset U$, parametrizada por la función vectorial

$$\Phi: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3: \Phi(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$$

Se define la integral de línea del campo escalar f sobre la superficie S como la integral doble

$$\iint_S f dS = \iint_D f[\Phi(u, v)] \cdot \|\Phi_{\mathrm{u}}(u, v) \times \Phi_v(u, v)\| du dv$$

<u>Ejemplo</u>

Calcular la integral de superficie

$$\iint_S y \, dS$$

Donde S es la superficie $z = x + y^2$ donde $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$

En principio hallamos una parametrización para la superficie dada

$$\Phi(u, v) = (u, v, u + v^2) \qquad (u\ , v) \in [0,1] \times [0,2]$$

Y definimos los elementos necesarios para la integral de superficie

$$f(x, y, z) = y$$

$$\Phi(u, v) = (u, v, u + v^2)$$

$$f[\Phi(u, v)] = v$$

$$\Phi_{\mathrm{u}}(u, v) = (1,0,1)$$

$$\Phi_v(u, v) = (0,1,2v)$$

$$\Phi_{\mathrm{u}}(u, v) \times \Phi_v(u, v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (-1, -2v, 1)$$

$$\|\Phi_{\mathrm{u}}(u, v) \times \Phi_v(u, v)\| = \sqrt{1 + 4v^2 + 1} = \sqrt{4v^2 + 2}$$

$$f[\Phi(u,v)]\cdot\|\Phi_{\mathrm{u}}(u,v)\times\Phi_v(u,v)\| = v\cdot\sqrt{4v^2+2}$$

Con lo cual, la integral de línea queda definida como:

$$\int_0^2\int_0^1 v\cdot\sqrt{4v^2+2}\,dudv =$$

$$\left(\int_0^1 du\right)\cdot\left(\int_0^2 v\cdot\sqrt{4v^2+2}\,dv\right) =$$

$$\left(\int_0^1 du\right)\cdot\left(\int_0^2 v\cdot\sqrt{4v^2+2}\,dv\right) =$$

$$\left(u|_0^1\right)\cdot\left(\frac{1}{12}\sqrt{(4v^2+2)^3}\Big|_0^2\right) =$$

$$(1)\cdot\left(\frac{13}{3}\sqrt{2}\right) = \frac{13}{3}\sqrt{2}$$