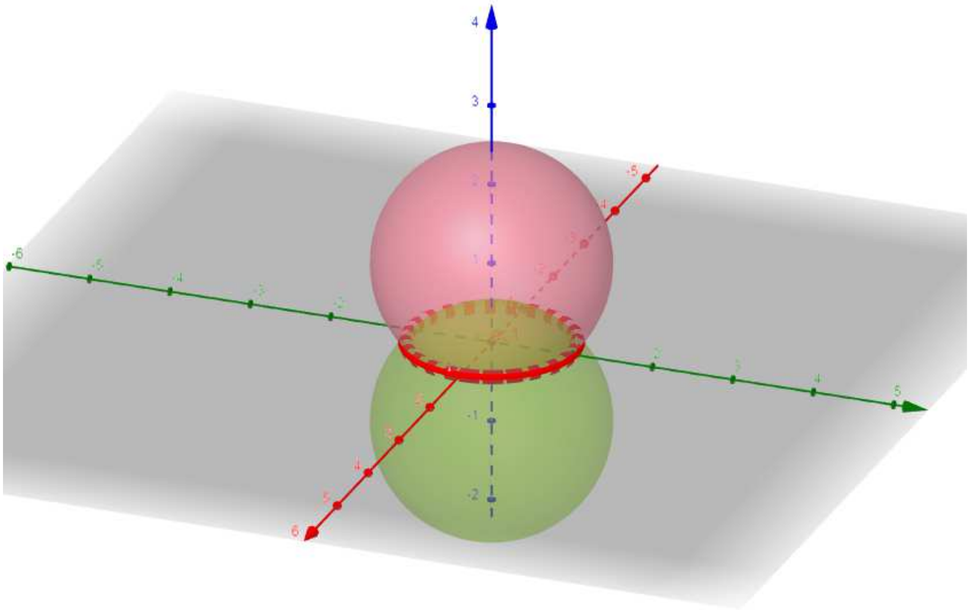
Ejercicio propuesto: Obtener la recta tangente a la curva definida por 2 Superficies en (0,1,0).

Método I (Solo Explicitas):

Nociones graficas: Curva intersección entre 2 Superficies

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2$$

$$G(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2$$



En este caso solemne, se puede halla la ecuación paramétrica de la curva (no siendo así en todos los casos).

$$\mathfrak{C}: \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2 \\ x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2 \end{cases}$$

$$\mathfrak{C}: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 - (z-1)^2 \\ 2 - (z-1)^2 + (z+1)^2 = 2 \end{cases}$$

$$\mathfrak{C}: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 - (z-1)^2 \\ -(z^2 - 2z + 1) + (z^2 + 2z + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\mathfrak{C}: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$r(t) = (1\cos(t)\,, 1sen(t), 0)\ 0 \leq\ t \leq 2\pi$$

ecuación paramétrica equivalente en función de t ecuación paramétrica equivalente en función de x

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - x^2$$

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$para\ y > 0 \rightarrow y = \sqrt{1 - x^2}\ \ para\ y < 0 \rightarrow y = -\sqrt{1 - x^2}$$

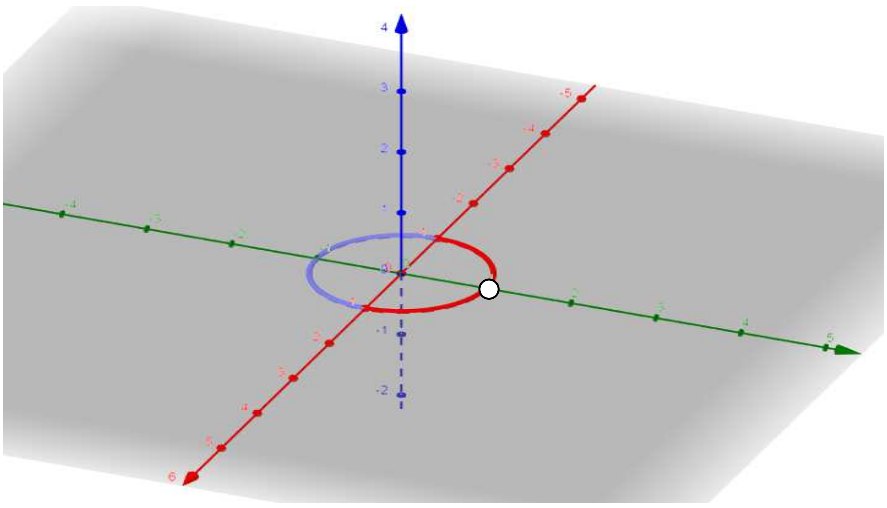
$$\mathfrak{C}: r(x) = \begin{cases} \left(x, \sqrt{1 - x^2}, 0\right) \\ (x, -\sqrt{1 - x^2}, 0) \end{cases}\ \ con\ -1 \leq x \leq 1$$

<u>Nociones graficas:</u> recta tangente a una curva

Para (0,1,0)

$$\mathfrak{C}^+: r(x) = \left(x, \sqrt{1 - x^2}, 0\right)\ \ con\ -1 < x < 1$$

$$r(0) = \left(0, \sqrt{1 - 0^2}, 0\right) = (0,1,0)$$

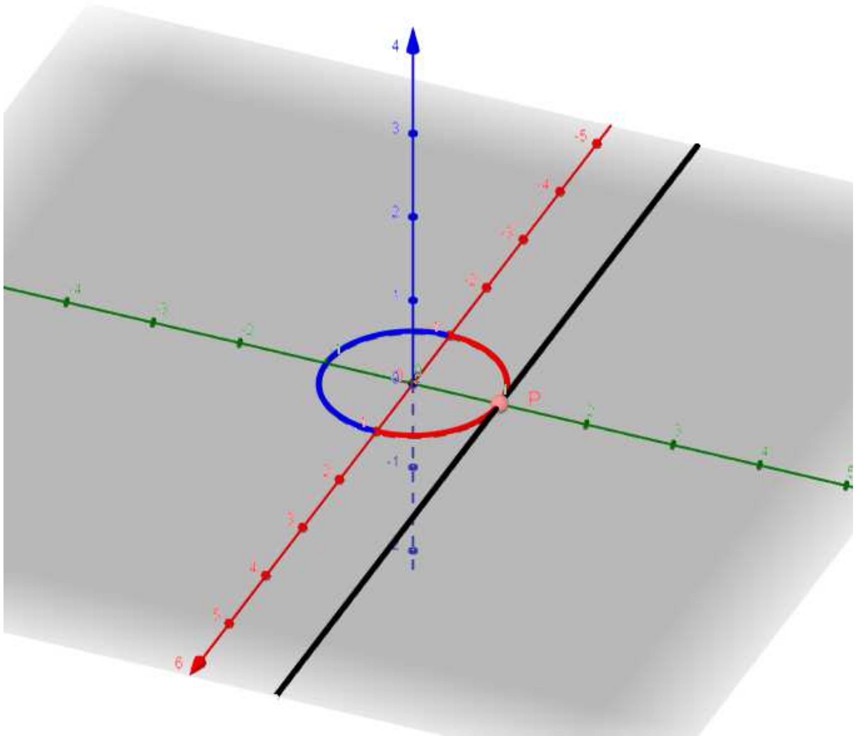


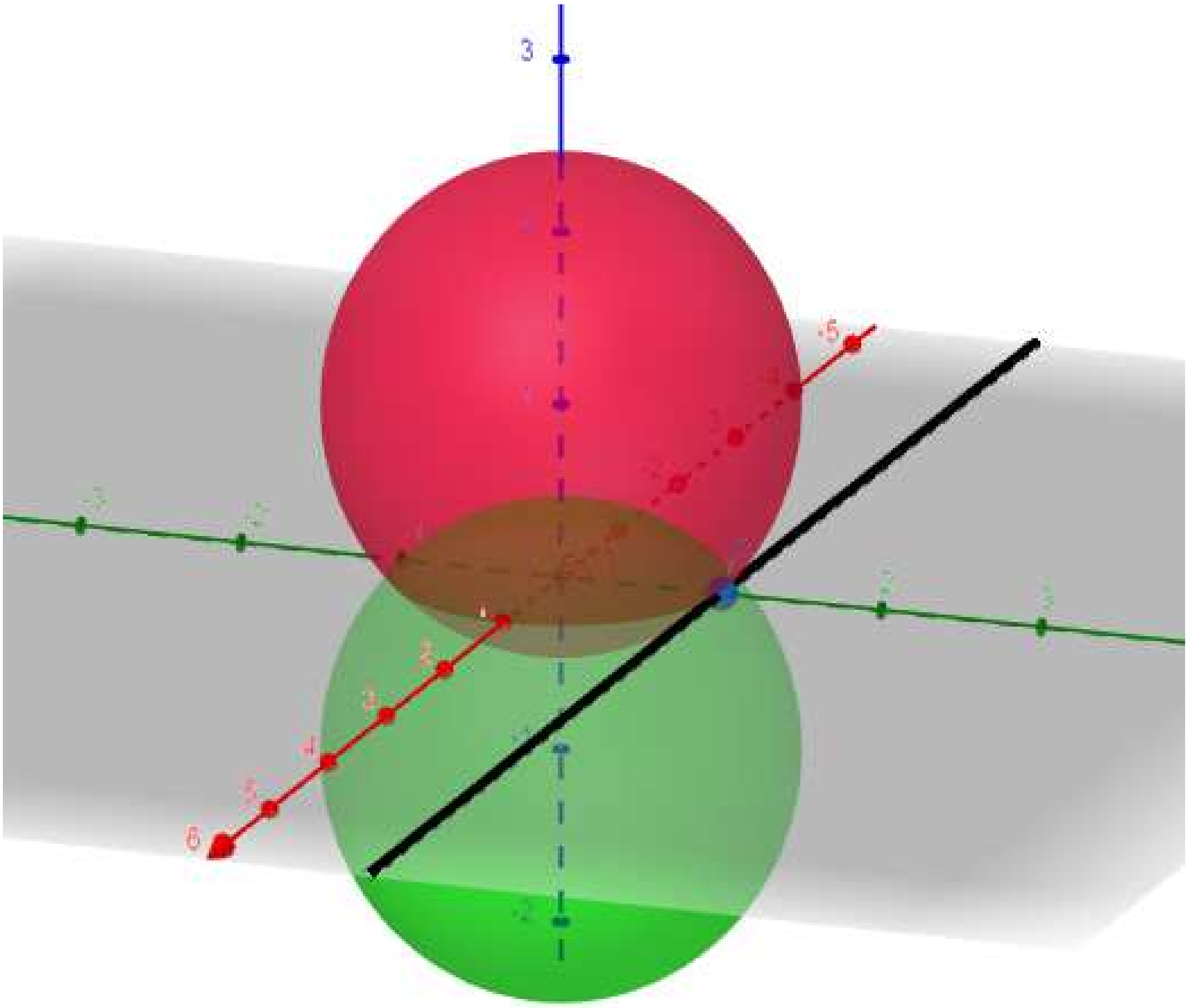
$$r(x) = \left(x, \sqrt{1 - x^2}, 0 + 0 \cdot x\right)$$

$$r'(x) = \left(1, \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}, 0\right)\ \ con\ -1 < x < 1$$

$$con\ x = 0 \rightarrow r(0) = (0,1,0);\ \ r'(0) = (1,0,0)$$

$$r_{tg}(t) = (0,1,0) + t(1,0,0) = (t, 1, 0)\ con\ t \epsilon \mathbb{R}$$


P


3
-5
2
3
4
5
6

Metodo II: Implicitamente

Dependiendo del formato que posee F y G, no en todos los casos se puede hallar la ecuación paramétrica EXPLICITA de la curva.

Corroboramos que el método también funciona en casos en los que se puede lograr.

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 2 = 0$$

$$G(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z+1)^2 - 2 = 0$$

Generalizando: recta tangente a una curva implícita entre $F(x,y,z) = 0$ y $G(x,y,z) = 0$

$$si\ y = f(x), z = g(x)$$

$$\mathfrak{C}: r(x) = \big(x, f(x), g(x)\big)$$

$$P = (0,1,0) \to r(0) = (0,1,0)$$

$$f(0) = 1\ , g(0) = 0$$

$$r'(x) = (1, f'(x), g'(x))$$

$$r_{tg}(t) = r(x_0) + t\,r'(x_0) = P + t\vec{v}$$

$$r_{tg}(t) = (0,1,0) + t(1, f'(0), g'(0))$$

$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z-1)^2 - 2$	$F_x(x,y,z) = 2x$ $F_y(x,y,z) = 2y$ $F_z(x,y,z) = 2(z-1) \quad = 2z-2$
$G(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z+1)^2 - 2$	$G_x(x,y,z) = 2x$ $G_y(x,y,z) = 2y$ $G_z(x,y,z) = 2(z+1) \quad = 2z+2$

Usando TFI2:

$$\begin{array}{ll} F_x(P) = 0 & G_x(P) = 0 \\ F_y(P) = 2 & G_y(P) = 2 \\ F_z(P) = -2 & G_z(P) = 2 \end{array}$$

Entonces

$$\left|\frac{J(F,G)}{J(y,z)}\right|_P = \left\|\begin{matrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{matrix}\right\| = (2)(2) - (-2)(2) = 8 \neq 0$$

$$\left|\frac{J(F,G)}{J(x,z)}\right|_P = \left\|\begin{matrix} F_x(P) & F_z(P) \\ G_x(P) & G_z(P) \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{matrix}\right\| = (0)(2) - (-2)(0) = 0$$

$$\left|\frac{J(F,G)}{J(y,x)}\right|_P = \left\|\begin{matrix} F_y(P) & F_x(P) \\ G_y(P) & G_x(P) \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{matrix}\right\| = (2)(0) - (0)(2) = 0$$

$$y_x = f'(x_0) = -\frac{\left\|\begin{matrix} F_x(P) & F_z(P) \\ G_x(P) & G_z(P) \end{matrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{matrix}\right\|} = -\frac{0}{8} = 0$$

$$z_x = g'(x_0) = -\frac{\left\|\begin{matrix} F_y(P) & F_x(P) \\ G_y(P) & G_x(P) \end{matrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{matrix}\right\|} = -\frac{0}{8} = 0$$

$r'(x_0) = \left(1, f'(x_0), g'(x_0)\right) = (1,0,0)$ se corrobora

$$r_{tg}(t) = (0,1,0) + t(1,0,0) = (t, 1,0) \ con \ t \epsilon \mathbb{R}$$

Método III: Producto vectorial de Gradientes (Solo en $\mathbb{R}^3$)

$$\nabla F(P) X \nabla G(P): \begin{matrix} i & j & k \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{matrix}$$

$$\nabla F(P) X \nabla G(P) = \left(\begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} F_x(P) & F_z(P) \\ G_x(P) & G_z(P) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x(P) & F_y(P) \\ G_x(P) & G_y(P) \end{vmatrix} \right)$$

$$\nabla F(P) X \nabla G(P) = \left(\begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} F_x(P) & F_z(P) \\ G_x(P) & G_z(P) \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} F_y(P) & F_x(P) \\ G_y(P) & G_x(P) \end{vmatrix} \right)$$

Se ve que los dos vectores (el primero mediante TFI, el segundo mediante multiplicación vectorial) obtenidos son paralelos:

$$\overrightarrow{v_{TFI}} = k(\nabla F(P) X \nabla G(P))$$

$$\overrightarrow{v_{TFI}} = \frac{\left(\begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} F_x(P) & F_z(P) \\ G_x(P) & G_z(P) \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} F_y(P) & F_x(P) \\ G_y(P) & G_x(P) \end{vmatrix} \right)}{\begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix}}$$

$$\overrightarrow{v_{TFI}} = \left(\frac{\begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix}}, - \frac{\begin{vmatrix} F_x(P) & F_z(P) \\ G_x(P) & G_z(P) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix}}, - \frac{\begin{vmatrix} F_y(P) & F_x(P) \\ G_y(P) & G_x(P) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix}} \right)$$

$$\overrightarrow{v_{TFI}} = \left(1, - \frac{\begin{vmatrix} F_x(P) & F_z(P) \\ G_x(P) & G_z(P) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix}}, - \frac{\begin{vmatrix} F_y(P) & F_x(P) \\ G_y(P) & G_x(P) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix}} \right)$$

$$\overrightarrow{v_{TFI}} = (1, f'(x_0), g'(x_0))$$

Por lo tanto se llega al mismo resultado al resolver el ejercicio con el método 2 o el método 3. si bien las rectas o planos pueden no tener la misma apariencia pero son equivalentes.

Incluso podemos determinar que $k = \frac{1}{\begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix}}$

$$\nabla F(P) X \nabla G(P) = \begin{matrix} i & j & k \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{matrix} = \begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{matrix}$$

$$\nabla F(P) X \nabla G(P) = \left(\begin{Vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}, - \begin{Vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} \right)$$

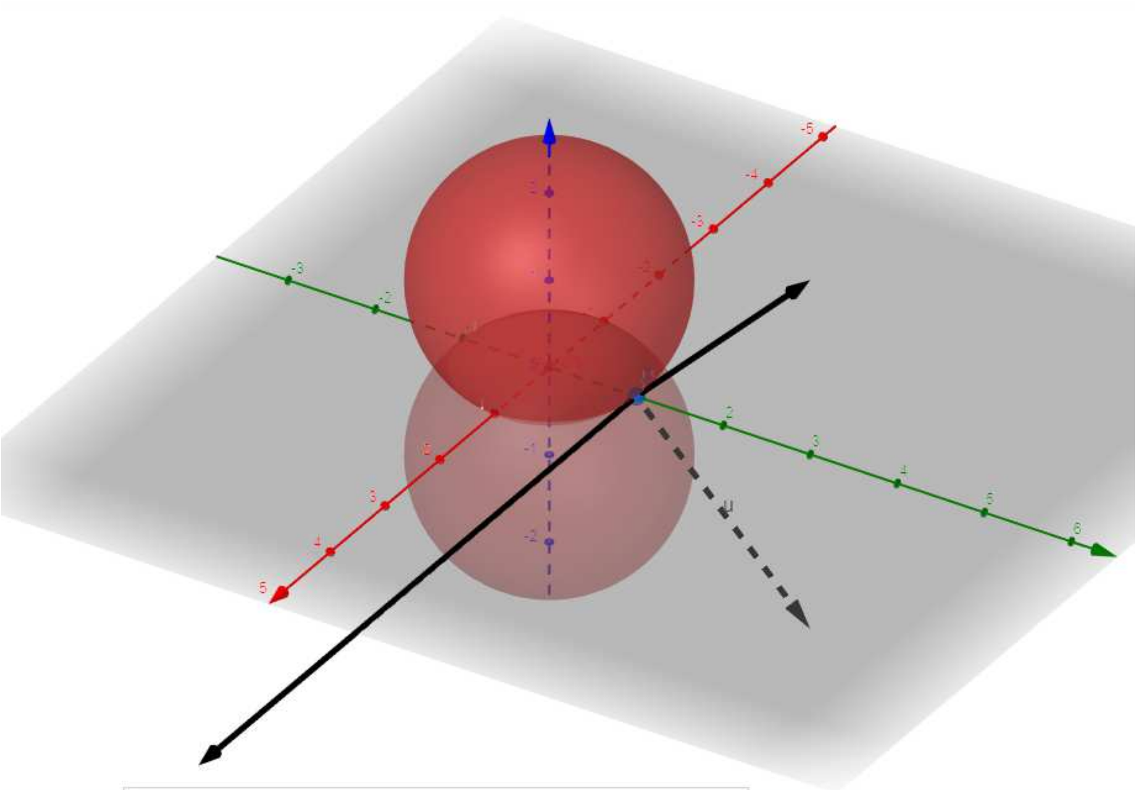
o

$$\nabla F(P) X \nabla G(P) = \left(\begin{Vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}, - \begin{Vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}, - \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix} \right)$$

$$\nabla F(P) X \nabla G(P) = (8,0,0)$$

$$r_{tg}(t) = (0,1,0) + t(8,0,0) = (8t, 1, 0)$$

es equivalente a los resultados hallados anteriormente



$$\Pi_n:\ \ N\cdot(x,y,z)=N\cdot P$$
$$\Pi_n:\ \ (1,0,0)\cdot(x,y,z)=(1,0,0)\cdot(0,1,0)$$
$$\Pi_n:\ \ x=0$$

$$\Pi_n:\ \ \nabla F(P)X\nabla G(P)\cdot(x,y,z)=\nabla F(P)X\nabla G(P)\cdot P$$
$$\Pi_n:\ \ (8,0,0)\cdot(x,y,z)=(8,0,0)\cdot(0,1,0)$$
$$\Pi_n:\ \ 8x=0$$
$$\Pi_n:\ \ x=0$$