T P 04 Ej. 30-v

Aplicando la regla de la cadena, calcular las derivadas de las funciones compuestas que se indican:

Calcular $F_x$, $F_y$y $F_y$ donde F = G o H

$$\begin{cases} H(u,v) = (H1(u,v), H2(u,v), H3(u,v)) = (uv, ev, v) \\ G(x,y,z) = \big(u(x,y,z), v(x,y,z)\big) = (xy, zy) \end{cases}$$

Para resolver este ejercicio debemos aplicar, como bien dice el enunciado, la regla de la cadena. La herramienta a usar es la Matriz Jacobiana, ya ejercitado en ejercicios anteriores. Como estamos buscando las derivadas parciales de la composición de dos funciones, El Jacobiano va a obtenerse del producto de dos matrices.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \cdots & \alpha \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z & \cdots & \omega \end{bmatrix}$$

donde $g_m$ son las componentes del campo G y $h_n$ son las componentes del campo H.

Si miramos la matriz resultante, la drivada parcial de la composición con respecto a la primera variable es:

$F_{x_1}$=(a,b,c,…) las componentes dependen de filas que tenga la matriz resultante

$\vdots$

$F_{x_n}$=($\alpha, \beta, \gamma$, ...) las componentes dependen de filas que tenga la matriz resultante.

Ahora, vamos al ejercicio en cuestión:

$$J = \begin{bmatrix} H_{1_u} & H_{1_v} \\ H_{2_u} & H_{2_v} \\ H_{3_u} & H_{3_v} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_y & v_y & v_z \end{bmatrix}$$

Operando

$$J = \begin{bmatrix} v & u \\ 0 & e^v \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ 0 & z & y \end{bmatrix}$$

Operando

$$J = \begin{bmatrix} vy & vx + uz & uy \\ 0 & e^v z & e^v y \\ 0 & z & y \end{bmatrix}$$

Ahora lo que hay que haces es reemplazar u y v por su equivalente denotado en la función $\alpha$:

J = $\begin{bmatrix} zy^2 & zyx + xyz & xy^2 \\ 0 & e^{zy}z & e^{zy}y \\ 0 & z & y \end{bmatrix}$

Una vez obtenida esta matriz, expresamos las derivadas parciales:

$F_x = (zy^2, 0,0)$

$F_y = (2xyz, e^{zy}z, z)$

$F_z = (xy^2, e^{zy}y, y)$