**UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA MATANZA**
**DEPARTAMENTO DE INGENIERIA E INVESTIGACIONES TECNOLÓGICAS**
**ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA II - AÑO 2011**

## ESPACIOS EUCLIDEOS

Recordamos la definición. Un espacio vectorial real $\mathbb{E}$ se dice euclídeo si hay una función < , >: que va de $\mathbb{E}$ x $\mathbb{E}$ –> $\mathbb{R}$ tal que cumple:

1) $<\vec{x},\vec{y}>=<\vec{y},\vec{x}>\ \forall\ \vec{x}\ ,\forall\ \vec{y}\in\mathbb{E}$
2) $<\vec{x},\vec{y}+\vec{z}>=<\vec{x},\vec{y}>+<\vec{x},\vec{z}>\ \forall\ \vec{x}\ ,\forall\ \vec{y}\ ,\ \forall\ \vec{z}\in\mathbb{E}$
3) $<\lambda\vec{x},\vec{y}>=<\vec{x},\lambda\vec{y}>=\lambda<\vec{x},\vec{y}>,\ \forall\ \vec{x}\ ,\forall\ \vec{y}\in\mathbb{E}\ ,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$
4) $<\vec{x},\vec{x}>\ >0$ si $\vec{x}\neq\vec{0}$

A partir de esta definición es posible introducir conceptos de tipor "geométricos" en un espacio vectorial , mediante la incorporación de los conceptos de norma de un vector, distancia entre dos vectores y el ángulo que forman entre ellos.

La norma del vector$\|\vec{x}\| = \sqrt{<\vec{x},\vec{x}>}$ , $\forall\ \vec{x}\in\mathbb{E}$

De trabajar en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ conocemos la fórmula $\cos(\alpha)=\frac{\vec{x}.\vec{y}}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}$ donde $\vec{x}.\vec{y}$ representaba el producto escalar (interior) entre los dos vectores.

Para que le extrapolación a otros espacios vectoriales tenga sentido es necesario demostrar que el valor absoluto del cociente es menor o igual a 1.

**DESIGUALDAD DE SCHWARZ** (**según los alemanes**) , **de CAUCHY** (**según los franceses**) , **de BUNYAKOVSKY** (**según los rusos**) **o DESIGUALDAD CSB para satisfacer a todos.**

En todo espacio euclídeo $\mathbb{E}$ , $\left|<\vec{x},\vec{y}>\right| \leq \|\vec{x}\|.\|\vec{y}\|\ \forall\ \vec{x}\ ,\forall\ \vec{y}\in\mathbb{E}$

La demostración puede encontrarse en la página 361 del libro Álgebra y Geometría de Eugenio Hernández - Editorial Addison-Wesley.

Luego es posible establecer que el coseno del ángulo entre dos vectores de un espacio euclídeo venga dado por la fórmula

$\cos(\alpha)=\frac{<\vec{x}\ ,\ \vec{y}>}{\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|}$ , con $<\vec{x},\vec{y}>$ un producto interior definido en un espacio vectorial real.

La Desigualdad CSB nos permite demostrar algunas propiedades básicas de un espacio euclídeo.

a) $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 =<\vec{x}+\vec{y},\vec{x}+\vec{y}>=<\vec{x},\vec{x}> + <\vec{x},\vec{y}> + <\vec{y},\vec{x}> + <\vec{y},\vec{y}>=<\vec{x},\vec{x}> +2 <$

$\|\vec{x}\|^2 + 2 <\vec{x},\vec{y}> +\|\vec{y}\|^2 \leq \|\vec{x}\|^2 + 2\left|<\vec{x},\vec{y}>\right| + \|\vec{y}\|^2 \leq \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = ($

De donde resulta que $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$

## VECTORES ORTOGONALES

Podemos definir también la ortogonalidad entre dos vectores. Dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son ortogonales $\Leftrightarrow <\vec{x},\vec{y}>=0$

b) $<\vec{x},\vec{y}>=0 \Leftrightarrow \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$

La demostración es similar a la anterior

$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 =< \vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y} >=< \vec{x},\vec{x} > + < \vec{x},\vec{y} > + < \vec{y},\vec{x} > + < \vec{y},\vec{y} >=< \vec{x},\vec{x} > +2 <$

$\|\vec{x}\|^2 + 2 < \vec{x},\vec{y} > + \|\vec{y}\|^2$. Ahora si $< \vec{x},\vec{y} >= 0$ , entonces el término intermedio se anula y se logra $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$

Y viceversa , si $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$ , entonces necesariamente $< \vec{x},\vec{y} >= 0$

**PROPOSICIÓN**

Los vectores ortogonales son linealmente independientes.

Demostración: Sean $\vec{x}$ e $\vec{y}$ (vectones no nulos de $\mathbb{E}$ ) ortogonales. Establecemos una combinación lineal de ellos igualada al vector nulo

a.$\vec{x}$+b.$\vec{y}$ $=\vec{0}$ , con a y b reales.

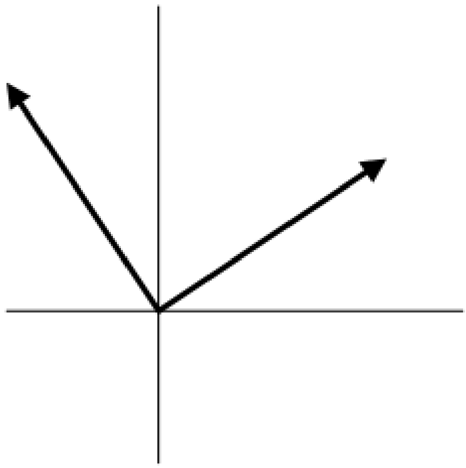
Si efectuamos el producto $<\vec{x}$,a.$\vec{x}$+b.$\vec{y}$ $>=< \vec{x},\vec{0} >= 0$. Aplicando las propiedades del producto interno resulta

a.$<\vec{x},\vec{x}>$+b.$<\vec{x},\vec{y} >= 0$. Y como $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son ortogonales , resulta a.$<\vec{x},\vec{x}>= 0$. Como $\vec{x} \neq \vec{0}$ , la única solución es que a=0

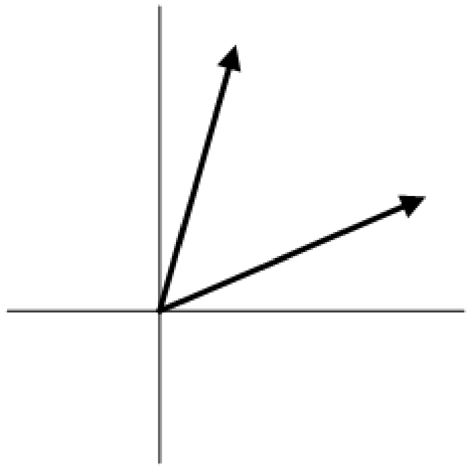
Repitiendo con $<\vec{y}$,a.$\vec{x}$+b.$\vec{y}$ $>=< \vec{y},\vec{0} >= 0$ , resulta b=0. Luego la única combinación lineal posible de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ que da el vector nulo es la trivial.

Si en lugar de dos vectores se hace con n vectores resulta similar.

La inversa no es válida.Vale el ejemplo siguiente en $\mathbb{R}^2$



Ortogonales y linealmente independientes



Linealmente independientes y no ortogonales

**BASES ORTONORMALES EN UN ESPACIO EUCLIDEO**

En ocasiones vamos a necesitar contar con una base ortogonal de vectores unitarios (ortonormal) de un determinado subespacio.Vamos a ver como podemos construir una base de esas características.

Para ello debemos contar con un conjunto de vectores linealmente independientes que generen ese subespacio. La metodología consiste en ir construyendo los vectores de la nueva base de a uno en uno , imponiéndole a cada nuevo vector la condición de ortogonalidad con los anteriores. Lo que también deseamos es que el nuevo conjunto de vectores , además de ser ortogonales , generen el mismo subespacio que los primigenios. Esto se asegura con el siguiente método:

**METODO DE ORTOGONALIZACION DE GRAM-SCHMIDT**

Sean $\vec{x_1},\vec{x_2},\ldots,\vec{x_k},\ldots$ una sucesión finita o infinita de vectores linealmente independientes en un espacio euclídeo E y sea W el subespacio generado por dichos vectores. Entonces existe un conjunto $\vec{y_1},\vec{y_2},\ldots,\vec{y_k},\ldots$ que cumplen:

1) el subespacio generado por $\{\vec{y_1},\vec{y_2},\ldots,\vec{y_k},\ldots\}$ coincide con W.

2) $<\vec{y_i},\vec{y_j}>= 0$ si i≠ j , $\forall 1 \leq i,j \leq k$

Tomamos el vector $\vec{y_1} = \vec{x_1}$

Luego planteamos que el vector $\vec{y_2}$ sea una combinación lineal de $\vec{x_2}$ e $\vec{y_1}$. También pedimos que $\vec{y_2} \perp \vec{y_1}$.

$\vec{y_2} = \vec{x_2} + \alpha_{12}\vec{y_1}$ , y $<\vec{y_2},\vec{y_1}>=<\vec{x_2} + \alpha_{12}\vec{y_1},\vec{y_1}>=0$. De donde resulta $<\vec{x_2},\vec{y_1}>+\alpha_{12}<\vec{y_1},\vec{y_1}>=0$ , o lo que es lo mismo

$\alpha_{12} = -\frac{<\vec{x_2},\vec{y_1}>}{<\vec{y_1},\vec{y_1}>}$. O sea que adjudicandole al escalar $\alpha_{12}$ el valor resultante del cociente de productos internos , $\vec{y_2}$ resultará ortogonal a $\vec{y_1}$ y además perteneciente al subespacio generado por $\vec{x_2}$ e $\vec{y_1}$.

Planteando lo mismo para $\vec{y_3} = \vec{x_3} + \alpha_{13}\vec{y_1} + \alpha_{23}\vec{y_2}$ y requiriendo que $\vec{y_3} \perp \vec{y_1}$ y $\vec{y_3} \perp \vec{y_2}$ , resulta

$\alpha_{13} = -\frac{<\vec{x_3},\vec{y_1}>}{<\vec{y_1},\vec{y_1}>}$ y $\alpha_{23} = -\frac{<\vec{x_3},\vec{y_2}>}{<\vec{y_2},\vec{y_2}>}$

Repitiendo el procedimiento se logran progresivamente vectores ortogonales a los anteriores y que pertenecen al mismo subespacio generados por los vectores primigenios.

**Ejemplo**

Vamos a trabajar en el espacio vectorial $\mathbb{C}_{[-1,1]}$ de las funciones reales continuas en el intervalo $[-1,1]$ , con el producto interior dado por $<f(x),g(x)>=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$

Sean las funciones $\{1,x,x^2\}$ base de un subespacio de $\mathbb{C}_{[-1,1]}$

Queremos hallar una base ortogonal de de dicho subespacio.

Comenzamos haciendo $\vec{y_1} = 1$

Luego $\vec{y_2} = x + \alpha_{12}1$. Pedimos que $\vec{y_2} \perp \vec{y_1}$ , o sea que $\int_{-1}^{1}(x + \alpha_{12}1).\,1dx = 0$

$$\int_{-1}^{1}(x + \alpha_{12}1).\,1dx = \int_{-1}^{1} xdx + \int_{-1}^{1} \alpha_{12}1dx = \left[\tfrac{1^2}{2}\right] - \left[\tfrac{(-1)^2}{2}\right] + \alpha_{12}.[(x = 1) - (x = -1)] = 0 + \alpha_{12}$$

Lo que implica que $\alpha_{12} = 0$ y en consecuencia $\vec{y_2} = x$

Hacemos lo mismo para $x^2$

$\vec{y_3} = x^2 + \alpha_{13}1 + \alpha_{23}x$ y pedimos $\vec{y_3} \perp \vec{y_1}$ y $\vec{y_3} \perp \vec{y_2}$.

$\int_{-1}^{1}(x^2 + \alpha_{13}1 + \alpha_{23}x).\,1.\,dx = 0$ , $\int_{-1}^{1}(x^2 + \alpha_{13}1 + \alpha_{23}x).\,x.\,dx = 0$

$\int_{-1}^{1}(x^2 + \alpha_{13}1 + \alpha_{23}x).\,1.\,dx = 0$ lleva como resultado que $\alpha_{13} = -\frac{1}{3}$

$$\int_{-1}^{1}(x^2+\alpha_{13}1+\alpha_{23}x).x.dx=0$$ lleva como resultado que $\alpha_{23}=0$

Luego $\overrightarrow{y_3}=x^2-\frac{1}{3}$

Y la base ortogonal de este subespacio será $\left\{1,x,x^2-\frac{1}{3}\right\}$.

Podemos corroborar que el producto interior cruzado de estas funciones se anula , y por lo tanto son ortogonales.

$$\int_{-1}^{1}(x^2-\tfrac{1}{3})dx=0;\ \int_{-1}^{1}xdx=0;\int_{-1}^{1}(x^2-\tfrac{1}{3})xdx:0.$$

Si queremos normalizar los vectores de la base debemos primero calcular los productos interiores de cada vector por si mismo.y luego la raiz cuadrada de cada uno.

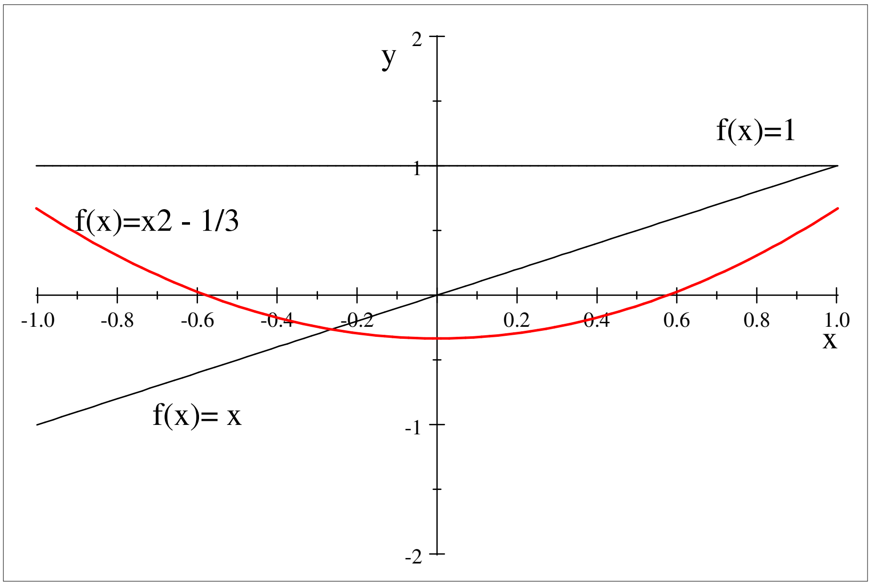
$$\int_{-1}^{1}(x^2-\tfrac{1}{3})(x^2-\tfrac{1}{3})dx=\tfrac{8}{45}$$, luego el módulo es; $\sqrt{\frac{8}{45}}$

$$\int_{-1}^{1}xxdx=\tfrac{2}{3}$$ , luego el módulo es $\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\int_{-1}^{1}dx=2$$ , luego el módulo es $\sqrt{2}$

Si las graficamos , podemos ver que ortogonalidad de las funciones no tiene que ver con su representación geométrica.

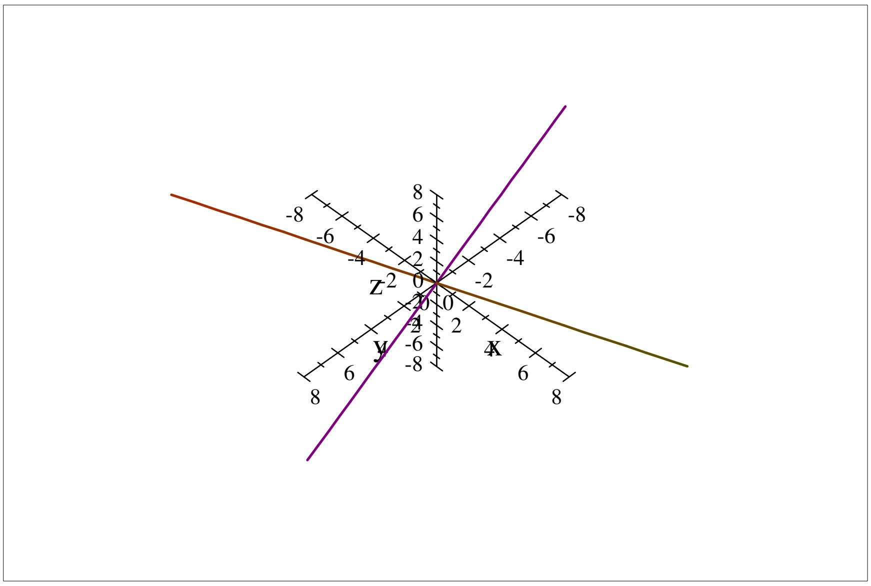
$x$



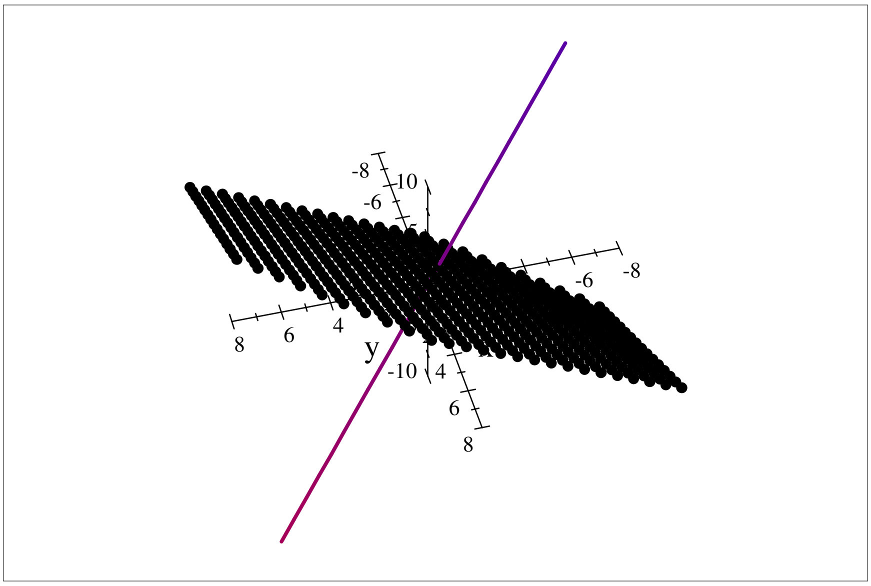

**SUBESPACIOS ORTOGONALES**

Diremos que dos subespacios S y T son ortogonales y se escribe S⊥Tsi se cumple $<\vec{s},\vec{t}>=0,\ \forall\ \vec{s}\in S\ ,\forall\ \vec{t}\in T$

Por ejemplo las siguientes rectas de $\mathbb{R}^3$ (generadas respectivamente por los vectores (1,-1,1) y (-1,0,1))son subespacios ortogonales.

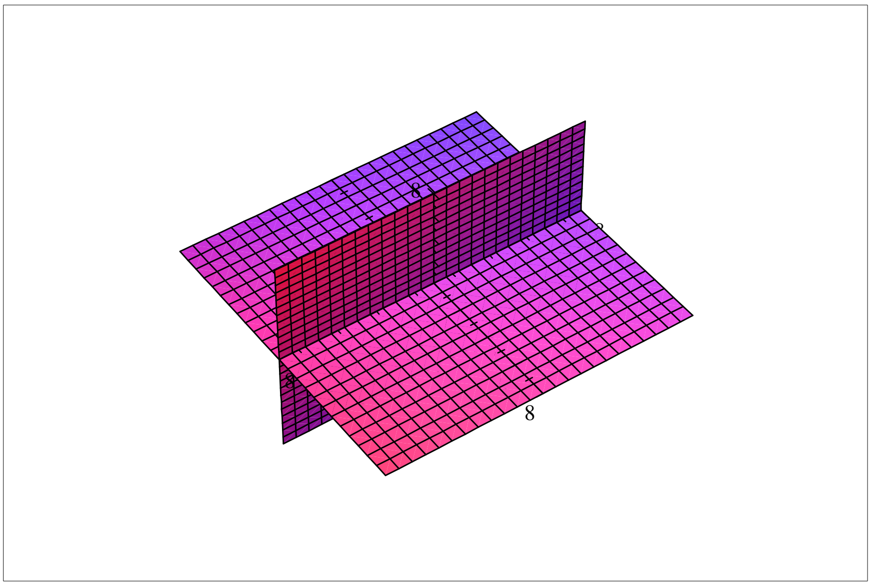



También lo son el plano de ecuación x+y-z=0 y la recta generada por el vector (1,1,-1) (recta normal al plano)




Para que dos subespacios resulten ortogonales no es necesario verificar que todos los vectores de uno son ortogonales con todos los vectores del otro. Basta con que los vectores que forman una base del primero sean ortogonales a los vectores que forman una base del segundo.

Debemos resaltar una diferencia entre el concepto de ortogonalidad de subespacios y si estos son geométricamente perpendiculares (hecho que puede darse en $\mathbb{R}^3$). Los planos xy y xz son perpendiculares en $\mathbb{R}^3$ (las normales a ambos planos son perpendiculares) y ambos contienen al origen. Sin embargo no son ortogonales.Por ejemplo el vector (2,1,0) pertenece al primer plano y el (1,0,1) al segundo Si hacemos el producto interno usual en $R^3$ de estos vectores , el resultado es $2\neq0$ , por lo que hemos encontrado dos vectores pertenecientes a diversos planos que no son ortogonales , luego se niega la condición para que los subespacios lo sean.




**PROPOSICIÓN**

Dados dos subespacios ortogonales $W_1$y $W_2$ ($W_1 \perp W_2$) ; el único elemento común a ambos es el vector nulo.

Demostración:

Sea $\vec{u}$ un vector que pertenece a $W_1$y $W_2$ (o sea pertenece a $W_1 \cap W_2$). Podemos hacer el producto interno del vector consigo mismo $<\vec{u},\vec{u}>$entendiendo que el primer $\vec{u}$ pertenece a $W_1$ y el segundo $\vec{u}$ pertenece a $W_2$. Como los subespacios son ortogonales resulta que $<\vec{u},\vec{u}>=0$ , pero si esto ocurre $\vec{u} = \vec{0}$.

**COMPLEMENTO ORTOGONAL**

Dado un subespacio **W** de un espacio euclídeo $\mathbb{E}$ , se define como Complemento Ortogonal y se indica como $\mathbf{W}^{\perp}$ al conjunto siguiente:

$\mathbf{W}^{\perp}= \left\{\vec{y} \in \mathbb{E} / \vec{y} \perp \vec{x}, \forall \ \vec{x} \in \mathbf{W}\right\}$

**Este conjunto es un subespacio**.

1) El vector nulo $\vec{0}$ pertenece a $\mathbf{W}^{\perp}$ , pues el vector nulo es ortogonal a todos los vectores de $\mathbb{E}$

2) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$son vectores pertenecientes a $\mathbf{W}^{\perp}$ , entonces su suma pertenece a $\mathbf{W}^{\perp}$. Que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ pertenezcan a $\mathbf{W}^{\perp}$ , significa que

$<\vec{u} , \vec{x}>=0$ y $<\vec{v} , \vec{x}>=0$ $\forall \vec{x} \in$ **W** Luego si planteamos $<\vec{u}+\vec{v},\vec{x}> \forall \vec{x} \in$**W** , resulta $<\vec{u}+\vec{v},\vec{x}>=<\vec{u} , \vec{x}>+<\vec{v} , \vec{x}>=0+0=0$.

Luego $\vec{u} + \vec{v} \in \mathbf{W}^{\perp}$.

3) Si $\vec{u}$ es un vector perteneciente a $\mathbf{W}^{\perp}$ , entonces $\lambda\vec{u}$ también pertenece a $\mathbf{W}^{\perp}$

Que $\vec{u}$ pertenece a $\mathbf{W}^{\perp}$significa que$<\vec{u} , \vec{x}>=0$ $\forall \vec{x} \in$ **W**. Si planteamos $<\lambda\vec{u},\vec{x}>=\lambda<\vec{u},\vec{x}>=\lambda.0=0$

Luego $\lambda\vec{u} \in \mathbf{W}^{\perp}$

Como es un subespacio tiene una base que lo genera y por lo tanto se puede definir la dimensión de $\mathbf{W}^{\perp}$.

**PROPOSICION**

Si $\mathbb{E}$ es un espacio euclideo de dimensión n y **W** es un subespacio de dimensión r , entonces la dimensión de **W**$^\perp$ es (n-r)

Demostración:

Si **W** tiene dimensión r , existen r vectores ortogonales $\{\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{x_3},\ldots\overrightarrow{x_r}\}$ que forman una base de **W**. Es posible ampliar este conjunto a una base de E , adicionándole (n-r) vectores linealmente independientes. Si por el método de Gram - Schmidt se ortogonaliza todo el conjunto , se obtienen n vectores ortogonales $\{\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{x_3},\ldots\overrightarrow{x_r},\overrightarrow{x_{r+1}},\overrightarrow{x_{r+2}},\ldots..\overrightarrow{x_n}\}$ , donde los primeros r vectores pertenecen a **W** y los restantes a **W**$^\perp$.

Luego todo vector $\vec{v}$ de $\mathbb{E}$ se puede expresar como suma de un vector $\vec{P}$ perteneciente a **W** y otro vector $\vec{Q}$ perteneciente a **W**$^\perp$ , ya que se puede escribir como combinación lineal de $\{\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{x_3},\ldots\overrightarrow{x_r},\overrightarrow{x_{r+1}},\overrightarrow{x_{r+2}},\ldots..\overrightarrow{x_n}\}$ , donde los primeros r vectores pertenecen a **W** y los restantes a **W**$^\perp$.

**PROPOSICION**

Todo vector $\vec{v} \in \mathbb{E}$ se escribe como suma de un vector $\vec{P}$ perteneciente a **W** y otro vector $\vec{Q}$ perteneciente a **W**$^\perp$ y dicha combinación es única.

Demostración:

Supongamos que existan vectores $\vec{P}$ y $\overrightarrow{P`} \in$ **W** y vectores $\vec{Q}$ y $\overrightarrow{Q`} \in$ **W**$^\perp$ que cumplan $\vec{v}=\vec{P}+\vec{Q}$ y $\vec{v}=\overrightarrow{P`}+\overrightarrow{Q`}$.

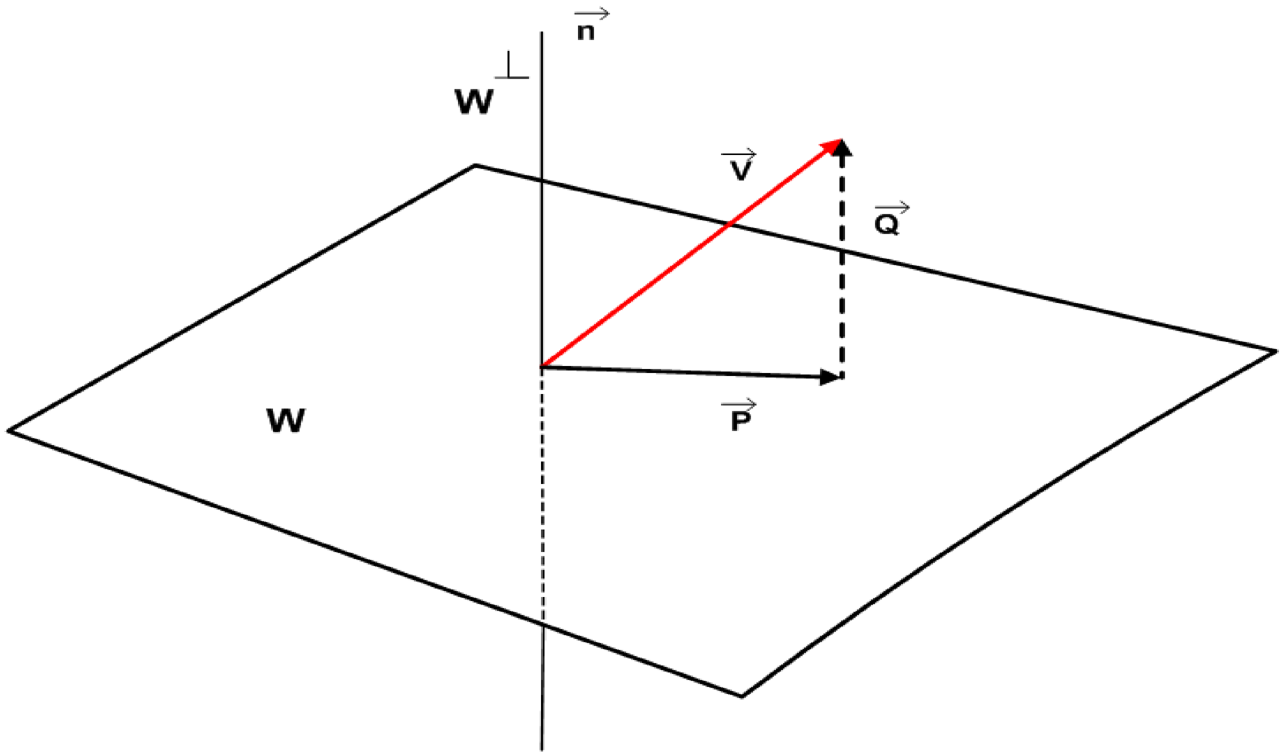
Luego $\vec{v}$- $\vec{v} = \vec{0} = (\vec{P}+\vec{Q}) - (\overrightarrow{P`}+\overrightarrow{Q`}) = (\vec{P}-\overrightarrow{P`}) + (\vec{Q}-\overrightarrow{Q`})$.

Luego $(\vec{P}` - \vec{P}) = (\vec{Q}-\overrightarrow{Q`})$. Pero $(\vec{P}` - \vec{P})$ es la diferencia de dos vectores de **W** , mientras que $(\vec{Q}-\overrightarrow{Q`})$ es la diferencia de dos vectores de **W**$^\perp$ , por lo tanto de un lado de la igualdad tenemos a un vector de **W** mientras que del otro lado tenemos un vector de **W**$^\perp$. Como demostramos anteriormente , el único vector que puede pertenecer a dos subespacios que son ortogonales entre sí es el vector nulo , por lo tanto

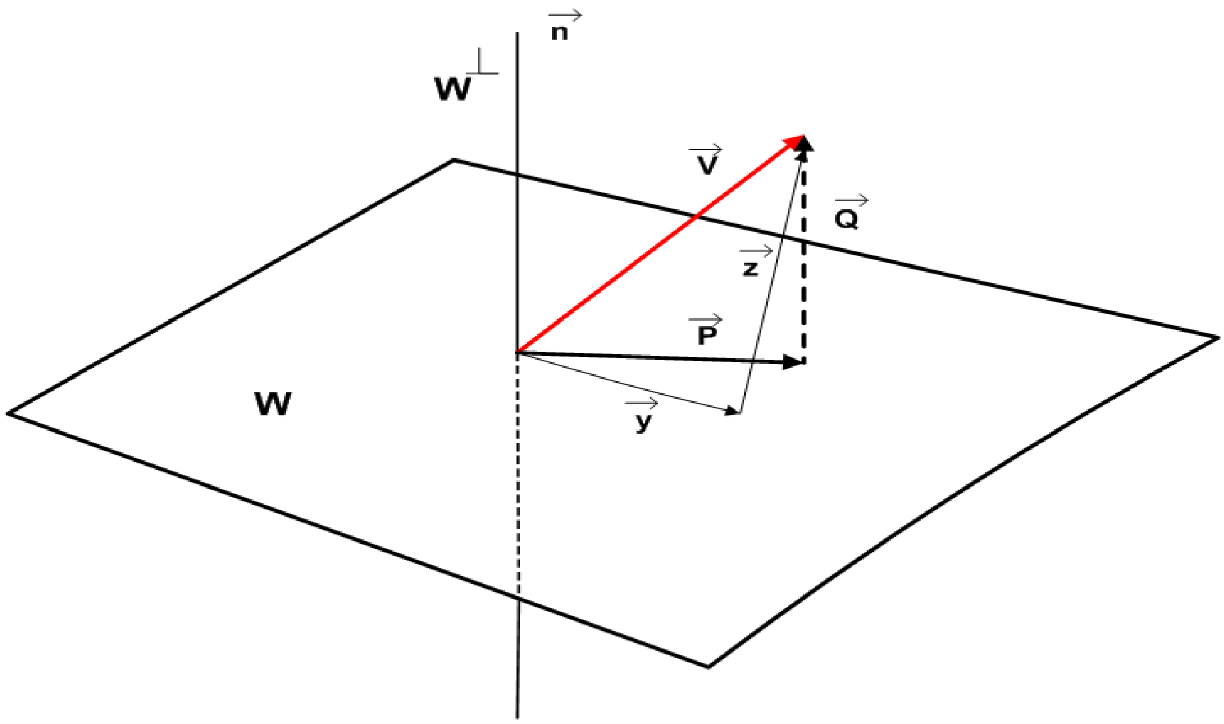
$(\vec{P}` - \vec{P}) = (\vec{Q}-\overrightarrow{Q`}) = \vec{0}$ , de donde surge que $\vec{P}`= \vec{P}$ y $\vec{Q} = \overrightarrow{Q`}$.

Al vector $\vec{P}$ se lo denomina proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre **W** y al vector $\vec{Q}$ se lo denomina proyección ortogonal sobre **W**$^\perp$.

Podemos representar esquemáticamente esto en la siguiente figura (entendiendo que no nos estamos refiriendo exclusivamente a $\mathbb{R}^3$ como espacio euclídeo)




Ahora vamos a demostrar una propiedad muy importante que cumple la proyección ortogonal de un vector. Si observamos la figura siguiente , podemos deducir que la proyección ortogonal de un vector $\vec{v}$ sobre un subespacio **W** es , de todos los vectores de **W** , el que está mas "cerca" de $\vec{v}$ , o sea el que mejor aproxima a $\vec{v}$.




Supongamos que podemos expresar al vector $\vec{v}$como la suma de otros dos vectores , uno, $\vec{y}$ que pertenece a **W** y otro vector $\vec{z}$ , que obviamente no puede pertenecer a **W**$^{\perp}$ pues sino estaríamos en la condición de expresar a $\vec{v}$ como la suma de un vector de **W** y otro de **W**$^{\perp}$ lo que conllevaría a que $\vec{y}$ sería $\vec{P}$ y $\vec{z}$ sería $\vec{Q}$. Luego $\vec{y}$ pertenece a **W** y $\vec{z}$

no pertenece ni a **W** ni a **W**$^{\perp}$ .

Vamos a demostrar que el vector $\vec{P}$ está mas "cerca" de $\vec{v}$ que el vector $\vec{y}$.

**PROPOSICIÓN**.

Sea **W** un subespacio de un espacio euclídeo $\mathbb{E}$. Sea $\vec{v}$ un vector de $\mathbb{E}$ y sean $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ respectivamente las proyecciones de $\vec{v}$ sobre **W** y sobre**W**$^{\perp}$

Sean otros vectores$\vec{y} \in$ **W** y $\vec{z}$ tal que $\vec{v} = \vec{y} + \vec{z}$.

Entonces $\|\vec{z}\| \geq \left\|\vec{Q}\right\|$.

Demostración.

$\|\vec{z}\|^2 = \|\vec{v} - \vec{y}\|^2 = \left\|\vec{P} + \vec{Q} - \vec{y}\right\|^2 = \left\|(\vec{P} - \vec{y}) + \vec{Q}\right\|^2$ , donde $(\vec{P} - \vec{y}) \in$ **W** y $\vec{Q} \in$ **W**$^{\perp}$ , luego son ortogonales y por lo demostrado mas arriba , resulta $\left\|(\vec{P} - \vec{y}) + \vec{Q}\right\|^2 = \left\|(\vec{P} - \vec{y})\right\|^2 + \left\|\vec{Q}\right\|^2$. Con lo cual resulta $\|\vec{z}\|^2 = \left\|(\vec{P} - \vec{y})\right\|^2 + \left\|\vec{Q}\right\|^2$. Siendo $\left\|(\vec{P} - \vec{y})\right\|^2$ un numero real positivo o a lo sumo 0 (si $\vec{P} = \vec{y}$) , se desprende que $\|\vec{z}\|^2 \geq \left\|\vec{Q}\right\|^2$., de donde surge $\|\vec{z}\| \geq \left\|\vec{Q}\right\|$.

El resultado anterior nos permite aproximar a un vector de un espacio euclideo por otro que es su proyección ortogonal sobre un subespacio.

**Ejemplo**: Sea **W** el plano de ecuación x+y-z=0 y la recta generada por el vector (1,1,-1) (recta normal al plano según el producto interno usual en $\mathbb{R}^3$). Si encontramos una base de **W** y le agregamos el vector (1,1,-1) tendremos una base de $\mathbb{R}^3$ , en la cual los dos primeros vectores son de **W** y el restante de **W**$^{\perp}$

Los vectores (1,0,1) y (0,1,1) son base de **W**. Luego la base de $\mathbb{R}^3$ es B= $\{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,-1)\}$

Sea el vector (2,3,1). Su expresión en la base B es a(1,0,1)+b(0,1,1)+c(1,1,-1) , donde resolviendo las ecuaciones resulta que

a+c=2 , b+c=3 y a+b-c=1 y a=$\frac{2}{3}$ , b=$\frac{5}{3}$ y c=$\frac{4}{3}$.

Luego $(2,3,1) = \frac{2}{3}(1,0,1) + \frac{5}{3}(0,1,1) + \frac{4}{3}(1,1,-1)$ , donde $\vec{P} = \frac{2}{3}(1,0,1) + \frac{5}{3}(0,1,1) = (\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3})$ que pertenece a **W** y $\vec{Q} = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$ que pertenece a **W**$^{\perp}$.

El vector $(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3})$ es , de todos los vectores de W , el que mejor aproxima a $(2,3,1)$ y la "distancia" de $\vec{P}$ a $\vec{v}$es

$\left\|\vec{Q}\right\| = \sqrt{(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}).(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3})} = \sqrt{3.\frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

Una aplicación importante se tiene cuando se desea aproximar a una función por una combinación de otras que sean de manejo mas simple. Por ejemplo trataaremos de aproximar a e$^x$ por su proyección sobre el subespacio generado por $\left\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\right\}$

Aquí se presenta un caso particular ya que estamos trabajando en el espacio vectorial $\mathbb{C}_{[-1,1]}$ de las funciones reales continuas en el intervalo $[-1,1]$ , con el producto interior dado por <f(x),g(x)>=$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ , el cual es un espacio euclideo de dimensión infinita.

O sea que cuando expresemos a $\vec{v}$= $\vec{P} + \vec{Q}$ , el vector $\vec{P}$ se formará con una combinación lineal finita de los vectores que generan a **W** , pero $\vec{Q}$ pertenecerá a **W**$^{\perp}$ el cual tendrá dimensión infinita y no podremos escribirlo explicitamente.

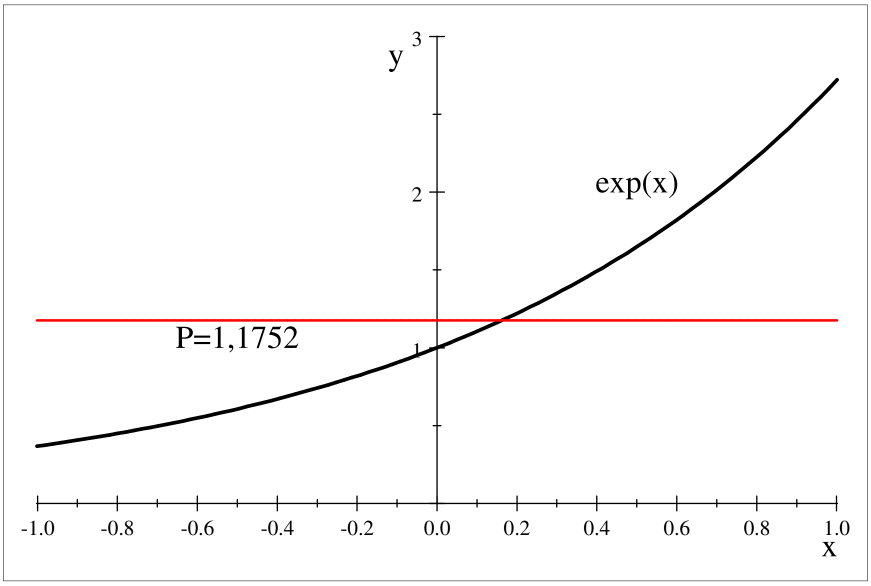
Vamos a ver como se resuelve , y para entender mejor lo que significa la aproximación por la proyección sobre un subespacio , vamos en realidad a hacer tres proyecciones sucesivas , sobre el subespacio generado por $\{1\}$ por $\{1,x\}$ y finalmente por $\left\{1,x,x^2-\frac{1}{3}\right\}$.

1) Si proyectamos sobre el subespacio generado por $\{1\}$ , el vector $\vec{P}$ será múltiplo del $1$ , o sea $\vec{P}=a.1$.Nuestro vector V es en este caso la función e$^x$ , luego e$^x=a.1+\vec{Q}$. De donde $\vec{Q}=$ e$^x-a.1$.Luego e$^x-a.1$ pertenece a **W**$^\perp$ y se cumple:

$<\vec{Q},1>=<$ e$^x-a.1,\ 1>=0$.

Si calculamos el producto interior $\int_{-1}^{1}(\exp(x)-a)dx=\int_{-1}^{1}\exp(x)dx-a\int_{-1}^{1}dx=$ $2,3504-2a=0$ , de donde surge $a=1.1752$

Luego $\vec{P}=1.1752$. Grafiquemos la función $\exp x$ y su proyección.




Evidentemente intentar aproximar con una constante a la función $\exp x$ en el intervalo $[-1,1]$ no da un resultado muy satisfactorio.

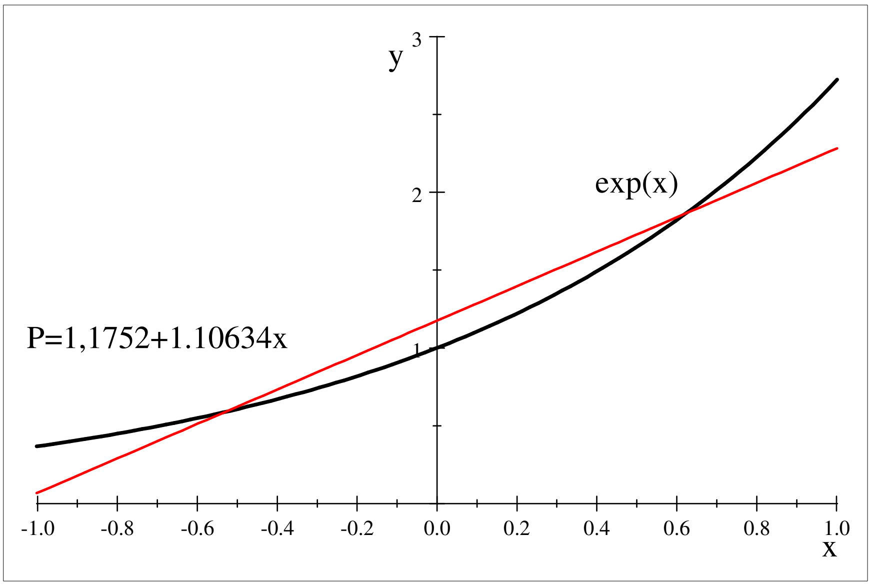
Probemos ahora con el subespacio generado por $\{1,x\}$

Ahora $\vec{P}=a.1+b.x$ luego e$^x=a.1+b.x+\vec{Q}$ de donde $\overrightarrow{Q}=$ e$^x-(a.1+b.x)$ que pertenece a **W**$^\perp$

Luego $<\vec{Q},1>=<\vec{Q},x>=0$ , de donde resulta

$<$e$^x-(a.1+b.x),1>=0=\int_{-1}^{1}(\exp x-a-bx)dx=\int_{-1}^{1}\exp x dx-a\int_{-1}^{1}dx-b\int_{-1}^{1}xdx=2.3504-$ , de donde surge que $a=1.1752$

$<$e$^x-(a.1+b.x),x>=0=\int_{-1}^{1}(\exp x-a-bx).xdx=\int_{-1}^{1}x\exp x dx-a\int_{-1}^{1}dx-b\int_{-1}^{1}x^2dx=0.735$ , de donde surge que $b=1,10634$. Graficando resulta




Evidentemente este subespacio aproxima mucho mejor a la función $\exp x$ en el intervalo $[-1,1]$

Probemos ahora con el subespacio generado por $\left\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\right\}$

Ahora $\vec{P} = a.1 + b.x + c(x^2 - \frac{1}{3})$ luego e$^x = a.1 + b.x + c(x^2 - \frac{1}{3}) + \vec{Q}$ de donde $\overrightarrow{Q} =$ e$^x - (a.1 + b.x + c(x^2 - \frac{1}{3}))$ que pertenece a **W**$^\perp$

Luego $<\vec{Q},1>=<\vec{Q},x>=<\vec{Q},x^2 - \frac{1}{3}>=0$ , de donde resulta

$$<e^x - (a.1 + b.x + c(x^2 - \tfrac{1}{3}), 1 >= 0 = \int_{-1}^{1} (\exp x - a - bx - c(x^2 - \tfrac{1}{3}))dx = \int_{-1}^{1} \exp x dx - a \int_{-1}^{1} dx$$

$2.3504 - 2a - b.0 - c.0 = 0$ , de donde resulta $a = 1.1752$

$$<e^x - (a.1 + b.x + c(x^2 - \tfrac{1}{3}), x >= 0 = \int_{-1}^{1} (\exp x - a - bx - c(x^2 - \tfrac{1}{3}))xdx = \int_{-1}^{1} x \exp x dx - a \int_{-1}^{1}$$

$0.73576 - a.0 - \frac{2}{3}b - c.0 = 0$ , de donde resulta $b = 1.10634$

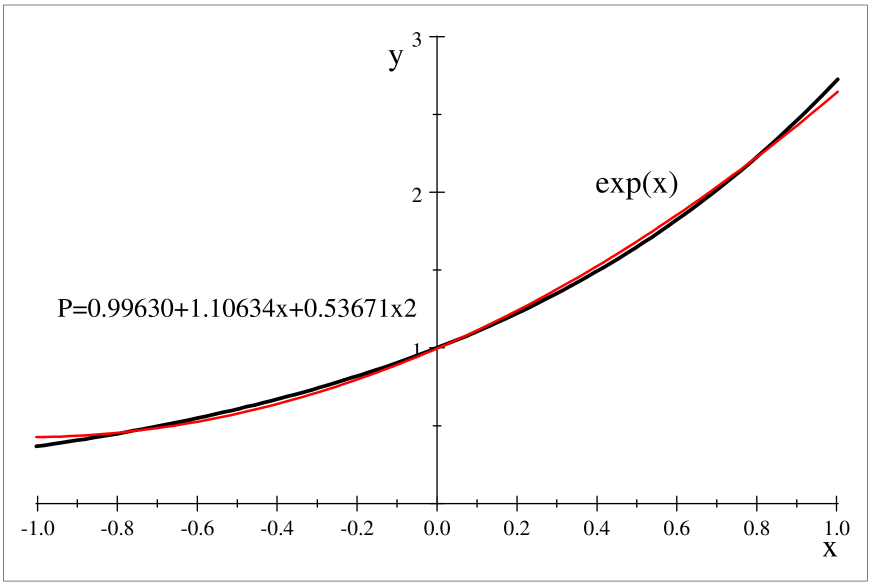
$$<e^x - (a.1 + b.x + c(x^2 - \tfrac{1}{3}), (x^2 - \tfrac{1}{3}) >= 0 = \int_{-1}^{1} (\exp x - a - bx - c(x^2 - \tfrac{1}{3}))(x^2 - \tfrac{1}{3})dx = \int_{-1}^{1}$$

:

$$-c \int_{-1}^{1} (x^2 - \tfrac{1}{3})^2 dx = 0.095417 - a.0 - b.0 - 0.17778.c = 0$$ , de donde resulta que $c = 0.53671$

De donde P $= 1.1752 + 1.10634x + 0.53671(x^2 - \frac{1}{3}) = 0.53671x^2 + 1{,}10634x + 0.99630$

$0.53671x^2 + 1{,}10634x + 0.99630$




Como vemos al proyectar con un polinomio de grado a lo sumo 2 , obtenemos una muy buena aproximación de la función e$^{x}$ en el intervalo considerado.

También es importante resaltar que al ir desarrollando los sucesivos productos internos , varios de ellos no es necesario calcularlos porque estamos trabajando con una base ortogonal , o sea que donde aparezca un producto de los siguientes :$<1,x>$ , $<1,x^2-\frac{1}{3}>$, $<x,x^2-\frac{1}{3}>$ el resultado es cero y se simplifican los cálculos. Por ello es conveniente perder un tiempo y trabajar aún dentro de **W** con una base ortogonal.

(Continuará)