Resolución TP6:

Ejercicio 26

Parte a - Hallar los puntos extremos para $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ dado la siguiente restricción $x^2 + y^2 - 1 = 0$ y además $x + y + z = 0$, y clasificar como máximo o mínimo.

Para empezar:

- El dominio de ambas funciones es todo $\mathbb{R}^3$ por lo que no tenemos restricción alguna para los puntos que hallaremos
- La manera más práctica de encontrar los puntos críticos es mediante la función de Gauss, cuyo gradiente nulo nos ayuda a definir el sistema de ecuaciones necesario. Volver al método original sirve siempre que no poseemos un método o regla resumida.

Función de Gauss:

$$f(x,y,z,\ell,\beta) = x^2 + y^2 + z^2 - \ell * (x^2 + y^2 - 1) - \beta(x + y + z)$$

Condición de puntos críticos:

$$\nabla f(x,y,z,\ell,\beta) = (0,0,0,0,0)$$

$$\begin{cases} 2x - 2x\ell - \beta = 0 \\ 2y - 2y\ell - \beta = 0 \\ 2z - \beta = 0 \\ -(x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ -(x + y + z) = 0 \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones del método optimizado :

$\nabla f(x,y,z) = \ell \nabla g(x,y,z) + \beta \nabla h(x,y,z)$:

$$\begin{cases} 2x = 2x\ell + \beta \\ 2y = 2y\ell + \beta \\ 2z = \beta \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Resolviendo :

$$\begin{cases} 2x(1-\ell)=\beta \\ 2y(1-\ell)=\beta \\ z=\dfrac{\beta}{2} \\ x^2+y^2-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \underset{\substack{para \\ x\neq 0 \\ y\neq 0 \\ z\neq 0}}{==>} \begin{cases} x=\dfrac{\beta}{2(1-\ell)} \\ y=\dfrac{\beta}{2(1-\ell)} \\ z=\dfrac{\beta}{2} \\ x^2+y^2-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} ==> \begin{cases} x=y=\dfrac{z}{(1-\ell)} \\ x^2+y^2-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

Podemos descartar a β claramente, y ℓ tampoco es nuestro objetivo. si probamos con (x,y, z) llegaremos a resultado

$$\begin{cases} x=y \\ x^2+y^2-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} ==> \begin{cases} 2x^2-1=0 \\ 2x+z=0 \end{cases} ==> \begin{cases} x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z=-2x \end{cases} ==> \begin{cases} Pc1=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}) \\ Pc2=(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},+\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x(1-\ell)=\beta \\ 2y(1-\ell)=\beta \\ z=\dfrac{\beta}{2} \\ x^2+y^2-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \underset{\substack{para \\ x=0 \\ y=0}}{==>} \begin{cases} 0=\beta \\ 0=\beta \\ z=\dfrac{\beta}{2}=0 \\ x^2+y^2-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} ==> no\ hay\ solucion\ posible$$

$$\begin{cases} 2x(1-\ell)=\beta \\ 2y(1-\ell)=\beta \\ z=\dfrac{\beta}{2} \\ x^2+y^2-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \underset{\substack{para \\ z=0}}{==>} \begin{cases} 2x(1-\ell)=\beta \\ 2y(1-\ell)=\beta \\ 0=\dfrac{\beta}{2} \\ x^2+y^2-1=0 \\ x+y+0=0 \end{cases} ==> \begin{cases} 2x(1-\ell)=0 \\ 2y(1-\ell)=0 \\ 0=\beta \\ x^2+y^2-1=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

$$==> \begin{cases} \ell=1 \\ x^2+y^2-1=0 \\ y=-x \end{cases} ==> 2x^2-1=0 ==> x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} ==> \begin{matrix} Pc_3=(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0) \\ Pc_4=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0) \end{matrix}$$

Clasificación:

Método 1: Ya sabemos que ambos puntos cumplen la condición, debemos compáralos entre sí para saber si son máximo o mínimo.

Se evalúan en $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

- $f(Pc_1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2 = 3$
- $f(Pc_2) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(+\sqrt{2}\right)^2 = 3$
- $f(Pc_3) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (0)^2 = 1$
- $f(Pc_4) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (0)^2 = 1$

$Pc_1 y Pc_2$ son máximos condicionados de $g(x,y,z) = 0$y $h(x,y,z) = 0$.

$Pc_3 y Pc_4$ son mínimos condicionados de $g(x,y,z) = 0$y $h(x,y,z) = 0$

Corolario: Se pueden comparar los puntos críticos con otros que cumplan las condiciones $g(x,y,z)$=0y $h(x,y,z)$=0 y su imagen siempre va a estar entre los valores 1 y 3.Se pueden buscar por tanteo.

$$\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

$$si\ x=0 \begin{cases} y^2-1=0 \\ y+z=0 \end{cases} ==> \begin{cases} y^2=1 \\ y+z=0 \end{cases} ==> \begin{matrix} y=\pm 1 \\ z=-y \end{matrix} ==> Pnc_1 = (0,1,-1)$$

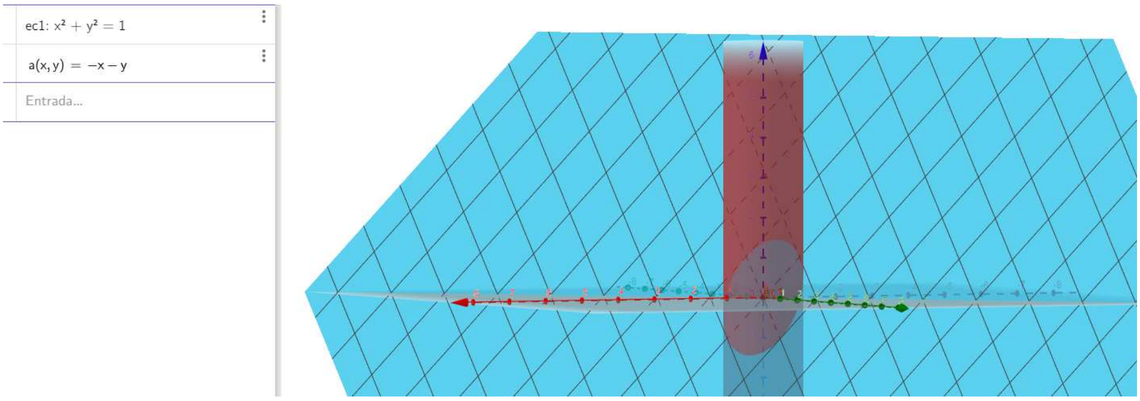
- $f(Pnc_1) = (0)^2 + (1)^2 + (-1)^2 = 2$

Se verifica $f(Pc_3) < f(Pnc_1) < f(Pc_1)$

Parte B: $g(x,y,z)$=0y $h(x,y,z)$=0 generan un sistema de ecuaciones que determina una elipse en el espacio. Encontrar sus ejes.

$$\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

Graficando la Elipse:



Como no es tan fácil de ver la figura se puede armar una ecuación para métrica que define la curva(elipse):

$$r(x,y,z)=(x,y,z)$$

$x+y+z=0$ se puede despejar e incluir en la curva

$$r(x,y)=(x,y,-x-y)$$

$x^2+y^2-1=0$ se puede pensar como el dominio de r(x,y), que al mismo tiempo se puede traducir de manera polar

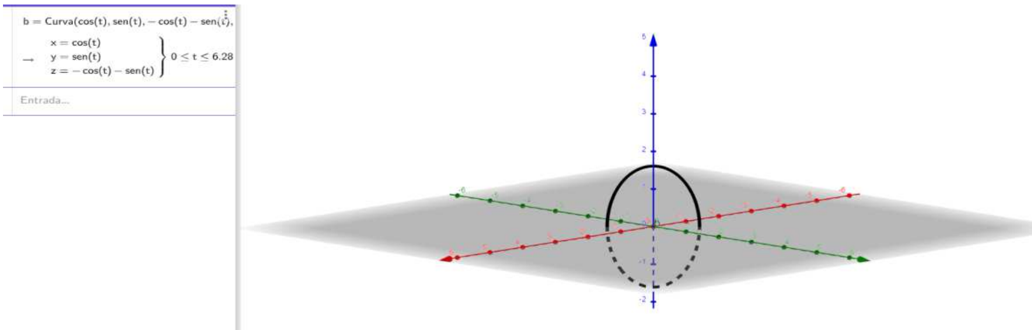
$$r(t)=\big(\cos(t)\,,sen(t),-\cos(t)-sen(t)\big)con\ 0<t<2pi$$

Se observa:

$$r(0)=\big(\cos(0)\,,sen(0),-\cos(1)-sen(1)\big)=(0{,}1{,}-1)=Pnc_1$$

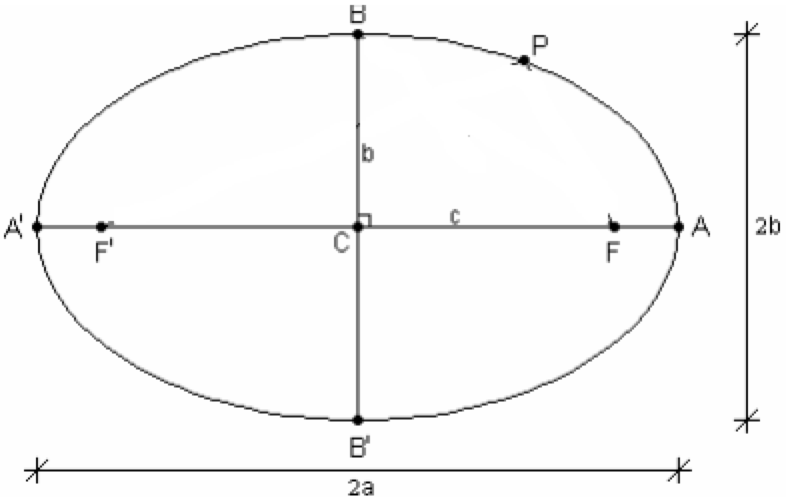
$$r\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right),sen\left(\frac{\pi}{4}\right),-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2}\right)=Pc_1$$

$$r\left(5\frac{\pi}{4}\right)=\left(\cos\left(5\frac{\pi}{4}\right),sen\left(5\frac{\pi}{4}\right),-\cos\left(5\frac{\pi}{4}\right)-sen\left(5\frac{\pi}{4}\right)\right)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}\right)=Pc_1$$



Bien, ahora actuemos como si no hubiera una imagen visual de la figura emblematica.

Recordemos el formato de una elipse centrada al origen. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



Suponiendo a el eje mas largo y b el eje mas corto. Coinciden con el concepto de distancia al origen.

En la parte a: trabajamos con $f(x,y,z)=d^2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$distancia al cuadrado. por lo que tenemos un dato importante. los maximos y minimos condicionados por la elipse que encontramos se corresponden con sus ejes.

- $d(Pc_1)=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}$
- $d(Pc_2)=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}$
- $d(Pc_3)=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(0)^2}=1$
- $d(Pc_4)=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(0)^2}=1$

entonces sabemos que en direccio y=x se encuentra el eje de distancia $\sqrt{3}$ y en la direccion y=-x el eje de distancia 1.

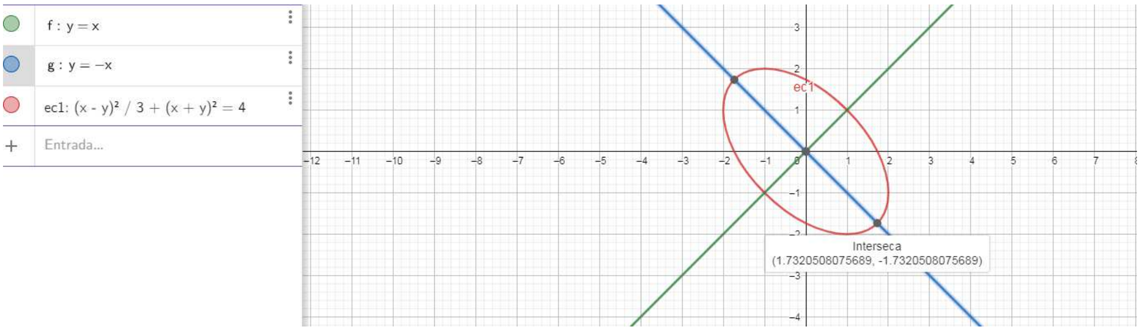
Corolario: Los siguientes temas exeden el contenido de la catedra, pero sirve para dar un ejemplo de aplicacion para los ejes obtenidos.

Se puede armar una ecuacion similar a . $\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1$ de la forma . $\frac{(x+y)^2}{a^2}+\frac{(x-y)^2}{b^2}=1$ la cual se emparenta con la proyeccion de la elipse (no es la elipse en si)

$$\frac{(\frac{x+y}{2})^2}{1}+\frac{(\frac{x-y}{2})^2}{3}=1$$

$$\frac{(x+y)^2}{1}+\frac{(x-y)^2}{3}=4$$

Siendo 1/2 el jacobiano de la transformacion



Hessiano Reducido:

$$g(x, y, z) = 0$$

$$h(x, y, z) = 0$$

$$f(x, y, z, \ell, \beta) = x^2 + y^2 + z^2 - \ell * (x^2 + y^2 - 1) - \beta(x + y + z)$$

$$H(f, g, h) = \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} & L_{x\ell} & L_{x\beta} \\ & & & & \\ & & & L_{\ell\ell} & L_{\ell\beta} \\ & & & L_{\beta\ell} & L_{\beta\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} & g_x & h_x \\ & & & & \\ & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H(f, g, h) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g_x & -g_y & -g_z \\ 0 & 0 & -h_x & -h_y & -h_z \\ -g_x & -h_x & L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ -g_y & -h_y & L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ -g_z & -h_z & L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{bmatrix}$$

$$h_2(f, g, h) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g_x & -g_y \\ 0 & 0 & -h_x & -h_y \\ -g_x & -h_x & L_{xx} & L_{xy} \\ -g_y & -h_y & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix}$$

$$h_1(f, g, h) = \begin{bmatrix} 0 & -h_x & -h_y \\ -h_x & L_{xx} & L_{xy} \\ -h_y & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix}$$

Examinamos los determinantes de las submatrices en la diagonal de orden mayor o igual a 3:

1. Si todos ellos son menores que 0, tenemos un mínimo local en v_0
2. Si el primer subdeterminante de tamaño 3x3 es mayor que cero, el siguiente (el de 4x4) es menor que cero, y de esa manera los subdeterminantes van alternando su signo, tenemos un máximo local en v_0
3. Si todos los subdeterminantes son distintos de cero, pero no siguen ninguno de los dos patrones anteriores, tenemos un punto silla en v_0
4. Si no se da ninguno de los tres casos anteriores, el criterio no concluye nada