DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

Universidad Nacional
de La Matanza

El determinante es una función que al conjunto de matrices cuadradas le asigna un escalar, un número.

$$|\ | = \det(\ ) : \mathbb{R}^{nxn} \rightarrow \mathbb{R}$$

Si A es una matriz de orden 2, es decir 2x2, el determinante de la matriz A se denotará como det(A) o bien |A| y se calcula haciendo:

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DETERMINANTE

PROPIEDADES DEL DETERMINANTE

- **Si se cambian entre si, dos filas o columnas, el determinante es el opuesto.**

$$\mathrm{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\mathrm{Det}\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

- **Al multiplicar una fila o columna por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número**

$$\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k.\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

PROPIEDADES DEL DETERMINANTE

- **Si una fila o columna esta formada por una suma, el determinante de la matriz es igual a la suma de los determinantes de la matriz principal descompuesta en 2 (permaneciendo igual los elementos de la filas/columnas restantes)**

$$\mathrm{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g+j & h+k & i+l \end{vmatrix} = \mathrm{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \mathrm{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ j & k & l \end{vmatrix}$$

PROPIEDADES DEL DETERMINANTE

- **El determinante de una matriz es cero si:**
- **Todos los elementos de una hilera (fila o columna) son nulos**

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 0$$

- **Posee dos filas o columnas iguales**

$$\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ d & d & f \\ g & g & i \end{vmatrix} = 0$$

PROPIEDADES DEL DETERMINANTE

- **El determinante de una matriz es cero si:**

- **Los elementos de una fila o columna son proporcionales a otra**

$$\text{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ka & kb & kc \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad}}{\overset{}{=}} k \cdot \text{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad}}{=} 0$$

- **Los elementos de una fila o columna son una combinación de otras**

$$\text{Det}\begin{vmatrix} a & b & ka+mb \\ d & e & kd+me \\ g & h & kg+mh \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad}}{=} \text{Det}\begin{vmatrix} a & b & ka \\ d & e & kd \\ g & h & kg \end{vmatrix} + \text{Det}\begin{vmatrix} a & b & mb \\ d & e & me \\ g & h & mh \end{vmatrix} =$$

$$= k \cdot \text{Det}\begin{vmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ g & h & g \end{vmatrix} + m \cdot \text{Det}\begin{vmatrix} a & b & b \\ d & e & e \\ g & h & h \end{vmatrix} \underset{\text{Propiedad}}{=} 0 + 0 = 0$$

PROPIEDADES DEL DETERMINANTE

- **Si a los elementos de una fila o columna se le suman los elementos de otra (multiplicados por un numero real o no) el determinante no varia**

$$\mathrm{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g + ka & h + kb & i + kc \end{vmatrix} = \mathrm{Det}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

PROPIEDADES DEL DETERMINANTE

- **El determinante de una matriz y su traspuesta son iguales**

$$\det(A) = \det\left(A^t\right)$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ p & q & r & s \\ x & y & z & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & p & x \\ b & 2 & q & y \\ c & 3 & r & z \\ d & 4 & s & t \end{vmatrix}$$

PROPIEDADES DEL DETERMINANTE

- **El determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes**

$$\det(A.B) = \det(A).\det(B)$$

$$|A.B| = |A||B|$$

- **El determinante del producto de un escalar por una matriz es igual al producto del escalar elevado al orden de la matriz por el determinante de la matriz**

$$A \in \mathbb{R}^{nxn} \wedge k \in \mathbb{R} \rightarrow \det(k.A) = k^n \det(A)$$

$$|k.A| = k^n |A|$$

PROPIEDADES DEL DETERMINANTE

$$A \in \mathbb{R}^{nxn} \text{ tiene inversa } \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

- **El determinante de la inversa de una matriz es igual al inverso multiplicativo o recíproco del determinante de la matriz**

$$\det(A^{-1}) = \left[\det\left(A\right)\right]^{-1} = \frac{1}{\det\left(A\right)}$$

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$$

Nota que el primer exponente -1 refiere a la inversa de una matriz y el segundo -1 al inverso de un número, el determinante de A

PROPIEDADES DEL DETERMINANTE

- **Cuando se trata de una matriz triangular (inferior o superior) existe una manera más sencilla de calcular su determinante. Al ser nulos todos los elementos a un mismo lado de la diagonal principal, se puede calcular su determinante como el producto de los componentes de dicha diagonal.**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

El determinante de la matriz A se calcula como:

det (A)= $a_{11} \times a_{22} \times a_{33} \times a_{44}$

PROPIEDADES DEL DETERMINANTE

- **El determinante de la matriz identidad de cualquier orden es 1**

$$\det(I_n) = 1$$

Universidad Nacional
de La Matanza

GRACIAS