<u>Ejercicio 8 - e</u>. Determinar si la función

$$f(x,y) = \ln(x+y)$$

es diferenciable en $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

<u>Resolución</u>. En principio es necesario establecer correctamente el dominio de la función. En este caso se trata del conjunto

$$Domf = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y > 0\}$$

Más adelante se realizará una discusión en torno al análisis de la diferenciabilidad y será necesario llevar adelante el estudio en dos partes.

Ahora, téngase en cuenta la definición de diferenciabilidad.

Definición. Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida en el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$ y el punto $(x_0, y_0) \in A$. Se dice que f es *diferenciable* en (x_0, y_0), si existen las dos constantes reales A_1 y A_2, y la función escalar *resto* $R(x-x_0, y-y_0)$, definida en algún entorno D de (x_0, y_0), de modo tal que se verifica la relación

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + A_1(x-x_0) + A_2(y-y_0) + R(x-x_0, y-y_0)$$

y tal que, en D, la función resto $R(x-x_0, y-y_0)$ satisface la *propiedad*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R(x-x_0, y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

Según las consecuencias de la diferenciabilidad, las constantes A_1 y A_1 de las que se habla en la definición no pueden ser si no, las derivadas parciales en el punto de diferenciabilidad. En concreto, se cumple

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad A_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Esto quiere decir que la existencia de las derivadas parciales en el punto de estudio es una condición necesaria para la diferenciabilidad. Por tal razón, el primer paso en la resolución del ejercicio consiste en calcular las derivadas parciales en el punto de referencia.

En este caso, las derivadas parciales en el punto $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ existen y se obtienen del siguiente modo

$$f(x,y) = \ln(x+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{x+y} \;\rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{x+y} \;\rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1$$

Una vez asegurada la existencia de las derivadas parciales en el punto de estudio, el siguiente paso consiste en determinar si se cumple la propiedad del resto, es decir

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{R(x-x_0,y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$$

Que también se puede escribir en función de los incrementos del siguiente modo

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{R(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

Si este límite se cumple, se concluye que la función es diferenciable en el punto de estudio, de lo contrario, la función no posee esta propiedad en el punto de referencia.

Recuérdese además que la expresión del resto en la escritura de variables se obtiene según

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+R(x-x_0,y-y_0)$$

Y que, en la escritura de incrementos, según

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0\,,y_0)k+R(h,k)$$

Tomando esta última escritura para el caso analizado, queda

$$f\left(\frac{1}{2}+h,\frac{1}{2}+k\right)=f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)h+\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)k+R(h,k)$$

En definitiva

$$\ln(h+k+1)=0+1\cdot h+1\cdot k+R(h,k)$$

$$\ln(h+k+1)=h+k+R(h,k)$$

Esto quiere decir que la expresión del resto en término de los incrementos es

$$R(h,k)=\ln(h+k+1)-(h+k)$$

Interesa ahora, determinar si el límite doble

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{R(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\ln(h+k+1)-(h+k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

existe y vale cero.

Efectivamente, este límite existe y vale cero. Para llegar a esa conclusión, es necesario tener en cuenta tres teoremas sobre límites. Estos se detallan a continuación.

Teorema 1. Sea la función

$$\varphi: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

definida sobre el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$, y sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto de acumulación de A. Entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varphi(x,y) = 0$$

si y sólo si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |\varphi(x,y)| = 0$$

Teorema 2 (Teorema de intercalación). Sean las funciones

$$\varphi: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

y

$$\psi: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

ambas definidas sobre el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$, y sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto de acumulación de A. Si existe un entorno reducido D' de centro en (x_0, y_0) tal que $D' \cap A \neq \emptyset$ en el cual se cumple la relación

$$0 \leq \varphi(x,y) \leq \psi(x,y)$$

para todo par $(x, y) \in (D' \cap A)$, y si además se verifica que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \psi(x,y) = 0$$

entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varphi(x,y) = 0$$

Teorema 3 (Reducción de variables). Sean las funciones

$$g: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

definida sobre el intervalo I de $\mathbb{R}$ y

$$\varphi: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to I$$

definida sobre el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$. Y sean, $t_0 \notin I$ un punto de acumulación de I y el par $(x_0, y_0) \notin A$ un punto de acumulación de A. Sea además la función

$$\psi: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \psi(x,y) = g\big(\phi(x,y)\big)$$

tal que $\psi(A) \subseteq I$. Si

$$\lim_{t \to t_0} g(t) = L$$

y

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \varphi(x,y) = t_0$$

entonces

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} g[\varphi(x,y)] = L$$

Según el Teorema 1,

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{R(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{\ln(h+k+1) - (h+k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

si y sólo si

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \left| \frac{R(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = \lim_{(h,k) \to (0,0)} \left| \frac{\ln(h+k+1) - (h+k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = 0$$

Por otra parte, sabiendo que

$$0 \leq (h-k)^2$$

$$0 \leq h^2 + k^2 - 2hk$$

$$2hk \leq h^2 + k^2$$

$$h^2 + 2hk + k^2 \leq h^2 + h^2 + k^2 + k^2$$

$$0 \leq (h+k)^2 \leq 2(h^2+k^2)$$

$$\sqrt{(h+k)^2} \leq \sqrt{2}\sqrt{h^2+k^2}$$

$$0 \leq |h+k| \leq \sqrt{2}\sqrt{h^2+k^2}$$

Luego, para todo

$$(h,k) \in \{(h,k) \in \mathbb{R}^2 : h+k \neq 0\}$$

Resulta

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{|h+k|}$$

Y de esta relación se deduce la siguiente

$$0 \leq \frac{|\ln(h+k+1)-(h+k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \sqrt{2}\frac{|\ln(h+k+1)-(h+k)|}{|h+k|}$$

O lo que es lo mismo

$$0 \leq \left|\frac{\ln(h+k+1)-(h+k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq \sqrt{2}\left|\frac{\ln(h+k+1)-(h+k)}{h+k}\right|$$

Que vale para todo

$$(h,k) \in A = \{(h,k) \in \mathbb{R}^2 : 0 < h+k+1\} \cap \{(h,k) \in \mathbb{R}^2 : h+k \neq 0\}$$

O de manera equivalente, para todo

$$(h,k) \in A = \{(h,k) \in \mathbb{R}^2 : -1 < h+k < 0 \vee h+k > 0\}$$

El siguiente paso consiste en mostrar que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{2}\left|\frac{\ln(h+k+1)-(h+k)}{h+k}\right| = 0$$

Para esto, considérese la función

$$g(t) = \frac{\ln(t+1)-t}{t}$$

definida sobre

$$I = \{t \in \mathbb{R} : -1 < t < 0 \vee t > 0\}$$

Nótese que, aplicando la Regla de L´Hopital, se tiene

$$\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)-t}{t} = 0$$

Por otro lado, para la función

$$\varphi(h,k) = h+k$$

definida sobre

$$A = \{(h,k) \in \mathbb{R}^2 : -1 < h + k < 0 \vee h + k > 0\}$$

se verifica

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varphi(h,k) = 0$$

Entonces, en virtud del Teorema 3, se deduce que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} g[\varphi(h,k)] = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\ln(\varphi(h,k)+1) - \varphi(h,k)}{\varphi(h,k)} = 0$$

Es decir que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} g[\varphi(h,k)] = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\ln(h+k+1) - (h+k)}{h+k} = 0$$

Con lo cual

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\ln(h+k+1) - (h+k)}{h+k} = 0$$

Y según el Teorema 1

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left|\frac{\ln(h+k+1) - (h+k)}{h+k}\right| = 0$$

Y de este modo, resulta finalmente que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{2}\,\left|\frac{\ln(h+k+1) - (h+k)}{h+k}\right| = 0$$

Ahora, recordado que en el conjunto de referencia

$$A = \{(h,k) \in \mathbb{R}^2 : -1 < h + k < 0 \vee h + k > 0\}$$

se cumple

$$0 \leq \left|\frac{\ln(h+k+1) - (h+k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq \sqrt{2}\,\left|\frac{\ln(h+k+1) - (h+k)}{h+k}\right|$$

Por el Teorema 2, se tiene que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left|\frac{\ln(h+k+1) - (h+k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = 0$$

Es decir que en este conjunto se satisface

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|\frac{R(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\left|\frac{\ln(h+k+1)-(h+k)}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = 0$$

Y, nuevamente, por el Teorema 1, resulta que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{R(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\ln(h+k+1)-(h+k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Lo que significa que para

$$A = \{(h,k)\in\mathbb{R}^2: -1 < h+k < 0 \vee h+k > 0\}$$

se satisface la propiedad del resto requerida en la definición de diferenciabilidad.

Ahora bien, teniendo en cuenta que

$$x = \frac{1}{2} + h \quad \to \quad h = x - \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2} + k \quad \to \quad k = y - \frac{1}{2}$$

El conjunto A representa al conjunto de pares (x, y)

$$U = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0 < x+y < 1 \vee x+y > 1\}$$

O lo que es lo mismo

$$U = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x+y > 0 \wedge x+y \neq 1\}$$

Pero, así como se aclaró al principio, el dominio de la función es

$$Dom f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x+y > 0\}$$

Puede observarse entonces que

$$U = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x+y > 0 \wedge x+y \neq 1\} = Dom f \setminus \{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x+y-1 = 0\}$$

Es decir que el conjunto U, en el que se verifica la diferenciabilidad de f, es igual al dominio de la función f sin los puntos de la recta de ecuación

$$x + y = 1$$

Precisamente, estos puntos son los que quedaron al margen del estudio realizado. Entonces, recordando nuevamente la expresión del resto

$$R(h,k) = \ln(h+k+1) - (h+k)$$

Y el límite doble a estudiar

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\ln(h+k+1)-(h+k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Adoptando la escritura en término de las variables de la función f, queda

$$R\left(x-\frac{1}{2}, y-\frac{1}{2}\right) = \ln(x+y)-(x+y-1)$$

$$\lim_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \frac{R\left(x-\frac{1}{2}, y-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}} = \lim_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \frac{\ln(x+y)-(x+y-1)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

Falta entonces, estudiar este límite sobre los puntos de la recta de ecuación

$$x+y=1$$

Esto quiere decir que falta por estudiar un límite radial. Ahora bien, sabiendo que el límite doble que representa la propiedad del resto se verifica cuando es estudiado en los puntos del dominio de la función fuera de la recta mencionada, ocurre que, si este límite parcial que falta estudiar para completar el estudio existe y coincide con el anterior, a partir de la definición de límite puede probarse que el límite doble que caracteriza la propiedad del resto se cumple, y por lo tanto queda satisfecha la propiedad de diferenciabilidad de la función en el punto $(x_0,y_0)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Sin embargo, si el límite radial que resta estudiar no existe, o existe y difiere de cero, entonces la función f no puede ser diferenciable en ese par.

Para realizar el estudio del límite radial, nótese la ecuación se puede escribir como

$$x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-y$$

$$x-\frac{1}{2}=-\left(y-\frac{1}{2}\right)$$

Entonces, dicho límite radial queda expresado como

$$\lim_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \left.\frac{R\left(x-\frac{1}{2}, y-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}}\right|_{\substack{x+y=1\\ y\neq\frac{1}{2}}} = \lim_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \left.\frac{\ln(x+y)-(x+y-1)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}}\right|_{\substack{x+y=1\\ y\neq\frac{1}{2}}}$$

Esto es

$$\lim_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \left.\frac{R\left(x-\frac{1}{2}, y-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}}\right|_{\substack{x+y=1 \\ y\neq\frac{1}{2}}} = \lim_{y\to\frac{1}{2}} \frac{0}{\sqrt{2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}} = 0$$

Quiere decir que efectivamente el límite radial existe y vale cero. De esta manera, según el comentario realizado más arriba, se comprueba que el límite doble que caracteriza la propiedad del resto existe y vale cero. Es decir que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\ln(h+k+1)-(h+k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

equivalentemente

$$\lim_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \frac{R\left(x-\frac{1}{2}, y-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}} = \lim_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)} \frac{\ln(x+y)-(x+y-1)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}} = 0$$

Y así se concluye que la función

$$f(x,y) = \ln(x+y)$$

es diferenciable en $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.