ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA I
MÓDULO 4 – ESPACIOS VECTORIALES – TERCERA CLASE
BASE-DIMENSIÓN-COORDENADAS

Lee las páginas 244 a 249 de Apunte III TEJIENDO EL ÁLGEBRA LINEAL.

Realiza todos los ejercicios y actividades propuestas en esas páginas.

En este apunte encontrarás otras explicaciones y ejemplos correspondientes a estos temas.

También en el archivo llamado M4. TERCERA CLASE. EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA están propuestos otros ejercicios y actividades.

Videos de la cátedra que pueden ayudarte con estos temas:

1. Probar que es subespacio en matrices 2x2
https://www.youtube.com/watch?v=CcODBdbcJDE

2. Base y coordenadas con un parámetro en R^2
https://www.youtube.com/watch?v=QSSLkx5nN7g&t=7s

3. Coordenadas en una base
https://www.youtube.com/watch?v=AVqiazxkjk0

BASE Y DIMENSIÓN

Hemos visto en algunos ejemplos de la clase anterior, que en un espacio vectorial *V*, hallamos un subconjunto finito $\{v_1,...,v_n\}$ de vectores que es al mismo tiempo linealmente independiente y sistema de generadores de *V*.

Definición de **base de un E.V.**:

Un conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de vectores de V es base del espacio vectorial o subespacio $\leftrightarrow$ $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es L.I. y conjunto de generadores de V.

Si el conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es un sistema de generadores, entonces todo vector de V es combinación lineal de estos vectores; si son independientes, entonces puede verse que cada vector es combinación lineal de ellos de **una única manera**, es decir, para todo *v* que pertenece a *V* existen únicos s_i, $i = 1, 2, ..., n$ tales que

$\vec{v} = s_1\vec{v}_1 + s_2\vec{v}_2 + ... + s_n\vec{v}_n \qquad s_i \in R$

Demostremos esta afirmación.

Supongamos que podemos escribir al vector v con dos combinaciones lineales de los $\{v_1,...,v_n\}$ y verifiquemos que en realidad, se trata de la misma combinación lineal, que los escalares son los mismos; esto mostrará que la combinación lineal es única.

Sea
$\vec{v}=s_1\vec{v}_1+s_2\vec{v}_2+.....+s_n\vec{v}_n$ y $\vec{v}=k_1.\vec{v}_1+k_2.\vec{v}_2+...+k_n\vec{v}_n$

Las dos sumas son iguales, entonces
$\vec{v}=s_1\vec{v}_1+s_2\vec{v}_2+.....+s_n\vec{v}_n \;=k_1.\vec{v}_1+k_2.\vec{v}_2+...+k_n\vec{v}_n$

Si llevamos todo al segundo miembro:

$$\vec{0}=s_1\vec{v}_1+s_2\vec{v}_2+.....+s_n\vec{v}_n \text{ - } \left(k_1.\vec{v}_1+k_2.\vec{v}_2+...+k_n\vec{v}_n\right)$$

$$\vec{0}=s_1\vec{v}_1+s_2\vec{v}_2+.....+s_n\vec{v}_n \text{ - } k_1.\vec{v}_1-k_2.\vec{v}_2-...-k_n\vec{v}_n$$

Aplicando el axioma de distributividad respecto de la suma de escalares , resulta

$$\vec{0}=\left(s_1-k_1\right)\vec{v}_1+\left(s_2-k_2\right)\vec{v}_2+.....+\left(s_n-k_n\right)\vec{v}_n$$

Como los vectores son linealmente independientes, los escalares necesariamente son ceros.

$s_i-k_i=0$ o $s_i=k_i$

Entonces las combinaciones lineales son iguales tiene los mismos escalares.

La expresión del vector v, usando los vectores de una base, es única.

Por lo tanto, si $\{v_1,...,v_n\}$ es **un sistema de generadores linealmente independiente**, cada vector puede expresarse de manera única como combinación lineal de ellos.

Todo espacio vectorial admite una base, que en algunos casos puede llegar a ser infinita. En todo caso, siempre existen infinitas bases distintas del mismo espacio vectorial.

Ejemplo 1

Sea $V=R^3$. Hemos visto, la clase anterior, que el conjunto de vectores {(1,0,0,); (0,1,0), (0,0,1)} es linealmente independiente y sistema de generadores de V; por lo tanto constituye una base de V. Se la llama base canónica.

Sin embargo, podemos hallar otras muchas bases:

a) {(2,0,0),(0,3,0),(0,0,-1)} es una base de V. Escribimos la combinación lineal

$$(x,y,z)=s(2,0,0)+(0,3,0)+u(0,0,-1)$$
$$x=2s$$
$$y=3t$$
$$z=-u$$

De donde se deriva que :

$$s=\frac{x}{2}$$
$$t=\frac{y}{3}$$
$$u=-z$$

Entonces

$$(x,y,z)=\frac{x}{2}(2,0,0)+\frac{y}{3}(0,3,0)+(-z)(0,0,-1)$$

Entonces para todo vector (x,y,z) encontramos los correspondientes s, t y u de tal manera que los vectores $\{v_1,...,v_n\}$ son un sistema de generadores.
Asimismo, tomando el vector $(x,y,z)=(0,0,0)$ obtenemos $s=t=u=0$ con lo cual vectores dados son linealmente independientes y por lo tanto forman una base de V.

b) {(2,-1,1),(1,0,2),(1,-2,3)}. Escribimos

$$(x,y,z)=s(2,-1,1)+t(1,0,2)+u(1,-2,3)$$

$$\begin{cases} x=2s+t-u \\ y=-s+2u \\ z=s-2t+3u \end{cases}$$ Usando el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & x \\ -1 & 0 & -2 & y \\ 1 & 2 & 3 & z \end{array}\right) \begin{array}{l} F_2=F_1+2F_2 \\ F_3=F_1-2F_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & -3 & x+2y \\ 0 & -3 & -5 & x-2z \end{array}\right) F_3=3F_2+F_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & x \\ 0 & 1 & 3 & x+2y \\ 0 & 0 & -14 & 4x+6y-2z \end{array}\right)$$

Como tenemos un sistema compatible determinado, para cualquier vector (x,y,z) el sistema tendrá solución (es compatible) , por lo que se trata de un sistema de generadores de V.

Por otro lado si reemplazamos (x,y,z) por $(0,0,0)$ obtendremos la misma matriz de los coeficientes, también un sistema determinado que por ser homogéneo nos da $s=t=u=0$, y por lo tanto, los vectores son linealmente independientes y entonces una base de V.

{(2,-1,1),(1,0,2),(1,-2,3)} es otra base de R^3.

De acuerdo a este ejemplo podemos hallar en R^3 bases distintas; pero en todos los casos deberán tener tres vectores; si son menos de tres no podrán generar R^3 y si son más de tres no pueden ser linealmente independientes; por lo tanto toda base de R^3 tiene tres vectores.

Sin embargo, no todo conjunto de tres vectores será base de R^3; debe quedarnos, a la hora de analizar la generación de R^3, una matriz (cuadrada) tal que el sistema sea compatible determinado, pues en caso contrario podríamos anular una fila y entonces obtener una ecuación para los vectores generados de tal forma que no obtenemos todo R^3; y un sistema compatible determinado en el análisis de la independencia lineal; pero en ambos casos la matriz asociada es la misma, con lo cual alcanza con verificar una de las dos condiciones pues ambas serán equivalentes .

Esto mismo sucede cada vez que buscamos una base de cualquier R^n ; una base de él deberá tener exactamente *n* vectores y la matriz asociada que se obtiene al plantear la combinación lineal (que no es otra que los mismos vectores encolumnados) debe darnos un sistema compatible determinado; a su vez, esta condición equivale a que el determinante de la matriz asociada sea distinto de 0.

Ejemplo 3

Sea $V = R^4$; analizar si los vectores (2,-1,2,3); (3,0,-1,-1); (1,3,2-1) y (2,-2,3,5) constituyen una base de *V*.

Colocamos los vectores encolumnados en una matriz de 4x4 y calculamos su determinante (es posible asimismo colocarlos como filas, pues el determinante de una matriz traspuesta es igual al de la matriz original):

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -(-1).\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} + 0 - 3.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} - 2.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1).47 - 3.(-5) - 2.31 =$$
$$= 0$$

Por lo tanto, los vectores dados no constituyen una base de R^4 .

Ejemplo 4

Verificar que las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ constituyen una base de R^{2x2}

Escribimos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = s.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + u.\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = s + 2t - 2u + 4v$$
$$a_{12} = 2s + 3t + 2u - v$$
$$a_{21} = -s + t - u + 3v$$
$$a_{22} = 2s - 3u$$

La matriz ampliada resulta :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 & a_{11} \\ 2 & 3 & 2 & -1 & a_{12} \\ -1 & 1 & -1 & 3 & a_{21} \\ 2 & 0 & -3 & 0 & a_{22} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 & a_{11} \\ 0 & -1 & 6 & -9 & a_{12}-2a_{11} \\ 0 & 3 & -3 & 7 & a_{21}+a_{11} \\ 0 & -4 & 1 & -8 & a_{22}-2a_{11} \end{array}\right) \sim$$

$$F_2 \to F_2 - 2F_1 \qquad F_3 \to F_3 + 3F_2$$
$$F_3 \to F_3 + F_1 \qquad F_4 \to F_4 - 4F_2$$
$$F_4 \to F_4 - 2F_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 & a_{11} \\ 0 & -1 & 6 & -9 & a_{12}-2a_{11} \\ 0 & 0 & 15 & -20 & a_{21}-5a_{11}+3a_{12} \\ 0 & 0 & -23 & 28 & a_{22}+6a_{11}-4a_{12} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 4 & a_{11} \\ 0 & -1 & 6 & -9 & a_{12}-2a_{11} \\ 0 & 0 & 15 & -20 & a_{21}-5a_{11}+3a_{12} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{15a_{22}-25a_{11}+9a_{12}+23a_{21}}{15} \end{array}\right)$$

$$F_4 \to F_4 + \frac{23}{15}F_3$$

El sistema es SCD entonces el conjunto es una base de R^{2x2}

Si calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -2.\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -2.10 + 3.20 = 40 \neq 0$$

De acuerdo a este ejemplo para que un subconjunto finito de matrices de R^{nxm} sea una base de éste debe constar de exactamente *nxm* matrices; luego, la matriz *A* resultante de colocar estas matrices convertidas en columnas debe ser tal que el sistema $Ax = b$ asociado a él sea compatible determinado para todo vector $b \in R^{(nxm)x1}$, o lo que es equivalente, que su determinante sea distinto de 0.
Otra manera consiste en probar que los cuatro vectores (matrices) son L.I. , por el método corto, las colocamos en una matriz en fila , escalonamos y si ninguna se anula son independientes y al ser 4 es un conjunto de generadores y por lo tanto base.

Ejemplo 5:
Hallar el valor de $k \in R$ tal que vectores (1,4,2), (k,0,1) y (-2,1,4) formen una base de R^3
El sistema tendrá por matriz asociada

Sea

$$\begin{pmatrix} 1 & k & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculemos entonces su determinante en función de k :

$$\begin{vmatrix} 1 & k & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4.\begin{vmatrix} k & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & k \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4.(4k+2) - 1(1-2k) = -16k - 8 - 1 + 2k = -14k - 9$$

Tendremos entonces una base de R^3 si y sólo si el determinante es distinto de 0. Por lo tanto,

$$-14k - 9 = 0 \Rightarrow -14k = 9 \Rightarrow k = -\frac{9}{14}$$

y los vectores dados serán una base de R^3 si $k \neq -\dfrac{9}{14}$.

Proposición

Dos bases cualesquiera de un mismo espacio vectorial tienen la misma cantidad de elementos.

Si una base cualquiera tiene n vectores, cualquier base de ese mismo espacio o subespacio, no puede tener menos vectores porque perdería la condición de ser generadores del E.V. y no puede tener más vectores ya que dejarían de ser linealmente independiente.

Entonces, a cada espacio vectorial le podemos asignar un número, que no será otro que el de la cantidad de vectores que contiene una cualquiera de sus bases. Este número se llama la **dimensión** del espacio vectorial *V*.
La dimensión de un E.V. indica la cantidad máxima de vectores linealmente independiente

Ejemplo
Hemos visto que en R^3 hay varias bases, una de ellas {(1,0,0,);(0,1,0);(0,0,1)}, por lo tanto, cualquier base de R^3 tiene tres vectores y entonces decimos que R^3 es un espacio vectorial de dimensión a 3.

dim (R^3) = 3

La dimensión de un E.V. indica la cantidad máxima de vectores linealmente independiente

Si, por ejemplo trabajamos en R^{2x3} espacio vectorial de dimensión 6 (2 x3) , un conjunto formado por seis matrices de 2x3 seguro es L.D.

Proposición*:* Cualquier conjunto linealmente independiente en un espacio vectorial se puede extender a una base.

Es decir, se le pueden agregar vectores de manera que el conjunto ampliado sea una base.

Observación: Si una matriz está en la forma escalonada por filas, los vectores fila no nulos son linealmente independientes.

Ejemplo:
Sea {(1,2,-1,3) , (1,2,1,2)} $\subset R^4$

Escribimos la matriz: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ Triangulamos: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

En consecuencia, los vectores originales son linealmente independientes.

Ahora agregamos filas a la última matriz hasta obtener una **matriz cuadrada** y escalonada por filas.
Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces: B={(1,2,-1,3), (1,2,1,2), (0,1,0,0), (0,0,0,1)} es una base de R^4 y contiene a los vectores dados.

BASE DE UN SUBESPACIO

Puesto que un subespacio *S* no nulo de un espacio vectorial es un espacio vectorial podemos hallar una base de un subespacio. Para encontrar una base de un subespacio *S* tendremos que seleccionar un conjunto de vectores $\{v_1,..,v_n\}$ que verifique:

$1-\{v_1,..,v_n\}\subset S$

$2-\{v_1,..,v_n\}$ L.I

$3-\{v_1,..,v_n\}$ generadores de S

Ejemplo 1
Sea $V=R^3$ y *S* el subespacio formado por todas las combinaciones lineales de los vectores (1,2,3) y (-1,2-1); estos dos vectores son linealmente independientes, pues no son múltiplos entre sí; y como obviamente generan a *S*, *B*={(1,2,3);(-1,2-1)} es una base de *S*.
La dimensión del subespacio es 2 dim (S) = 2

El siguiente razonamiento proporciona un método sistemático para obtener una base del subespacio generado por un conjunto de vectores que no son independientes.

Supongamos que un subespacio S está generado por los vectores v_1, v_2. Si a uno de ellos le sumamos un múltiplo del otro el subespacio generado por el nuevo conjunto no cambia.

Por ejemplo, hay que probar: $gen\{v_1, v_2\} = gen\{v_1, v_2 + \alpha v_1\}$

$$v \in gen\{v_1,v_2\} \Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 - \alpha_2 \alpha v_1 + \alpha_2 \alpha v_1 = (\alpha_1 - \alpha_2\alpha)v_1 + \alpha_2(v_2 + \alpha v_1)$$
$$\Rightarrow v \in gen\{v_1, v_2 + \alpha v_1\}.$$
$$v \in gen\{v_1, v_2 + \alpha v_1\} \Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2(v_2 + \alpha v_1) = (\alpha_1 + \alpha_2\alpha)v_1 + \alpha_2 v_2 \Rightarrow v \in gen\{v_1, v_2\}.$$

Observación: un argumento similar se puede aplicar en el caso de que S tenga más de dos generadores.

Ejemplo 2

Obtener una base del subespacio H de R^4 generado por: $\{(1,0,1,1),(2,-1,0,1),(0,1,2,1)\}$.

Un método sistemático que nos proporciona una base es el siguiente:

- Ubicar los vectores en las filas de una matriz
- Escalonar la matriz
- Las filas no nulas de la matriz resultante forman una base del subespacio en cuestión.

A este procedimiento se le llama **extraer una base**

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{fila2-2\,fila1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (a partir del razonamiento anterior, el subespacio generado por las filas de esta matriz coincide con el subespacio generado por las filas de la matriz original) $\underset{fila3+fila2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Entonces

$gen\{(1,0,1,1),(0,-1,-2,-1)\} = gen\{(1,0,1,1),(0,-1,-2,-1),(0,0,0,0)\} =$

$gen\{(1,0,1,1),(0,-1,-2,-1),(0,1,2,1)\} = gen\{(1,0,1,1),(2,-1,0,1),(0,1,2,1)\}$.

Como las filas no nulas de una matriz escalonada forman un conjunto de vectores L.I , obtenemos una base del subespacio propuesto. $base = \{(1,0,1,1),(0,-1,-2,-1)\}$.

Dim (H) = 2

Ejemplo 3

Sea $V = R^3$ y $S = \{(x,y,z)/2x - y + 3z = 0\}$ que es claramente un subespacio de R^3 , pues se trata de un plano que contiene al origen.

Tratemos de hallar una base de *S*: si un vector (x,y,z) pertenece a *S*, entonces debe satisfacer la ecuación:

$2x\text{-}y + 3z = 0$

o lo que es equivalente, $y = 2x + 3z$.

Entonces los vectores que pertenezcan a *S* serán de la forma

$$(x,2x+3z,z) = (x,2x,0) + (0,3z,z) = x(1,2,0) + z(0,3,1)$$

de donde deducimos que {(1,2,0);(0,3,1)} es un sistema de generadores de *S*.

Como además son linealmente independientes, pues no son múltiplos entre sí, tenemos que forman una base de *S*. Observar que para $x = 1$ y $z = 0$ o $x = 0$ y $z = 1$ resulta que los vectores hallados están en *S*.

Dim (S) = 2

En general, cuando un subespacio viene definido como solución de un sistema de ecuaciones homogéneo, la forma de obtener una base de él es resolviendo dicho sistema; como se tratará de un sistema indeterminado (a menos que la única solución sea el vector nulo) tendremos unas variables expresadas en función de otras (independientes), con lo cual podremos expresar cualquier vector del subespacio como combinación lineal de un cierto número de vectores (uno por cada variable independiente del sistema) que serán independientes y por tanto una base del subespacio. Veámoslo con otro ejemplo.

Ejemplo 4

Dados $V=R^4$ y S el subespacio constituido por los vectores que verifican $2x_1+x_2\text{-}3x_3+x_4=0$, hallar una base de *S*.

Resolver este sistema equivale a despejar una variable, por ejemplo, $x_4=-2x_1-x_2+3x_3$, entonces los vectores del subespacio son de la forma

$$(x_1,x_2,x_3,\text{-}2x_1\text{ - }x_2+3x_3)=(\mathrm{x}_1,0,0,-2x_1)+(0,\mathrm{x}_2,0,-x_2)+(0,0,x_3,3x_3)=$$

$$\mathrm{x}_1(1,0,0,\text{-}2)\ +\mathrm{x}_2(0,1,0,-1)+x_3(0,0,1,3)$$

Los vectores (1; 0;0;-2) , (0 ; 1; 0;-1) y (0 ; 0 ; 1 ; 3) forman un sistema de generadores del subespacio .

Resta determinar si son LI, para ello usaremos el método corto, colocamos los vectores en fila en una matriz y escalonamos, si ninguna fila se anula, podemos asegurar que son L.I.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

pero esta matriz ya está escalonada; por lo tanto, los vectores son linealmente independientes y constituyen una base del subespacio *S*.

En definitiva una base es B = { (1; 0;0;-2) , (0 ; 1; 0;-1) y (0 ; 0 ; 1 ; 3)} y dim (S) = 3

Ejemplo 5

Determinar una base del subespacio *S*:

$$S=\{(x,y,z)\ \ /\ \ 2x-y=z,\ \ x-y+z=0\}$$

Podemos pensar al subespacio como las soluciones de un sistema homogéneo:

$$S:\begin{cases} 2x-y=z, \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

Para obtener una base resolvemos el sistema anterior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Sistema equivalente

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ y-3z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=y-z=3z-z=2z \\ y=3z \end{cases}$$

Las soluciones son de la forma

$(2z,3z,z) = z(2,3,1)$

Los elementos de S son múltiplos de $(2,3,1)$, entonces el conjunto formado por $(2,3,1)$ es un sistema de generadores de S. Como todo conjunto formado por un solo vector no nulo es linealmente independiente, este conjunto es una base del subespacio dado.

$B = \{(2,3,1)\}$ Es una base del subespacio y dim (S) = 1

En un espacio vectorial de dimensión n, podemos encontrar subespacios de dimensión ≤ n

El subespacio $\{\vec{0}\}$ formado por el vector nulo, no tiene base, ya que no pueden hallarse vectores L.I. que pertenezcan a él. Es de dimensión 0.

Un subespacio de dimensión n incluido en un espacio vectorial de dimensión n coincide con todo el espacio vectorial.

Si trabajamos, por ejemplo en R^3, entonces podemos encontrar:
Subespacio de dimensión 0, $\{\vec{0}\}$ formado sólo por el vector nulo
Subespacios de dimensión 1, geométricamente corresponden a rectas que pasan por el origen
Subespacios de dimensión 2, geométricamente corresponden a planos que pasan por el origen
Subespacio de dimensión 3, todo R^3

COORDENADAS

Dado un espacio vectorial de dimensión *n* podemos expresar a los vectores en una base $B = \{v_1, v_2 ..., v_n\}$.

$$\vec{v} = s_1\vec{v}_1 + s_2\vec{v}_2 + ... + s_n\vec{v}_n \qquad s_i \in R$$

Los números, $(s_1, s_{2,} ....., s_n)_B$, los escalares de la combinación lineal, se denominan las **coordenadas** del vector *v* en la base *B*.

Estos números caracterizan al vector y en las aplicaciones algunas bases pueden proporcionar representaciones que son más adecuadas que otras.

Proposición
Las coordenadas de un vector en una base son únicas. (Según lo analizado en la página 1)

Respecto de una base un vector $\vec{v}$ queda caracterizado por los coeficientes de la combinación lineal, los escalares se llaman coordenadas o componentes del vector respecto de la base dada. Si se elige otra base en el espacio vectorial, entonces el mismo vector admite otras coordenadas.

Ejemplo:

El conjunto B_1 = {(1,1); (–1,1)} es una base de R^2, lo mismo que el conjunto B_2 = {(-3,0); (1,2)}

Encontraremos las coordenadas del vector (-2,3) respecto a la base B_1 y B_2.

Armamos la combinación lineal (-2,3) = a (1,1) + b(–1,1) , a y b serán las coordenadas del vector (- 2 ; 3) en la base B_1 .

$\begin{cases} -2 = a - b \\ 3 = a + b \end{cases}$ y resolvemos el sistema , que debe resultar SCD ya que B_1 es base de R^2.

Si sumamos las ecuaciones resulta - 2 + 3 = 2 a entonces $a = \dfrac{1}{2}$

Reemplazamos en la primera

$-2 = \dfrac{1}{2}$ - b

$b = \dfrac{1}{2} + 2$

$b = \dfrac{5}{2}$

Si estuviéramos trabajando en un espacio vectorial de dimensión más grande, resolvemos el sistema por el método de Gauss o Gauss-Jordan
Verificamos

$$\frac{1}{2}\ (1;1) + \frac{5}{2}(-1;1) = \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}\right) = (-2;3)$$

Entonces las coordenadas del vector (-2 ; 3) en la base B_1 = {(1,1); (–1,1)}son $\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{5}{2}$

Se escribe $\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{5}{2}\right)_{B_1}$

Ahora encontraremos las coordenadas en la base B_2 = {(-3,0); (1,2)}

Armamos la combinación lineal (-2,3) = a (-3,0) + b(1,2) , a y b serán las coordenadas del vector (- 2 ; 3) en la base B_2 .

$\begin{cases} -2 = -3a + b \\ 3 = 2b \end{cases}$ y resolvemos el sistema, en este caso es inmediato .

De la segunda ecuación $b = \dfrac{3}{2}$

Reemplazamos en la primera ecuación:

$$-2 = -3a + \frac{3}{2}$$
$$3a = \frac{3}{2} + 2$$
$$a = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{3}$$
$$a = \frac{7}{6}$$

Entonces las coordenadas del vector (-2 ; 3) en la base B_2 = {(-3,0); (1,2)}son $\frac{7}{6}$ y $\frac{3}{2}$

Verificamos $\frac{7}{6}(-3;0) + \frac{3}{2}(1;2) = \left(-\frac{7}{2};\, 0\right) + \left(\frac{3}{2};3\right) = (-2;3)$

Se escribe $\left(\frac{7}{6}\ ;\ \frac{3}{2}\right)_{B_2}$