COMBINACIÓN LINEAL

Sea (V;+;K;.) un espacio vectorial, A=$\{v_1; v_{2;} v_3; \ldots; v_n\}$ un conjunto de vectores de V, y v un vector de V.

El vector de V es combinación lineal de los elementos de A si, y sólo si, existen escalares $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \ldots; \alpha_n$ del cuerpo K tales que :

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Ejemplos:

1.- El vector v=(3;5;7) es combinación lineal de los vectores A=$\{u_1 = (1;2;3); u_2 = (1;1;1)\}$

v=$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \Longrightarrow (3;5;7) = \alpha_1(1;2;3) + \alpha_2(1;1;1)$

$(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$ E.V

$(x,y,z)+(x',y',z') = (x+x', y+y', z+z')$

$\alpha(x,y,z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

$(3;5;7) = (\alpha_1; 2\alpha_1; 3\alpha_1) + (\alpha_2; \alpha_2; \alpha_2) = (\alpha_1 + \alpha_2; 2\alpha_1 + \alpha_2; 3\alpha_1 + \alpha_2)$

por igualdad de vectores, armamos el sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 3 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 5 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = 7 \end{cases}$$

Que un sistema de ecuaciones que resolvemos según el método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[-3F_1+F_3 \to F_3]{-2F_1+F_2 \to F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[-2F_2+F_3 \to F_3]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

volvemos a las ecuaciones:

$r(A) = 2$

$r(A') = 2$ $\quad n I = 2 \quad$ SCD

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 3 \\ -\alpha_2 = -1 \end{cases} \qquad \alpha_2 = 1 \qquad \alpha_1 = 2$$

En consecuencia, el vector v es combinación lineal de los vectores de A.O sea:

$$v = 2u_1 + 1u_2$$

$(3,5,7) = 2(1,2,3) + 1(1,1,1) = (3,5,7)$

2.- Sea el espacio vectorial (R^{2x2} ; +; R;.) . Comprobar que la matriz M= $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ es combinación lineal del conjunto A=$\left\{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

M=$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\alpha_1 & 0 \\ 0 & 2\alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\alpha_2 & 1\alpha_2 \\ 0 & 1\alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha_3 & 0 \\ 0 & 1\alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 & \alpha_2 \\ 0 & 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Por igualdad de matrices obtenemos el siguiente sistema:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 2$$
$$0 = \alpha_2$$
$$1{=}0$$
$$3 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

SI

En la tercera ecuación vemos que la igualdad es un absurdo, por lo tanto, el sistema es incompatible. La matriz M no es combinación lineal del conjunto de matrices de A

3.- Sea el espacio vectorial (P_2; + ; R ; .) . (P_2 polinomios de grado 2). $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

Analizar si el polinomio p(x)= 3 x^2 -5x +2 es combinación lineal del conjunto

A = { $p_1 = x^2 - x$; $p_2 = x+2$; $p_3 = x^2 - 2x + 4$; $p_4 = 2x + 3$ } $P_2 = 0x^2 + x + 2$

Aplicamos la definición de combinación lineal:

$$\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) + \alpha_4 p_4(x) = p(x)$$

$$\alpha_1(x^2 - x) + \alpha_2(x + 2) + \alpha_3(x^2 - 2x + 4) + \alpha_4(2x + 3) = 3x^2 - 5x + 2$$

Aplicando la propiedad distributiva y agrupando por las potencias de x obtenemos:

$$(\alpha_1 + \alpha_3)x^2 + (-\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 + 2\alpha_4)x + (2\alpha_2 + 4\alpha_3 + 3\alpha_4) = 3x^2 - 5x + 2$$

Por igualdad de polinomios tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 3 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 + 2\alpha_4 = -5 \\ 2\alpha_2 + 4\alpha_3 + 3\alpha_4 = 2 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right) \underset{F1 + f2 \to f2}{\to} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right) \underset{f3 \leftrightarrow f3}{\to} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 6 \end{array}\right)$$

r(A) = 3
r(A') = 3
nI = 4
S.C.I

El sistema en compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Vuelvo al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 3 \\ \alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 = -2 \\ 6\alpha_3 - \alpha_4 = 6 \end{cases}$$

Despejando obtenemos los siguientes valores:

$$\alpha_4 = -6 + 6\alpha_3 \qquad \alpha_2 = 11\alpha_3 + 10 \quad \alpha_1 = -\alpha_3 + 3$$

Entonces el polinomio p(x) es combinación lineal del conjunto A, ya que aunque no son únicos existen los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. La expresión del polinomio p(x) como combinación lineal de los polinomios del conjunto A es:

$(3 - \alpha_3)(x^2 - x) + (-11\alpha_3 + 10)(x + 2) + \alpha_3(x^2 - 2x + 4) + (6\alpha_3 - 6)(2x + 3) = 3x^2 - 5x + 2$ con $\alpha_3 \epsilon R$

Sugerencia proponer valores de α_3 obtener distintas combinaciones lineales y verificar los resultados.

INDEPENDENCIA Y DEPENDENCIA LINEAL DE VECTORES

Al ver el concepto de combinación lineal tenemos tres posibilidades, un vector puede ser expresado por medio de un conjunto de vectores como combinación lineal de manera única, o de infinitas maneras o no puede ser expresado como combinación lineal.

Entonces podemos definir a partir de un espacio vectorial (V ; + ; K ; .) y un conjunto de vectores A=$\{v_1; v_2; v_3; \ldots ; v_n\} \subset V$, se dice que:

La colección de vectores A es **linealmente independiente** si la única forma de expresar al vector nulo $0 \in V$,com o combinación lineal de los vectores de A es con todos los escalares $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; \dots; \alpha_n$ del cuerpo K iguales a 0.
En símbolos: A es linealmente independiente si

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_n v_n \Rightarrow \alpha_i = 0$$

Es necesario que todos los escalares sean nulos.

En símbolos: A es **linealmente dependiente** si y solo si:
$\exists\ 0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_n v_n \wedge \alpha_i \neq 0$

Cuando se analiza la independencia o dependencia lineal el objetivo es determinar si la solución trivial es la única manera de generar por combinación lineal al vector nulo o si existen otras soluciones.
Si Hablamos de vectores linealmente dependientes encontramos que uno de ellos o varios se pueden expresar como combinación lineal de los otros.

Ejemplos:

1.- Determinar si el siguiente conjunto es linealmente independiente o dependiente:
A={(1;1;1);(0;1;-2);(1;1;-1)}
$\alpha(1;1;1) + \beta(0;1;-2) + \gamma(1;1;-1)$=(0;0;0) $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ \alpha - 2\beta - \gamma &= 0 \end{aligned}$$

Resuelvo el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{-f1+f2 \to f2 \\ -f1+f3 \to f3}}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{2f2+f3 \to f3}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

Vuelvo a plantear el sistema:

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 0 \\ \beta &= 0 \\ -2\gamma &= 0 \end{aligned}$$

Resulta: $\alpha = 0 \quad \beta = 0 \quad \gamma = 0$ por lo tanto el conjunto es linealmente independiente.

2.-Determinar si el siguiente conjunto es linealmente independiente o dependiente:
A={(1;2;3);(1;1;1);(4;6;8)}
$\alpha(1;2;3) + \beta(;1;1;1) + \gamma(4;6;8)$=(0;0;0) $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R}, \cdot)$
SE plantea el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 4\gamma &= 0 \\ 2\alpha + \beta + 6\gamma &= 0 \\ 3\alpha + \beta + 8\gamma &= 0 \end{aligned}$$

Resuelvo el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 8 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Sistema compatible indeterminado.

$r(A) = 2$
$r(A') = 2$ $nI = 3$ SCI

Encontramos infinitas soluciones

$$\alpha = -2\gamma \quad \beta = -2\gamma$$

La solución trivial no es la única combinación lineal . En consecuencia, el conjunto A es linealmente dependiente.

MÉTODO "CORTO" PARA ANALIZAR INDEPENDENCIA Y DEPENDENCIA LINEAL

Vamos a trabajar con los vectores de ejemplo anterior

A={(1;2;3);(1;1;1);(4;6;8)}

Ubicamos los vectores en fila

$$\left(\begin{array}{c|ccc} v_1 = & 1 & 2 & 3 \\ v_2 = & 1 & 1 & 1 \\ v_3 = & 4 & 6 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} v_1 & 1 & 2 & 3 \\ -v_1 + v_2 & 0 & -1 & -2 \\ -4v_1 + v_3 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{c|ccc} v_1 & 1 & 2 & 3 \\ -v_1 + v_2 & 0 & -1 & -2 \\ -2v_1 - 2v_2 + v_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$-2v_1 - 2v_2 + v_3 = 0$$

$$2v_1 + 2v_2 = v_3$$

v_3 se puede escribir como combinación lineal de los otros dos vectores.

En resumen:

- Ubicamos los vectores por fila .
- Si no se anula ninguna fila los vectores son L.I
- Si se anula una o más filas los vectores son L.D

Propiedades

Sea (V;+;K;.) un espacio vectorial

- El vector{v} es linealmente independiente si, y solo si ,v v no es el vector nulo.
- Si el vector nulo pertenece a un conjunto de vectores A=$\{v_1; v_{2;} v_3; \ldots; v_n\}$ entonces el conjunto A es linealmente dependiente.
- El conjunto de vectores A=$\{v_1; v_{2;} v_3; \ldots; v_n\}$ es linealmente dependiente si y solo si , algún vector de A es combinación lineal de los vectores restantes.
- UN conjunto de vectores A=$\{v_1; v_{2;} v_3; \ldots; v_n\}$ es linealmente independiente si y solo si ningún vector de A es combinación lineal de los vectores restantes

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

En R^2 si los vectores son paralelos, son Linealmente Dependientes. En caso contrario son Linealmente Independientes.

En R^3 , si los tres vectores se encuentran en un mismo plano son Linealmente Dependientes.

Son Linealmente Independientes cuando no están los tres vectores en un mismo plano, puede ser que dos estén en un mismo plano y el tercero se encuentre en otro plano

ECUACIONES QUE DETERMINAN A LOS ELEMENTOS DE UN SUBESPACIO VECTORIAL
CONJUNTO DE GENERADORES

Definición:
Dado un conjunto de vectores $\{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$ en un Espacio Vectorial V decimos que generan a V si todos los vectores de V es combinación lineal de los vectores $\{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$. Es decir si existen escalares $k_1, k_2, \ldots, k_n$tales que para todo v que pertenece a V se verifica

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n$$

Si los vectores $\{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$ pertenecen a un subespacio de V, de tal manera que todo vector de S es combinación lineal de $\{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$ entonces decimos que este conujnto de vectores genera al subespacio S, es un conjunto de generadores de S.
Se simboliza:
S= <$v_1; v_2; \ldots; v_n$> o S=gen$\{v_1; v_2; \ldots; v_n\}$ o $S = \overline{\{v_1; v_2; \ldots; v_n\}}$

Vamos a trabajar con un ejemplo
1.-Sea S el subespacio generado por S=gen {(1;2;1:0); (0;1;-1;1); (3; 2; 7; -4)} Determinar las ecuaciones que definen a S.

$(\mathbb{R}^4, +, \mathbb{R}, \cdot)$

Si S es un subespacio generado por estos vectores entonces cualquier vector se puede escribir como combinación lineal de los vectores de S, o sea:
$(x; y; z; w) = \alpha(1; 2; 1: 0) + \beta(0; 1; -1; 1) + \gamma(3; 2: 7: -4)$ formamos las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} x = \alpha + 3\gamma \\ y = 2\alpha + \beta + 2\gamma \\ z = \alpha - \beta + 7\gamma \\ w = \beta - 4\gamma \end{cases}$$ Resolvemos el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & x \\ 2 & 1 & 2 & y \\ 1 & -1 & 7 & z \\ 0 & 1 & -4 & w \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & x \\ 0 & 1 & -4 & -2x + y \\ 0 & -1 & 4 & -x + z \\ 0 & 1 & -4 & w \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & x \\ 0 & 1 & -4 & -2x + y \\ 0 & 0 & 0 & -3x + y + z \\ 0 & 0 & 0 & 2x - y + w \end{array}\right)$$

Se triangula el sistema, para que se cumpla el teorema de Rouche- Frobenius (o sea para que el sistema sea compatible), tienen que ser 0 las últimas dos ecuaciones de la derecha.
Entonces:

$$\begin{cases} -3x + y - z = 0 \\ 2x - y + w = 0 \end{cases}$$

son las ecuaciones que definen el subespacio.
Entonces se puede expresar el subespacio de la siguiente manera:

$$S = \left\{ (x; y; z; w) \in \mathbb{R}^4 \,/ \begin{cases} -3x + y - z = 0 \\ 2x - y + w = 0 \end{cases} \right\}$$

2.- Encontrar el subespacio generado por el conjunto A= $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$ en el espacio vectorial $(R^{2x2}; +; R; .)$

Consideramos una matriz genérica que pertenece a R^{2x2}, $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$x = \alpha + \beta + 4\gamma$$
$$y = \alpha + 3\gamma$$
$$z = \alpha + 3\gamma$$
$$w = \alpha + \beta + 4\gamma$$

Armamos la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & x \\ 1 & 0 & 3 & y \\ 1 & 0 & 3 & z \\ 1 & 1 & 4 & w \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & x \\ 0 & -1 & -1 & -x+y \\ 0 & -1 & -1 & -x+z \\ 0 & 0 & 0 & -x+w \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & x \\ 0 & -1 & -1 & -x+y \\ 0 & 0 & 0 & -y+z \\ 0 & 0 & 0 & -x+w \end{array}\right)$$

Para que el sistema sea compatible se tiene que cumplir que: - y + z =0 y - x + w =0.

$$gen\ A = \left\{ M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in R^{2x2} / -y + z = 0 \wedge -x + w = 0 \right\}$$

$z = y$
$w = x$

$$= \left\{ M = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \in R^{2x2} \ / \ x \in R \wedge y \in R \right\}$$

3.-Encontrar el subespacio generado por A=$\{(1;2;3);(0;-1;5);\cancel{(2;1;6)}\}$ en el espacio vectorial $(R^3;+;R;.)$

$$(x;y;z) = \alpha(1;2;3) + \beta(0;-1;5) + \gamma(2;1;6)$$
$$x = \alpha + 2\gamma$$
$$y = 2\alpha - \beta + \gamma$$
$$z = 3\alpha + 5\beta + 6\gamma$$

Resolvemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 2 & -1 & 1 & y \\ 3 & 5 & 6 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & -1 & -1 & -2x+y \\ 0 & 5 & 0 & -3x+z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & -1 & -1 & -2x+y \\ 0 & 0 & -5 & -13x+5y+z \end{array}\right)$$

En este caso el conjunto A genera a todo el espacio

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$

$x = -y + z$

$(x,y,z) = (-y+z, y, z) = y(-1,1,0) + z(1,0,1)$

$gen(S) = \langle (-1,1,0), (1,0,1) \rangle$

$S = \left\{ (x,y,z) / \underbrace{\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}}_{} \right\}$ X

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \quad x = -z \\ 3y = 0 \to y = 0 \end{cases}$

$(x,y,z) = (-z,0,z) = z(-1,0,1)$

$gen(S) = \{(-1,0,1)\}$