T P 04 Ej. 16

Si un pato está nadando en la circunferencia de ecuación paramétrica $\big(x(t), y(t)\big) = (\cos t\,, \operatorname{sen} t)$ y la temperatura del agua está dada por $T(x, y) = x^2 e^y - xy^3$ hallar la tasa de cambio de temperatura que siente el pato en el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Hay varias partes para entender en el ejercicio.

La primera es que la ecuación paramétrica del enunciado es la trayectoria del pato; similar a lo que teníamos en el ejercicio 1 de este trabajo práctico.

Luego, cuando se pide la tasa de cambio de temperatura que siente el pato, debemos notar que la temperatura es fija para cada punto del agua por lo que el pato va a experimentar el cambio de temperatura porque se mueve de un punto a otro.

Combinando ambas, vemos que lo que se está pidiendo es determinar la tasa de variación de la función temperatura cuando, estando parado en el punto indicado, se mueve en la dirección en que se está moviendo el pato. O sea, la derivada direccional de la función T en la dirección y sentido del vector velocidad del pato.

Como T es diferenciable podemos hallar esa derivada a través del siguiente cálculo: $\nabla T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \vec{v}$

Esto va a necesitar de 3 pasos:

1. Calcular el gradiente de T en el punto
2. Calcular el vector velocidad del pato en el punto
3. Aplicar el producto escalar entre ambos.

1) Primero obtenemos el gradiente de T derivando la función T y luego evaluándola en el punto indicado.

$$\nabla T(x, y) = \ (2xe^y - y^3, x^2e^y - 3xy^2)$$

$$\nabla T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \ \left(2\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - 3\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$$

Y ahora operamos en cada uno de las componentes del gradiente.

$$\nabla T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \ \left(\sqrt{2}\, e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - 2^{-\frac{3}{2}}, 2^{-1}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - 3\ * 2^{-\frac{3}{2}}\right)$$

2) Ahora calculamos el vector velocidad

Tenemos la trayectoria que está definida de la forma: $r(t) = (\cos t\,, \operatorname{sen} t)$.

Para obtener el vector velocidad, derivamos el vector: $v(t) = (-\sin t\,, \cos t)$.

Ahora que tenemos el vector velocidad para cualquier valor de t, deberíamos evaluarlo en el t que le corresponda al punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Entonces ahora nos preguntamos ¿qué valor tiene que tener t para que $r(t)$ valga $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$?

Teniendo la definición de $r(t)$, podemos reducir esa pregunta a esta otra: ¿qué valor debe tomar t para que $\cos t$ sea igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y a la vez $\operatorname{sen} t$ sea igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$?

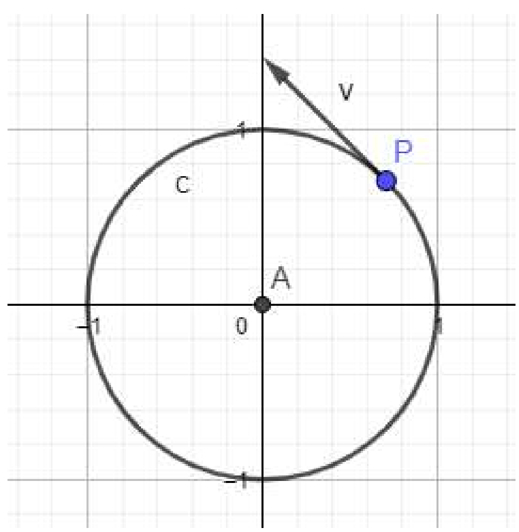
Esto lo obtenemos haciendo uso de las funciones arco seno y arco coseno. Tanto $arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ como $arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ nos dan como resultado $\frac{\pi}{4}$.

Eso quiere decir que cuando t vale $\frac{\pi}{4}$ la función $r(t)$ nos devuelve el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Por lo tanto si queremos encontrar la velocidad en ese punto debemos evaluar el vector $r(t)$ en $\frac{\pi}{4}$.

$$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = (-\sin\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{4})$$

$$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

Acá podemos ver graficada la trayectoria circular y el vector V en punto solicitado



3) Ahora calculamos $\nabla T\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$\nabla T\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\sqrt{2}\, e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - 2^{-\frac{3}{2}}, 2^{-1}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - 3\ * 2^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$\vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) = (-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\nabla T\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}\, e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - 2^{-\frac{3}{2}}, 2^{-1}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - 3\ * 2^{-\frac{3}{2}}\right)(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\nabla T\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\, e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2}}2^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}2^{-1}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{2}}3\ * 2^{-\frac{3}{2}}$$

$$\nabla T\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{4} + 2^{-\frac{3}{2}}e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{3}{4}$$

$$T\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ \vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(2^{-\frac{3}{2}} - 1\right) - \frac{1}{2}$$

Por lo tanto: el cambio de temperatura que experimenta el pato en el punto $\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}$ es $e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(2^{-\frac{3}{2}} - 1\right) - \frac{1}{2}$

Este valor es aproximadamente -1,81 y en el siguiente gráfico podemos ver cómo si estamos parados en el punto P y nos movemos en la dirección v, el valor de la función T (graficada en naranja) desciende. El gráfico está limitado por la circunferencia que recorre el pato, por lo que hay que prestar atención al borde del gráfico naranja.