Derivadas direccionales. Guía de clase. Com 02. 15/4

DERIVADA DIRECCIONAL DE UNA FUNCIÓN ESCALAR
DE DOS VARIABLES INDEPENDIENTES (x, y),
RESPECTO DEL VECTOR UNITARIO $\vec{v}$

Introducción geométrica

Se tiene una función escalar con dominio en el plano xy

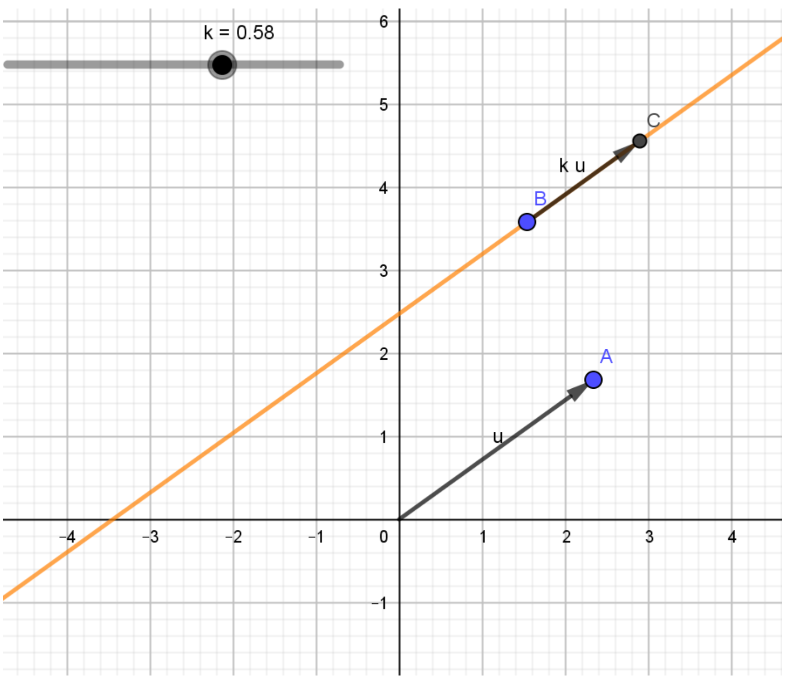
$$f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \qquad U \text{ es un conjunto abierto no vacío}$$

$$z = f(x, y)$$

$$(x_0, y_0) \in U$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2) \qquad con\ \|\vec{v}\| = 1$$

Recta en el plano en forma vectorial o paramétrica

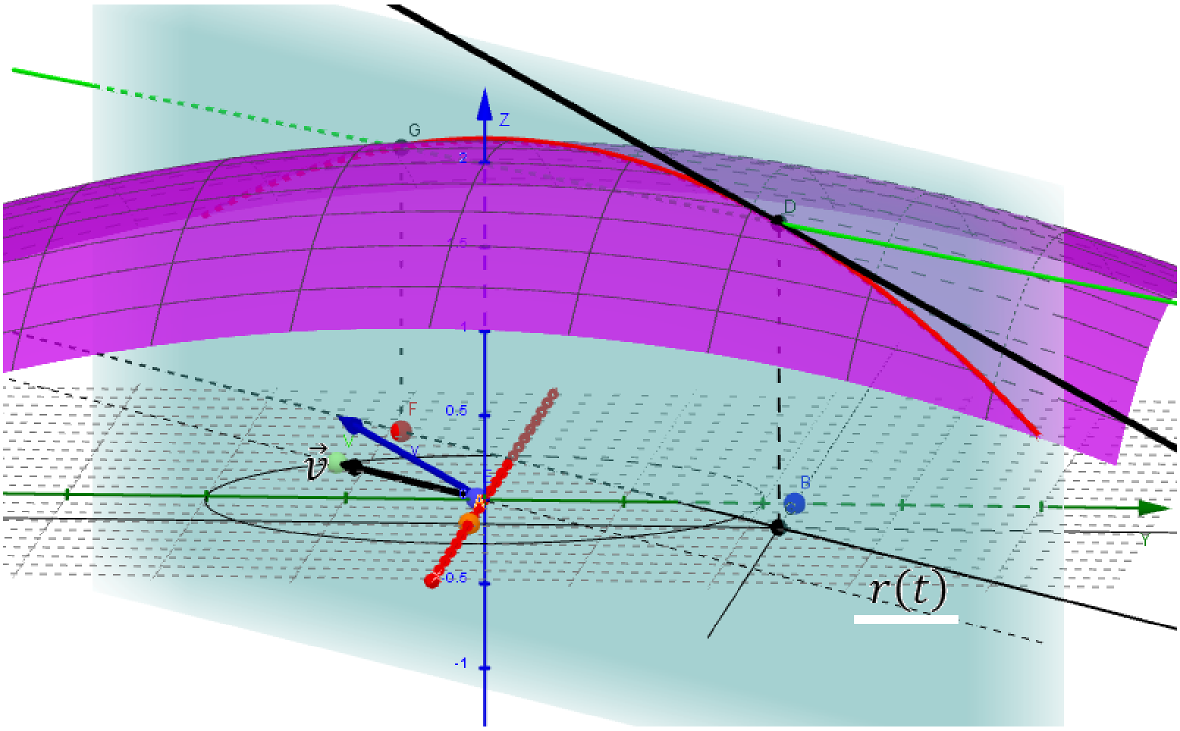


Ecuación vectorial o paramétrica de la recta en el plano que pasa por el punto (x_0, y_0) en la dirección del vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$

$$R: \vec{r}(t) = (x_0, y_0) + t\,(v_1, v_2) = (x_0 + v_1\,t, y_0 + v_2\,t) = \big(x(t), y(t)\big) \quad \text{con} \quad t \in \mathbb{R}$$

Nótese que en esta ecuación $\vec{r}(0) = (x_0, y_0)$, punto de cálculo de la derivada direccional.

Derivada direccional



Primeramente se compone r con f, esto es:
Para que esta derivada siga siendo una razón de cambio por unidad de desplazamiento sobre la recta dirección, es que le pediremos a $\vec{v}$ que sea un vector unitario.

$$f \circ \vec{r}(t) = f\big(\vec{r}(t)\big) = f\big(x(t), y(t)\big) = f(x_0 + v_1\, t, y_0 + v_2\, t)$$

De esta manera, si $t \neq 0$, $f\big(\vec{r}(t)\big)$ es la función incrementada un Δt sobre la recta R (recta dirección) a partir de (x_0, y_0).

Entonces Δz resulta:

$$\Delta z = f\big(x(t), y(t)\big) - \underbrace{f(x_0, y_0)}_{f(r(0))} = f(x_0 + v_1\, t, y_0 + v_2\, t) - f(x_0, y_0)$$

De esta manera el cociente entre los incrementos Δz y Δt, es:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{f(x_0 + v_1\, t, y_0 + v_2\, t) - f(x_0, y_0)}{\Delta t} = m_{S\vec{v}}$$

Aplicando ahora el límite para $\Delta t \to 0$, queda ($\Delta t = t - t_0 = t,\ t_0 = 0$):

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x_0 + v_1\, t, y_0 + v_2\, t) - f(x_0, y_0)}{\Delta t} = m_{T\vec{v}}$$

Si este límite existe, lo llamaremos la derivada direccional de f respecto del vector $\vec{v}$ en el punto (x_0, y_0), se lo denota como:

$$f'_{\vec{v}}(x_0, y_0) = f_{\vec{v}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + v_1\, t, y_0 + v_2\, t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Nota: si el vector $\vec{v}$ no cumple con la condición de ser unitario y $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces se procede a su normalización antes de aplicarlo en una derivada direccional.
Recuérdese que a un vector no nulo se lo normaliza dividéndolo por su módulo o norma, esto es:

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}, \text{ es un versor, siendo } \|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Método práctico

$$f_{\vec{v}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + v_1\, t, y_0 + v_2\, t) - f(x_0, y_0)}{t} \quad \text{indeterminación del tipo } \frac{0}{0}$$

$$f_{\vec{v}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + v_1\, t, y_0 + v_2\, t) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$\overset{L'H}{\triangleq} \lim_{t \to 0} \frac{\frac{d}{dt} f(x_0 + v_1\, t, y_0 + v_2\, t) - \frac{d}{dt} f(x_0, y_0)}{\frac{d}{dt} t} =$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\frac{d}{dt} f(x_0 + v_1\, t, y_0 + v_2\, t) - 0}{1} = \lim_{t \to 0} \frac{d}{dt} f(x_0 + v_1\, t, y_0 + v_2\, t)$$

Si no hay indeterminación y existe el límite anterior, nos queda

$$\left(\frac{d}{dt} f(x_0 + v_1\, t, y_0 + v_2\, t) \right)_{t=0} = f_{\vec{v}}(x_0, y_0)$$

Derivamos respecto de la variable "t" la función $f\big(r(t)\big) = h(t)$

Ejemplo

$$f(x,y) = 3x^2 - xy + y^3$$

$$(x_0, y_0) = (1,1)$$

$$\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$R: r(t) = (x_0, y_0) + t\,(v_1, v_2) = (x_0 + v_1\,t, y_0 + v_2\,t) = \big(x(t), y(t)\big)$ con $t \in \mathbb{R}$

$$r(t) = \left(\underbrace{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t}_{x}, \underbrace{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t}_{y}\right) = \big(x(t), y(t)\big)$$

$$f\big(r(t)\big) = 3\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2 - \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^3 = h(t)$$

$$f_{\vec{v}}(x_0, y_0) = \left(\frac{d}{dt} f(x_0 + v_1\,t, y_0 + v_2\,t)\right)_{t=0}$$

$$\frac{d}{dt} f\big(r(t)\big)$$

Finalmente

$$\left(\frac{d}{dt} f\big(r(t)\big)\right)_{t=0} = f_{\vec{v}}(x_0, y_0)$$