Resolución TP6:

Ejercicio 12 - e

Hallar los puntos críticos para $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$. Además, determinar si son máximos locales, mínimos locales o puntos de ensilladura. Calcular sus imágenes.

Para empezar:

- El dominio de la función no es todo $\mathbb{R}^2$, por lo que estaremos atentos en los puntos que hallaremos

$$Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x\ y \neq 0\}$$

ej: (0,0),(0,1),(1,0) etc

Primeras Derivadas:

$$f_x = y - \frac{1}{x^2}$$

$$f_y = x - \frac{1}{y^2}$$

Segundas Derivadas:

$$f_{xx} = \frac{2}{x^3}$$

$$f_{xy} = 1$$

$$f_{yx} = 1$$

$$f_{yy} = \frac{2}{\mathrm{y}^3}$$

Matriz Hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\mathrm{x}^3} & 1 \\ 1 & \frac{2}{\mathrm{y}^3} \end{pmatrix}$$

Buscando Puntos Críticos:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Longrightarrow f_x(x,y) = 0 \ \wedge f_y(x,y) = 0$$

Entonces aplicado a este caso:

$$\begin{cases} y \ - \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ x - \dfrac{1}{y^2} = 0 \end{cases}$$

Podemos resolver esto por sustitución:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ x - \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^2} = 0 \end{cases}$$

Entonces:

$$x - x^4 = 0 \Longrightarrow$$
$$x(1 - x^3) = 0 \Longrightarrow$$
$$x = 0 \ \vee 1 - x^3 = 0$$

Recordando el dominio descartamos $x = 0$:

$$1 - x^3 = 0 \Longrightarrow$$
$$x = \sqrt[3]{1} \Longrightarrow$$
$$x = 1 \Longrightarrow \ y \ = \frac{1}{1^2} = 1$$

Ahora bien, tenemos el punto crítico.

- $Pc_1 = (1,1)$

Clasificación:

$$Hf(Pc_1) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{1^3} & 1 \\ 1 & \dfrac{2}{1^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$det\ (Hf(Pc_1\ )\ ) = \ 4 - 1 = 3$$

Dado el criterio de clasificación $\det\big(Hf(Pc_1\ )\big) > 0$ y $f_{xx}(Pc_1\ ) > 0$ el punto es mínimo local.

Imagen del mínimo local: $f(1,1) = 3$