Integrales triples
Coordenadas cilíndricas.
Guía de clase. Com 02

Ejemplo introductorio a la transformación de coordenadas cilíndricas

Calcular el volumen de la región Ω, delimitada por los paraboloides

$$y = x^2 + z^2$$
$$y = 8 - x^2 - z^2$$

Propiedad

La integral triple de 1 sobre el recinto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, puede interpretarse como el valor numérico del volumen del cuerpo Ω.

$$Vol(\Omega) = \iiint_{\Omega} \underbrace{dx\, dy\, dz}_{dV}$$

Volviendo al ejemplo introductorio, búsqueda de la curva intersección entre las superficies dadas y su proyección en el el plano xz

$$y = x^2 + z^2$$
$$y = 8 - x^2 - z^2$$

$$y = x^2 + z^2 = 8 - x^2 - z^2$$

$$x^2 + z^2 = 4 = y$$

Rango de variación de y , para la región Ω

$$x^2 + z^2 \leq y \leq 8 - x^2 - z^2$$

Recinto en el plano coordenado xz

$$x^2 + z^2 \leq 4$$

$$Vol(\Omega) = \iiint_{\Omega} \underbrace{dx\, dy\, dz}_{dV} = \iint_{x^2+z^2\leq 4} \left(\int_{y=x^2+z^2}^{8-x^2-z^2} dy \right) dx\, dz =$$

$$= \iint_{x^2+z^2\leq 4} (8 - 2x^2 - 2z^2) dx\, dz =$$

Coordenadas polares para el plano coordenado xz

$$x = \rho\cos(\theta)$$

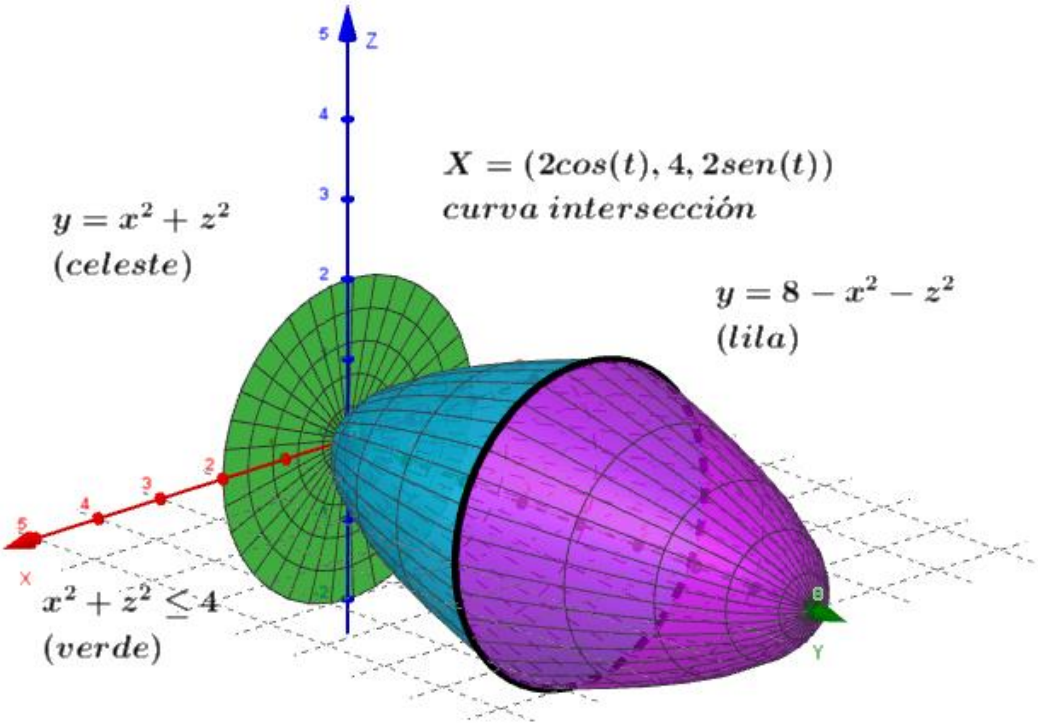
$$z = \rho\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$0 \leq \rho \leq 2$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

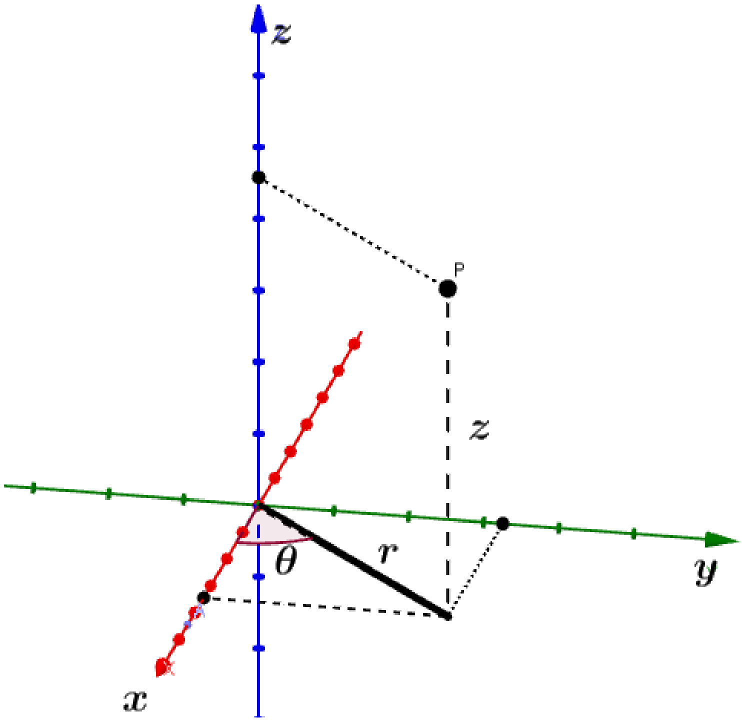
$$|J| = \rho$$

$$= \iint_{x^2+z^2\leq 4} \left(8 - 2\underbrace{(x^2+z^2)}_{\rho^2}\right) dx\,dz = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{2} (8-2\rho^2)\rho\,d\rho\,d\theta = 16\pi$$



Coordenadas cilíndricas

Otra manera de identificar la posición de un punto en el espacio, es mediante las coordenadas cilídricas, intuitivamente muy vinculadas con las coordenadas polares, a veces denominadas semipolares.



Link al applet de geogebra para visualizar dinámicamente la relación entre (x, y, z) y (r, θ, z)
https://www.geogebra.org/m/jfgnghs5

$$\begin{cases} x = x(r,\theta,z) = r\cos(\theta) \\ y = y(r,\theta,z) = r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ z = z(r,\theta,z) = z \end{cases}$$

Con

$$\begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq 2\,\pi \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Claramente son las variables (coordenadas) polares con el agregado de z, la cual se conserva como tal.

Se define entonces como la transformación de cambio de coordenadas a la función

$$T(r,\theta,z) = (r\cos(\theta)\,, r\,\mathrm{sen}(\theta)\,, z) = (x,y,z)$$
$$T\colon \Omega' \subseteq \mathbb{R}^3 \to \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$$

Con jacobiano

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_z \\ y_r & y_\theta & y_z \\ z_r & z_\theta & z_z \end{vmatrix}_{(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\,\mathrm{sen}(\theta) & 0 \\ \mathrm{sen}(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

La cual es inyectiva salvo en un conjunto de puntos de volumen nulo, ya que $0 \equiv 2\pi$, y para

$r = 0$ no se le asigna ángulo alguno, esto no afectará al cálculo integral.

Antes de aplicar este concepto al cálculo de integrales triples, mencionaremos los requisitos que deben cumplirse, similares al cambio de variables para integrales dobles.

Cambio de variables en integrales triples

Tenemos una función

$$T\colon \Omega' \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$T(u,v,w) = (x,y,z) = \big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)$$

Denominada función de transformación de coordenadas, $T \in C^1$, inyectiva y con jacobiano no nulo

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

Bajo estas condiciones la fórmula de cambio de variables para integrales triples resulta

$$\int_{\Omega} f(x,y,z)\, dV = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\ dx\, dy\, dz = \iiint_{\Omega'} f\big(T(u,v,w)\big)\ \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\ du\, dv\, dw$$

Al aplicar esta transformación a una integral triple en coordenadas cartesianas mediante el cambio de variables, resultará

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\ dx\, dy\, dz = \iiint_{\Omega'} f\big(x(r,\theta,z), y(r,\theta,z), z(r,\theta,z)\big)\ \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right|\ dr\, d\theta\, dz$$

Ejercicio 1

Resolver la siguiente integral triple,

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy\, dz$$

siendo R el recinto delimitado por: $z \geq x^2 + y^2, 1 \leq z \leq 4, y \geq x, y \geq 0$

Paraboloide

$$z = x^2 + y^2$$

$$1 \leq z \leq 4$$

Planos

$$z = 1, \quad z = 4$$

Condiciones en el plano coordenado xy

$$y \geq x, \;\; y \geq 0 \qquad (1)$$

Recta

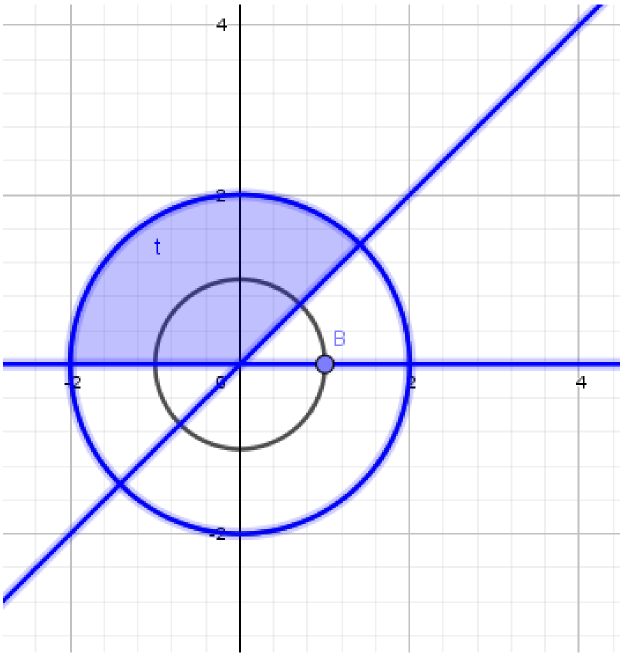
$$y = x$$

Del espacio

$$z = 1\text{:} \;\; 1 = x^2 + y^2 \quad \text{curva de nivel 1}$$

$$z = 4\text{:} \;\; 4 = x^2 + y^2 \quad \text{curva de nivel 4}$$

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \qquad (2)$$



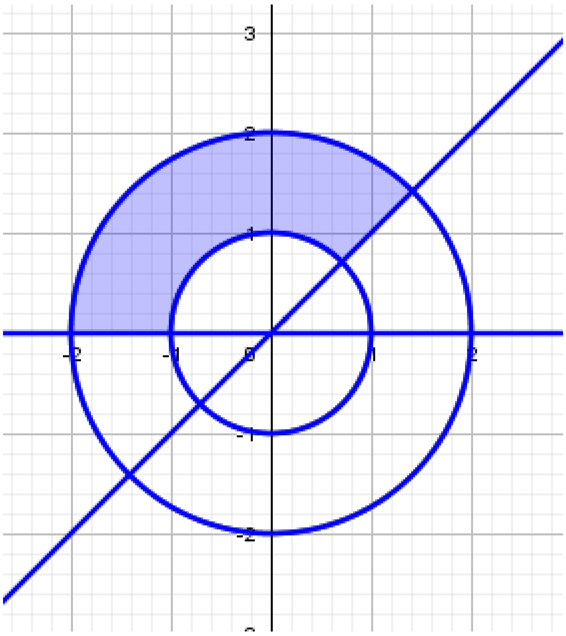
Para el cálculo de la integral pedida deberemos dividir el recinto en 2

Para recinto (I) $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

$$r^2 = x^2 + y^2 \leq z \leq 4$$
$$1 \leq r \leq 2$$
$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$$

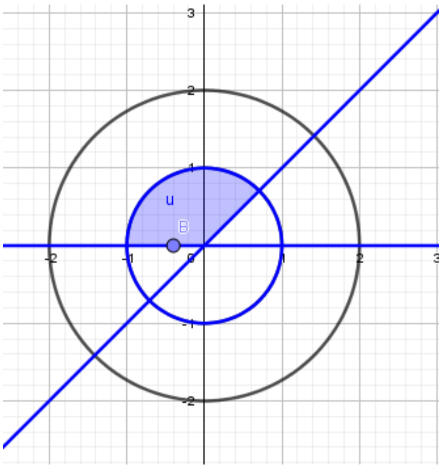
Piso: $z = x^2 + y^2$

Techo: $z = 4$



Para recinto (II) $x^2 + y^2 \leq 1$

$$\overbrace{1}^{Piso} \leq z \leq \overbrace{4}^{Techo}$$
$$0 \leq r \leq 1$$
$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$$



Finalmente

$$\begin{array}{c} 1 \leq z \leq 4 \\ 0 \leq r \leq 1 \\ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi \end{array} \quad o \quad \begin{array}{c} r^2 \leq z \leq 4 \\ 1 \leq r \leq 2 \\ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi \end{array}$$

Link al applet de geogebra

https://www.geogebra.org/m/ddnbhbtg

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy\, dz \underbrace{=}_{*}$$

$$\underbrace{=}_{*} \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\pi} \int_{r=1}^{2} \int_{z=r^2}^{4} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{r^2}}_{r}} r\, dz\, dr\, d\theta + \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=1}^{4} \frac{1}{\sqrt{\underbrace{(r\cos(\theta))^2 + (r\,\mathrm{sen}(\theta))^2}_{r^2}}} r\, dz\ dr\ d\theta =$$

$$= \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\pi} \int_{r=1}^{2} \int_{z=r^2}^{4} dz\, dr\, d\theta + \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=1}^{4} dz\, dr\, d\theta =$$

Ejercicio 2

1. Hallar el volumen del cuerpo delimitado por el cilindro $x^2 + (y-1)^2 = 1$ y los planos $z = y - 2,$ y, $z = 2 - y$

Volumen con integrales triples

$$V = \iiint_{\Omega} 1\, dx\, dy\, dz$$

Coordenadas cartesianas

$$y - 2 \le z \le 2 - y$$
$$x^2 + (y-1)^2 \le 1$$

Coordenadascilíndricas

$$y - 2 \le z \le 2 - y$$
$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = 1 + r\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$1 + r\,\mathrm{sen}(\theta) - 2 \le z \le 2 - (1 + r\,\mathrm{sen}(\theta))$$
$$-1 + r\,\mathrm{sen}(\theta) \le z \le 1 - r\,\mathrm{sen}(\theta)$$
$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = 1 + r\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$-1 + r\,\mathrm{sen}(\theta) \le z \le 1 - r\,\mathrm{sen}(\theta)$$
$$0 \le r \le 1$$
$$0 \le \theta \le 2\pi$$
$$|J| = r$$

$$V = \iiint_{\Omega} dx\, dy\, dz = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=-1+r\,\mathrm{sen}(\theta)}^{1-r\,\mathrm{sen}(\theta)} r\, dz\, dr\, d\theta =$$

Ejercicio 3

Calcular el volumen delimitado por los paraboloides $y = x^2 + z^2$, y, $y = 8 - x^2 - z^2$

$$y = x^2 + z^2 = 8 - x^2 - z^2$$

$$x^2 + z^2 = 4 = y$$

$$x^2 + z^2 \leq y \leq 8 - x^2 - y^2$$

$$Vol(\Omega) = \iiint_{\Omega} \underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV} = \iint_{x^2+z^2\leq 4} \left(\int_{y=x^2+z^2}^{8-x^2-z^2} dy \right) dx\,dz =$$

$$= \iint_{x^2+z^2\leq 4} (8 - 2x^2 - 2z^2)dx\,dz =$$

Coordenadas polares para el plano coordenado xz

$$x = \rho\cos(\theta)$$

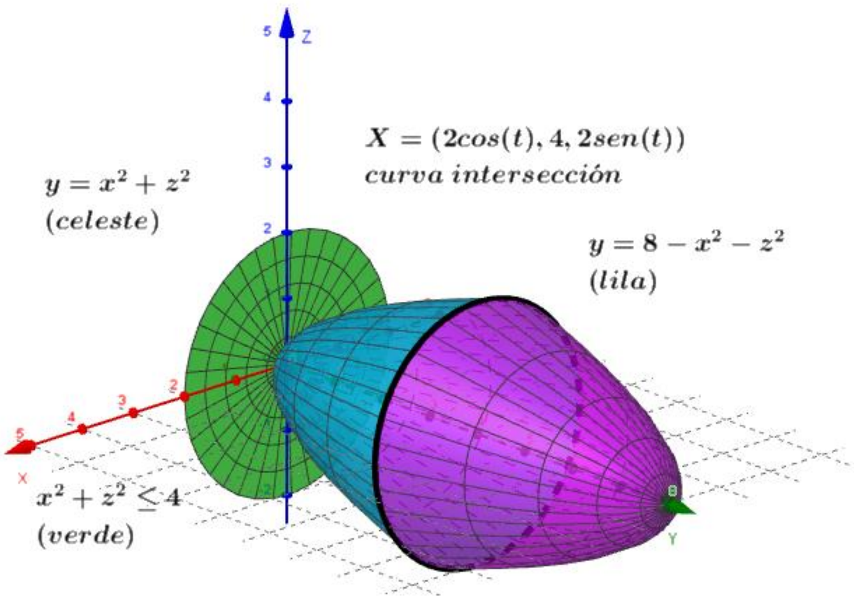
$$z = \rho\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$0 \leq \rho \leq 2$$

$$0 \leq \theta \leq 2\,\pi$$

$$|J| = \rho$$

$$= \iint_{x^2+z^2\leq 4} \left(8 - 2\underbrace{(x^2 + z^2)}_{\rho^2} \right) dx\,dz = \int_{\theta=0}^{2\,\pi} \int_{\rho=0}^{2} (8 - 2\rho^2)\rho\,d\rho\,d\theta = 16\,\pi$$



Coordenadas cilíndricas modificadas para este caso

$$\begin{cases} x = x(r,\theta,z) = r\cos(\theta) \\ y = y(r,\theta,z) = y \\ z = z(r,\theta,z) = r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases}$$

Con

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$Vol(\Omega) = \iiint_{\Omega} \underbrace{dx\,dy\,dz}_{dV} = \int_{\theta=0}^{2\,\pi} \int_{r=0}^{2} \int_{y=r^2}^{8-r^2} r\,dy\,dr\,d\theta = \int_{\theta=0}^{2\,\pi} \int_{r=0}^{2} r(y)\Big|_{y=r^2}^{8-r^2} dr\,d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\,\pi} \int_{r=0}^{2} r(8-2r^2)\,dr\,d\theta = 16\,\pi$$

$$y = 8 - x^2 - y^2 = 8 - \underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2}$$

Ejercicio 4

Calcular el volumen del recinto Ω delimitado por:

$$z \geq x^2 + y^2, \quad 1 \leq z \leq 4, \qquad y \geq x, \qquad y \geq 0$$