Resolucion TP5:

Ejercicio 1 - i

Tomando $F(x, y) = 3x - 4y + 2 = 0$

a) Determinar los pares (x,y) para los que el Teorema de Función Implícita(TFI) puede aplicarse
b) Calcular la derivada de $y = f(x)$

Herramientas:

- Se deben formular las 3 condiciones del teorema usando regla de la cadena.

Para empezar:

Cuando $F(x, y, z) = 0$ de 3 variables, ya sabemos cuáles son las condiciones que hacen aplicar al teorema y su resultado final sobre la derivada.

Cada vez que encontremos $F(x \dots x_n) = 0$ debemos aplicar regla de la cadena.

En este caso podemos componer $H(x) = F(x, y = f(x)))$

Derivadas de H:

$H(x)$ solo posee se puede derivar en x.

$$H_x = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$$

Sabemos que $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$ y $\frac{\partial y}{\partial x} = f_x$

$$H_x = F_x + F_y f_x$$

Si $F(P) = 0$ entonces $H(x_0) = 0$ entonces derivando lado a lado $H_x(x_0) = 0$

$$H_x(x_0) = 0$$

$$F_{x(P)} + F_y(P) f_x(x_0) = 0$$

$$f_x(x_0) = -\frac{F_x(P)}{F_y(P)}$$

Por lógica $F(x, y) = 0$ tiene 2 variables, una en función de la otra, así que solo obtenemos una derivada posible.

Sacamos las siguientes condiciones:

- $P\epsilon F(x,y)=0$ es decir $F(P)=0$. (Léase P pertenece a la curva de nivel)
- $P\epsilon Dom(F_x(x,y))$ y $P\epsilon Dom(F_y(x,y))$ es decir $F_x(P)$ y $F_y(P)$ se pueden calcular. Se puede decir que las derivadas son continuas en el entorno del punto.
- De $-\frac{F_x(P)}{F_y(P)}$ se nota claramente que $F_y(P) \neq 0$.

Si uno tuviera unas condiciones resumidas seria:

Se cumple TFI en $F(x,y)=0$ para $y=f(x)$ Si:

- $P\epsilon F(x,y)=0$
- Las derivadas F_x y F_y son continuas en el entorno del punto.
- $F_y(P) \neq 0$

Resolviendo para $F(x,y)=3x-4y+2$

- $P\epsilon F(x,y)=0 \rightarrow \quad A=\{(x,y)\epsilon R^2 \ / \ 3x-4y+2=0\}$
- Las derivadas $F_x=3$ y $F_y=-4$ son continuas en $R^2 \rightarrow B=\{(x,y)\epsilon R^2\}$
- $F_y(P)=-4 \neq 0$ en todo $R^2 \rightarrow \ C=\{(x,y)\epsilon R^2\}$

Respuesta <u>a</u>:

Se cumple TFI en $F(x,y)=0$ para $y=f(x)$ para todos los puntos que cumplan A, B y C. Es decir $P_{TFI}=A\cap B\cap C=A= \ \{(x,y)\epsilon R^2 : \ 3x-4y+2=0\}$

$$P_{TFI}= \ \{(x,y)\epsilon R^2 : \ 3x-4y+2=0\}$$

Podemos concluir que el TFI se cumple en toda la curva de nivel.

Respuesta <u>b</u>:

Y su derivada es $y_x(P)=f_x(P)=-\frac{F_x(P)}{F_y(P)}=-\frac{3}{-4}$

$$y_x(P)=\frac{3}{4}$$