ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA I
MÓDULO 5 – TRANSFORMACIONES LINEALES – SEGUNDA CLASE
CLASIFICACIÓN- MATRIZ REPRESENTATIVA-ROTACIONES

Lee las páginas 261 a 272 de Apunte III TEJIENDO EL ÁLGEBRA LINEAL.

Realiza todos los ejercicios y actividades propuestas en esas páginas.

En este apunte encontrarás otras explicaciones y ejemplos correspondientes a estos temas.

También en el archivo llamado M5. SEGUNDA CLASE. EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA están propuestos otros ejercicios y actividades.

Videos de la cátedra que pueden ayudarte con estos temas:

1. T. L. dada por su matriz representativa

https://www.youtube.com/watch?v=-32nhzfiobk

2. Isomorfismo

https://www.youtube.com/watch?v=zMOk8iAceMU

3. Hallr la fórmula de la TL dadas las imágenes de una base.αβ

https://www.youtube.com/watch?v=dtL6gKu_hiE

CLASIFICACIÓN DE TRANSFORMACIONES LINEALES

Para empezar recordemos que:

Una función es **suryectiva** o **sobreyectiva** si B = Im (f) siendo B el conjunto de llegada.

Una función es **inyectiva** si no existen dos o más elementos de A con la misma imagen. Es decir:

Si f(x) = f(x'), entonces x =x'

La función es **biyectiva** si es inyectiva y suryectiva.

Una transformación lineal inyectiva se denomina **monomorfismo**.

Una transformación lineal suryectiva se llama **epimorfismo**.

Si es biyectiva se denomina **isomorfismo**.

Si f: V $\rightarrow$V es una transformación lineal que aplica un espacio vectorial en sí mismo, se denomina **endomorfismo**.

Funciones	Transformaciones lineales
Inyectiva	Monomofismo
Suryectiva	Epimorfismo
Biyectiva	Isomorfismo

Propiedad:

Sea f: $V \rightarrow W$ una transformación lineal. f es un monomorfismo $\Leftrightarrow$ Nu(f) = $\{0_v\}$.
Es decir, basta verificar que el único elemento de V que tiene como correspondiente al 0_w es 0_v, para asegurar la inyectividad de f.

Corolario:

sea f: $V \rightarrow W$ una transformación lineal. f es un monomorfismo $\Leftrightarrow$ f transforma bases de V en bases de la imagen de f .

Propiedad:
Una transformación lineal será epimorfismo si y solo si la dim (Img(f)) = dim (W), o sea que la imagen de la transformación cubre a todo el espacio vectorial de llegada.

Una transformación lineal será isomorfismo si y solo si es monomorfismo y epimorfismo. Para que ello ocurra es **condición necesaria** (**no suficiente**) que dim(V) = dim (W). Se justifica en la página 5.

Ejemplo:

Verificar que f: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ / f((x,y)) = (x + y, x - y, 2x - 3y) es un monomorfismo. Para hallar el núcleo de f, planteamos:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

La única solución es (0,0). Entonces, Nu(f) = {(0,0)} $\Rightarrow$ f es **monomorfismo**.

Buscaremos el conjunto imagen:

f((x,y)) = (x + y, x - y, 2x - 3y) = (x , x , 2x) + (y, - y, - 3y) = x (1, 1 , 2) + y (1, - 1, - 3)

Entonces {(1, 1 , 2) , (1, - 1, - 3)} es un conjunto de generadores de la Imagen . Como son L.I. forman una base $B_{Im(f)}$ = {(1, 1 , 2) , (1, - 1, - 3)}

La imagen es de dimensión 2, significa que no coincide con W = R^3 es un subespacio propio de R^3 entonces f no es un **epimorfismo**

F no es un isomorfismo, no podría serlo ya que dim (V) = 2 y dim (W) = 3 y para ser isomorfismo se requiere que las dimensiones sean iguales.

Teorema:
Sean V y W espacios vectoriales reales. Si B = $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es una base de V y $w_1, w_2, ..., w_n$ son elementos arbitrarios de W, entonces existe una única transformación lineal f: $V \to W$ tal que:

$f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2, ..., f(v_n) = w_n$

Ejemplo:
Los vectores $v_1 = (1,1)$ y $v_2 = (1, -1)$ forman una base de R^2. Sean $w_1 = (1,2,-1)$ y $w_2 = (0,-1,1)$ en R^3. Hallar la única transformación lineal f: $R^2 \to R^3$ que verifica: $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$.

Si $(x,y) \in R^2$, existen únicos α y β, tales que:
$(x,y) = \alpha (1,1) + \beta (1,-1)$.

1) Entonces expresamos α y β en función de x e y:

$(x,y) = \alpha (1,1) + \beta (1,-1)$
Resolviendo el sistema, $\alpha = (x+y)/2$ y $\beta = (x-y)/2$ (1)

2) Aplicamos la transformación f

$f((x,y) = f(\alpha (1,1) + \beta (1,-1)) = \alpha f((1,1)) + \beta f((1,-1)) =$ por ser lineal

$= \alpha (1,2,-1) + \beta (0,-1,1) = (\alpha, 2\alpha - \beta, -\alpha + \beta)$ (2)

Reemplazando (1) en (2):
$$f((x,y)) = \left(\frac{x+y}{2}, 2\left(\frac{x+y}{2}\right) - \left(\frac{x-y}{2}\right), -\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right)$$
Operando, tenemos la expresión de la transformación lineal:
$$f((x,y)) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y, -y\right)$$

Verifica que $f(1,1) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{3}{2}, -1\right) = (1, 2, -1)$ y $f(1, -1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{3}{2}, 1\right) = (0 ; -1 ; 1)$ que es lo que se pretendía.

Nota: si damos elementos $v_1, v_2, ..., v_r$ linealmente independientes en V que no forman una base, y vectores $w_1, w_2, ..., w_r$ en W, entonces existirán infinitas transformaciones lineales f: $V \to W$ que satisfacen $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2, ..., f(v_r) = w_r$

Basta extender $v_1, v_2, ..., v_r$ a una base de V, y definir arbitrariamente $f(v_i)$ en los vectores agregados.

Si v_1, v_2 , ..., v_r no son linealmente independientes, hay que ver que no haya problemas de compatibilidad. Es decir, puede no existir la transformación lineal requerida.

MATRIZ DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL DE R^M EN R^N EN LA BASE CANÓNICA

Ya vimos que si $A \in R^{mxn}$, la función f: $R^m \to R^n$ dada por f(x) = A·x, es una transformación lineal. Vale también la recíproca, es decir, toda transformación lineal de R^n en R^m se puede expresar de esa manera.

Para verlo, consideremos un ejemplo:

Sea f: $R^3 \to R^2$; si v_1=(1,0,0) , v_2 =(0,1,0), v_3 =(0,0,1) la base canónica de R^3, y: $f(v_1)$ = (a,b) ; $f(v_2)$=(c,d) ; $f(v_3)$ = (e,f)

Entonces, si X =(x,y,z) $\in R^3$, X = x .v_1 + y .v_2+z . v_3

$f(x) = f(x .v_1 + y .v_2+z . v_3) = x f(v_1) + y f(v_2) +z f(v_3) =$

$= (ax +cy + ez , bx +dy+fz)$

$$= \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A \cdot X$$

Las columnas de la matriz A son las imágenes de los vectores de la base canónica.

No es difícil inferir que lo mismo vale para cualquier f: $R^m \to R^n$. Es decir, existe A $\in R^{mxn}$ tal que: f(x) = A·X

A es la **matríz** asociada a f. También simbolizada como M(f) matriz asociada a f

Las columnas de A forman un sistema de generadores de la imagen.

Se define el **rango fila** de una matriz A como el máximo número de filas linealmente independientes de A.

El **rango columna** de A es el máximo número de columnas linealmente independientes de A.

En "Introducción al Álgebra Lineal", de H. Anton (pag. 322) se prueba que ambos rangos coinciden.

Luego, es posible hablar sencillamente del **rango** de una matriz.

Si A es la matriz asociada a una transformación lineal f; por la discusión anterior se tiene:

Rg(A) = Dim[Im(f)]

Además: x $\in$ Nu(f) $\Leftrightarrow$ A·X=0

Es decir, Nu(f) es el subespacio S constituido por las soluciones del sistema homogéneo:

A·X =0

Pero en este caso vale:

Dim(S) + rg(A) = n

Donde n: número de incógnitas coincide con la dimensión del dominio de f.

Se tiene entonces:

Dim[Nu(f)] + Dim[Im(f)] = n
Este es un caso particular del siguiente:

Teorema:
Si V es un espacio vectorial real de dimensión finita, y f: V$\rightarrow$W es una transformación lineal; entonces:

$$\boxed{\text{Dim[Nu(f)] + Dim[Im(f)] = Dim(V)}}$$

Emplearemos este teorema para justificar lo dicho en la página 2.

Dijimos que para que una transformación lineal sea isomorfismo es **condición necesaria** (**no suficiente**) que dim(V) = dim (W).

Debe ser monomorfismo entonces dim (Nu(f)) = 0 por el teorema de la dimensión

Dim[Nu(f)] + Dim[Im(f)] = Dim(V)

0 + Dim[Im(f)] = Dim(V) (1)

Pero como además debe ser epimorfismo Dim[Im(f)] = Dim(W)

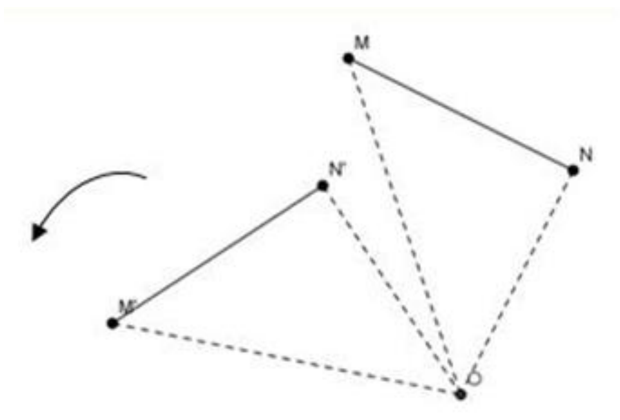
Reemplazando en (1) resulta Dim (V) = Dim(W)

SEGUIMOS CON LAS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN EL PLANO

GIROS O ROTACIONES

Recordemos que se llama rotación de centro "O" y ángulo de giro $N\hat{O}N'$ (Antihorario o sentido positivo) a la transformación del plano en sí mismo que a todo punto N del mismo le hace corresponder un punto N' tal que $\overline{ON} = \overline{ON'}$ y $N\hat{O}N'$ es el ángulo de giro. Veamos el gráfico que transforma al segmento $\overline{MN}$ en $\overline{M'N'}$.

R (O, + 60º) Indica una rotación en sentido antihorario

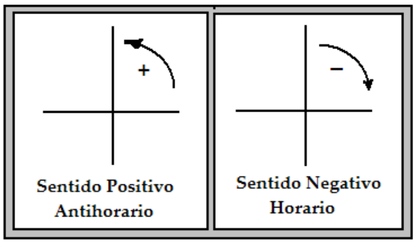


Dados los puntos A= (2; 0) y B= (4; 0), ¿cuáles serán los transformados de éstos al rotarlos desde el punto O –origen de coordenadas- un ángulo de 90°?

Dibuja en un sistema de coordenadas y completa:

$\mathbf{R}_{90°}(\mathbf{A})$ = (…..;…..) $\mathbf{R}_{90°}(\mathbf{B})$ = (…..;…..)
Pero, ¿para dónde girar?

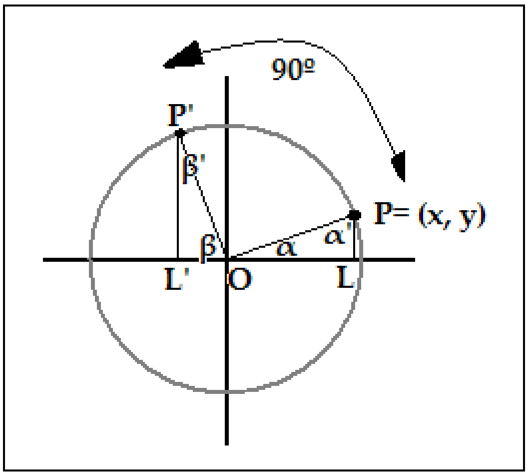
Por convención se toma



y al indicar 90º se está admitiendo *sentido positivo*

Obtiene, usando la misma rotación, las imágenes de los puntos **K**= (x, 0) y **J**= (0, y)
$\mathbf{R}_{90°}(\mathbf{K})$ = (…..;…..) $\mathbf{R}_{90°}(\mathbf{J})$ = (…..;…..)
¿Servirá la respuesta si x e y toman valores negativos?

Veamos qué le pasa a un punto genérico **P**= (x, y) al aplicarle la rotación.



Observamos que $\alpha + 90° + \beta = 180°$ y entonces $\alpha + \beta = 90°$
Además como el triángulo P'OL' es rectángulo en L' resulta que $\beta' + \beta = 90°$
De las ecuaciones anteriores resulta que $\alpha = \beta'$
En el triángulo POL vale de modo similar que
$\alpha + \alpha' = 90°$ y obtenemos que $\alpha' = \beta$
Comparando entonces los triángulos POL y P'OL'
$\overline{OP} = \overline{O'P'}$; $\alpha = \beta'$; $\alpha' = \beta$.

Por el criterio de congruencia de triángulos ALA (ángulo-lado- ángulo) se tiene que ambos triángulos son *congruentes*.
De lo anterior resulta que:
$\overline{OL} = \overline{P'L'}$; $\overline{PL} = \overline{L'O}$.
Además $\overline{OL} = x$, $\overline{PL} = y$, y como debemos tener en cuenta el signo de las coordenadas de P', resulta que P' = (–y, x).
Resumiendo $\mathbf{R}_{90°}(\mathbf{P})$= $\mathbf{R}_{90°}$((x, y))= (–y, x) (I.1.4.4)

¿Servirá la fórmula para puntos de los cuatro cuadrantes y de los cuatro semiejes?
Toma un surtido de puntos y corrobora los resultados.

Comprueba que $\mathbf{R}_{90°}$ satisface ambas propiedades.
1) $\mathbf{R}_{90°}(M + N) = \mathbf{R}_{90°}(M) + \mathbf{R}_{90°}(N)$ para cualquier par de puntos M y N.
2) $\mathbf{R}_{90°}(k.M) = k.\ \mathbf{R}_{90°}(M)$ para cual número k real y cualquier punto M.

Es interesante obtener la expresión conseguida anteriormente usando las imágenes de los vectores de una base, tomaremos la base canónica y empleando que $\mathbf{R}_{90°}$ es una transformación lineal.

Sabemos que :$\mathbf{R}_{90°}((1, 0))= .(0, 1)$ y $\mathbf{R}_{90°}((0, 1)) = (–1, 0)$

Entonces aplicamos la T.L. a cualquier punto (x ; y)

$\mathbf{R}_{90°}((x, y)) = \mathbf{R}_{90°}((x, 0) + (0, y)) =$ hemos disociado la suma de puntos en el plano

$\mathbf{R}_{90°}((x, 0)) + \mathbf{R}_{90°}((0, y)) =$ por la propiedad 1) de T.L.

$\mathbf{R}_{90°}(x. (1, 0)) + \mathbf{R}_{90°}(y. (0, 1)) = x.\mathbf{R}_{90°}((1, 0)) + y.\mathbf{R}_{90°}((0, 1)) =$ propiedad 2) de T.L.

$x.(0, 1) + y (–1, 0) =$ transformados del (1, 0) y (0, 1)

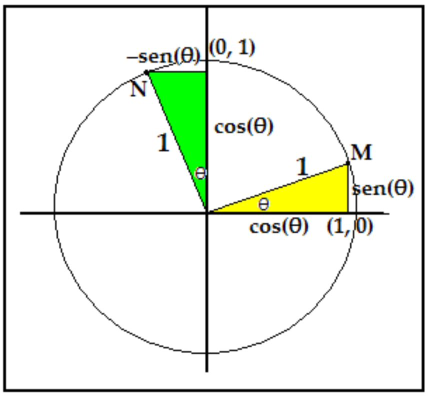
$(0, x) +(–y, 0) = (–y, x)$ sumando

Observar que **conociendo únicamente** los datos de las rotaciones en dos puntos que forman una base es posible obtener el transformado de la rotación en ***cualquier otro punto*** del plano.

O sea si quisiéramos saber la rotación del punto (4; –5) lo podemos obtener a partir de lo que le ocurrió al (1; 0) y al (0; 1).

ROTACIÓN EN UN ÁNGULO CUALQUIERA

Obtengamos la rotación de un ángulo θ cualquiera, usando que la rotación $\mathbf{R}_\theta$ es una T.L.



El punto (1, 0) se traslada al punto M. Por trigonometría la componente horizontal es el $\cos\theta$ y la vertical $\operatorname{sen}\theta$.
El (0, 1) se desplaza hasta el punto N.
Se prueba de manera similar a lo hecho antes que los dos triángulos son congruentes y de allí resulta la componente horizontal ($-\operatorname{sen}\theta$) que apunta hacia los x negativos y la componente vertical ($\cos\theta$).
Resumiendo
$\mathbf{R}_\theta((1,0)) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ $\qquad$ $\mathbf{R}_\theta((0, 1)) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$

Obtendremos la rotación de un ángulo θ del punto (x, y)
.

$$\mathbf{R}_\theta((x, y)) = \mathbf{R}_\theta((x, 0) + (0, y)) = \mathbf{R}_\theta((x, 0)) + \mathbf{R}_\theta((0, y)) = \mathbf{R}_\theta(x. (1, 0)) + \mathbf{R}_\theta(y. (0, 1))$$

$$= x.\mathbf{R}_\theta((1, 0)) + y.\mathbf{R}_\theta((0, 1)) = x(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) + y(-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$$

$$= (x.\cos\theta, x.\operatorname{sen}\theta) + (-y.\operatorname{sen}\theta, y.\cos\theta) = (x.\cos\theta - y.\operatorname{sen}\theta, x.\operatorname{sen}\theta + y.\cos\theta)$$

Entonces:

$$\boxed{\mathbf{R}_\theta((x, y)) = (\cos\theta\cdot x - \operatorname{sen}\theta\cdot y,\ \operatorname{sen}\cdot\theta x + \cos\theta\cdot y)}$$

Ejercicio:

Utilizando los transformados de la base canónica demostrar que la expresión de $\mathbf{R}_{-90^\circ} = \mathbf{R}_{270^\circ}$ es $\mathbf{R}_{-90^\circ}((x, y)) = (y, -x)$