Diferenciabilidad de una función escalar en un punto

Esta primera parte es optativa.

Sea f un campo escalar en el plano (i.e., $dom\, f \subseteq \mathbb{R}^2$) y sea (x_0, y_0) un punto interior a $dom\, f$ (i.e., existe algún disco $D[(x_0, y_0); \delta] \subseteq dom f$). Se dice f es diferenciable en (x_0, y_0) si y sólo si

(1) Existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

(2) La función escalar $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$, $(0 < \|(\Delta x, \Delta y)\| < \delta)$ definida por

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \left(\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, \Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0\,, y_0)\, \Delta y}{\|\Delta x, \Delta y\|}\right)$$

es un infinitésimo en (0,0), i.e., $\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$

Nótese que el límite doble en la definición de diferenciabilidad puede escribirse también como:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

Ejemplo 1

Analizamos la diferenciabilidad del campo escalar $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} (\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2)\mathrm{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}}\right) & \text{si } (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (\mathrm{x}, \mathrm{y}) = (0,0) \end{cases}$$

en el punto (0,0).

Obviamente, (0,0) es un punto interior a $dom\, f = \mathbb{R}^2$. Las derivadas parciales de f en (0,0) son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta x^2 sen\left(\frac{1}{|\Delta x|}\right)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x\, sen\left(\frac{1}{|\Delta x|}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

donde, hemos usado el teorema de límite simple: infinitésimo en x_0× función acotada cerca de x_0 = infinitésimo en x_0. Vemos que Δx es un infinitésimo en 0 y $sen\left(\frac{1}{|\Delta x|}\right)$ es una función acotada cerca de 0, ya que $\left|sen\left(\frac{1}{|\Delta x|}\right)\right| \leq 1$, si $\Delta x \neq 0$.

La función escalar $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ está dada por

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \left(\frac{(\Delta x^2+\Delta y^2) sen\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} \right) = \sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}\, sen\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right)$$

$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ es un infinitésimo en $(0,0)$ y $sen\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right)$ es una función acotada cerca de $(0,0)$, ya que $\left|sen\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right)\right| \leq 1$, si $(\Delta x, \Delta y) \neq (0,0)$.

Luego, usando el teorema de límite doble: infinitésimo en (x_0, y_0)× función acotada cerca de (x_0, y_0) = infinitésimo en (x_0, y_0), obtenemos

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}\, sin\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right) = 0$$

Por lo tanto, f es diferenciable en $(0,0)$.

Ejemplo 2

Analizamos la diferenciabilidad del campo escalar $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ en el punto $(0,0)$.

Obviamente, $(0,0)$ es un punto interior a $dom\ f = \mathbb{R}^2$. Las derivadas parciales de f en $(0,0)$ son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sqrt{|\Delta x\cdot 0|}-\sqrt{|0\cdot 0|}}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{0}{\Delta x}\right) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

La función escalar $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ está dada por

$$\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = \left(\frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right) = \sqrt{\left(\frac{|\Delta x \Delta y|}{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)}$$

Calculamos los límites radiales

$$\lim_{\Delta x\to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y)|_{\Delta y=0} = \lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{\left(\frac{0}{\Delta x^2}\right)} = 0,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y)|_{\Delta y=\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x^2}{2\Delta x^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

estos resultados implican la no existencia de $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$. Por lo tanto, f no es diferenciable en $(0,0)$.

Aquí finaliza la sección optativa

En las próximas páginas se enunciará un teorema de condición suficiente de diferenciabilidad (teorema de Cauchy) que será el que usemos en lo sucesivo.

Consecuencias de la diferenciabilidad

Cuando la función f es *diferenciable* en (x_0, y_0), se cumple que:

- f es continua en (x_0, y_0).
- f posee derivadas direccionales en (x_0, y_0), para cualquier $\vec{v} = (a, b)$ tal que $\|\vec{v}\| = 1$, las cuales se pueden calcular según la fórmula
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot b$$
- El gráfico de f posee plano tangente en el punto $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$, cuya ecuación es
$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

O bien, se puede escribir en la forma
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot y - z = B$$
Donde
$$B = -f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot x_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot y_0$$
Y en virtud de esta expresión para la ecuación del plano, es posible observar que
$$\vec{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$$
Es el vector normal al plano tangente, o dicho también de manera equivalente, $\vec{N}$ es normal al gráfico de la función f en el punto $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$.
De este modo es posible obtener una expresión para la recta normal al gráfico de f en el punto $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$, denotada por el símbolo $R^{\perp}$, y dada por
$$R^{\perp}: \alpha(t) = P + t \cdot \vec{N} = \big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big) + t \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right), \qquad t \in \mathbb{R}$$

Diferenciabilidad de un campo escalar en un conjunto abierto

Sea f un campo escalar en el plano (i.e., $dom\, f \subseteq R^2$) y sea un conjunto abierto $U \subseteq dom\, f$. Se dice que f es diferenciable en U si sólo si para todo $(x, y) \in U$:f es diferenciable en (x, y).
Se dice que f es de clase C^1 en U si sólo si las funciones derivadas parciales de f son continuas en U.

Teorema (de Cauchy)

Si f es de clase C^1 en U, entonces f es diferenciable en U.

Ejemplo 3. Veamos que la siguiente función es diferenciable usando el teorema anterior

$$f(x,y) = \ln(y - x^2)$$

definida en

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y - x^2 > 0\}$$

Sus derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2 - y} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y - x^2}$$

y resulta que ambas están definidas y son continuas en cada punto de A, pues se trata de dos cocientes entre polinomios de denominador no nulo.

Luego $f \in C^1$ en A, f es diferenciable en A

Gradiente de un campo escalar en un punto

Sea f un campo escalar en el plano (i.e., $dom\ f \subseteq \mathbb{R}^2$) y sea (x_0, y_0) un punto interior a $dom\ f$ (i.e., existe algún disco $D[(x_0, y_0); \delta] \subseteq domf$). Si existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, podemos asociar a f un vector de $\mathbb{R}^2$ atado a (x_0, y_0) definido por

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

llamado el gradiente de f en (x_0, y_0).

Teorema Segunda fórmula para la derivada direccional de un campo escalar.

Si f es diferenciable en (x_0, y_0), entonces para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ con $\|\vec{v}\| = 1$, existe $f_{\vec{v}}{}'(x_0, y_0)$ y

$$f_{\vec{v}}{}'(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{v} \quad (\textit{producto escalar})$$

Dirección y sentido de derivada direccional máxima o mínima

Si f es diferenciable en (x_0, y_0), a partir de la fórmula del gradiente para la derivada direccional, es posible demostrar, que *el gradiente aporta la dirección y sentido de derivada direccional máxima*

$$f'_{\vec{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{v} = \underbrace{\|\nabla f(x_0, y_0)\|}_{CTE\ \ en\ (x_0, y_0)} \underbrace{\|\vec{v}\|}_{1} \underbrace{\cos\alpha}_{[-1,1]}$$

Siendo α el ángulo comprendido entre el vector $\nabla f(x_0, y_0)$ y el vector $\vec{v}$
Como $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$, entonces

$$-\|\nabla f(x_0, y_0)\| \leq f'_{\vec{v}}(x_0, y_0) \leq \|\nabla f(x_0, y_0)\|$$

Primera conclusión, la derivada direccional en una función diferenciable está acotada.

Cuando $\alpha = 0$, el coseno toma el valor máximo 1, entonces los vectores $\nabla f(x_0, y_0)$ y $\vec{v}$, son paralelos de igual sentido y la derivada direccional es máxima, siendo el vector dirección de máximo crecimiento

$$\vec{v} = \frac{\nabla f(x_0,y_0)}{\|\nabla f(x_0,y_0)\|} \text{ si } \|\nabla f(x_0, y_0)\| \neq 0$$

$$\text{máx}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\|$$

S $\alpha = \pi$, el coseno vale -1 y la derivada direccional toma su mínimo valor, $\nabla f(x_0, y_0)$ y $\vec{v}$, son opuestos, la dirección de máximo decrecimiento de f en (x_0, y_0) es,

$$\vec{v} = \frac{-\nabla f(x_0,y_0)}{\|\nabla f(x_0,y_0)\|} \text{ si } \|\nabla f(x_0, y_0)\| \neq 0.$$

$$\text{mín}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = -\|\nabla f(x_0, y_0)\|$$

Si $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$, diremos que (x_0, y_0) es un punto estacionario de f.

Biblioteca digital. Cap 5, p. 183, 203. Cálculo varias variables. W Mora.

Link contenidos pertinentes (Ctrl+Clic mouse para ir al enlace)
Khan Academy
https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives