Integral Doble – Coordenadas Polares :

La propuesta de este tema es la de cambiar las coordenadas cartesianas ***x*** e ***y*** por coordenadas polares $\boldsymbol{\rho}$ y $\boldsymbol{\theta}$ para ubicar puntos en el plano $(\Re^2)$ de forma de cambiar el recinto de integración de una integral doble dada por otro que resulte mas conveniente para su calculo .

Las coordenadas polares están compuestas dos variables , una es la distancia $\boldsymbol{\rho}$ desde un punto fijo llamado polo hasta el punto a ubicar , inicialmente este polo es el centro de coordenadas , y la otra variable es el ángulo $\boldsymbol{\theta}$ que queda determinado entre dicha distancia $\boldsymbol{\rho}$ y una semirrecta que pasa por el polo , también inicialmente esta semirrecta será el semieje positivo de ***x*** .

Este cambio de coordenadas tiene por objetivo sustituir el recinto de integración (***R***) de una integral doble de una función escalar de dos variables ($\boldsymbol{f_{(x\,;\,y)}}$) por otro recinto (***R´***) que ofrezca una integración mas sencilla de esta función (Ver **Gráfico 1**) .

Para realizar esta sustitución de recintos será necesario definir una transformación que matemáticamente haga esta sustitución , veamos como definirla :

Dada una $f_{(x;y)} : A \subset \Re^2 \rightarrow \Re$, siendo $R \subset A$ y $f_{(x;y)}$ continua $\forall (x\,;y) \in R$.

Se necesita realizar el siguiente cálculo :

$$\iint_R f_{(x;y)}\, dx\, dy = \quad \textbf{(1)}$$

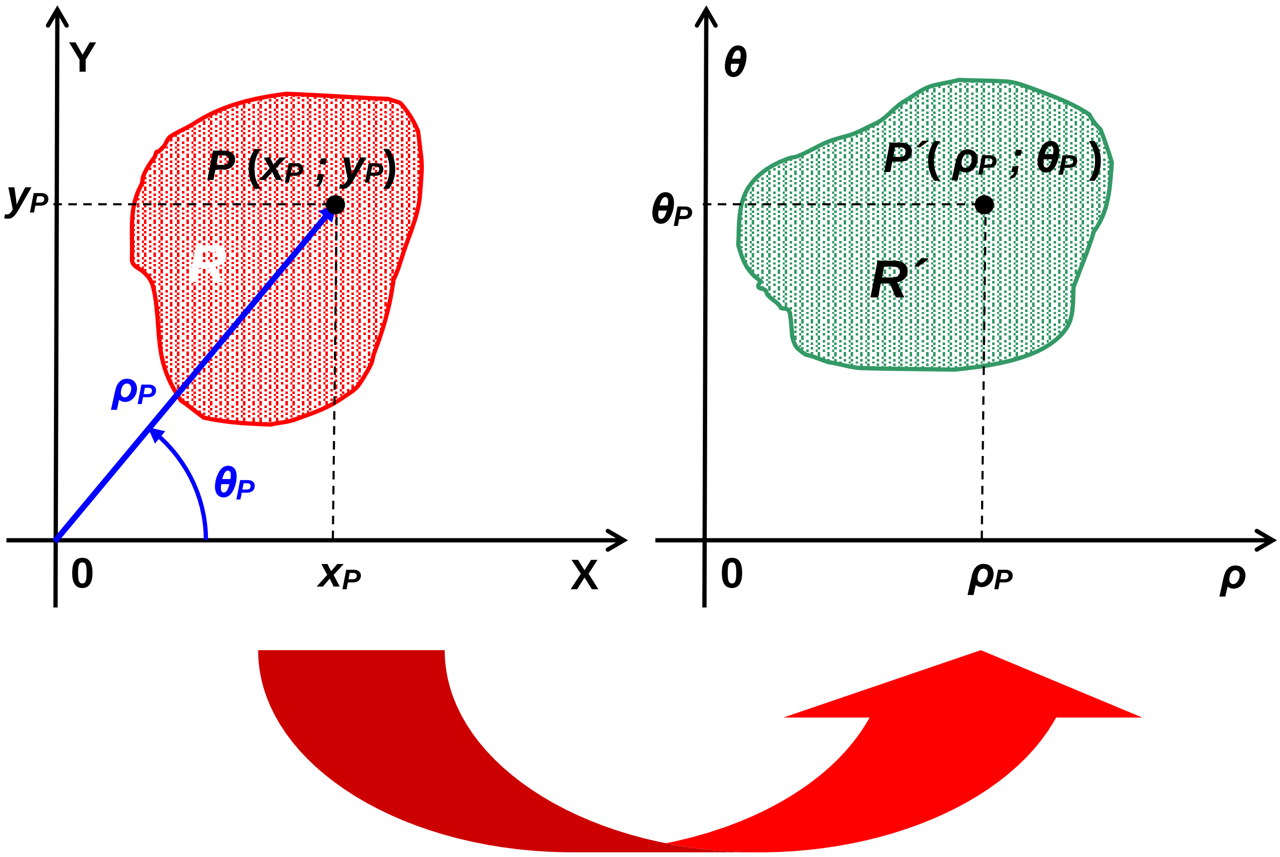


Gráfico 1

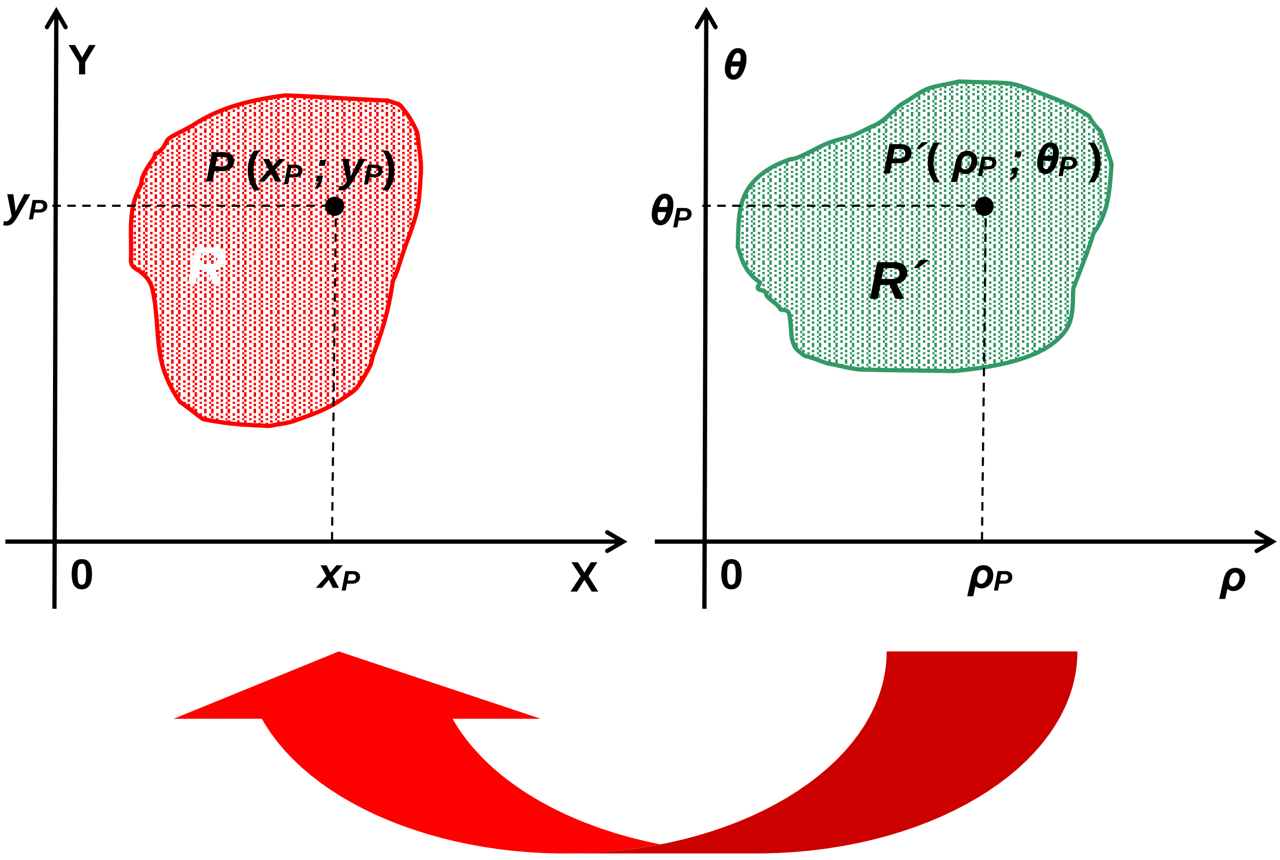
$$T_{(x_P\,;\,y_P)} = \left(\rho_{(x_P\,;\,y_P)}\,;\theta_{(x_P\,;\,y_P)}\right)$$

$$\rho_P = \sqrt{{x_P}^2 + {y_P}^2}$$

$$\theta_P = \begin{cases} arctg\left(\dfrac{y_P}{x_P}\right) & si \quad x_P \neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & si \quad x_P = 0 \quad \wedge \quad y_P > 0 \\ \dfrac{3}{2}\pi & si \quad x_P = 0 \quad \wedge \quad y_P < 0 \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

La transformación de ***R*** en ***R´*** la haremos en base de un análisis geométrico (por lo cual el gráfico de ***R*** nos va a ser muy necesario) y no utilizando las expresiones de $\boldsymbol{\rho}$ y $\boldsymbol{\theta}$ en función de ***x*** e ***y*** que detallamos en **(2)** . Más adelante lo veremos .

Una vez definido el recinto ***R´*** necesitaremos definir como transformar al recinto ***R´*** para generar al recinto ***R*** para lo cual necesitaremos encontrar a la transformación inversa ($T^{-1}{}_{(\rho_P\,;\,\theta_P)}$) de la transformación $T_{(x_P\,;\,y_P)}$.



$$T^{-1}{}_{(\rho_P;\theta_P)} = \left(x_{(\rho_P;\theta_P)}\ ;y_{(\rho_P;\theta_P)}\right)$$

$$\overbrace{\begin{cases} x_P = \rho_P.\cos\theta_P \\ y_P = \rho_P..sen\,\theta_P \end{cases}}$$

Es decir : $T^{-1}{}_{(\ \rho_P;\theta_P)} = \left(\ \rho_P.\cos\theta_P\ ;\rho_P.sen\theta_P\right)$

Este punto ***P* (*xP* ; *yP*)** es un punto genérico del recinto ***R*** , por lo cual este punto es todo punto **(*x* ; *y*)** del recinto ***R*** , entonces :

$$T^{-1}{}_{(\ \rho;\theta)} = \left(\ \rho.\cos\theta\ ;\rho.sen\theta\ \right)$$

$$\overbrace{\begin{cases} x = \rho.\cos\theta \\ y = \rho..sen\,\theta \end{cases}}$$

Si nos resulta mas conveniente resolver la integral doble **(1)** en el recinto ***R´*** que en el recinto ***R*** , debemos componer a ***f* (*x* ; *y*)** con ***T*** $T^{-1}{}_{(\rho;\theta)}$ de forma tal que el proceso de integración tenga en cuenta a que punto **(*x* ; *y*)** del recinto ***R*** le corresponde cada punto **(*ρ* ; *θ*)** del recinto ***R´*** a través de $T^{-1}{}_{(\rho;\theta)}$.

$$f\ o\, T^{-1}{}_{(\rho;\theta)} = f_{\left[T^{-1}{}_{(\rho;\theta)}\right]}$$

El proceso de integración también debe tener en cuenta como es el recinto ***R´*** con respecto al recinto ***R*** , es decir el recinto ***R´*** es de tamaño mayor , menor o igual al tamaño del recinto ***R*** ? y también cual es la deformación que debe sufrir el recinto ***R´*** para transformarse en el recinto ***R*** , todo esto dependerá de $T^{-1}{}_{(\rho;\theta)} = \left(x_{(\rho;\theta)}\ ;y_{(\rho;\theta)}\right)$, la cual no es una transformación lineal ya que la transformación $T_{(x;y)} = \left(\rho_{(x;y)};\theta_{(x;y)}\right)$ tampoco lo es . **(3)**

Si todo esto es tenido en cuenta en la integración , podremos entonces sustituir a los diferenciales ***dx*** y ***dy*** por los diferenciales ***dρ*** y ***dθ*** .

Para que entonces , sea valida la integración de ***f* (*x* ; *y*)** en el recinto ***R´*** en lugar de en recinto ***R*** deberemos realizar un ajuste en la integral que contemple los cambios mencionados en el párrafo **(3)** .

Este ajuste lo realizará un factor que deberá multiplicar a $f\ o\, T^{-1}{}_{(\rho;\theta)}$ llamado " **Jacobiano** " (**II *J*** $T^{-1}{}_{(\rho;\theta)}$ **II** o simplemente **II *J* II**) y que resulta ser el módulo del determinante de la **matriz Jacobiana** de las derivadas parciales de la transformación inversa $T^{-1}{}_{(\rho;\theta)} = \left(x_{(\rho;\theta)}\ ;y_{(\rho;\theta)}\right)$.

$$\|J\| = \left\| J\ T^{-1}{}_{(\rho;\theta)} \right\| = \left\| \frac{\partial T^{-1}{}_{(\rho;\theta)}}{\partial(\rho;\theta)} \right\| = \left\| \begin{matrix} \cos\theta & sen\theta \\ -\rho.sen\theta & \rho.\cos\theta \end{matrix} \right\| = \left| \rho.\cos^2\theta + \rho.sen^2\theta \right| =$$

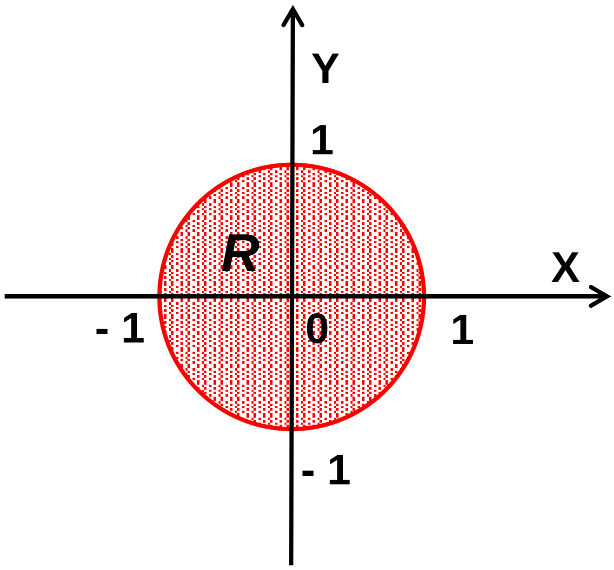
(4)

$$= \left| \rho.\underbrace{\left(\cos^2\theta + sen^2\theta\right)}_{=1} \right| = |\rho.1| = |\rho|\ (\rho \geq 0) = \rho$$

Finalmente : $\boxed{\|\ J\ \| = \rho}$

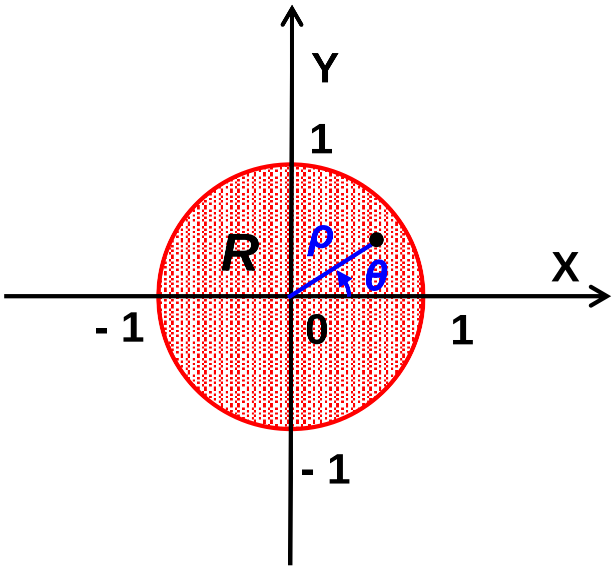
Como se ve el " **Jacobiano** " no depende de $f\ o\ T^{-1}{}_{(\rho;\theta)}$ sino solamente del cambio de variables .

Vamos a visualizar esto que hemos enunciado en el recinto de integración ***R*** siguiente : $R = \left\{ (x;y) \in \Re^2 / x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$, su gráfico en $\Re^2$ es :

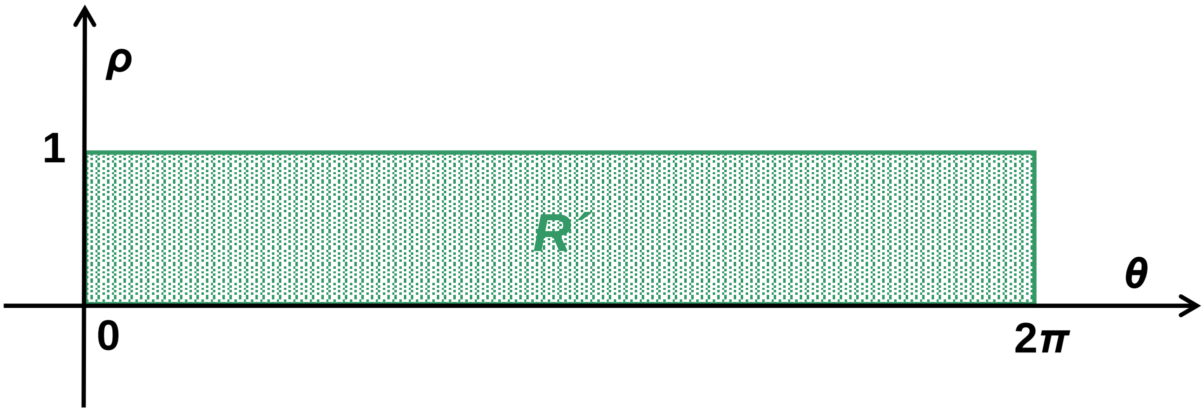


Si analizamos geométricamente como alcanzar a todos los puntos del recinto ***R*** a través de coordenadas polares tenemos que las variables ***ρ*** y ***θ*** deben variar entre los siguiente valores :

$$\begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$



Si en base a estos datos , graficamos el nuevo recinto ***R´*** , tenemos :



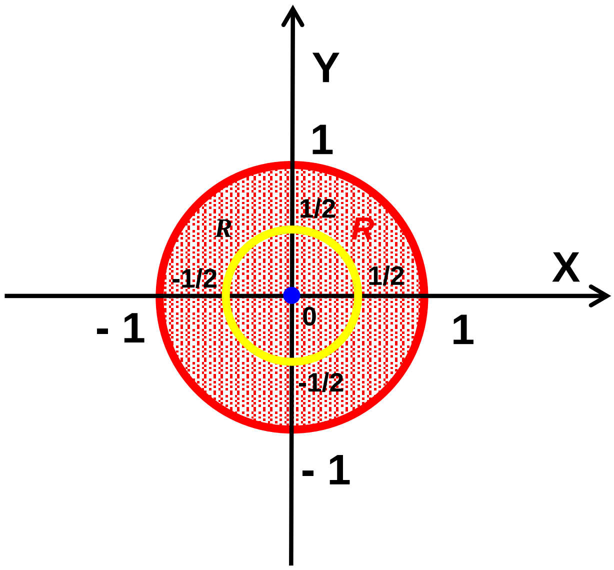
Si ahora , calculamos el área de cada uno de los recintos , tenemos :

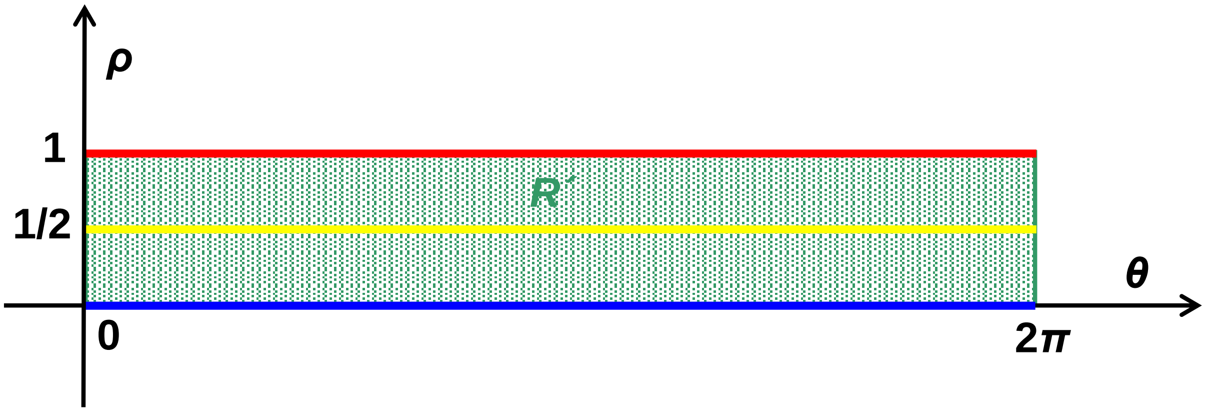
Área (***R***) = π . 1^2 (π . r^2) , finalmente : Área (***R***) = π

Área (***R´***) = 2 π . 1 , finalmente : Área (***R´***) = 2π

Como vemos el área de ***R´*** es el doble del área de ***R*** . Como integraremos en el recinto ***R´*** se debe contemplar este mayor tamaño del nuevo recinto de integración .

Pero también se produce una deformación interna del recinto que deberemos también tener en cuenta , veamos lo que le ocurre a algunos subconjuntos del recinto ***R*** cuando se convierte en ***R´*** :





- El punto (0 ; 0) del recinto ***R*** se convierte en el recinto ***R´*** en el segmento horizontal de longitud 2π ubicado sobre el eje ***θ*** . “ El punto se estiró hasta convertirse en un segmento ” (color azul) .

- El subconjunto de puntos del recinto ***R*** ubicados sobre la circunferencia de radio ½ cuya longitud es π se transforma en el recinto ***R´*** , en el segmento horizontal de longitud 2π ubicado a altura ***ρ*** = ½ . “ El perímetro de la circunferencia se estiró ” (color amarillo) .

- El subconjunto de puntos del recinto ***R*** ubicados sobre la circunferencia de radio 1 cuya longitud es 2π se transforma en el recinto ***R´*** , en el segmento horizontal de longitud 2π ubicado a altura ***ρ*** = 1 . “ El perímetro de la circunferencia no sufrió estiramiento ” (color rojo) .

Como se puede apreciar la deformación del recinto ***R*** en el recinto ***R´*** esta ligada al radio de la circunferencia de que se trate , la deformación máxima se produce en el subconjunto de puntos del recinto ***R*** que se encuentran ubicados sobre la circunferencia de radio “ cero ” , esta deformación va disminuyendo hasta el subconjunto de puntos del recinto ***R*** que se encuentran ubicados sobre la circunferencia de radio 1 , el cual no sufre ninguna deformación .

Todo estos cambios que sufre el recinto ***R*** al convertirlo en el recinto ***R´*** (cambio de tamaño y deformación variable) , también lo sufrirá el recinto ***R´*** al convertirlo en el recinto ***R*** y esto lo contempla el factor de ajuste que ya hemos presentado al cual llamamos " **Jacobiano** " , lo simbolizaremos con $\| \ J \ \|$ y su valor es $\boldsymbol{\rho}$.

La integral a resolver quedará convertida en :

$$\iint_R f_{(x;y)} \, dx\, dy = \iint_{R'} f \ o \ T^{-1}{}_{(\rho;\theta)} . \|J\| \, d\theta \, d\rho$$

El cambio a coordenadas polares será útil si la integral doble del segundo miembro es de mas fácil resolución que la integral doble del primer miembro .

<u>Aplicación</u> <u>a</u> <u>otros</u> <u>tipos</u> <u>de</u> <u>recintos</u> :

1) Recinto ***R*** definido por la frontera y el interior de una circunferencia de centro (***α*** ; ***β***) y de radio ***r*** (Ver **Gráfico 2**) .

$$R = \left\{ (x, y) \in \Re^2 / (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 \le r^2 \right\}$$

Su gráfico es :

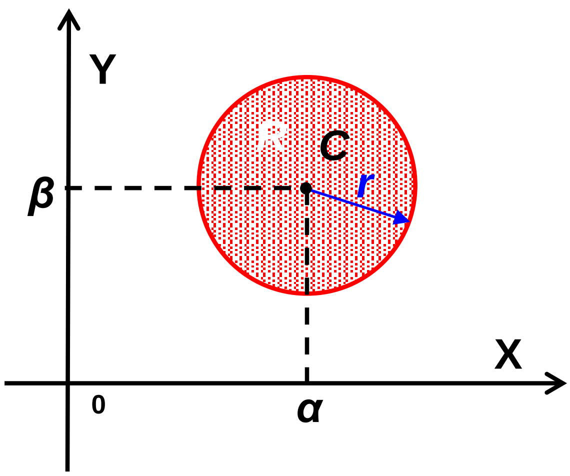


Gráfico 2

Pensar en cambiar las coordenadas cartesianas por coordenadas polares con polo en el centro de coordenadas y como semieje , al semieje positivo de ***x*** , es una elección que llevaría a cálculos complicados para determinar los intervalos de variación de las variables ***ρ*** y ***θ*** (Ver **Gráfico 3**) .

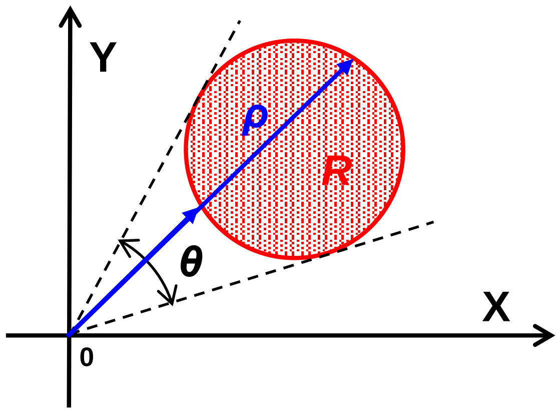


Gráfico 3

Como se ve en el **Grafico 3** , resulta bastante laborioso determinar los límites de variación de la variable ***θ*** , así como también los límites de variación de la variable ***ρ*** que además de no ser constantes , sus valores dependen del valor de la variable ***θ*** de que se trate . Esto terminaría convirtiendo a la integral doble a resolver , como mínimo en otra integral doble del mismo grado de dificultad que la primera .

Por tal motivo se propone un cambio del polo y del semieje a partir de los cuales se mide las variables ***ρ*** y ***θ*** de coordenadas polares (Ver **Gráfico 4**) .

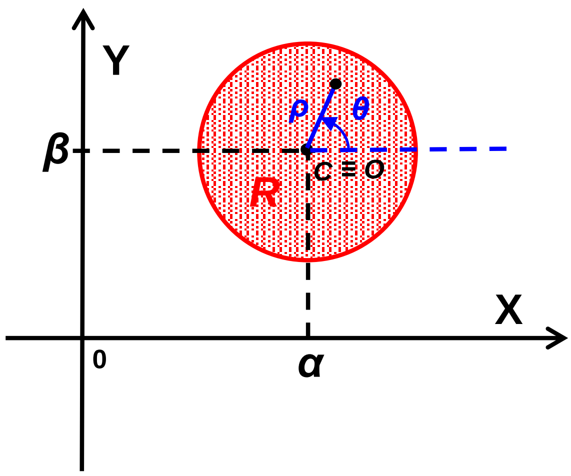


Gráfico 4

Esta propuesta consiste en elegir para medir a las variables ***ρ*** y ***θ*** , como polo , el centro de la circunferencia y como semieje , una semirrecta horizontal que pasa por dicho centro con mismo sentido que tiene el semieje positivo de la variable ***x*** .

En base a esta elección los intervalos de variación de las variables ***ρ*** y ***θ*** serán :

$$\left\{ \begin{matrix} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix} \right\}$$

Como consecuencia de esta elección , el recinto ***R´*** será un rectángulo tan simple como el que habíamos generado a partir de un recinto ***R*** compuesto por la frontera y los puntos interiores de una circunferencia centrada en el origen .

Ahora será necesario definir la expresión de la $T^{-1}(\rho;\theta)$ que permitirá generar al recinto ***R*** a partir del recinto ***R´*** . Se propone la siguiente $T^{-1}(\rho;\theta)$, a la cual comprobaremos que cumple con este objetivo :

$$T^{-1}(\rho;\theta) = \left(\underbrace{\rho.\cos\theta + \alpha}_{x(\rho;\theta)} ; \underbrace{\rho.sen\theta + \beta}_{y(\rho;\theta)} \right)$$

Comprobación :

$$\begin{cases} x = \rho.\cos\theta + \alpha \quad \Rightarrow \quad x - \alpha = \rho.\cos\theta \quad \Rightarrow \quad (x-\alpha)^2 = (\rho.\cos\theta)^2 \\ \\ y = \rho.sen\theta + \beta \quad \Rightarrow \quad x - \beta = \rho.sen\theta \quad \Rightarrow \quad (x-\beta)^2 = (\rho.sen\theta)^2 \end{cases}$$

Sumemos miembro a miembro las dos igualdades anteriores :

$$\begin{array}{c} (x-\alpha)^2 = (\rho.\cos\theta)^2 \\ + \\ (x-\beta)^2 = (\rho.sen\theta)^2 \\ \hline (x-\alpha)^2 + (x-\beta)^2 = (\rho.\cos\theta)^2 + (\rho.sen\theta)^2 \end{array}$$

$$(x-\alpha)^2 + (x-\beta)^2 = \rho^2.\cos^2\theta + \rho^2.sen^2\theta$$

$$(x-\alpha)^2 + (x-\beta)^2 = \rho^2.\underbrace{(\cos^2\theta + .sen^2\theta)}_{=1}$$

$$(x-\alpha)^2 + (x-\beta)^2 = \rho^2.1$$

$$(x-\alpha)^2 + (x-\beta)^2 = \rho^2$$

Si en la expresión obtenida se hace varia a la variable ***ρ*** desde 0 hasta ***r*** se generarían infinitas circunferencias desde el centro ***C*** de la circunferencia que define al recinto ***R*** (***ρ*** = 0) hasta su frontera (***ρ*** = ***r***) , alcanzando así a todos sus puntos .

Queda comprobado que la transformación propuesta cumple con el objetivo buscado .

Ahora , vamos a calcular el factor de ajuste entre el nuevo recinto ***R´*** y el recinto ***R*** original (**Gráfico 4**) . Este ajuste , como ya hemos mencionado lo realizará el " **Jacobiano** " (**II *J T^{-1}$_{(\rho\,;\,\theta)}$* II**) o el módulo del determinante de la **matriz Jacobiana** de las derivadas parciales de la presente transformación inversa :

$$T^{-1}(\rho;\theta) = \left(\underbrace{\rho.\cos\theta + \alpha}_{x(\rho;\theta)} \,;\, \underbrace{\rho.sen\theta + \beta}_{y(\rho;\theta)} \right)$$

$$\begin{cases} x = \rho.\cos\theta + \alpha \\ \\ y = \rho.sen\theta + \beta \end{cases}$$

$$\|J\| = \left\|J\ T^{-1}(\rho;\theta)\right\| = \left\|\frac{\partial T^{-1}(\rho;\theta)}{\partial(\rho;\theta)}\right\| = \left\|\begin{matrix} \cos\theta & sen\theta \\ -\rho.sen\theta & \rho.\cos\theta \end{matrix}\right\|$$

Podemos ver que el cálculo del " **Jacobiano** " resulta el mismo que el realizado en **(4)** , por lo tanto , para este caso también :

$$\boxed{\| J \| = \rho}$$

2) Recinto ***R*** definido por la frontera y el interior de una elipse de semiejes ***a*** y ***b*** con centro en el centro de coordenadas (Ver **Gráfico 5**) .

$$R = \left\{ (x,y) \in \Re^2 \Big/ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}$$

Su gráfico es :

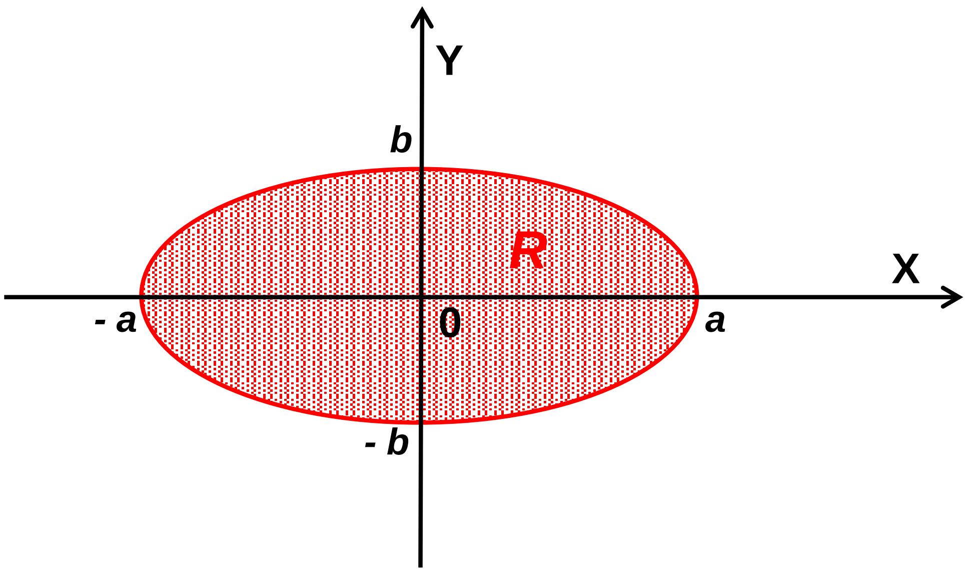


Gráfico 5

Si pensamos para este caso la utilización de coordenadas polares ρ y θ , no parece que esta elección ofrezca una opción mejor a la integración en el recinto ***R*** utilizando coordenadas cartesianas ***x*** e ***y*** . La variable ρ tendría un límite superior de integración variable entre los valores de los semiejes ***a*** y ***b*** , dependiendo del valor de la variable θ (Ver **Gráfico 6**) .

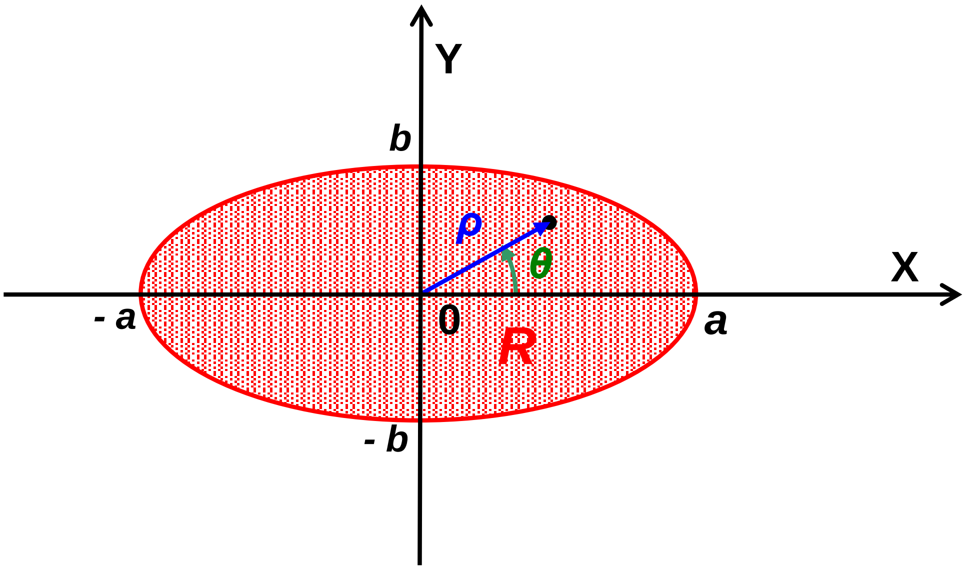


Gráfico 6

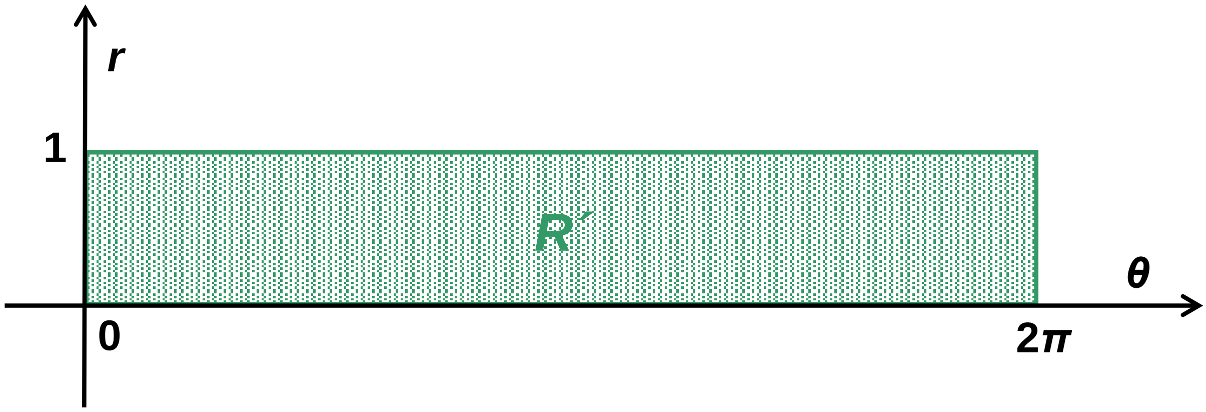
Sin embargo , se encontró una propuesta de transformación utilizando coordenadas polares con una adaptación especial .

Esta transformación logra transformar a este recinto ***R*** en otro recinto ***R´*** mas sencillo sustituyendo a la variable ρ por una variable ***r*** que variará siempre entre los valores 0 y 1 ($r \in [0\,;1]$) , independientemente de los valores de los semiejes de la elipse . Esta nueva variable ***r*** no posee una representación geométrica y es llamada factor de proporcionalidad o " pseudo radio " . En cambio la variable θ es la misma variable de coordenadas polares (ver **Gráfico 6**) y su variación será la que corresponda a la rotación del radio ρ para alcanzar a todos los puntos del recinto ***R*** .

En consecuencia , la variación de las variables ***r*** y θ será :

$$\begin{Bmatrix} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{Bmatrix}$$

En base a este cambio de variables , el recinto ***R*** se transformará en este nuevo recinto ***R´*** :



La transformación inversa de esta transformación será la siguiente :

$$T^{-1}_{(\,r;\theta)} = \left(\underbrace{r.a.\cos\theta}_{x_{(r;\theta)}} \,;\, \underbrace{r.b.sen\theta}_{y_{(r;\theta)}} \right) \quad \textbf{(5)}$$

Vamos a comprobar que a través de esta $\boldsymbol{T^{-1}_{(\,r\,;\,\theta\,)}}$, el recinto **R´** se transforma en el recinto ***R*** .

$$\begin{cases} x = r.a.\cos\theta \\ \\ y = r.b.sen\theta \end{cases}$$

Si ***r*** = 0 , entonces :

$$\begin{cases} x = 0.a.\cos\theta \quad \Rightarrow \quad x = 0 \\ \\ y = 0.b.sen\theta \quad \Rightarrow \quad y = 0 \end{cases}$$

La respuesta corresponde al centro de coordenadas (0 ; 0) , centro del recinto ***R*** .

Si $r \in (0\,;1]$, entonces :

$$\begin{cases} x = r.a.\cos\theta \quad \Rightarrow \quad x^2 = (r.a.\cos\theta)^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = (r.a)^2(\cos\theta)^2 \quad \Rightarrow \\ \\ y = r.b.sen\theta \quad \Rightarrow \quad y^2 = (r.b.sen\theta)^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = (r.b)^2(sen\theta)^2 \quad \Rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{(r.a)^2} = (\cos\theta)^2 \ (r \neq 0) \\ \\ \Rightarrow \quad \dfrac{y^2}{(r.b)^2} = (sen\theta)^2 \ (r \neq 0) \end{cases}$$

Sumemos miembro a miembro las dos igualdades anteriores :

$$\frac{x^2}{(r.a)^2} = (\cos\theta)^2$$

$$+$$

$$\frac{y^2}{(r.b)^2} = (sen\theta)^2$$

$$\frac{x^2}{(r.a)^2} + \frac{y^2}{(r.b)^2} = \underbrace{(\cos\theta)^2 + (sen\theta)^2}_{=1}$$

$$\frac{x^2}{(r.a)^2} + \frac{y^2}{(r.b)^2} = 1$$

Al variar esta ultima expresión , los valores de la incógnita ***r*** en el intervalo (0 ; 1] se generan infinitas elipses , proporcionales entre sí alcanzando a todos los puntos del recinto ***R*** excepto su centro ***C*** , el cual es alcanzado por ésta $T^{-1}_{(r\,;\,\theta)}$ para ***r*** = 0 .

Queda comprobado que la transformación propuesta cumple con el objetivo buscado .

Nos queda por último , determinar el factor de ajuste (el " Jacobiano " = $\| J \|$) necesario para compensar el reemplazo del recinto ***R*** por el recinto ***R´*** en el proceso de integración . En base a la expresión de la transformación inversa $T^{-1}_{(r\,;\,\theta)}$ (Ver **(5)**) , tenemos que :

$$\|J\| = \left\|J\ T^{-1}{}_{(\rho;\theta)}\right\| = \left\|\frac{\partial T^{-1}{}_{(\rho;\theta)}}{\partial(\rho;\theta)}\right\| = \left\|\begin{matrix} a.\cos\theta & b.sen\theta \\ -r.a.sen\theta & r.b.\cos\theta \end{matrix}\right\| = \left|a.r.b.\cos^2\theta + b.r.a.sen^2\theta\right| =$$

$$= \left|r.a.b.\underbrace{(\cos^2\theta + sen^2\theta)}_{=1}\right| = |r.a.b.1| = |r.a.b| \ (r \in [0\,;1];\ a > 0 \wedge b > 0) = r.a.b$$

Finalmente : $\boxed{\| J \| = r.a.b}$

Ejercitación :

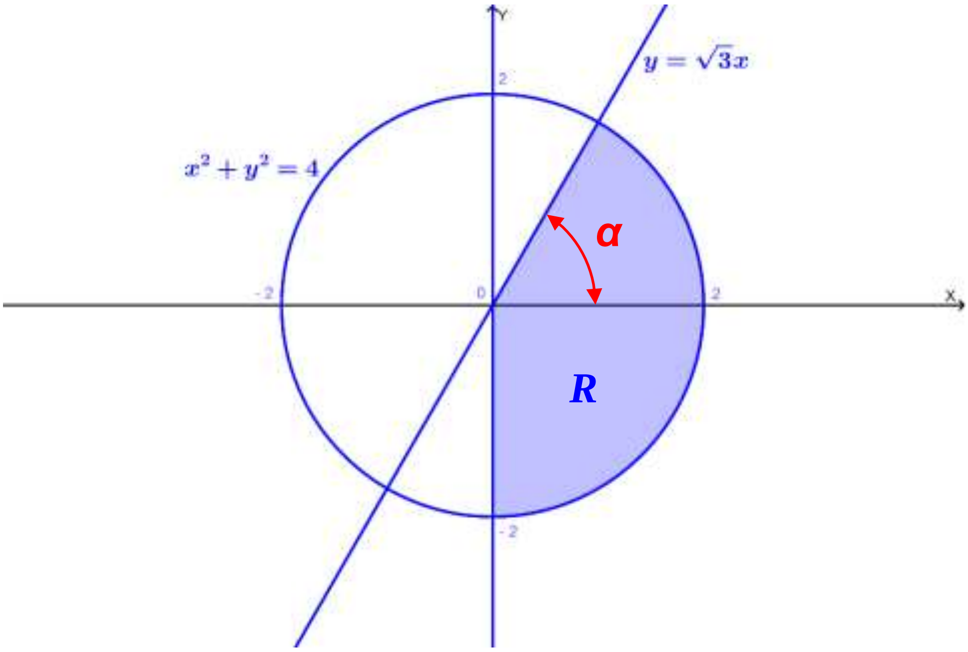
Vamos a resolver un ejercicio del **TRABAJO PRÁCTICO Nº 7** de la **GUIA DE TRABAJOS PRACTICOS** de **ANALISIS MATEMATICO II** :

10.- c) Evaluar la siguiente integral :

$$\iint_R \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy = \qquad R=\left\{(x;y)\in\Re^2 : x^2+y^2\le 4\,,\, x\ge 0\,,\, y\le\sqrt{3}x\right\}$$

Grafiquemos el recinto ***R*** :

$$y=\sqrt{3}x \;\Rightarrow\; m=\sqrt{3} \;\Rightarrow\; m=tg\,\alpha=\sqrt{3} \;\Rightarrow\; \alpha=arc\,tg\sqrt{3} \;\Rightarrow\; \alpha=\frac{\pi}{3}$$

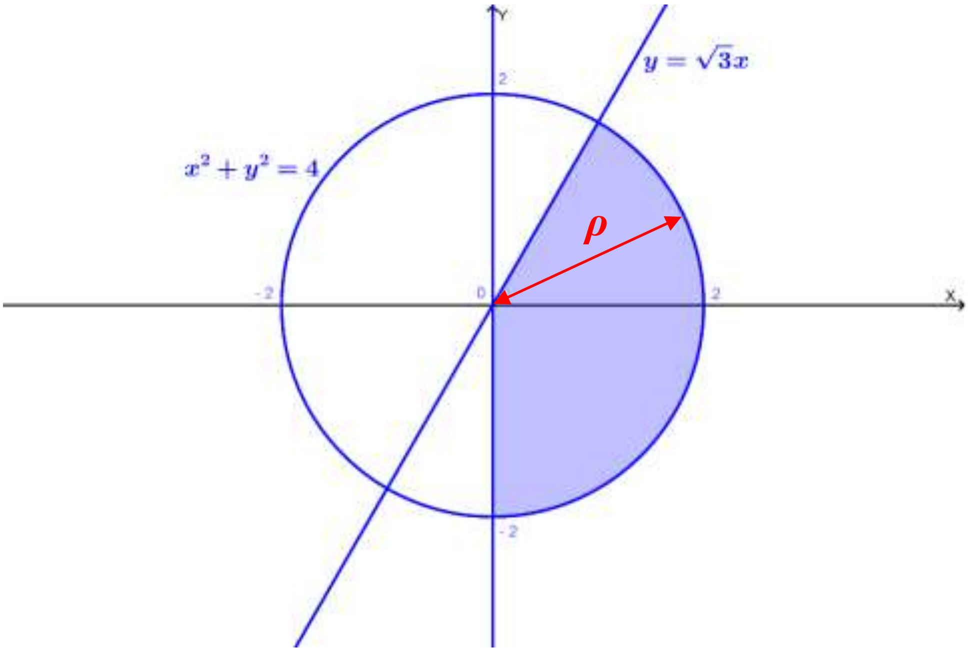


Pensando en reemplazar al recinto ***R*** por un nuevo recinto ***R´*** a través del cambio a coordenadas polares para calcular la integral doble dada , expresamos la transformación inversa necesaria :

$$T^{-1}{}_{(\rho;\theta)}=\left(x_{(\rho;\theta)}\,;y_{(\rho;\theta)}\right)\begin{cases}x=\rho.\cos\theta\\ y=\rho.sen\theta\end{cases}$$ y su “ **Jacobiano** ” será : $\|\,J\,\|=\rho$

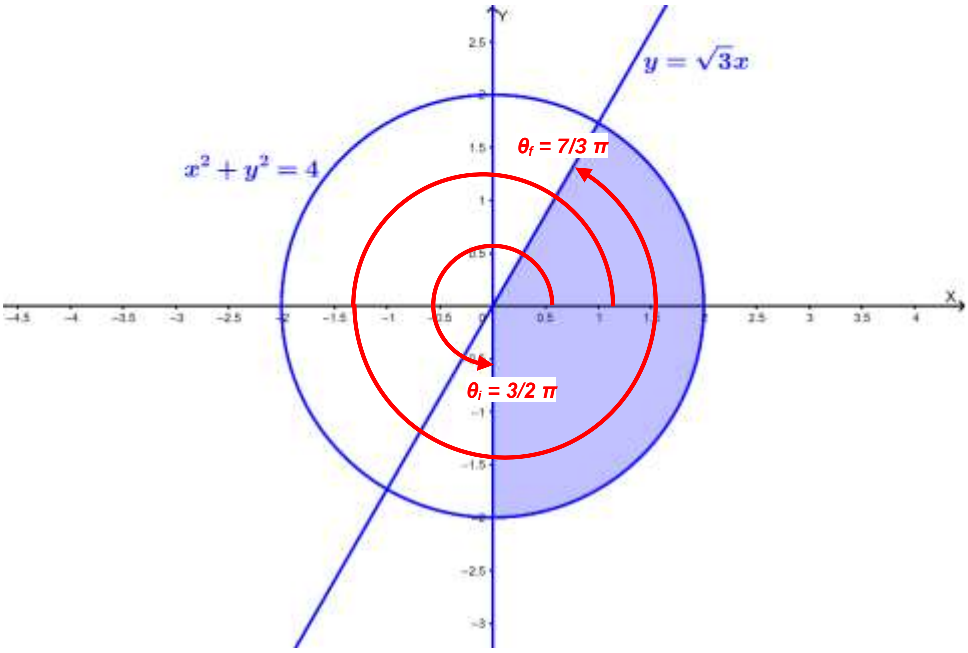
Ahora analizaremos la variación de la variable ***ρ*** :

$$0\le\rho\le 2$$

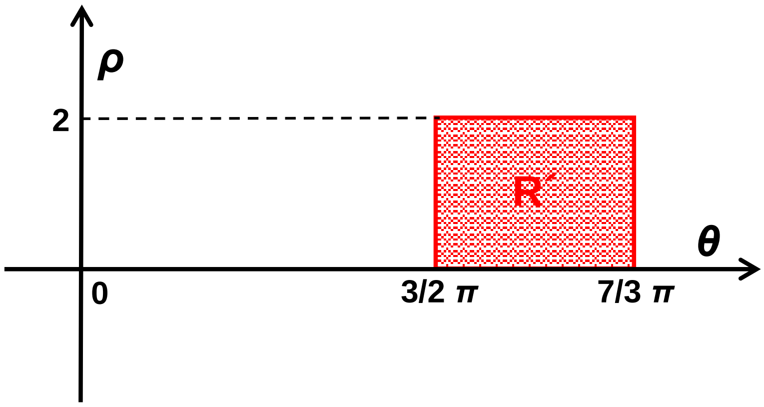


Y finalmente la variación de la variable $\boldsymbol{\theta}$:

$$\frac{3}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{7}{3}\pi$$



El recinto ***R´*** será :



Por ultimo vamos a plantear los cambios a la integral doble y a continuación a resolverla :

$$\iint_R \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_{R'} \frac{1}{1+\rho^2}\cdot \underbrace{\rho}_{\|J\|}\cdot d\rho\,d\theta = \int_{\rho=0}^{2}\int_{\theta=\frac{3}{2}\pi}^{\frac{7}{3}\pi} \frac{\rho}{1+\rho^2}\cdot d\theta\,d\rho =$$

$$= \int_{\rho=0}^{2} \frac{\rho}{1+\rho^2}\cdot \theta\Big|_{\theta=\frac{3}{2}\pi}^{\frac{7}{3}\pi} d\rho = \int_{\rho=0}^{2} \frac{\rho}{1+\rho^2}\left(\frac{7}{3}\pi - \frac{3}{2}\pi\right) d\rho = \int_{\rho=0}^{2} \frac{\rho}{1+\rho^2}\cdot \frac{5}{6}\pi\,d\rho =$$

$$= \frac{5}{6}\pi\cdot \int_{\rho=0}^{2} \frac{\rho}{1+\rho^2}\,d\rho = \quad \textbf{(6)}$$

Vamos a calcular auxiliarmente la integral indefinida siguiente :

$$\int \frac{\rho}{1+\rho^2}\,d\rho = \left\{\begin{array}{l} t = 1+\rho^2 \\ dt = 2\rho\,d\rho \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dt}{2} = \rho\,d\rho \end{array}\right\} = \int \frac{\frac{dt}{2}}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2} Ln\,|\,t\,| + C =$$

$$= \frac{1}{2} Ln\,\left|\,1+\rho^2\right| + C \quad \textbf{(7)}$$

Por último , reemplazamos **(7)** sin la constante C en **(6)** :

$$\frac{5}{6}\pi\cdot \int_{\rho=0}^{2} \frac{\rho}{1+\rho^2}\,d\rho = \frac{5}{6}\pi\cdot \frac{1}{2} Ln\left|1+\rho^2\right|\Big|_{\rho=0}^{2} = \frac{5}{12}\pi\left(Ln\left|1+2^2\right| - Ln\left|1+0^2\right|\right) =$$

$$= \frac{5}{12}\pi \left(Ln\,|1+4| - Ln\,|1+0| \right) = \frac{5}{12}\pi \left(Ln\,|\,5\,| - \underbrace{Ln\,|\,1\,|}_{=0} \right) = \frac{5}{12}\pi \left(Ln\,5 - 0 \right) = \frac{5}{12}\pi\ Ln\,5$$

<u>Rta.</u> : $\boxed{\frac{5}{12}\pi\ Ln\,5}$

****