Clase 9

Práctica sobre

- **Extremos libres para funciones de dos variables.**
- **Criterio de clasificación de puntos críticos**

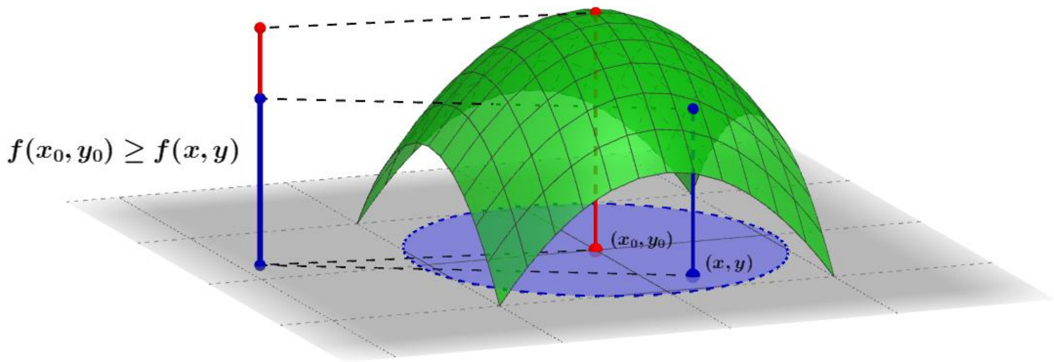
Extremos libres de funciones escalares de dos variables

Definición (Extremo libre). Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una función definida en el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$. Se dice que f posee un máximo (mínimo) local o relativo en $(x_0, y_0) \in A$, sí existe un entorno $U \subseteq A$ de ese punto en el cual se satisface que

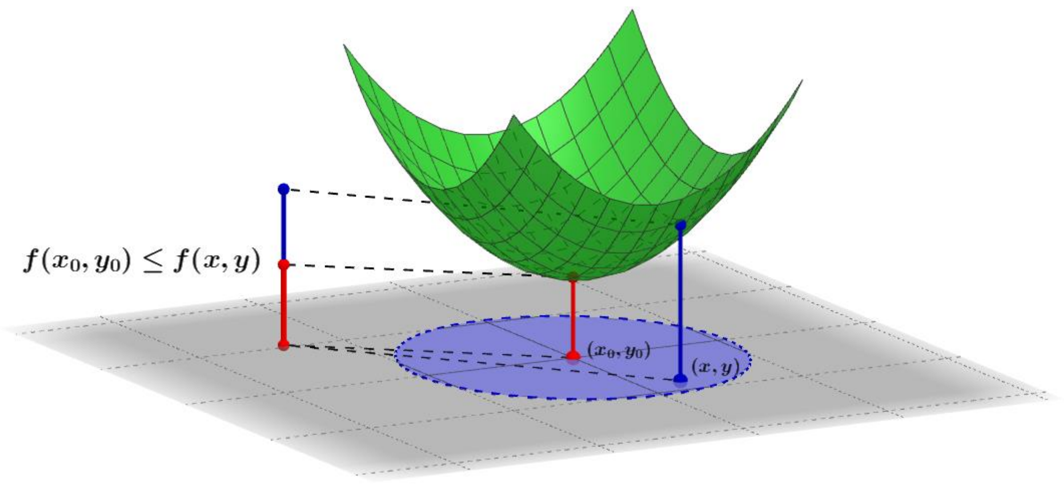
$$\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0) \leq 0 \quad \big(f(x,y) \geq f(x_0,y_0)\big)$$

para todo $(x,y) \in U$.

El punto (x_0, y_0) al que se hace referencia en la definición se llama *punto de extremo* (máximo o mínimo, según lo que ocurra) y *extremo* o *valor extremo,* al valor asumido por la función en ese punto.



Representación geométrica de la gráfica de una función de dos variables en las inmediaciones de un punto de máximo local

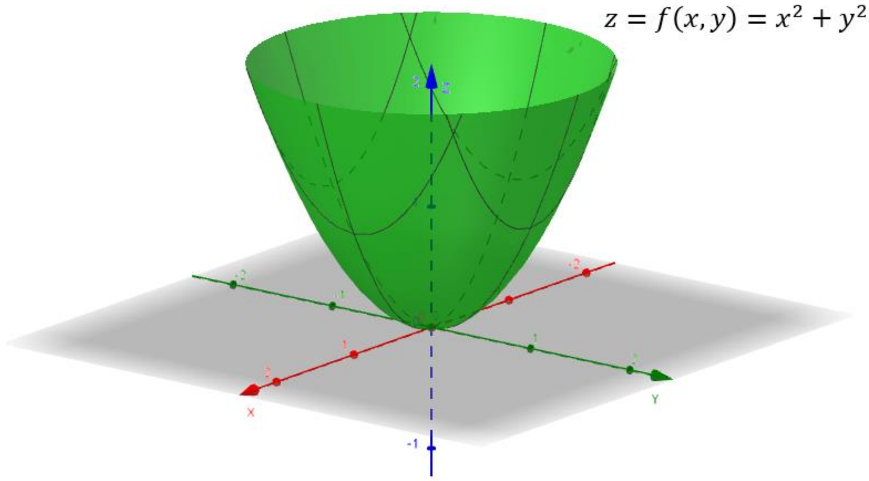


Representación geométrica de la gráfica de una función de dos variables en las inmediaciones de un punto de mínimo local

Ejemplo 1. La función $f(x,y) = x^2 + y^2$ posee un punto de mínimo, en este caso absoluto, en el origen. Obsérvese pues que

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \geq f(0,0) = 0$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

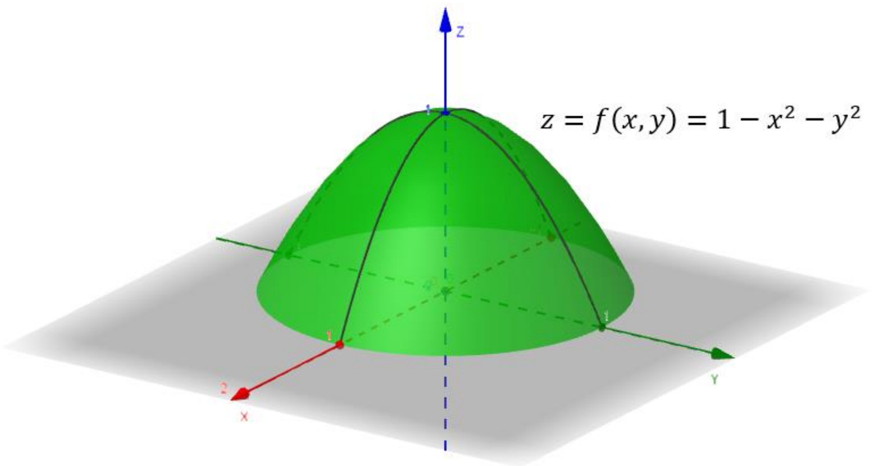


La función $f(x,y) = x^2 + y^2$ posee un mínimo en $(0,0)$.

Ejemplo 7. La función $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ posee un máximo absoluto en $(0,0)$. En este caso resulta

$$f(x,y) = 1 - x^2 - y^2 \leq f(0,0) = 1$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.



La función $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ posee un máximo en $(0,0)$.

Definición (Punto Crítico). Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, una función definida en el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$. Se dice que el punto $(x_0, y_0) \in A$, es un *punto crítico* (o *estacionario*) de f, si en ese punto se anulan todas sus derivadas parciales.

Si se supone que la función f es diferenciable en (x_0, y_0), y que tal punto es estacionario, entonces el plano tangente al gráfico de en $\left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right)$ es horizontal.

Recuérdese que la ecuación del plano tangente a la gráfica de una función diferenciable en el punto $\left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right)$, es

$$\pi: z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Siendo (x_0, y_0) un punto crítico de la función f, se cumple entonces que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

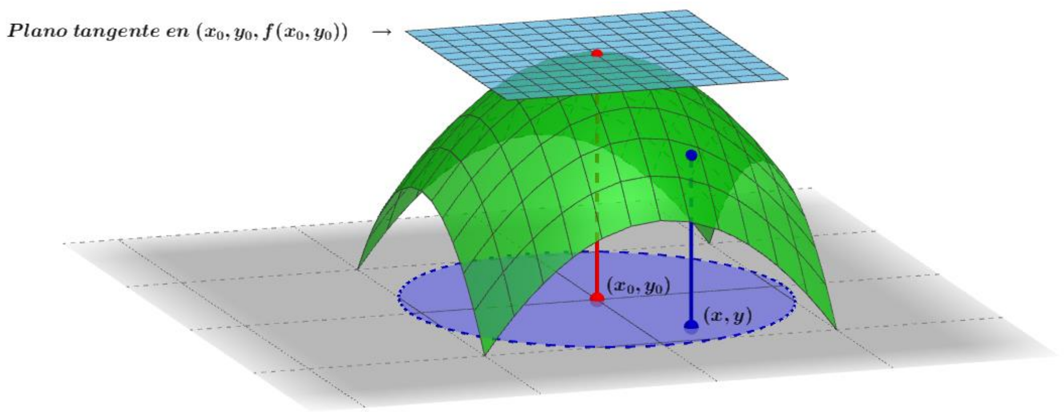
Con lo cual, resulta

$$\pi: z = f(x_0, y_0) + \overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}^{0} \cdot (x - x_0) + \overbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}^{0} \cdot (y - y_0)$$

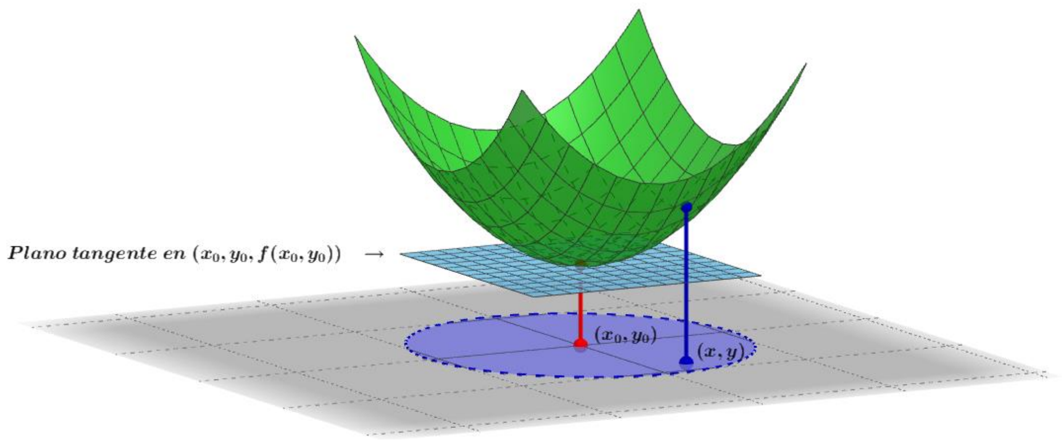
$$\pi: z = f(x_0, y_0)$$

Ecuación que representa a un plano horizontal, “siempre a altura $f(x_0, y_0)$”.

Nótese que las funciones de los Ejemplos 5 y 6 poseen su único punto crítico en el origen, y que en ese punto poseen el extremo.



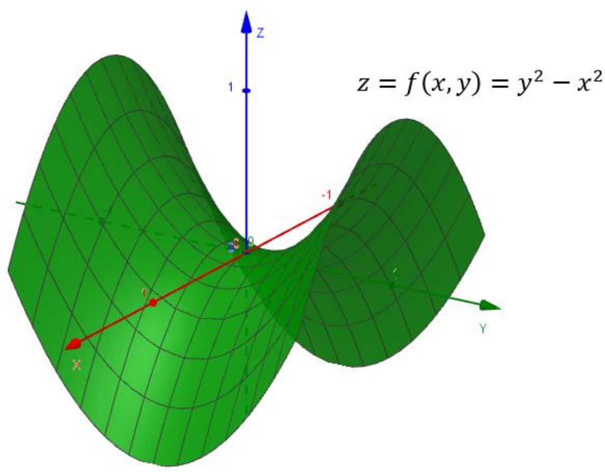
Representación geométrica del plano tangente a la gráfica de una función de dos variables, con relación a un punto crítico donde dicha función alcanza un máximo local



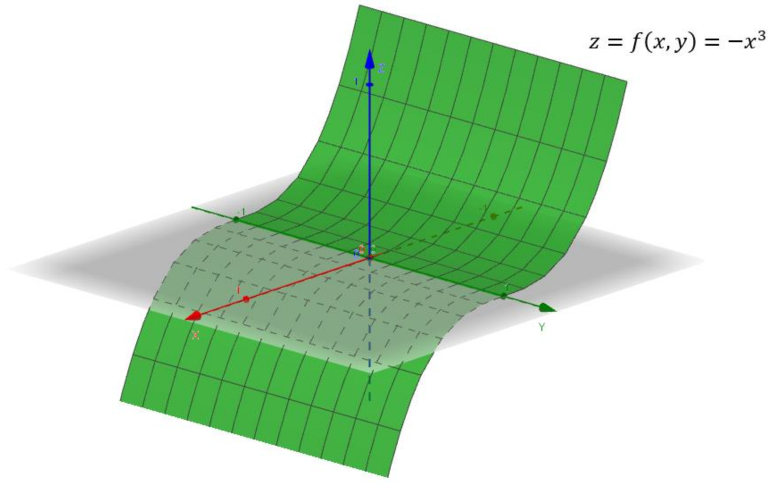
Representación geométrica del plano tangente a la gráfica de una función de dos variables, con relación a un punto crítico donde dicha función alcanza un mínimo local

Ejemplo 2. La función $f(x, y) = y^2 - x^2$ posee un único punto crítico en $(0,0)$, sin embargo, allí no posee ni máximo ni mínimo. Véase que $f(0, y) \geq f(0,0) = 0$ para cualquier valor de y, mientras que por otra parte $f(x, 0) \leq f(0,0) = 0$ para todo x. El gráfico de f es un *paraboloide hiperbólico*. En vista de la forma de esta superficie, se dice que $(0,0,0)$ es un *punto silla* o *punto de ensilladura* de esa superficie, o que $(0,0)$ es un punto silla o punto de ensilladura de f.

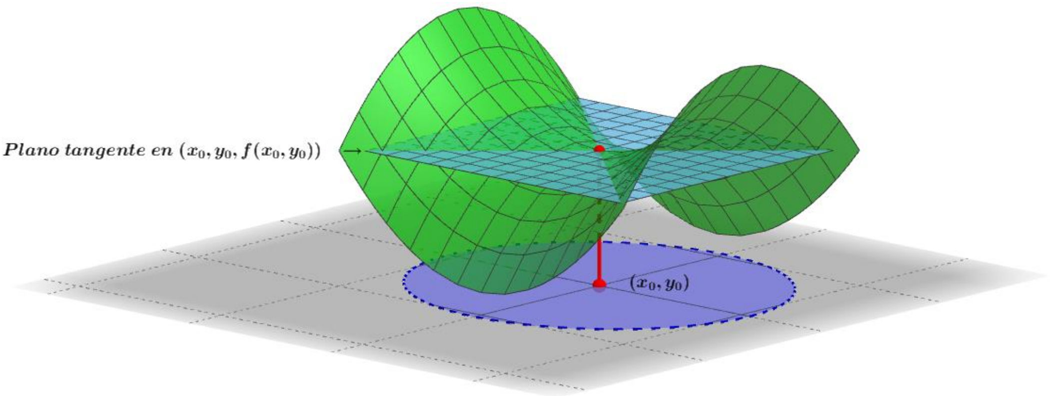
Definición (Punto de ensilladura). Un punto crítico de f, que no es ni punto de máximo ni punto de mínimo, se llama *punto silla* o *punto de ensilladura* de f.



La función $f(x, y) = y^2 - x^2$ posee un punto de ensilladura en $(0, 0)$.



La función $f(x,y) = -x^3$ posee una recta de puntos de ensilladura.



Representación geométrica del plano tangente a la gráfica de una función de dos variables, con relación a un punto crítico donde dicha función posee un punto de ensilladura

Clasificación de puntos críticos

Criterio del hessiano

Teorema (de clasificación de puntos críticos). Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una función definida en el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$, tal que existe un entorno $U \subseteq A$ de centro en el punto crítico (x_0, y_0), en el cual f es de clase $\mathcal{C}^2$. Sea además el hessiano de f en (x_0, y_0)

$$\Delta_f(x_0, y_0) = \det\left[H_f(x_0, y_0)\right] = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

$i)$ Si $\Delta_f(x_0, y_0) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, entonces f posee un mínimo local en (x_0, y_0).

$ii)$ Si $\Delta_f(x_0, y_0) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, entonces f posee un máximo local en (x_0, y_0).

$iii)$ Si $\Delta_f(x_0, y_0) < 0$, entonces f posee un punto de ensilladura en (x_0, y_0).

$iv)$ Si $\Delta_f(x_0, y_0) = 0$, no es posible, con tal información, determinar la naturaleza del punto crítico (x_0, y_0).

Ejemplo 3. El criterio de clasificación permite caracterizar la naturaleza de los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = 2x^2 - 4xy + \frac{2}{3}y^3$$

En principio, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x - 4y \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -4x + 2y^2$$

Los puntos críticos serán aquellos pares (x, y) dentro del dominio de la función, que satisfagan el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x - 4y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -4x + 2y^2 = 0 \end{cases}$$

El cual se puede escribir en la forma

$$\begin{cases} x - y = 0 & (1) \\ 2x - y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

O también

$$\begin{cases} y = x & (1) \\ 2x - y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Reemplazando (1) en (2), se obtiene la ecuación

$$2x - y^2 = 2x - x^2 = 0$$

$$x \cdot (2 - x) = 0$$

Que posee dos soluciones

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 2$$

Entonces, utilizando nuevamente la ecuación (1) con cada valor de x encontrado, se obtienen así los únicos dos puntos críticos de la función f. Estos son

$$x_1 = 0 \quad \rightarrow \quad \overbrace{y_1 = x_1}^{y=x} = 0 \quad \rightarrow \quad P_1 = (x_1, y_1) = (0,0)$$

$$x_2 = 2 \quad \rightarrow \quad \overbrace{y_2 = x_2}^{y=x} = 2 \quad \rightarrow \quad P_2 = (x_2, y_2) = (2,2)$$

O sea que, f posee solamente dos puntos críticos

$$P_1 = (0,0) \qquad P_2 = (2,2)$$

Por otra parte, el hessiano de la función

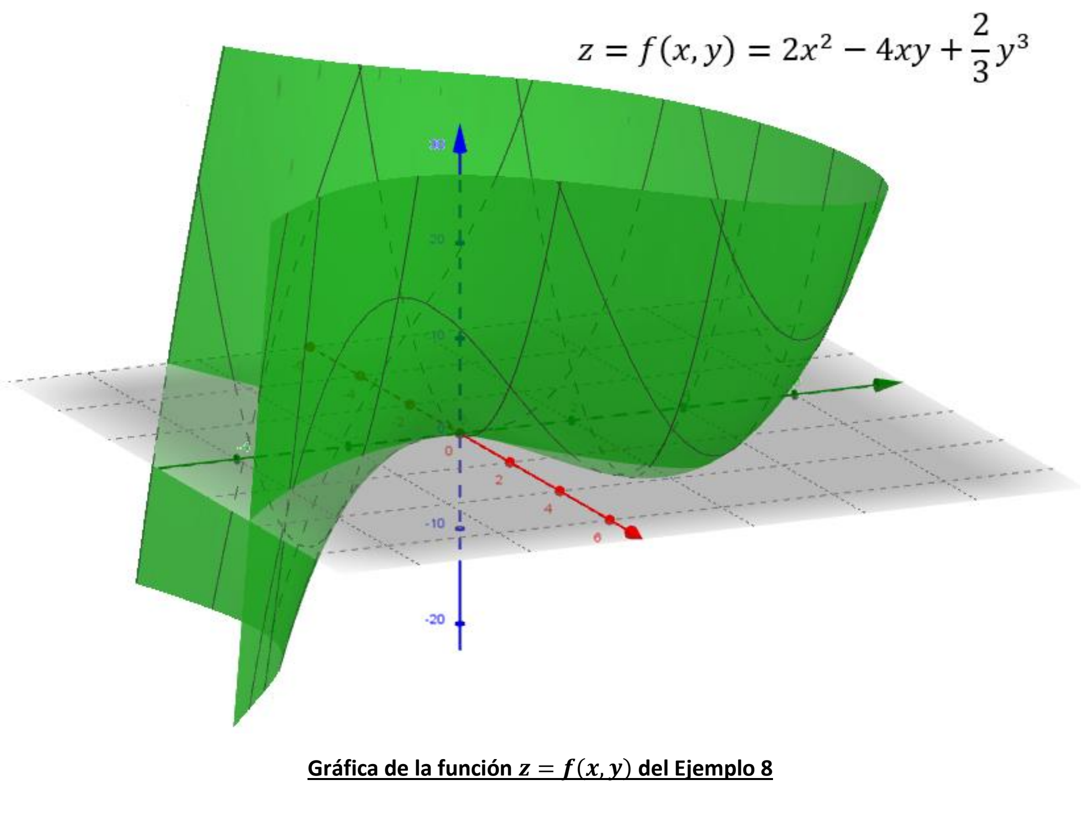
$$f(x, y) = 2x^2 - 4xy + \frac{2}{3}y^3$$

es

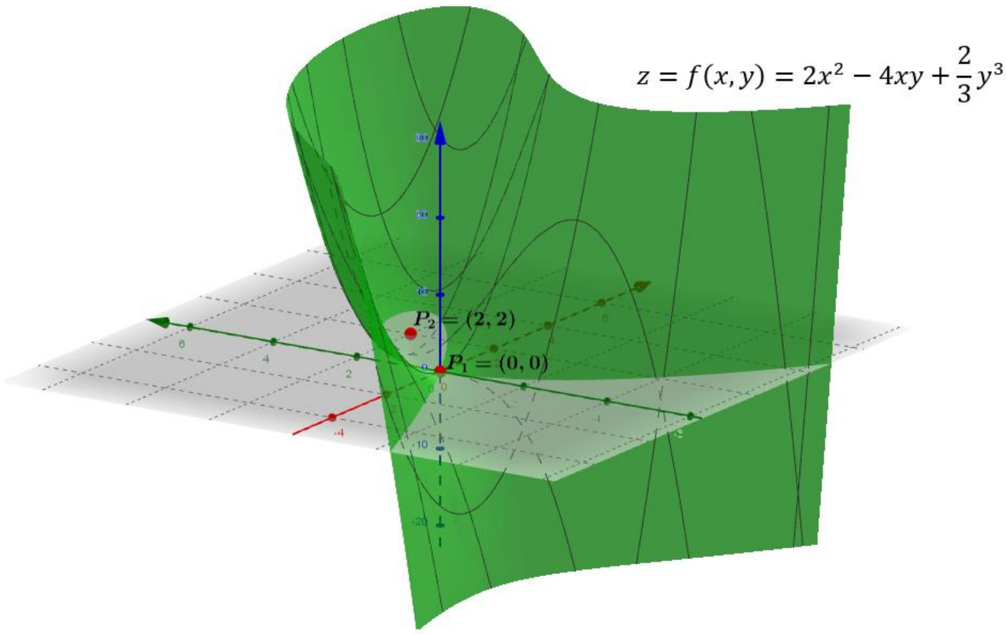
$$\Delta_f(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4y \end{vmatrix} = 16y - 16 = 16(y - 1)$$

Clasificación

P_i	$\Delta_f(P_i)$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_i)$	**Conclusión**
$P_1 = (0,0)$	$\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \cdot 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$	----	La función f posee un punto de ensilladura en $P_1 = (0,0)$
$P_2 = (2,2)$	$\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \cdot 2 \end{vmatrix} = 16 > 0$	$4 > 0$	La función f posee un mínimo local en $P_2 = (2,2)$



Gráfica de la función $z = f(x,y)$ del Ejemplo 8



Gráfica de la función $z = f(x,y)$ y los puntos críticos P_1 y P_2 identificados en el plano xy

Ejemplo 4. El criterio de clasificación permite caracterizar la naturaleza de los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = xy \cdot (3 + x + y) = 3xy + x^2y + xy^2$$

Obsérvese que sus derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3y + 2xy + y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x + x^2 + 2xy$$

Entonces, los puntos críticos son pares (x,y) dentro del dominio de la función, que verifican el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3y + 2xy + y^2 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x + x^2 + 2xy = 0 \end{cases}$$

Que también se puede escribir según la factorización

$$\begin{cases} y \cdot (3 + 2x + y) = 0 & (1) \\ x \cdot (3 + x + 2y) = 0 & (2) \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema se dan según las siguientes cuatro situaciones

$$i) \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

De la cual se obtiene el punto crítico $P_1 = (0,0)$.

$$ii) \quad \begin{cases} y = 0 \\ 3 + x + 2y = 0 \end{cases}$$

El punto crítico asociado es $P_2 = (-3,0)$.

$$iii) \quad \begin{cases} 3 + 2x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

El punto crítico correspondiente es $P_3 = (0,-3)$.

$$iv) \quad \begin{cases} 3 + 2x + y = 0 \\ 3 + 2y + x = 0 \end{cases}$$

Donde se puede ver fácilmente que $y = x$, y luego, por lo tanto, obtener el punto crítico asociado, que es $P_4 = (-1,-1)$

A su vez, el hessiano de

$$f(x,y) = xy(3 + x + y) = 3xy + x^2y + xy^2$$

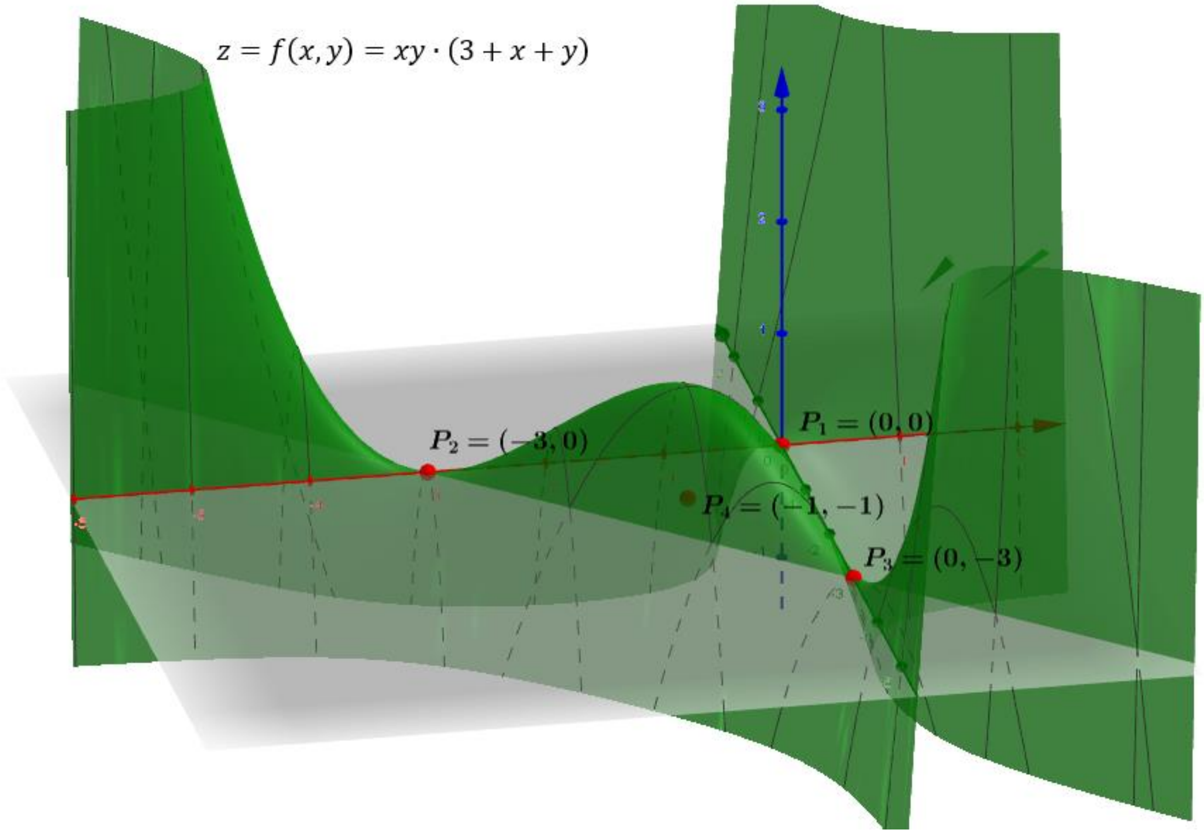
es

$$\Delta_f(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 3 + 2x + 2y \\ 3 + 2x + 2y & 2x \end{vmatrix}$$

<u>Clasificación</u>

$\boldsymbol{P_i}$	$\boldsymbol{\Delta_f(P_i)}$	$\boldsymbol{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_i)}$	**Conclusión**
$P_1 = (0,0)$	$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$	----	La función f posee un <u>punto de ensilladura</u> en $P_1 = (0,0)$
$P_2 = (-3,0)$	$\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = -9 < 0$	----	La función f posee un <u>punto de ensilladura</u> en $P_2 = (-3,0)$
$P_3 = (0,-3)$	$\begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$	----	La función f posee un <u>punto de ensilladura</u> en $P_3 = (0,-3)$

$P_4 = (-1,-1)$	$\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0$	$-2 < 0$	La función f posee un <u>máximo local</u> en $P_4 = (-1,-1)$



<u>Gráfica de la función $z = f(x,y)$ y los puntos críticos P_1, P_2, P_3 y P_4 identificados en el plano xy</u>