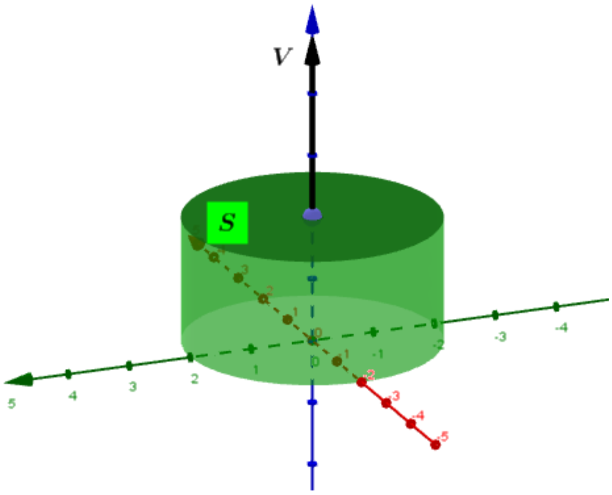
Unidad 9
Integrales sobre superficies
Flujo
Guía de clase. Com 02

Integral de una función vectorial sobre una superficie. Flujo

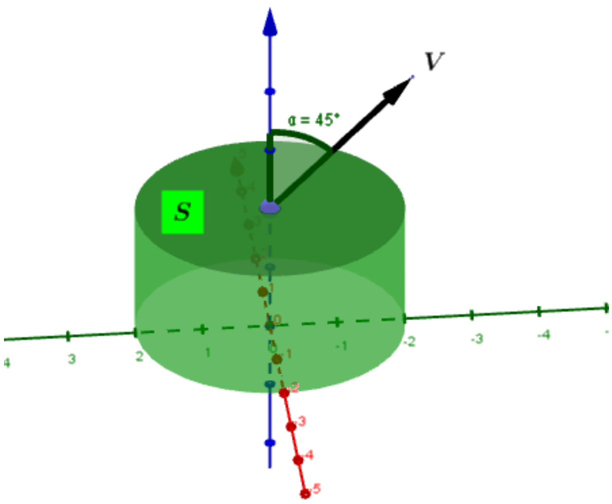
Problemas introductorios

Un fluido circula por una cañería circular de 4m de diámetro a una velocidad V de 3 m/s ¿Qué **volumen** se puede llenar en un tiempo Δt segundos?



$$\boxed{Vol = 4\pi(m^2)\,3\left(\frac{m}{s}\right)\,\Delta t(s)}$$

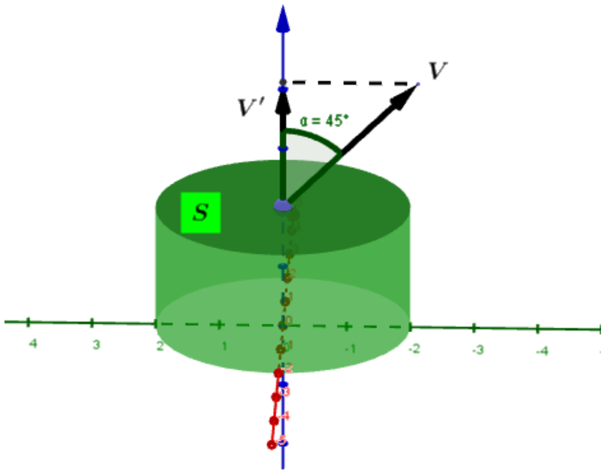
Considere ahora la situación anterior con V formando un ángulo de 45° con respecto a la normal ascendente a la superficie S ¿Qué **volumen** se podría llenar en un tiempo Δt segundos en la dirección y sentido del vector normal ascendente a S ?



$$\boxed{V' = V\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,V = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\frac{m}{s}\right)}$$

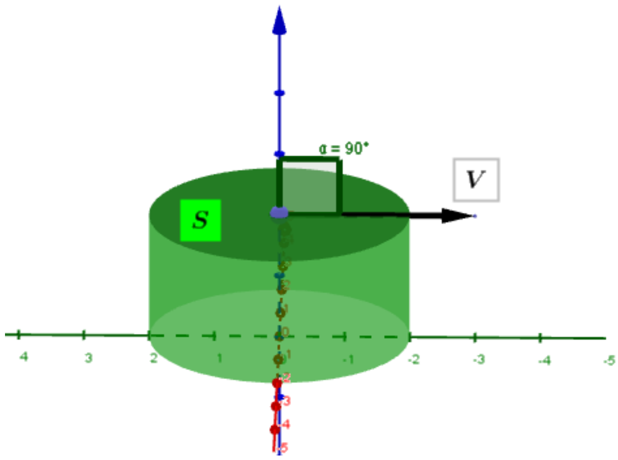
$$\boxed{Vol' = 4\pi(m^2)\,\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\frac{m}{s}\right)\,\Delta t(s)}$$

$$\boxed{Vol' < Vol}$$



Por último, si V formara un ángulo de 90° con respecto a la normal a la superficie S ¿Cuál sería el volumen a llenar en el mismo Δt ?

$$Vol = 0$$



Definición

Dado un campo vectorial $\vec{F}: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ continuo en U abierto y S una superficie parametrizada por $\Phi: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, siendo Φ inyectiva y regular en D salvo sobre un conjunto de puntos de área nula, entonces la integral de $\vec{F}$ sobre S en la **dirección del vector normal unitario $\vec{n}$ de S**, viene dada por

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_D \vec{F}[\Phi(u,v)]\cdot\vec{n}(u,v)\ \underbrace{\|\Phi_u(u,v)\times\Phi_v(u,v)\|\,du\,dv}_{dS}$$

Como S tiene en cada punto dos vectores normales unitarios, $\vec{n}(u,v) = \pm\frac{\Phi_u(u,v)\times\Phi_v(u,v)}{\|\Phi_u(u,v)\times\Phi_v(u,v)\|}$, si $\vec{n}(u,v)$ tiene el mismo sentido que $\Phi_u(u,v)\times\Phi_v(u,v)$, corresponde el signo $(+)$ y de lo contrario corresponde el signo $(-)$, la fórmula anterior puede expresarse como

$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint\limits_D \vec{F}[\Phi(u,v)]\cdot\left(\pm\frac{\Phi_u(u,v)\times\Phi_v(u,v)}{\|\Phi_u(u,v)\times\Phi_v(u,v)\|}\right)\|\Phi_u(u,v)\times\Phi_v(u,v)\|\,du\,dv$$

$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \pm\iint\limits_D \vec{F}[\Phi(u,v)]\cdot\overbrace{\left(\Phi_u(u,v)\times\Phi_v(u,v)\right)}^{\vec{N}}\,du\,dv$$

Libro, Cálculo Vectorial, Waler Mora, Instituto Tecnológico de Costa Rica, 2019, Cap 8, pág 348

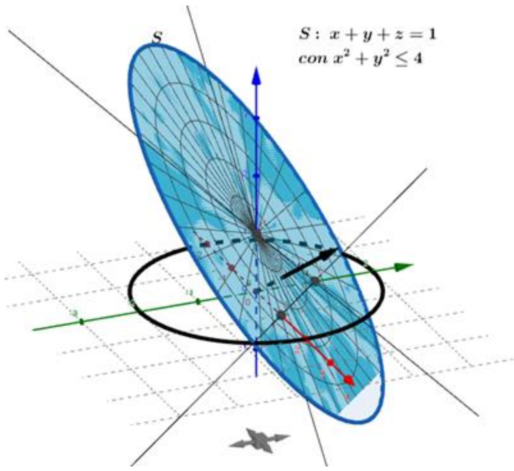
Ejemplo 1

Dado el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z)$, y la superficie S el plano de ecuación $x+y+z=1$, para $x^2+y^2\leq 4$, hallar el flujo de $\vec{F}$ a través de S en la dirección del vector normal ascendente $(z>0)$

Resolución

Búsqueda de una parametrización para la superficie S

$$S:\Phi(x,y)=(x,y,1-x-y)$$
$$(x,y)\in D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\leq 4\}$$



Cálculo de las derivadas parciales de Φ

$$\Phi_{\mathrm{x}}(x,y)=(1,0,-1)$$
$$\Phi_{\mathrm{y}}(x,y)=(0,1,-1)$$

Cálculo del producto vectorial fundamental

$$\Phi_{\mathrm{x}}(x,y)\times\Phi_{\mathrm{y}}(x,y)$$

$$\Phi_x(x,y)\times\Phi_y(x,y)=\begin{pmatrix}\breve{\imath} & \breve{\jmath} & \breve{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=(1,1,1)=\vec{N}$$

Este vector normal tiene la componente $z=1>0$, es el sentido pedido.

Composición de $\Phi(x,y)=(x,y,1-x-y)$ con $\vec{F}_{(x,y,z)}=(x,y,z)$

$$F[\Phi(x,y)]=(x,y,1-x-y)$$

Producto escalar

$$F[\Phi(x,y)]\cdot\left(\Phi_x(x,y)\times\Phi_y(x,y)\right)=(x,y,1-x-y)\cdot(1,1,1)=1$$

Finalmente la integral pedida es

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_D \vec{F}[\Phi(x,y)]\cdot\left(\Phi_x(x,y)\times\Phi_y(x,y)\right)\,dx\,dy=$$

$$=\underbrace{\iint_{x^2+y^2\le 4} dx\,dy}_{\ddot{A}rea(x^2+y^2=4)}\overset{\substack{Cambio\ a\\ Polares}}{\cong}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{2} r\,dr\,d\theta=4\pi$$

Ejemplo 2

Dado el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)=(y,z,x)$, y la superficie S del paraboloide $z=x^2+y^2$ con $1\le z\le 4$, hallar el flujo de $\vec{F}$ a través de S en la dirección del vector normal descendente ($z<0$, apuntando hacia fuera del paraboloide).

Resolución

$$z=x^2+y^2\quad\text{para}\quad 1\le z\le 4\iff 1\le x^2+y^2\le 4$$

$$S:\Phi(x,y)=(x,y,x^2+y^2)$$
$$(x,y)\in D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 1\le x^2+y^2\le 4\}$$

Cálculo de las derivadas parciales de Φ

$$\Phi_x(x,y)=(1,0,2x)$$
$$\Phi_y(x,y)=(0,1,2y)$$

Cálculo del producto vectorial fundamental

$$\Phi_x(x,y) \times \Phi_y(x,y) = \begin{pmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{pmatrix} = \Big(-2x, -2y, \underbrace{1}_{z=1=N_z}\Big) = \vec{N}(x,y)$$

Este vector normal tiene la componente $z = 1 > 0$, sentido contrario al pedido, se usará entonces $\Phi_y(x,y) \times \Phi_x(x,y) = -\,(\Phi_x(x,y) \times \Phi_y(x,y)) \;= (2x, 2y, -1)$.

Composición de $\Phi(x,y) = (x, y, x^2 + y^2)$ con $\vec{F}(x,y,z) = (y, z, x)$

$$F[\Phi(x,y)] = (y, x^2 + y^2, x)$$

Producto escalar

$$F[\Phi(x,y)] \cdot \Big(\Phi_y(x,y) \times \Phi_x(x,y)\Big) = (y, x^2 + y^2, x) \cdot (2x, 2y, -1) =$$
$$= 2xy + 2x^2y + 2y^3 - x$$

Finalmente la integral pedida es

$$\iint\limits_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint\limits_D \vec{F}[\Phi(x,y)] \cdot \Big(\Phi_y(x,y) \times \Phi_x(x,y)\Big)\; dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{1 \le x^2+y^2 \le 4} (2xy + 2x^2y + 2y^3 - x)\; dx\, dy =$$

$$\overset{\substack{Cambio\ a \\ Polares}}{\cong} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=1}^{2} \Bigg(2r^2 \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) + 2r^3 \cos^2(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) + 2r^3\,\mathrm{sen}^3(\theta)$$
$$- r \underbrace{\cos(\theta)}_{\int_0^{2\pi} \cos(\theta) = 0} \Bigg)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= 0$$

Bibliografía digital MIeL, Cálculo en Varias Variables, W Mora, Cap 8, pag 348.