Integrales Dobles

Transformación Polar

Práctica sobre

- **Fórmula de cambio de variables en integrales dobles.**
- **Integrales dobles sobre regiones circulares o elípticas con aplicación de la transformación polar.**

Fórmula de cambio de variables en integrales dobles

Teorema (Cambio de variables en integrales dobles). Sea $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una función continua en el conjunto abierto no vacío U de $\mathbb{R}^2$, y se la región $D \subset U$.

Sea, además, la función

$$T: V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : T(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$$

que aplica de manera inyectiva (salvo en conjuntos de área nula) la región $D' \subset V$ del plano uv, en la región D del plano xy. Supóngase que T es de clase $\mathcal{C}^1$ en V y que el jacobiano de T

$$J_T(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} \neq 0$$

en D' (salvo en conjuntos de área nula). Se tiene así, la fórmula de cambio de variables en integrales dobles

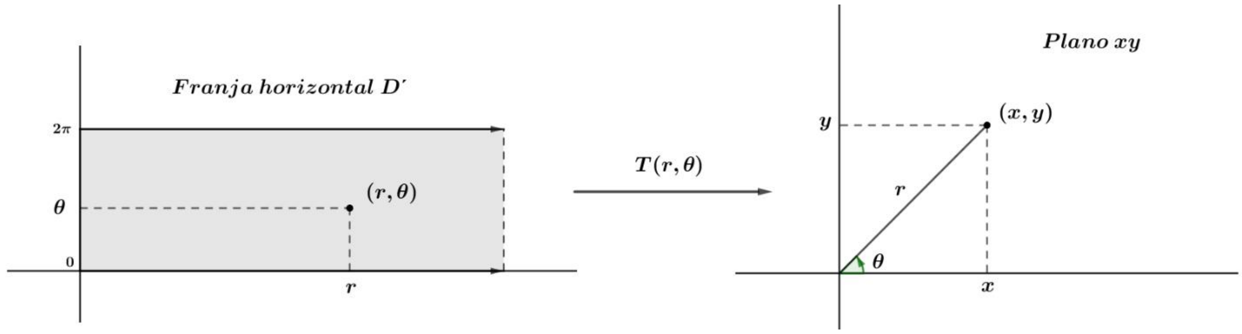
$$I = \iint\limits_D f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{D'} f[x(u,v), y(u,v)] \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Este resultado indica cómo obtener el valor de la integral doble, a partir de aplicar un cambio de variables según una transformación conveniente.

Lo que se busca al aplicar una transformación de sustitución de variables es facilitar y/o poder realizar el cálculo de la integral doble planteada.

A continuación, se muestran algunos ejemplos de este tipo de cálculos aplicando transformaciones polares.

Transformación polar



Recorrido de la transformación polar

Del gráfico de la derecha extraemos la siguiente relación para expresar **unívocamente** un punto en el plano coordenado xy

$$\begin{cases} x = x(r,\theta) = r\cos(\theta) \\ y = y(r,\theta) = r\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases} \qquad D': \begin{cases} 0 \le r \\ \theta \in intervalo\ de\ longitud\ máxima\ 2\pi \end{cases}$$

La función

$$T: V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2: T(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big) = (x,y)$$

$$T: V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2: T(r,\theta) = \big(x(r,\theta), y(r,\theta)\big) = (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta)) = (x,y)$$

Definida sobre la franja horizontal del plano $r\theta$

$$D´ = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : r \ge 0 \ \wedge \ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

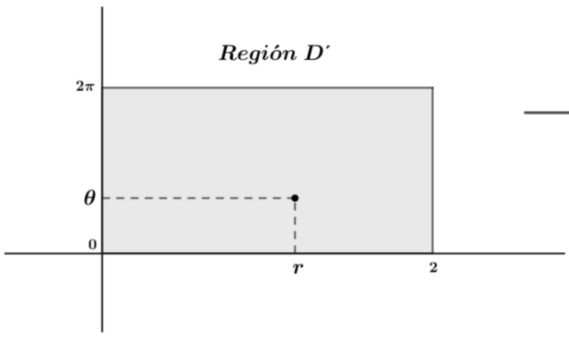
Transforma a $D´$ en el plano x, y completo. Y si bien no se trata de una función **inyectiva**, se pierde la inyectividad en conjuntos de área nula.

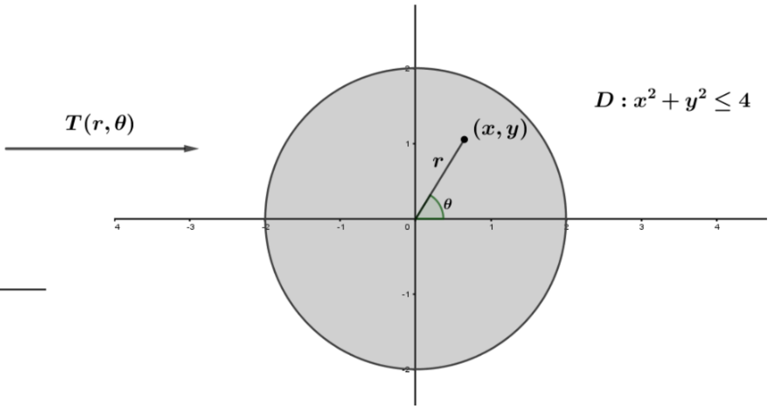
Ejemplo 1. La región $D´$ del plano $r\theta$ asociada a la región circular

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Del plano xy es

$$D´ = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 2 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$





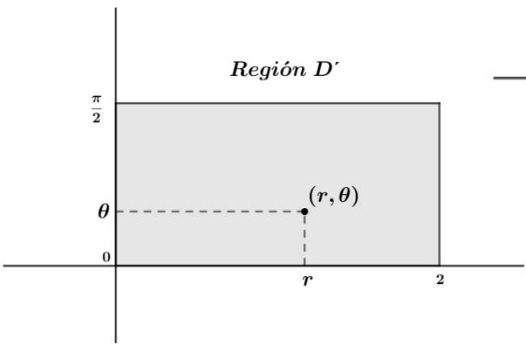
<u>**La función $\boldsymbol{T(r,\theta)}$ transforma la región $\boldsymbol{D´}$ del plano $\boldsymbol{r\theta}$ en la región $\boldsymbol{D}$ del plano $\boldsymbol{xy}$**</u>

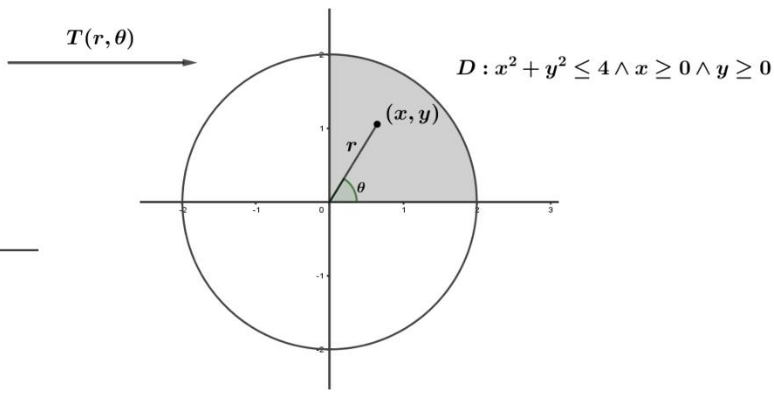
Ejemplo 2. La región $D´$ del plano $r\theta$ asociada a la región circular

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0\} \quad \text{(Recinto original dado)}$$

Del plano xy es

$$D´ = \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 2 \wedge 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\} \quad \text{(Nuevo recinto, hallado)}$$





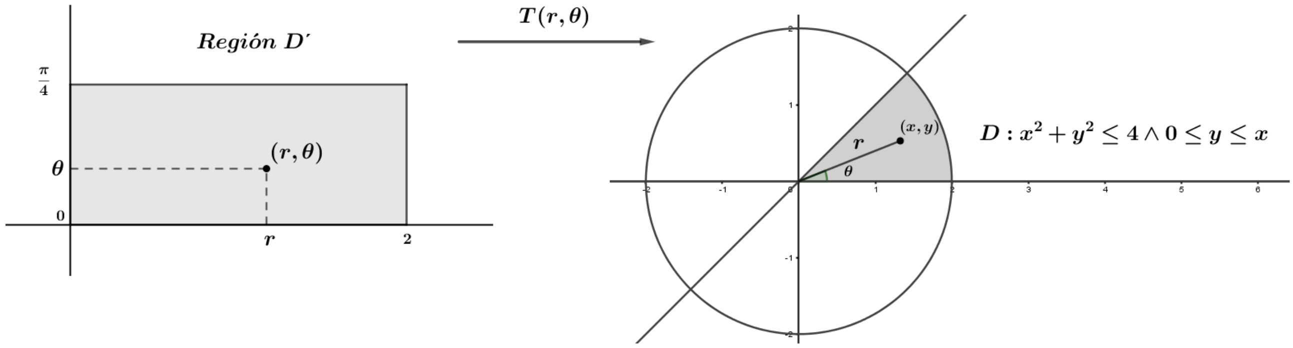
<u>**La función $\boldsymbol{T(r,\theta)}$ transforma la región $\boldsymbol{D´}$ del plano $\boldsymbol{r\theta}$ en la región $\boldsymbol{D}$ del plano $\boldsymbol{xy}$**</u>

Ejemplo 3. La región $D´$ del plano $r\theta$ asociada a la región circular

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \ \wedge \ 0 \leq y \leq x\}$$

Del plano xy es

$$D´ = \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 2 \wedge 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right\}$$



La función $T(r,\theta)$ transforma la región $D´$ del plano $r\theta$ en la región D del plano xy

De una variable, $y = mx + b$, $m = \tan(\theta)$

$$Si\ y = x, \ \ \theta = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

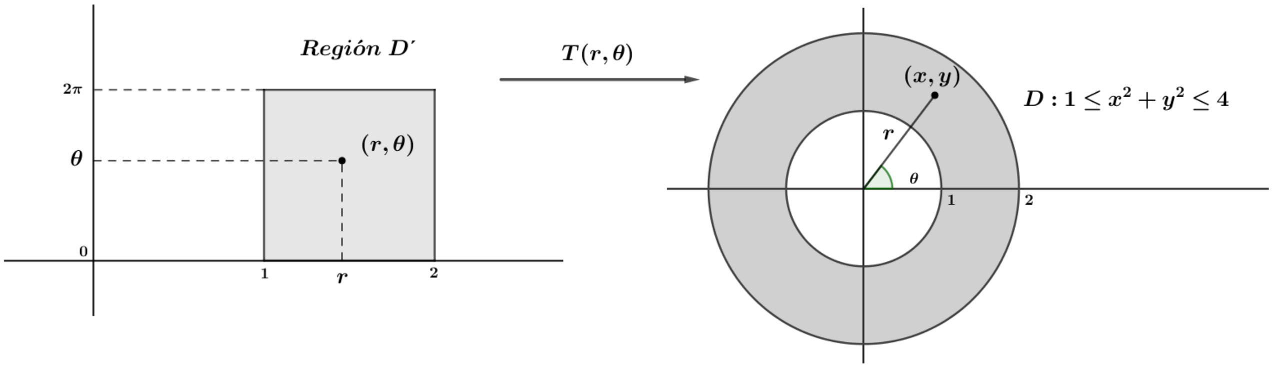
Recuérdese que $\tan^{-1}(x) = \arctan(x) = \text{atan}(x)$, $\tan^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \subseteq \mathbb{R}$

Ejemplo 4. La región $D´$ del plano $r\theta$ asociada a la región circular

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\right\}$$

Del plano xy es

$$D´ = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq r \leq 2 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$



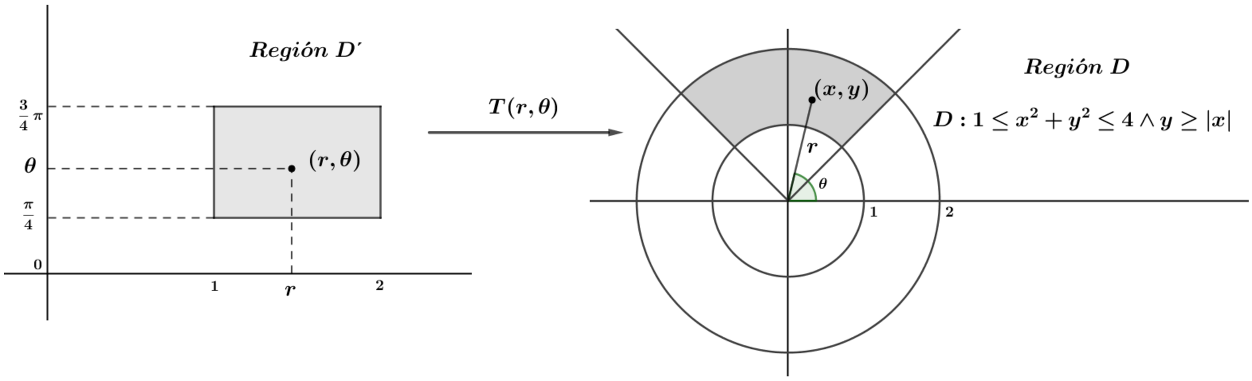
La función $T(r,\theta)$ transforma la región $D´$ del plano $r\theta$ en la región D del plano xy

Ejemplo 5. La región $D´$ del plano $r\theta$ asociada a la región circular

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \wedge y \ge |x|\}$$

Del plano xy es

$$D´ = \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le r \le 2 \;\wedge\; \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3}{4}\pi\right\}$$



La función $T(r, \theta)$ transforma la región $D´$ del plano $r\theta$ en la región D del plano xy

$$y = x, \theta_i = \frac{\pi}{4}; \quad y = -x\,, \;\; \theta_S \overset{?}{=} \tan^{-1}(-1) \overset{Calculadora}{=} -\frac{\pi}{4} \neq \theta_S$$

Resulta $\theta_S = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Jacobiano de la transformación polar

Cuando se trata de calcular integrales aplicando la transformación polar

$$T: V \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2: T(r,\theta) = \big(x(r,\theta), y(r,\theta)\big) = (r\cos(\theta)\,, r\operatorname{sen}(\theta))$$

es necesario considerar su jacobiano. Este resulta ser

$$x(r,\theta) = r\cos(\theta) \qquad y(r,\theta) = r\operatorname{sen}(\theta)$$

$$J_T(r,\theta) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) & \dfrac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \dfrac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) & \dfrac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix}$$

$$J_T(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r\cos^2(\theta) + r\operatorname{sen}^2(\theta) = r\,\overbrace{(\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta))}^{1} = r$$

Es decir que el jacobiano de la transformación polar es

$$J_T(r,\theta) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$$

Así, la fórmula de cambio de variables en integrales dobles, según la transformación polar asume la forma

$$I = \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} f[x(r,\theta), y(r,\theta)] \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| dr\,d\theta$$

$$I = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f[r\cos(\theta)\,, r\operatorname{sen}(\theta)] \cdot \underbrace{|r|}_{r}\, drd\theta$$

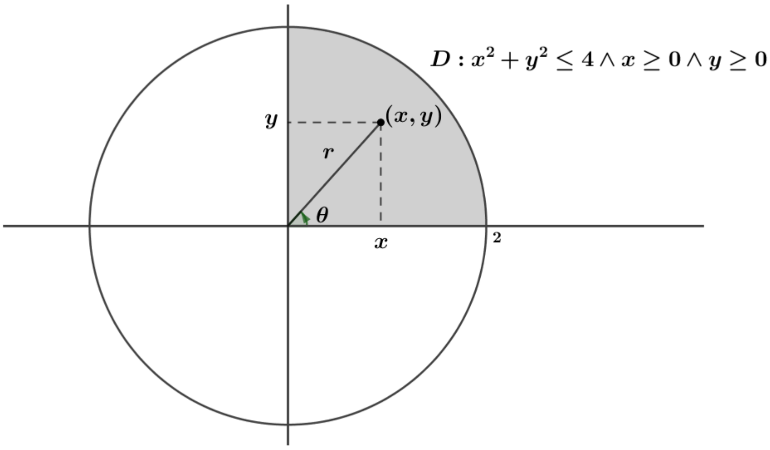
Cálculo de integrales dobles aplicando la transformación polar

Ejemplo 6. Calcular la integral doble

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$$

Sobre la región circular

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\} \quad D: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \end{cases}$$



Recinto de integración D

Del Ejemplo 2, se sabe que la región del plano $r\theta$, asociada a D es

$$D' = \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 2 \wedge 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

Entonces, aplicando la fórmula de cambio de variables en integrales dobles, según la transformación polar, es decir

$$I = \iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_{D'} f[r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta)] \cdot |r|\, drd\theta$$

se tiene

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy = \iint_{D'} \left(x^2(r, \theta) + y^2(r, \theta)\right) \cdot |r|\, drd\theta$$

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy = \iint_{D'} ((r\cos(\theta))^2 + (r\operatorname{sen}(\theta))^2) \cdot |r|\, drd\theta$$

$$I = \iint_D (x^2+y^2)\,dxdy = \iint_{D'} \left(r^2(\cos^2(\theta)+\operatorname{sen}^2(\theta))\right)\cdot |r|\,drd\theta$$

$$I = \iint_D (x^2+y^2)\,dxdy = \iint_{D'} r^2\cdot |r|\,drd\theta$$

$$I = \iint_D (x^2+y^2)\,dxdy = \iint_{D'} r^2\cdot \overbrace{|r|}^{r\geq 0}\,drd\theta = \iint_{D'} r^2\cdot r\,drd\theta$$

$$I = \iint_D (x^2+y^2)\,dxdy = \iint_{D'} r^3\,drd\theta$$

O sea

$$I = \iint_D (x^2+y^2)\,dxdy = \int_{x=0}^{x=2}\left(\int_{y=0}^{y=\sqrt{4-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\right)dx$$

$$= \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\left(\int_{r=0}^{r=2} r^3\,dr\right)d\theta = \left(\int_{r=0}^{r=2} r^3\,dr\right)\left(\int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} d\theta\right)$$

$$I = \iint_D (x^2+y^2)\,dxdy = \left(\frac{r^4}{4}\,\Bigg|_{r=0}^{r=2}\right)\left(\theta\,\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\right) = \left(\frac{2^4}{4}-0\right)\cdot\frac{\pi}{2} = 4\cdot\frac{\pi}{2}$$

Esto quiere decir que

$$I = \iint_D (x^2+y^2)\,dxdy = 2\pi$$

Observación. Como se pudo ver en la resolución anterior, se tiene la relación

$$x^2+y^2 = x^2(r,\theta)+y^2(r,\theta) = r^2(\cos^2(\theta)+\operatorname{sen}^2(\theta)) = r^2$$

Es decir

$$x^2+y^2 = r^2$$

O bien

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

Y esto es natural, ya que la variable polar r, se ha definido como la distancia al origen del par (x, y), la cual se obtiene, precisamente según

$$d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

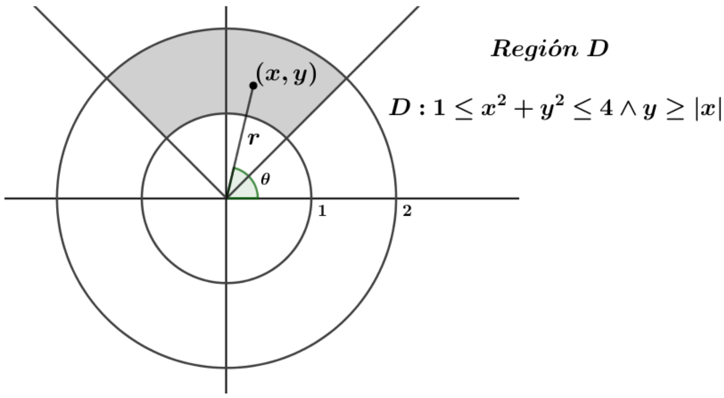
Ejemplo 7. Calcular la integral doble

$$I = \iint\limits_D e^{x^2+y^2}\, dxdy$$

La $\int e^{x^2} dx$, no tiene primitiva elemental, problema de imposibilidad

Sobre la región circular

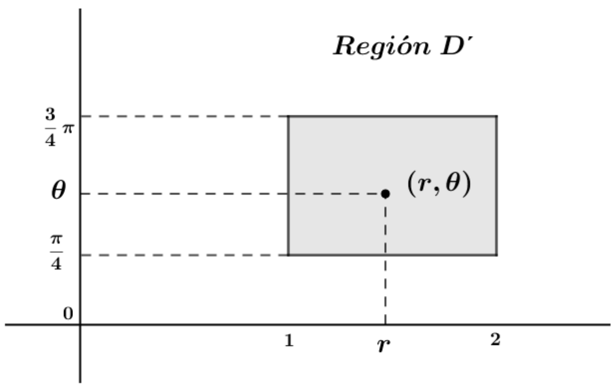
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq |x|\}$$



Región de integración D

Del Ejemplo 5, se sabe que la región del plano $r\theta$, asociada a D es

$$D' = \left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq r \leq 2 \wedge \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi\right\}$$



Región D' del plano $r\theta$ asociada a D

Entonces, aplicando la fórmula de cambio de variables en integrales dobles, según la transformación polar, es decir

$$I = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} f[r\cos(\theta)\,, r\,\mathrm{sen}(\theta)] \cdot |r|\,drd\theta$$

Resulta

$$I = \iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{D'} e^{r^2} \cdot |r|\,drd\theta$$

$$I = \iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{D'} r \cdot e^{r^2}\,drd\theta$$

$$D' = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le r \le 2 \wedge \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3}{4}\pi\right\}$$

Propiedad: $f(x,y) = g(x)\,h(y), \forall (x,y) \in [a,b] \times [c,d]$

$$\int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} \underbrace{g(x)\,h(y)}_{f(x,y)}\,dx\,dy = \left(\int_{x=a}^{b} g(x)\,dx\right)\left(\int_{y=c}^{d} h(y)\,dy\right) \quad (Límites\ integración\ ctes)$$

$$I = \iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy = \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{3}{4}\pi} \left(\int_{r=1}^{r=2} r \cdot e^{r^2}\,dr\right) d\theta = \left(\int_{r=1}^{r=2} r \cdot e^{r^2}\,dr\right)\left(\int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{3}{4}\pi} d\theta\right)$$

$$I = \iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy = \left(\frac{1}{2}e^{r^2} \Big|_{r=1}^{r=2}\right)\left(\theta \Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\theta=\frac{3}{4}\pi}\right) = \frac{1}{2}(e^4 - e)\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{4}\pi\right)$$

$$I = \iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy = \frac{1}{2}(e^4 - e)\frac{1}{2}\pi = (e^4 - e)\frac{\pi}{4}$$

En definitiva, resulta que

$$I = \iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy = (e^4 - e)\frac{\pi}{4}$$