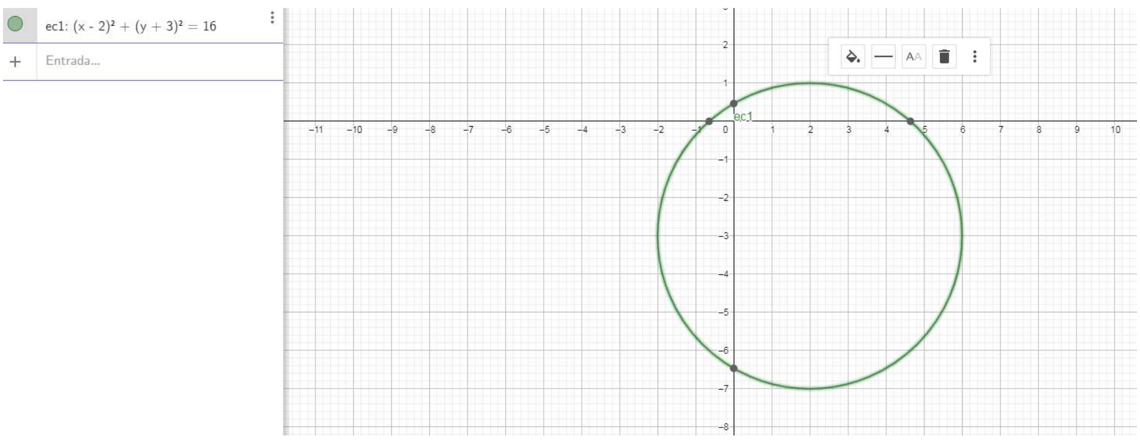
Resolución TP6:

Ejercicio 21 - i

Hallar los puntos más cercano y más lejano al origen la siguiente restricción $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$

Para empezar:

- El enunciado se puede tratar con máximos y mínimos condicionados.
- Ya tenemos $g(x,y) = (x-2)^2 + (y+3)^2 = 0$
- Para $f(x,y)$ podemos usar la distancia entre 2 puntos, siendo el inicial el origen. $f(x,y) = \underset{(x,y)-(0,0)}{\longleftrightarrow} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$
- Como las derivadas de $f(x,y)$son laboriosas se puede sustituir por $f^2(x,y) = x^2 + y^2$ llámese la distancia al cuadrado.
- Vamos a utilizar el método de la función de LaGrange (que nos lleva al método que usábamos hasta ahora)
- El dominio de $f^2(x,y)$ y $g(x,y)$ es todo $\mathbb{R}^2$ por lo que no tenemos restricción alguna para los puntos que hallaremos
- Buscamos puntos del formato $Pc = (x,y)$



Función de LaGrange:

$$F(x,y,\ell) = f^2(x,y) - \ell g(x,y)$$

$$F(x,y,\ell) = x^2 + y^2 - \ell((x-2)^2 + (y+3)^2 - 16)$$

Primeras Derivadas de F(x,y):

$$F_x = 2x - \ell 2(x-2)$$
$$F_y = 2y - \ell 2(y+3)$$
$$F_\ell = -(x-2)^2 - (y+3)^2 + 16$$

Condición de máximos y mínimos:

$$\nabla F(x, y, \ell) = (0,0,0)$$

$2x - \ell 2(x-2) = 0 \wedge 2y - \ell 2(y+3) = 0 \wedge$ $-(x-2)^2 - (y+3)^2 + 16 = 0$

$2x = \ell 2(x-2) \wedge 2y = \ell 2(y+3) \wedge (x-2)^2 + (y+3)^2 - 16 = 0$

Vemos aquí el origen del sistema de ecuaciones para resolver máximos y mínimos condicionados

Resolvemos:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 - 16 = 0 \\ 2x = \ell 2(x-2) \\ 2y = \ell 2(y+3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 - 16 = 0 \\ x = \ell(x-2) \\ y = \ell(y+3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 - 16 = 0 \\ x = x\ell - 2\ell \\ y = y\ell + 3\ell \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 - 16 = 0 \\ x(1-\ell) = -2\ell \\ y(1-\ell) = 3\ell \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 - 16 = 0 \\ x = -2\dfrac{\ell}{(1-\ell)} \\ y = 3\dfrac{\ell}{(1-\ell)} \end{cases}$$

Tomamos $\frac{\ell}{(1-\ell)} = \beta$ con $\ell \neq 1$

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 - 16 = 0 \\ x = -2\beta \\ y = 3\beta \end{cases}$$

$$aplicamos\ \beta\ sobre\ (x-2)^2 + (y+3)^2 - 16 = 0$$

$$(-2\beta - 2)^2 + (3\beta + 3)^2 - 16 = 0$$

$$4\beta^2 + 8\beta + 4 + 9\beta^2 + 18\beta + 9 - 16 = 0$$

$$13\beta^2 + 26\beta - 3 = 0$$

$$\beta = \frac{-26 \pm \sqrt{26^2 - 4 * 13 * (-3)}}{2 * 13}$$

$$\beta = \frac{-26 \pm \sqrt{832}}{26}$$

$$\beta = -1 \pm \frac{4\sqrt{13}}{13}$$

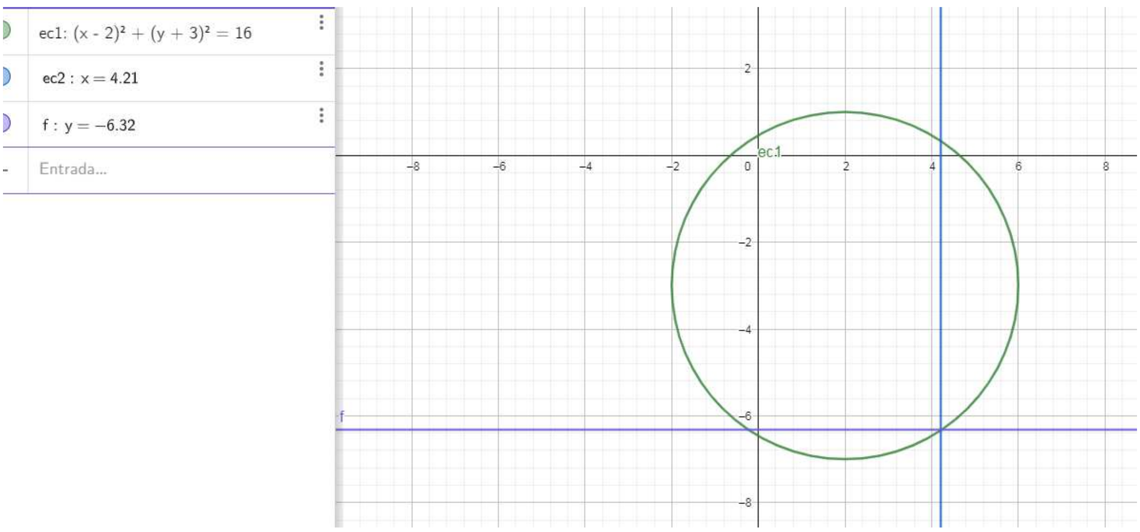
$$\begin{cases} \beta = -1 \pm \dfrac{4\sqrt{13}}{13} \\ x = -2\beta \\ y = 3\,\beta \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} Pc_1 = \left(2 - \dfrac{8\sqrt{13}}{13}, -3 + \dfrac{12\sqrt{13}}{13}\right) \cong (-0.21, 0.32) \\ Pc_1 = (2 + \dfrac{8\sqrt{13}}{13}, -3 - \dfrac{12\sqrt{13}}{13}) \cong (4.21, -6.32) \end{array}$$

Clasificación:

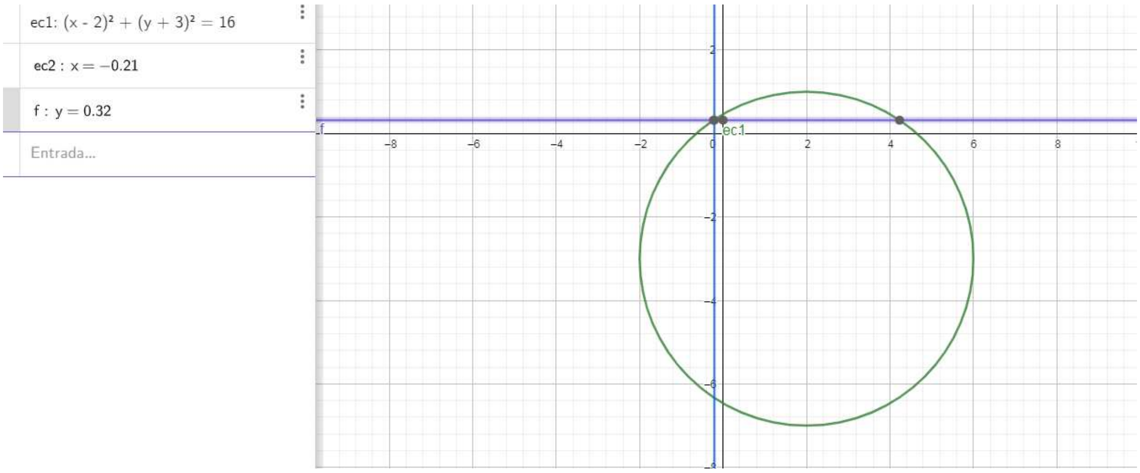
Se evalúan en $f^2(x,y) = x^2 + y^2$ los puntos críticos sin contemplar ℓ ni β

- $f^2(Pc_1) = f^2\left(2 - \frac{8\sqrt{13}}{13}, -3 + \frac{12\sqrt{13}}{13}\right) = 29 - 8\sqrt{13} \cong 0.15$
- $f^2(Pc_2) = f^2\left(2 + \frac{8\sqrt{13}}{13}, -3 - \frac{12\sqrt{13}}{13}\right) = 29 + 8\sqrt{13} \cong 57.84$
- $f(Pc_1) = f\left(2 - \frac{8\sqrt{13}}{13}, -3 + \frac{12\sqrt{13}}{13}\right) = \sqrt{29 - 8\sqrt{13}} \cong 0.39$
- $f(Pc_2) = f\left(2 + \frac{8\sqrt{13}}{13}, -3 - \frac{12\sqrt{13}}{13}\right) = \sqrt{29 + 8\sqrt{13}} \cong 7.6$

Pc_2 es el punto de $g(x,y) = 0$ más lejano al origen con una distancia aproximada de 7.6unidades



Pc_1 el el punto de $g(x,y) = 0$ más cercano al origen con una distancia aproximada de 0.39unidades


ec1: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$
ec2 : $x = -0.21$
f : $y = 0.32$
Entrada...
f
ec1
−8
−6
−4
−2
0
2
4
6
8