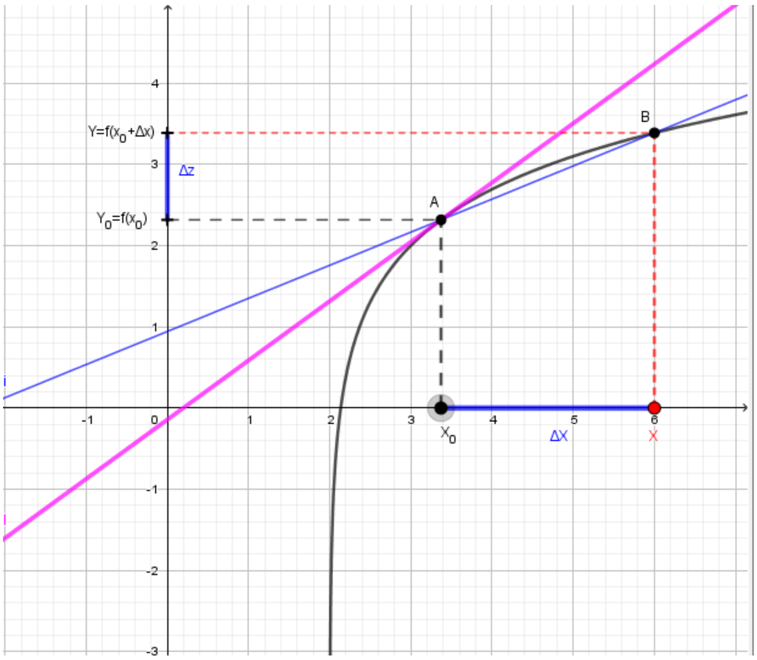
Derivadas parciales. Guía de clase. Com 02-15/4

Recordemos el concepto geométrico y analítico de la derivada de una función escalar de una variable



Derivada función escalar de una variable

Pendiente recta secante por A y B

$$m_S = \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Pendiente recta tangente por A

$$m_T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

O también $\Delta x = h$

$$m_T = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Otra variante

$$m_T = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,) - f(x_0,)}{x - x_0}$$

Ecuación de la recta tangente a la gráfica de f por el punto $A = (x_0, y_0)$.

$$y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$$

Link al applet de geogebra
https://www.geogebra.org/m/dnudgemg

DERIVADA PARCIAL DE UNA FUNCIÓN ESCALAR DE DOS VARIABLES INDEPENDIENTES (x, y), RESPECTO DE LA VARIABLE x

Introducción geométrica

Se tiene una función escalar con dominio en el plano xy

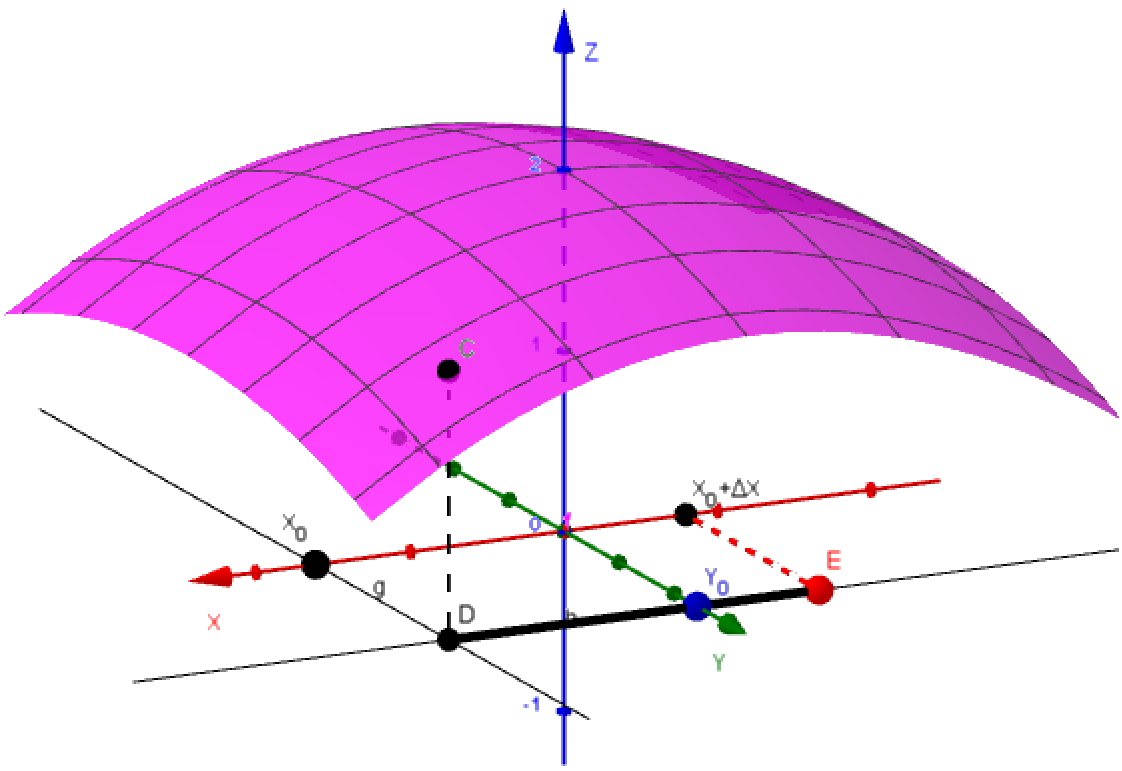
$$f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad U \text{ es un conjunto abierto no vacío}$$

$$z = f(x, y)$$

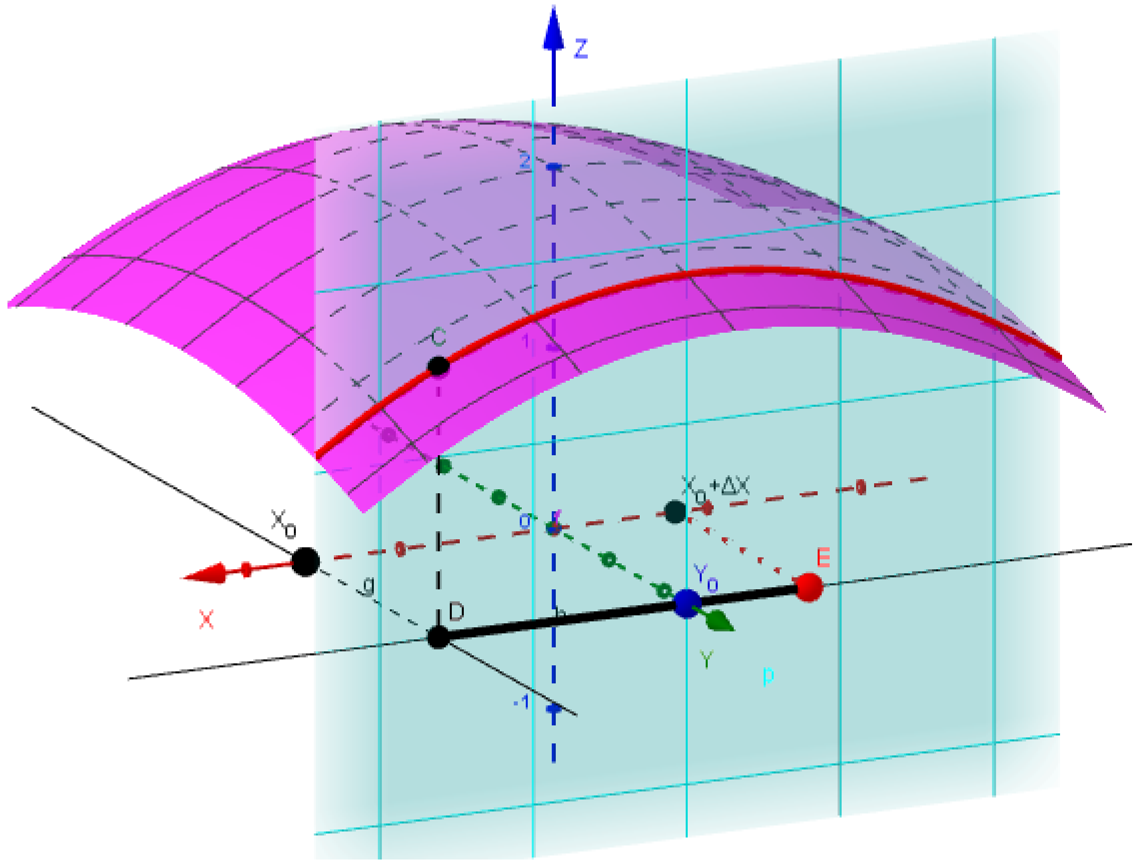
$$(x_0, y_0) \in U$$

En el gráfico, $(x_0, y_0) = D$

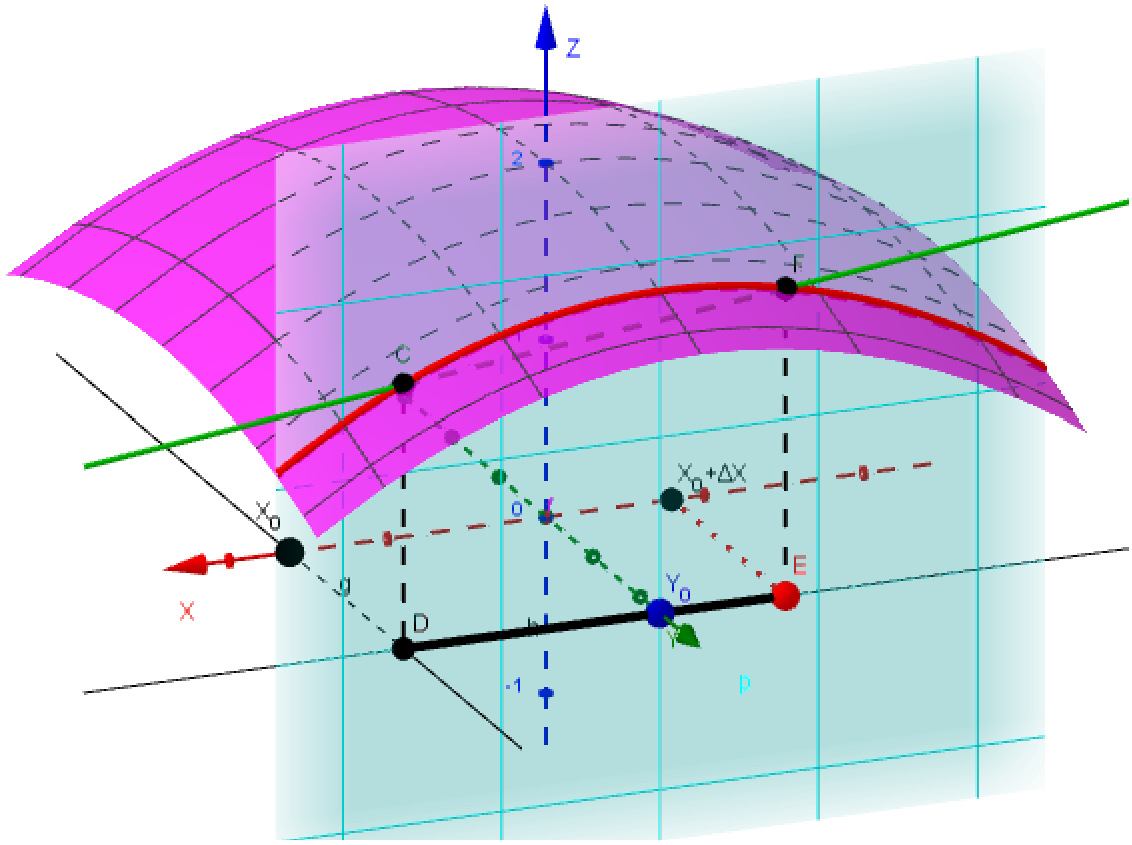
El punto C en la gráfica de f es, $C = \left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right)$



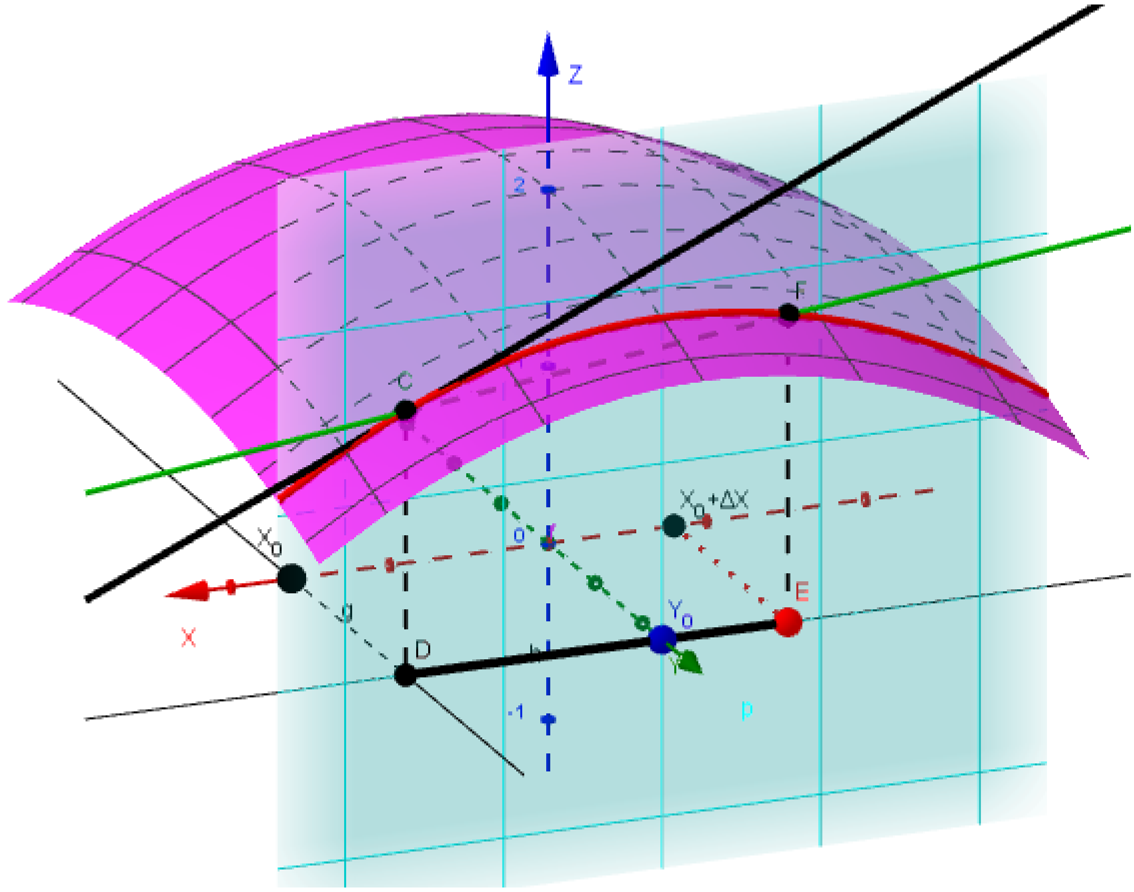
A continuación se graficará el plano de ecuación $y = y_0$, el cual se intersectará con la superficie de la gráfica de la función en la curva de color rojo como se muestra en la siguiente figura



Ahora ubicamos un punto sobre la recta paralela al eje "x" que pasa por los puntos y_0 y D, en el gráfico es el punto rojo E.
A continuación marcamos en la gráfica de f el punto que contiene la imagen de E, el punto F, de esta manera se tienen dos puntos sobre la curva intersección, por estos dos puntos trazaremos la recta secante a la curva intersección, en la figura de abajo, es la recta de color verde.



Finalmente resaltaremos al segmento DE como representativo de Δx, el cual como sabemos de análisis I tenderá a cero para que aparezca en el gráfico la recta tangente por C



Link al applet de geogebra
https://www.geogebra.org/m/v8eabmyc

De esta manera

$$\Delta x = x(E) - x(D)$$

y

$$\Delta f = \Delta z = f\big(x(E), y(E)\big) - f\big(x(D), y(D)\big) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

Nótese que $(x, y) = \big(x(E), y(E)\big) = (x_0 + \Delta x, y_0)$

Resultando como cociente de los incrementos

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = m_S$$

Que corresponde a la pendiente de la recta secante verde.

Aplicando el límite para Δx tendiendo a cero, resulta

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Si este límite existe, lo llamaremos la derivada parcial de f en (x_0, y_0), respecto de la variable x. Corresponde a la pendiente de la recta tangente negra.

$$f_x{}'(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Suele usarse $\Delta \mathrm{x} = h$

DERIVADA PARCIAL DE UNA FUNCIÓN ESCALAR
DE DOS VARIABLES INDEPENDIENTES (x, y),
RESPECTO DE LA VARIABLE y

De manera similar conservando fijo $x = x_0$, e incrementando un Δy al valor y_0, tendremos también un incremento sobre la función pero ahora solamente con respecto al incremento en la variable y

$$\Delta f = \Delta z = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Resultando como cociente de los incrementos

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Aplicando el límite para Δy tendiendo a cero, queda

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Si este límite existe, lo llamaremos la derivada parcial de f en (x_0, y_0), respecto de la variable y.

$$f_y{}'(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Suele usarse $\Delta y = k$