Hallar los puntos de extremo y los extremos de la función $f(x,y) = x.y$, condicionando su variación sobre los puntos de la elipse de ecuación:

E: $g(x,y) = x^2 + 4.y^2 - 8 = 0$

Resolución:

El sistema por resolver es:

$$\bar{\nabla} f(x,y) = \tilde{\lambda}.\bar{\nabla} g(x,y)$$

$$g(x,y) = 0$$

El mismo esta conformado por 2 ecuaciones. La primera de ellas es una ecuación vectorial, que a su vez se amplifica en 2 ecuaciones. La segunda, es una ecuación igualada a cero.

Como se puede apreciar, para que la función $f(x,y)$ denominada función objetivo, alcance valores máximos o mínimos (sí es que los posee) de acuerdo con la condición establecida por la ecuación de restricción o ligadura, se debe cumplir que el gradiente de la función $f(x,y)$ sea una proporción del gradiente de la función condicionante (es decir que sean paralelos).

A partir de este sistema, podemos definir la función Lagrangiana de la siguiente manera, y teniendo en cuenta que $\lambda = -\tilde{\lambda}$

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda.g(x,y)$$

Donde:

$f(x,y)$: $funcion\ objetivo.$

$g(x,y) = 0$ $función\ ligante$

λ: $multiplicdor\ de\ Lagrange$

El sistema de puntos críticos es:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \lambda.\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 & (I) \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \lambda.\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 & (II) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = g(x,y) = 0 & (III) \end{cases}$$

Sea el hessiano limitado de $L(x, y, \lambda)$ en (x_0, y_0, λ_0):

$$H(x_0, y_0, \lambda_0) = \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & -\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, y_0, \lambda_0) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ -\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}$$

$i)$ Si $H(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$, entonces f posee un punto de máximo local condicionado en (x_0, y_0).

$ii)$ Si $H(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$, entonces f posee un punto de mínimo local condicionado en (x_0, y_0).

$iii)$ Si $H(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$, no es posible, con tal información, determinar la naturaleza del punto (x_0, y_0).

Entonces, la función Lagrangiana será:

$$\boldsymbol{L(x, y, \lambda) = x.y + \lambda.(x^2 + 4.y^2 - 8)}$$

El sistema de puntos críticos es:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = y + 2.x.\lambda = 0 & (I) \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = x + 8.y.\lambda = 0 & (II) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = x^2 + 4.y^2 - 8 = 0 & (III) \end{cases}$$

Dividiendo la ecuación (I) con la (II) tenemos:

$y = -2. x. \lambda$

$x = -8. y. \lambda$

$\frac{y}{x} = \frac{x}{4. y} \quad \rightarrow \quad 4y^2 = x^2 \qquad\qquad (IV)$

Reemplazando la ecuación (IV) en la (III), tenemos:

$x^2 + x^2 = 8 \quad \rightarrow$

$2. x^2 = 8 \quad \rightarrow$

$x = \pm\sqrt{4} \quad \rightarrow$

$\boldsymbol{x_1 = -2}$

$\boldsymbol{x_2 = 2}$

Sí $\boldsymbol{x = x_1 = -2}$ reemplazando en la ecuación (IV), nos queda:

$4y^2 = x^2 \rightarrow \quad 4. y^2 - x^2 = (2. y - x). (2. y + x) = 0 \rightarrow$

$(2. y - x_1). (2. y + x_1) = (2. y + 2). (2. y - 2) = 0 \rightarrow$

Entonces para que la ecuación de arriba se anule, debe ocurrir que:

$\boldsymbol{y_1 = -1}$

$\boldsymbol{y_2 = 1}$

Con lo cual obtenemos los siguientes puntos críticos:

$\boldsymbol{P_1 = (x_1, y_1) = (-2, -1)}$

$\boldsymbol{P_2 = (x_1, y_2) = (-2, 1)}$

Sí $\boldsymbol{x = x_2 = 2}$ reemplazando en la ecuación (IV), nos queda:

$$4y^2 = x^2 \rightarrow \quad 4.y^2 - x^2 = (2.y - x).(2.y + x) = 0 \; \rightarrow$$

$$(2.y - x_2).(2.y + x_2) = (2.y - 2).(2.y + 2) = 0 \rightarrow$$

Entonces para que la ecuación de arriba se anule, debe ocurrir que:

$$\boldsymbol{y_3 = -1}$$

$$\boldsymbol{y_4 = 1}$$

Con lo cual obtenemos los siguientes puntos críticos:

$$\boldsymbol{P_3 = (x_2, y_3) = (2, -1)}$$

$$\boldsymbol{P_4 = (x_2, y_4) = (2, 1)}$$

Finalmente calculamos el multiplicador de Lagrange, reemplazando los puntos en la ecuación (I), por ejemplo, nos queda:

$$P_1 = (-2\,;\, -1)$$

$$y_1 + 2.x_1.\lambda_1 = 0 \quad \rightarrow$$

$$-1 + 2.(-2).\lambda_1 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\boldsymbol{\lambda_1 = -\frac{1}{4}}$$

$$P_2 = (-2\,;\, 1)$$

$$y_2 + 2.x_2.\lambda_2 = 0 \quad \rightarrow$$

$$1 + 2.(-2).\lambda_2 = 0 \quad \rightarrow$$

$$\boldsymbol{\lambda_2 = \frac{1}{4}}$$

$P_3 = (2\ ;\ -1)$

$y_3 + 2.x_3.\lambda_3 = 0 \quad \rightarrow$

$-1 + 2.2.\lambda_1 = 0 \quad \rightarrow$

$\boldsymbol{\lambda_3 = \frac{1}{4}}$

$P_4 = (2\ ;\ 1)$

$y_4 + 2.x_4.\lambda_4 = 0 \quad \rightarrow$

$1 + 2.2.\lambda_1 = 0 \quad \rightarrow$

$\boldsymbol{\lambda_4 = -\frac{1}{4}}$

Finalmente, la solución del sistema será:

$\tilde{P}_1 = (x_1\ ;\ y_1\ ;\lambda_1) = \left(-2\ ;\ -1\ ;\ -\frac{1}{4}\right)$

$\tilde{P}_2 = (x_2\ ;\ y_2\ ;\ \lambda_2) = \left(-2\ ;\ 1\ ;\ \frac{1}{4}\right)$

$\tilde{P}_3 = (x_3\ ;\ y_3\ ;\lambda_3) = \left(2\ ;\ -1\ ;\ \frac{1}{4}\right)$

$\tilde{P}_4 = (x_4\ ;\ y_4\ ;\ \lambda_4) = \left(2\ ;\ 1\ ;\ -\frac{1}{4}\right)$

Ahora clasificaremos los puntos hallados, utilizando la matriz Hessiana limitada:

$$H(x_0, y_0, \lambda_0) = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & -\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \\ -\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0, y_0, \lambda_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x_0, y_0, \lambda_0) \\ -\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}$$

Sabiendo que:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = y + 2.x.\lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = x + 8.y.\lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = x^2 + 4.y^2 - 8 = 0$$

El Hessiano Limitado queda:

$$H(x_0, y_0, \lambda_0) = \begin{vmatrix} 0 & -2.x & -8.y \\ -2.x & 2.\lambda & 1 \\ -8.y & 1 & 8.\lambda \end{vmatrix}$$

Evaluando en : $\tilde{P}_1 = \left(-2\,;\,-1\,;\,-\frac{1}{4}\right)$

$$H\left(-2, -1, -\frac{1}{4}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 4 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 8 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad \rightarrow$$

$$H\left(-2,-1,-\frac{1}{4}\right)=0.\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}-4.\begin{vmatrix}4 & 1\\ 8 & -2\end{vmatrix}+8.\begin{vmatrix}4 & -\frac{1}{2}\\ 8 & 1\end{vmatrix}\rightarrow$$

$$H\left(-2,-1,-\frac{1}{4}\right)=0-4.(-8-8)+8.(4+4)\rightarrow$$

$$\boldsymbol{H(\widetilde{P}_1)=H\left(-2,-1,-\frac{1}{4}\right)=128>0\quad\rightarrow\quad M\acute{a}ximo}$$

Evaluando en $\widetilde{P}_2=\left(-2\ ;\ 1\ ;\ \frac{1}{4}\right)$, tenemos:

$$H\left(-2,1\,,\frac{1}{4}\right)=\begin{vmatrix}0 & 4 & -8\\ 4 & \frac{1}{2} & 1\\ -8 & 1 & 2\end{vmatrix}\quad\rightarrow$$

$$H\left(-2\,,1,\frac{1}{4}\right)=0.\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}-4.\begin{vmatrix}4 & 1\\ -8 & 2\end{vmatrix}+(-8).\begin{vmatrix}4 & \frac{1}{2}\\ -8 & 1\end{vmatrix}\rightarrow$$

$$\boldsymbol{H(\widetilde{P}_2)=H\left(2,1,-\frac{1}{4}\right)=-128<0\quad\rightarrow\quad M\acute{\imath}nimo}$$

Evaluando en $\widetilde{P}_3=\left(2\ ;\ -1\ ;\ \frac{1}{4}\right)$, tenemos:

$$H\left(2,-1\,,\frac{1}{4}\right)=\begin{vmatrix}0 & -4 & 8\\ -4 & \frac{1}{2} & 1\\ 8 & 1 & 2\end{vmatrix}\quad\rightarrow$$

$$H\left(2\,,-1,\frac{1}{4}\right)=0.\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}-(-4).\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 8 & 2\end{vmatrix}+8.\begin{vmatrix}-4 & \frac{1}{2}\\ 8 & 1\end{vmatrix}\rightarrow$$

$$\boldsymbol{H(\widetilde{P}_3)=H\left(2,-1,\frac{1}{4}\right)=-128<0\quad\rightarrow\quad M\acute{\imath}nimo}$$

Evaluando en $\widetilde{P}_4 = \left(2\ ;\ 1\ ;\ -\frac{1}{4}\right)$, tenemos:

$$H\left(2, 1\ , -\ \frac{1}{4}\right) = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -8 \\ -4 & -\dfrac{1}{2} & 1 \\ -8 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad \rightarrow$$

$$H\left(2\ , 1, -\frac{1}{4}\right) = 0. \begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2} & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (-4). \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -8 & -2 \end{vmatrix} + (-8). \begin{vmatrix} -4 & \dfrac{1}{2} \\ 8 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\boldsymbol{H\left(\widetilde{P}_4\right) = H\left(2, 1, -\frac{1}{4}\right) = 128 > 0} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{M\acute{a}ximo}$$

Los extremos son:

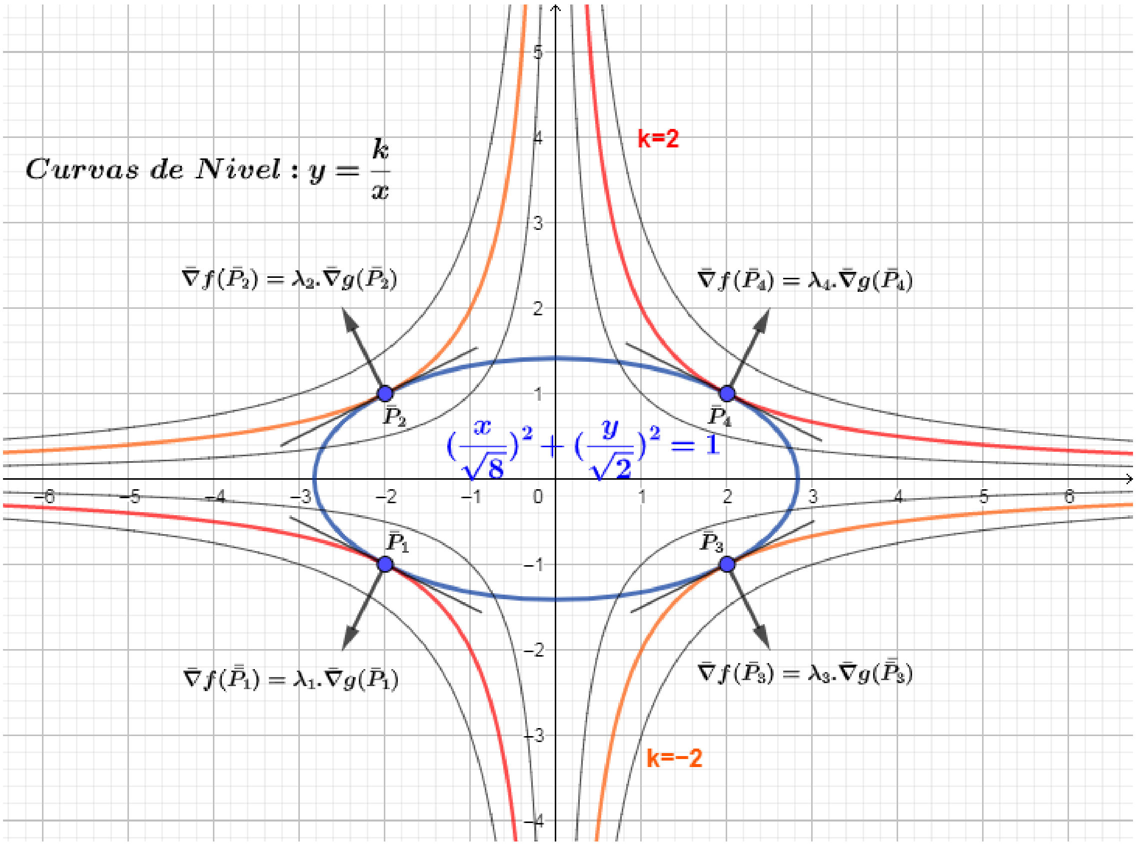
$$f(\bar{P}_1) = f(-2\ , -1) = 2$$

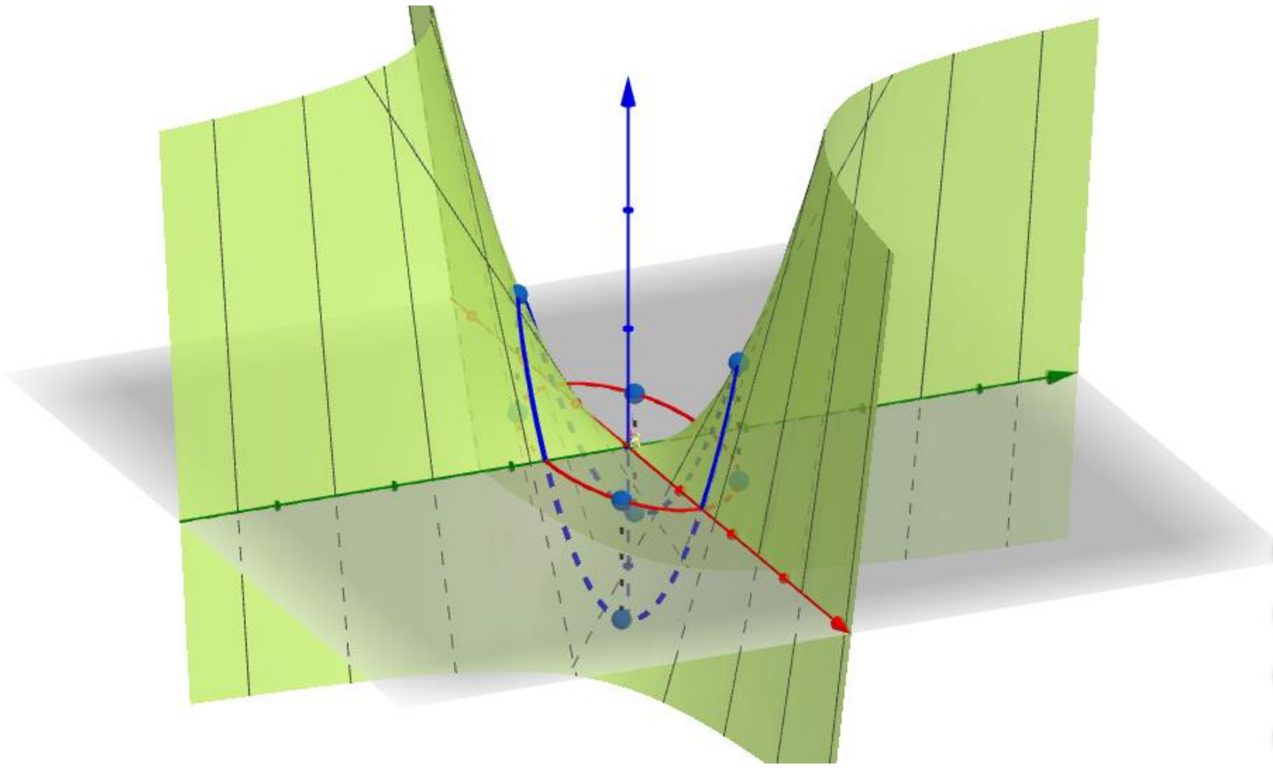
$$f(\bar{P}_2) = f(-2\ , 1) = -2$$

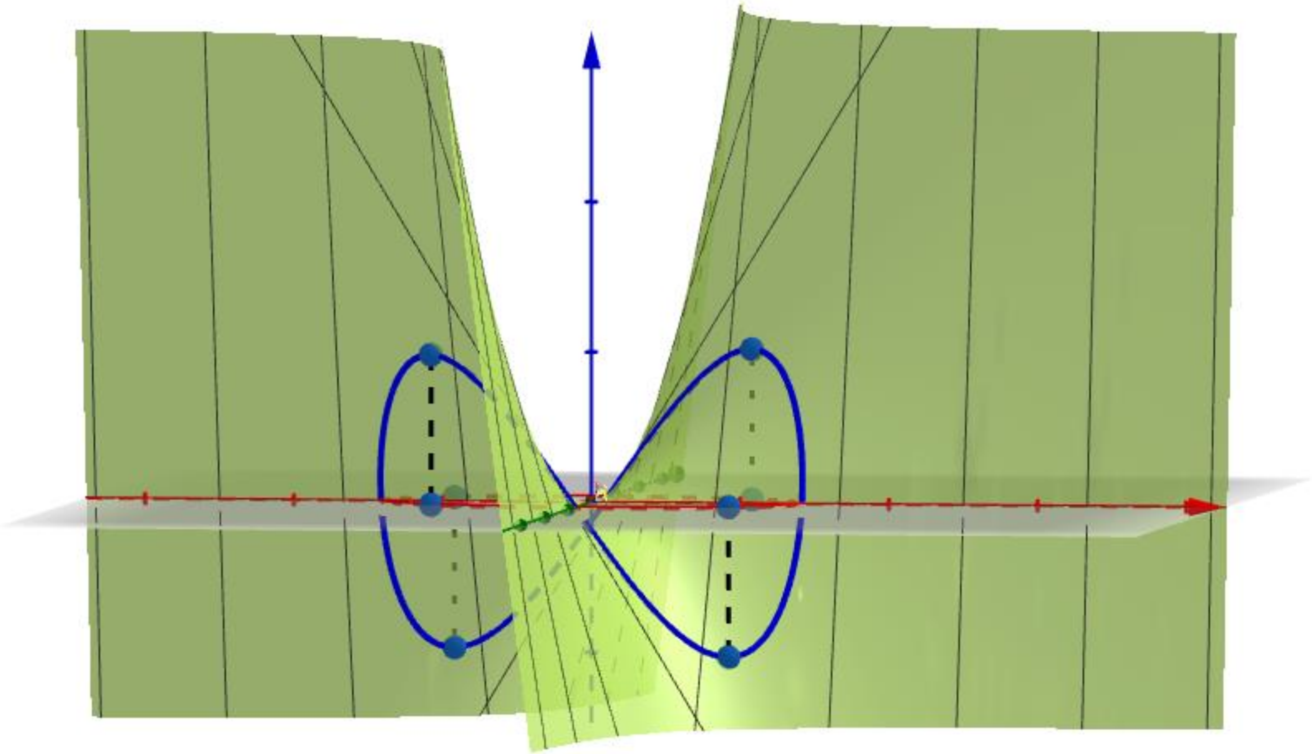
$$f(\bar{P}_3) = f(2\ , -1) = -2$$

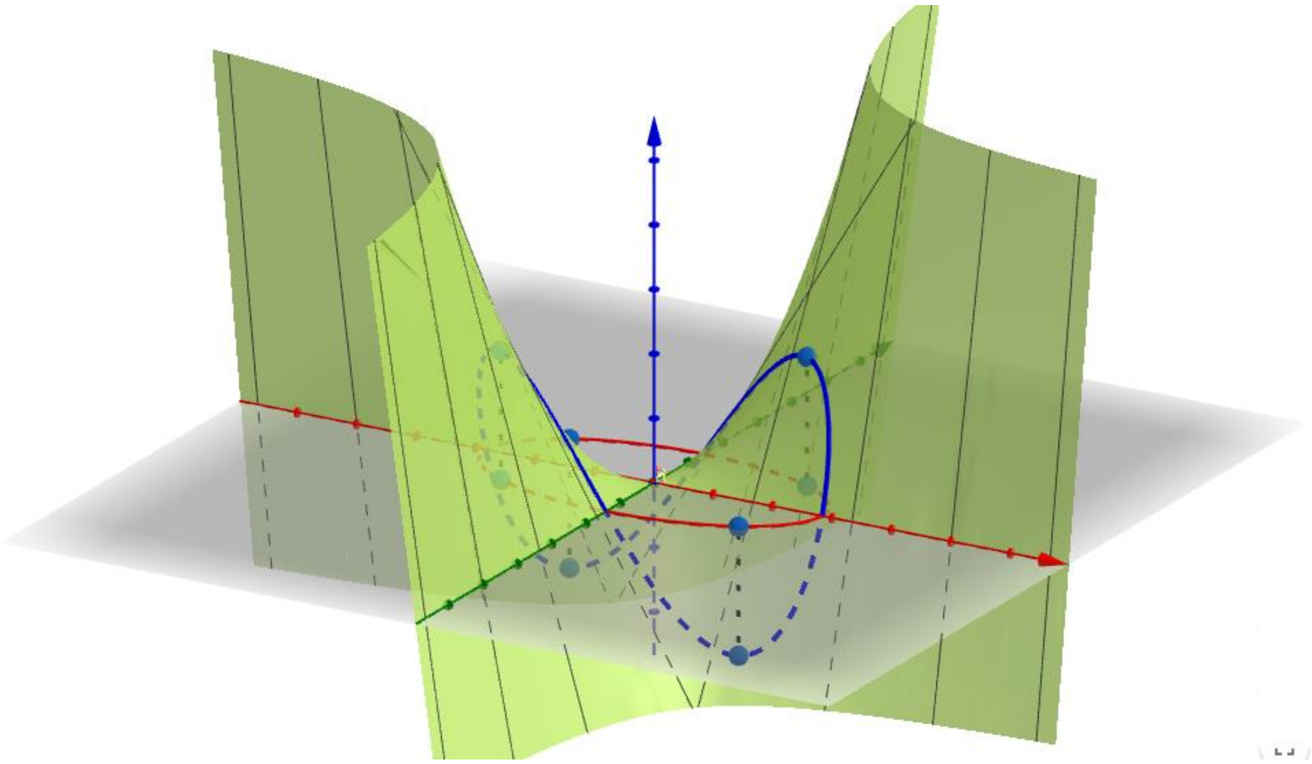
$$f(\bar{P}_4) = f(2\ , 1) = 2$$

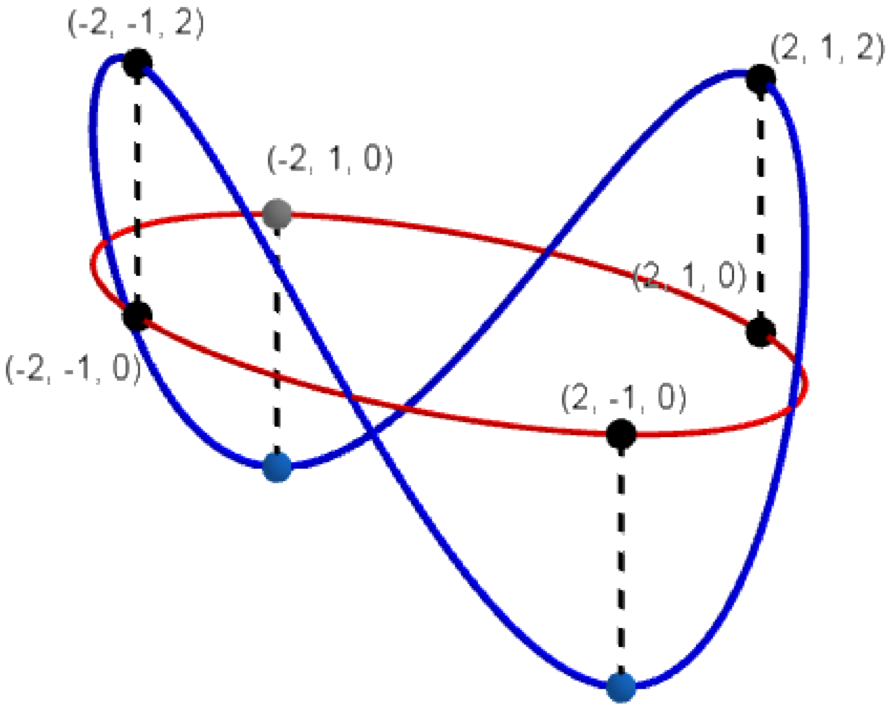
Gráficamente

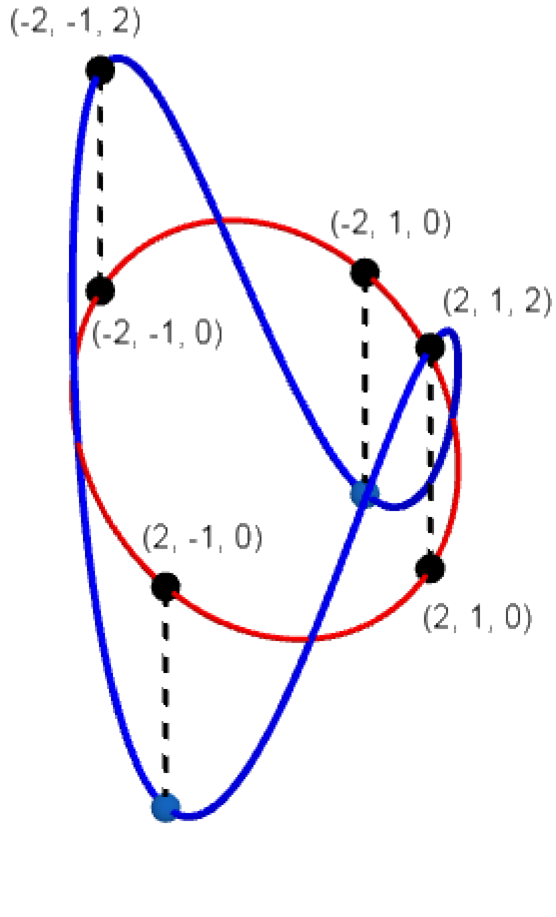









(-2, -1, 2)
(2, 1, 2)
(-2, 1, 0)
(2, 1, 0)
(-2, -1, 0)
(2, -1, 0)


(-2, -1, 2)
(-2, 1, 0)
(2, 1, 2)
(-2, -1, 0)
(2, -1, 0)
(2, 1, 0)