Matemática Discreta

CLASE 12

Ing.Marcela Bellani
UNLAM | FLORENCIO VARELA 1903 .B1754.SAN JUSTO.BUENOS AIRES

En esta clase se desarrollarán los siguientes temas:

-Razonamiento y reglas de inferencia
Técnicas de demostración.

-Principio de inducción completa.

Para todas las clases contamos con la ayuda del sitio de la cátedra http://discretaunlam.net.ar donde encontrarás videos, ejercicios, explicaciones, autoevaluaciones de todos los temas de Matemática Discreta.

Razonamiento deductivo válido

Un razonamiento es un conjunto finito de proposiciones p_i, llamadas premisas, y una proposición q, llamada conclusión, respecto de la cual se afirma que deriva de las premisas.

Notación

$$\begin{array}{l} p_1 \\ P_2 \\ . \\ . \\ . \\ \underline{p_n} \\ q \end{array}$$

Un razonamiento es deductivo si y sólo si las premisas son evidencias de la verdad de la conclusión, es decir, si p_1, p_2… p_n, son verdaderas, entonces q verdadera.

De un razonamiento no se dice que es V o F, sino que es válido o no.

Un razonamiento deductivo es válido cuando el condicional cuyo antecedente es la conjunción de las premisas, y el consecuente es la conclusión, es tautológico.

Llamaremos *FALACIA* a un razonamiento que no es válido.

Llamamos regla de inferencia, a todo esquema válido de razonamiento, independientemente de la V o F de las proposiciones componentes. De este modo, toda regla de inferencia es tautológica. Su objetivo es abreviar las demostraciones.

A continuación, se detallarán las reglas de inferencia de mayor utilización en las demostraciones matemáticas:

Leyes de inferencias

Modus Ponens (MP)

Si $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

Notación clásica

p
$\underline{p \rightarrow q}$
$\therefore q$

Ejemplo

Juan estudia Matemática Discreta

Si Juan estudia Matemática Discreta, toma mate

∴ Juan toma mate

Para demostrar que una ley de inferencia es válida basta con armar su tabla de verdad y verificar que es tautología. En este caso será:

p	**q**	**$(p \rightarrow q)$**	**$((p \rightarrow q) \wedge p)$**	**$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$**
V	V	V	V	V
F	V	V	F	V
V	F	F	F	V
F	F	V	F	V

Modus Tollens (MT)

Si $((p \rightarrow q) \wedge \neg q \quad \rightarrow \neg p$

Notación clásica

$$\begin{array}{l} P \rightarrow q \\ \underline{\neg\, q} \\ \therefore \neg p \end{array}$$

Ejemplo

Si Juan estudia Matemática Discreta, toma mate

Juan no toma mate

∴ Juan no estudia matemática discreta

Conjunción

p	"*Juan es cocinero*"
q	"*Pedro es policía*"
$p \wedge q$	"*Juan es cocinero y Pedro es policía*"

Dadas dos premisas separadas, mediante la conjunción ∧, podemos unirlos en una sola premisa.

Adición

Dado un enunciado inicial p: "Juan es cocinero" podemos agregarle otro enunciado por medio de la conjunción como, por ejemplo, q:" Juan es policía"

$$\begin{array}{c} \underline{\quad p} \\ \therefore P \vee q \end{array}$$

Simplificación

Si disponemos de un enunciado formado por dos premisas unidas por una conjunción, podemos hacer de los dos miembros dos enunciados afirmados por separado.

$p \wedge q$	"*Tengo una manzana y tengo una pera*"
p	"*Tengo una manzana*"

ó

$p \wedge q$	"*Tengo una manzana y tengo una pera*"
q	"*Tengo una pera*"

Silogismo hipotético (SH)

$p \rightarrow q$	Si Juan estudia Matemática discreta, toma mate
$q \rightarrow r$	Si Juan toma mate, come bizcochitos
$\therefore p \rightarrow r$	Si Juan estudia Matemática discreta, come bizcochitos

Dados dos implicaciones, de las cuales, el consecuente de la una sea el antecedente de la otra (el mismo enunciado), podemos construir una nueva implicación cuyo antecedente sea el de aquella implicación cuya consecuencia sea el antecedente de la otra implicación, y cuyo consecuente sea el de ésta última, cuyo antecedente era consecuencia del primero.

Silogismo disyuntivo (DS)

$p \lor q$	$p \lor q$
$\neg q$	$\neg p$
$\therefore p$	$\therefore q$

Dada una disyunción entre dos enunciados, $p \lor q$,"Juan estudia Matemática Discreta o va al cine" y la negación de alguno de ellos, por ejemplo, "Juan no va al cine". Se puede concluir como premisa el otro enunciado "Juan estudia Matemática Discreta".

Resumiendo:

REGLAS DE INFERENCIA		
1. *Modus Ponens (MP)* $\dfrac{p \Rightarrow q \qquad p}{\therefore q}$ $\qquad$ $\dfrac{\sim p \Rightarrow q \qquad \sim p}{\therefore q}$	**2. *Modus Tollens (MT)*** $\dfrac{p \to q \qquad \sim q}{\therefore \sim p}$ $\qquad$ $\dfrac{\neg p \to \neg q \qquad q}{\therefore p}$	**3. *Silogismo hipotético (SH)*** $\dfrac{p \to q \qquad q \to r}{\therefore p \Rightarrow r}$
4. *Silogismo Disyuntivo* $\dfrac{p \vee q \qquad \sim q}{\therefore p}$ $\qquad$ $\dfrac{p \vee q \qquad \sim p}{\therefore q}$	**5. *Adición*** $\dfrac{p}{\therefore p \vee q}$	**6. *Conjunción*** $\dfrac{p \qquad q}{\therefore p \wedge q}$
7. *Simplificación* $\dfrac{p \wedge q}{\therefore p}$		

⌦*Ejemplo 1*

Justificar el razonamiento:

1.1

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ (p \wedge q) \Rightarrow r \\ \underline{r \Rightarrow s \qquad\quad} \\ s \end{array}$$

Paso	*Razonamiento*
1. $p \wedge q$	Hipótesis
2. $(p \wedge q) \Rightarrow r$	Hipótesis
3 .r	Modus Ponens usando los pasos 1 y 2
4. $r \Rightarrow s$	Hipótesis
5.s	Modus Ponens usando los pasos 3 y 4

1.2

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \ \vee \ r \\ \underline{\neg\, r \qquad} \\ \quad q \end{array}$$

Paso	Razonamiento
1. $\neg p \vee r$	Hipótesis
2. $\neg r \Rightarrow \neg p$	Ley de implicación para el paso 1
3. $\neg r$	Hipótesis
4. $\neg p$	Modus Ponens usando los pasos 2 y 3
5. $p \vee q$	Hipótesis
6. $\neg p \Rightarrow q$	Ley de implicación para el paso 5
7. q	Modus Ponens usando los pasos 4 y 6

⌧*Ejemplo 2*

Muestra que las proposiciones "Si me mandas un mail, entonces terminaré el TP de Lógica". "Si no me mandas un Mail, me iré a dormir temprano" y "Si me voy a dormir temprano, me levanto descansado" llevan a la conclusión "Si no termino el TP de Lógica, me levantaré descansado

"Si me mandas un mail, entonces terminaré el TP de Lógica."

$p \Rightarrow q$

"Si no me mandas un Mail, me iré a dormir temprano"

$\neg p \Rightarrow r$

"Si me voy a dormir temprano, me levanto descansado"

$r \Rightarrow s$

"Si no termino el TP de Lógica, me levantaré descansado"

$\neg q \Rightarrow s$

$$\begin{array}{r} p \Rightarrow q \\ \neg p \Rightarrow r \\ \underline{r \Rightarrow s} \\ \neg q \Rightarrow s \end{array}$$

Paso	*Razonamiento*
1. p ⇒ q	Hipótesis
2.¬q ⇒ ¬p	Contrarrecíproca de 1.
3. ¬p ⇒ r	Hipótesis
4.¬q ⇒ r	Silogismo hipotético usando los pasos 2 y 3
5. r ⇒ s	Hipótesis
6.¬q ⇒ s	Silogismo hipotético usando los pasos 4 y 5

Además de las leyes de inferencia existen otros métodos para demostrar que un razonamiento es válido: Método Directo y Método de la contradicción.

Método Directo

Se va comprobando que efectivamente, desde las hipótesis establecidas se puede arribar a la conclusion dada, en forma univoca.

⌧*Ejemplo 3*

Se parte de alguna de las premisas, desandando el camino, puesto que se sabe que siempre son verdaderas, hasta obtener el valor de verdad de cada proposición y el de la conclusión:

P1: $\overbrace{p \Rightarrow (q \wedge r)}^{V}$ Si p es V, q y r serán V. Por lo tanto, P2 será F. Eso no puede suceder,

P2: $-(q \wedge r)$ luego p es F.

C: $-p$ Entonces, la conclusión es V.

Método de la contradicción.

Es el método conocido como “por el absurdo”.

Una de las condiciones que debe verificar el conjunto de axiomas, dado para la teoría, es la *consistencia*. Es decir, a partir de ellos no pueden derivarse, por aplicación de las reglas lógicas, *contradicciones.* Esto constituye la fundamentación del método de demostración por reducción al absurdo, el cual puede enunciarse así:

"Si al suponer que la proposición **-** *P es un teorema, se puede establecer como teorema una proposición contradictoria, entonces el supuesto* **-** *P es falso, es decir, la proposición P es un teorema".*

El mismo comienza suponiendo que la conclusión es Falsa. Se empieza a “subir” hacia las premisas, utilizando el valor obtenido para comprobar la veracidad de las mismas. Si el razonamiento es válido, se dará una “contradicción”, generando que el valor de una de las premisas resulte falso.

⌦*Ejemplo 1*

P1: $p \Rightarrow (q \wedge r)$

P2: $-(q \wedge r)$

C: $-p$ ⟶ 1) Se supone –p Falsa, por lo tanto, p es V.

2) Si p es V, (q ∧ r) debe ser V, ya que la P1 es V. Por lo tanto, q y r son V
3) Al ir a la P2, resulta que la misma con los valores anteriores, resulta ser F→ABSURDO!!!! , pues la P2 es V por hipótesis.
4) Por lo tanto, el razonamiento es Válido.

Inducción completa

Un ejemplo de inducción matemática que puede ayudarnos a entender cómo funciona este principio es considerar una fila infinita de fichas de dominó colocadas de pie y suficientemente próximas como ilustra la imagen. Si cae la primera ficha hacia atrás inmediatamente cae el siguiente entonces podemos afirmar que se caerán todas las fichas en un determinado momento. Es decir, sea la proposición que afirma que la ficha n se cae. Si cae la primera ficha, y si siempre que la ficha n se caiga también se cae la ficha siguiente entonces se caerán todas las fichas.

La inducción es el proceso de obtener un resultado general a partir del análisis de casos particulares.

Se sabe que una determinada afirmación es verdadera para algunos casos particulares y surge la pregunta. ¿Dicha afirmación sigue siendo verdadera para los infinitos números naturales restante?

Existen muchas afirmaciones que sólo son válidas para un número finito de casos y en consecuencia son falsas para un número infinito de situaciones. Sin embargo, podemos encontrar proposiciones (afirmaciones) que son verdaderas para todos los números naturales.

Por ejemplo la proposición p= $n^2 \geq 1$; $\forall\, n \in \mathbb{N}$ es Verdadera para todos los números naturales pero la proposición $q = n \geq 4$; $\forall\, n \in \mathbb{N}$ es Falsa pues $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $n < 4$, como es el caso de $n = 1$.

La técnica de demostración por inducción matemática es utilizada para probar que proposiciones de la forma $\forall x{:}P(n)$ enunciadas sobre el conjunto de los números naturales son verdaderas , o sea si la proposición p está dada para cada $n \in \mathbb{N}$ por una afirmación $p(n)$, probar que $p(n)$ es Verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una demostración por la técnica de inducción matemática consiste de dos pasos:

1) Paso base: para n = primer elemento del conjunto considerado

Se demuestra la validez de la proposición p evaluada para el primer elemento del conjunto. Puede ser cero o cualquier número natural dependiendo del punto de partida o condición inicial del problema que se está demostrando.

2) Paso de inducción:

Consiste en demostrar que la implicación P (h) $\rightarrow$P (h + 1) es verdadera.

Se llama **Hipótesis inductiva** a **P (h),** es decir la proposición o afirmación evaluada para $n=h$**.** Se asume que la hipótesis inductiva es Verdadera.

Se llama **Tesis inductiva** a **P (h + 1)**, es decir la proposición o afirmación evaluada para para $n=h+1$.

Apoyados en la suposición de validez de la proposición P (h) se demuestra la validez de la proposición P (h + 1).

Cuando se cumplen los dos pasos de la técnica por inducción matemática, entonces se ha demostrado que la proposición P(*n*) es verdadera para todo número natural *n*, es decir, se ha demostrado que $\forall x$: P(*n*) es verdadero.

Antes de comenzar con la resolución de ejercicios vamos a introducir la notación sigma para representar la adición de términos en donde se sigue un comportamiento definido. Esta notación para la suma, donde se utilizará la letra griega Σ, se define como:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

siendo m y n n números enteros tales que $m \leq n$.

El símbolo i es el índice de la suma; m es el límite inferior del índice y n es el límite superior del índice.

⌧*Ejemplo 1*

Calcular el valor exacto de la siguiente suma

$$\sum_{i=3}^{6} (2i+3)$$

Es claro que el primer sumando se calcula al evaluar en i =3 y corresponde al valor 2·3 + 3 = 9. Al evaluar en i = 4, se obtiene el valor 11, y siguiendo el proceso para los seis sumandos, se tiene que:

$$\sum_{i=3}^{6} (2i+3) = 9 + 11 + 13 + 15 = 37$$

En el caso particular en que m = 1 nos queda la suma de los primeros n términos de la sucesión a_n y se escribe como:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Ahora sí comenzamos con los ejercicios de inducción completa

⌧ *Ejemplo 1*

Probar utilizando la técnica de demostración por inducción matemática que:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{(n(n+1))^2}{2} \qquad \text{para } n \in \mathbb{Z}^+$$

Para el desarrollo de la demostración considerar que se tiene la proposición

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{(n(n+1))^2}{4} \qquad \text{para } n \in \mathbb{Z}^+$$

1)Paso base, *n* = 1

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 = 1$$

$$\frac{(n(n+1))^2}{4} = \frac{(1(1+1))^2}{4} = 1$$

Como se obtiene el mismo resultado en la sumatoria de términos y en la fórmula que es la solución de la sumatoria entonces la proposición *p* (1) es verdadera y la demostración continúa en el paso inductivo.

2)Paso inductivo

Hipótesis inductiva, n = h

$$P(h) = \sum_{i=1}^{h} i^3 = \frac{(h(h+1))^2}{4} \qquad V(p(h)) = v$$

Se asume que la proposición *p* (h) es verdadera

Tesis inductiva, n = h + 1

$$P(h+1) = \sum_{i=1}^{h+1} i^3 = \frac{(h+1)(h+2))^2}{4}$$

Demostración

$$\sum_{i=1}^{h+1} i^3 = \sum_{i=1}^{h} i^3 + (h+1)^3 = \underbrace{\frac{(h(h+1))^2}{4}}_{\text{por hipótesis inductiva}} + (h+1)^3 = \frac{h^2.(h+1)^2 + 4(h+1)^3}{4} =$$

$$= \frac{(h+1)^2(h^2+4(h+1))}{4} = \frac{(h+1)^2(h^2+4h+1))}{4} = \frac{(h+1)^2(h+2)^2}{4}$$

Como se cumple la igualdad, la proposición P (h + 1) es verdadera, por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{(n(n+1))}{2}^2 \text{ para } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ es verdadera}$$

Ahora veamos un ejemplo en el cual hay que demostrar por inducción completa una proposición que no tiene sumatoria.

⌧Ejemplo 2

Demostrar por inducción matemática que $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para el desarrollo de la demostración considerar que se tiene la proposición

$P(n) = 7^n - 2^n = 5 \cdot q$, para $q \in \mathbb{N}$.

1) Paso base, n = 1

$P(1) = 7^1 - 2^1 = 7 - 2 = 5$

la proposición p (1) es verdadera porque al evaluar $7^1 - 2^1$ se obtiene como resultado el número 5 el cual es múltiplo de 5.

2) Paso inductivo

Hipótesis inductiva, n = h

$P(h) = 7^h - 2^h = 5 \cdot m$, para $m \in Z^+ \rightarrow 7^h = 5 \cdot m + 2^h$

Se asume que la proposición p (h) es verdadera.

Tesis inductiva n = h + 1

$P\ (h + 1) = 7^{h+1} - 2^{h+1} = 5 \cdot r$

Demostración

$7^{h+1} - 2^{h+1}$ $= 7 \cdot 7^{h} - 2 \cdot 2^{h} = 7.\ (5\ m + 2^{h}) - 2 \cdot 2^{h} = 7.5.m + 7.\ 2^{h} - 2 \cdot 2^{h} =$

Reemplazando por hipótesis inductiva

$= 7.5.m + 2^{h}\ (7 - 2) = 7.5.m + 2^{h}\ .5 = 5.\ (7 + 2^{h})$ **$= 5.\ r$** siendo $r = 7 + 2^{h}$

Como se cumple la igualdad, la proposición *p* (h +1) es verdadera, por lo tanto

$P(n) = 7^{n} - 2^{n} = 5 \cdot q$, para $q \in \mathbb{N}$ es verdadera

⌦*Ejemplo 3*

Si $n \in \mathbb{Z}^{+}$ y n es impar, pruébese que $8 \mid n^{2} - 1$
Utilizamos el principio de inducción matemática.

1) Paso base, n = 1

En efecto, para cada a entero, se verifica que $a \mid 0$ luego, en particular, $8 \mid 0$, es decir,

$8 \mid 1^{2} - 1$ de aquí que la proposición sea cierta para n = 1.

2) Paso inductivo

Hipótesis inductiva, n = h

$P\ (h) = 8 \mid h^{2} - 1$ $\qquad V\ (P\ (h)) = v$

Tesis inductive, $n = h + 2$

$$P(h + 2) = 8 \mid (h + 2)^2 - 1$$

Demostración

$\underline{(h + 2)^2 - 1} = h^2 + 4h + 4 - 1 = h^2 - 1 + 4(h + 1)$

pero h es impar, luego h + 1 es par y por tanto, existirá $q \in Z$ tal que $h + 1 = 2q$ de donde $4(k + 1) = 8q$, es decir, $4(k + 1)$ es un múltiplo de 8, y

$$\underline{(h + 2)^2 - 1} = h^2 - 1 + 8q \Rightarrow$$

Reemplazando por la hipótesis inductiva $(8 \mid h^2 - 1)$

$(h + 2)^2 - 1 = 8k + 8q \Rightarrow (h + 2)^2 - 1 = 8(k + q) = 8t$ con $k, q, t \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto, $8 \mid n^2 - 1$ es verdadera

Sigamos con más ejemplos.

⌧*Ejemplo 4*

Probar utilizando el principio de inducción completa $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(4i-3)(4i+1)} = \frac{n}{4n+1} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) Paso base, $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{(4i-3)(4i+1)} = \frac{1}{(4.1-3)(4.1+1)} = \frac{1}{1.(4.1+1)}$$

y $$\frac{n}{4n+1} = \frac{1}{4.1+1}$$

Por lo tanto, P (1) es verdadera

2) Paso inductivo

Hipótesis inductiva, n = h

$$P(h) = \sum_{i=1}^{h} \frac{1}{(4.i - 3).(4.i + 1)} = \frac{h}{4.h + 1}$$

Tesis inductiva, n = h + 1

$$P(h + 1) = \sum_{i=1}^{h+1} \frac{1}{(4.i - 3).(4.i + 1)} = \frac{h + 1}{4.(h + 1) + 1} = \frac{h + 1}{4.h + 5}$$

Demostración

$$\sum_{i=1}^{h+1} \frac{1}{(4.i - 3).(4.i + 1)} = \sum_{i=1}^{h} \frac{1}{(4.i - 3).(4.i + 1)} + \frac{1}{[4.(h+1)-3][4.(h+1)+1]}$$

$$= \frac{h}{4.h + 1} + \frac{1}{(4.h + 1)(4.h + 5)} = \frac{h.(4.h+5) + 1}{(4.h + 1)(4.h + 5)} = \frac{4h^2 + 5h + 1}{(4.h + 1)(4.h + 5)} =$$

$$= \frac{4.(h + 1).(h + 1/4)}{(4.h + 1)(4.h + 5)} = \frac{(h + 1)(4.h + 1)}{(4.h + 1)(4.h + 5)} = \frac{h + 1}{4.h + 5}$$

Por lo tanto, P (h+1) es verdadera entonces la proposición P(n) es verdadera para todos los Naturales.

⌦*Ejemplo 5*

$$1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} i.(i+1).(i+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

1) Paso base, n = 1

$$\sum_{i=1}^{1} i.(i+1).(i+2) = 1(1+1)(1+2) = 2.3 = 6$$

y

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} = \frac{1.\ (1+1)\ (1+2)\ (1+3)}{4} = \frac{2.3\ .4}{4} = 6$$

Por lo tanto, P (1) es verdadera

2) Paso inductivo

Hipótesis inductiva, n = h

$$P(h) = \sum_{i=1}^{h} i.(i+1).(i+2) = \frac{h(h+1)(h+2)(h+3)}{4}$$

Tesis inductiva, n = h + 1

Para n = h + 1

$$P(h+1) = \sum_{i=1}^{h+1} i.(i+1).(i+2) = \frac{(h+1)(h+2)(h+3)(h+4)}{4}$$

Demostración

$$\sum_{i=1}^{h+1} i.(i+1).(i+2) = \sum_{i=1}^{h} i.(i+1).(i+2) + (h+1).(h+2).(h+3) =$$

$$= \frac{h(h+1)(h+2)(h+3)}{4} + (h+1).(h+2).(h+3) =$$

$$= \frac{h(h+1)(h+2)(h+3) \quad + 4. \ (h+1).(h+2).(h+3)}{4} =$$

$$= \frac{(h+1).(h+2).(h+3).(h+4)}{4} =$$

Por lo tanto, P (h+1) es verdadera entonces la proposición P(n) es verdadera para todos los Naturales.

⌦Ejemplo 6

Probar por el principio de inducción completa:

$\forall$ n, a, d $\in \mathbb{N}$

$$a+(a + d)+(a + 2d)+(a +3d) + \ldots + (a + nd) = \frac{(n + 1)(2a +nd)}{2}$$

$$P(n) = \text{"}a + \sum_{i=1}^{n} (a + id) = \frac{(n + 1)(2a +nd)}{2}\text{"} \quad \forall\ n, a, d \in \mathbb{N}$$

1) Paso base, n = 1

$$a + \sum_{i=1}^{1} (a + id) = a +(a + 1d) = a +(a + d) = 2a +d$$

y

$$\frac{(n + 1)(2a +nd)}{2} = \frac{(1 + 1)(2a +1d)}{2} = 2a + d$$

Por lo tanto, P (1) es verdadera

2) Paso inductivo

Hipótesis inductiva, n = h

$$P(h) = \text{"}a + \sum_{i=1}^{h} (a + id) = \frac{(h + 1)(2a +hd)}{2}\text{"}$$

Tesis inductiva, n = h + 1

$$P(h+1) = \text{“}a + \sum_{i=1}^{h+1} (a + id) = \frac{(h + 2)\,[2a + (h + 1)d]}{2}\text{”}$$

Demostración

$$a+\sum_{i=1}^{h+1}(a+id)=a+\sum_{i=1}^{h}(a+id)+[a+(h+1)d]=\frac{(h+1)\,(2a+hd)}{2}+[a+(h+1)d] =$$

$$=\frac{(h+1)\,(2a+hd)+2[a+(h+1)d]}{2}=\frac{(h+1)2a+(h+1)\,hd+2\,a+2\,(h+1)d}{2} =$$

$$=\frac{2a(h+1+1)+(h+1)(hd+2d)}{2}=\frac{2a(h+2)+(h+1)d(h+2)}{2}=\frac{(h+2)[2a+(h+1)d]}{2}$$

Por lo tanto, P (h+1) es verdadera entonces la proposición P(n) es verdadera para todos los Naturales.

⌦ *Ejemplo 7*

Probar utilizando inducción completa que $\forall\ n \in \mathbb{N}$

$x^n - y^n$ es divisible por $x - y$

$$P(n) = x^n - y^n = (x - y).\, q\ ;\ q \in Z \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

1) Paso base, n = 1

$$x^n - y^n = (x - y).\, q \Rightarrow \exists\ 1 \in Z \,/\, (x - y) \mid x^n - y^n$$

Por lo tanto, P (1) es verdadera

2) Paso inductivo

Hipótesis inductiva, n = h

$P(h) =$ " $x^h - y^h = (x - y).\ q_1$ "; $q_1 \in \mathbb{Z}$

Tesis inductiva, n = h + 1

$P(h + 1) =$ " $x^{h+1} - y^{h+1} = (x - y).\ q_2$ "; $q_2 \in \mathbb{Z}$

Demostración

$x^{h+1} - y^{h+1} = x^h .x - y^h . y = (1)$

Despejando de la hipótesis inductiva $x^h = (x - y).\ q_1 + y^h$ **y reemplazando (1)**

$= [(x - y).\ q_1 + y^h].x - y^{h.} y =$

$= (x - y).\ q_1 .x + y^h .x - y^{h.} y =$

$= (x - y).\ q_1 .x + (x - y).\ y^h =$

$= (x - y).\ q_1 .x + (x - y).\ y^h =$

$= (x - y).[\ q_1 .x + y^h\ ] =$

$= (x - y).\ q;\ q \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto, P (h+1) es verdadera entonces la proposición P(n) es verdadera para todos los Naturales.

⌧*Ejemplo 8*

$2^{4n} - 1$ es divisible por 15

$P(n) = “2^{4n} - 1 = 15.q”; q \in Z \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Paso base, n = 1

$P(1) = “2^{41} - 1 = 15.q” \Rightarrow \exists 1 \in Z / 15 | 15$

Por lo tanto, P (1) es verdadera

2) Paso inductivo

Hipótesis inductiva, n = h

$P(h) = “2^{4h} - 1 = 15.q_1”; q_1 \in \mathbb{Z}$

Tesis inductiva, n = h + 1

$P(h+1) = “2^{4(h+1)} - 1 = 15.q_2”; q_2 \in \mathbb{Z}$

Demostración

$2^{4(h+1)} - 1 = 2^{4h}.2^{4} - 1 = (1)$

Despejando de la hipótesis inductiva $2^{4h} = 15.q_1 + 1$ **y reemplazando (1)**

$= (15.q_1 + 1).16 - 1 = 15.q_1.16 + 1.16 - 1 = 15.q_1.16 + 15 =$

$= 15.(q_1.16 + 1) = 15.q_2;\ q_2 \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto, P (h+1) es verdadera entonces la proposición P(n) es verdadera para todos los Naturales.

⌧*Ejemplo 9*

$3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7

$$P(n) = \text{“}3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7.\ q\text{”};\ q \in Z \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

1) Paso base, n = 1

$$P(1) = 3^{\,2\ 1+1} + 2^{\,1+2} = 7.\ q \Rightarrow \exists\ 5 \in Z\ /\ 7 \mid 35$$

Por lo tanto, P (1) es verdadera

2) Paso inductivo

Hipótesis inductiva, n = h

$$P(h) = \text{“}3^{2h+1} + 2^{h+2} = 7.\ q_1\text{”};\ q_1 \in \mathbb{Z}$$

Tesis inductiva, n = h + 1

$$P(h+1) = \text{“}3^{2(h+1)+1} + 2^{(h+1)+2} = 7.\ q_2\text{”};\ q_2 \in \mathbb{Z}$$

Demostración

$3^{2(h+1)+1} + 2^{(h+1)+2} = 3^{2h+2+1} + 2^{h+3} = 3^{2h+1}.\ 3^{2} + 2^{h+2}\ .2 =$ (1)

Despejando de la hipótesis inductiva $3^{2h+1} = 7.\ q_1 - 2^{h+2}$ **y reemplazando (1)**

$$= (7.\ q_1 - 2^{h+2}).\ 3^{2} + 2^{h+2}\ .2 = 7.\ q_1 .9 - 2^{h+2}.\ 9 + 2^{h+2}\ .2 =$$

$= 7. q_1 .9 - 2^{h+2}. 7 = 7. (q_1 .9 - 2^{h+2}) = 7. q_2$ "; $q_2 \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto, P (h+1) es verdadera entonces la proposición P(n) es verdadera para todos los Naturales

⌧*Ejemplo 10*

Probar por inducción que si $n \geq 10$

$$n^3 + 3 n^2 + 2 n \text{ es divisible por 3.}$$

$P(n) =$ "$n^3 + 3 n^2 + 2 n = 3. q$ "; $q \in Z \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Paso base, n = 10

$P (10) = (10)3 + 3. (10)2 + 2. 10 = 3.q \Rightarrow \exists\, 440 \in \mathbb{Z} / 3 \mid 440$

Por lo tanto, P (10) es verdadera

2) Paso inductivo

Hipótesis inductiva, n = h

$P(h) =$ "$h^3 + 3 h^2 + 2 h = 3. q_1$ "; $q_1 \in \mathbb{Z}$

Tesis inductiva, n = h + 1

$P (h + 1) =$ "$(h + 1)^3 + 3 (h + 1)^2 + 2 (h + 1) = 3. q_2$ "; $q_2 \in \mathbb{Z}$

Demostración

$(h + 1)^3 + 3 (h + 1)^2 + 2 (h + 1) = h^{3\,+} 3. h^2 .1 + 1 + 3 (h + 1)^2 + 2 (h + 1) =$

$= h^{3\,+} 3. h^2 .1 +3.h.1+ 1 + 3 (h + 1)^2 + 2 h + 2 =$

$= (h^{3} + 3 . h^{2} + 2h) + h + 3 (h + 1)^{2} + 2 h + 3$ (1)

Reemplazando por la hipótesis inductiva: $h^{3} + 3 h^{2} + 2 h = 3 . q_{1}$
en (1)

$= 3 . q_{1} + 3 (h + 1)^{2} + 3 h + 3 = 3.(q_{1} + (h + 1)^{2} + h + 1) = 3 . q_{2}$;

$q_{2} \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto, P (h+1) es verdadera entonces la proposición P(n) es verdadera para todos los Naturales.

Para finalizar con el tema del "Técnicas de demostración" te proponemos que ingreses al sitio de la cátedra " https://discretaunlam.net.ar " para releer el tema.
Luego comienza a hacer los ejercicios de Razonamiento e Inducción Completa de la guía de ejercicios para el segundo parcial. Y finaliza haciendo la autoevaluación "Técnicas de demostración"
Tené en cuenta que todas las actividades que realices forman parte del seguimiento académico que hará tu tutor.