ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA 1- DIIT

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2020

Jefa de cátedra: Lic. Gabriela Ocampo

MÓDULO 3: TRABAJO PRÁCTICO

GEOMETRÍA ANALÍTICA

RECTAS EN EL PLANO

1) Hallar la ecuación vectorial, paramétricas, simétricas y explícita, si existe de la recta que cumple las condiciones pedidas en cada caso:

a) contiene al punto A=(3;1) y es paralela al vector $\vec{v}$ = (1 ; -2)

b) pasa por A=(3;2) y B =(1;-1)

2) Hallar la ecuación vectorial de la recta en cada caso:

a) Pasa por Q= (1 ; -2) y es paralela a la recta de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 1 - 3.\alpha \\ y = 4 - \alpha \end{cases}$

b) Pasa por H = (-4 ; -5) y es paralela al eje y.

c) Es ortogonal a la recta $\begin{cases} x = 3.\alpha + 1 \\ y = -\alpha + 1 \end{cases}$ y tiene raíz en x = -3.

3) Encontrar la ecuación vectorial de la recta r que contiene al punto P = (4;-6) y es perpendicular a la recta r' que pasa por (8;2) y es paralela al vector (3 ; 7)

4) Hallar el valor del parámetro "**a**" para que se cumpla la condición indicada en cada caso:

a) las rectas 14 x + 12 y -6 = 0 y - 7 x + a y + 12 = 0 sean paralelas

b) las rectas de ecuaciones 3x-4y+9 = 0 , y, – 8 x + ay + 10 = 0 sean perpendiculares

5) Dados el punto P=(3,-2) y el segmento de recta determinado por los puntos Q(-1,2) y R(2,4), determinar las diversas ecuaciones correspondientes a la recta determinada por los puntos P y M , siendo M el punto medio del segmento $\overline{QR}$, graficar.

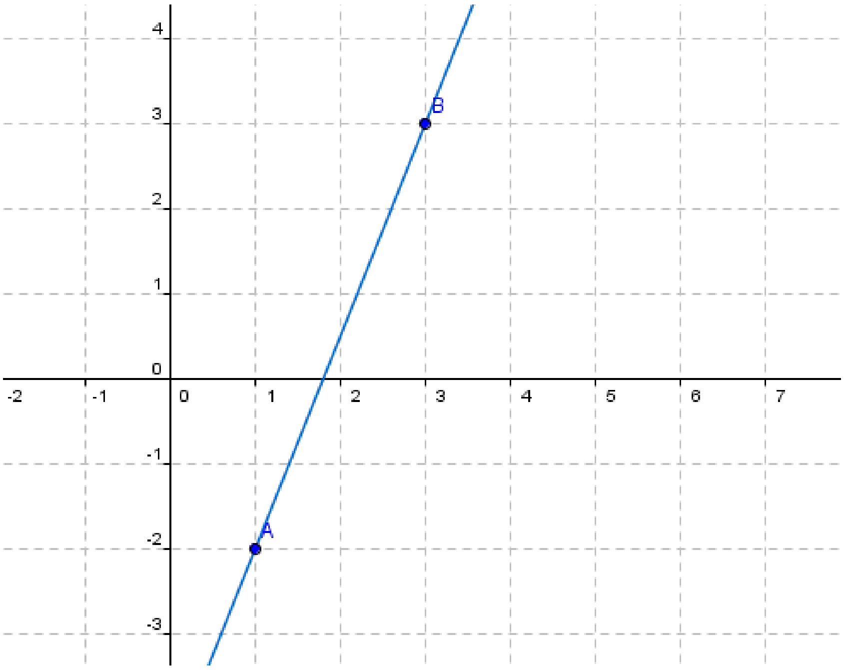
6) Dados los puntos A=(3; –1), B=(–1; 5) y P=(-2; 0)

a) Escribir la ecuación vectorial de la recta r_1 que pasa por A y B. ¿Es única la expresión de esa recta? Justificar.

b) Hallar $Q \in R^2$/ el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea equivalente al vector $\overrightarrow{BA}$. Representarlos gráficamente.

c) ¿Es cierto que la recta r_2 que pasa por P y está orientada por el vector (2; –3) es paralela a r_1? Justificar.
d) Escribir la ecuación de una recta r_3 que sea perpendicular a r_1

7) La recta s se encuentra graficada a continuación:



a) Indicar dos vectores directores para s, uno de norma 1 y otro de tamaño 2; y de sentidos contrarios.
b) Indicar la ecuación vectorial de una recta que sea perpendicular a s; y corte al eje x en el mismo punto que lo hace la recta s.

RECTAS EN EL ESPACIO

8) Construir los distintos tipos de ecuaciones de la recta *r* que pasa por el punto Q de coordenadas (-2;5;0) y es paralela al vector $\vec{v}$= (-2;5;1).

9) Para cada una de las siguientes rectas, indicar un vector director y tres puntos que pertenecen a ellas. Graficarlas.

a) $r: \quad \frac{x-5}{2}=\frac{y+7}{6}=z+3$ b) $r:\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=2-\frac{1}{3}\lambda \\ z=-4\lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in R$ c) $r:\begin{cases} x=\frac{1}{3}z+2 \\ y=2z-3 \end{cases}$

10) Hallar las ecuaciones vectoriales, paramétricas, simétricas y reducidas de la recta que:
a) contiene a los puntos H(2;1;3) y L(1,2;-3).
b) Es paralela al vector $\bar{v}=2\breve{i}-\breve{j}+\breve{k}$ y pasa por el punto (2;2;1)

c) Es paralela a $r: \quad \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{6}=\frac{4z-10}{8}$ y pasa por T(4;1;-6)

d) Es paralela al eje x y pasa por el punto medio del segmento cuyos extremos son (2;5;-3) y (4;-3;2)

e) pasa por el punto (2,1,-1) y es perpendicular a las rectas :

$r_1:(x,y,z)=(11,-11,2)+\gamma.(3,-4,1)$; $\quad r_2:\frac{x-7}{-5}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{2}$

11) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto A (3;-1; -4) y por el punto de intersección de las rectas $r_1:\begin{cases} x=1+2.\gamma \\ y=4+2.\gamma \\ z=\frac{7}{2}+\gamma \end{cases}$ y $r_2: x-3=\frac{y-8}{3}=\frac{z}{-4}$

12) Indicar la posición relativa de los siguientes pares de rectas. Si son secantes, calcular las coordenadas del punto de intersección.

a) $r_1:\begin{cases} x=2-\gamma \\ y=1+\gamma \\ z=-2\gamma \end{cases}$ y $r_2:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=3+2\lambda \end{cases}$

b) r: recta que pasa por $\mathrm{P}=(1;1;1)$ y $\mathrm{Q}=(-1;2;-1)$; $y \quad s:(x;y;z)=\beta.(1;2;1)+(0;3;2)$.

c) $r_1:\begin{cases} x=\gamma+1 \\ y=2\gamma-3 \\ z=3\gamma-3 \end{cases}$ y $r_2:\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-8}{9}$

d) $r_a: x+1=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ y $r_b:\beta.(-1;1;1)+(0;-2;1)$.

13) Sea la recta $r: \frac{x-1}{2}=-y+4=z$

a) Hallar la ecuación de una recta r_a que sea paralela a r tal que $(1;1{,}1)\epsilon\, r_a$. ¿ r y r_a son la misma recta?

b) Indicar la ecuación de una recta r_b perpendicular a r tal que $(0;7;-4)\epsilon\, r_b$.

14) Sean las rectas:

r: (x, y, z) = λ.(k–2, k, 1) + (0, 7, 6) y r': (x, y, z) = β.(k, 2, –4) + (k, 3, –1)

a) Determine *todos* los valores reales de k para que ambas rectas resulten paralelas.

b) ¿Existe algún valor de k para que el punto (0; 7; 6) pertenezca a ambas rectas?

15) Dadas las rectas

$r_1:\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{a}$ y $r_2:\frac{x+1}{3}=\frac{y+5}{2}=z$

Calcular el valor de a para que las dos rectas sean secantes y encontrar el punto de intersección

16) Determinar para que valores de k reales las rectas r y s son alabeadas, siendo:

$r: \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-y+z=2 \end{cases}$ y s: determinada por los puntos (3;2;4) y (k;0;k)

17) Encontrar las ecuaciones de una recta r que es perpendicular al eje de ordenadas en el punto $P_0=(0,3,0)$ e interseca a la recta $r_2: \begin{cases} x=-\lambda \\ y=2+3.\lambda \\ z=-1+2.\lambda \end{cases}$

18) Sean las rectas **r**: (x, y; z) = β.(0; 1; –1) + (2; –3; 0) y $\mathbf{r_1}$: $\frac{x+5}{-2}=y-2=z+1$.

a) Determinar las ecuaciones vectorial, paramétricas y simétricas de una recta $\mathbf{r_2}$ ortogonal a ambas rectas y que pase por el punto (3; 1 ; -2).

b) Verificar que efectivamente la recta dada es perpendicular a **r** y $\mathbf{r_1}$ y encontrar el punto de intersección entre $\mathbf{r_1}$ y $\mathbf{r_2}$.

19) a) Determinar la posición relativa de las rectas r y r', siendo r la recta que pasa por $A=(0;7;6)$ y $B=(-2;7;7)$; y r': $\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{-4}, x=0$. En el caso de que exista la intersección, calcularla.

b) Hallar todos los puntos P de la recta r de manera que $\overrightarrow{OP}$ sea perpendicular a $\vec{v}=(-1;0;4)$.

PLANOS

20) Dado el plano de ecuación x - 5 y + 7 z – 3 = 0 escribir las componentes de un vector normal al plano y las coordenadas de tres puntos que pertenecen a él. Indicar las ecuaciones vectoriales paramétricas del plano.

21) a) Encontrar la ecuación general del plano π que contiene a los puntos P = (1, 1, -1), Q = (3, 3, 2) y R = (3, -1, -2). Indicar , justificando, cuáles de los siguientes puntos pertenecen a π.

A= (2,2, t); B= (4, O, -t); C= (-3,1, -3); D= (3,1,3) y E= (O, O, O).

b) Determinar la ecuación del plano que contiene a la recta r: (0;3;2) + t (1 ; -1 ; 0) y el punto H (2 ; -4 ; -2).

22) Encuentre la ecuación del plano que contiene a las rectas dadas en cada caso:

a) $r_1: \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=z-1 \qquad r_2: x+1=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2}$

b) $r_1: \frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-5} \qquad r_2: \frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{-5}$

23) Sea Π: (x, y, z) = μ. (1, 1, –1) + β. (3, 0, 1) + (–2, 0, 0). indicar la ecuación implícita del plano y señalar el punto Q = (k +1, 2, 2k) que pertenece al mismo.

24) Indicar en cada caso si los siguientes pares de planos son paralelos (coincidentes o no) o tienen una recta en común, en este último caso escribir la ecuación de la recta intersección.

a) $\pi_1 : x - y + z = 3$ y $\pi_2 : -3.x + 3.y - 3.z - 5 = 0$

b) $\pi_1 : 3x - 2.y + 7z = 4$ y $\pi_2 : -2.x + 4.y + 2.z = 16$

c) $\pi_1 : x - y + z - 2 = 0$ y $\pi_2 : 2.x - 3.y + 4.z = 7$

25) Determinar las ecuaciones paramétrica vectorial, paramétrica cartesiana e implícita del plano π que incluye a los puntos A= (–2, 0 ,0) B= (1, 1, 3) y C= (2, 3, –1).
¿Cuál es la intersección de dicho plano con la recta **r**: (x, y, z) = (0, 1, 2) + β. (1, 1, –1)?
¿Es razonable lo obtenido?

26)a) Encontrar la ecuación del plano π que contiene a la recta **r**: $(x, y, z) = \alpha(2, 1,\ 1) + (1, 2, -4)$ y al punto A= (–2, 1, –2).

b) Determinar la posición relativa entre la recta **r**: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = z + 4$ y el plano π. Si se cortan, indicar el punto de intersección.

27) Hallar, si es posible la intersección de las siguientes rectas y determinar la ecuación del plano que las contiene: $L_1 : z = 1,\ 2 - x = y$, L_2 :recta perpendicular a los vectores $\vec{w} = -2\breve{i} + 2\breve{j} + 2\breve{k}$ y $\vec{v} = \breve{i} + 3\breve{j} + \breve{k}$ que pasa por el punto $(0,2,-1)$

28) Indicar la posición de la recta $\dfrac{x-2}{7} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{-3}$ con respecto al plano que pasa por los puntos P=(3 ; 1 ; 1) , Q= (1 ; 0 ; 1) y T= (0 ; 1 ; 2)

29) Dadas la recta **r**: (x, y, z) = t.(–1, 2, 0) + (0, 0, 1) y el punto A= (–1, –1, –1),
a) Determinar el plano Π que los contiene.
b) ¿Quién es el plano Π' que incluye a **r** y es perpendicular a Π?

30) Sean el plano $\Pi : ax - 2by + z = 2 + b$ y la recta $L : x = -y + 1 = 2z - 3$. Determinar a y $b \in R$ tales que: a) $L // \Pi$ b) $L \perp \Pi$ c) $L \subset \Pi$

31) Sea π_1 el plano que contiene al eje x y pasa por $(1,3,2)$. Hallar el plano π_2 que pasa por $(1,0,-1)$ y tal que $\pi_1 \cap \pi_2$ es la recta generada por el vector $\left(\frac{1}{2},\ 1\ ,\frac{2}{3}\right)$ que pasa por el origen.

32) Sean el plano $\pi : x - y + 2z = 5$, el punto $A = (3,2,1)$, la recta L_1 que pasa por los puntos $(1,-1,2)$ y $(1,2,-1)$ y la recta $L_2 : (x, y, z) = \lambda(1,2,3) + (0,-1,-2)$. Indicar las coordenadas de los puntos $B \in L_1$ y $C \in L_2$ tales que el plano que pasa por los puntos A,B,C sea paralelo al plano Π

33) Dados el plano $\pi:\ 2x+3y-z=2$ y la recta $L:\ (x,y,z)=t(0,1,2)+(0,0,1)$ Hallar la recta L' que sea perpendicular a π y que pasa por el punto de intersección de π con L.

34) Dado el plano $\pi: x+3.y-5.z+6=0$ y la recta $r_1:(x,y,z)=(0,0,-1)+\lambda.(k,3,2)\ \ \forall\lambda\in R$

a) Determinar si existe $k\in R/\ r_1$ sea paralela a π

b) Determinar si existe $k\in R\ /\ r_1\subset\pi$.

c) Determinar si existe $k\in R\ /\ r_1\cap\pi=\{I\}=\{(2,-1,1)\}$

d) Determinar si la recta $r_2: x-2=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{2}$ está contenida en el plano π .

35) Determinar todos los valores reales de k para que los tres planos sean mutuamente ortogonales: π : x – 3y + 2k.z = 1–k, π’: –x + y + (k–1)z =3 ∧ π “: (k^2+3).x + 5y + 2z = –2 Verificar la respuesta.

DISTANCIAS

36) a) Encontrar la distancia entre el punto P= (-2 ; 1) y la recta de ecuación 3x+5y=1.

b) Determinar todos los puntos P cuya distancia a la recta r de ecuación x-2y-7=0 sea 4. Interpretar geométricamente

c) Hallar la distancia entre las rectas L_1: y= 2 x + 4 L_2: $\vec{x}$= (-2;-4)α + (3 ; 5)

37) Dadas las rectas ***r***: (x; y) = α.(5; –2) + (5; 6) y ***r’***: (x; y) = β.(6; 1) + (2; 14)

a) Encontrar los puntos donde ***r*** corta a los ejes coordenados.

b) Obtener todos los puntos P de ***r*** que satisfacen que la distancia de P a B =(–12; 10) es 5.

d) Determinar ***r’’***//***r*** que incluya al punto C = (1; –3) .

e) Calcular la distancia de M = (-4 ; 6) a la recta ***r’***.

f) ¿Cuánto vale el ángulo entre ***r*** y ***r’***.

g) Graficar las tres rectas en un único sistema de coordenadas.

38) Si r: (x, y) = λ.(1, –1) + (3, –4) y r’: x + y = 5.

a) Comprobar que r y r’ son paralelas no coincidentes.

b) Hallar la distancia entre ambas.

39) Hallar la distancia existente entre el punto P= (2;2;-2) y el plano de ecuación:
- x + 2 y - 3 z + 4 = 0

40) El punto K= (2; –3; –1) es el más cercano del plano ∏ con respecto al punto Q= (–4; 5; –5).

a) Determine la ecuación de ∏.

b) Obtenga la distancia de A= (1; –2; –1) al plano.

c) ¿Quiénes son los puntos PεR^3 que distan de $\prod$ un valor de $\frac{7}{\sqrt{29}}$?
¿Qué representan geométricamente?

41) Hallar los puntos del eje de ordenadas que equidistan de los planos $\alpha : \frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ y $\beta : x - 2.y + 4.z = 0$

42) Sea Π: x +4y –2z =7.
a) ¿Cuáles son los puntos de R^3 que distan de Π un valor $3.\sqrt{21}$?
b) ¿Cuáles son los puntos de R^3 que equidistan de Π y de Π': 4x –2y – z = –3?
¿Cómo se interpreta geométricamente?

43) Dada la recta $L : \frac{x+1}{2} = 1 - y = 3 + z$
a) Obtener el punto donde L corta al plano coordenado XZ y calcular la distancia entre dicho punto y el plano $\pi : x - 3y + z = 0$
b) Indicar, justificando, la posición relativa de la recta L con respecto al plano π

44) Obtenga el punto Q de la recta **r**: (x, y, z) = t. (2, –3, –1) + (–1, 1, 0) que se encuentra más cerca de P= (0, –8, 1). ¿Cuánto vale la distancia de P a **r**?

45) Calcular la distancia del punto P a la recta r $(dist(P,r))$, siendo:
a) $P = (1,-2,-3)$ y la recta $r : (x, y, z) = (2,1,-1) + \gamma.(2,1,-2)$
b) $P = (1; 0; 0)$ y la recta $r: \frac{x+1}{2} = y - 3 = \frac{2z-4}{4}$

46) Dados las rectas L_1: $(x, y, z) = \lambda(-1, 2, 0) + (1,1,1)$ y L_2: recta que contiene a (3,-5,0) y (1,-1,0)
a) Hallar, si existe, un plano que contenga a ambas rectas.
b) Calcular la distancia entre el punto (1,1,1) y la recta L_2.

47) Calcular la distancia entre las rectas dadas, en cada caso
a) $r_1 : \frac{x+2}{3} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z-2}{4}$ y $r_2 : \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{4} = z + 1$

b) $r_1 : \begin{cases} x = \gamma \\ y = -1 \\ z = 1 - \gamma \end{cases}$ y $r_2 : \begin{cases} x = 1 + \gamma \\ y = 2 \\ z = 2\gamma \end{cases}$

c) $r_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ y $r_2 : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3}$

48) Determinar si existe la intersección entre las rectas L_1 y L_2. En caso contrario establecer si son paralelas o alabeadas y calcular la distancia que las separa. Siendo:

$$L_1 = \beta(1,0,-1) + (2,0,1) \qquad \text{y} \qquad L_2 : \begin{cases} x = \lambda + 2 \\ y = \lambda + 1 \\ z = 2\lambda + 3 \end{cases}$$

49) Sea **r** la recta que pasa por A= (3;- 4;- 1) y B= (1; 0; 7) y **r'** la recta: $\frac{-x-1}{3} = y + k = z - 4$.

a) ¿Cuál es el valor de k real para que ambas rectas sean secantes en un punto P? Señalar P.

b) ¿Qué puntos Q de **r** distan del punto S= (–6; 10; –3) $\sqrt{281}$ unidades?

50) Obtener la distancia de la recta $r : \begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 3y - z = 3 \end{cases}$ al plano

$\Pi : (x, y, z) = \alpha.(1,-1,0) + \beta.(0,2,1) + (0,1,1)$

51) a) Encontrar la distancia del punto P(2;-1;-1) al plano π , siendo π el plano que incluye a la recta r : $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{3}$ y es perpendicular al plano x + 3y -3z = 3

b) Indicar la posición de la recta $\frac{x-2}{-1} = y - 5 = \frac{z+4}{-2}$ con respecto al plano π .

52) Sean las rectas r: $\frac{x-2}{2} = 1 - y; z = 1$ y r': $\vec{x} = \theta(2; -1; 0) + (0; 1; 0)$

a) Calcular la distancia entre ambas rectas.

b) Hallar la distancia entre el punto $P = (2; 1; 1)$ y la recta r

c) Dar la ecuación de un plano π que contenga a r y r'.

d) Determinar todos los puntos $P \in \mathbb{R}^3$ que verifiquen que $dist(P, \pi) = 1$. Interpretar geométricamente.

53) Hallar todos los valores reales de k para que el punto A= (3, –1, k) se encuentre a 2 unidades del plano π: x –2y – 2z = 5. Señalar los puntos A.

54) Se tienen los planos Π_1: 3x – y + 2z = –2 ∧ Π_2: $\vec{X}$ = β.(–2; 1; 0) + α.(1; 1; –1) + (0; 0; –1).

a) Determinar C={P∈R^3/ dist(P; Π_1) = dist(P; Π_2)}. Interpretar geométricamente la situación.

b) Hallar un plano Π ortogonal a Π_1 y Π_2 que incluya al punto (0; 2; –2).

55) Determinar si existe algún valor de k real tal que los planos Π y Π' no sean paralelos si:
Π= {(x, y, z)εR^3 / x – 2y + z = –1} y Π'= { X=(x, y, z) εR^3 / X = a.(k, 2, 0) + b.(0, 1, 2) + (–3, 0, 0); a y b reales} Expresar la ecuación que cumplen los puntos de Π'.

b) Encontrar todos los valores de α real / la distancia de Q a Π sea $\frac{8}{\sqrt{6}}$ si Q= (3, 2α – 3, 2–α).

56) Sea el plano **Π**: x –2y +2z = 3 y la recta **r:** β.(2; 1; 0) + (**k**, 1, –2), con **k**∈R.

a) Encuentre la ecuación del plano **Π'** que contiene a P= (2; 0; 1), es perpendicular a **Π** y paralelo a **r.**

b) ¿Cuáles son todos los valores de **k** para que dist(**Π', r**)= $\frac{3}{\sqrt{45}}$?

EJERCITACIÓN INTEGRADORA

57) Dadas las rectas $\mathbf{r_1}$: (x; y; z) = β.(1; –1; 2) + (k; 1; k+1)y $\mathbf{r_2}$: x=1; $\frac{y}{2} = z - \alpha$ se pide:

a) Determinar k y α para que ambas rectas sean secantes en el punto (1; –4; 7).

b) Obtener una recta $\mathbf{r_3}$ perpendicular a las anteriores y que corte al eje z.

c) Sean $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\ y\ \overrightarrow{v_3}$ respectivos vectores directores de las rectas $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ y $\mathbf{r_3}$. ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo que determinan?

58) Sean los planos **Π**: x – $\mathbf{k}^2$y + z = **k** Λ **Π'**: **k**x + y – **k**z = **1** y el punto P= (**k**, –1, –1), con **k**∈R.

a) Obtener los valores de **k** de manera que P ∈ (**Π**∩**Π'**).

b) Para el valor de **k** hallado encuentre la ecuación del plano **Π''** que contiene a P y es perpendicular a **Π** y **Π'.**

c) ¿A qué distancia se encuentra A= (2; 0; 4) de (**Π** ∩ **Π'**)?

59) a) Determinar la posición de los planos en el espacio y calcular la distancia entre ellos, siendo:
$\pi_1: 2x - y - 2z + 5 = 0$ y $\pi_2:\ 4x - 2y - 4z + 15 = 0$

b) Siendo $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = z$, decir en qué posición se encuentra con respecto al plano π_1, y en caso de ser secantes calcular el punto de intersección.

60)a) Determinar el plano Π que contiene a los puntos (3, 0, 0), (0, –2, 0) y (1, 0, 1).

b) Si Π': (2-k).x + (k–1).y + 2z = 1, ¿cuánto vale k para que ambos planos sean perpendiculares? Señalar Π'.

c) ¿Cuál es la recta **r** incluida en Π, que es paralela a Π', y contiene al punto P de la forma P= (μ, μ, μ)? Mostrar P.

d) ¿Cuál es la distancia de **r** a Π'?

61) Dadas las rectas $r_1: \begin{cases} 3.x - 2.z + 2 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases} \wedge\ r_2: \begin{cases} x = -2.\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = z_0 \end{cases}$

a) Para $z_0 = -1$ determinar si las rectas $r_1 \wedge r_2$ son paralelas, se intersecan en un punto o son alabeadas. Si se intersecan en un punto, hallar las coordenadas del punto y el valor del ángulo que forman, si fueran alabeadas hallar la distancia entre ambas.

b) Determinar, si existe, el valor de z_0 para que ambas rectas se corten en un punto, hallarlo y también el ángulo que formarían.

62) Dados: $\vec{u}$= (3; 4; –2), $\vec{v}$= (k; 2; 1) y $\vec{w}$= (5+2k; 5; –1) y la recta **r :** $\frac{x-2}{2} = y + 1 = \frac{z+1}{-1}$

a) Hallar todos los valores reales de k para que el volumen del paralelepípedo determinado $\vec{u}, \vec{v}\ y\ \vec{w}$ sea 1.

b) Utilizando el valor de k entero obtenido en ítem anterior, encontrar $proy\ vect_{\vec{w}}\vec{v}$

c) Si k = 0, halle la ecuación vectorial de una recta **r'**que sea perpendicular simultáneamente a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y que pase por el punto (1; 0; –1). Indicar su posición relativa respecto de **r**.

63) Determinar los valores de k reales y las ecuaciones de *todas* las rectas **r** que cumplan simultáneamente con lo siguiente:

▪ **r** $\perp$ **r'** con **r'**: X = λ.(–3, 3, 1) + (1, 1, 0); ▪ el punto A = (k, 2k, 0) pertenece a **r** ;

▪ **r** // **Π** y la distancia de **r** a **Π** es $\frac{11}{5}$ siendo el plano **Π**: 4x –3z = 5

64) Se tienen las rectas **r : X=** α. (–3; 1; –2) + (k+1; 1; 2k+4) y **r'**: **r'**: $\frac{y-2}{-2} = \frac{-z-4}{-4}, x = -2$

a) Hallar kƐR para que (–8; 3; –6) Ɛ**r** y luego determinar la posición relativa de **r** y **r'**.

b) Escribir la ecuación vectorial de una recta r'' que sea perpendicular a **r** y **r'**, y que contenga al punto (-2,3,6).

c) ¿Qué volumen tendrá el paralelepípedo engendrado por $\mathbf{V_d}$ **,** $\mathbf{V'_d}$ y $\mathbf{V''_d}$**,** vectores directores de **r**, **r'** y **r''** respectivamente?

65) Dado el plano $\pi: (x; y; z) = \alpha(1; 0; -1) + \beta(0; 1; 2) + (0; 0; 2)$ y la recta $\mathbb{L}: (x; y; z) = \alpha(2; 1; 0) + (2; 1; 2)$.

a) Escribir la ecuación implícita del plano π

b) Verificar que $\mathbb{L} \subset \pi$.

c) Hallar, si es posible, dos rectas r_1, r_2 incluidas en el plano π tales que pase r_1 por el punto $Q = (4; 2; 2)$ y r_2 pase por el $(1; 0; -1)$

d) Hallar todos los puntos $P \in \mathbb{R}^3$ que verifiquen que $dist(P, \pi) = \frac{4}{\sqrt{6}}$. Interpretar geométricamente.

66) a) Sea el plano Π: –x + y + 5z = 4; determinar los valores de k∈R tales que dist(**r**; Π) sea constante e igual a $\frac{6}{\sqrt{27}}$ siendo **r**: $\vec{X}$ = β.(4 + k; 1–k^2; 1) + (k; 1; –1).

b) Si k= 0 obtenga un plano Π' que incluya a r y sea perpendicular a Π.

67)a) Determinar si existe la intersección de los planos $\pi_1 y \ \pi_2$, siendo:

π_1 el plano que contiene a las rectas $L_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$ y $L_2: \lambda\ (0,1,-1) + (1,1,0)$

$\pi_2: 5x + 2y - 2 = 0$

b) Calcular la distancia del punto P (1,0,2) al plano π_2

68) Dado el plano Π : –3x + 5y + k^2.z = 6 y la recta L: (x; y, z) = α .(3; 2; –1) + (0; –k; 1) se pide:

a) Obtener todos los valores reales de k para que se cumpla que L $\subset$ Π .

b) Utilizando el k hallado verificar que **todo** punto P perteneciente a L cumple que su distancia a Π es cero.

69) Se tienen las rectas r: $\begin{cases} x = -2 + 3k \\ y = 1 - k \\ z = 2k \end{cases}$ y r': pasa por A= (5; 2; 4) y B= (6; 5; 4).

a) Verificar que r y r' son perpendiculares y secantes en Q; dar las coordenadas de Q

b) ¿Cuáles son todos los puntos Pεr que se encuentran a distancia $\sqrt{14}$ de Q?

c) Para algún P hallado en b), halle el área del triángulo AQP y explique, sin hacer cuentas, cuánto debe valer $proy_{\overrightarrow{AQ}}\overrightarrow{PQ}$.

ALGUNAS RESPUESTAS

Los ejercicios que tienen una R están resueltos en los archivos de Miel.

1)R a) (x;y) = (3;1)+λ (1 ; -2) b) (x;y) = (3;2)+λ (2 ; 3)

2)R a) (x;y) = (1;-2)+λ (-3 ; -1) b) (x;y) = (-4;-5)+λ (0 ; 1) c) (x;y) = (-3;0)+λ (1 ; 3)

3) r: (x;y) = (-7;3) λ + (4 ; -6) 4) Ra) a= -6 b) a= -6

5)R $r:\begin{cases} x = 3 - \frac{5}{2}.\lambda \\ y = -2 + 5.\lambda \end{cases}$ $r: \dfrac{x-3}{-\frac{5}{2}} = \dfrac{y-(-2)}{5}$

6) Ra) $r_{1:}$ (x ; y) = (3; –1) + t. (-2 ; 3) no es única b) Q = (2 ; -6) c) si

d) Por ejemplo (x ; y) = (- 2 ; –5) +l. (3 ; 2)

7)Ra) $\left(\frac{2}{\sqrt{29}};\frac{5}{\sqrt{29}}\right)\left(-\frac{4}{\sqrt{29}};-\frac{10}{\sqrt{29}}\right)$ b) $r:(x;y)=\alpha(-5;2)+\left(\frac{9}{5};0\right)$

10) d) $r: (x;y;z) = \alpha.(1,0,0) + \left(3;1;-\frac{1}{2}\right)$ e) $r : (x;y;z) = \beta.(7,11,23) + (2;1;-1)$

11) $r: (x;y;z) = \alpha.(1,-6,-8) + (3,-1,-4)$ $(r_1 \cap r_2 = \{(2,5,4)\})$

12) R b) alabeadas c) paralelas d) alabeadas

13)R $r_a: (x;y;z) = \alpha.(2;-1;1) + (1;1;1)$ No es la misma recta. b) $r_b: (x;y;z) = \beta.(1;2;0) + (0;7;-4)$ entre otras.

14) a) $b)\ \nexists\ k$

15) a= 1 $r_1 \cap r_2 = \{(2,-3,1)\}$

16) k $\in R - \{\frac{10}{3}\}$

17)R $r:(x,y,z)=(0,3,0)+\alpha.(1,0,1)$

18) $r: (x,y,z) = (3,1,-2) + t.(1,1,1)$

19) R a) las rectas son alabeadas. b) P=(8, 7, 2)

21) a) x+2y-2z-5=0 b) 4x+4y-5z=2

22) a) $\pi: (x,y,z) = \alpha(2,3,1) + \beta(1,-1,2) + (-1,2,1)$

b) -x+19y+11=-21

23) Π: -x+4y+3z-2=0 , k= -1 , Q = (0 ; 2 ; -2)

24) a) paralelos no coincidentes. b) $r: (x,y,z) = \alpha\left(-4,-\frac{5}{2},1\right) + (6,7,0)$

c) $r: (x,y,z) = \beta(1,2,1) + (-1,-3,0)$

25) π: -2x+3y+z-4=0 **r** ∩ π ={}es razonable porque el director de la recta es perpendicular al normal al plano

26) R π: -3x+7y-z-15=0 **r** ∩ π ={(-1;1;-5)}

27) las rectas son alabeadas, no existe plano que contenga a ambas.

28) Π: -x+2y-3z+4=0, $r \parallel \pi$
29) Π: 4x+2y-3z+3=0   Π': 6x+3y+10z-10=0
30) R a) a= -2b-1/2   b) a=2 b= 1   c) a=-1/6   b= -1/6
31) π_2: -6x+7y-6z=0
32)R – x + y - 2 z = -3
33) $\pi \cap L = \{(0,3,7)\}$ $L': (x,y,z) = \alpha(2,3,-1) + (0,3,7)$
34) R a) k=1   b) $\nexists\ k$ c) $\nexists\ k$ d) $r \subset \pi$
35) k = 2
36) a) $\frac{\sqrt{34}}{17}$ b) $-x + 2y = -7 + 4\sqrt{5}$ o $-x + 2y = -7 - 4\sqrt{5}$ son 2 rectas paralelas a r   c) $\sqrt{5}$
37) a) (0,8), (20,0) b) P_1=(-15,14) P_2=(-205/29, 314/29)   e) $\frac{42}{37}\sqrt{37}$ f) $\hat{\alpha} \cong 32°$
38)R b) dist(r_1, r_2) $= \frac{6}{\sqrt{2}}$
39) $dist(P, \pi) = \frac{12}{\sqrt{14}}$
40)R $3x - 4y + 2z = 16$ $d(A; \prod) = \frac{7}{\sqrt{29}}$ c) $\begin{cases} 3x - 4y + 2z = 23 \\ 3x - 4y + 2z = 9 \end{cases}$
41) $a = \frac{7 \mp \sqrt{21}}{4}$

42)Ra) $x + 4y - 2z = 70$,ó, $x + 4y - 2z = -56$
b) $-3x + 6y - z = 10$ ó $5x + 2y - 3z = 4$
43) a) P=(1,0, -2)   d(P,π)= $\frac{1}{\sqrt{11}}$
b) L es secante al plano $L \cap \pi = \{(\frac{4}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{11}{6})\}$
44)R Q = (3; -5 , -2)   d= $3\sqrt{3}$
45) a) $d(P, r) = \frac{5\sqrt{5}}{3}$ b) d(P,r)= 4
46) a) 2x+y-2z=1   b) d((1,1,1), L_2) $= \frac{3}{\sqrt{5}}$
47) b) son alabeadas d= 3 c) Son paralelas d = $\frac{3}{14}\sqrt{42}$
48) las rectas son alabeadas $d(L_1, L_2) = \frac{1}{\sqrt{11}}$
49) a) k=1 P=(2, -2, 3)   b) Q_1=(3,-4, -1) Q_2=$\left(\frac{5}{21}, -\frac{32}{21}, \frac{211}{21}\right)$
50) $r \parallel \pi \Rightarrow d(r, \pi) = d(P\epsilon r, \pi) = \frac{7}{\sqrt{6}}$
51)Ra) $dist_{P,\Pi} = \frac{15}{83}\sqrt{166}$
52) a) $d(r, r') = d(P\epsilon r, r') = \frac{3}{\sqrt{5}}$ b) d(P,r)=0
c) x+2y-2z=2   d) $P \in C = \{X \in R^3/$ x+2y-2z=5 , x+2y-2z= -1}
53) k=3 o k = - 3 A=(3 ; -1 ; 3) o A = (3 ;-1 ; -3)
54) a) $C = \{X\epsilon R^3, 2x - 3y - z = 1 \wedge 4x + y + 5z = -5\}$ b) x+y-z= 4
55) a) k$\epsilon R - \{4\}$ $\pi': 4x - 2ky + kz = -12$ b) $Q_1 = (3, -\frac{7}{5}, \frac{6}{5})$ $Q_2 = (3, 5, -2)$
56) Π' : -2x+4y+5z-1=0 b) k= -5 o k= -2
57)R α= 9 y k= –4, Por ejemplo: (x; y; z) = μ. (−5; −1; 2) + (0; 0; 0). V = 30

58)R k=1, Π”: $y + z = -2$, $d(A; r) = 3$

59) a) Los dos planos son paralelos. $d(\pi_1,\pi_2) = \frac{\left|\frac{15}{2} - 5\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}} = \frac{5}{6}$

b) Las rectas son secantes, y se cortan en el punto $P = \left(\frac{-7}{3}; \frac{11}{3}; \frac{-5}{3}\right)$

60)R a) Π : 2x-3y+4z-6 = 0 , b) k = 3 , Π’: -x+2y+2z-1 = 0

c) (x;y;z) = (-14; -8;1) λ + (2 ; 2 ; 2) P= (2 ; 2 ; 2) d) d (r; Π’) = 5 / 3

61)R a) Son alabeadas $dist(r_1, r_2) = \frac{10\sqrt{61}}{61}$ b) $z_0 = -\frac{7}{2}, \hat{\varphi} = 131º\,52'\,6''$

62) k= - 1,8 o k = -2 b) $\left(\frac{7}{27}; \frac{35}{27}; \frac{-7}{27}\right)$ c) (x; y; z) = β.(8; -3; 4) + (1; 0; -1)

63) k= 4 r: X= a(9,5,12) + (4,8,0)

K= -3/2 r: X= b(9,5,12) + (-3/2, -3, 0)

64) a) k= - 3 son secantes en (-2,1,-2) b) **r” : X=**α. (0; 2; 1) + (-2; 3; 6) c) 30

65) a) x-2y+z=2 c) si, es posible hallar ambas rectas.

d) $P \epsilon\ C = \{X \epsilon R^3, x - 2y + z = 6, x - 2y + z = -2\}$

66) a) k= -2 b) 4x-21y+5z= -26

67) $a)\ \pi_1: -x + y + z = 0 \quad \pi_1 \cap \pi_1 = \{(x, y, z) = a\ (2, -5, 7) + (0, 1, -1)\}$

b) $d(P, \pi_2) = \frac{3}{\sqrt{29}}$

68) a) k= 6 k= -1

69)R a) Q=(4,-1,4) b) P_1=(7, -2, 6) P_2=(1, 0, 2) c) área AQP=$\frac{\sqrt{140}}{2}$ $proy_{\ AQ}\ PQ = (0,0,0)$