Resolución TP5:

Ejercicio 16

Tomando $F(x,y)=0$ que define $y=f(x)$. Probar que $f''(x)$ esta dada por:

$$f''(x)=-\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{F_y^3}$$

Herramientas:

- Se utilizar regla de la cadena.

Para empezar:

En este caso podemos componer $H(x)=F(x,y=f(x)))$

Derivadas de H:

$H(x)$ se puede derivar en x.

$$H_x=\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}}\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{y}}\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}}$$

Sabemos que $\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{x}}=1$, $\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}}=f_x$

$$H_x=F_x+F_yf_x$$

Si $F(P)=0$ entonces $H(x_0)=0$ entonces derivando lado a lado

$$H_x(x_0)=0$$

$$F_x(P)+F_y(P)f_x(x_0)=0$$

$$f_x(x_0)=-\frac{F_x(P)}{F_y(P)}$$

$H_x(x)$ se puede derivar en x.

$F_x(x,y)$ se puede derivar en x y en y por lo que se le aplica el mismo proceso que a H(x)

$F_y(x,y)$ se puede derivar en x y en y por lo que se le aplica el mismo proceso que a H(x)

Al producto F_yf_x se le aplica $uv=u'v+uv'$

$$H_{xx} = \left(\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial^2 \mathrm{x}}\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}}\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}}\right) + \left(\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}}\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial^2 \mathrm{y}}\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}}\right)\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{y}}\frac{\partial^2 \mathrm{y}}{\partial^2 \mathrm{x}}$$

Sabemos que $\frac{\partial \mathrm{x}}{\partial \mathrm{x}} = 1$, $\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}} = f_x$ $\frac{\partial^2 \mathrm{y}}{\partial^2 \mathrm{x}} = f_{xx}$

$$H_{xx} = (F_{xx} + F_{xy}f_x) + \left(F_{yx}f_x + F_{yy}f_x^2\right) + F_y f_{xx}$$

Si $H_x(x_0) = 0$ entonces $H_{xx}(x_0) = 0$ entonces derivando lado a lado

$$H_{xx}(x_0) = 0$$

$$\left[F_{xx} + F_{xy}f_x + F_{yx}f_x + F_{yy}f_x^2 + F_y f_{xx}\right]_{(P)} = 0$$

$$\left[F_y f_{xx}\right]_{(P)} = -\left[F_{xx} + F_{xy}f_x + F_{yx}f_x + F_{yy}f_x^2\right]_{(P)}$$

$$f_{xx}(x_0) = -\left[\frac{F_{xx} + F_{xy}f_x + F_{yx}f_x + F_{yy}f_x^2}{F_y}\right]_{(P)}$$

Sabemos que $F_{xy} = F_{yx}$ son simétricas y $f_x(x_0) = -\frac{F_x(P)}{F_y(P)}$

$$f_{xx}(x_0) = -\left[\frac{F_{xx} + 2F_{xy}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right) + F_{yy}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)^2}{F_y}\right]_{(P)}$$

$$f_{xx}(x_0) = -\left[\frac{F_{xx} - 2F_{xy}\frac{F_x}{F_y} + F_{yy}\frac{F_x^2}{F_y^2}}{F_y}\right]_{(P)}$$

$$f_{xx}(x_0) = -\left[\frac{\left(\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^2}\right)}{F_y}\right]_{(P)}$$

$$f_{xx}(x_0) = -\left[\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}\right]_{(P)}$$

Sacamos las siguientes condiciones, se cumple TFI de segundo orden en $F(x, y) = 0$ para $y = f(x)$ Si:

- $P \epsilon F(x, y) = 0$
- Las derivadas F_x F_y F_{xx} y F_{yy} son continuas en el entorno del punto.
- Las derivadas F_{xy} y F_{yx} son continuas y simétricas en el entorno del punto.
- $F_y(P) \neq 0$

si se cumple TFI de segundo orden su derivada tiene la forma:

$$f_{xx}(x_0) = -\left[\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}\right]_{(P)}$$