# Métodos de integración

## Método de sustitución

Caso general

$$\int f[g(x)]\, g'(x)\, dx$$

llamando $z = g(x)$

diferenciando: $dz = g'(x)\, dx$

volviendo a la integral

$$\int f(z)\, dz$$

y esta integral debe ser una integral inmediata, que podemos encontrar en la tabla.

Ejemplo 1

$$\int \operatorname{sen}\left(6x^3 - 3x^2 + 8\right)\left(9x^2 - 3x\right) dx$$

llamando $z = 6x^3 - 3x^2 + 8$

$$dz = \left(18x^2 - 6x\right) dx$$

que puede escribirse

$$dz = 2\left(9x^2 - 3x\right) dx$$

de donde

$$\left(9x^2 - 3x\right) dx = \frac{dz}{2}$$

volviendo a la integral

$$\frac{1}{2}\int \operatorname{sen} z\, dz$$

$$\frac{1}{2}(-\cos z) + C$$

escribiendo el resultado en x

$$\int \operatorname{sen}\left(6x^3 - 3x^2 + 8\right)\left(9x^2 - 3x\right) dx = -\frac{\cos\left(6x^3 - 3x^2 + 8\right)}{2} + C$$

Solución obtenida con el software *Mathematica* :

$$\int \operatorname{Sin}\left[6x^3 - 3x^2 + 8\right]\left(9x^2 - 3x\right) dx = -\frac{1}{2}\operatorname{Cos}\left[8 - 3x^2 + 6x^3\right]$$

Ejemplo 2

$$\int \frac{x^{\frac{2}{3}} + x^2}{3\, x^{\frac{1}{3}}}\, dx$$

este caso no es tan sencillo como el anterior pero igualmente puede resolver mediante una sustitución adecuada

$$z = x^{\frac{2}{3}}$$

$$dz = \frac{2}{3}\, x^{-\frac{1}{3}}\, dx$$

$$\frac{dz}{2} = \frac{1}{3\, x^{\frac{1}{3}}}\, dx$$

por otro lado, si elevamos al cubo z obtenemos

$$z^3 = x^2$$

volvemos a la integral

$$\frac{1}{2} \int \left(z + z^3\right) dz = \frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4}\right) + C$$

volviendo a x

$$\int \frac{x^{\frac{2}{3}} + x^2}{3\, x^{\frac{1}{3}}}\, dx = \frac{{x^{\frac{2}{3}}}^2}{4} + \frac{{x^{\frac{2}{3}}}^4}{8} + C$$

$$\int \frac{x^{\frac{2}{3}} + x^2}{3\, x^{\frac{1}{3}}}\, dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{4} + \frac{x^{\frac{8}{3}}}{8} + C$$

Solución obtenida con el software *Mathematica* :

$$\text{Expand}\left[\int \frac{x^{\frac{2}{3}} + x^2}{3\, x^{\frac{1}{3}}}\, dx\right] = \frac{x^{4/3}}{4} + \frac{x^{8/3}}{8}$$

Método integración por partes

$$\boxed{\int u\,dv = u\,v - \int v\,du}$$

Ejemplo 1

$$\int x^2\, e^x\, dx$$

$u = x^2 \qquad v = e^x$

$du = 2\,x\,dx \qquad dv = e^x\,dx$

$$\int x^2\, e^x\, dx = x^2\, e^x - 2 \int x\, e^x\, dx$$

en la segunda integral volvemos a aplicar integración por partes

$u = x \qquad v = e^x$

$du = dx \qquad dv = e^x\,dx$

$$\int x^2\, e^x\, dx = x^2\, e^x - 2\left(x\, e^x - \int e^x\, dx\right)$$

$$\int x^2\, e^x\, dx = x^2\, e^x - 2\,x\, e^x + 2 \int e^x\, dx$$

$$\int x^2\, e^x\, dx = x^2\, e^x - 2\,x\, e^x + 2\, e^x + C$$

$$\int x^2\, e^x\, dx = e^x \left(x^2 - 2\,x + 2\right) + C$$

Solución obtenida con el software *Mathematica* :

$$\int x^2\, e^x\, dx = e^x \left(2 - 2\,x + x^2\right)$$

Ejemplo 2

Pueden aparece algunas integrales que son cíclicas, pues se repite la integral original

$$\int \operatorname{sen} x\, e^x\, dx$$

$u = \operatorname{sen} x \qquad v = e^x$

$du = \cos x\,dx \qquad dv = e^x\,dx$

$$\int \operatorname{sen} x\, e^x\, dx = \operatorname{sen} x\, e^x - \int \cos x\, e^x\, dx$$

$u = \cos x \qquad v = e^x$

$du = -\operatorname{sen} x\,dx \qquad dv = e^x\,dx$

$$\int \operatorname{sen} x\, e^x\, dx = \operatorname{sen} x\, e^x - \left(\cos x\, e^x - \int \operatorname{sen} x\, e^x\, dx\right)$$

$$\int \operatorname{sen} x\, e^x\, dx = \operatorname{sen} x\, e^x - \cos e^x + \int \operatorname{sen} x\, e^x\, dx$$

$$2\int \text{sen } x\, e^x\, dx = \text{sen } x\, e^x - \cos x e^x + C$$

$$\int \text{sen } x\, e^x\, dx = \frac{e^x}{2}\,(\text{sen } x - \cos x) + C$$

Solución obtenida con el software *Mathematica* :

$$\int \text{Sin}[x]\, e^x\, dx = \frac{1}{2}\, e^x\, (-\text{Cos}[x] + \text{Sin}[x])$$

Ejemplo 3

$$\int x\, \ln(x-2)\, dx$$

$$u = \ln(x-2) \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$du = \frac{1}{x-2}\, dx \qquad dv = x\, dx$$

$$\int x\, \ln(x-2)\, dx = \frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x-2}\, dx$$

en la segunda integral tenemos que aplicar otro método. Primero hacemos la división de los polinomios.

$$\text{PolynomialQuotient}\left[x^2,\ x-2,\ x\right] = 2 + x$$

$$\text{PolynomialRemainder}\left[x^2,\ x-2,\ x\right] = 4$$

O sea que la expresión algebraica puede escribirse como cociente, mas resto sobre divisor

$$\frac{x^2}{x-2} = x + 2 + \frac{4}{x-2}$$

$$\int x\, \ln(x-2)\, dx = \frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2}\int \left(x + 2 + \frac{4}{x-2}\right) dx$$

$$\int x\, \ln(x-2)\, dx = \frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2}\int x\, dx - \frac{1}{2}\int 2\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{4}{x-2}\, dx$$

$$\int x\, \ln(x-2)\, dx = \frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{1}{2}\int x\, dx - \int dx - 2\int \frac{1}{x-2}\, dx$$

$$\int x\, \ln(x-2)\, dx = \frac{x^2}{2} \ln(x-2) - \frac{x^2}{4} - x - 2\ln(x-2) + C$$

Solución obtenida con el software *Mathematica* :

$$\int x\, \text{Log}[x-2]\, dx = -x - \frac{x^2}{4} - 2\,\text{Log}[-2+x] + \frac{1}{2}\, x^2\, \text{Log}[-2+x]$$

Combinando los dos métodos

$$\int 2\cos\left(x^2\right) e^{x^2}\, x\, dx$$

Primero aplicaciones sustitución

$$z = x^2 \longrightarrow dz = 2\, x\, dx$$

$$\int \cos\left(x^2\right) e^{x^2}\, 2\, x\, dx = \int \cos z\, e^z\, dz$$

Ahora aplicamos integración por partes

$$u = \cos z \qquad v = e^z$$

$$du = -\operatorname{sen} z\, dz \qquad dv = e^z\, dz$$

$$\int \cos z\, e^z\, dz = \cos z\, e^z + \int \operatorname{sen} z\, e^z\, dz$$

$$u = \operatorname{sen} z \qquad v = e^z$$

$$du = \cos z\, dz \qquad dv = e^z\, dz$$

$$\int \cos z\, e^z\, dz = \cos z\, e^z + \operatorname{sen} z\, e^z - \int \cos z\, e^z\, dz$$

$$2 \int \cos z\, e^z\, dz = e^z\, (\cos z + \operatorname{sen} z)$$

$$\int \cos z\, e^z\, dz = \frac{e^z}{2}\, (\cos z + \operatorname{sen} z) + C$$

volviendo a x

$$\int 2\cos\left(x^2\right) e^{x^2}\, x\, dx = \frac{e^{x^2}}{2} \left(\cos\left(x^2\right) + \operatorname{sen}\left(x^2\right)\right) + C$$

Solución obtenida con el software *Mathematica* :

$$\int 2\,\mathrm{Cos}\left[x^2\right] e^{x^2}\, x\, dx = \frac{1}{2}\, e^{x^2} \left(\mathrm{Cos}\left[x^2\right] + \mathrm{Sin}\left[x^2\right]\right)$$

Integrales de la forma $\displaystyle\int \frac{dx}{a\,x^2 + b\,x + c}$

Estas integrales siempre pueden reducirse a dos opciones

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{argth} x + C$$

Si a = 1 b = 0 c != 0

Ejemplo 1 a)

$$\int \frac{dx}{7+x^2} =$$

Cáculo auxiliar

$$7 + x^2 = 7\left(1 + \frac{x^2}{7}\right)$$

escribiendo el segundo término como una fracción al cuadrado obtenemos

$$7 + x^2 = 7\left(1 + \left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2\right)$$

volvemos a la integral

$$\int \frac{dx}{7+x^2} = \int \frac{dx}{7\left(1 + \left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2\right)} = \frac{1}{7}\int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2}$$

hacemos la sustitución

$$z = \frac{x}{\sqrt{7}} \longrightarrow dz = \frac{dx}{\sqrt{7}} \longrightarrow dx = \sqrt{7}\,dz$$

$$\int \frac{dx}{7+x^2} = \frac{\sqrt{7}}{7}\int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{\sqrt{7}}{7}\operatorname{arctg} z + C = \frac{\sqrt{7}}{7}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C$$

Solución obtenida con el software *Mathematica* :

$$\int \frac{1}{7+x^2}\,dx = \frac{\text{ArcTan}\left[\frac{x}{\sqrt{7}}\right]}{\sqrt{7}}$$

Ejemplo 1 b)

$$\int \frac{dx}{7 - x^2} =$$

Cáculo auxiliar

$$7 - x^2 = 7\left(1 - \frac{x^2}{7}\right)$$

escribiendo el segundo término como una fracción al cuadrado obtenemos

$$7 - x^2 = 7\left(1 - \left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2\right)$$

volvemos a la integral

$$\int \frac{dx}{7 - x^2} = \int \frac{dx}{7\left(1 - \left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2\right)} = \frac{1}{7} \int \frac{dx}{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2}$$

hacemos la sustitución

$$z = \frac{x}{\sqrt{7}} \longrightarrow dz = \frac{dx}{\sqrt{7}} \longrightarrow dx = \sqrt{7}\ dz$$

$$\int \frac{dx}{7 - x^2} = \frac{\sqrt{7}}{7} \int \frac{dz}{1 - z^2} = \frac{\sqrt{7}}{7} \operatorname{argth} z + C = \frac{\sqrt{7}}{7} \operatorname{argth}\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C$$

Solución obtenida con el software *Mathematica* :

$$\text{FullSimplify}\left[\int \frac{1}{7 - x^2}\, dx\right] = \frac{\text{ArcTanh}\left[\frac{x}{\sqrt{7}}\right]}{\sqrt{7}}$$

Si a ≠ 1 b = 0 c ≠ 0

Ejemplo 2 a)

$$\int \frac{dx}{7+8x^2} =$$

Cáculo auxiliar

$$7+8x^2 = 7\left(1+\frac{8x^2}{7}\right) = 7\left(1+\left(\frac{\sqrt{8}\,x}{\sqrt{7}}\right)^2\right)$$

$$\int \frac{dx}{7+8x^2} = \frac{1}{7}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{\sqrt{8}\,x}{\sqrt{7}}\right)^2}$$

$$z = \frac{\sqrt{8}\,x}{\sqrt{7}} \longrightarrow dz = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}}\,dx \longrightarrow dx = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}\,dz$$

$$\int \frac{dx}{7+8x^2} = \frac{1}{7}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{\sqrt{8}\,x}{\sqrt{7}}\right)^2} = \frac{1}{7}\,\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}\int \frac{dx}{1+z^2}$$

integramos y racionalizamos el denominador en los coeficientes que están fuera de la integral

$$\int \frac{dx}{7+8x^2} =$$

$$\frac{1}{7}\,\frac{\sqrt{7}\,\sqrt{8}}{\sqrt{8}\,\sqrt{8}}\,\text{arctg } z + C = \frac{2\sqrt{14}}{7\times 8}\,\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{8}\,x}{\sqrt{7}}\right) + C = \frac{\sqrt{14}}{32}\,\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{8}\,x}{\sqrt{7}}\right) + C = \frac{\sqrt{14}}{32}\,\text{arctg}\left(2\sqrt{\frac{2}{7}}\,x\right) + C$$

Solución obtenida con el software *Mathematica* :

$$\int \frac{1}{7+8x^2}\,dx = \frac{\text{ArcTan}\left[2\sqrt{\frac{2}{7}}\,x\right]}{2\sqrt{14}}$$

Ejemplo 2 b)

$$\int \frac{dx}{7-8\,x^2} =$$

Cáculo auxiliar

$$7-8\,x^2 = 7\left(1-\frac{8\,x^2}{7}\right) = 7\left(1-\left(\frac{\sqrt{8}\;x}{\sqrt{7}}\right)^2\right)$$

$$\int \frac{dx}{7-8\,x^2} = \frac{1}{7}\int \frac{dx}{1-\left(\frac{\sqrt{8}\;x}{\sqrt{7}}\right)^2}$$

$$z = \frac{\sqrt{8}\;x}{\sqrt{7}} \longrightarrow dz = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}}\,dx \longrightarrow dx = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}\,dz$$

$$\int \frac{dx}{7-8\,x^2} = \frac{1}{7}\int \frac{dx}{1-\left(\frac{\sqrt{8}\;x}{\sqrt{7}}\right)^2} = \frac{1}{7}\,\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}\int \frac{dx}{1-z^2}$$

$$\int \frac{dx}{7-8\,x^2} =$$

$$\frac{1}{7}\,\frac{\sqrt{7}\;\sqrt{8}}{\sqrt{8}\;\sqrt{8}}\,\text{argth}\,z + C = \frac{2\sqrt{14}}{7\times 8}\,\text{argth}\left(\frac{\sqrt{8}\;x}{\sqrt{7}}\right) + C = \frac{\sqrt{14}}{32}\,\text{argth}\left(\frac{\sqrt{8}\;x}{\sqrt{7}}\right) + C = \frac{\sqrt{14}}{32}\,\text{argth}\left(2\sqrt{\frac{2}{7}}\;x\right) + C$$

Solución obtenida con el software *Mathematica* :

$$\text{FullSimplify}\left[\int \frac{1}{7-8\,x^2}\,dx\right] = \frac{\text{ArcTanh}\left[2\sqrt{\frac{2}{7}}\;x\right]}{2\sqrt{14}}$$

Ejemplo 3 a) Si a $\neq$ 1 b $\neq$ 0 c $\neq$ 0

$$\int \frac{dx}{8x^2+2x-5} =$$

Cáculo auxiliar

8 x^2 + 2 x - 5 = 8[(x^2 + 1/4 x + 1/64) - 5/8 - 1/64]

$$8x^2+2x-5 = 8\left[\left(x+\frac{1}{8}\right)^2 - \frac{41}{64}\right]$$

$$8x^2+2x-5 = 8\left[\left(\frac{8x+1}{8}\right)^2 - \frac{41}{64}\right]$$

$$8x^2+2x-5 = 8\left[\frac{(8x+1)^2}{64} - \frac{41}{64}\right]$$

$$8x^2+2x-5 = \frac{1}{8}\left[(8x+1)^2 - 41\right]$$

$$8x^2+2x-5 = -\frac{41}{8}\left[1 - \frac{(8x+1)^2}{41}\right]$$

$$8x^2+2x-5 = -\frac{41}{8}\left[1 - \left(\frac{8x+1}{\sqrt{41}}\right)^2\right] \text{ volviendo a la integral}$$

$$\int \frac{dx}{8x^2+2x-5} = \int \frac{dx}{-\frac{41}{8}\left[1-\left(\frac{8x+1}{\sqrt{41}}\right)^2\right]} =$$

$$\int \frac{dx}{8x^2+2x-5} = -\frac{8}{41}\int \frac{dx}{1-\left(\frac{8x+1}{\sqrt{41}}\right)^2} =$$

$$z = \frac{8x+1}{\sqrt{41}} \longrightarrow dz = \frac{8}{\sqrt{41}}\,dx \longrightarrow dx = \frac{\sqrt{41}}{8}\,dz$$

$$\int \frac{dx}{8x^2+2x-5} = -\frac{8}{41}\,\frac{\sqrt{41}}{8}\int \frac{dz}{1-z^2}$$

$$\int \frac{dx}{8x^2+2x-5} = -\frac{\sqrt{41}}{41}\int \frac{dz}{1-z^2}$$

$$\int \frac{dx}{8x^2+2x-5} = -\frac{\sqrt{41}}{41}\,\text{argth}\, z + C$$

$$\int \frac{dx}{8x^2+2x-5} = -\frac{\sqrt{41}}{41}\,\text{argth}\left(\frac{8x+1}{\sqrt{41}}\right) + C$$

Solución obtenida con el software *Mathematica* : $\text{FullSimplify}\left[\int \frac{1}{8x^2+2x-5}\,dx\right] = -\frac{\text{ArcTanh}\left[\frac{1+8x}{\sqrt{41}}\right]}{\sqrt{41}}$

Combinación método de sustitución y de la forma $\int \frac{dx}{a\,x^2 + b\,x + c}$

$$\int \frac{x+7}{3\,x^2 + 6\,x - 10}\,dx$$

En este caso tenemos un polinomio de grado 1 en el numerador así que primer tenemos que hacer una sustutición.

$z = 3\,x^2 + 6\,x - 10$

$dz = (6\,x + 6)\,dx$

y vemos que no tenemos exactamente esta expresión en el numerador, así que tenemos que acomodar los coeficientes para que quede esta derivada.

Vamos a hacer con un cálculo auxiliar.
En primer lugar separamos en dos expresiones algebraicas

$$\frac{x}{3\,x^2 + 6\,x - 10} + \frac{7}{3\,x^2 + 6\,x - 10}$$

en la primera multiplicamos y dividimos por 6

$$\frac{1}{6}\,\frac{6\,x}{3\,x^2 + 6\,x - 10} + \frac{7}{3\,x^2 + 6\,x - 10}$$

ahora faltaría agregarle "+6".

$$\frac{1}{6}\,\frac{6\,x + 6 - 6}{3\,x^2 + 6\,x - 10} + \frac{7}{3\,x^2 + 6\,x - 10}$$

volvemos a separar en dos expresiones algebraicas la primera, quedando

$$\frac{1}{6}\,\frac{6\,x + 6}{3\,x^2 + 6\,x - 10} - \frac{1}{6}\,\frac{6}{3\,x^2 + 6\,x - 10} + \frac{7}{3\,x^2 + 6\,x - 10}$$

podemos juntar las últimas dos expresiones

$$\frac{1}{6}\,\frac{6\,x + 6}{3\,x^2 + 6\,x - 10} + \frac{6}{3\,x^2 + 6\,x - 10}$$

volvemos a la integral y nos quedan dos integrales

$$\int \frac{x+7}{3\,x^2 + 6\,x - 10}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{6\,x + 6}{3\,x^2 + 6\,x - 10}\,dx + 6\int \frac{1}{3\,x^2 + 6\,x - 10}\,dx$$

la primera integral se soluciona con la sustitución planteada al principio y la segunda debemos completar cuadrados para llevarla a la forma correspondiente

Cáculo auxiliar

$$3\,x^2 + 6\,x - 10 = 3\left[\left(x^2 + 2\,x + 1\right) - \frac{10}{3} - 1\right]$$

$$3\,x^2 + 6\,x - 10 = 3\left[(x+1)^2 - \frac{13}{3}\right]$$

$$3\,x^2 + 6\,x - 10 = -\frac{13}{3}\,3\left[1 - \frac{(x+1)^2}{\frac{13}{3}}\right]$$

$$3\,x^2 + 6\,x - 10 = -13\left[1 - \frac{3\,(x+1)^2}{13}\right]$$

$$3\,x^2 + 6\,x - 10 = -13\left[1 - \left(\frac{\sqrt{3}\;(x+1)}{\sqrt{13}}\right)^2\right]$$

$$3\,x^2 + 6\,x - 10 = -13\left[1 - \left(\frac{\sqrt{3}\;x + \sqrt{3}}{\sqrt{13}}\right)^2\right]$$

$$\int \frac{x+7}{3\,x^2 + 6\,x - 10}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{6\,x + 6}{3\,x^2 + 6\,x - 10}\,dx - \frac{6}{13}\int \frac{1}{1 - \left(\frac{\sqrt{3}\;x + \sqrt{3}}{\sqrt{13}}\right)^2}\,dx$$

$$t = \frac{\sqrt{3}\;x + \sqrt{3}}{\sqrt{13}} \longrightarrow dt = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\,dx \longrightarrow dx = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}\,dt$$

ahora hacemos las dos sustituciones

∫(x+ 7)/(3 x^2 + 6 x - 10) dx = 1/6 ∫dz/z- 6/13 Sqrt[13]/Sqrt[3] ∫1/(1- t^2) dx

∫(x+ 7)/(3 x^2 + 6 x - 10) dx = 1/6 ∫dz/z- 6/13 (Sqrt[13] Sqrt[3])/(Sqrt[3] Sqrt[3]) ∫1/(1- t^2) dx

∫(x+ 7)/(3 x^2 + 6 x - 10) dx = 1/6 ln ı z ı -(2/13) Sqrt[39] argth t + C

volviendo a x

∫(x+ 7)/(3 x^2 + 6 x - 10) dx = 1/6 ln ı 3 x^2 + 6 x - 10 ı -(2/13) Sqrt[39] argth ((Sqrt[3] x + Sqrt[3])/Sqrt[13]) + C

Solución obtenida con el software *Mathematica* :

$$\text{Simplify}\left[\int \frac{x+7}{3\,x^2 + 6\,x - 10}\,dx\right]$$

$$-2\sqrt{\frac{3}{13}}\;\text{ArcTanh}\left[\sqrt{\frac{3}{13}}\;(1+x)\right] + \frac{1}{6}\,\text{Log}\left[-10 + 6\,x + 3\,x^2\right]$$

Integrales de la forma $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}}$

Estas integrales siempre pueden reducirse a dos opciones

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \operatorname{argsenh} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{argcosh} x + C$$

Si $a = 1$ $b = 0$ $c \neq 0$

Ejemplo 1 a)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7 + x^2}} =$$

Cálculo auxiliar

$$\sqrt{7 + x^2} = \sqrt{7\left(1 + \frac{x^2}{7}\right)}$$

escribiendo el segundo término como una fracción al cuadrado obtenemos

$\sqrt{7 + x^2} = \sqrt{7}\,\sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2}$ volvemos a la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7 + x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{7}\,\sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2}}$$

hacemos la sustitución $z = \dfrac{x}{\sqrt{7}} \longrightarrow dz = \dfrac{dx}{\sqrt{7}} \longrightarrow dx = \sqrt{7}\, dz$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7 + x^2}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} \int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \operatorname{argsenh} z + C = \operatorname{argsenh}\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C$$

Solución obtenida con el software *Mathematica* :

$$\int \frac{1}{\sqrt{7 + x^2}}\, dx = \text{ArcSinh}\left[\frac{x}{\sqrt{7}}\right]$$

Ejemplo 1 b)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}} =$$

Cálculo auxiliar

$$\sqrt{7-x^2} = \int 7\left(1-\frac{x^2}{7}\right) d\square$$

escribiendo el segundo término como una fracción al cuadrado obtenemos

$$\sqrt{7-x^2} = \sqrt{7}\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2}$$

volvemos a la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{7}\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2}}$$

hacemos la sustitución

$$z = \frac{x}{\sqrt{7}} \longrightarrow dz = \frac{dx}{\sqrt{7}} \longrightarrow dx = \sqrt{7}\, dz$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin z + C = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C$$

Solución obtenida con el software *Mathematica* :

$$\text{FullSimplify}\left[\int \frac{1}{\sqrt{7-x^2}}\, dx\right] = \text{ArcSin}\left[\frac{x}{\sqrt{7}}\right]$$

Si a $\neq$ 1 b = 0 c $\neq$ 0

Ejemplo 2 a)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}} =$$

Cálculo auxiliar

$$\sqrt{7+8x^2} = \sqrt{7\left(1+\frac{8x^2}{7}\right)} = \sqrt{7}\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{8}\ x}{\sqrt{7}}\right)^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{8}\ x}{\sqrt{7}}\right)^2}}$$

$$z = \frac{\sqrt{8}\ x}{\sqrt{7}} \longrightarrow dz = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}} dx \longrightarrow dx = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}} dz$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{8}\ x}{\sqrt{7}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}} \int \frac{dx}{\sqrt{1+z^2}}$$

integramos y racionalizamos el denominador en los coeficientes que están fuera de la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}} =$$

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}\ \sqrt{8}} \text{argsen}\, z + C = \frac{\sqrt{8}}{8} \text{argsen}\left(\frac{\sqrt{8}\ x}{\sqrt{7}}\right) + C = \frac{2\sqrt{2}}{8} \text{argsen}\left(\frac{2\sqrt{2}\ x}{\sqrt{7}}\right) + C = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{argsen}\left(2\sqrt{\frac{2}{7}}\ x\right) + C$$

Solución obtenida con el software *Mathematica* :

$$\int \frac{1}{\sqrt{7+8x^2}} \, dx = \frac{\text{ArcSinh}\left[2\sqrt{\frac{2}{7}}\ x\right]}{2\sqrt{2}}$$

Ejemplo 2 b)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7-8\,x^2}} =$$

Cálculo auxiliar

$$\sqrt{7-8\,x^2} = \sqrt{7\left(1-\frac{8\,x^2}{7}\right)} = \sqrt{7}\,\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{8}\,x}{\sqrt{7}}\right)^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7-8\,x^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{8}\,x}{\sqrt{7}}\right)^2}}$$

$$z = \frac{\sqrt{8}\,x}{\sqrt{7}} \longrightarrow dz = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}}\,dx \longrightarrow dx = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}\,dz$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7-8\,x^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{8}\,x}{\sqrt{7}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\,\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7-8\,x^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{8}\,\text{arcsen}\,z + C = \frac{\sqrt{2}}{4}\,\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{8}\,x}{\sqrt{7}}\right) + C = \frac{\sqrt{2}}{4}\,\text{arcsen}\left(2\sqrt{\frac{2}{7}}\,x\right) + C$$

Solución obtenida con el software *Mathematica* :

$$\text{FullSimplify}\left[\int \frac{1}{\sqrt{7-8\,x^2}}\,dx\right] = \frac{\text{ArcSin}\left[2\sqrt{\frac{2}{7}}\,x\right]}{2\sqrt{2}}$$

Si a ≠ 1 b ≠ 0 c ≠ 0

Ejemplo 3 a)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8x^2+2x-5}} =$$

Cálculo auxiliar

$$\sqrt{8x^2+2x-5} = \sqrt{8\left[\left(x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{64}\right)-\frac{5}{8}-\frac{1}{64}\right]}$$

$$\sqrt{8x^2+2x-5} = \sqrt{8\left[\left(x+\frac{1}{8}\right)^2-\frac{41}{64}\right]}$$

$$\sqrt{8x^2+2x-5} = \sqrt{8}\sqrt{\left(\frac{8x+1}{8}\right)^2-\frac{41}{64}}$$

$$\sqrt{8x^2+2x-5} = \sqrt{8}\sqrt{\frac{(8x+1)^2}{64}-\frac{41}{64}}$$

$$\sqrt{8x^2+2x-5} = \frac{1}{\sqrt{8}}\sqrt{(8x+1)^2-41}$$

$$\sqrt{8x^2+2x-5} = \sqrt{\frac{41}{8}}\sqrt{\frac{(8x+1)^2}{41}-1}$$

$$\sqrt{8x^2+2x-5} = \sqrt{\frac{41}{8}}\sqrt{\left(\frac{8x+1}{\sqrt{41}}\right)^2-1}$$

volviendo a la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8x^2+2x-5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{41}{8}}\sqrt{\left(\frac{8x+1}{\sqrt{41}}\right)^2-1}} =$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8x^2+2x-5}} = \sqrt{\frac{8}{41}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{8x+1}{\sqrt{41}}\right)^2-1}} =$$

$$z = \frac{8x+1}{\sqrt{41}} \longrightarrow dz = \frac{8}{\sqrt{41}}dx \longrightarrow dx = \frac{\sqrt{41}}{8}dz$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8x^2+2x-5}} = \sqrt{\frac{8}{41}}\frac{\sqrt{41}}{8}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8\,x^2+2\,x-5}} = \frac{\sqrt{8}}{8} \int \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8\,x^2+2\,x-5}} = \frac{\sqrt{8}}{8} \text{ argcoshz } + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8\,x^2+2\,x-5}} = \frac{\sqrt{8}}{8} \text{ argcosh}\left(\frac{8\,x+1}{\sqrt{41}}\right) + C$$

Solución obtenida con el software *Mathematica* :

$$\int \frac{1}{\sqrt{8\,x^2+2\,x-5}}\, dx = \frac{\text{Log}\left[1+8\,x+2\,\sqrt{2}\,\sqrt{-5+2\,x+8\,x^2}\right]}{2\,\sqrt{2}}$$

(son expresiones equivalentes, el programa lo escribe de otra manera)

Combinación método de sustitución y de la forma $\int \frac{dx}{\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c}}$

$$\int \frac{x+7}{\sqrt{3\,x^2+6\,x-10}}\,dx$$

En este caso tenemos un polinomio de grado 1 en el numerador así que primer tenemos que hacer una sustutición.

$z = 3\,x^2 + 6\,x - 10$

$dz = (6\,x + 6)\,dx$

y vemos que no tenemos exactamente esta expresión en el numerador, así que tenemos que acomodar los coeficientes para que quede esta derivada.

Vamos a hacer con un cálculo auxiliar.
En primer lugar separamos en dos expresiones algebraicas

$$\frac{x}{\sqrt{3\,x^2+6\,x-10}} + \frac{7}{\sqrt{3\,x^2+6\,x-10}}$$

en la primera multiplicamos y dividimos por 6

$$\frac{1}{6}\frac{6\,x}{\sqrt{3\,x^2+6\,x-10}} + \frac{7}{\sqrt{3\,x^2+6\,x-10}}$$

ahora faltaría agregarle "+6".

$$\frac{1}{6}\frac{6\,x+6-6}{\sqrt{3\,x^2+6\,x-10}} + \frac{7}{\sqrt{3\,x^2+6\,x-10}}$$

volvemos a separar en dos expresiones algebraicas la primera, quedando

$$\frac{1}{6}\frac{6\,x+6}{\sqrt{3\,x^2+6\,x-10}} - \frac{1}{6}\frac{6}{\sqrt{3\,x^2+6\,x-10}} + \frac{7}{\sqrt{3\,x^2+6\,x-10}}$$

podemos juntar las últimas dos expresiones

$$\frac{1}{6}\frac{6\,x+6}{\sqrt{3\,x^2+6\,x-10}} + \frac{6}{\sqrt{3\,x^2+6\,x-10}}$$

volvemos a la integral y nos quedan dos integrales

$$\int \frac{x+7}{\sqrt{3\,x^2+6\,x-10}}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{6\,x+6}{\sqrt{3\,x^2+6\,x-10}}\,dx + 6\int \frac{1}{\sqrt{3\,x^2+6\,x-10}}\,dx$$

la primera integral se soluciona con la sustitución planteada al principio y la segunda debemos completar cuadrados para llevarla a la forma correspondiente

Cáculo auxiliar

$$\sqrt{3\,x^2+6\,x-10} = \sqrt{3}\,\sqrt{\left(x^2+2\,x+1\right) - \frac{10}{3} - 1}$$

$$\sqrt{3\,x^2+6\,x-10} = \sqrt{3}\,\sqrt{(x+1)^2-\frac{13}{3}}$$

$$\sqrt{3\,x^2+6\,x-10} = \sqrt{3}\,\sqrt{\frac{13}{3}\left[\frac{3\,(x+1)^2}{13}-1\right]}$$

$$\sqrt{3\,x^2+6\,x-10} = \sqrt{13}\,\sqrt{\frac{3\,(x+1)^2}{13}-1}$$

$$3\,x^2+6\,x-10 = \sqrt{13}\,\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}\,(x+1)}{\sqrt{13}}\right)^2-1}$$

$$\int \frac{x+7}{\sqrt{3\,x^2+6\,x-10}}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{6\,x+6}{\sqrt{3\,x^2+6\,x-10}}\,dx + \frac{6}{\sqrt{13}}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}\,x+\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\right)^2-1}}\,dx$$

$$t = \frac{\sqrt{3}\,x+\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \longrightarrow dt = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\,dx \longrightarrow dx = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}\,dt$$

ahora hacemos las dos sustituciones

$$\int\frac{x+7}{\sqrt{3\,x^2+6\,x-10}}dx = \frac{1}{6}\int\frac{1}{\sqrt{z}}\,dz + \frac{6}{\sqrt{13}}\int\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dx$$

$$\int\frac{x+7}{\sqrt{3\,x^2+6\,x-10}}dx = \frac{1}{6}\int z^{\frac{-1}{2}}\,dz + \frac{6}{\sqrt{13}}\int\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dx$$

$$\int\frac{x+7}{\sqrt{3\,x^2+6\,x-10}}dx = \frac{1}{6}\,2\,z^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{\sqrt{13}}\,\text{argcosh}\,t + C$$

$$\int\frac{x+7}{\sqrt{3\,x^2+6\,x-10}}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{3\,x^2+6\,x-10} + \frac{6}{\sqrt{13}}\,\text{argcosh}\left(\frac{\sqrt{3}\,x+\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\right) + C$$

Solución obtenida con el software *Mathematica* :

$$\text{Simplify}\left[\int\frac{x+7}{\sqrt{3\,x^2+6\,x-10}}\,dx\right]$$

$$\frac{1}{3}\left(\sqrt{-10+6\,x+3\,x^2} + 6\sqrt{3}\,\text{Log}\left[3+3\,x+\sqrt{-30+18\,x+9\,x^2}\right]\right)$$

## Método de integración por fracciones simples

Caso 1 : Raíces reales y distintas en el denominador

$$\int \frac{x^2 - 5x + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x}\, dx$$

buscamos las raíces del denominador

Cálculo auxiliar

Vemos que primero podemos sacar factor común x

$x^3 - 3x^2 + 2x = x\left(x^2 - 3x + 2\right)$

ahora buscamos las raíces del polinomio de grado 2

$x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2)$

ahi tenemos tres raíces reales y distintas.
Para plantear las fracciones simples, siempre se plantean tantas fracciones como raíces tenga el denominador.

En este caso debemos plantear tres

$$\frac{x^2 - 5x + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$$

para buscar los valores de las constantes, hallamos el común denominador

$$\frac{x^2 - 5x + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{a(x-1)(x-2) + b\,x(x-2) + c\,x(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

como los denominadores son iguales podemos plantear la igualdad de los numeradores

$x^2 - 5x + 2 = a(x-1)(x-2) + b\,x(x-2) + c\,x(x-1)$

y ahora usamos los valores de las raíces

si $x = 0$

$2 = a(-1)(-2) \rightarrow a = 1$

si $x = 1$

$1 - 5 + 2 = b(1 - 2)$

$-2 = -b \rightarrow b = 2$

si $x = 2$

$2^2 - 5 \times 2 + 2x = c\,2(2-1)$

$-4 = 2c \rightarrow c = -2$

reemplanzado los valores en

$$\frac{x^2 - 5x + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2}$$

obtenemos

$$\frac{x^2-5x+2}{x^3-3x^2+2x}=\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x-2}$$

volviendo a la integral

$$\int\frac{x^2-5x+2}{x^3-3x^2+2x}\,dx=\int\frac{1}{x}\,dx+\int\frac{2}{x-1}\,dx-\int\frac{2}{x-2}\,dx$$

$$\int\frac{x^2-5x+2}{x^3-3x^2+2x}\,dx=\ln x\ +x\ln(x-1)-2\ln(x-2)+C$$

Solución obtenida con el software *Mathematica* :

$$\int\frac{x^2-5x+2}{x^3-3x^2+2x}\,dx=-2\,\mathrm{Log}[-2+x]+2\,\mathrm{Log}[-1+x]+\mathrm{Log}[x]$$

Caso 2 : Raíces reales distintas y múltiples

$$\int\frac{3x^2-1}{x^3-x^2}\,dx$$

$x^3-x^2=x^2\,(x-1)$

tenemos tres raíces, el 1 y el 0 como raíz doble

ahora tenemos que plantear de la siguiente manera

$$\frac{3x^2-1}{x^3-x^2}=\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x-1}$$

y trabajamos igual que antes

$$\frac{3x^2-1}{x^3-x^2}=\frac{a\,(x-1)+b\,x\,(x-1)+c\,x^2}{x^2\,(x-1)}$$

$3x^2-1=a\,(x-1)+b\,x\,(x-1)+c\,x^2$

si $x=0$

$-1=a\,(-1)\rightarrow a=1$

si $x=1$

$3-1=c\rightarrow c=2$

y como no tenemos más raíces distintas hacemos lo siguiente

reemplazamos los valores hallados en

$3x^2-1=a\,(x-1)+b\,x\,(x-1)+c\,x^2$

obteniendo

$3x^2-1=(x-1)+b\,x\,(x-1)+2\,x^2$

y ahora reemplazamos x por un valor real cualquiera

por ejemplo $x=2$

$3\,2^2-1=(2-1)+b\,2\,(2-1)+2\,2^2$

$11 = 9 + 2\, b$

$2 = 2\, b \to b = 1$

asi tenemos

$$\frac{3\, x^2 - 1}{x^3 - x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{2}{x - 1}$$

volviendo ala integral

$$\int \frac{3\, x^2 - 1}{x^3 - x^2}\, dx = \int \frac{1}{x^2}\, dx + \int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{2}{x - 1}\, dx$$

$$\int \frac{3\, x^2 - 1}{x^3 - x^2}\, dx = \int x^{-2}\, dx + \int \frac{1}{x}\, dx + 2 \int \frac{1}{x - 1}\, dx$$

$$\int \frac{3\, x^2 - 1}{x^3 - x^2}\, dx = -x^{-1} + \ln x + 2 \ln (x - 1) + C$$

$$\int \frac{3\, x^2 - 1}{x^3 - x^2}\, dx = -\frac{1}{x} + \ln x + 2 \ln (x - 1) + C$$

Solución obtenida con el software *Mathematica* :

$$\int \frac{3\, x^2 - 1}{x^3 - x^2}\, dx = -\frac{1}{x} + 2\, \text{Log}[-1 + x] + \text{Log}[x]$$

Caso 2 : Raíces reales y complejas

$$\int \frac{2\, x^2 + x + 1}{x^3 + x}\, dx$$

$x^3 + x = x\left(1 + x^2\right)$

una raíz real y dos raíces complejas conjugadas

ahora debemos trabajar así

$$\frac{2\, x^2 + x + 1}{x^3 + x} = \frac{a}{x} + \frac{b\, x + c}{x^2 + 1}$$

$$\frac{2\, x^2 + x + 1}{x^3 + x} = \frac{a\left(x^2 + 1\right) + (b\, x + c)\, x}{x\left(x^2 + 1\right)}$$

$2\, x^2 + x + 1 = a\left(x^2 + 1\right) + (b\, x + c)\, x$

si $x = 0$

$1 = a$

reemplazando el valor de a

$2\, x^2 + x + 1 = \left(x^2 + 1\right) + (b\, x + c)\, x$

y ahora elegimos dos valores cualesquiera de x porque debemos encontrar dos parámetros, a y b.

si $x = 1$

2 + 1 + 1 = (1 + 1) + (b + c)

si x = -1

2 - 1 + 1 = (1 + 1) - (-b + c)

$$\begin{cases} 4 = 2 + b + c \\ 2 = 2 + b - c \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = b + c \\ 0 = b - c \end{cases}$$

b = c

2 b = 2 -> b = 1

reemplazando en

$$\frac{2x^2 + x + 1}{x^3 + x} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$$

$$\frac{2x^2 + x + 1}{x^3 + x} = \frac{1}{x} + \frac{x + 1}{x^2 + 1}$$

volviendo a la integral

$$\int \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 + x}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{x + 1}{x^2 + 1}\, dx$$

la segunda integral la separamos en dos

$$\int \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 + x}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{x}{x^2 + 1}\, dx + \int \frac{1}{x^2 + 1}\, dx$$

y para la segunda integral hacemos una sustitución

$$z = x^2 + 1 \rightarrow dz = 2x\,dx \rightarrow x\,dx = \frac{dz}{2}$$

$$\int \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 + x}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{z}\, dz + \int \frac{1}{x^2 + 1}\, dx$$

integrando

$$\int \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 + x}\, dx = \ln x + \frac{1}{2} \ln z + \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 + x}\, dx = \ln x + \frac{1}{2} \ln\left(x^2 + 1\right) + \operatorname{arctg} x + C$$

Solución obtenida con el software *Mathematica* : $\int \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 + x}\, dx = \text{ArcTan}[x] + \text{Log}[x] + \frac{1}{2}\text{Log}\left[1 + x^2\right]$

Integrales trigonométricas

Caso 1 : Función seno o coseno elevada a un exponente par

Vamos a deducir la fórmula que expresa el seno o coseno de un ángulo en función del ángulo doble.

Recordemos

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$

si $\alpha = \beta = x$ nos queda

$\cos(x + x) = \cos x \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x$

$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

Por otro lado sabemos que

$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ de donde podemos escribir

$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \qquad \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$

vamos a reemplazar en la fórmula anterior

$\cos(2x) = 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right)$

$\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \qquad \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$

y ahora vamos a despejar $\operatorname{sen}^2 x$ de la primera y $\cos^2 x$ de la segunda

$2\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos(2x) \qquad 2\cos^2 x = 1 + \cos(2x)$

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

Estas dos fórmulas vamos a usarlas cuando querramos resolver integrales con funciones seno o coseno elevada a un exponente par.

Ejemplo 1

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx$$

en la segunda integral hacemos una sustitución

$$z = 2x \rightarrow dz = 2\,dx \rightarrow dx = \frac{dz}{2}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\int \cos z\, dz$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} z + C$$

volviendo a x

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C$$

Solución obtenida con el software *Mathematica* :

$$\int \mathrm{Sin}[x]^2\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\mathrm{Sin}[2x]$$

Ejemplo 2

$$\int \text{sen}^4 x \, dx =$$

Cálculo auxiliar

hacemos

$$\left(\text{sen}^2 x\right)^2 = \left(\frac{1 - \cos(2x)}{2}\right)^2$$

$$\text{sen}^4 x = \frac{1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)}{4}$$

$$\text{sen}^4 x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

y como todavía nos queda un $\cos^2(2x)$ , éste lo reemplazamos usando la fórmula anterior

$$\cos^2(2x) = \frac{1 + \cos(4x)}{2}$$

entonces nos queda

$$\text{sen}^4 x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$$

$$\text{sen}^4 x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\left(\frac{1 + \cos(4x)}{2}\right)$$

$$\text{sen}^4 x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos(4x)$$

$$\text{sen}^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$$

volviendo a la integral

$$\int \text{sen}^4 x \, dx = \frac{3}{8}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\, dx + \frac{1}{8}\int \cos(4x)\, dx$$

y para las dos últimas integrales hacemos sustitución

$$z = 2x \rightarrow dz = 2\,dx \rightarrow dx = \frac{dz}{2}$$

$$t = 4x \rightarrow dt = 4\,dx \rightarrow dx = \frac{dt}{4}$$

$$\int \text{sen}^4 x \, dx = \frac{3}{8}\int dx - \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\int \cos z\, dz + \frac{1}{8}\,\frac{1}{4}\int \cos t\, dt$$

$$\int \text{sen}^4 x \, dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin z + \frac{1}{32}\,\text{sen}\, t + C$$

volviendo a x

$$\int \text{sen}^4 x \, dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\,\text{sen}(4x) + C$$

Solución obtenida con el software *Mathematica* :

$$\int \mathrm{Sin}[x]^4 \, dx = \frac{3\,x}{8} - \frac{1}{4}\,\mathrm{Sin}[2\,x] + \frac{1}{32}\,\mathrm{Sin}[4\,x]$$

Se trabaja de manera similar con la función coseno.

Caso 2 : Función seno o coseno elevada a un exponente impar

Cada potencia impar la vamos a escribir la siguiente manera

$\text{sen}^3 x = \text{sen}^2 x \,\text{sen}\, x \qquad \cos^3 x = \cos^2 x \,\cos x$

$\text{sen}^5 x = \text{sen}^4 x \,\text{sen}\, x = (\text{sen}^2 x)^2 \,\text{sen}\, x \qquad \cos^5 x = \cos^4 x \,\cos x = (\cos^2 x)^2 \cos x$

$\text{sen}^7 x = \text{sen}^6 x \,\text{sen}\, x = (\text{sen}^2 x)^3 \,\text{sen}\, x \qquad \cos^7 x = \cos^6 x \,\cos x = (\cos^2 x)^3 \cos x$

en general

$(\text{sen}\, x)^{2n+1} = (\text{sen}^2 x)^n \,\text{sen}\, x \qquad (\cos x)^{2n+1} = (\cos^2 x)^n \cos x$

Una vez que hicimos esto se hacen los reemplazos

$\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \qquad \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$

quedando

$(\text{sen}\, x)^{2n+1} = (1 - \cos^2 x)^n \,\text{sen}\, x \qquad (\cos x)^{2n+1} = (1 - \text{sen}^2 x)^n \cos x$

Ejemplo 1

$$\int \text{sen}^3 x \, dx = \int \text{sen}^2 x \,\text{sen}\, x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \,\text{sen}\, x \, dx =$$

$$\int \text{sen}^3 x \, dx = \int \text{sen}\, x \, dx - \int \cos^2 x \,\text{sen}\, x \, dx =$$

en la segunda integral hacemos una sustitución

z = cos x -> dz = -sen dx -> sen x dx = -dz

$$\int \text{sen}^3 x \, dx = \int \text{sen}\, x \, dx + \int z^2 \, dz =$$

$$\int \text{sen}^3 x \, dx = -\cos x + \frac{z^3}{3} + C$$

$$\int \text{sen}^3 x \, dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

Solución obtenida con el software *Mathematica* :

$$\int \text{Sin}[x]^3 \, dx = -\frac{3\,\text{Cos}[x]}{4} + \frac{1}{12} \text{Cos}[3\, x]$$

Combinando trigonométricas con método de sustitución

Supongamos que necesitamos resolver

$$\int \text{sen}^5 (4x - 10) \, dx =$$

vemos que tenemos una función seno elevada a una potencia impar, pero el argumento de dicha fución no es sólo x. Entonces es conveniente en primer lugar hacer una sustitución y luego resolver la integral trigonométrica.

$$z = 4x - 10 \;\rightarrow\; dz = 4\, dx \;\rightarrow\; dx = \frac{dz}{4}$$

$$\frac{1}{4}\int \text{sen}^5 z\, dz =$$

y ahora hacemos la integral trigonométrica

$$\frac{1}{4}\int \text{sen}^5 z\, dz = \frac{1}{4}\int \text{sen}^4 z \,\text{sen}\, z\, dz$$

$$\frac{1}{4}\int \text{sen}^5 z\, dz = \frac{1}{4}\int \left(\text{sen}^2 z\right)^2 \text{sen}\, z\, dz$$

$$\frac{1}{4}\int \text{sen}^5 z\, dz = \frac{1}{4}\int \left(1 - \cos^2 z\right)^2 \text{sen}\, z\, dz$$

desarrollamos el binomio al cuadrado

$$\frac{1}{4}\int \text{sen}^5 z\, dz = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos^2 z + \cos^4 z\right) \text{sen}\, z\, dz$$

aplicamos propiedad distributiva

$$\frac{1}{4}\int \text{sen}^5 z\, dz = \frac{1}{4}\int \left(\text{sen}\, z - 2\cos^2 z\,\text{sen}\, z + \cos^4 z\ \ \text{sen}\, z\right) dz$$

separamos las integrales

$$\frac{1}{4}\int \text{sen}^5 z\, dz = \frac{1}{4}\int \text{sen}\, z\ \ dz + \frac{1}{2}\int \cos^2 z\,\text{sen}\, z\ \ dz + \frac{1}{4}\int \cos^4 z\ \ \text{sen}\, z\ \ dz$$

hacemos la sustitución

t = cos x -> dt = -sen dx -> sen x dx = -dt

$$\frac{1}{4}\int \text{sen}^5 z\, dz = \frac{1}{4}\int \text{sen}\, z\ \ dz - \frac{1}{2}\int t^2\, dt - \frac{1}{4}\int t^4\, dt$$

integramos

$$\frac{1}{4}\int \text{sen}^5 z\, dz = -\frac{1}{4}\cos z - \frac{1}{2}\,\frac{t^3}{3}\, dt - \frac{1}{4}\,\frac{t^5}{5} + C$$

volvemos a z

$$\frac{1}{4}\int \text{sen}^5 z\, dz = -\frac{1}{4}\cos z - \frac{\cos^3 z}{6}\, dt - \frac{\cos^5 z}{20} + C$$

volvemos a x

$$\int \text{sen}^5 (4x - 10)\, dx = -\frac{1}{4}\cos(4x - 10) - \frac{\cos^3 (4x - 10)}{6}\, dt - \frac{\cos^5 (4x - 10)}{20} + C$$

Solución obtenida con el software *Mathematica* :

$$\int \text{Sin}[4x - 10]^5\, dx = -\frac{5}{32}\,\text{Cos}[10 - 4x] + \frac{5}{192}\,\text{Cos}[3(10 - 4x)] - \frac{1}{320}\,\text{Cos}[5(10 - 4x)]$$

Ecuación diferencial

Una ecuación diferencial es aquella ecuación en la cual la incógnita es una función, y aparecen involucradas tanto la función como su derivada.

Ejemplo

$y' = 6\,x$ es un ecuación diferencial

para resolverla hacemos lo siguiente :

escribir y' como cociente de diferenciales

$$\frac{dy}{dx} = 6\,x$$

ahora escribimos de un lado del igual todo lo relacionado con y y del otro todo lo relacionado con x

$dy = 6\,x\,dx$

ahora que quedaron las variables separadas, integramos de los dos lados del igual

$$\int dy = \int 6\,x\,dx$$

$y = 3\,x^2 + C$

Lo que obtuvimos se llama familia de curvas o solución general. ya que por cada valor de C tenemos una curva distinta.

Si queremos encontrar una curva en particular debe darse como datos lo que se llama condición inicial.

Por ejemplo, de todas las curvas elegir la que pase por el punto (-4, 5)

Y lo que hacemos es en la solución general reemplazar por este punto y despejar C

$y = 3\,x^2 + C$

$5 = 3\,(-4)^2 + C$

$C = 5 - 3\,(-4)^2$

$C = -43$

y reemplazando el valor de C en la solucion general obtenemos la solución particular

$y = 3\,x^2 - 43$