Resolución TP8:

Ejercicio 17-Extra

Sobre el campo $F(x, y) = (x^2 + y + e^{x+y}, x + y^5 + e^{x+y})$

hallar el resultado para la integral de línea para el recorrido usando función potencial:

$\mathfrak{C}: recorrido\ en\ orden\ de\ los\ puntos$

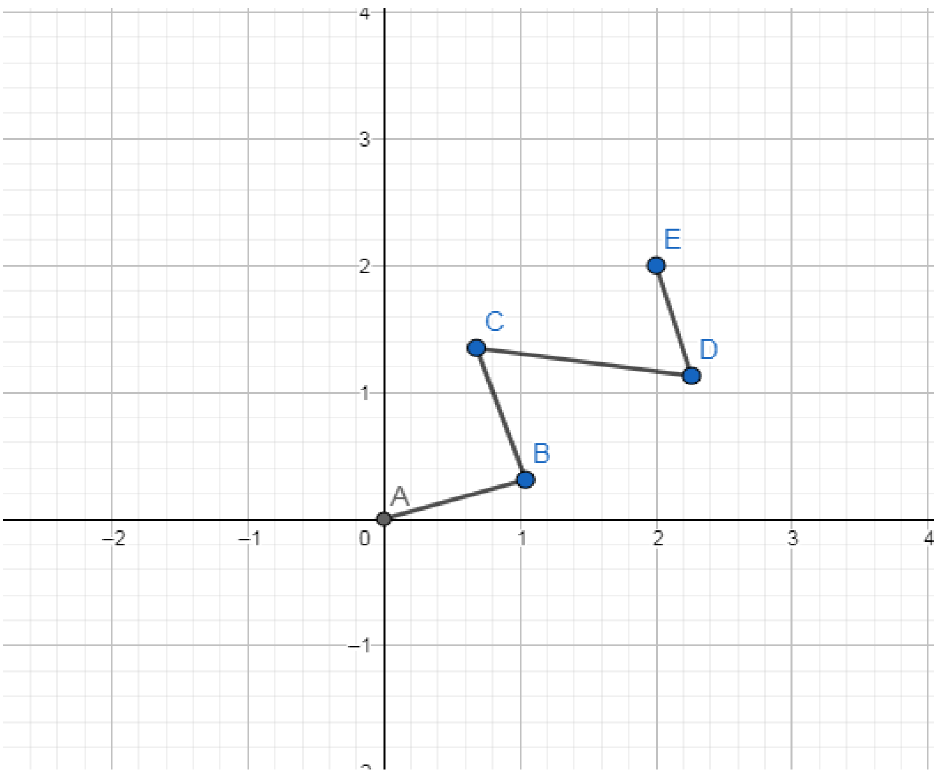
$A = (0, 0)$

$B = (1.04, 0.31)$

$C = (0.68, 1.35)$

$D = (2.26, 1.13)$

$E = (2, 2)$



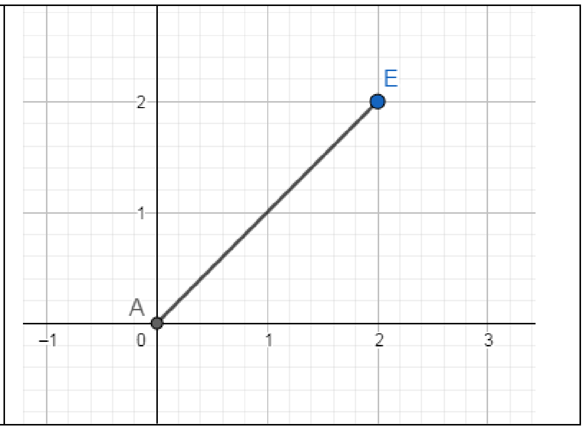
Resolución:

Si $F(x,y) = (x^2 + y + e^{x+y}, x + y^5 + e^{x+y}) = \nabla f(x,y)$

Alcanzaría con calcular:

$$\int_C FdC \overset{\substack{T.Campo\\ Cons.}}{\hat{=}} \int_{t_A}^{t_E} \nabla f dC$$

$$\int_{t_A}^{t_E} \nabla f dC \overset{\substack{T.funcion\\ Potencial}}{\hat{=}} f(E) - f(A)$$



Verificación:

Si Existe $f(x,y)$ tal que $\nabla f(x,y) = F(x,y)$ entonces

$$f_x = P \quad f_y = Q$$

$$f_{xy} = P_y \quad f_{yx} = Q_x$$

Por lo que el teorema de Swarchz aplica de la siguiente manera

$$f_{xy} = f_{yx} \rightarrow P_y = Q_x$$

En este caso:

$$P(x,y) = x^2 + y + e^{x+y}, \rightarrow P_y = 1 + e^{x+y}$$

$$Q(x,y) = x + y^5 + e^{x+y} \rightarrow Q_x = 1 + e^{x+y}$$

Se verifica que $\nabla f(x,y) = F(x,y)$ por lo que vale

$$\int_C FdC = f(E) - f(A) = f(2,2) - f(0,0)$$

Solo nos falta la Función Potencial

Método I:

$$f(x,y) = h(x,y) + \psi(y)\ con \begin{cases} h(x,y) = \int P(x,y)dx \\ \psi'(y) = Q(x,y) - h_y(x,y) \end{cases}$$

$$h(x,y)=\int P(x,y)dx$$

$$h(x,y)=\int(x^2+y+e^{x+y})dx=\frac{x^3}{3}+xy+e^{x+y}$$

$$h_y(x,y)=x+e^{x+y}$$

$$\psi'(y)=Q(x,y)-h_y(x,y)$$

$$\psi'(y)=(x+y^5+e^{x+y})-(x+e^{x+y})=y^5$$

$$\psi(y)=\int y^5dy=\frac{y^6}{6}+k$$

$$f(x,y)=h(x,y)+\psi(y)$$

$$f(x,y)=\frac{x^3}{3}+xy+e^{x+y}+\frac{y^6}{6}+k$$

Verificación de Función potencial con $f_x=P \quad f_y=Q$

$$f_x=\frac{3x^2}{3}+y+e^{x+y}+0+0=x^2+y+e^{x+y}=P$$

$$f_y=0+x+e^{x+y}+\frac{6y^5}{6}+0=x+e^{x+y}+y^5=Q$$

Resultado:

$$\int_C FdC=f(E)-f(A)=f(2{,}2)-f(0{,}0)$$

$$f(2{,}2)=\frac{2^3}{3}+(2)(2)+e^{2+2}+\frac{(2)^6}{6}+k=\frac{52}{3}+e^4+k$$

$$f(0{,}0)=\frac{0^3}{3}+(0)(0)+e^{0+0}+\frac{0^6}{6}+k=0+e^0+k=1+k$$

$$\int_C FdC=f(2{,}2)-f(0{,}0)=\left(\frac{52}{3}+e^4+k\right)-(1+k)=\boldsymbol{e^4+\frac{49}{3}}$$