MATRICES

INVERSA DE UNA MATRIZ

Tercera forma de calcularla

Correspondiente a la clase 5

Todas las primera diapositivas son las que corresponden a la clase 3.

Si tienes muy claro las dos primeras formas aprendidas para calcular la matriz inversa puedes ir directamente a

c) *Por Determinantes*

Matriz inversa

La inversa de una matriz A de R ^{nxn}, si existe, es la matriz A^{-1} perteneciente a R ^{nxn} que cumple que:

$$A \,.\, A^{-1} = A^{-1} .\, A = I_n$$

Maneras de calcular la inversa de una matriz

a) Por definición
b) Por el método de Gauss -Jordan
c) Por Determinantes y la matriz Adjunta

a) Por definición

- Supongamos que la matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Se le asignan letras a los elementos de la inversa de la matriz que debemos calcular:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a) Por definición

- Se aplica la definición:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Se resuelve el producto de matrices $A.A^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta multiplicación debe ser igual a la matriz Identidad

a) Por definición

- Se igualan los elementos de las matrices:

Y se resuelve el sistema

de ecuaciones

$$a + c = 1$$

$$c = 0$$

$$b + d = 0$$

$$d = 1$$

- Se resuelven los sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{c} a + c = 1 \\ c = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\mathrm{a=1}}\ ;\ \boxed{\mathrm{c=0}}$$

$$\left.\begin{array}{c} b + d = 0 \\ d = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\mathrm{d=1}}\ ;\ \boxed{\mathrm{b=-1}}$$

Matriz Inversa

- Por lo que la inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Como existe la matriz inversa , se dice que la matriz A es inversible, regular o no singular.

Verificación

- Verifica que el producto $A.A^{-1}$ es la identidad

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0+1.0 & 1.(-1)+1.1 \\ 0.0+1.0 & 0.(-1)+1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) *Por método de Gauss - Jordan*

Consideremos la matriz A de 2x2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Hallaremos su inversa, si es que existe, por el método de Gauss Jordan

b) *Por método de Gauss - Jordan*

- Se escribe la matriz original a la izquierda, al lado, la matriz identidad (derecha):

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Mediante este método se debe obtener la matriz identidad en el lugar de la matriz original, quedando la inversa de la matriz en el lugar que estaba la matriz identidad:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & u & v \end{array}\right)$$

b) *Por método de Gauss - Jordan*

- El 2 que ocupa el lugar (1;2) debe dar 0 y para ello se realizan la siguiente operación:

F1 = 2F1 - F2

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2-3 & 4-4 & 2-0 & 0-1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- El 3 que ocupa el lugar (2;1) queremos que de 1, para ello se divide a todos los elementos de la fila entre 3:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 2 & -1 \\ \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

b) Por método de Gauss - Jordan

- Se cambia el signo a todos los términos de la primera fila:

F1=-F1

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

- El valor del elemento (2;1) debe tener el valor 0 y para ello se realiza la operación:

F2 = F2 - F1

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & \frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1-1 & \frac{4}{3} & 0-2 & \frac{1}{3}-1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} & 2 & -\frac{2}{3} \end{array}\right)$$

b) *Por método de Gauss - Jordan*

- Necesitamos que el valor del lugar (2;2) sea igual a 1 y para ello se multiplica cada uno de los elementos de la fila por 3/4:

$$F_2=F_2.3/4$$

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} & 2 & -\frac{2}{3} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{4}{3}\times\frac{3}{4} & 2\times\frac{3}{4} & -\frac{2}{3}\times\frac{3}{4} \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

La matriz inversa quedó a la derecha

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

b) *Por método de Gauss - Jordan*

- La matriz inversa resultó:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Verificamos:

$$A.A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.(-2)+2.\frac{3}{2} & 1.1+2.\left(-\frac{1}{2}\right) \\ 3.(-2)+4.\frac{3}{2} & 3.1+4.\left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

COMENZAMOS CON LA TERCERA FORMA

c) *Por determinantes*

- Calcularemos la inversa de una matriz A

Debemos recordar que:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.Adj(A)$$

c) *Por determinantes*

- Calcularemos la inversa de la matriz A de 3x3.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En el caso que el determinante sea nulo la matriz no tiene inversa

c) *Por determinantes*

- Primero debemos calcular su determinante

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

- Desarrollamos por la segunda columna, ya que tiene dos ceros. También es fácil usar la segunda fila

$$= 1.(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -1.(2.0 - 3.1) = -1.(-3) = 3$$

- det(A)=3 entonces la matriz es inversible, existe A^{-1}

c) *Por determinantes*

- Debemos obtener la matriz adjunta de A: Adj (A)

Comenzamos reemplazando cada elemento por su adjunto o cofactor

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

c) *Por determinantes*

- Luego tomamos la traspuesta para conseguir la matriz Adjunta: Adj(A)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

c) *Por determinantes*

- Se calcula la traspuesta de la matriz, así obtenemos la adjunta, es decir, se sustituyen los elementos de las filas a las columnas:

$$\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

c) *Por determinantes*

- La matriz inversa de A es igual al producto del inverso multiplicativo del determinante de A por la matriz adjunta de A.

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

- Te dejamos a vos la comprobación

$$A \,.\, A^{-1} = A^{-1} .\, A = I_3$$

Universidad Nacional
de La Matanza

GRACIAS