Resolución TP6:

Ejercicio 17 - vi

Hallar los puntos extremos para $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ dado la siguiente restricción $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0$, y clasificar como máximo o mínimo.

Para empezar:

- El dominio de ambas funciones es todo $\mathbb{R}^3$ por lo que no tenemos restricción alguna para los puntos que hallaremos
- Los gradientes de $\nabla f(x,y,z)\ y\ \nabla g(x,y,z)$deben ser paralelos.
    - $\nabla f(x,y,z) = \ell \nabla g(x,y,z)$
        - $f_x = \ell g_x$
        - $f_y = \ell g_y$
        - $f_z = \ell g_z$

Primeras Derivadas:

$$
\begin{aligned}
f_x &= 2x \\
f_y &= 2y \\
f_z &= 2z \\
g_x &= 2x \\
g_y &= \frac{y}{2} \\
g_z &= \frac{2}{9}z
\end{aligned}
$$

Sistema de ecuaciones:

$$
\begin{cases}
x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} - 1 = 0 \\
2x = 2x\ell \\
2y = \dfrac{y\ell}{2} \\
2z = \dfrac{2z\ell}{9}
\end{cases}
$$

De $2x = 2x\ell$ podemos suponer x≠0 $\wedge$ $\ell = 1$ $\vee$ x=0.

De $2y = \frac{y\ell}{2}$ podemos suponer y≠0 $\wedge$ $\ell = 4$ $\vee$ y=0.

De $2z = \frac{2z\ell}{9}$ podemos suponer z≠0 $\wedge$ $\ell = 9$ $\vee$ z=0.

$$si\ x \neq 0\ \wedge\ \ell = 1 \begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0 \\ 2y = \frac{y}{2} \\ 2z = \frac{2z}{9} \end{cases} \begin{matrix} para \\ ==> \\ y \neq 0 \\ z \neq 0 \end{matrix} \Big\{ No\ existe\ solucion\ posible$$

$$si\ x \neq 0\ \wedge\ \ell = 1 \begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0 \\ 2y = \frac{y}{2} \\ 2z = \frac{2z}{9} \end{cases} \begin{matrix} ==> \\ para \\ y = 0 \\ z = 0 \end{matrix} \Big\{ x^2 - 1 = 0 ==> \begin{matrix} Pc_1 = (1,0,0) \\ Pc_2 = (-1,0,0) \end{matrix}$$

$$Si\ x = 0 \begin{cases} \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0 \\ 2y = \frac{y\ell}{2} \\ 2z = \frac{2z\ell}{9} \end{cases} \begin{matrix} ==> \\ y \neq 0 \\ \ell = 4 \end{matrix} \begin{cases} \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0 \\ 2z = \frac{8}{9} z \end{cases} \begin{matrix} ==> \\ z = 0 \end{matrix} \Big\{ \frac{y^2}{4} = 1 => \begin{matrix} Pc_3 = (0,2,0) \\ Pc_4 = (0,-2,0) \end{matrix}$$

$$Si\ x = 0 \begin{cases} \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0 \\ 2y = \frac{y\ell}{2} \\ 2z = \frac{2z\ell}{9} \end{cases} \begin{matrix} ==> \\ y = 0 \end{matrix} \begin{cases} \frac{z^2}{9} - 1 = 0 \\ 2z = \frac{2z\ell}{9} \end{cases} \begin{matrix} ==> \\ \ell = 9 \\ z \neq 0 \end{matrix} \Big\{ \frac{z^2}{9} - 1 = 0 => \begin{matrix} Pc_5 = (0,0,3) \\ Pc_6 = (0,0,-3) \end{matrix}$$

$$Si\ x = 0 \begin{cases} \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0 \\ 2y = \frac{y\ell}{2} \\ 2z = \frac{2z\ell}{9} \end{cases} \begin{matrix} ==> \\ y = 0 \end{matrix} \begin{cases} \frac{z^2}{9} - 1 = 0 \\ 2z = \frac{2z\ell}{9} \end{cases} \begin{matrix} ==> \\ z = 0 \end{matrix} \Big\{ No\ existe\ solucion\ posible$$

Clasificación:

Método 1: Ya sabemos que ambos puntos cumplen la condición, debemos compáralos entre sí para saber si son máximo o mínimo.

Se evalúan en $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

- $f(Pc_1) = (1)^2 + (0)^2 + (0)^2 = 1$
- $f(Pc_2) = (-1)^2 + (0)^2 + (0)^2 = 1$
- $f(Pc_3) = (0)^2 + (2)^2 + (0)^2 = 4$
- $f(Pc_4) = (0)^2 + (-2)^2 + (0)^2 = 4$
- $f(Pc_5) = (0)^2 + (0)^2 + (3)^2 = 9$
- $f(Pc_6) = (0)^2 + (0)^2 + (-3)^2 = 9$

$Pc_1 y Pc_2$son mínimos condicionados de $g(x, y) = 0$

$Pc_5\ y\ Pc_6$ son máximos condicionados de $g(x, y) = 0$

Por comparación, $Pc_3\ y\ Pc_4$ son valores intermedios de $g(x, y) = 0$ que no son máximos o mínimos

Método 2: Matriz Hessiana Reducida

Lo usaremos para determinar $Pc_3 = (x_0, y_0, z_0, \ell_0) = (0,2,0,4) y\ Pc_4 = (0,-2,0,4)$

Si $L(x,y,z,\ell) = f(x,y,z) - \ell g(x,y,z)$

Se toma $-\ell$ para que se cumpla $\nabla f(x,y,z) = \ell \nabla g(x,y,z)$

$$H(f,g) = \begin{pmatrix} 0 & -g_x & -g_y & -g_z \\ -g_x & L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ -g_y & L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ -g_z & L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2x & -\frac{y}{2} & -\frac{2}{9}z \\ -2x & 2-\ell 2 & 0 & 0 \\ -\frac{y}{2} & 0 & 2-\ell\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{2}{9}z & 0 & 0 & 2-\ell\frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

Examinamos los determinantes de las submatrices en la diagonal de orden mayor o igual a 3:

$$h_1(f,g) = \begin{pmatrix} 0 & -2x & -\frac{y}{2} \\ -2x & 2-\ell 2 & 0 \\ -\frac{y}{2} & 0 & 2-\ell\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$h_2(f,g) = \begin{pmatrix} 2-\ell 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\ell\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\ell\frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

1. Si $\det(h_1) < 0\ \det(h_2) < 0$, tenemos un mínimo local en P
2. Si $\det(h_1) > 0$, $\det(h_2) < 0$, tenemos un máximo local en P
3. Si no se da lo anterior, Si $\det(h_1) \neq 0$, $\det(h_2) \neq 0$, tenemos un punto silla en P
4. Si no se da ninguno de los tres casos anteriores, el criterio no concluye nada

$$\begin{matrix} Pc_3 = (0,2,0) \\ Pc_4 = (0,-2,0) \end{matrix}\ Poseen\ \ell = 4$$

$$H(PC3) = \begin{pmatrix} 0 & -2*0 & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{9}*0 \\ -2*0 & 2-(2)(4) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2-\frac{4}{2} & 0 \\ -\frac{2}{9}*0 & 0 & 0 & 2-4\frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{10}{9} \end{pmatrix}$$

$$h_1(PC_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -6 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h_2(PC_3) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{9} \end{pmatrix}$$

Empezamos con h_1

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -6 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\left(-\frac{1}{2}\right)(-6)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

al ser positivo.

Si $\det(h_1) < 0$ $\det(h_2) < 0$, tenemos un mínimo local en P

Si $\det(h_1) > 0$, $\det(h_2) < 0$, tenemos un máximo local en P

Si no se da lo anterior, Si $\det(h_1) \neq 0$, $\det(h_2) \neq 0$, tenemos un punto silla en P

Si no se da ninguno de los tres casos anteriores, el criterio no concluye nada

la clasificación candidata es máximo. lo corroboramos con h_2

$$\begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{9} \end{vmatrix} = -6 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$$

Si $\det(h_1) < 0$ $\det(h_2) < 0$, tenemos un mínimo local en P

Si $\det(h_1) > 0$, $\det(h_2) < 0$, tenemos un máximo local en P

Si no se da lo anterior, Si $\det(h_1) \neq 0$, $\det(h_2) \neq 0$, tenemos un punto silla en P

Si no se da ninguno de los tres casos anteriores, el criterio no concluye nada

Los mismos resultados se observan en Pc_4

Pc_3 y Pc_4 son extremos condicionados de $g(x, y) = 0$ que por este método no se puede determinar si son máximos o mínimos

Razonamiento Final:

La matriz hessiana en este caso no provee la información necesaria. Sin embargo la comparación al observar f(P) en estos casos nos permite al menos comprobar que no hay punto de ensilladura.