

# Matemática Discreta

---

CLASE N°8

Ing. Marcela Bellani

UNLAM | FLORENCIO VARELA 1903 .B1754.SAN JUSTO.BUENOS AIRES

En esta clase se desarrollarán los siguientes temas:

-Camino simple y circuito simple. Camino y circuito de Hamilton y Camino y circuito de Euler. Isomorfismo de Grafos.

-Árbol: definición, árbol no dirigido, árbol dirigido; definición de raíz, hoja, altura, árbol, antecesores, niveles, balanceados. Propiedades  
Recorrido de árboles: preorden, postorden, orden simétrico; notación polaca, notación polaca inversa, notación polaca infija.

Para todas las clases contamos con la ayuda del sitio de la cátedra <http://discretaunlam.net.ar> donde encontrarás videos, ejercicios, explicaciones, autoevaluaciones de todos los temas de Matemática Discreta.



## CAMINOS, CIRCUITOS Y CICLOS

### Definiciones:

Sea  $G=(V,A,\varphi)$  :

- ❖ Un CAMINO es una sucesión finita  $(v_0, a_1, v_1, a_2, v_2, \dots, v_{n-1}, a_n, v_n)$ , cuyos términos son alternativamente vértices y aristas. (Vértices y aristas adyacentes)

El formalismo de la definición significa que se parte del vértice  $v_0$ , se sigue la arista  $a_1$  hasta  $v_1$ , se sigue la arista  $a_2$  hasta  $v_2$ , y así sucesivamente.

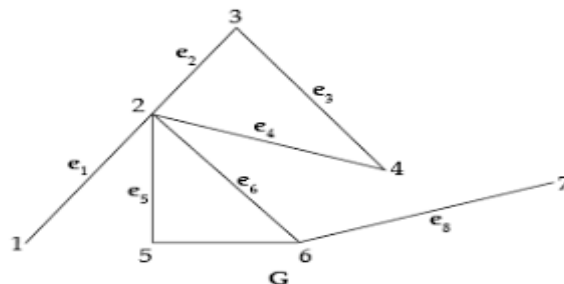
- ❖ La LONGITUD de un camino es el número de aristas que contiene.
- ❖ Un CAMINO SIMPLE es un camino con todos sus vértices distintos.
- ❖ Un CIRCUITO O CAMINO CERRADO es un camino de longitud no nula en donde el vértice inicial y final coinciden
- ❖ CIRCUITO SIMPLE O CICLO SIMPLE: circuito que no repite vértices salvo el caso trivial  $v_0=v_n$
- ❖ CICLO: circuito simple que no repite aristas.
- ❖ GRAFO ACÍCLICO: grafo que carece de ciclo.
- ❖ CAMINO ELEMENTAL: si todas las aristas son distintas

Estos conceptos son los mismos para dígrafos  $DG$ , salvo que las direcciones de los arcos deben concordar con la dirección del camino o cadena.

En el caso dirigido el ciclo recibe el nombre de circuito.

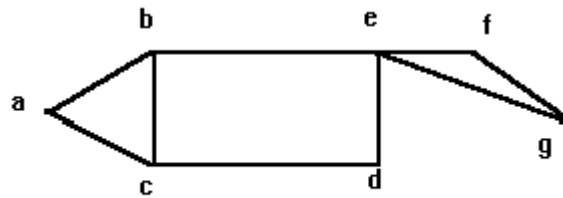
### Ejemplos:

1.



CAMINO	¿CAMINO SIMPLE?	¿CICLO?	¿CICLO SIMPLE?
(6, 5, 2, 4, 3, 2, 1)	NO	NO	NO
(6, 5, 2, 4)	SI	NO	NO
(2, 6, 5, 2, 4, 3, 2)	NO	SI	NO
(5, 6, 2, 5)	NO	SI	SI
(7)	SI	NO	NO

**2.** Para el siguiente grafo G, determinar:



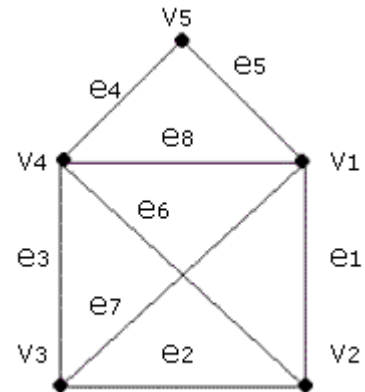
- 1- camino simple de b a d
- 2- camino no simple de b a d
- 3- ciclo simple de b a b
- 4- ciclo no simple de b a b
- 5- todos los caminos simples de b a f
- 6- Sabiendo que la distancia de x a y en un grafo no dirigido conexo G es la longitud de camino más corto de x a y, hallar la distancia desde d a los restantes vértices de G

Solución:

- 1) Camino simple de b a d: (b, e, d)
- 2) Camino no simple de b a d: (b, a, c, b, e, d)
- 3) Ciclo simple de b a b: (b, e, d, c, a, b)
- 4) Ciclo no simple de b a b: (b, e, f, g, e, b)
- 5) Todos los caminos simples de b a f: (b, e, f); (b, e, g, f); (b, a, c, d, e, f); (b, a, c, d, e, g, f); (b, c, d, e, f); (b, c, d, e, g, f).
- 6)  $d(d, a) = d(d, b) = d(d, f) = d(d, g) = 2$   
 $d(d, e) = d(d, c) = 1$

➤ **Ejercicios resueltos:**

**1-**Dado el siguiente grafo, determinar cuál de las sucesiones siguientes son caminos, caminos simples, circuitos y circuitos simples.



I.  $(v_1, e_1, v_2, e_6, v_4, e_3, v_3, e_2, v_2)$

II.  $(v_1, e_8, v_4, e_3, v_3, e_7, v_1, e_8, v_4)$

III.  $(v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5, e_5, v_1, e_1, v_2)$

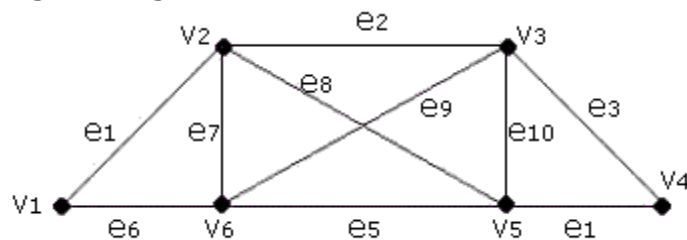
Solución:

$(v_1, e_1, v_2, e_6, v_4, e_3, v_3, e_2, v_2)$  camino no simple, repite  $v_2$

$(v_1, e_8, v_4, e_3, v_3, e_7, v_1, e_8, v_4)$  camino no simple, repite  $v_1$  y  $v_4$

$(v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5, e_5, v_1, e_1, v_2)$  circuito simple

**2-**Dado el grafo siguiente:



Hallar:

I. Cuatro caminos simples diferentes.

II. Cuatro circuitos diferentes no simples.

III. Cuatro circuitos simples diferentes.

Solución:

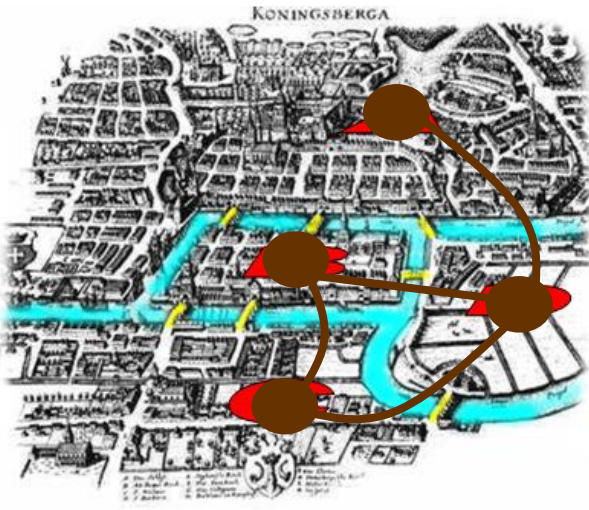
I.  $(v_1, e_1, v_2)$ ;  $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3)$ ;  $(v_1, e_1, v_2, e_7, v_6)$ ;  $(v_1, e_1, v_2, e_8, v_5)$

- II.  $(v_1, e_1, v_2, e_8, v_5, e_{10}, v_3, e_2, v_2, e_7, v_6, e_6, v_1);$   
 $(v_1, e_1, v_2, e_7, v_6, e_9, v_3, e_{10}, v_5, e_5, v_6, e_6, v_1);$   
 $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_1, v_5, e_{10}, v_3, e_9, v_6, e_6, v_1);$   
 $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_{11}, v_5, e_8, v_2, e_7, v_6, e_6, v_1)$
- III.  $(v_1, e_1, v_2, e_7, v_6, e_6, v_1); (v_1, e_1, v_2, e_8, v_5, e_5, v_6, e_6, v_1); (v_5, e_{11}, v_4,$   
 $e_3, v_3, e_{10}, v_5);$   
 $(v_6, e_9, v_3, e_{10}, v_5, e_5, v_6)$

## CAMINO Y CIRCUITO DE EULER

### Los puentes de Königsberg:

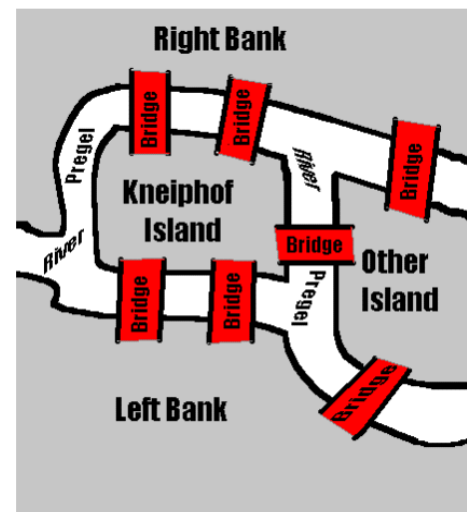
El problema de los puentes de Königsberg, es un célebre problema matemático, resuelto por Leonhard Euler en 1736 y cuya resolución dio origen a la teoría de grafos. Su nombre se debe a *Königsberg*, el antiguo



nombre que recibía la ciudad rusa de Kaliningrado, que durante el siglo XVIII formaba parte de Prusia Oriental, como uno de los ducados del Reino de Prusia.

Esta  
ciudad  
es

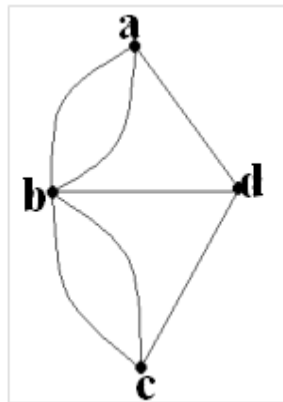
atravesada por el río Pregolya, el cual se bifurca para rodear con sus brazos a la isla Kneiphof, dividiendo el terreno en cuatro regiones distintas, las que entonces estaban unidas mediante siete puentes llamados Puente del



herrero, Puente conector, Puente verde, Puente del mercado, Puente de madera, Puente alto y Puente de la miel.

El problema fue formulado en el siglo XVIII y consistía en encontrar un recorrido para cruzar a pie toda la ciudad, pasando sólo una vez por cada uno de los puentes, y regresando al mismo punto de inicio.

Con el fin de determinar si existía o no dicho circuito, Euler representó las cuatro zonas de la ciudad y los siete puentes con el grafo que se muestra en la figura.



Encontró cuatro vértices con  $\text{grado}(a)=3$ ,  $\text{grado}(c)=3$ ,  $\text{grado}(d)=3$  y  $\text{grado}(b)=5$ .

También encontró que la existencia de tal circuito dependía del número de vértices de grado impar del grafo.

#### **DEFINICIÓN**

G tiene un circuito Euleriano si existe un circuito en G que recorra cada arista del grafo exactamente una vez.

Es decir que un circuito euleriano es un camino que empieza y termina en el mismo vértice, pasa por cada vértice al menos una vez y sólo una vez por cada arista

Si existe un recorrido abierto de a a b en G que recorre cada arista de G exactamente una vez, este recorrido se llamará recorrido Euleriano.

#### **Teorema:**

G tiene un circuito Euleriano si y sólo si

- G es conexo
- Todo vértice de G tiene grado par.

**Nota:** Si G tiene un vértice de grado impar, en G no puede existir un ciclo de Euler, pero puede ser posible determinar un camino de Euler

**Corolario**

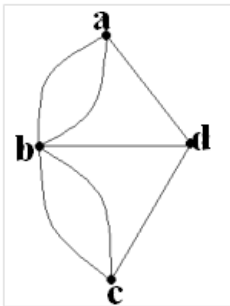
Existe un camino Euleriano en G si y sólo si G es conexo y tiene exactamente dos vértices de grado impar.

\*Cualquier camino de Euler, debe comenzar en un vértice de valencia impar y terminar en el otro.

\*Si G, tiene más de dos vértices de valencia impar, no existe un camino de Euler en G.

***\*Un grafo es euleriano si es conexo y admite un circuito de Euler.***

Si regresamos ahora al problema de los siete puentes de Königsberg:



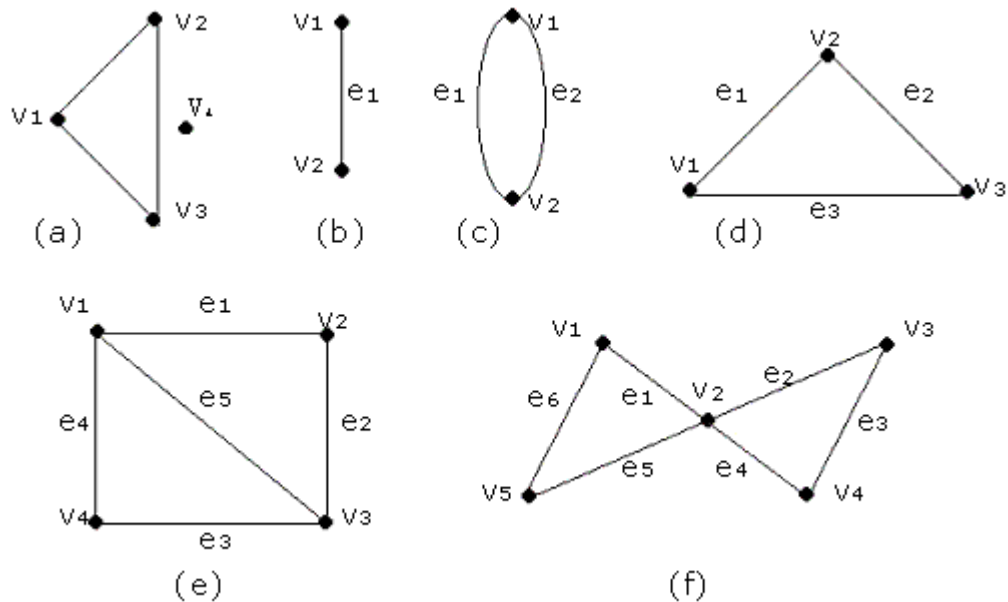
Nos damos cuenta que el grafo es un grafo conexo, pero tiene cuatro vértices de grado impar.

En consecuencia, no tiene ni un recorrido Euleriano ni un circuito Euleriano, porque no cumple con las propiedades enunciadas.

➤ **Ejercicio resuelto:**

¿En los grafos siguientes, cuales admiten circuitos eulerianos?





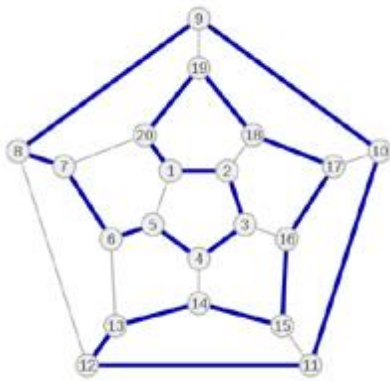
### Solución

- (a) No lo admite porque  $v_4$  es un vértice aislado.
- (b) No lo admite porque cualquier ciclo utilizará la arista  $e_1$  dos veces.
- (c) El circuito  $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_1)$  es euleriano.
- (d) El circuito  $(v_3, e_3, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3)$  es euleriano.
- (e) No admite ningún circuito euleriano.
- (f)  $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_2, e_5, v_5, e_6, v_1)$  es un circuito euleriano.

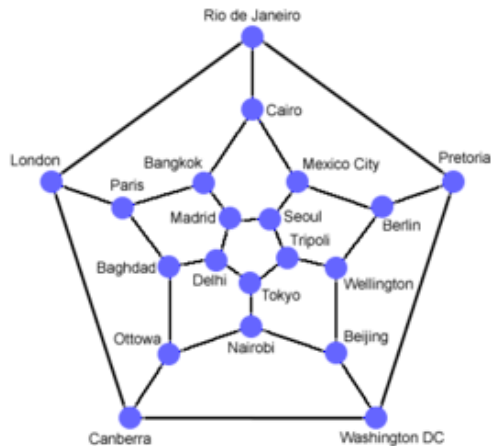
### **CICLO Y CAMINO HAMILTONIANOS**

Hacia 1850 el matemático W. R. Hamilton patentó un juego que llamó Viaje por el Mundo, con la forma de un dodecaedro, donde cada vértice tenía el nombre de una ciudad. El juego consistía en encontrar un circuito que pasase solo una vez por cada una de las 20 ciudades situadas en los Nodos del grafo del dodecaedro, partiendo de una cualquiera, recorrer todas las rutas (aristas) y llegar nuevamente a la ciudad de origen. Tal circuito se conoce con el nombre de ciclo hamiltoniano.

Hamilton resolvió este problema usando cuaterniones, aunque su solución no era generalizable a todos los grafos.



*Grafo hamiltoniano con uno de los posibles ciclos hamiltonianos marcado*



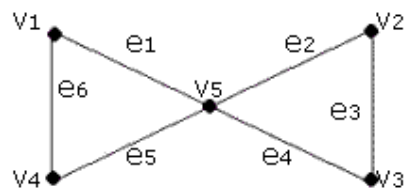
\*Un camino hamiltoniano en un grafo es un camino que contiene a todos los vértices del grafo exactamente una vez (salvo  $v_0=v_n$ , si el camino es cerrado).

\*Un Circuito de Hamilton, es igual al camino, pero termina en el vértice que comenzó.

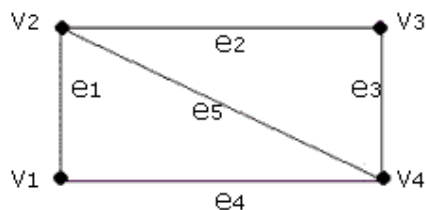
\*Un grafo hamiltoniano es aquel que contiene un ciclo hamiltoniano.

Ejemplos:

¿Cuál de los grafos siguientes admite un circuito hamiltoniano?



(a)



(b)

### Solución

(a) No admite circuitos hamiltonianos. El razonamiento es el siguiente: Si se empieza en  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y si se está en los demás vértices, en el  $v_5$  se estará dos veces.

Si se empieza en  $v_5$ , para luego ir a los vértices  $v_1$  o  $v_4$  ó a  $v_3$  o  $v_2$  respectivamente, se tendrá que pasar de nuevo por  $v_5$  (puesto que se empezará en  $v_5$ ). Para completar el circuito, se debe regresar a  $v_5$ , por lo que se pasa tres veces por él.

(b) Un ciclo hamiltoniano es:  $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_1)$

### **GRAFOS ISOMORFOS**

Sean  $G_1 = \{\mathbf{V}_1, \mathbf{A}_1, \varphi_1\}$  y  $G_2 = \{\mathbf{V}_2, \mathbf{A}_2, \varphi_2\}$  grafos simples se dicen ISOMORFOS si y sólo sí existe una función  $f: \mathbf{V}_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$  tal que

- $f$  es biyectiva
- $\forall v, w \in V_1: (\text{la arista } \{v, w\} \in \mathbf{A}_1 \leftrightarrow \text{la arista } \{f(v), f(w)\} \in \mathbf{A}_2.)$

Por lo tanto, hay una función biyectiva entre los vértices de los dos grafos que preserva la relación de adyacencia.

$G_1$  y  $G_2$  se denominan isomorfos, y son matemáticamente iguales, solo varia la apariencia, o sea, que se mantienen las adyacencias, estructura, caminos y ciclos. Es decir: deben tener las mismas propiedades y características.

Ambos grafos han de tener el mismo número de vértices y el mismo grado de cada uno. Si, por ejemplo, en un grafo tenemos un vértice de grado 7 y en el otro no, no podrán ser isomorfos. Cada vértice ha de mantener

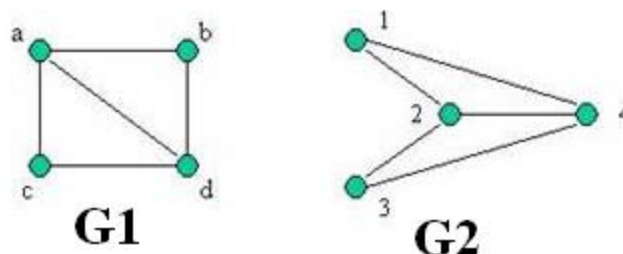
sus relaciones de vecindad.

Con más generalidad, si dos grafos son isomorfos, entonces han de tener la misma sucesión de grados. Sin embargo, el que dos grafos tengan la misma sucesión de grados no garantiza que sean isomorfos.

La sucesión de grados ha de conservarse, y como sabemos que en todo grafo la suma de los grados coincide con (dos veces) el número de arista, deducimos que dos grafos isomorfos han de tener el mismo número de aristas.

### Ejemplos:

1-



Los grafos  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfos pues existe la biyección  $f: V_1 \rightarrow V_2$  definida por

$$f(a) = 2$$

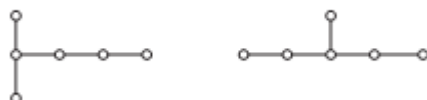
$$f(b) = 1$$

$$f(c) = 3$$

$$f(d) = 4$$

que conserva la adyacencia.

2-Los siguientes grafos:



Tienen seis vértices, cinco aristas y su sucesión de grados es (1, 1, 1, 2, 2, 3).

Sin embargo, no son isomorfos pues, por ejemplo, el vértice de grado 3

es, en un caso, vecino de dos de grado 1 y de uno de grado 2; y en el otro, de uno de grado 1 y de dos de grado 2.

### **Propiedad**

*Dos grafos  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfos si y sólo si para cierto orden de sus vértices las matrices de adyacencia son iguales.*

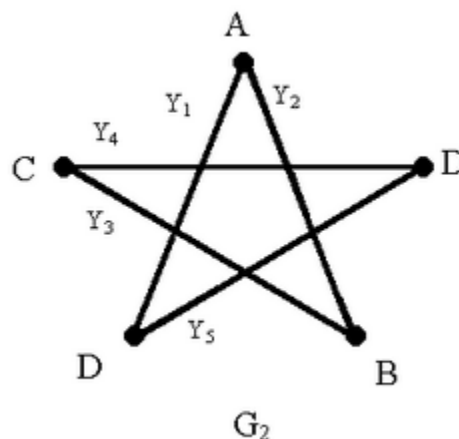
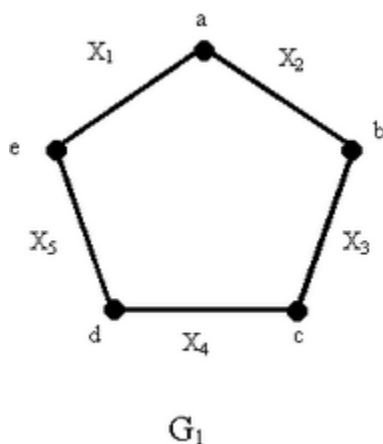


### **SUGERENCIA ANTES DE AVANZAR:**

Mirá el video “Determinar si los grafos son isomorfos” en el sitio de la cátedra <http://discretaunlam.net.ar> sección Apuntes-Conjuntos ordenados.

### **Ejemplo:**

**1-** Los siguientes grafos son isomorfos, ya que sus matrices de adyacencias son iguales.

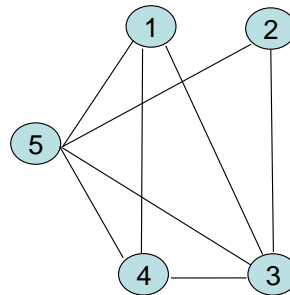
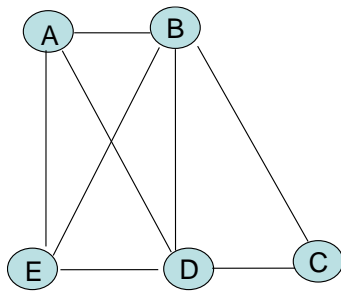


$f: V_1 \rightarrow V_2 / f(a)=A; f(b)=B; f(e)=C; f(d)=D; f(c)=C$

$$G_1 = \begin{array}{c|ccccc} a & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ e & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$G_2 = \begin{array}{c|ccccc} A & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ D & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ E & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

**2-** Determinar cuáles de los siguientes pares de grafos son isomorfos.



Los dos grafos tienen 5 vértices, 1 de grado 2, 2 de grado 3 y 2 de grado 4.

Emparejamos C y 2.

D y B son los dos vértices de grado 4 unidos a C.

Les hacemos corresponder 5 y 3 porque son los dos de grado 4 unidos a 2.

Finalmente, a A y E les hacemos corresponder 1 y 4 respectivamente.

Es una simple comprobación que es un isomorfismo.

Ahora hacemos la designación entre vértices y las matrices de adyacencia.

$$f: V_1 \rightarrow V_2 / f(A)=1; f(B)=5; f(E)=4; f(D)=3; f(C)=2$$

$$M_{G1} = \begin{array}{c|ccccc} A & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ B & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ C & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ D & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ E & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$M_{G_2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Observación: Si las matrices de adyacencia correspondientes a dos grafos no son iguales, no significa que los grafos no sean isomorfos, ya que tal vez si reordenamos una de ellas se pueda lograr que sean iguales. Para poder afirmar que dos grafos no son isomorfos hay que mostrar alguna propiedad estructural no compartida o bien probar que todos los ordenamientos posibles de las matrices no coinciden.



Para finalizar con el tema de "Grafos-Dígrafos" te proponemos que ingreses al sitio de la cátedra "<https://discretaunlam.net.ar>" para releer el tema.

Luego comienza a hacer los ejercicios de Grafos-Dígrafos de la guía de ejercicios para el segundo parcial. Y finaliza haciendo la autoevaluación "Grafos-Dígrafos"

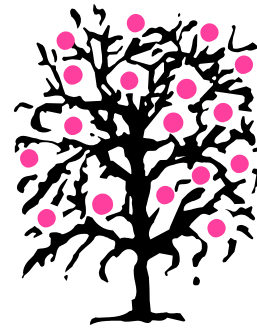
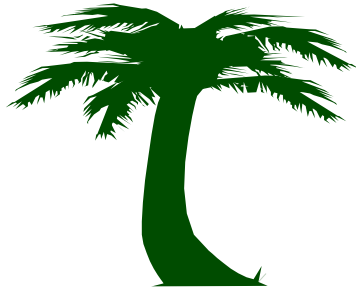
Tené en cuenta que todas las actividades que realices forman parte del seguimiento académico que hará tu tutor.



#### Actividad Grafos

- Autoevaluación de Grafos
- Autoevaluación Dígrafos

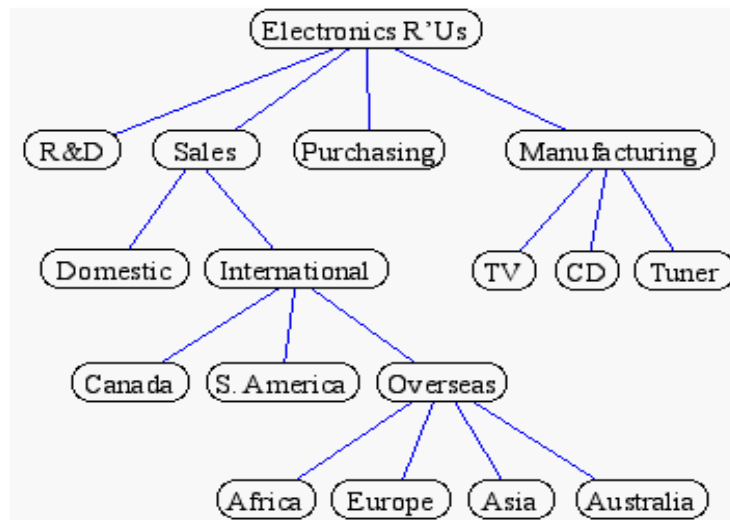
## ÁRBOLES



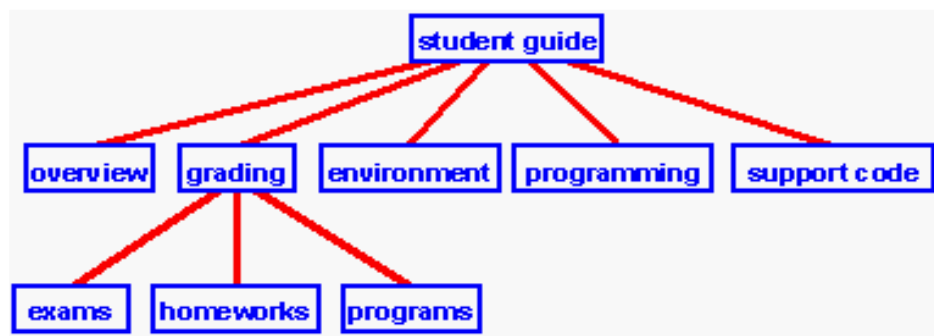
Un árbol impone una estructura jerárquica sobre una colección de objetos llamados nodos o vértices. Ejemplos de utilización de árboles se presentan tanto dentro como fuera del área de computación:

***Estructura organizativa de una empresa***

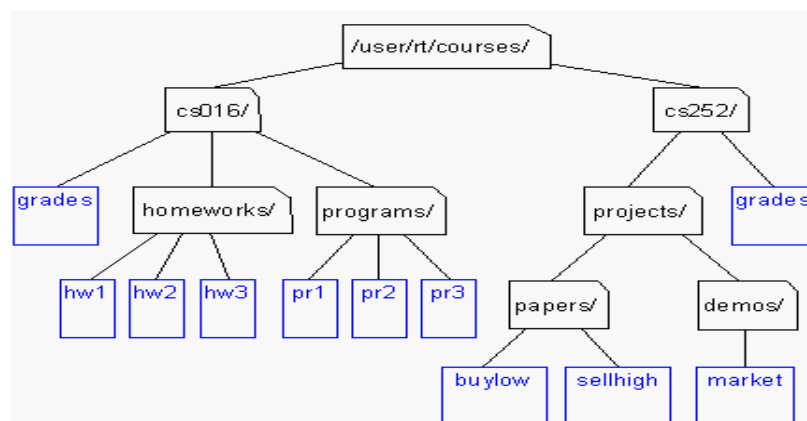




### ***Tabla de contenido de un libro***



### ***Sistema de ficheros de Unix o Dos / Windows***



En Informática constituyen una de las estructuras más utilizadas, con aplicaciones que van desde los árboles sintácticos utilizados para la representación y/o interpretación de términos de un lenguaje o expresiones aritméticas, pasando por los árboles de activación de procedimientos recursivos, hasta la representación de datos que se desea mantener ordenados con un tiempo de acceso relativamente bajo. En general, se usarán árboles siempre que se quiera representar información jerarquizada.

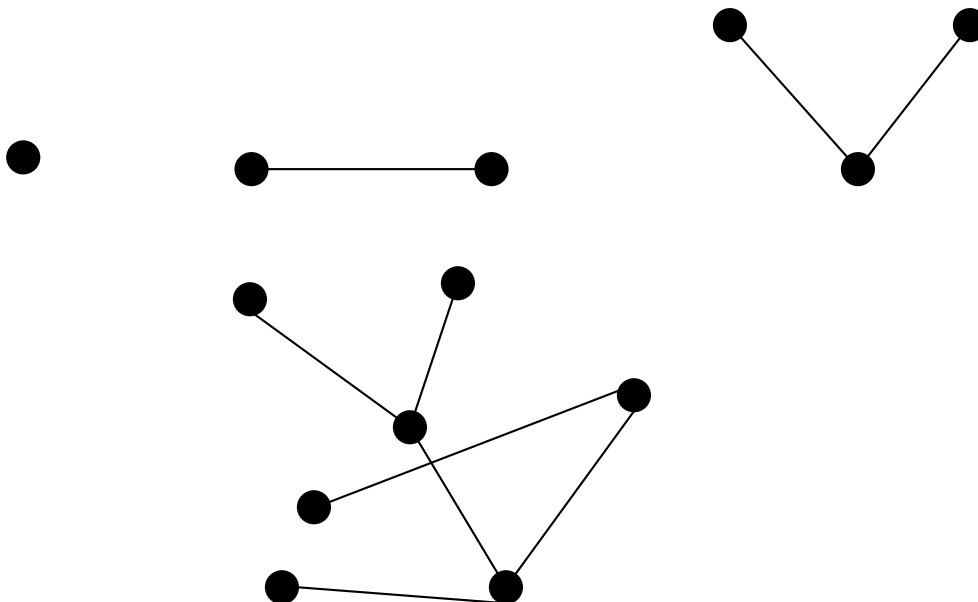
Formalizando:

*Los árboles son grafos, dirigidos y no dirigidos, conexos acíclicos.*

Son llamados así porque tales grafos se asemejan a los árboles.

*Ejemplos:*

*NO DIRIGIDOS (GRAFOS)*



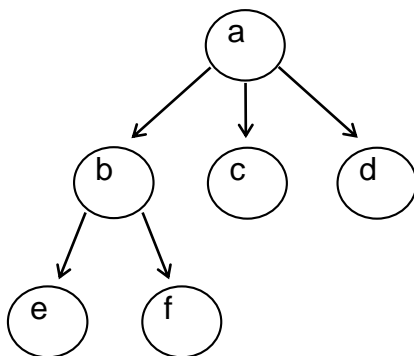
*Un grafo es un árbol si y solo si hay un único camino entre cada pareja de vértices.*



### SUGERENCIA ANTES DE AVANZAR:

Mirá el video “**Propiedades de los árboles**” en el sitio de la cátedra <http://discretaunlam.net.ar> sección Apuntes-Conjuntos ordenados.

### DIRIGIDOS (DÍGRAFOS)



En los árboles dirigidos se designa un vértice particular como la raíz de forma tal que haya un único camino entre la raíz y cada uno de los restantes vértices; la dirección de cada arista es la que se aleja de la raíz. Este árbol es llamado árbol con raíz o enraizado.

Para el ejemplo la raíz es el vértice o nodo etiquetado con a.

*Un árbol con raíz es un árbol en el que uno de sus vértices ha sido designado como la raíz y todas las aristas están orientadas de modo que se alejan de la raíz*

### *Características de los árboles no dirigidos*

Sea  $G = (V, A, \varphi)$  un grafo conexo acíclico las siguientes condiciones son equivalentes:

- ▶ G es un árbol
- ▶ Para todo par de vértices x e y de G existe un único camino de x a y
- ▶ G es conexo y todas sus aristas son puentes. Al eliminar cualquier arista G quedará desconectado en dos subgrafos que son árboles.
- ▶ G es acíclico; la adición de una arista nueva origina un ciclo.
- ▶ G es acíclico y la cantidad de aristas es igual a la cantidad de vértices menos uno:  $|A| = |V| - 1$
- ▶ G es conexo y la cantidad de aristas es igual a la cantidad de vértices menos uno:  
 $|A| = |V| - 1$

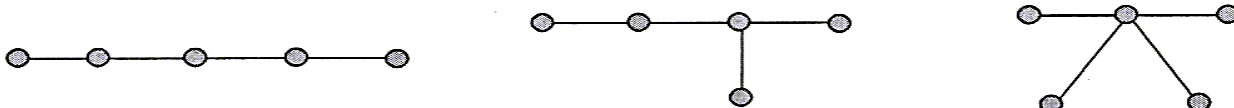
**Bosque:** es un grafo acíclico no conexo en el cual cada una de sus componentes conexas es un árbol.

Propiedad:

- ▶ En un bosque con k componentes la cantidad de vértices es igual a la cantidad de aristas más las k componentes conexas:

$$|V| = |A| + K$$

**Ejemplo:**



$$|V| = |A| + K = 12 + 3 = 15$$

### ÁRBOLES DIRIGIDOS O ÁRBOLES CON RAÍZ

Si  $DG = (V, A, \delta)$  es un dígrafo entonces DG es un árbol dirigido si el grafo G asociado al dígrafo DG es un árbol. Si DG es un árbol dirigido entonces

*DG es un árbol con raíz si existe un único vértice  $r$  en DG, llamado raíz, tal que el grado de entrada de  $r$  es cero y para todos los restantes vértices en DG el grado de entrada es uno.*

### *Características de los árboles enraizados*

La terminología utilizada en árboles tiene orígenes botánicos y genealógicos.

Supongamos que  $T$  es un árbol con raíz:

- El **padre** de  $v$  es el único vértice  $u$  tal que hay una arista dirigida de  $u$  a  $v$ .
- En el caso anterior, se dice que  $v$  es el **hijo** de  $u$ .
- **Raíz** es el vértice que no tiene padre (ningún predecesor)
- Los vértices con el mismo padre son llamados **hermanos**
- Los **antecesoros** de cualquier vértice diferente a la raíz son los vértices en el camino desde la raíz hasta él (incluyendo la raíz, pero excluyéndolo a él).
- Los **descendientes** de un vértice son todos aquellos que tienen a  $v$  como su antecesor.
- Un vértice se llama **hoja** si no tiene hijos o descendientes.
- Los vértices que tienen hijos y no son la raíz son llamados **vértices internos**.
- Si  $a$  es un vértice de un árbol, el **subárbol** con raíz en  $a$  es el subdígrafo del árbol que contiene al vértice  $a$ , a todos sus descendientes y a todas las aristas incidentes en dichos descendientes.
- **Rama** es cualquier camino del árbol

### Nivel de un vértice

El nivel de un vértice es la longitud del único camino desde la raíz hasta él. El nivel de la raíz es 0.

### *Altura de un árbol*

La altura ( $H$ ) de un árbol es la longitud del camino más largo desde la raíz a cualquier vértice. En otras palabras, se trata del máximo nivel alcanzado desde la raíz.

### *Árbol equilibrado o balanceado*

Un árbol de altura ( $H$ ) está **equilibrado** o **balanceado** si todas sus hojas están en los niveles  $H$  o  $H - 1$  ó en ambas.

### *Árboles completos*

#### **Árbol m-ario**

Un árbol con raíz es llamado **árbol m-ario** si todos los vértices internos tienen, a lo sumo  $m$  hijos.

Un árbol m-ario con  $m = 2$  se llama **árbol binario**

Un árbol se llama **árbol m-ario completo** si todo vértice interno tiene exactamente  $m$  hijos.



**SUGERENCIA ANTES DE AVANZAR:**

Mirá el video "**Ejemplo de árbol binario**" en el sitio de la cátedra <http://discretaunlam.net.ar> sección Apuntes-Conjuntos ordenados.

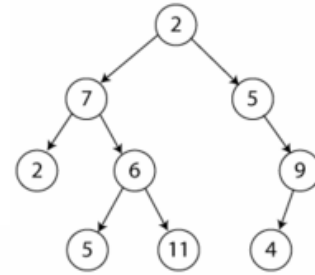
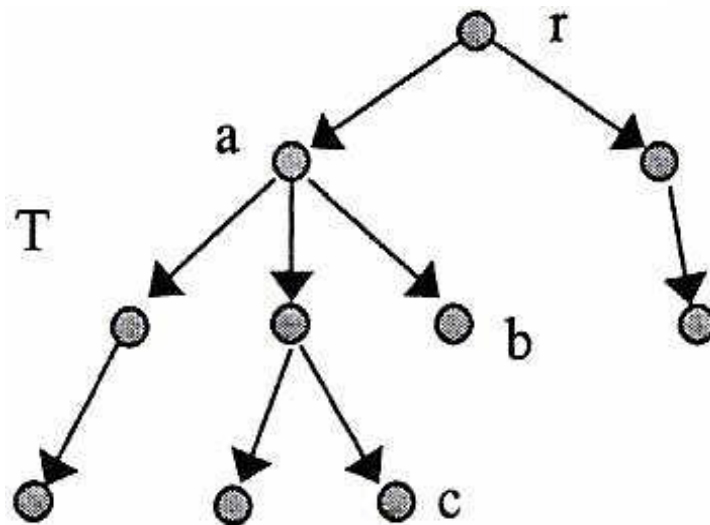
### *Ejemplos:*

**1.**

- ⊗ Árbol binario incompleto,
- ⊗  $H = 3$

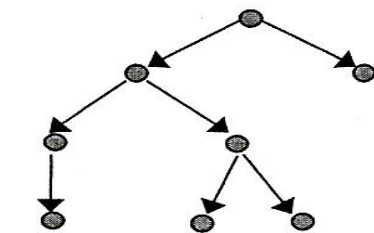
☒ Balanceado ya que tiene hojas solamente en los niveles 2 y 3.

**2.**

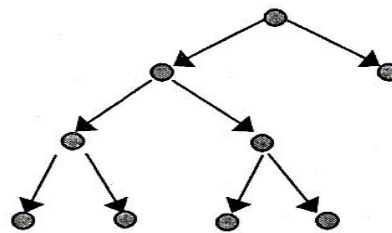


- r es la raíz del árbol
- a es padre de b, b es hijo de a
- b y c son hojas
- a es un vértice interior
- antecesores de b son  $\{r, a\}$
- $T(r)$  tiene altura  $H=3$
- Es balanceado porque tiene hojas en el nivel 2 y en el nivel 3
- Árbol 3-ario incompleto

**3.**



Árbol 1



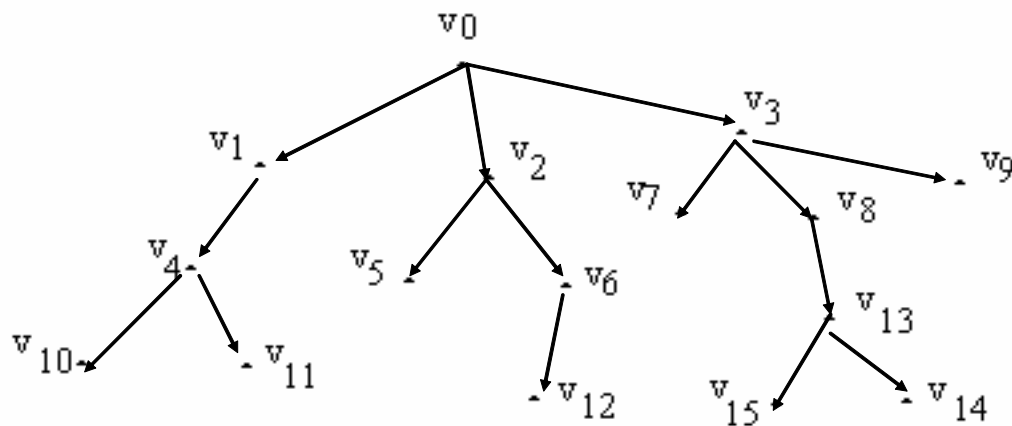
Árbol 2

Los dos árboles son binarios pero el árbol 1 no es completo ya que tiene un nodo que tiene un descendiente y no dos. El árbol 2 es completo ya que todos sus nodos tienen dos descendientes.

Los dos árboles tienen la misma altura.;  $H=3$ . Los dos árboles no son balanceados porque tienen hojas en el nivel 1. Para que sean balanceados deberían tener hojas solamente en los niveles: 3 y 2.

### ➤ Ejercicio resuelto

**1-** Dado el siguiente árbol  $T(v_0)$



Hallar:

- I. raíz
- II. hojas
- III. antecesores de  $v_1$ ,  $v_6$ ,  $v_8$
- IV. vértices internos
- V. los subárboles  $T(v_1)$ ;  $T(v_3)$ ;  $T(v_8)$
- VI. altura del árbol
- VII. ¿está balanceado?
- VIII. ¿ $\exists m \in \mathbb{N} / T(v_0)$  sea  $m$ -ario?
- IX. ¿el árbol es completo?

### Solución

- I.  $v_0$



II. v5, v7, v9, v10, v11, v12, v15, v14

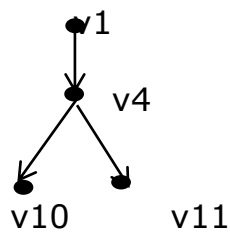
III. Antecesoros de v1: v0

Antecesoros de v6: v2, v0

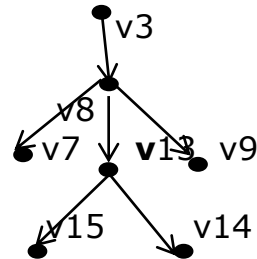
Antecesoros de v8: v3, v0

IV. v1, v2, v3, v4, v6, v8, v13

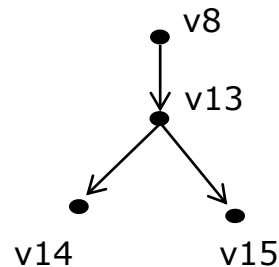
V. T(v1)



T(v3)



T(v8)



VI. H = 4

VII. No es balanceado porque tiene hojas en el nivel 2.

VIII. Se trata de un árbol 3-ario.

IX. No es completo ya que hay vértices internos que no tienen tres descendientes.

### Propiedades de los árboles

- En un árbol se cumple la siguiente relación entre grados, vértices y aristas

$$\sum_{i=1}^n g(v_i) = 2|A|$$

- Un árbol con  **$n$  vértices tiene  $n - 1$  aristas.** Por lo tanto,

$$|A| = |V| - 1$$

### ➤ Ejercicios resueltos

- 1-** Si un árbol tiene 4 vértices de grado 2, uno de grado 3, dos de grado 4 y otro de grado 5. ¿Cuántos vértices colgantes (hojas) tiene?

Solución

$$\sum_{i=1}^n g(v_i) = 2|A| \rightarrow 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + h \cdot 1 = 2 \cdot |A|$$

(1)

$$|A| = |V| - 1 = 4 + 1 + 2 + 1 + h - 1 = 7 + h \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1)

$$24 + h = 2 \cdot (7 + h) \rightarrow 24 + h = 14 + 2h \rightarrow 24 - 14 = h \rightarrow \mathbf{h = 10}$$

**El árbol tiene 10 hojas.**

- 2-** Un árbol tiene  $2x$  vértices de grado 1,  $3x$  vértices de grado 2, y  $x$  vértices de grado 3 ¿cuántas aristas y cuántos vértices hay en el árbol?

$$\sum_{i=1}^n g(v_i) = 2|A| \rightarrow 2x \cdot 1 + 3x \cdot 2 + x \cdot 3 = 2 \cdot |A| \rightarrow 11x = 2 \cdot (6x - 1) \rightarrow \mathbf{x = 2}$$

$$|A| = |V| - 1 = 2x + 3x + x - 1 = 6x - 1$$

$$\mathbf{Si \ x = 2 \rightarrow |A| = |V| - 1 = 6x - 1 = 6 \cdot 2 - 1 = 11 \ y \ |V| = 12}$$

### Recorrido en árboles

Los árboles ordenados con raíz se utilizan frecuentemente para almacenar la información.

Necesitamos procedimientos (algoritmos de recorrido de un árbol) que permitan visitar cada uno de los vértices para acceder a los datos.

### *Algoritmos de recorrido*

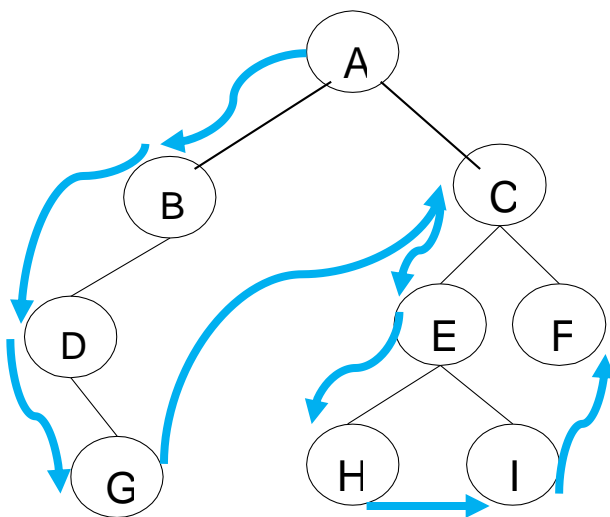
Los procedimientos para el recorrido sistemático de los vértices de un árbol ordenado con raíz se llaman **algoritmo de recorrido de un árbol**.

Los tres algoritmos de recorrido de un árbol más conocidos son:

- ❖ Recorrido en preorden.
- ❖ Recorrido en inorden.
- ❖ Recorrido en postorden.

#### Recorrido en preorden

- **Visita la raíz.**
- **Recorre el subárbol izquierdo.**
- **Recorre el subárbol derecho.**



***Raíz-Izquierda-Derecha***

Preorden: ABDGCEHIF

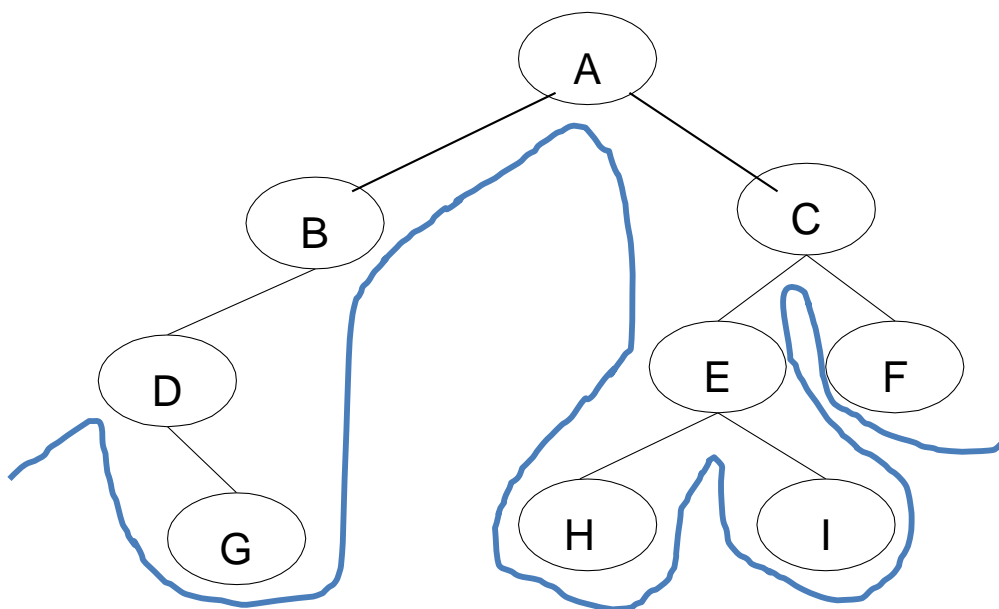


**SUGERENCIA ANTES DE AVANZAR:**

Mirá el video “**Recorrido preorden**” en el sitio de la cátedra  
<http://discretaunlam.net.ar> sección Apuntes-Conjuntos ordenados.

**Recorrido en inorden**

- **Recorre el subárbol izquierdo.**
- **Visita la raíz**
- **Recorre el subárbol derecho.**



***Izquierda-Raíz-Derecha***

Inorden: DGBAHEICF

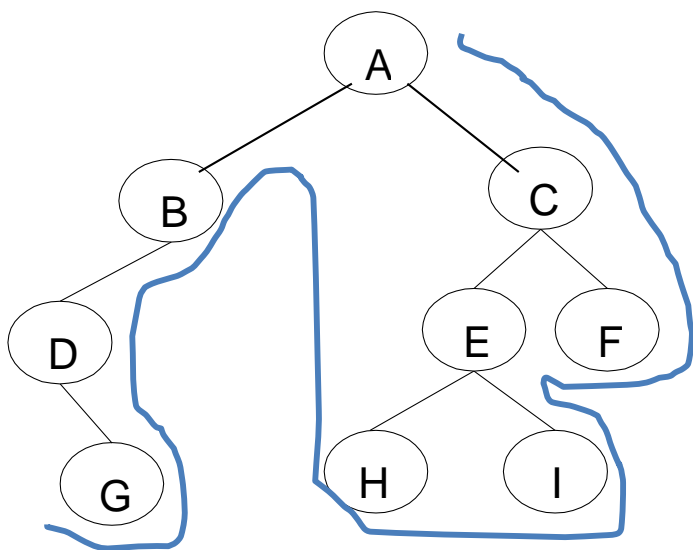


**SUGERENCIA ANTES DE AVANZAR:**

Mirá el video “*Recorrido in orden*” en el sitio de la cátedra  
<http://discretaunlam.net.ar> sección Apuntes-Conjuntos ordenados.

**Recorrido en postorden**

- **Recorre el subárbol izquierdo.**
- **Recorre el subárbol derecho.**
- **Visita la raíz**

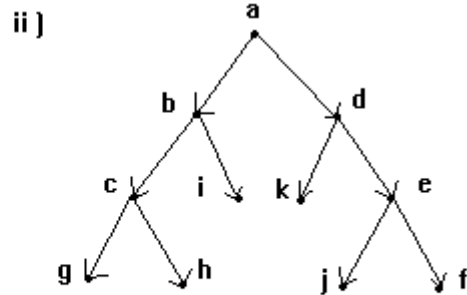
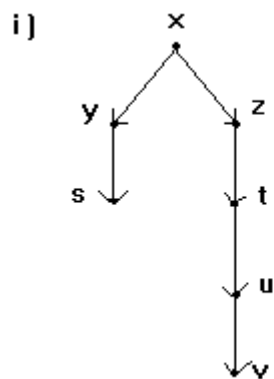


***Derecha-Izquierda-Raíz***

Postorden: GDBHIEFCA

➤ *Ejercicio resuelto*

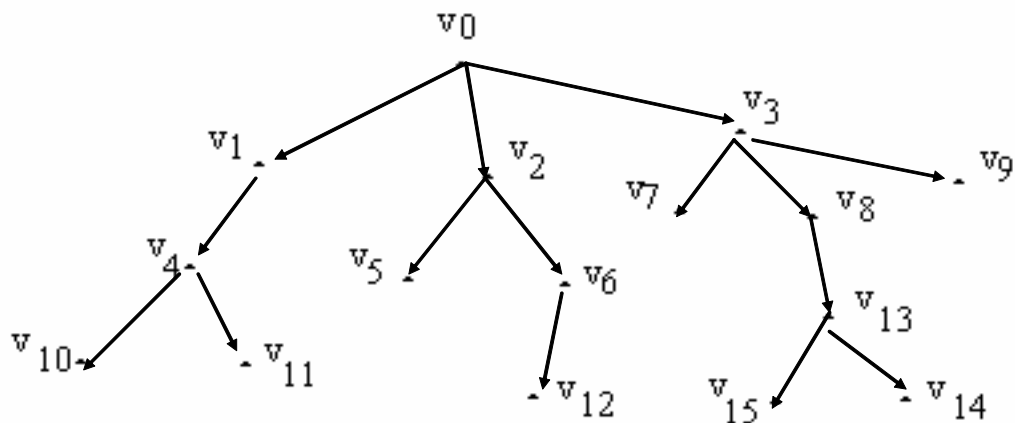
**1-** Dados los siguientes árboles, listar sus vértices en preorden; en postorden y en inorden



Solución

- i. Preorden : xysztuv  
 Postorden : syvutzx  
 Inorden : syxvutz
- ii. Preorden : abcghidkejf  
 Postorden : ghcibkjfedea  
 Inorden : gchbiakdjef

**iii)**



- iii. Preorden : v0v1v4v10v11v2v5v6v12v3v7v8v13v15v14v9  
 Postorden : v10v11v4v1v5v12v6v2v7v15v14v13v8v9v3v0  
 Inorden : v10v4v11v1v0v5v2v12v6v7v3v15v13v14v8v9

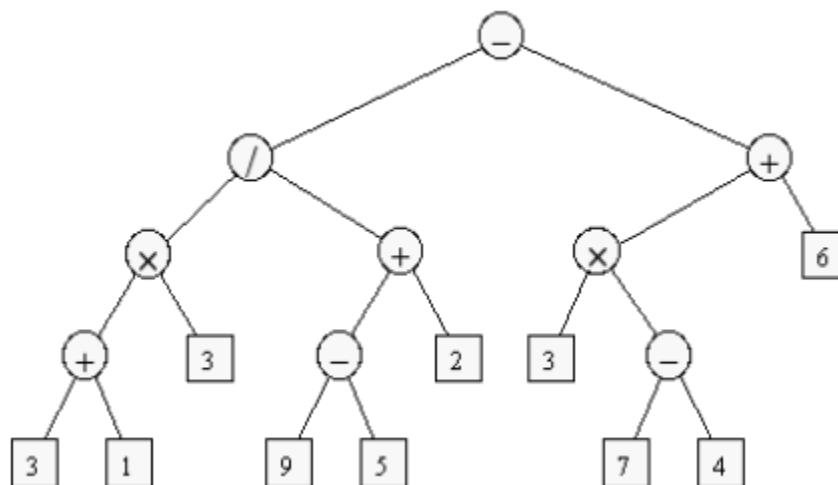
## NOTACIÓN INFIJA, PREFIJA Y POSFIJA

Los árboles ordenados con raíz pueden utilizarse para representar expresiones complejas como fórmulas proposicionales, combinaciones de conjuntos y expresiones aritméticas.

Los árboles binarios se emplean a menudo para la representación de expresiones aritméticas, en el que los vértices internos representan a los operadores ( + suma, - resta, \* multiplicación, / división y ↑ exponenciación ) y las hojas representan números o variables.

Un recorrido en **inorden** de un árbol binario que representa una expresión reproduce la expresión original con los elementos y las operaciones en el orden en que aparecían inicialmente. Para evitar ambigüedades es necesario incluir paréntesis en el recorrido en inorden siempre que encontremos una operación. La expresión completa incluyendo los paréntesis, obtenida de esta manera se llama expresión **infija** o forma infija de la expresión.

### Ejemplo



El recorrido en inorden es:

$$3 + 1 * 3 / 9 - 5 + 2 - 3 * 7 - 4 + 6$$

La notación infija es:

$$((3+1) * 3) / ((9-5) + 2) - ((3*(7-4)) + 6)$$

Se dirá que la expresión está en forma **prefija** (notación **polaca**) cuando la expresión se escribe recorriendo el árbol en **preorden**. Una expresión en notación prefija no es ambigua, así que no es necesario el uso de paréntesis.

Para el árbol del ejemplo la notación polaca es: - / \* + 3 1 3 + - 9 5 2 + \* 3 - 7 4 6

En la forma prefija de una expresión un operador binario precede a sus dos operandos. Por eso podemos evaluar una expresión en forma prefija trabajando de derecha a izquierda. Cuando encontramos un operador, realizamos el cálculo correspondiente con los dos operandos que se encuentran inmediatamente a la derecha del operador. Siempre que se realiza una operación, el resultado se considera como un nuevo operando.

#### Ejemplo:

¿Cuál es el valor de la expresión - / \* + 3 1 3 + - 9 5 2 + \* 3 - 7 4 6?

$$- / * + 3 1 3 + - 9 5 2 + * 3 \underline{- 7 4} 6$$

$$7 - 4$$

$$- / * + 3 1 3 + - 9 5 2 + \underline{* 3 3} 6$$

$$3 * 3$$

$$- / * + 3 1 3 + - 9 5 2 \underline{+ 9 6}$$

$$9 + 6$$

$$- / * + 3 1 3 + \underline{- 9 5} 2 \quad \mathbf{15}$$

$$9 - 5$$

$$- / * + 3 1 3 \underline{+ 4 2} \quad \mathbf{15}$$

$$4 + 2$$

$$- / * \underline{+ 3 1} 3 \quad \mathbf{6} \quad \mathbf{15}$$

$$3 + 1$$



$$- / * \frac{4 \ 3}{4 * 3} \quad 6 \quad 15$$

$$- / \frac{12 \ 6}{12/6} \quad 15$$

$$- \frac{2 \quad 15}{2 - 15}$$

**- 13**

El valor de la expresión es -13.

Se dirá que la expresión está en forma **postfija** (notación **polaca inversa**) cuando la expresión se escribe recorriendo el árbol en **postorden**. Una expresión en notación postfija no es ambigua, así que no es necesario el uso de paréntesis.

Para el árbol del ejemplo la notación polaca inversa es:

$$3 \ 1 \ + \ 3 \ * \ 9 \ 5 \ - \ 2 \ + \ / \ 3 \ 7 \ 4 \ - \ * \ 6 \ + \ -$$

En la forma postfija de una expresión, los operadores binarios van detrás de sus dos operandos. Por eso podemos evaluar una expresión en forma postfija trabajando de izquierda a derecha realizando el cálculo correspondiente con los dos operandos que se encuentran inmediatamente a la izquierda del operador. Siempre que se realiza una operación, el resultado se considera como un nuevo operando.



**SUGERENCIA ANTES DE AVANZAR:**

Mirá el video “**Matemática Discreta árbol de expresión**” en el sitio de la cátedra <http://discretaunlam.net.ar> sección Apuntes-Conjuntos ordenados.

**Ejemplo:**

¿Cuál es el valor de la expresión  $3 \cdot 1 + 3 \cdot 9 \cdot 5 - 2 + / 3 \cdot 7 \cdot 4 - \cdot 6 + - ?$

$$\frac{3 \cdot 1 + 3 \cdot 9 \cdot 5 - 2 + / 3 \cdot 7 \cdot 4 - \cdot 6 + -}{3+1}$$

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 5 - 2 + / 3 \cdot 7 \cdot 4 - \cdot 6 + -}{4 \cdot 3}$$

$$12 \cdot \frac{9 \cdot 5 - 2 + / 3 \cdot 7 \cdot 4 - \cdot 6 + -}{9-5}$$

$$12 \cdot \frac{4 \cdot 2 + / 3 \cdot 7 \cdot 4 - \cdot 6 + -}{4+2}$$

$$12 \cdot \frac{6}{12/6} / 3 \cdot 7 \cdot 4 - \cdot 6 + -$$

$$2 \cdot \frac{3 \cdot 7 \cdot 4 - \cdot 6 + -}{7-4}$$

$$2 \cdot \frac{3 \cdot 3 \cdot 6 + -}{3 \cdot 3}$$

$$2 \cdot \frac{9 \cdot 6 + -}{9+6}$$

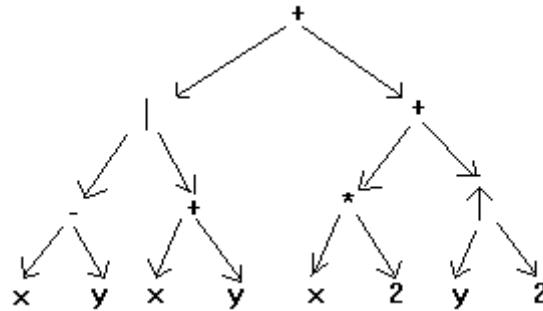
$$\frac{2 \cdot 15}{2-15} -$$

**-13**

El valor de la expresión es -13.

➤ **Ejercicios resueltos**

**1-** Dado el árbol



- Escribir la expresión en notación polaca
- Escribir la expresión en notación polaca inversa
- Escribir la expresión en notación infija usual

### Solución

- $+ \mid - x y + x y + * x 2 \uparrow y 2$
- $x y - x y + \mid x 2 * y 2 \uparrow + +$
- $((\underline{x - y}) + ((x * 2) + y^2))$   
 $(x + y)$

**2.** Calcular las siguientes expresiones dadas en notación polaca inversa:

- $33\ 3\ +\ 4\ +\ 5\ *\ 1\ -$
- $3\ 2\ \uparrow\ 4\ 2\ \uparrow\ -\ 5\ /\ 2\ *$
- $3\ 2\ *\ 2\ \uparrow\ 5\ 3\ -\ 8\ 4\ /\ *\ -$

### Solución

$$\begin{aligned}
 2.1. \quad & 33\ 3\ +\ 4\ +\ 5\ *\ 1\ - \\
 & 36\ 4\ +\ 5\ *\ 1\ - \\
 & 40\ 5\ *\ 1\ - \\
 & 200\ 1\ - \\
 & \mathbf{199}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.2. \quad & 3\ 2\ \uparrow\ 4\ 2\ \uparrow\ -\ 5\ /\ 2\ * \\
 & 9\ 4\ 2\ \uparrow\ -\ 5\ /\ 2\ *
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 9 \ 16 - 5 / 2 * \\
 -7 \ 5 / 2 * \\
 -7 / 5 \ 2 * \\
 \mathbf{-14 / 5}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2.3. \ 3 \ 2 * 2 \uparrow 5 \ 3 - 8 \ 4 / * - \\
 6 \ 2 \uparrow 5 \ 3 - 8 \ 4 / * - \\
 36 \ 5 \ 3 - 8 \ 4 / * - \\
 36 \ 2 \ 8 \ 4 / * - \\
 36 \ 2 \ 4 * - \\
 36 \ 8 - \\
 \mathbf{28}
 \end{array}$$

**3.** Calcular las siguientes expresiones dadas en notación polaca:

- 3.1.  $+ / 6 \ 3 - 7 \ 3$   
 3.2.  $/ * 2 + 2 \ 5 \uparrow + 3 \ 4 \ 2$   
 3.3.  $* + 3 + 3 \uparrow 3 + 3 \ 3 \ 3$

Solución

$$\begin{array}{r}
 3.1. \quad + / 6 \ 3 - 7 \ 3 \\
 \quad \quad + / 6 \ 3 \ 4 \\
 \quad \quad + \ 2 \ 4 \\
 \quad \quad \mathbf{6}
 \end{array}$$

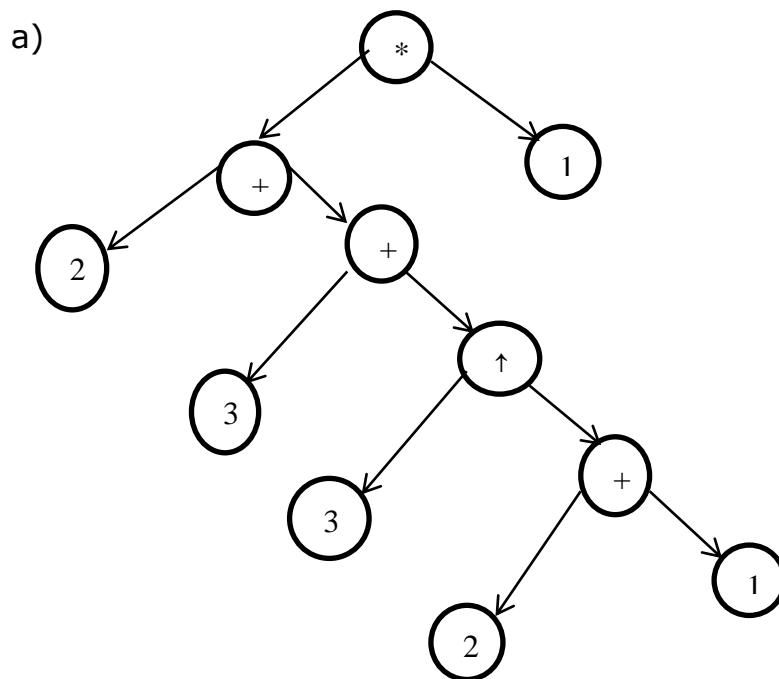
$$\begin{array}{r}
 3.2. \ / * 2 + 2 \ 5 \uparrow + 3 \ 4 \ 2 \\
 \quad \ / * 2 + 2 \ 5 \uparrow 7 \ 2 \\
 \quad \ / * 2 + 2 \ 5 \ 49 \\
 \quad \ / * 2 \ 7 \ 49 \\
 \quad \ / 14 \ 49 \\
 \quad \ 14 / 49 \\
 \quad \mathbf{2 / 7}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3.3. \ * + 3 + 3 \uparrow 3 + 3 \ 3 \ 3 \\
 \quad \ * + 3 + 3 \uparrow 3 \ 6 \ 3 \\
 \quad \ * + 3 + 3 \ 729 \ 3 \\
 \quad \ * + 3 \ 732 \ 3 \\
 \quad \ * \ 735 \ 3 \\
 \quad \mathbf{2205}
 \end{array}$$

4. Sea la expresión  $* + 2 + 3 \uparrow 3 + 2 \ 1 \ 1$  dada en notación polaca

- a) Dibuja el árbol;
- b) Indica raíz y hojas,
- c) Indica la altura del árbol,
- d) ¿Es balanceado?
- e) Recórrelo en postorden,
- f) Calcula el resultado de la expresión

Solución



b) Raíz: \*

Hojas: 1, 2, 3, 3, 2, 1

c)  $H = 5$

d) No es balanceado ya que tiene hojas en el nivel 1

e) 2 3 3 2 1 +  $\uparrow$  + + 1 \*

f) 32



Para finalizar con el tema "Árboles" te proponemos que ingreses al sitio de la cátedra " <https://discretaunlam.net.ar> " para leer y hacer las actividades por clase (AxC) correspondientes que te proponemos en la plataforma.

Luego comienza a hacer los ejercicios de Árboles de la guía de ejercicios para el segundo parcial. Y finaliza haciendo la autoevaluación "Árboles". Tené en cuenta que todas las actividades que realices forman parte del seguimiento académico que hará tu tutor.

-AxC



## Árboles

24

05, 2020

Clase 08

/ 📅 mayo 24, 2020 / 📁 Actividades por Clase / 💬 0 comments

-Autoevaluación



## Árboles

Actividad individual.

\*Obligatorio