Función Implícita

EJEMPLO 1

Sea

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$$

Verificar si se define $z = f(x,y)$ es un entorno de $P = (1,1,1)$, y hallar las derivadas parciales.

Debemos verificar si se cumple el Teorema de la Función Implícita.

Teorema de la función implícita.

Sea la función

$$F: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} / w = F(x,y,z)$$

de clase C^1 en el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^3$. Sea $P = (x_0, y_0, z_0) \in A$, un punto para el cual se cumplen las condiciones

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

Entonces existe un entorno E_1 de z_0, un entorno E_2 de $P' = (x_0, y_0)$, donde $E_2 \times E_1 \subseteq A$, y una única función

$$f: E_2 \to E_1 / z = f(x,y)$$

(*la función implícita*) de clase C^1 en E_2, que para cada $(x,y) \in E_2$ satisface $F\big(x, y, f(x,y)\big) = 0$ y además $z_0 = f(x_0, y_0)$, cuyas derivadas parciales en $P' = (x_0, y_0)$ están dadas por las fórmulas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}$$

Veamos si F se anula en $P = (1,1,1)$

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$$

$$F(1,1,1) = (1)^2 + (1)^2 + (1)^2 - 3 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = 2z$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1) = 2 \neq 0$$

Además

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 2x \qquad \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = 2y$$

Por lo cual F es de clase C^1.

Por lo tanto, se cumple el TFI, de esta manera es posible definir una función $z = f(x, y)$ en el entorno del punto P.

Cálculo de derivadas parciales.

Por el TFI tenemos que es posible calcular las derivadas parciales en el punto mediante las formulas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,1) = 2 \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)} = -\frac{2}{2} = -1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)} = -\frac{2}{2} = -1$$

EJEMPLO 2

Considerando la superficie en $\mathbb{R}^3$ definida implícitamente por

$$F(x, y, z) = xyz + \ln(xyz) - z = 0$$

Hallar la ecuación del plano tangente en $P = (1,1,1)$.

Verificamos el TFI

$$F(1,1,1) = 1 \cdot 1 \cdot 1 - \ln(1 \cdot 1 \cdot 1) - 1 = 1 - 0 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = xy + \frac{1}{z} - 1$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1) = 1 + 1 - 1 = 1 \neq 0$$

Además

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = yz + \frac{1}{x} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = xz + \frac{1}{y}$$

Con lo cual F es de clase C^1.

Al evaluar las derivadas parciales en el punto P

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,1) = 2 \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1) = 2$$

Así, la ecuación del plano estará dada por:

$$\pi: \ z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Sabemos que

$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

$$1 = f(1,1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)} = -\frac{2}{1} = -2 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)} = -\frac{2}{2} = -2$$

Entonces

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$z = 1 - 2(x - 1) - 2(y - 1)$$

$$z = -2x - 2y + 1 + 2 + 2$$

$$2x + 2y + z = 5$$

Por fórmula del gradiente:

$$\pi: \nabla F(x_0, y_0, z_0) \bullet (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$(2,2,1) \bullet (x - 1, y - 1, z - 1) = 0$$

$$2x - 2 + 2y - 2 + z - 1 = 0$$

$$2x + 2y + z = 5$$

EJEMPLO 3

Dada la superficie

$$xyzu + x^3 - 5yz^2 + 8u - 8z = 0$$

Verificar si es posible, en los alrededores del punto $P = (0,0,1,1)$, ver la superficie como la gráfica de una función diferenciable del tipo $u = u(x, y, z)$.

Definimos la función $F(x, y, z, u) = xyzu + x^3 - 5yz^2 + 8u - 8z$

Debemos verificar el TFI, ósea que se cumplen:

$$F(P) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(P) \neq 0$$

$$F \ es \ C^1$$

Entonces:

$$F(0,0,1,1) = 0 + 0 - 0 + 8 - 8 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(x, y, z, u) = xyz + 8$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(0,0,1,1) = 0 + 8 = 8 \neq 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z, u) = yzu + 3x^2 \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z, u) = xzu - 5z^2 \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z, u) = xyu - 10yz - 8$$

EJEMPLO 4

Sea

$$F(x, y, z) = x + y + z - ze^z = 0$$

Determinar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la gráfica de la función implícita en el punto $P = (e, -1,1)$.

La ecuación del plano está dada por:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Es decir, que, para definir el plano tangente, debemos verificar si es posible determinar una relación funcional $z = f(x, y)$ en los alrededores del punto $P = (e, -1,1)$

Verificamos el TFI.

$$F(e, -1,1) = e - 1 + 1 - 1e^1 = e - e = 0$$

Las derivadas parciales son:

$$F_x = 1 \qquad F_y = 1 \qquad F_z = 1 - e^z(z + 1)$$

Como se verifica que

$$F_z(e, -1,1) = 1 - e(1 + 1) = 1 - 2e \neq 0$$

Por lo tanto, existe la correspondencia funcional dada como $z = f(x, y)$

Por lo tanto, es posible determinar las derivadas parciales mediante

$$f_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \qquad f_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}$$

$$f_x(e, -1) = -\frac{F_x(e, -1,1)}{F_z(e, -1,1)} \qquad f_y(e, -1) = -\frac{F_y(e, -1,1)}{F_z(e, -1,1)}$$

$$f_x(e, -1) = -\frac{1}{1 - 2e} \qquad f_y(e, -1) = -\frac{1}{1 - 2e}$$

También

$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

$$1 = f(e, -1)$$

Entonces:

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$z = 1 - \frac{1}{1 - 2e}(x - e) - \frac{1}{1 - 2e}(y + 1)$$

$$\frac{1}{1 - 2e}x + \frac{1}{1 - 2e}y + z = 1 + \frac{e}{1 - 2e} - \frac{1}{1 - 2e}$$

$$\frac{1}{1 - 2e}x + \frac{1}{1 - 2e}y + z = 1 + \frac{e - 1}{1 - 2e}$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\vec{N} = (a, b, c)$$

Para la recta normal, sabemos que está dada como:

$$R^{\perp}: \alpha(t) = P + t \cdot \vec{N}$$

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$z = f(x_0, y_0) + f_{x(x_0,y_0)}x - f_{x(x_0,y_0)}x_0 + f_{y(x_0,y_0)}y - f_{y(x_0,y_0)}y_0$$

$$-f_{x(x_0,y_0)}x - f_{y(x_0,y_0)}y + z = \underbrace{f(x_0, y_0) - f_{x(x_0,y_0)}x_0 - f_{y(x_0,y_0)}y_0}_{d}$$

$$-f_{x(x_0,y_0)}x - f_{y(x_0,y_0)}y + z = d$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\vec{N} = (a, b, c) = \left(-f_{x(x_0,y_0)}, -f_{y(x_0,y_0)}, 1\right)$$

$$\vec{N} = \left(f_{x(x_0,y_0)}, f_{y(x_0,y_0)}, -1\right) = \left(-f_{x(x_0,y_0)}, -f_{y(x_0,y_0)}, 1\right)$$

Donde $P = (e, -1{,}1)$ y $\vec{N} = \left(f_x(e,-1)\,, f_y(e,-1)\,, -1\right) = \left(-\frac{1}{1-2e}, -\frac{1}{1-2e}, -1\right)$

$$R^{\perp}: \alpha(t) = (e, -1{,}1) + t \cdot \left(\frac{1}{1-2e}, \frac{1}{1-2e}, 1\right)$$

EJEMPLO 5

Determinar la derivada direccional de la función $u = f(x, y, z)$ definida implícitamente por la ecuación

$$x^2 + y^2 z + z u^2 - \ln(y + u) = 0$$

En el punto $P = (x_0, y_0, z_0, u_0) = (1{,}1{,}1{,}1)$ y en la dirección del vector $\vec{v} = (2\,, -1\,, 1)$.

Resolución:

Definimos la función $F(x, y, z, u)$

Siendo $x^2 + y^2 z + z u^2 - \ln(y + u) = 0$ la superficie de nivel 0 de la función F

Si se cumplen las condiciones del Teorema de la función implícita, es posible asegurar la existencia de la función $u = f(x, y, z)$ (la función implícita) en algún entorno E de $P' = (x_0, y_0, z_0) = (1{,}1{,}1)$ y, por lo tanto, de sus derivadas parciales, que en E, estarán dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial u}} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial u}}$$

Verifiquemos el TFI.

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 z + z u^2 - \ln(y + u) = 0$$

$$F(1{,}0, -1{,}1) = 1 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1^2 - \ln(0 + 1) = 1 - 1 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(x, y, z, u) = 2zu - \frac{1}{y+u}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(1,0,-1,1) = 2(-1)(1) - \frac{1}{0+1} = -2 - 1 = -3 \neq 0$$

Teniendo en cuenta que las funciones derivadas parciales

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z, u) = 2x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z, u) = 2yz - \frac{1}{y+u}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z, u) = y^2 + u^2$$

son continuas en el entorno del punto P, lo que garantiza es de clase C^1, y por lo tanto diferenciable allí.

Se satisfacen así, todas las condiciones del TFI. Queda asegurada entonces la existencia de la función implícita $u = f(x, y, z)$ en el entorno del punto P.

Sabiendo además que el TFI establece la condición de clase C^1 para la implícita en E, y entonces, en virtud del Teorema de Cauchy, es diferenciable. Vale de esta manera, la formula del gradiente para la derivada direccional

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0, z_0) = \nabla f(x_0, y_0 z_0) \cdot \vec{v}$$

Siendo el gradiente de $f(x, y, z)$

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z)\right)$$

$$\nabla f(x, y, z) = \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z, u)}{\frac{\partial F}{\partial u}(x, y, z, u)}, -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z, u)}{\frac{\partial F}{\partial u}(x, y, z, u)}, -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z, u)}{\frac{\partial F}{\partial u}(x, y, z, u)}\right)$$

Cálculo del gradiente en $P' = (x_0, y_0, z_0) = (1,0,-1)$

Tenemos entonces:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z,u) = 2x$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,0,-1,1) = 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,0,-1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,0,-1,1)}{\frac{\partial F}{\partial u}(1,0,-1,1)} = -\frac{(2)}{(-3)} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z,u) = 2yz - \frac{1}{y+u}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,0,-1,1) = 2(0)(-1) - \frac{1}{0+1} = -1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,0,-1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1,0,-1,1)}{\frac{\partial F}{\partial u}(1,0,-1,1)} = -\frac{(-1)}{(-3)} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z,u) = y^2 + u^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,-1,1) = (0)^2 + (1)^2 = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(1,0,-1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,0,-1,1)}{\frac{\partial F}{\partial u}(1,0,-1,1)} = -\frac{1}{(-3)} = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto:

$$\nabla f(1,0,-1) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Se pide hallar la derivada direccional en la dirección del vector $\vec{v} = (2,-1,1)$

Necesitamos normalizar dicho vector

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{(2,-1,1)}{\sqrt{6}} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Cálculo de derivada direccional.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0, z_0) = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,0,-1) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,0,-1) = \frac{4}{3\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{6}} + \frac{1}{3\sqrt{6}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,0,-1) = \frac{6}{3\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

EJEMPLO 6

Determinar la derivada direccional de la función $u = f(x, y, z)$ definida implícitamente por la ecuación

$$xy + yz + zu - 3ue^{x-2y+u} = 0$$

En el punto $P = (x_0, y_0, z_0, u_0) = (1,1,1,1)$ y en la dirección del vector $\vec{v} = (1, -1, 1)$.

Resolución:

Definimos la función $F(x, y, z, u)$

Siendo $xy + yz + zu - 3ue^{x-2y+u} = 0$ la superficie de nivel 0 de la función F

Si se cumplen las condiciones del Teorema de la función implícita, es posible asegurar la existencia de la función $u = f(x, y, z)$ (la función implícita) en algún entorno E de $P' = (x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$ y, por lo tanto, de sus derivadas parciales, que en E, estarán dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial u}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial u}} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial u}}$$

Verifiquemos el TFI.

$$F(1,1,1,1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot e^{1-2\cdot1+1} = 3 - 3 \cdot e^0 = 3 - 3 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(x,y,z,u) = z - 3e^{x-2y+u} - 3ue^{x-2y+u}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(1,1,1,1) = 1 - 3e^{1-2\cdot1+1} - 3 \cdot 1 \cdot e^{1-2\cdot1+1} = 1 - 3e^0 - 3e^0 = -5 \neq 0$$

Teniendo en cuenta que las funciones derivadas parciales

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z,u) = y - 3ue^{x-2y+u}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z,u) = x + z + 6ue^{x-2y+u}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z,u) = y + u$$

son continuas en $\mathbb{R}^4$, lo que garantiza que en ese conjunto la función F es de clase C^1, y por lo tanto diferenciable allí.

Se satisfacen así, todas las condiciones del TFI. Queda asegurada entonces la existencia de la función implícita $u = f(x,y,z)$.

Sabiendo además que el TFI establece la condición de clase C^1 para la implícita en E, y entonces, en virtud del Teorema de Cauchy, es diferenciable en ese conjunto. Vale de esta manera, la formula del gradiente para la derivada direccional

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0,z_0) = \nabla f(x_0,y_0 z_0) \cdot \vec{v}$$

Siendo el gradiente de $f(x,y,z)$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z)\right)$$

$$\nabla f(x,y,z) = \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z,u)}{\frac{\partial F}{\partial u}(x,y,z,u)} , -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z,u)}{\frac{\partial F}{\partial u}(x,y,z,u)} , -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z,u)}{\frac{\partial F}{\partial u}(x,y,z,u)} \right)$$

Cálculo del gradiente en $P' = (x_0, y_0, z_0) = (1{,}1{,}1)$

Tenemos entonces:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1{,}1{,}1{,}1) = 1 - 3 \cdot 1 \cdot e^{1-2\cdot 1+1} = -2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1{,}1{,}1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1{,}1{,}1{,}1)}{\frac{\partial F}{\partial u}(1{,}1{,}1{,}1)} = -\frac{(-2)}{(-5)} = -\frac{2}{5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1{,}1{,}1{,}1) = 1 + 1 + 6 \cdot 1 \cdot e^{1-2\cdot 1+1} = 8$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1{,}1{,}1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1{,}1{,}1{,}1)}{\frac{\partial F}{\partial u}(1{,}1{,}1{,}1)} = -\frac{8}{(-5)} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1{,}1{,}1{,}1) = 1 + 1 = 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(1{,}1{,}1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1{,}1{,}1{,}1)}{\frac{\partial F}{\partial u}(1{,}1{,}1{,}1)} = -\frac{2}{(-5)} = \frac{2}{5}$$

Por lo tanto:

$$\nabla f(1{,}1{,}1) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{8}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

Se pide hallar la derivada direccional en la dirección del vector $\vec{v} = (1\,, -1\,, 1)$

Necesitamos normalizar dicho vector

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{(1,-1{,}1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Cálculo de derivada direccional.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0, z_0) = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1,1) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{8}{5}, \frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1,1) = -\frac{2}{5\sqrt{3}} - \frac{8}{5\sqrt{3}} + \frac{2}{5\sqrt{3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1,1) = -\frac{8}{5\sqrt{3}} = -\frac{8\sqrt{3}}{15}$$