Resolución TP4:

Ejercicio 2 - a

Utilizando Regla, calcular para $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ su derivada parcial en el punto (0,0):

Para empezar:

- Al tratarse de una función de 2 variables $f(x,y)$ posee dos derivadas posibles, una en x y otra en y
  - $f_x(x,y)$
  - $f_y(x,y)$
- la raiz impar no posee limitaciones, $Dom(f) = \mathbb{R}^2$
- Las formulas de derivacion en por regla para n variables son las mismas que en 1 variable, pero considerando el resto de las variables como constantes.

Resolvemos:

$$f_x(x,y) = \left(f(x,y)\right)'_x$$

$$f_x(x,y) = \left(\sqrt[3]{xy}\right)'_x$$

$$f_x(x,y) = \left((xy)^{\frac{1}{3}}\right)'_x$$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{3}(xy)^{\frac{1}{3}-1}(xy)'_x$$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{3}(xy)^{-\frac{2}{3}}y$$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{3}\frac{y}{\sqrt[3]{(xy)^2}}$$

$$f\ \ (x,y) = \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}$$

$$f\ \ (x,y) = x^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{y}$$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}\sqrt[3]{y}$$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\sqrt[3]{y}$$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\sqrt[3]{y}$$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{3}\frac{y}{\sqrt[3]{(xy)^2}}$$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{3}\frac{y}{\sqrt[3]{(x)^2}\sqrt[3]{(y)^2}}$$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{3}\frac{y}{\sqrt[3]{(x)^2}y^{\frac{2}{3}}}$$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{3}\frac{y^{1-\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{(x)^2}}$$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\sqrt[3]{y}$$

Finalmente

Se acostumbra por derivar usando ambas variables

$$f_x(x,y) = \frac{1}{3}\frac{y}{\sqrt[3]{(xy)^2}}$$

Se replica el patron utilizado en la derivada anterior

$$\boldsymbol{f_y(x,y) = \frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{(xy)^2}}}$$

Valido para:

$$\sqrt[3]{(xy)^2} \neq 0$$
$$\rightarrow xy \neq 0$$
$$\rightarrow\ x \neq 0\ \vee y \neq 0$$

$$Dom(f_x) = Dom\left(f_y\right) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \neq 0\ \vee y \neq 0\ \}$$

$f_x(0,0) = Por\ regla\ no\ es\ calculable$ $\quad$ $f_y(0,0) = Por\ regla\ no\ es\ calculable$

Sin embargo:

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x}\right) = 0 \qquad f_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0}\left(\frac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y}\right) = 0$$

Seria incorrecto decir que no existen las derivadas en (0,0)