T. P. N° 6. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

DEPAOLI ROBERTO
LÓPEZ HÉCTOR

Ejercicio N° 1

Resolver: $y'\,sen\,x + y\,\cos x = 1 \quad con \;\; y_{(\pi/2)} = 1$

Res:

Se propone como solución general, $y = u_{(x)}\,v_{(x)}$, donde $u_{(x)}$ es “una solución” de la ecuación diferencial homogénea asociada $u'\,sen\,x + u\,\cos x = 0$.

A) Cálculo de u:

$$u'\,sen\,x + u\,\cos x = 0$$

Como en la condición inicial $x = \pi/2$, $sen(\pi/2) = 1 \neq 0$, existe un entorno de x para el cual vale:

$$u' + u\,\frac{\cos x}{sen\,x} = 0 \;\Rightarrow\; u' = -u\,\frac{\cos x}{sen\,x} \;\Rightarrow\; \frac{u'}{u} = \frac{\cos x}{sen\,x} \;\Rightarrow\; \ln|u| = -\int \frac{\cos x}{sen\,x}dx + k_1 \quad con \;\; k_1 \in \mathbb{R}$$

$$\ln|u| = -\ln(sen\,x) + k_1 = \ln\frac{1}{sen\,x} + k_1$$

$$|u| = e^{\ln\frac{1}{sen\,x} + k_1} = \frac{1}{sen\,x}\,\underbrace{e^{k_1}}_{k_2} = \frac{k_2}{sen\,x} \quad con \quad k_2 > 0$$

$$u = \frac{\overbrace{\pm k_2}^{k_3}}{sen\,x} = \frac{k_3}{sen\,x} \quad con \quad k_3 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Como $u = 0$ también es solución de la ecuación diferencial homogénea asociada, resulta la siguiente solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada:

$$u = \frac{C}{sen\,x} \quad con \quad C \in \mathbb{R}$$

Tomamos “una solución no nula”: $u = \dfrac{1}{sen\,x}$

B) Cálculo de v:

Reemplazamos $y = u\,v$ en la ecuación diferencial dada

$$(u\,v)'\,sen\,x + u\;v\;\cos x = 1 \Leftrightarrow\; (u\,v)' + u\,v\,\frac{\cos x}{sen\,x} = \frac{1}{sen\,x}$$ en un entorno de $x = \pi/2$

$$u'v + u\,v' + u\,v\,\frac{\cos x}{sen\,x} = \frac{1}{sen\,x} \;\Leftrightarrow\; u\,v' + v\underbrace{\left(u' + u\frac{\cos x}{sen\,x}\right)}_{\substack{0 \\ PARA\;\; u=\frac{1}{sen\,x}}} = \frac{1}{sen\,x}$$

$$u\,v' = \frac{1}{sen\,x} \;\Rightarrow\; \frac{1}{sen\,x}v' = \frac{1}{sen\,x} \;\Rightarrow\; v' = 1 \;\Rightarrow\; v = x + C \quad con\; C \in \mathbb{R}$$

Finalmente la solución general de la ecuación diferencial dada es:

$$y = u_{(x)}\,v_{(x)} = \frac{1}{sen\,x}(x + C) = \frac{x}{sen\,x} + \frac{C}{sen\,x} \qquad \text{(I)}$$

Verificación:

$$y' = \frac{sen\,x - x\cos x}{sen^2 x} - \frac{C\cos x}{sen^2 x} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (I) y (II) en la ec. dif. dada

$$\left(\frac{sen\,x - x\cos x}{sen^2 x} - \frac{C\cos x}{sen^2 x}\right)sen\,x + \left(\frac{x}{sen\,x} + \frac{C}{sen\,x}\right)\cos x =$$

$$1 - \cancel{\frac{x\cos x}{sen\,x}} - \cancel{\frac{C\cos x}{sen\,x}} + \cancel{\frac{x\cos x}{sen\,x}} + \cancel{\frac{C\cos x}{sen\,x}} = 1 \qquad \dagger$$

C) Cálculo de la constante *C* para la condición inicial dada:

Reemplazamos $x = \pi/2$, $y = 1$, en (I)

$$1 = \frac{\pi/2}{sen(\pi/2)} + \frac{C}{sen(\pi/2)} = \frac{\pi}{2} + C \;\Rightarrow\; C = 1 - \frac{\pi}{2} = \frac{2-\pi}{2}$$

Finalmente reemplazamos el valor hallado para *C* en (I) y se obtiene la solución particular pedida.

$$\boxed{y = \frac{x}{sen\,x} + \frac{2-\pi}{2\,sen\,x}}$$

Ejercicio N° 2

Resolver: $y' - \dfrac{2}{x+1}\,y = (x+1)^{5/2} \qquad con\;\; y_{(0)} = 1$

Para la resolución se seguirán los mismos pasos que para el ejercicio anterior.

Solución general, $y = u_{(x)}\,v_{(x)}$, donde $u_{(x)}$ es

A) Cálculo de u, "una solución" de la ecuación diferencial homogénea asociada

$u' - \dfrac{2}{x+1}u = 0$.

$$u' - \frac{2}{x+1}\,u = 0 \;\Rightarrow\; u' = \frac{2}{x+1}\,u \;\Rightarrow\; \frac{u'}{u} = \frac{2}{x+1} \;\Rightarrow\; \ln|u| = \int \frac{2}{x+1}dx + k_1, \quad k_1 \in \mathbb{R}$$

$$\ln|u| = 2\,\ln(x+1) + k_1 \;\Rightarrow\; |u| = e^{\ln(x+1)^2 + k_1} = (x+1)^2\,\underbrace{e^{k_1}}_{k_2} = k_2\,(x+1)^2 \quad k_2 > 0$$

$$u = \underbrace{\pm k_2}_{C}\,(x+1)^2 = C\,(x+1)^2$$

Tomamos una solución particular, sea: $u = (x+1)^2$

B) Cálculo de v, reemplazamos $y = u\,v$ en la ecuación diferencial dada:

$$(u\,v)' - \frac{2}{x+1}\,u\,v = (x+1)^{5/2} \;\Rightarrow\; u'v + u\,v' - \frac{2}{x+1}\,u\,v = (x+1)^{5/2}$$

$$v\underbrace{\left(u' - \frac{2}{x+1}\,u\right)}_{\substack{0 \\ PARA\;\; u=(x+1)^2}} + u\,v' = (x+1)^{5/2} \;\Rightarrow\; (x+1)^2\,v' = (x+1)^{5/2} \;\Rightarrow\; v' = (x+1)^{1/2}$$

$$v = \int (x+1)^{1/2}\,dx + C = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C$$

Finalmente la solución general de la ecuación diferencial dada es:

$$y = u_{(x)}\,v_{(x)} = (x+1)^2\left(\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C\right) = \frac{2}{3}(x+1)^{7/2} + C\,(x+1)^2$$

C) Cálculo de la constante *C* para la condición inicial dada:

Reemplazamos $x = 0$, $y = 1$, en la solución general:

$$1 = \frac{2}{3}(0+1)^{7/2} + C\,(0+1)^2 \;\Rightarrow\; C = \frac{1}{3}$$

Finalmente reemplazamos el valor hallado para *C* en la solución general y se obtiene la solución particular pedida.

$$\boxed{y = \frac{2}{3}(x+1)^{7/2} + \frac{1}{3}(x+1)^{2}}$$

Ejercicio N° 3:

Resolver: $x(x+1)\,y' + y = x(x+1)^2\, e^{-x^2} \qquad con\ \ y_{(1)} = 0$

Res:

La expresamos como $\quad y' + \dfrac{1}{x\,(x+1)}\,y = (x+1)\,e^{-x^2}$

A) Cálculo de u, "una solución" de la ecuación diferencial homogénea asociada

$u' + \dfrac{1}{x\,(x+1)}\,u = 0$.

$$u' + \frac{1}{x\,(x+1)}\,u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{u'}{u} = -\frac{1}{x\,(x+1)} \underbrace{=}_{\substack{Fracciones\\ Simples}} \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B\,x}{x\,(x+1)} = \frac{A+(A+B)\,x}{x\,(x+1)}$$

$$-1 = A + (A+B)\,x$$

Para $x=0$, $A=-1$; para $x=-1$, $B=1$

$$\therefore \quad \frac{u'}{u} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$$

$$\int \frac{u'}{u}dx = -\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{1+x}\,dx + k_1 \ , \quad k_1 \in \mathbb{R}$$

$$\ln|u| = -\ln x + \ln(x+1) + k_1 = \ln\left(k_2\,\frac{x+1}{x}\right) \ , \quad k_2 = e^{k_1}$$

$\therefore \ u_{(x)} = C\dfrac{x+1}{x}$ Tomando $C=1$, $\qquad u_{(x)} = \dfrac{x+1}{x}$

B) Cálculo de v, reemplazamos $y = u\,v$ en la ecuación diferencial dada:

$$(u\,v)' + \frac{1}{x\,(x+1)}\,u\,v = (x+1)\,e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad u'v + u\,v' + \frac{1}{x\,(x+1)}\,u\,v = (x+1)\,e^{-x^2}$$

$$u\,v' + v\underbrace{\left(u' + \frac{1}{x\,(x+1)}\,u\right)}_{\substack{0\\ PARA\ \ u = \frac{x+1}{x}}} = (x+1)\,e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad u\,v' = (x+1)\,e^{-x^2}$$

$$\frac{x+1}{x}v' = (x+1)\,e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad v' = x\,e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad v = \int x\,e^{-x^2}\,dx + C$$

$$v = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

Solución general de la ecuación diferencial dada:

$$y = u\,v = \frac{x+1}{x}\left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} + C \right) = -\frac{x+1}{2x} e^{-x^2} + C\frac{x+1}{x}$$

C) Cálculo de la constante *C* para la condición inicial dada:

Reemplazamos $x = 1$, $y = 0$, en la solución general:

$$0 = -\frac{1+1}{2.1} e^{-1^2} + C\frac{1+1}{1} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{e^{-1}}{2} = \frac{1}{2e}$$

Finalmente reemplazamos el valor hallado para *C* en la solución general y se obtiene la solución particular pedida.

$$\boxed{y = -\frac{x+1}{2x} e^{-x^2} + \frac{x+1}{2ex}}$$