Resolución TP6:

Ejercicio 15

15.- Supongamos que un rectángulo tiene perímetro 72. Determinar las longitudes de sus lados para que el área sea máxima.

$$P = 72$$

Características del rectángulo:

$$P = 2x + 2y$$
$$A = xy$$

$$\begin{cases} A = xy \\ 2x + 2y = 72 \end{cases}$$

Resolución como extremos libres

$$\begin{cases} A = xy \\ y = 36 - x \end{cases} \rightarrow A = x(36 - x) = 36x - x^2$$
$$A = 36x - x^2$$
$$A' = 36 - 2x$$
$$36 - 2x = 0 \rightarrow x = 18$$
$$A'' = -2$$

es máximo

$$x = 18 \rightarrow y = 18$$

Resolución como Extremos condicionados (21)

$$\begin{cases} A = xy \\ 2x + 2y = 72 \end{cases}$$

$$\nabla A = \lambda \nabla g$$
$$(y, x) = \lambda(2,2)$$

$$y = 2\lambda$$
$$x = 2\lambda$$
$$2x + 2y = 72$$

$$4\lambda + 4\lambda = 72$$
$$\lambda = 9$$
$$x = y = 2 \cdot 9 = 18$$

Clasificación mediante criterio de Comparación

$$P_c = (18,18)$$
$$A(P_c) = 18^2 = 324$$

Como no poseo otro punto crítico con el cual comparar. Necesito comparalo al menos, con algún punto de la condición

$$2x + 2y = 72$$

Proposición

$$x = 16$$
$$2 \cdot 16 + 2y = 72$$
$$y = 20$$
$$P = (16,20)$$
$$A(P) = 16 \cdot 20 = 320$$

Como el valor $A(P_c)$ es mayor a los demas puntos dentro de la condicion, obtenemos un maximo condiciado en $P_c = (18,18)$

Clasificación mediante criterio de hessiana reducida:

Si $L(x, y, \ell) = f(x, y) - \ell g(x, y)$

$$L_{xx}(x, y, \ell) = f_{xx}(x, y) - \ell g_{xx}(x, y) = 0 - \ell 0$$

$$L_{xy}(x, y, \ell) = f_{xy}(x, y) - \ell g_{xy}(x, y) = 1 - \ell 0$$

$$L_{yy}(x, y, \ell) = f_{yy}(x, y) - \ell g_{yy}(x, y) = 0 - \ell 0$$

$$L_{yx}(x, y, \ell) = f_{yx}(x, y) - \ell g_{yx}(x, y) = 1 - \ell 0$$

$$H(f, g) = \begin{pmatrix} 0 & -g_x & -g_y \\ -g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ -g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 - \ell 0 & 1 - \ell 0 \\ -2 & 1 - \ell 0 & 0 - \ell 0 \end{pmatrix}$$

$$H(f, g) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H(18,18) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & -2 & -2 \\ \hline -2 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Calcular

$$\begin{aligned} det(A) &= \quad 0 \cdot 0 \cdot 0 \\ &+ (-2) \cdot 1 \cdot (-2) \\ &+ (-2) \cdot 1 \cdot (-2) \\ &- (-2) \cdot 0 \cdot (-2) \\ &- (-2) \cdot (-2) \cdot 0 \\ &- \quad 1 \cdot 1 \cdot 0 \end{aligned}$$

$$= 8$$