Resolucion TP5:

Ejercicio 1 - d - Resumido

Tomando $F(x,y) = \ln(y^3 - 3x^2) + 2x + 3 = 0$

a) Determinar los pares (x,y) para los que el Teorema de Función Implícita(TFI) puede aplicarse
b) Calcular la derivada de $y = f(x)$

Herramientas:

- Se deben cumplir las 3 condiciones del teorema para asegurar TFI.
    - $P \epsilon F(x,y) = 0$ es decir $F(P) = 0$. (Léase P pertenece a la curva de nivel)
    - Las derivadas $F_x(x,y)$ y $F_y(x,y)$ son continuas en el entorno del punto.
    - $F_y(P) \neq 0$.
- Si se cumple TFI
    - Existe $y = f(x)$ definida implícitamente
    - Es posible calcular $y_x(P) = f_x(P) = -\frac{F_x(P)}{F_y(P)}$.

Resolución:

Se establece un conjunto por cada condición:

1)

La curva de nivel y el dominio de F

$$\ln(y^3 - 3x^2) + 2x + 3 = 0 \ \wedge \ y^3 - 3x^2 > 0$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(y^3 - 3x^2) + 2x + 3 = 0 \ \wedge \ y^3 - 3x^2 > 0\}$$

2)

$$F_x = \frac{-6x}{y^3 - 3x^2} + 2 \rightarrow \{y^3 - 3x^2 \neq 0\}$$

$$Como\ la\ derivada\ absorve\ el\ dominio\ de\ F \rightarrow \{y^3 - 3x^2 > 0\}$$

$$F_y = \frac{3y^2}{y^3 - 3x^2} \rightarrow \{y^3 - 3x^2 \neq 0\}$$

$$Como\ la\ derivada\ absorve\ el\ dominio\ de\ F \rightarrow \{y^3 - 3x^2 > 0\}$$

$$Finalmente$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^3 - 3x^2 > 0\}$$

3)

$$F_y = \frac{3y^2}{y^3 - 3x^2} \neq 0 \rightarrow y^3 - 3x^2 > 0 \ \wedge \ 3y^2 \neq 0$$

$$F_y = \frac{3y^2}{y^3 - 3x^2} \neq 0 \rightarrow y^3 - 3x^2 > 0 \ \wedge y \neq 0$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^3 - 3x^2 > 0 \ \wedge y \neq 0\}$$

Respuesta a:

Se cumple TFI en $F(x,y)=0$ para $y=f(x)$ para todos los puntos que cumplan A, B y C. Es decir $P_{TFI}=A\cap B\cap C$

$$A\ \cap B\cap C=\{\ln(y^3-3x^2)+2x+3=0\ \wedge\ y^3-3x^2>0\ \wedge y\neq 0\}$$

$$P_{TFI}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ln(y^3-3x^2)+2x+3=0\ \wedge y^3-3x^2>0\ \ \wedge y\neq 0\}$$

Corolario:

$$probamos\ (1,2)$$
$$y\neq 0?\rightarrow 2\neq 0$$
$$y^3-3x^2>0\ ?\rightarrow 5>0$$
$$\ln(y^3-3x^2)+2x+3=0?\rightarrow \ln(5)+2+3\neq 0$$

$$probamos\ x=0$$
$$y\neq 0$$
$$y^3-3\cdot 0^2>0\ ?\rightarrow y^3>0\rightarrow y>0$$
$$\ln(y^3-3\cdot 0^2)+2\cdot 0+3=0\rightarrow \ln(y^3)+3=0\rightarrow y=\frac{1}{e}$$

$$(1{,}2)\ no\ perternece\ a\ P_{TFI}$$

$$\left(0,\frac{1}{e}\right)\ no\ perternece\ a\ P_{TFI}$$

Respuesta b:

$$F_x=\frac{-6x}{y^3-3x^2}+2=\frac{-6x+2(y^3-3x^2)}{y^3-3x^2}$$
$$F_y=\frac{3y^2}{y^3-3x^2}$$

Y su derivada es

$$y_x(P)=f_x(P)=-\frac{F_x(P)}{F_y(P)}=-\left.\frac{\frac{-6x+2(y^3-3x^2)}{y^3-3x^2}}{\frac{3y^2}{y^3-3x^2}}\right]_P=-\left.\frac{-6x+2(y^3-3x^2)}{3y^2}\right]_P=\left.\frac{6x-2(y^3-3x^2)}{3y^2}\right]_P$$

$$y_x(P)=f_x(P)=\left.\frac{6x-2(y^3-3x^2)}{3y^2}\right]_P$$