UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA MATANZA

DEPARTAMENTO DE INGENIERIA E INVESTIGACIONES TECNOLOGICAS

ALGEBRA Y GEOMETRIA ANALITICA II - MATEMATICA DISCRETA II

DIAGONALIZACÓN DE MATRICES SIMÉTRICAS - TRANSFORMACIONES ORTOGONALES

En lo que sigue suponemos que estamos trabajando en R^{n} o R^{nxn} (para n=1,2,3,....) y con el producto interno euclídeo usual en esos espacios vectoriales.

A partir de ello adoptaremos algunas convenciones para expresar el producto interior.

Si $\vec{x}$ e $\vec{y}$ pertenecen a $\mathbb{R}^n$, entonces son de la forma $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Luego el producto interior $< \vec{x},\vec{y} >= (x_1.y_1 + x_2.y_2 + \dots . x_n.y_n) =$

$$(x_1,x_2,x_3,\dots x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = (\vec{x})^t.\vec{y} = (\vec{y})^t.\vec{x}$$

Si A representa a una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, entonces A$\vec{x}$ puede ser calculada haciendo el producto de la matriz A$\in \mathbb{R}^{nxn}$ por $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & \dots & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$ o también $(\vec{x})^t$A^t ,

$$(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & \dots & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & \dots & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & \dots & \dots & a_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Antes de comenzar a trabajar con las transformaciones ortogonales vamos a desarrollar algunos conceptos sobre matrices ortogonales y matrices simétricas.

MATRICES ORTOGONALES

Se define a una matriz A de R^{nxn} como ortogonal cuando verifica que A^t = A^{-1}(o equivalentemente A^t.A= I)

A partir de ello es posible definir algunas propiedades que tienen que cumplir dichas matrices.

Propiedad 1

Las matrices ortogonales tienen determinantes que valen 1 o -1

Demostración:

Si A^t = A^{-1}

A^t A= I (multiplicando por A por derecha)

det(A^t A)=1 (aplicando determinantes a ambos miembros)

det(A^t). det(A)=1 (propiedad del determinante del producto)

det(A).det(A) = (det(A))^2 =1 (propiedad determinante de la transpuesta)

det(A) = 1 o det(A) = -1

Propiedad 2

Si consideramos a las filas de una matriz ortogonal como componentes de n vectores, **resulta que** (**de acuerdo al producto euclídeo en R^n**) **estos vectores son ortonormales**.

Demostración:

Sea $A = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dots \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}$ y A^t $=\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \dots & \dots & f_n \end{pmatrix}$. Sabemos que A^t = A^{-1} ,

luego $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dots \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & \dots & \dots & f_n \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} f_1.f_1 & f_1.f_2 & f_1.f_3 & \dots & \dots & f_1.f_n \\ f_2.f_1 & f_2.f_2 & f_2.f_3 & \dots & \dots & f_2.f_n \\ f_3.f_1 & f_3.f_2 & f_3.f_3 & \dots & \dots & f_3.f_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n.f_1 & f_n.f_2 & f_n.f_3 & \dots & \dots & f_n.f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$, de donde surge

que el producto $f_i.f_j = \delta_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad si \quad i = j \\ 0 \quad si \quad i \neq j \end{array} \right|$

O sea que haciendo el producto euclídeo de las componentes de las filas resulta que cuando se multiplica una fila por si misma da por resultado 1, mientras que se multiplican dos filas diferentes el resultado es cero. De tal forma las filas de una matriz ortogonal son ortonormales (lo mismo ocurriría si trabajaramos por columnas).

Ahora podríamos buscar a aquellas matrices que pudieran ser diagonalizadas utilizando matrices de cambio de coordenadas (de base) ortogonales, o sea matrices de cambio de base cuyas columnas y filas sean ortonormales. Con lo cual si partimos de una matriz expresada en base canónica y la podemos diagonalizar a través de estas matrices de cambio , las bases de autovectores en las cuales la matriz resulta diagonal, también son bases ortonormales.

Nos preguntamos ¿cuáles serán las matrices A que pueden ser llevadas a la forma diagonal a través de matrices de cambio ortogonales?

O sea queremos que $A \in R^{nxn}$ cumpla $A = P\ D\ P^{-1}$, con P matriz ortogonal y D matriz diagonal. Las matrices que cumplen esta condición se dice que son **diagonalizables ortogonalmente**.

Propiedad 3

Las matrices diagonalizables ortogonalmente son simétricas.

Demostración

Supongamos que $A = P\ D\ P^{-1}$.

Luego $A^t = (PD\ P^{-1})^t = (P^{-1})^t\ D^t\ (P)^t = (P^t)^t\ D^t\ (P^t) = P\ D\ P^{-1} = A$

donde hemos utilizado la propiedad de la transpuesta de un producto de matrices, que P es ortogonal y por lo tanto $P^{-1} = P^t$, y que la transpuesta de una matriz diagonal es la misma matriz diagonal.

Luego resulta que si una matriz es diagonalizable ortogonalmente, necesariamente debe ser simétrica.

Ya que aparecen las matrices simétricas vamos a demostrar algunas propiedades referidas a ellas.

Propiedad 4

Si $A \in R^{nxn}$ es simétrica entonces sus autovalores son reales.

Supongamos que existe $\vec{v}$ tal que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

Conjuguemos ambos términos:

$\overline{A\vec{v}} = \overline{\lambda\vec{v}}$

$\overline{A}\overline{\vec{v}} = \overline{\lambda}\overline{\vec{v}}$

$A\overline{\vec{v}} = \overline{\lambda}\overline{\vec{v}}$ pues A es real.

Por otro lado si trasponemos esto último:

$(A\overline{\vec{v}})^t = (\overline{\lambda}\overline{\vec{v}})^t$

$\overline{\vec{v}}^t.A = \overline{\vec{v}}^t.\overline{\lambda}^t$ (transpuesta de un producto)

$\overline{\vec{v}}^t . A = \bar{\lambda} . \overline{\vec{v}}^t$ (pues $\bar{\lambda}^t$ es un escalar)

Efectuemos: $\lambda . (\overline{\vec{v}})^t . \vec{v} = (\overline{\vec{v}})^t . (\lambda \vec{v}) =$

$$(\overline{\vec{v}})^t . (A\vec{v}) = ((\overline{\vec{v}})^t A) . \vec{v} =$$
$$(\bar{\lambda} . \overline{\vec{v}}^t) . \vec{v} = \bar{\lambda} . (\overline{\vec{v}}^t . \vec{v})$$

Mirando el principio y final de la igualdad queda:

$$\lambda . (\overline{\vec{v}})^t . \vec{v} = \bar{\lambda} . \overline{\vec{v}}^t . \vec{v}$$
$$\lambda . (\overline{\vec{v}})^t . \vec{v} - \bar{\lambda} . \overline{\vec{v}}^t . \vec{v} = 0$$
$$(\lambda - \bar{\lambda}) . (\overline{\vec{v}}^t . \vec{v}) = 0$$

Como el autovector $\vec{v}$, si lo suponemos complejo, resulta ser de la forma $\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \\ a_3 + ib_3 \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix}$ y su transpuesta conjugada es de la forma

$(a_1 - ib_1 \quad a_2 - b_2 \quad a_3 - ib_3 \quad \ldots \quad a_n - ib_n)$ y el producto interior de ellos resulta en $(a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) + (a_3^2 + b_3^2) + \ldots + (a_n^2 + b_n^2) \neq 0$, pues como es un autovector, todas sus componentes no pueden ser cero (sino sería el vector nulo).

Luego resulta $(\lambda - \bar{\lambda}) = 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$

Por lo tanto λ es real.

Otra propiedad importante es la siguiente:

Propiedad 5

Si A es una matriz simétrica entonces dos autovectores cualesquiera correspondientes a autovalores diferentes, **son ortogonales**.

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos autovectores con autovalores α y β (diferentes) y reales (porque son autovalores de una matriz simétrica)

Planteamos $\alpha < \vec{u} , \vec{v} >= < \alpha\vec{u} , \vec{v} > = < A\vec{u} , \vec{v} >$
$= (A\vec{u})^t . \vec{v} = \vec{u}^t A^t . \vec{v} = \vec{u}^t A . \vec{v} = \vec{u}^t (A . \vec{v}) = \vec{u}^t \beta . \vec{v} = \beta \vec{u}^t . \vec{v} = \beta < \vec{u}, \vec{v} >$.

Luego $(\alpha - \beta) < \vec{u}, \vec{v} >= 0$ y como los autovalores son diferentes, resulta que $< \vec{u}, \vec{v} >= 0$

Por ende $\vec{u}$ y$\vec{v}$ son ortogonales.

Volviendo a la diagonalización orotogonal, podemos demostrar la siguiente propiedad

Propiedad 6

Si A es diagonalizable ortogonalmente, **entonces posee una base ortonormal de autovectores**.

Demostración

Si A es diagonalizable ortogonalmente, entonces existen matrices de cambio de base que hacen que D = P^{-1} A P , y esa matriz P tiene en sus columnas las componentes de los autovectores que forman una base que diagonaliza a A. Pero como P es ortogonal, eso significa que dichos autovectores son ortonormales.

Entonces, si una matriz A es diagonalizable ortogonalmente sus autovectores forman una base ortonormal (con el producto euclídeo usual).

La propiedad inversa es obviamente válida, ya que si A posee una base de autovectores ortonormalizados es posible diagonalizar a A en dicha base y la matriz de cambio estará formada por dichos autovectores que por lo tanto será ortogonal.

Si enumeramos las proposiciones de la siguiente forma:

a) **A es diagonalizable ortogonalmente**

b) **A posee un conjunto ortonormal de autovectores**.

c) **A es simétrica**.

De las propiedades anteriores surge que hemos probado que a)⇒ b) , a) ⇒c) y b)⇒ a)

Si pudiéramos demostrar que c) ⇒a) entonces las tres proposiciones serían equivalentes.

La propiedad que nos interesaría demostrar es entonces la siguiente:

Si A es simétrica, **es siempre diagonalizable ortogonalmente**.

Si n=1 (la matriz es una constante) no hay nada que demostrar pues una matriz de 1x1 ya está en forma diagonal.Podemos elegir un autovector y normalizarlo.

Procederemos por inducción

Supondremos que toda matriz simétrica real de dimensión kxk con autovalores reales , es diagonalizable ortogonalmente. Tendremos que demostrar que para n= k+1 , si A es una matriz simétrica real con autovalores reales es diagonalizable ortogonalmente.

Sea λ_1 uno de los autovalores de A y $\overrightarrow{v_1}$ un autovector unitario correspondiente. Si generamos (a través de la aplicacion de Gram-Schmidt) una base ortonormal

$Q_1 = [\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \ldots \overrightarrow{v_n}]$, que cumple $\overrightarrow{v_i}.\overrightarrow{v_j} = \delta_{ij}$ (1 si i=j ; 0 si i≠ j)

Luego Q_1 es ortogonal y cumple

$$Q_1^t A Q_1 = \begin{bmatrix} \overrightarrow{v_1^t} \\ \overrightarrow{v_2^t} \\ \overrightarrow{v_3^t} \\ \ldots \\ \overrightarrow{v_n^t} \end{bmatrix} A[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \ldots \overrightarrow{v_n}] = \begin{bmatrix} \overrightarrow{v_1^t} \\ \overrightarrow{v_2^t} \\ \overrightarrow{v_3^t} \\ \ldots \\ \overrightarrow{v_n^t} \end{bmatrix} [A\overrightarrow{v_1}, A\overrightarrow{v_2}, A\overrightarrow{v_3}, \ldots A\overrightarrow{v_n}] =$$

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{v_1^t} \\ \overrightarrow{v_2^t} \\ \overrightarrow{v_3^t} \\ \ldots \\ \overrightarrow{v_n^t} \end{bmatrix} [\lambda_1\overrightarrow{v_1}, A\overrightarrow{v_2}, A\overrightarrow{v_3}, \ldots A\overrightarrow{v_n}] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = B$$

debido a que $\overrightarrow{v_1^t}(\lambda_1\overrightarrow{v_1}) = \lambda_1(\overrightarrow{v_1^t}.\overrightarrow{v_1}) = \lambda_1(\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_1}) = \lambda_1$

y $\overrightarrow{v_i^t}(\lambda_1\overrightarrow{v_1}) = \lambda_1(\overrightarrow{v_i^t}.\overrightarrow{v_1}) = \lambda_1(\overrightarrow{v_i}.\overrightarrow{v_1}) = 0$

Pero B=$Q_1^t A Q_1$, entonces B^t=$(Q_1^t A Q_1)^t$ =$Q_1^t A^t Q_1 = B$

por lo tanto B es simétrica y debe tener una forma de bloques de este tipo

B=$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$, con A_1 simétrica (pues es submatriz de una matriz simétrica)

Como A y B son semejantes tienen el mismo polinomio característico y por lo tanto las mismas raíces.

El polinomio característico de B (y el de A) será $|\lambda I - B| = (\lambda - \lambda_1)|\lambda I - A_1|$

por lo tanto el polinomio característico de A_1 divide al polinomio característico de A.

Entonces sus autovalores son también autovalores de A y por lo tanto son reales.

De tal forma A_1 es una matriz simétrica real kxk y por la hipótesis inductiva es diagonalizable ortogonalmente , por lo tanto existe una matriz ortogonal P que cumple

$P^t A_1 P = D_1$, matriz diagonal

Armemos la siguiente matriz

$Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$, matriz de dimensión (k+1)x(k+1) y $Q_2^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^t \end{pmatrix}$

Luego si hacemos $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^t \end{pmatrix} = I$ de (k+1)x(k+1) y por lo tanto Q_2 es ortogonal

Luego podemos formar la matriz $Q = Q_1 Q_2$, que es también ortogonal , porque es producto de matrices ortogonales

Luego en la base ortonormal formada por las columnas de Q resulta que

$Q^t AQ = (Q_1Q_2)^t A(Q_1Q_2) = (Q_2^t Q_1^t) A(Q_1Q_2) = (Q_2^t (Q_1^t AQ_1) Q_2) = (Q_2^t B Q_2)$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & P^t A_1 P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$

y por lo tanto A es una matriz diagonal espresada en una base ortonormal , por lo tanto es diagonalizable ortogonalmente.

APLICACIÓN DE LA DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES SIMÉTRICAS

Toda cónica se puede escribir de la forma $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, donde a,b,c,d,e y f son números reales.

Ahora es posible expresar a la parte cuadrática $ax^2 + bxy + cy^2$ como el producto de un vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, su transpuesto y una matriz simétrica. Veamos

$(x,y)\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + bxy + cy^2$. Pero como la matriz es simétrica se podrá diagonalizar con autovalores reales y autovectores ortogonales (a los que facilmente podemos normalizar) y tendremos una base de autovectores ortonormales y la matriz $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ se podrá escribir de la forma $P^{-1}DP$ con d matriz diagonal y P matriz ortogonal , que cumple $P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ donde $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ son las nuevas coordenadas en la base de autovectores.y $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ y por lo tanto

$(x,y) = (x',y').P$

$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 = (x,y)\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x,y)\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} + f = 0$

Pero haciendo el cambio de coordenadas resulta

$(x,y)\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x,y)\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} + f = 0 = (x,y)P^{-1}DP\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (x,y)\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} + f = (x$

Si D=$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, por lo tanto $(x',y')D\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x',y')\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$ $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$

Luego

$(x',y')D\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (x',y').P\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} + f = 0 = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + (x',y').P\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} + f = 0$, con lo cual al desarrollar el producto $(x',y').P\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$, quedará una expresión lineal en (x',y').

Completando cuadrados sobre (x',y') se logrará una nuevo juego de coordenadas (x'',y'')

Supongamos que deseamos estudiar la sección cónica determinada por la ecuación:$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

Esta ecuación se compone de una parte cuadrática $(3x^2 - 2xy + 3y^2)$, una lineal $(2x - 4y)$ y una constante (1)

La parte cuadrática se puede escribir de la siguiente manera

$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3x^2 - 2xy + 3y^2$, en donde se colocan en la diagonal los coeficientes que acompañan a x^2 y a y^2 , mientras que en las otras posiciones se coloca el coeficiente que acompaña a x.y dividido por 2.

La matriz resultante es simétrica , por lo tanto se podrá diagonalizar

$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, sus autovectores y autovalores son: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 2, \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 4$

Obviamente son ortogonales , podemos normalizarlos

$\left\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 2, \left\{\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\} \leftrightarrow 4$

De tal forma que haciendo un cambio de coordenadas de (x,y) a (x ´, y ´) resulta

$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}\Bigg($

(**1**)

Ahora podemos definir las nuevas coordenadas (x ´,y ´) como

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{2}y \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}y - \frac{1}{2}\sqrt{2}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ y

$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{2}y & \frac{1}{2}\sqrt{2}y - \frac{1}{2}\sqrt{2}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}$

Por lo que la expresión (**1**) se convierte en

$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 2x'^2 + 4y'^2$, y desaparece el término que contiene un producto cruzado de las variables

Por otro lado obtenemos que

$$.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}\,x' - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,y' \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\,x' + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,y' \end{pmatrix}$$

recordar que como la matriz de cambio de base es ortogonal , su inversa es igual a su traspuesta.

Luego $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}\,x' - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,y' \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}\,x' + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,y' \end{pmatrix}$

Reemplazando en la parte lineal expresada en x e y , resulta:

$2x - 4y = 2(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,x' - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,y') - 4(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,x' + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,y') = -\sqrt{2}\,x' - 3\sqrt{2}\,y'.$

Que resulta igual si hacemos $\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -\sqrt{2}\,x' - 3\sqrt{2}\,y'$

Luego la expresión inicial trasladada a las nuevas coordenadas resulta ser:

$2x'^2 + 4y'^2 - \sqrt{2}\,x' - 3\sqrt{2}\,y' + 1 = 0$

Ahora se puede completar cuadrados ya que aparecen los términos separados en x ´e y ´

$2x'^2 - \sqrt{2}\,x' = 2(x' - \sqrt{2}/4)^2 - 2/8$

$4y'^2 - 3\sqrt{2}\,y' = 4(y' - 3\sqrt{2}/8)^2 - 9/8$

Luego la expresión $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$, se convierte en
$2(x' - \sqrt{2}/4)^2 + 4(y' - 3\sqrt{2}/8)^2 - \frac{2}{8} - \frac{9}{8} + 1 = 0$

y con un nuevo cambio de variables de (x ´, y ´) a (x´´ , y´´) donde $x'' = (x' - \sqrt{2}/4)$ e $y'' = (y' - 3\sqrt{2}/8)$

se convierte en $2x''^2 + 4y''^2 - \frac{3}{8} = 0$, o lo que es lo mismo $2x''^2 + 4y''^2 = \frac{3}{8}$, o
$\frac{x''^2}{\frac{3}{16}} + \frac{y''^2}{\frac{3}{32}} = 1$

que es una ecuación de la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a^2 = \frac{3}{16}$ y $b^2 = \frac{3}{32}$ que es la ecuación de una elipse.

Ahora trataremos de analizar graficamente lo que hemos hecho en cada paso

1º) al buscar los autovalores y autovectores de la matriz que representa la parte cuadrática , encontramos un nuevo par de coordenadas que se escriben como

$x' = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,x + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,y$, $y' = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,y - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,x$ y representan una rotación de ejes de 45º en sentido antihorario (positivo)

Si queremos encontrar las ecuaciones de las rectas que simbolizan los nuevos ejes , podemos suponer lo siguiente

Si $x' = 0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,x + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,y \rightarrow y = -x$. Pero los puntos para los cuales $x' = 0$ pueden tomar cualquier valor para y' , por lo tanto la recta $y = -x$ representará el eje y'

Procediendo de igual forma con $y' = 0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,y - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,x \rightarrow y = x$, por lo tanto la recta $y = x$ representará el eje x'

2º) Al realizar un nuevo cambio de variables resulta

$x'' = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,x + \frac{1}{2}\sqrt{2}\,y - \frac{\sqrt{2}}{4}$ e $y'' = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,y - \frac{1}{2}\sqrt{2}\,x - \frac{3\sqrt{2}}{8}$, lo cual representa una traslación de ejes.

Para encontrar el nuevo origen hacemos $x'' = 0$ y $y'' = 0$, con lo que se logra

$\frac{1}{2}\sqrt{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{2}y = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\quad\quad$ $\frac{1}{2}\sqrt{2}y - \frac{1}{2}\sqrt{2}x = \frac{3\sqrt{2}}{8}$

Resolviendo resulta

$x + y = \frac{1}{2}, y - x = \frac{3}{4}$

Luego $2y = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \rightarrow y = \frac{5}{8}$. Reemplazando resulta $x = \frac{1}{2} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{8}$

Las rectas que simbolizan a los ejes x'' e y'' son paralelas a las señaladas anteriormente que pasan por el punto $(-\frac{1}{8}, \frac{5}{8})$

Para x'' la ecuación de la recta será $y = x + k$ donde si $x = -\frac{1}{8}, y = \frac{5}{8}$ y reemplazando $\frac{5}{8} = -\frac{1}{8} + k \rightarrow k = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Para y'' la ecuación de la recta será $y = -x + k$ donde si $x = -\frac{1}{8}, y = \frac{5}{8}$ y reemplazando $\frac{5}{8} = \frac{1}{8} + k \rightarrow k = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

En la figura siguiente se representa a la elipse y los ejes calculados.Los primeros ejes rotados se representan por una línea de puntos y rayas y los ejes trasladados por una línea sólida delgada.Cada eje está representado por su ecuación. El centro de la elipse (-1/8 , 5/8) está también señalado.