CALCULO COMBINATORIIO

Ejercicio N°1

Un grupo, compuesto por cinco hombres y siete mujeres, forma un comité de 5 personas. a) De cuántas maneras distintas puede formarse sin restricciones? b) ¿y si son de 2 hombres y 3 mujeres? c) ¿Si una mujer determinada debe pertenecer al comité? d) ¿Si dos hombres determinados no pueden estar en el comité?

Respuesta: Tenemos en total 5 varones y 7 mujeres, o sea 12 personas.

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{m;n}} = \frac{\boldsymbol{m}!}{\boldsymbol{n}!.(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})!}$$

a) $C_{12;5} = \frac{12!}{5!.(12-5)!} = 792$ ***Calculadora***: Combinaciones simples: tecla ***nCr***

Variaciones simples : tecla ***nPr***

b) No importa el orden, entonces debemos combinar a los hombres tomados de a 2 y a las mujeres tomadas de a 3. O sea
Recordando:
$\underline{H_1H_2\ \ M_1M_2M_3}$

$C_{5;2}\ .\ C_{7;3} = \frac{5!}{2!.(5-2)!}\ .\ \frac{7!}{3!.(7-3)!} = 350$

c) Si una mujer determinada debe estar en todos los comités, significa que uno de los 5 lugares ya está ocupado. ¨Por lo tanto hay que cubrir los 4 restantes, con 2 mujeres más, y dos varones. O sea
$C_{5;2}\ .\ C_{6;2} = \frac{5!}{2!.(5-2)!}\ .\ \frac{6!}{2!.(6-2)!} = 150$

d) Si dos hombres no pueden estar significa que solo contaremos con tres hombres. O sea
$C_{3;2}\ .\ C_{7;3} = \frac{3!}{2!.(3-2)!}\ .\ \frac{7!}{3!.(7-3)!} = 105$

Ejercicio 2

Hallar el valor de x, y resolver: $3.C_{(x+2);3} = 4.C_{(x+1);3}$

Se trata de una ecuación combinatoria. Debemos aplicar las fórmulas y hallar x.

$$3.C_{(x+2);3} = 4.C_{(x+1);3} \rightarrow 3.\frac{(x+2)!}{3!.(x+2-3)!} = 4.\frac{(x+1)!}{3!.(x+1-3)!} \rightarrow$$

$$3.\frac{(x+2)!}{3!.(x-1)!} = 4.\frac{(x+1)!}{3!.(x-2)!} \rightarrow$$ *Recordar por ejemplo 6! = 6.5! = 6.5.4! = 6.5.4.3!.*

$$3.\frac{(x+2).(x+1)!}{3!.(x-1).(x-2)!} = 4.\frac{(x+1)!}{3!.(x-2)!}$$

$$3.\frac{(x+2)}{(x-1)} = 4 \rightarrow 3.(x+2) = 4.(x-1) \rightarrow 3x + 6 = 4x - 4 \rightarrow \boldsymbol{x = 10}$$

Ejercicio 3

En una fiesta infantil se reparten 14 chocolates iguales entre los 6 niños asistentes. **3.1** ¿De cuántas formas se pueden repartir?. **3.2**¿Y si cada niño recibe al menos un chocolate?

3.1 Respuesta:

Aquí tenemos que preguntarnos de que formas podrían darse estos repartos. Por ejemplo podríamos darle los 14 chocolates a un solo niño y a los demás ninguno (que cruel e injusto…jaja).

Hagamos una representación de la situación.

Imaginemos que numeramos a los niños del 1 al 6 y que indicamos mediante cruces (x) a los chocolates que recibe cada uno. Quedaría algo así.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

| xxx | xxx | xx | xx | xx | xx |

| xxxx | x | xxx | xx | xx | x x |

| x | xxx | xxx | xxx | xxx | x |…..etc.

Aquí se observan dos cuestiones importantes:

1°) Cada línea representa un posible reparto de los 14 chocolates entre los 6 niños.

2°) Si eliminamos las barras de los extremos, la cantidad de divisiones sigue siendo 6 , o sea no se alteran las condiciones del problema. Quedaría entonces el esquema simplificado:

1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6

xxx | xxx | xx | xx | xx | xx

xxxx | x | xxx | xx | xx | x x

x | xxx | xxx | xxx | xxx | xx … etc.

Donde cada caso que tenemos que contar puede verse ahora como una ***permutación entre 19 elementos*** elementos donde ***hay 5 repetidos (los 5 palitos) y 14 repetidos (las 14 x)***, ya que son indistinguibles. O sea,

$$P_{14;5}^{19} = \frac{19!}{14!.5!}$$

3°) Dado un reparto cualquiera, para tener otro distinto tenemos que sacarle al menos un chocolate a un niño y dárselo a otro, o sea, como los chocolates son indistinguibles, no importa el orden, por lo tanto, se trata de combinaciones.

4°) Además como tenemos 14 chocolates y solo 6 niños, no podemos darle exactamente uno a cada uno, por lo tanto, estamos obligados a repetir chocolates.

Se trata entonces de Combinaciones con repetición de 6 elementos (los 6 niños), tomados de a 14 a la vez (los 14 chocolates). Resulta obvio que para combinar 6 elementos de a 14 a la vez, es necesario repetirlos. O sea,

$$C'_{6;14} = P_{14;5}^{19}$$

Para comprender mejor el problema debemos preguntarnos, si estamos repartiendo los 14 chocolates entre los 6 niños o los 6 niños entre los 14 chocolates…

La fórmula es:

$C'_{6;14} = P_{14;5}^{19} = \frac{19!}{14!.5!} = \frac{19!}{14!.(19-14)!} = C_{19;14} = C_{6+14-1;14}$ **, y la solución es :**

$$C'_{6;14} = C_{19;14} = \frac{19!}{14!.(19-14)!} = 11628$$

En general ,

$$C'_{n;k} = C_{n+k-1;k} \qquad C'_{2;6} = C_{2+6-1;6} = C_{7;6} = 7$$

3.2

Si cada niño recibe al menos un chocolate. Esto significa que de los 14 chocolates, 6 ya son entregados, uno a cada niño, por lo tanto solo quedan 8 chocolates a repartir, obviamente, con el mismo criterio, o sea que serían

$$C'_{6;8} = C_{6+8-1;8} = C_{13;8} = \frac{13!}{8!.(13-8)!} = \frac{13!}{8!.5!} = 1287$$

Ejercicio 4 Resolver la siguiente ecuación: ***3.C***$_{x;4}$ **= *5.C***$_{x;2}$

$3.C_{x;4} = 5.C_{x;2} \rightarrow 3.\frac{x!}{4!.(x-4)!} = 5.\frac{x!}{2!.(x-2)!} \rightarrow 3.\frac{x!}{4!.(x-4)!} = 5.\frac{x!}{2!.(x-2).(x-3)(x-4)!}$

$\rightarrow \frac{1}{4} = \frac{5}{(x-2).(x-3)} \rightarrow$ (x-2).(x-3) = 4.5 $\rightarrow$ x^2 - 5x + 6 - 20 = 0

→ $x^2 - 5x - 14 = 0$ $\boxed{x_1 = 7}$ $x_2 = -2$

Ejercicio 5

5.1-¿ Cuántos equipos de investigación de 6 personas pueden formarse con 6 físicos, 4 biólogos y 3 químicos

a) Sin restricciones; b) Todos contengan al menos 3 físicos; c) A lo sumo dos miembros sean químicos. d) ¿Cuántos serían los equipos si los integrantes tuvieran cargos específicos, sin restricciones ?

Respuesta

a) Como son 6 físicos, 4 biólogos y 3 químicos, y no hay restricciones, contamos con 13 personas en total. Además, se puede ver que, dado un equipo cualquiera, si cambiamos a los integrantes de lugar, el equipo es el mismo. ***O sea que no importa el orden***. Por lo tanto, se trata de ***combinaciones simples de 13 elementos tomados de a 6 a la vez.***

$$C_{13;6} = \frac{13!}{6!.(13-6)!} = 1716$$

b) Como dice al menos 3 físicos, tendremos que contar los equipos que tienen 3, 4, 5, y, 6 físicos. Siguen siendo combinaciones.

$$C_{6;3}.C_{7;3} + C_{6;4}.C_{7;2} + C_{6;5}.C_{7;1} + C_{6;6} = 20.35 + 15.21 + 6.7 + 1 = 1058$$

c) Se piensa igual al punto b) , o sea:

$$C_{10;6} + C_{3;1}.C_{10;5} + C_{3;2}.C_{10;4} = 3\,.\,252 + 3\,.\,210 = 1596$$

d) Si los integrantes tienen un cargo específico es como decir que en este caso si importará el orden ya que los cambios de lugar en la lista implican cambio de cargos. Por lo tanto, serán en este caso, variaciones simples de 13 elementos tomados de a 6 a la vez.

A B C D E F F D E B A C

$$V_{13;6} = \frac{13!}{(13-6)!} = 1.235.520$$

Ejercicio 6
6.1 ¿ Cuántos números distintos, de cuatro cifras distintas pueden formarse con los dígitos 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8?
6.2 ¿ Cuántos si las cifras pueden repetirse?. **6.3** ¿Cuántos son mayores que 5000?. **6.4** ¿ Cuántos son pares?. **6.5** ¿Mismo punto **6.1** pero si los dígitos fueran 0, 1, 2, 3, 4, 5, y 6 ?

Solución:
6.1 Como los números deben ser de 4 cifras distintas, estas no pueden repetirse. ¿Si formamos los números 2345 y 4325 son iguales o distintos? ¿Importa el orden? Si importa el orden por lo tanto lo que debemos calcular son ***Variaciones simples de 7 elementos tomados de a 4 a la vez***. O sea

$$V_{7;4} = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7.6.5.4.3!}{3!} = 7.6.5.4 = \mathbf{840}$$

Otra forma, por principio de multiplicación.
Supongamos que nuestro número tiene 4 cifras distintas. Si empezamos a formarlo de izquierda a derecha, resulta que para la 1ª posición tenemos 7 posibilidades, ya que puede ir cualquiera de los 7 dígitos. Luego para la posición siguiente quedan 6, ya que uno ya se colocó. Para la que sigue 5 y para la última solo 4 dígitos posibles. O sea

7 . 6 . 5 . 4 = **840**

6.2. Si las cifras pueden repetirse, significa que ahora debemos contar, por ejemplo al 2334, 3333, 5677, etc. Se trata de ***Variaciones con repetición de 7 elementos tomados de a 4 a la vez.*** O sea

$$\mathbf{V'_{7;4} = 7^4 = 2401}$$

Otra forma, por principio de multiplicación

Ahora los dígitos pueden repetirse, o sea que para cada posición tendremos siempre 7 posibilidades, o sea

7 . 7 . 7 . 7 = 7^4 = 2401

6.3. En las condiciones del punto **6.1**, (sin repetición), todo número que empiece con 5 será ***mayor que 5000***. En este caso nos conviene usar el ***principio de multiplicación***.
Para el primer lugar de la izquierda solo tenemos 4 posibilidades. (5,6,7 y 8) , para el siguiente volvemos a tener 6 porque allí puede ir cualquier cifra, para el otro 5 y para el último 4. O sea

4 . 6 . 5 . 4 = **480 números**

6.4 Para que un número sea par, debe terminar en cifra par, o sea que el dígito de la derecha debe ser par. Tenemos 4 posibilidades para ese lugar, 2, 4, 6 y 8.
Armaremos el número de derecha a izquierda. O sea

4 . 5 . 6 . 4 = **480 números**

6.5. Si los dígitos fueran, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, tendremos que considerar que el ***0*** no puede ser la primera cifra de la izquierda ya que si así fuera, el número no sería de 4 cifras. Por ejemplo ***0345*** o ***0023*** o ***0001*** o ***0678***, no son números de 4 cifras.
Por lo tanto , usando el principio de multiplicación quedaría:

6 . 6 . 5 . 4 **= 720 números**