ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA I
MÓDULO 1

EQUIVALENCIA ENTRE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

¿Cómo podemos saber si dos sistemas de ecuaciones S_1 y S_2 son equivalentes, es decir, que tienen el mismo conjunto solución?
Lo primero que debemos hacer es triangular cada conjunto de ecuaciones por separado y quedarnos con las ecuaciones independientes (cuya cantidad coincide con el rango de cada matriz de coeficientes y de cada matriz ampliada). Después de hacer esto puede pasar que:

- En alguno de los sistemas, los rangos de las matrices de coeficientes y ampliadas no sean iguales y por lo tanto sería un sistema incompatible. En este caso, los dos sistemas serán equivalentes ***SOLO*** si ambos lo son. Si, en cambio, uno fuera compatible y el otro incompatible, no son equivalentes.
- Ambos sistemas resultan compatibles pero los rangos de las matrices ampliadas son diferentes. En este caso, los sistemas NO serán equivalentes ya que tienen distinto conjunto solución.
- Ambos sistemas resultan compatibles con el mismo rango en sus matrices ampliadas. Si este es el caso, tenemos que seguir trabajando, ya que podrían tener, o no, el mismo conjunto solución.

Si ya sabemos que ambos sistemas son compatibles y ambos tienen rango k, ¿cómo seguimos?

Ubicamos las k ecuaciones de uno de ellos y a continuación las k del otro (*y éstas no son intercambiadas con ninguna de las del primero*) y comenzamos a triangularlas. Si los sistemas son equivalentes las últimas k deben anularse por completo.

Ejemplo 1:

Compruebe que $S\colon \begin{cases} -3x+2y-z=8 \\ 2x-y+3z=-12 \end{cases}$ y $S'\colon \begin{cases} -x+2y+9z=-24 \\ -11x+9y+8z=-4 \end{cases}$ son equivalentes.

Cuando un sistema tiene solo 2 ecuaciones, el sistema será de rango 1 (si las ecuaciones son múltiplos una de la otra) o de rango 2 (si las ecuaciones no son múltiplos una de la otra). El rango de ambos sistemas es 2 pues las dos ecuaciones son linealmente independientes (no múltiplos). Como tienen igual rango, seguimos trabajando.

Triangulemos ubicando por comodidad las de *S'* arriba y luego las de *S*.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 9 & -24 \\ -11 & 9 & 8 & -4 \\ -3 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & 3 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 + (-11)F_1 \to F_2 \\ F_3 + (-3)F_1 \to F_3 \\ F_4 + 2F_1 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 9 & -24 \\ 0 & -13 & -91 & 260 \\ 0 & -4 & -28 & 80 \\ 0 & 3 & 21 & -60 \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{1}{13}F_2 \to F_2 \\ \frac{1}{4}F_3 \to F_3 \\ \frac{1}{3}F_4 \to F_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 9 & -24 \\ 0 & -1 & -7 & 20 \\ 0 & -1 & -7 & 20 \\ 0 & 1 & 7 & -20 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_3 - F_2 \to F_3 \\ F_4 + F_2 \to F_4 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 9 & -24 \\ 0 & -1 & -7 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Toda solución de S cumple con las ecuaciones de S' y como ambos tienen igual rango representan al mismo sistema de ecuaciones; tiene idéntico conjunto solución. Los dos sistemas de ecuaciones son equivalentes.

Ejemplo 2:

Decidir si los siguientes sistemas son equivalentes:

$$S: \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = -2 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases} \qquad S': \begin{cases} 3x - 2y - 3z = -2 \\ -2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - y - 2z = -2 \end{cases}$$

Primero analizamos el rango de ambos sistemas:

Trabajamos con $S: \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2x - y - 2z = -2 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 + 2F_1 \to F_2 \\ F_3 + F_1 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \end{array}\right) F_3 + F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

Vemos que, este sistema tiene rango 3.

Trabajamos con $S': \begin{cases} 3x - 2y - 3z = -2 \\ -2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - y - 2z = -2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right) F_2 \leftrightarrow F_1 \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right) \frac{1}{2} F_2 \to F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} F_2 + 3F_1 \to F_2 \\ F_3 + 2F_1 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) F_3 + (-1)F_2 \to F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vemos que, este sistema tiene rango 2.

Como ambos sistemas tienen rangos diferentes, concluimos que: **No son equivalentes**.

OBSERVACIÓN: Notemos la importancia que analizar los rangos como primer paso. Miremos, en este último ejemplo, lo que se consiguió después de triangular:

El sistema S quedó: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$, y el sistema S' nos quedó $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

¡Las dos primeras filas son iguales!

Si no hubiésemos analizado los rangos de ambos sistemas por separado, y hubiésemos puesto ambos sistemas juntos, formando un gran sistema, las ecuaciones del sistema S' se hubiesen anulado con las ecuaciones de S, lo que nos hubiera llevado a una conclusión errónea. El sistema S es SCD (Recordar las condiciones del teorema de Rouché-Frobenius) lo que quiere decir que la solución es única; sin embargo, el sistema S' es un SCI, es decir que tiene infinitas soluciones. Ambos sistemas, no son equivalentes: no tienen el mismo conjunto solución. Sin embargo, si nos hubiésemos salteado el paso de analizar los rangos de manera independiente, podríamos haber llegado a la conclusión equivocada. ¡¡No te olvides de ese paso!!

SISTEMAS DE ECUACIONES CON PARÁMETROS

Un sistema como el que sigue se denomina un sistema con parámetros (en este caso tiene un solo parámetro, $\boldsymbol{\alpha}$); aparte de las incógnitas x_1 y x_2 hay un número, un parámetro α que según el valor que tome *puede influir en el tipo de solución*.

$$S_1 : \begin{cases} \alpha . x_1 + 2x_2 = -6 \\ (\alpha^2 - 4)x_2 = (2 + \alpha) \end{cases}$$

Analicemos la matriz M: $\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 2 & -6 \\ 0 & \alpha^2 - 4 & 2 + \alpha \end{array}\right)$.

Siempre que queremos clasificar un sistema (con o sin parámetros), tenemos que remitirnos al teorema de Rouché Frobenius. Para aplicarlo, necesitamos el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada. Recordamos que para calcular el rango, necesitamos que la matriz esté triangulada.
La matriz M *parece* estar triangulada pero no lo es en todos los casos: si a_{11} (que vale α) fuera nulo no está escalonada.
De hecho, el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada dependen directamente del valor del parámetro α:

Si α y $\alpha^2 - 4$ ***son diferentes de cero*** podemos concluir que el rango de ambas matrices son iguales, y coincide con la cantidad de incógnitas: $rg(A) = rg(M) = n = 2$ y el sistema es SCD.

Si $\alpha = 0$ nos queda: $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & -6 \\ 0 & -4 & 2 \end{array}\right)$, nos falta seguir triangulando para calcular el rango de las matrices:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & -6 \\ 0 & -4 & 2 \end{array}\right) \; F_2 + 2F_1 \to F_2 \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -10 \end{array}\right)$$

Entonces: $rg(A) = 1$; $rg(M) = 2$ lo que, por el teorema de Rouché Frobenius, se trata de un sistema incompatible (SI).
Que $\alpha^2 - 4 = 0$ implica dos opciones: $\alpha = 2$ ó $\alpha = -2$
Si $\alpha = 2$, nos queda $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$ que ya está escalonada y verifica: $rg(A) = 1$; $rg(M) = 2$, lo que corresponde a un sistema incompatible (SI)
Si $\alpha = -2$, nos queda $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ que ya está escalonada y verifica $rg(A) = rg(M) = 1$, pero como $n = 2$ corresponde a sistema compatible indeterminado (SCI).

Resumiendo:

Valor de α	***Tipo de solución***
$\mathbb{R} - \{0, 2, -2\}$	SCD
0	SI
2	SI
-2	SCI

Nota: En otro archivo encontrarás más ejemplos de sistemas con parámetros (con uno y con más parámetros y más ecuaciones).

LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEOS Y NO HOMOGÉNEOS.

Un sistema de ecuaciones se llama homogéneo, si todos los términos independientes son iguales a 0 (cero).
Un sistema homogéneo **siempre es compatible** pues asignando valor cero simultáneamente a cada una de las variables todas las ecuaciones se satisfacen.
Puede ser determinado, si la única solución es todas las incógnitas iguales a cero o indeterminado.

Relación entre los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos y no homogéneos

Si $A.X = B$ representa un sistema $\boldsymbol{S}$ de m ecuaciones lineales con n incógnitas y B no es la matriz nula de $m \times 1$ ($N^{m\times 1}$) diremos que $\boldsymbol{S}$ es un sistema lineal *no homogéneo*; si B fuera $N^{m\times 1}$ (matriz nula) se dice que $\boldsymbol{S}$ es un sistema lineal *homogéneo*.

Por ejemplo:

$$\boldsymbol{S}: \begin{cases} 2x - 3y - 5z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \\ -x + 3y + 5z = 1 \end{cases} \text{ es un sistema no homogéneo y,}$$

$$\boldsymbol{S_H}: \begin{cases} 2x - 3y - 5z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \\ -x + 3y + 5z = 0 \end{cases} \text{ es homogéneo.}$$

Como dijimos antes, un sistema homogéneo **<u>siempre es compatible</u>** pues asignando valor cero simultáneamente a cada una de las variables todas las ecuaciones se satisfacen.

En el ejemplo observamos que ambos sistemas comparten la misma matriz A de coeficientes del sistema; diremos que $\boldsymbol{S_H}$ es el sistema homogéneo asociado a $\boldsymbol{S}$. Si $\boldsymbol{S}$ fuera homogéneo tendríamos que $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{S_H}$ coincidirían. Vamos a tratar de <u>*vincular*</u> las soluciones de $\boldsymbol{S}$ y $\boldsymbol{S_H}$.

Supongamos que tenemos X' y X'' dos soluciones de $\boldsymbol{S}$ es decir que:

$$A.X' = B$$

$$A.X'' = B$$

Si restamos miembro a miembro:

$$A.X' - A.X'' = B - B = N \ (matriz\ nula)$$

Recordamos que, mientras las matrices estén multiplicando en el mismo lado, se puede sacar factor común, entonces:

$$A.(X' - X'') = N$$

Es decir que $X' - X''$ (al que llamamos, a partir de ahora H_1) es una solución del sistema $\boldsymbol{S_H}$; esto es:

$$A.H_1 = N$$

Podemos tomar un número real α y efectuar αH_1 y si multiplicamos esto con la matriz A:

$$A.(\alpha.H_1) = (A.\alpha).H_1 = \alpha.(A.H_1) = \alpha.N = N.$$

Es decir que $\alpha.H_1$ es otra solución del sistema homogéneo asociado.

Este razonamiento que hicimos se hizo partiendo de dos soluciones (podemos imaginar, diferentes, aunque no es necesario) del sistema $\boldsymbol{S}$. Si llamamos X a una solución cualquiera (y que representa a todas las soluciones), podemos repetir el mismo razonamiento usando como soluciones a X y a X''; de esta forma, llegaríamos a que, de la misma forma que $X' - X'' = H_1$, podemos pensar que para cada solución X se verifica que

$$X - X'' = \alpha H_1$$

Que, despejando nos da:

$$X = \alpha H_1 + X''$$

Es decir que, el conjunto de soluciones de $\boldsymbol{S}$ se obtiene tomando una solución particular de $\boldsymbol{S}$ y sumando cada vez una solución del sistema $\boldsymbol{S_H}$ asociado. A cada una de las infinitas posibilidades de $\boldsymbol{S_H}$ –si fuera un SCI– le vamos sumando X'' y conseguimos una nueva solución X de $\boldsymbol{S}$.

Ejemplo

Sean $X' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $X'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ dos soluciones de un sistema $\boldsymbol{S}: AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Dar tres soluciones adicionales de $\boldsymbol{S}$.

b) ¿Cuál de las soluciones anteriores del sistema $\boldsymbol{S}: AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ cumple, además, que: $2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 32$?

c) Si $\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es solución del sistema $\boldsymbol{S'}: A.X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, indicar otras 3 soluciones del sistema $\boldsymbol{S''}$: $A.X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Arrancamos con el 1er ítem: Dar tres soluciones adicionales de $\boldsymbol{S}$.

Si X' y X'' son soluciones, entonces: $X' - X'' = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = H_1$, es solución del sistema $\boldsymbol{S_H}$ (El sistema homogéneo asociado a la misma matriz de coeficientes) y, como dedujimos antes: αH_1 que, en nuestro caso sería: $\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, también es solución del sistema homogéneo $\boldsymbol{S_H}$.

Entonces otras soluciones X de $\boldsymbol{S}$ son de la forma: $X = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Como el enunciado pide, dar TRES soluciones del sistema S, podemos darle 3 valores diferentes a α

Si $\alpha = 2 \rightarrow X_2 = 2\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$

Si $\alpha = -2 \rightarrow X_{-2} = -2\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \\ -8 \end{pmatrix}$

Si $\alpha = 3 \rightarrow X_3 = 3\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -13 \\ 4 \\ 17 \end{pmatrix}$

Ahora continuemos con el ejercicio. El siguiente ítem pregunta ¿Cuál de las soluciones anteriores $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ cumple que $2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 32$?

Del ítem anterior, habíamos obtenido que:

$$X = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

es decir que:

$$X = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -4\alpha - 1 \\ \alpha + 1 \\ 5\alpha + 2 \end{pmatrix}$$

Que, usando la notación del enunciado:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -4\alpha - 1 \\ \alpha + 1 \\ 5\alpha + 2 \end{pmatrix}$$

Queremos que:

$$2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 32$$

Entonces, se tiene:

$$2.(-\alpha) - (-4\alpha - 1) + \alpha + 1 - 3.(5\alpha + 2) = 32$$

$$-2\alpha + 4\alpha + 1 + \alpha + 1 - 15\alpha - 6 = 32$$
$$-12\alpha - 4 = 32$$
$$-12\alpha = 36$$
$$\boxed{\alpha = -3}$$

Reemplazando en $X = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -4\alpha - 1 \\ \alpha + 1 \\ 5\alpha + 2 \end{pmatrix}$, queda que el punto buscado es: $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -2 \\ -13 \end{pmatrix}$

Para el ítem siguiente, tenemos que $\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es solución del sistema $\boldsymbol{S'}: A.X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, indicar otras 3 soluciones del sistema ***S”***: $A.X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

El sistema ***S”*** tiene el mismo sistema homogéneo ***SH*** que los sistemas ***S*** y ***S’***; por lo tanto, la cantidad infinita de soluciones de ***S”*** las obtendremos sumando una solución particular del mismo a $\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Tratamos de "rearmar" la ecuación $A.X \ = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sabemos que:

$$A.\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Y también sabemos que:

$$A.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por 3 ambos miembros:

$$3A.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A.3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A.\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sumando los dos resultados:

$$A.\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$+ \quad A.\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A.\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + A.\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lo que, acomodamos, sacando la matriz de coeficientes de factor común:

$$A.\left[\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\0\\0\\3\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$A.\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

Es decir que $\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\5\end{pmatrix}$ es una solución particular del sistema $A.X = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$, entonces, para encontrar todas las soluciones, sumamos esta solución particular a los múltiplos de la solución del sistema homogéneo:

$$Y=\alpha\begin{pmatrix}-1\\-4\\1\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\1\\5\end{pmatrix}$$

Repitiendo lo que se hizo en el primer ítem, le damos valores a α y conseguimos las distintas soluciones pedidas. Cuando α igual, por ejemplo, a 1, 2 y 3 obtenemos $\begin{pmatrix}2\\-5\\2\\10\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-9\\3\\15\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\-13\\4\\20\end{pmatrix}$ respectivamente.

INVERSA DE UNA MATRIZ

Considerar las matrices $A=\begin{pmatrix}4&-9\\-1&2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-2&-9\\-1&-4\end{pmatrix}$ obtener $A.B$ y $B.A$.

$$A.B=\begin{pmatrix}4&-9\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-9\\-1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$B.A=\begin{pmatrix}-2&-9\\-1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-9\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

En la situación planteada el producto ha dado la matriz identidad (aquí de dimensión 2).

Definición: Si A es una matriz cuadrada de orden n y existe B cuadrada del mismo orden tal que $A.B = I_n \ \wedge \ \ B.A = I_n$ (I_n es la identidad de orden n) entonces B es la inversa de A y se anota $B = A^{-1}$.
Si A tiene inversa se dice que es **inversible, no singular o regular**.

Veamos que obtener la inversa de una matriz conlleva resolver un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$).

Sea $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$; la intención es obtener B de orden 2 tal que $C.B \ = \ I_2$ (luego se comprueba que $B.C \ = \ I_2$).
Se toma a $B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$ y se plantea $C.B \ = \ I_2$.
Esto nos lleva al siguiente par de sistemas de ecuaciones[1]:

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2x + 4y & -2z + 4w \\ 4x - 7y & 4z - 7w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos separar lo obtenido en 2 sistemas de ecuaciones, de acuerdo a las variables involucradas:

$$S_1 = \begin{cases} -2x + 4y = 1 \\ 4x - 7y = 0 \end{cases} \qquad\qquad S_2 = \begin{cases} -2z + 4w = 0 \\ 4z - 7w = 1 \end{cases}$$

Resuélvelos y comprueba que las soluciones son $(x; y) = \left(\frac{7}{2}; 2\right)$ y $(z; w) \ = \ (2; 1)$.
Esto significa que $B = C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y debe ocurrir que $C.C^{-1} = I_2 \wedge \ C^{-1}.C = I_2$ (¡Hacerlo!).

Al resolver los sistemas S_1 y S_2 se habrá notado que las operaciones por filas en ambos sistemas fueron idénticos y sólo cambiaron los resultados de los términos independientes. Esto permite ahorrar trabajo efectuando lo que se llama ***resolución simultánea de ecuaciones.***

Ejemplifiquemos con el caso presentado:

[1] Una ecuación del tipo C.X= D donde C, X y D son matrices de órdenes tales que las operaciones se pueden efectuar y X es la matriz incógnita se denomina ***ecuación matricial***.

$$S_1 = \begin{cases} -2x + 4y = 1 \\ 4x - 7y = 0 \end{cases} \qquad S_2 = \begin{cases} -2z + 4w = 0 \\ 4z - 7w = 1 \end{cases}$$

Se escribe la matriz de coeficientes –coinciden para ambos sistemas- y se forma la matriz ampliada con las dos columnas de términos independientes; la línea vertical es para separar visualmente los términos independientes:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) F_2 + 2F_1 \to F_2 \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Que, una vez escalonado, puede separarse en dos sistemas:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \begin{cases} -2x + 4y = 1 \\ \quad y = 2 \end{cases} \to \begin{cases} x = \dfrac{7}{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{cases} -2z + 4w = 0 \\ \quad w = 1 \end{cases} \to \begin{cases} z = 2 \\ w = 1 \end{cases}$$

Este “super” sistema de ecuaciones conviene resolverlo por el método de Gauss Jordan, se trata de resolver en forma simultánea varios sistemas de ecuaciones lineales con diferentes términos independientes**.**

Ejemplo:

Calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Resolvemos por Gauss-Jordan buscando obtener la identidad del lado izquierdo de la matriz ampliada M.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ reordenamos } F_2, F_3 \text{ y } F_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -5 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_2 + F_1 \to F_2 \\ F_3 + (-2)F_1 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) F_3 \leftrightarrow F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1 - F_2 \to F_1 \\ F_3 + 2F_2 \to F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} F_1 + F_3 \to F_1 \\ F_2 + F_3 \to F_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) (-1)F_2 \to F_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

La inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ [¡Verificarla!]

Nota: Si al resolver llegamos a un sistema incompatible significa que no existe la inversa de la matriz dada y la dada no es inversible, es una matriz singular

Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ no es inversible pues al plantear $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ en la última ecuación, el rango de la matriz de coeficientes es 2, pero el de la matriz ampliada, para la 3er columna es 3, lo que nos da un sistema incompatible.

Una matriz cuadrada de $n \times n$ es inversible si y sólo sí su rango es n

PROPIEDADES DE LA MATRIZ INVERSA

Analizaremos ahora las propiedades que tienen las matrices inversas, en los casos que sea posible, está la demostración de la propiedad.
Para todas las propiedades supondremos A, B, C y D matrices cuadradas de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

•**La inversa es única**

Demostración: Sean B y C inversas de A, o sea que $A.B = B.A = I_n$ y $A.C = C.A = I_n$
Partimos de $A.B = I_n$ y multipliquemos por izquierda la igualdad:
$C.(A.B) = C.I_n = C$ (I_n es elemento neutro para el producto de matrices)
$(C.A).B = C$ (propiedad asociativa del producto)
$I_n.B = C$ (C es la inversa de A)
$B = C$ (I_n neutro)

• **Si una matriz es inversible la inversa de su inversa es ella misma.**

Demostración: $A.B = I_n$ y $B.A = I_n$ entonces B es la inversa para A y A es la inversa para B. Si notamos a B como A^{-1} resulta que $A = B^{-1} = (A^{-1})^{-1}$

• **La inversa de una matriz multiplicada por un escalar cumple:** $(c.A)^{-1} = \frac{1}{c}.A^{-1}$

Demostración: Sea $B = A^{-1}$ y pensemos a A como filas y B como columnas $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$ y $B = (B^1 \quad B^2 \quad \dots \quad B^n)$.

Como $A.B = I_n$ se tiene que:

Al efectuar $c.A$ tenemos: $c.A = \begin{pmatrix} cA_1 \\ cA_2 \\ \vdots \\ cA_n \end{pmatrix} (A_i).(B^j) = \begin{cases} 0 & si \ i \neq j \\ 1 & si \ i = j \end{cases}$ $con\ i = 1,2,\dots,n$

veamos que $c^{-1}B = (c^{-1}B^1 \quad c^{-1}B^2 \quad \dots \quad c^{-1}B^n)$ es la inversa de $c.A$.

Si efectuamos $((cA)_i).\left((c^{-1}B)^j\right) = \left(c(A_i)\right).\left(c^{-1}(B^j)\right) = c.c^{-1}(A_i).(B^j)$, pues en un producto escalar un factor constante puede salir del mismo. Pero:

$$(A_i).(B^j) = \begin{cases} 0 & si \ i \neq j \\ 1 & si \ i = j \end{cases}$$

Y como $c.c^{-1} = 1$ queda:

$$((cA)_i).\left((c^{-1}B)^j\right) = \begin{cases} 0 & si \ i \neq j \\ 1 & si \ i = j \end{cases}$$

Por lo tanto vale que $(c.A)^{-1} = \frac{1}{c}.A^{-1}$

- **Si A y D son inversibles vale que $A.D$ también lo es y además $(A.D)^{-1} = D^{-1}.A^{-1}$**

Demostración: Por un lado, $(A.D).(A.D)^{-1} = I_n$, por definición de inversa.

Si partimos de la hipótesis, que $(A.D)^{-1} = D^{-1}.A^{-1}$, entonces su producto da la identidad:

$$(A.D).D^{-1}.A^{-1} = I_n$$
$$A.D.D^{-1}.A^{-1} = I_n$$

Por propiedad asociativa del producto de matrices:

$$A.(D.D^{-1}).A^{-1} = I_n$$

Por definición de inversa de D

$$A.I_n.A^{-1} = I_n$$

Que, por ser I_n el neutro para el producto de matrices:

$$A.A^{-1} = I_n$$
$$I_n = I_n$$

Es decir que, efectivamente, $(A.D)^{-1} = D^{-1}.A^{-1}$ y, como la inversa es única, vale la propiedad.

Resolver los ejercicios 14 al 26 del archivo llamado "MÓDULO 1, GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS Y APLICACIONES"

Videos que pueden ayudarte con estos temas:

Sistemas de ecuaciones equivalentes.

https://www.youtube.com/watch?v=A-CjGwpfR_c Sistemas de ecuaciones lineales 1

3.5 Sistemas con parámetros II (Con un solo parámetro)

https://www.youtube.com/watch?v=JQNiP8hVTSs

3.4 Sistemas con parámetros I (Con dos parámetros)

https://www.youtube.com/watch?v=PUJJ8BmDs5U

3.6 Algunos atajos en Sistemas de Ecuaciones

https://www.youtube.com/watch?v=qsuf2B49YuM&t=172s