RESUMEN SOBRE ESTUDIO COMPLETO DE FUNCIONES

Para realizar el estudio completo de una función, estudiamos las siguientes características:

DOMINIO e IMAGEN

El Dominio lo hallamos de acuerdo a la operación planteada en la variable independiente. La Imagen la calculamos de acuerdo al gráfico o a los datos obtenidos en el estudio completo.

INTERSECCIONES CON LOS EJES

La intersección con el eje y la hallamos calculando la imagen de la función en x = 0, es decir f(0); en tanto que la o las intersecciones con el eje x (o ceros o raíces de la función), las calculamos resolviendo la ecuación $f(x) = 0$

PARIDAD

Repasamos las definiciones:

$$f \quad es \quad par \quad \Leftrightarrow \quad f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$$f \quad es \quad impar \quad \Leftrightarrow \quad f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$$

Esta característica nos va a servir para "controlar" los resultados que vamos obteniendo luego. Por ejemplo: si obtuvimos un mínimo en un punto (a, f(a)) y la función es par, también tenemos que tener un mínimo en (-a, f(-a)); etc.

ASINTOTAS

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \Rightarrow \quad x = a \quad es \quad asíntota \quad vertical$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \in R \quad \Rightarrow \quad y = b \quad es \quad asíntota \quad horizontal$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m \in R \quad \wedge \quad \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = b \in R \Rightarrow \quad y = mx + b \quad es \quad asíntota \quad oblicua$$

MAXIMOS Y MÍNIMOS. INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DE DECRECIMIENTO

Calculamos los extremos relativos de la función realizando los siguientes pasos:

Primer paso: hallar puntos críticos, es decir, donde la derivada primera se anula o no existe. Estos son POSIBLES máximos o mínimos.

Segundo paso: para saber si los puntos hallados anteriormente son o no extremos de la función y de qué tipo, tenemos los siguientes métodos:

Método de tramos crecientes y decrecientes: consiste en estudiar el signo de la derivada primera a uno y otro lado del punto crítico. Si hay cambio de signo, el punto es extremo de la función:

- Si la derivada pasa de positiva a negativa existirá un máximo relativo.
- Si la derivada pasa de negativa a positiva existirá un mínimo relativo.

Si no hay cambio de signo el punto no es máximo ni mínimo.

Método del signo de la derivada segunda: sólo se puede aplicar en el caso que el punto crítico tenga derivada segunda. Si la derivada segunda de f, evaluada en el punto crítico es mayor a cero, existirá un mínimo relativo. Si por el contrario es menor que cero, existirá un máximo relativo.

Cuando se aplica el método de tramos crecientes y decrecientes, podemos calcular los intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función.

PUNTOS DE INFLEXIÓN. INTERVALOS DE CONCAVIDAD

Calculamos los puntos de inflexión de la función realizando los siguientes pasos:

Primer paso: hallar los POSIBLES puntos de inflexión, es decir, donde la derivada segunda se anula o no existe.

Segundo paso: para saber si los puntos hallados anteriormente son o no puntos de inflexión de la función, tenemos los siguientes métodos:

Método de cambio de signo de la derivada segunda: consiste en estudiar el signo de la derivada segunda a uno y otro lado del punto. Si hay cambio de signo, el punto es punto de inflexión, ya que estaría cambiando la concavidad; de lo contrario (no hay cambio de signo), el punto no es punto de inflexión.

Método del signo de la derivada tercera: sólo se puede aplicar en el caso que el posible punto de inflexión tenga derivada tercera. Si la derivada tercera de f, evaluada en el punto es distinta de cero, existe punto de inflexión.

Cuando se aplica el método del signo de la derivada segunda, podemos calcular los intervalos de concavidad hacia arriba o hacia abajo de la función.

GRAFICO

Realizar un gráfico donde volcamos toda la información obtenida en los ítems anteriores. A partir del mismo podemos calcular la imagen de la función.