Resolución TP6:

Ejercicio 17 - i

Hallar los puntos extremos para $f(x,y) = x + 3y$ dado la siguiente restricción $2x^2 + y^2 - 38 = 0$, y clasificar como máximo o mínimo.

Herramientas:

- Podemos llamar a $2x^2 + y^2 - 38 = 0$ como $g(x,y) = 0$
- $g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 38$.
- Los gradientes de $\nabla f(x,y)\ y\ \nabla g(x,y)$deben ser paralelos.
  - $\nabla f(x,y) = \ell \nabla g(x,y)$
    - $f_x = \ell g_x$
    - $f_y = \ell g_y$
- Con $g(x,y) = 0$, $f_x = \ell g_x$ y $f_y = \ell g_y$ se debe formar un sistema de ecuaciones compatible y determinado

Para empezar:

- El dominio de ambas funciones es todo $\mathbb{R}^2$ por lo que no tenemos restricción alguna para los puntos que hallaremos
- Los puntos críticos que buscamos son de la forma $Pc_n = (x_n, y_n)$

Primeras Derivadas:

$f(x,y) = x + 3y$

$g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 38$

$$\nabla f(x,y) = (1,3)$$

$$\nabla g(x,y) = (4x, 2y)$$

$$\nabla f(x,y) = \ell \nabla g(x,y)$$

$$(1,3) = \ell(4\mathrm{x}, 2\mathrm{y})$$

$$f_x = 1$$
$$f_y = 3$$
$$g_x = 4x$$
$$g_y = 2y$$

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 38 = 0 \\ 1 = \ell 4x \\ 3 = \ell 2y \end{cases}$$

Despejamos

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 38 = 0 \\ \frac{1}{4}\frac{1}{\ell} = x \\ \frac{3}{2}\frac{1}{\ell} = y \end{cases} \qquad Entonces\ \ell \neq 0$$

Podemos simplificar $\frac{1}{\ell} = \beta$ para simplificar cálculos

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 38 = 0 \\ \frac{1}{4}\beta = x \\ \frac{3}{2}\beta = y \end{cases}$$

Sustitución en $g(x, y) = 0$

$$2\left(\frac{\beta}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\beta\right)^2 - 38 = 0$$

$$\frac{\beta^2}{8} + \frac{9}{4}\beta^2 = 38$$

$$\frac{1 + 18}{8}\beta^2 = 38$$

$$\beta^2 = 16$$

$$\beta = 4 \vee \beta = -4$$

Entonces

$$\begin{cases} \beta = 4 \\ \frac{1}{4}\beta = x \\ \frac{3}{2}\beta = y \end{cases} \Longrightarrow Pc_1 = (1,6)$$

$$\begin{cases} \beta = -4 \\ \frac{1}{4}\beta = x \\ \frac{3}{2}\beta = y \end{cases} \Longrightarrow Pc_2 = (-1, -6)$$

$$2x^2 + y^2 - 38 = 0$$

$$y = 6x$$

$$2x^2 + (6x)^2 - 38 = 0$$

$$2x^2 + 36x^2 - 38 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$x = 1 \; V \; x = -1$$

$$\begin{cases} 1 = x \\ 6x = y \end{cases} \Longrightarrow Pc_1 = (1,6)$$

$$\begin{cases} -1 = x \\ 6x = y \end{cases} \Longrightarrow Pc_2 = (-1, -6)$$

Verificación de PC

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 38 = 0 \\ 1 = \ell 4x \\ 3 = \ell 2y \end{cases}$$

$$P_{c1} = (1,6), \beta = 4 \begin{cases} 2(1)^2 + (6)^2 - 38 = 0 \\ 1 = \left(\frac{1}{4}\right) 4(1) \\ 3 = \left(\frac{1}{4}\right) 2(6) \end{cases} \quad \begin{cases} 38 - 38 = 0 \\ 1 = 1 \\ 3 = 3 \end{cases}$$

En base a la tautología, PC1 es valido

$$P_{c3} = (-1,6), \begin{cases} 2(-1)^2 + (6)^2 - 38 = 0 \\ 1 = \ell 4(-1) \\ 3 = \ell 2(6) \end{cases} \quad \begin{cases} 38 - 38 = 0 \\ 1 = -4\ell \\ 3 = 12\ell \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{4} = \ell \\ \dfrac{1}{4} = \ell \end{cases} \quad \ell \neq \ell$$

En base a la falacia(absurdo), PC3 es invalido

Clasificación:

Ya sabemos que ambos puntos cumplen la condición, debemos compáralos entre sí para saber si son máximo o mínimo.

Se evalúan en $f(x, y) = x + 3y$

- $f(Pc_1) = 1 + 3 * 6 = 19$
- $f(Pc_2) = -1 + 3 * (-6) = -19$

Pc1 es un punto máximo condicionado de $g(x, y) = 0$ y Pc2 es un punto mínimo condicionado de $g(x, y) = 0$

$$P_3 = (-1{,}6) \rightarrow f(P_3) = -1 + 3 \cdot 6 = 17$$

$$P_4 = (1, -6) \rightarrow f(P_3) = 1 + 3 \cdot (-6) = -17$$