RESOLUCIÓN DE EJERCICIO nro. 9 de MÓDULO 5
De EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA - TERCERA CLASE

9) Sea $f: R^3 \to R^3$ t.l que verifica que $f(1;0;0) = (1;0;1), f(0;1;0) = (-1;2;0)\ y$ $f(0;0;1) = (-1;1;0)$.

a) Justificar porque existe f^{-1} y encontrar la expresión de f^{-1}.

b) Sea $g: R^4 \to R^3$ t.l cuya matriz es $M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$: Hallar la matriz de $f°g$.

c) Usando la matriz obtenida en b), determinar si $(5;0;-4;1) \in Nu(f°g)$.

d) Explique por que $f°g$ no puede ser monomorfismo.

Desarrollo:

a) Al tener como datos las imágenes de la base canónica de R^3, podemos armar la matriz de la transformación colocándolas como columnas.

$$M(f)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para que exista f^{-1}, f tiene que ser isomorfismo.

Varias formas de comprobarlo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x-y-z \\ 2y+z \\ x \end{bmatrix}$$

Núcleo

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2\,y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

x = 0 $\quad\to\quad$ - y - z = 0

2 y + z = 0 sumo las ecuaciones y = 0 z = 0

Nu(f) = {(0;0:0} dim (Nu)= 0 es monomorfismo

Entonces por el teorema de la dimensión dim(Im) = 3 es epimorfismo.

La función es un isomorfismo entonces existe f^{-1}.

Para encontrar f^{-1}

Calculamos la matriz inversa de M(f), lo haremos usando la matriz adjunta

$M(f) = A$

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}.Adj(A)$ la adjunta es la traspuesta de la matriz de los cofactores

Comenzamos calculando el determinante de M(f)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{3+1}.\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1-(-2) = 1$$

$$AdJ(A) = \begin{bmatrix} 0 & -(-1) & -2 \\ -0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[M(f)\right]^{-1} = M(f^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[M(f)\right]^{-1}\vec{X} = M(f^{-1})\vec{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ x+y-z \\ -2x-y+2z \end{bmatrix}$$

f (x;y;z) = (x –y - z ; 2 y + z ; x)
f^{-1}(x , y ; z) = (z; x + y - z ; -2 x – y + 2 z)

Por ejemplo : pruebo con un vector para ver si devuelve el original:

f(2; 4 ; 1) = (-3 ; 9 ; 2) f^{-1} (-3 ; 9 ; 2) = (2 ; 4 ; 1)

b) F o g   primero se aplica: $g: R^4 \to R^3$ y luego $f: R^3 \to R^3$

f o g : $R^4 \to R^3$

M(f o g) = M(f). M(g) =

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$3x3$ 3x4 3x4 $R^4 \to R^3$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-y+3z-2w \\ -x+2y-z+3w \\ x+2z+w \end{bmatrix}$$

(fog) (x , y ; z ; w) = (2 x –y+3z -2 w ; - x+ 2y – z + 3 w ; x + 2 z + w)

c) Determinar si $(5;0;-4;1) \in Nu(f°g)$.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$f(5;0;-4;1)$ no es el vector nulo , entonces no pertenece al núcleo de f o g

d) Justificar que $f°g$ no puede ser monomorfismo.

Monomorfismo: dim (Nu) = 0

dim (Nu) + dim (Im) = dim (V) = 4 f o g : $R^4 \to R^3$
dim (Im) $\leq$ 3 dim (Nu(f))

dim (Im) $\leq$ 3 por estar incluida en R^3 , sumo en la desigualdad la dimensión del núcleo

dim (Nu) + dim (Im) $\leq$ dim (Nu) + 3
4 $\leq$ dim (Nu) + 3
4 – 3 $\leq$ dim (Nu)
1 $\leq$ dim (Nu) dim (Nu) $\geq$ 1
Núcleo tiene por dimensión como mínimo 1, entonces no puede ser un monomorfismo