Clase 5

Diferenciabilidad y sus consecuencias

Práctica sobre

- **Derivabilidad no implica continuidad.**
- **Diferenciabilidad.**
- **Prueba de diferenciabilidad según el Teorema de Condición Suficiente.**
- **Consecuencias de la diferenciabilidad.**
- **Vector Gradiente.**
- **Segunda Fórmula para el cálculo de la Derivada Direccional.**
- **Propiedades del vector gradiente.**

La existencia de las derivadas parciales en un punto no garantiza la continuidad de la función en ese punto

Calcular las derivadas parciales de la función $f(x,y)$ en el origen, siendo

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Cálculo de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h^2 0}{h^4+0^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{0^2k}{0^4+k^2}-0}{k}=\lim_{k\to 0}0=0$$

Resulta entonces que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0 \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

Esto quiere decir que f es derivable en el origen, significando esto que, ambas derivadas parciales existen en ese punto.

Debe recordarse del Ejemplo 5 de la Clase 3 que la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

No es continua en el origen, sin embargo, sí posee derivadas parciales en ese lugar, que son las que se han calculado.

Este análisis muestra que, para funciones de más de una variable la derivabilidad no implica la continuidad, como sí ocurre en el caso de funciones de una variable real.

La existencia de todas las derivadas direccionales en un punto no garantiza la continuidad de la función en ese punto

Calcular $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$, para la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

según la dirección y sentido del vector unitario $\vec{v}=(a,b)$.

Por definición es

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+at,0+bt)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(at,bt)-f(0,0)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{a^2t^2\cdot bt}{a^4t^4+(bt)^2}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{a^2b}{a^4t^2+b^2}=\frac{a^2}{b},\ \ b\neq 0.$$

Por otra parte, cuando $b=0$, por la condición de normalidad de $\vec{v}$, debe ser $|a|=1$, es decir que puede ser $a=1$, o bien $a=-1$. Sin embargo, en cualquiera de ambos casos se obtiene como resultado que la derivada direccional es igual a cero. Así que, finalmente, se tiene que:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)=\begin{cases} \dfrac{a^2}{b}\ si\ b\neq 0 \\ 0 \qquad si\ \ b=0 \end{cases}$$

Esto muestra, entonces que f posee en el origen, derivada direccional, según la dirección y sentido de cualquier versor $\vec{v}=(a,b)$, y los valores asociados se obtienen según la fórmula anterior.

Nótese que, a pesar de que "la función f posee todas las derivadas direccionales en el origen", esta no es continua allí (Véase el Ejemplo 5 de la Nota de clase de Límite y continuidad de la Clase 3), lo cual muestra que, como ya se ha dicho, para funciones de más de una variable, derivabilidad no implica continuidad. La propiedad que garantiza la continuidad de una función se conoce como diferenciabilidad, y es el tema que se tratará a continuación.

Diferenciabilidad

(Para funciones de dos variables)

Definición. Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida en el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$ y el punto $(x_0, y_0) \in A$. Se dice que f es *diferenciable* en (x_0, y_0), si existen las dos constantes reales A_1 y A_2, y la función escalar *resto* $R(x - x_0, y - y_0)$, definida en algún entorno D de (x_0, y_0), de modo tal que se verifica la relación

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + A_1(x - x_0) + A_2(y - y_0) + R(x - x_0, y - y_0)$$

y tal que, en D, la función resto $R(x - x_0, y - y_0)$ satisface la *propiedad*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R(x - x_0, y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

Nótese que el límite doble en la definición de diferenciabilidad puede escribirse también en la forma:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - A_1(x - x_0) - A_2(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$

Consecuencias de la diferenciabilidad

Cuando la función f es *diferenciable* en (x_0, y_0), se cumple que:

- f es continua en (x_0, y_0).

Es decir que la continuidad en el punto (x_0, y_0) es una condición necesaria para que ocurra la diferenciabilidad en ese par. Una función que no sea continua no puede ser diferenciable, pues de ser diferenciable, debería ser continua. Esto último ofrece un criterio de no diferenciabilidad, ya que, si se sabe que una función no es continua, se concluye luego que no es diferenciable.

- Las constantes A_1 y A_2 son específicamente:

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad A_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Es decir que la existencia de las derivadas parciales en el punto de estudio es una condición necesaria para que ocurra la diferenciabilidad en ese lugar. A partir de esta observación se obtiene un criterio de no diferenciabilidad relacionado con las derivadas parciales. Si una función no es derivable parcialmente, entonces no es diferenciable.

- f posee derivadas direccionales en (x_0, y_0), para cualquier $\vec{v} = (a, b)$ tal que $\|\vec{v}\| = 1$, las cuales se pueden calcular según la fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot b$$

O bien

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \cdot (a, b)$$

siendo el primer factor del producto (el vector formado por las derivadas parciales) el llamado *vector gradiente*, que se denota y se define, como se verá más adelante, del siguiente modo

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

- El gráfico de f posee plano tangente en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, cuya ecuación es

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

O bien, se puede escribir en la forma

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot y - z = B$$

donde

$$B = -f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot x_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot y_0$$

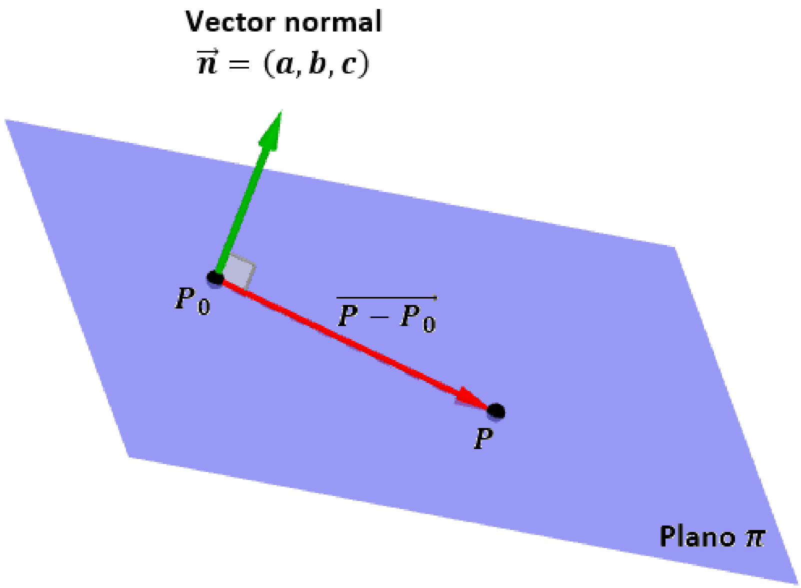
Y en virtud de esta expresión para la ecuación del plano, es posible observar que

$$\vec{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$$

Es el vector normal al plano tangente, o dicho también de manera equivalente, $\vec{N}$ es normal al gráfico de la función f en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Ecuación cartesiana del plano π que pasa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y es normal al vector $\vec{n} = (a, b, c)$

(Recordatorio para entender la observación sobre el vector normal $\vec{N}$ del apartado anterior)



Plano que pasa por $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y en normal a $\vec{n} = (a, b, c)$

La ecuación cartesiana del plano π es

$$\pi: \vec{n} \bullet \left(\overrightarrow{P - P_0}\right) = 0$$

$$\pi: (a, b, c) \bullet (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$\pi: a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0$$

$$\pi: a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0$$

De este modo es posible obtener una expresión para la recta normal al gráfico de f en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, denotada por el símbolo $R^{\perp}$, y dada por

$$R^{\perp}: \alpha(t) = P + t \cdot \vec{N} = \left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right) + t \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right), \qquad t \in \mathbb{R}$$

O bien

$$R^{\perp}:\begin{cases} x(t) = x_0 + t\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ y(t) = y_0 + t\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ z(t) = f(x_0,y_0) - t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}$$

La posibilidad de concluir si una función es o no diferenciable, implica calcular un límite doble (el que define la propiedad del resto en la definición de diferenciabilidad), tarea que en general presenta una gran dificultad. Una manera ágil y "económica" de verificar si una función es diferenciable es la que proporciona el siguiente teorema.

Teorema (de condición suficiente de diferenciabilidad). Sea $f: A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definida en el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$ y el punto $(x_0,y_0)\in A$. Si existe un entorno $U\subseteq A$ de (x_0,y_0), donde están definidas las *funciones derivadas parciales*

$$\frac{\partial f}{\partial x}: U\to\mathbb{R} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}: U\to\mathbb{R}$$

y ambas son continuas en (x_0,y_0), entonces f es *diferenciable* en (x_0,y_0).

Debe observarse que este teorema da una condición para asegurar la diferenciabilidad de la función en un punto. En otras palabras, si una función satisface las condiciones pedidas en este resultado, entonces la misma verificará todos los requisitos para ser diferenciable en ese punto, es decir, lo pedido en la definición de diferenciabilidad. <u>El recíproco de este resultado es falso</u>, pues resulta que, una función puede ser diferenciable en un punto y sus derivadas no ser continuas en ese lugar.

Definición (Función de Clase C^1). Sea $f: A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definida en el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$. Si las funciones derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}: A\to\mathbb{R} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}: A\to\mathbb{R}$$

existen y son continuas en A, se dice que la función f es de clase C^1 en A.

Como consecuencia del Teorema de condición suficiente de diferenciabilidad y de la definición anterior, se desprende directamente el siguiente corolario.

Corolario. Si la función $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida en el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$, es de clase $\mathcal{C}^1$ en A, entonces es diferenciable en A.

Ejemplo 1. La función

$$f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$$

definida en

$$A = \mathbb{R}^2$$

es diferenciable en todo par (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$. Esto es así, puesto que, en este caso, las funciones derivadas parciales están dadas por las fórmulas:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}$$

y resulta, claramente, que ambas están definidas y son continuas en cada punto de $A = \mathbb{R}^2$. Nótese que en ambos casos se trata de un cociente de polinomios, que son funciones continuas, con denominador siempre distinto de cero. Y en estas condiciones, el Teorema de condición suficiente de diferenciabilidad garantiza la diferenciabilidad de la función dada. Por lo tanto, esta función posee en cada punto de su dominio, todas las propiedades que asegura la diferenciabilidad.

Ejemplo 2. Para determinar la ecuación del plano tangente al gráfico de la función

$$f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$$

en el punto $P = \big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big) = (1{,}0, \ln(2))$, se utiliza la fórmula

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

La cual es válida ya que la función en cuestión es diferenciable.

En este caso, resulta

$$f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2) \quad \to \quad f(1{,}0) = \ln(2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2} \quad \to \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1{,}0) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2} \quad \to \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1{,}0) = 0$$

Luego, la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $P = (1{,}0, \ln(2))$, es

$$\pi : z = f(1,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \cdot (x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) \cdot (y-0)$$

$$\pi : z = \ln(2) + 1 \cdot (x-1) + 0 \cdot y$$

$$\pi : z = \ln(2) - 1 + x$$

Que también se puede escribir

$$\pi : x - z = 1 - \ln(2)$$

Ejemplo 3. Para determinar la ecuación paramétrica de la recta normal al gráfico de la función

$$f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$$

en el punto $P = \left(x_0, y_0, f(x_0,y_0)\right) = (1,0,\ln(2))$. Se utiliza la fórmula

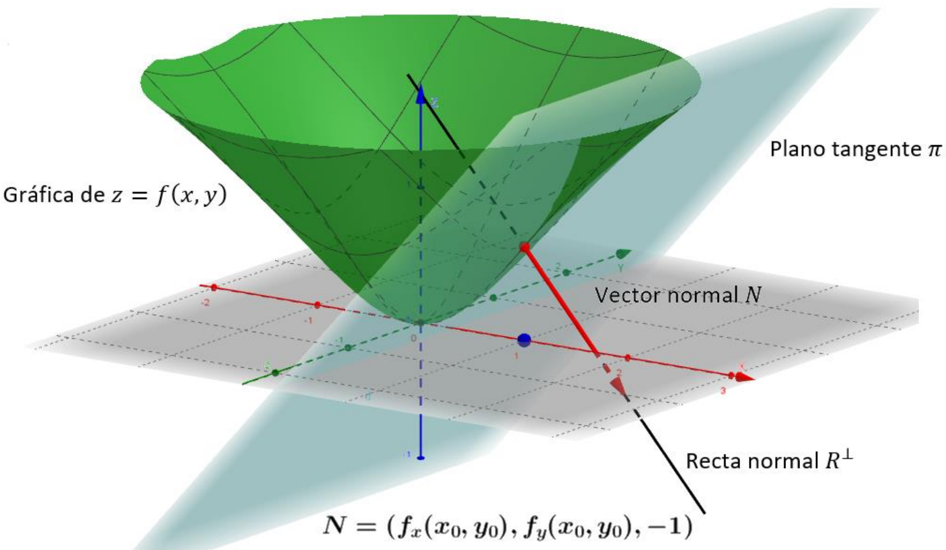
$$R^{\perp} : \alpha(t) = P + t \cdot \vec{N} = \left(x_0, y_0, f(x_0,y_0)\right) + t \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right), \qquad t \in \mathbb{R}$$

Reemplazando los valores correspondientes resulta

$$R^{\perp} : \alpha(t) = P + t \cdot \vec{N} = (1,0,\ln(2)) + t \cdot (1,0,-1) = (1+t, 0, \ln(2) - t), \qquad t \in \mathbb{R}$$

O bien

$$R^{\perp} : \alpha(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right) = (1+t, 0, \ln(2) - t), \qquad t \in \mathbb{R}$$



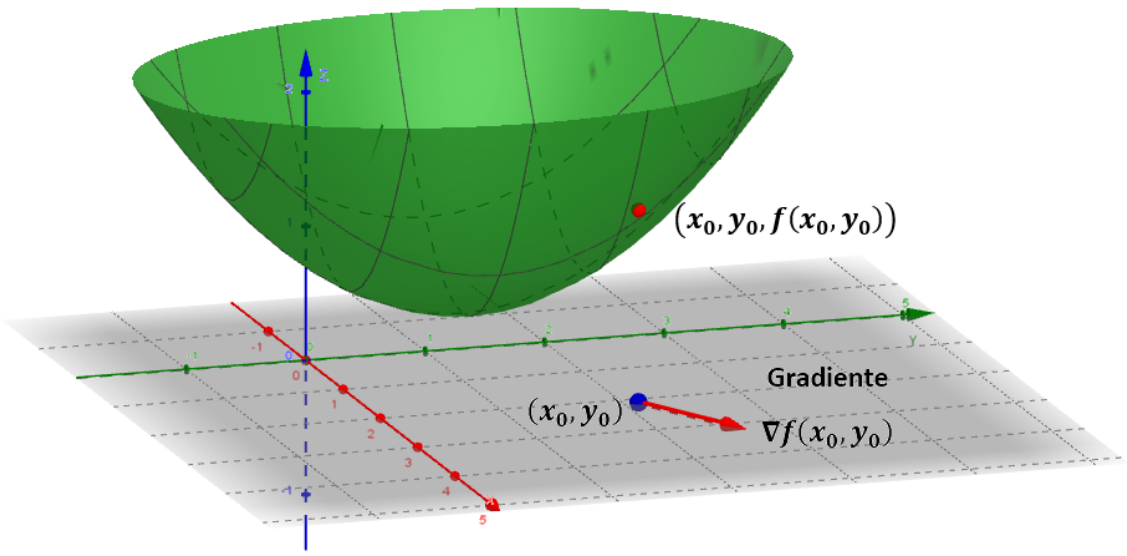
<u>**Representación geométrica del plano tangente y de la recta normal**</u>

Vector gradiente

Definición. Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida en el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$, diferenciable en $(x_0, y_0) \in A$. Se define el vector gradiente de f en (x_0, y_0), como el vector de $\mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

En la siguiente figura, se muestra la representación geométrica del vector gradiente.



Gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$

Ejemplo 4. Para la función del Ejemplo 1

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$$

su vector gradiente es

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \left(\frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}\right)$$

Y este, evaluado en el punto $(x_0, y_0) = (1,0)$ es

$$\nabla f(1,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\right) = (1,0)$$

Propiedades del vector gradiente

Fórmula del gradiente para la derivada direccional

Recuérdese de las consecuencias de la diferenciabilidad en un punto, que está garantizada la existencia de todas las derivadas direccionales, y que las mismas pueden calcularse según la fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot b$$

donde el vector $\vec{v} = (a, b)$ es tal que $\|\vec{v}\| = 1$. Esta fórmula se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \bullet (a, b)$$

O bien

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \bullet \vec{v}$$

Que se conoce como fórmula del gradiente para la derivada direccional o Segunda fórmula para el cálculo de la derivada direccional.

Ejemplo 5. Para determinar la derivada direccional de la función

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$$

en el punto $(x_0, y_0) = (1,0)$., respecto de la dirección y sentido del vector unitario $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, se utiliza la Segunda fórmula para el cálculo de la derivada direccional

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \bullet \vec{v}$$

Que para $f(x, y)$ es siempre válida ya que esta función es diferenciable, así como quedó establecido en el Ejemplo 1.

Resulta entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,0) = \nabla f(1,0) \bullet \vec{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\right) \bullet \vec{v} = (1,0) \bullet \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 0 \cdot \frac{4}{5}$$

En definitiva, la derivada direccional de $f(x, y)$, respecto de la dirección y sentido de $\vec{v}$, en $(1,0)$ es

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,0) = \frac{3}{5}$$

<u>Dirección y sentido de derivada direccional máxima</u>

A partir de la fórmula del gradiente para la derivada direccional es posible demostrar que *el gradiente aporta la dirección y sentido de derivada direccional máxima*, esto quiere decir que el valor máximo de derivada direccional se obtiene cuando el vector de dirección y sentido utilizado para calcular la derivada direccional es:

$$\vec{v}_1 = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|}$$

Obviamente cuando $\|\nabla f(x_0, y_0)\| \neq 0$. Resulta además que el valor máximo de la derivada direccional es

$$\text{máx}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\|$$

<u>Dirección y sentido de derivada direccional mínima</u>

Siguiendo el mismo argumento utilizado para llegar al resultado anterior, se demuestra que el valor mínimo de derivada direccional se obtiene cuando el vector de dirección y sentido utilizado para calcular la derivada direccional es:

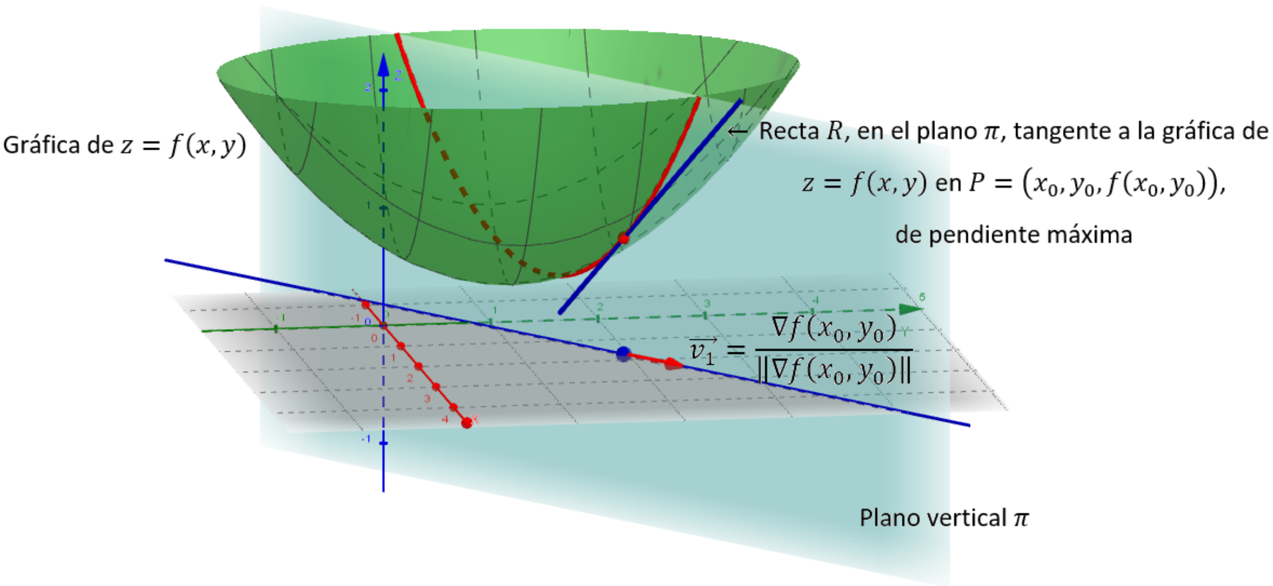
$$\vec{v}_2 = -\frac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|}$$

siendo $\|\nabla f(x_0, y_0)\| \neq 0$. Y en este caso, el valor mínimo de la derivada direccional es

$$\text{mín}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = -\|\nabla f(x_0, y_0)\|$$

Ambos resultados permiten concluir que, para una función diferenciable la variación de la derivada direccional es acotada, y tal acotación es la que se muestra en la siguiente desigualdad:

$$-\|\nabla f(x_0, y_0)\| \leq \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) \leq \|\nabla f(x_0, y_0)\|$$



Interpretación geométrica de la derivada direccional máxima

Análisis de la última propiedad mencionada.

Se sabe que para la función f diferenciable en (x_0, y_0), la derivada direccional en ese punto está dada por la fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \bullet \vec{v}$$

Donde el vector

$$\vec{v} = (a, b)$$

es tal que

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

Ahora bien, para los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se sabe que el producto escalar entre los dos está dado por la fórmula

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = (a_1, a_2) \bullet (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2 = \|A\| \|B\| \cdot \cos(\theta)$$

siendo $\theta \in [0, \pi]$ el ángulo formado entre ambos. Tomando esta fórmula para el caso de la derivada direccional resulta

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \bullet \vec{v} = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \overbrace{\|\vec{v}\|}^{1} \cdot \cos(\theta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cdot \cos(\theta)$$

Ahora, dado que en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$, se tiene

$$-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$$

Más específicamente

$$\cos(\pi) = -1 \qquad \cos(0) = 1$$

y

$$-1 < \cos(\theta) < 1$$

cuando $0 < \theta < \pi$. Resulta así que, cuando $\theta = 0$, se obtiene el valor máximo de la derivada direccional

$$\text{máx}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cdot \cos(0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\|$$

o sea

$$\text{máx}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\|$$

y este valor máximo se obtiene cuando el vector unitario $\vec{v}_1$ de dirección y sentido de cálculo es colineal con el gradiente y coincidente en sentido con este. Concretamente es

$$\vec{v}_1 = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|}$$

Por otro lado, cuando $\theta = \pi$, se obtiene el valor mínimo de la derivada direccional

$$\text{mín}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cdot \cos(\pi) = -\|\nabla f(x_0, y_0)\|$$

esto es

$$\text{mín}\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = -\|\nabla f(x_0, y_0)\|$$

y este valor mínimo se obtiene cuando el vector unitario $\vec{v}_2$ de dirección y sentido de cálculo es colineal con el gradiente y opuesto en sentido con este. Esto quiere decir que

$$\vec{v}_2 = -\frac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|}$$

Ejemplo 6. Obtener el valor máximo de la derivada direccional de la función

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$$

en el punto $(x_0, y_0) = (1{,}0)$.

Según lo realizado en el Ejemplo 1, esta función es diferenciable en el punto $(x_0, y_0) = (1{,}0)$. Por ende, según la propiedad precedente, se tiene que el valor máximo de la derivada direccional en el punto $(x_0, y_0) = (1{,}0)$ es

$$\text{máx} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\|$$

es decir

$$\text{máx} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1{,}0) = \|\nabla f(1{,}0)\| = \left\| \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1{,}0), \frac{\partial f}{\partial y}(1{,}0) \right) \right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1{,}0) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(1{,}0) \right)^2}$$

$$\text{máx} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1{,}0) = \|\nabla f(1{,}0)\| = \left\| \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1{,}0), \frac{\partial f}{\partial y}(1{,}0) \right) \right\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

en conclusión

$$\text{máx} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1{,}0) = 1$$

es el valor máximo de la derivada direccional de la función f en el punto $(1{,}0)$.

Ejemplo 7. Considere la función $z = \varphi(x, y) = x^4 + 2xy^2 - y^3$.

$i)$ La función φ es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$.

Nótese que las funciones derivadas parciales de φ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = 4x^3 + 2y^2 \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 4xy - 3y^2$$

Son de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^2$, por lo que, en virtud del <u>Teorema de condición suficiente de diferenciabilidad</u>, se concluye que la función φ es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$, valiendo así, todas las propiedades mencionadas anteriormente para este tipo de funciones.

$ii)$ Dado que φ es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$, en todo par (x_0, y_0), es válida la fórmula del gradiente para la derivada direccional, esto es

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \nabla \varphi(x_0, y_0) \bullet \vec{v}, \quad \|\vec{v}\| = 1$$

Por ejemplo, para el punto $(x_0, y_0) = (1{,}2)$ y el vector unitario $\vec{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, resulta

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{v}}(1,2)=\nabla\varphi(1,2)\bullet\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1,2),\frac{\partial\varphi}{\partial y}(1,2)\right)\bullet\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{v}}(1,2)=(12,-4)\bullet\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)=12\cdot\frac{3}{5}-4\cdot\frac{4}{5}=\frac{36-16}{5}=4$$

Es decir que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{v}}(1,2)=4$$

Por otra parte, el valor máximo de la derivada direccional en ese punto es

$$\text{máx}\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{v}}(1,2)=\|\nabla\varphi(1,2)\|=\|(12,-4)\|=\sqrt{160}=4\sqrt{10}$$

$$\text{máx}\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{v}}(1,2)=4\sqrt{10}$$

y este valor se obtiene cuando el vector unitario de dirección y sentido de cálculo es el versor asociado al gradiente de la función en ese punto, esto es

$$\vec{v}_1=\frac{\nabla\varphi(1,2)}{\|\nabla\varphi(1,2)\|}$$

iii) Dado que φ es diferenciable, la ecuación del plano π tangente a su gráfica, en el punto

$$P=\big(1,2,\varphi(1,2)\big)=(1,2,1)$$

Es

$$\pi: z=\varphi(1,2)+\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1,2)\cdot(x-1)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(1,2)\cdot(y-2)$$

$$\pi: z=\varphi(1,2)+\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1,2)\cdot(x-1)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(1,2)\cdot(y-2)$$

$$\pi: z=1+12\cdot(x-1)-4\cdot(y-2)$$

$$\pi: z=-3+12x-4y$$

$$\pi: 12x-4y-z=3$$

Por otra parte, la ecuación paramétrica de la recta $R^{\perp}$ normal a la gráfica de φ, en $P=(1,2,1)$ es

$$R^{\perp}: \alpha(t)=\big(1,2,\varphi(1,2)\big)+t\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1,2),\frac{\partial\varphi}{\partial y}(1,2),-1\right),\qquad t\in\mathbb{R}$$

$$R^{\perp}: \alpha(t)=(1,2,1)+t\cdot(12,-4,-1)=(1+12t,2-4t,1-t),\qquad t\in\mathbb{R}.$$