RESOLUCIÓN DE EJERCICIO nro. 11de MÓDULO 5
De EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA – TERCERA CLASE

11) H es la transformación final que se obtiene al aplicar a un punto P= (x; y) sucesivamente una simetría axial respecto al **eje y**, y por último la transformación f: $R^2 \to R^2$,
f(x, y)= (–3x + y, x + 2y).
a) Encuentre la expresión de H(x, y) para todo (x, y) del plano.
b) Hallar analíticamente y representar al conjunto {PεR^2/H(P) pertenece a **r**: x + 2y = 12}.

Desarrollo:

Se pide aplicar primero la Simetría y luego la función, entonces: H = f o S_y

a) Las matrices asociadas a cada transformación lineal son:

$M(S_y) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $M(f) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Y las fórmulas : S_y (x ; y) = (- x ; y) f(x, y)= (–3x + y, x + 2y).

Realizamos la composición

1) Usando las matrices

$M(f \circ S_y) = M(f) . M(S_y) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = M(H)$

$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+y \\ -x+2y \end{bmatrix}$ $\qquad$ H (x ; y) = (3 x +y ; - x + 2y)

2) Por fórmulas
(f o S_y) (x;y) = f [S_y (x, y)] = f (- x ; y) = (- 3 (-x) + y ; - x + 2 y) = (3 x + y ; - x + 2 y)

$$\boxed{H (x ; y) = (3 x + y ; - x + 2 y)}$$

b) Nos piden averiguar los puntos del plano que tienen como imagen a través H a los punts de la recta x + 2 y = 12

x + 2 y = 12 $\qquad$ x = 12 – 2 y $\quad$ (12 – 2 y ; y) = (12 ; 0) + (-2 y ; y) = (12 ; 0) + y (-2 ;1)

R : (x ; y) = (12 – 2 t ; t) t pertenece a R

Buscamos los puntos cuya imagen tiene esa forma:

H (x ; y) = (3 x + y ; - x + 2 y) = (12 – 2 t ; t)

Igualo las componentes

3 x + y = 12 – 2 t
- x + 2 y = t

Sustitución:

3 x + y = 12 – 2 (- x + 2 y) $\rightarrow$

3 x + y = 12 + 2 x – 4 y   x + 5 y = 12   es una recta del plano

Todos los puntos que están sobre la recta x + 5 y = 12 se aplican en los puntos de la recta x + 2y = 12 a través de la función compuesta H

X = 12 – 5 y
(12 – 5 y ; y) = (12:0)+ s (-5;1)   para cualquier valor de s perteneciente a los reales.

Verificación:

Comprobemos si efectivamente los puntos de x + 5 y = 12 se aplican en x + 2y = 12, lo hacemos con la matriz de H

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 12-5y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36-15y+y \\ -12+5y+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36-14y \\ -12+7y \end{bmatrix}$$

(x; y) = (36 – 14 y ; -12 + 7 y) = (36 ; -12) + y (-14 ; 7) debemos ver si es la misma recta que r

Veamos si es la recta que obtuvimos es la que debíamos hallar.

Los vectores directores son paralelos ya que (-14 ; 7) = 7 . (-2 ; 1) son múltiplos.

Veo si el punto (36 ; - 12) cumple la ecuación x = 12 – 2 y   36 = 12 – 2 . (- 12)
36 = 12 + 24
36 = 36 si, cumple

Las rectas son coincidentes

(36 ; -12) = (12 ; 0) + y (-2 ;1)   36 = 12 – 2 y   - 12 = y   36 = 12 – 2 . (- 12)
(36 ; -12) = (12 ; 0) + (- 12) (-2 ;1)   está en la recta dada

Gráfico: