Teorema de Green

Relación entre las integrales de línea y las integrales dobles

Práctica sobre

- **Teorema de Green.**
- **Ejemplos.**

Teorema de Green

Relación entre las integrales de línea y las integrales dobles

---

Teorema de Green. Sea el campo vectorial

$$F: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2: F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$$

de clase C^1 en el conjunto abierto U, y sea la curva cerrada $C \subset U$, frontera de la región $D \subset U$. Se tiene la siguiente igualdad

$$\oint_{C^+} F\, d\alpha = \oint_{C^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \Big(Q_x(x,y) - P_y(x,y)\Big)\, dxdy$$

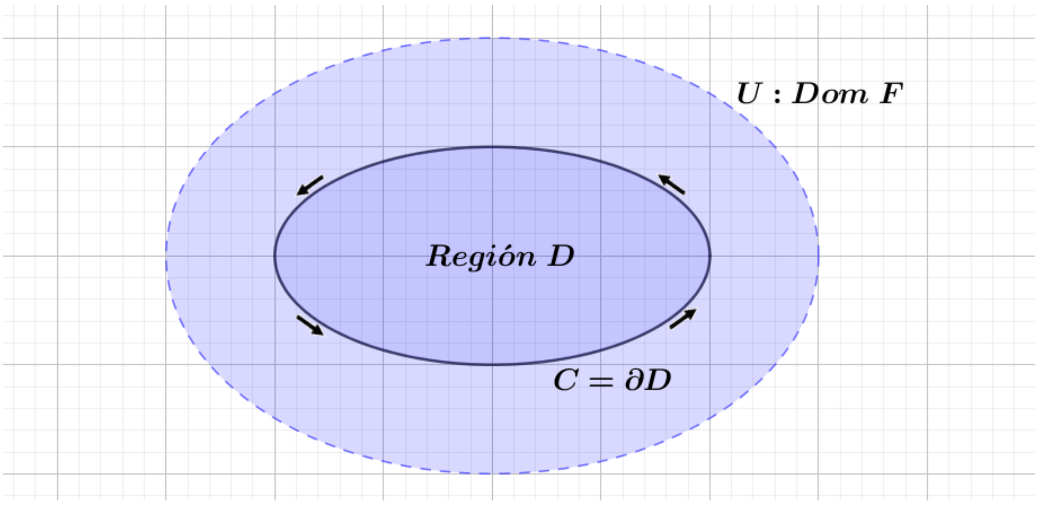
El resultado establece la igualdad entre la integral de línea del campo vectorial

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$$

A lo largo de la curva cerrada C, recorrida en sentido positivo, y la integral doble del campo escalar

$$\varphi(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$$

Sobre la región D que se encuentra totalmente incluida en U, cuya frontera es la curva C.



<u>Interpretación geométrica del conjunto abierto U, la región $D \subset U$ y su frontera $C = \partial D$</u>

Teniendo en cuenta la propiedad de las integrales de línea de campos vectoriales

$$-\oint_{C^+} F\,d\alpha = \oint_{C^-} F\,d\alpha$$

O bien

$$\oint_{C^-} F\,d\alpha = -\oint_{C^+} F\,d\alpha$$

De la igualdad del Teorema de Green, se tiene que

$$\oint_{C^-} F\,d\alpha = \oint_{C^-} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)dxdy$$

O lo que es lo mismo

$$\oint_{C^-} F\,d\alpha = \oint_{C^-} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right)dxdy$$

Así, se tiene la relación entre la integral de línea del campo F a lo largo de la curva cerrada C, recorrida en sentido negativo.

Ejemplo 1. Verificar el Teorema de Green para el campo vectorial

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = (-y, x)$$

Y la curva

$$C: x^2 + y^2 = 1$$

Se trata de verificar la igualdad presentada en el Teorema de Green. A saber

$$\oint_{C^+} F\,d\alpha = \oint_{C^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)dxdy$$

O sea, se deben calcular las dos integrales, la integral de línea, la integral doble, y llegar a la igualdad de los resultados.

Cálculo de la integral de línea

$$I_l = \oint_{C^+} F\,d\alpha = \int_{t=a}^{t=b} F[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t)\,dt$$

En este caso, hay que buscar una parametrización positiva para la curva

$$C: x^2 + y^2 = 1$$

Se sabe que esta es

$$C: \alpha(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t)), \quad 0 \le t \le 2\pi$$

La derivada es

$$\alpha'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t))$$

El campo vectorial

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = (-y, x)$$

evaluado en la parametrización es

$$F[\alpha(t)] = F(\cos(t), \operatorname{sen}(t)) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t))$$

El producto escalar del campo vectorial F por la derivada de α es

$$F[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t)) \bullet (-\operatorname{sen}(t), \cos(t)) = 1$$

De este modo, la integral de línea es

$$I_l = \oint_{C^+} F\,d\alpha = \int_{t=0}^{t=2\pi} F[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t)\,dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} 1\,dt = 2\pi$$

Es decir que

$$I_l = \oint_{C^+} F\,d\alpha = 2\pi$$

Cálculo de la integral doble

$$I_d = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy$$

En este caso se tiene que el recinto de integración es el círculo

$$D: x^2 + y^2 \le 1$$

Que es precisamente la región del plano que se encuentra limitada por la curva C.

Se tiene que

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = (-y, x)$$

Y, por lo tanto

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y) = 1 - (-1) = 2$$

Así, la integral doble a calcular es

$$I_d = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy = \iint\limits_D 2\, dxdy = 2\iint\limits_D 1\, dxdy = 2 \cdot a(D) = 2 \cdot \pi \cdot 1^2$$

Siendo D el círculo de centro en el origen y radio 1. Entonces, para calcular esta integral doble se aplica la transformación polar.

$$T: D' \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : T(r,\theta) = \big(x(r,\theta), y(r,\theta)\big) = (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))$$

Siendo

$$D' = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le r \le 1 \land 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

Donde se tienen además que

$$J_T(r,\theta) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$$

De este modo, queda

$$I_d = \iint\limits_D 2\, dxdy = \iint\limits_{D'} 2 \cdot r\, drd\theta = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=1} 2r\, dr\right) d\theta = \left(\int_{r=0}^{r=1} 2r\, dr\right)\left(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta\right)$$

$$I_d = \left(r^2 \Big|_{r=0}^{r=1}\right)\left(\theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\right) = 2\pi$$

Es decir que

$$I_d = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy = 2\pi$$

Coincidiendo con el valor de la integral de línea del campo vectorial F, a lo largo de la curva cerrada C recorrida en sentido positivo. Esto es

$$\oint_{C^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy = 2\pi$$

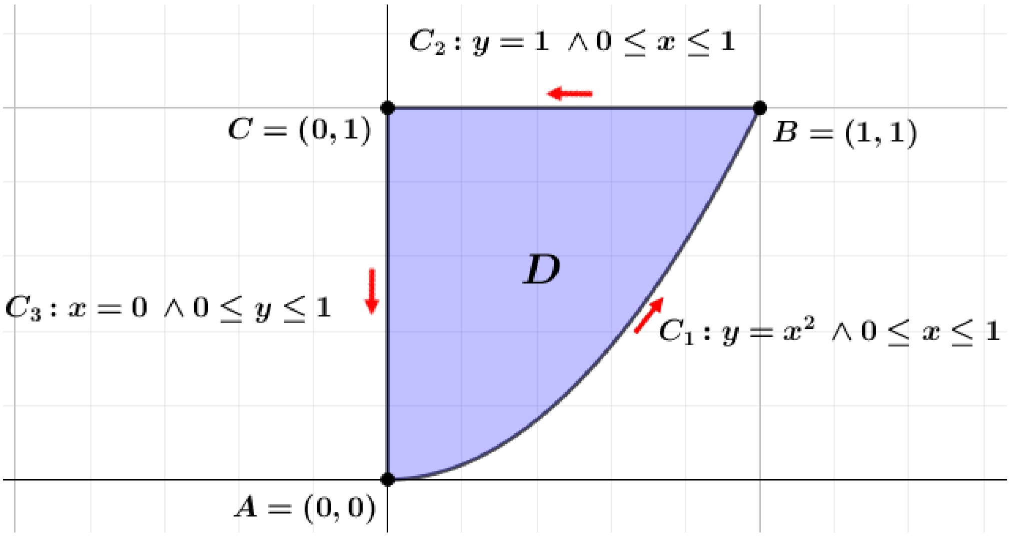
De este modo, queda claro que se verifica el Teorema de Green.

Ejemplo 2. Verificar el Teorema de Green para el campo vectorial

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = (x - y^2, x^2 + y)$$

y la curva C, frontera de la región

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge x^2 \leq y \leq 1\}$$



Representación gráfica de la región D y la curva C.

Así como en el ejemplo precedente, se trata de verificar la igualdad presentada en el Teorema de Green. A saber

$$\oint_{C^+} F\, d\alpha = \oint_{C^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy$$

Cálculo de la integral de línea

Calcular la integral de línea

$$I_l = \oint_{C^+} F\, d\alpha = \oint_{C^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

de F a lo largo de la frontera C de la región D, significa calcular tres integrales de línea independientes, sobre las tres curvas C_1, C_2 y C_3 que forman a C, a saber

$$I_l = \oint_{C^+} F\, d\alpha = \int_{C_1} F\, d\alpha + \int_{C_2} F\, d\alpha + \int_{C_3} F\, d\alpha$$

<u>recorriendo cada una según el sentido que heredan del sentido positivo de recorrido de la curva C</u>.

De este modo, hay que parametrizar cada curva y obtener el valor de la integral de línea del campo vectorial

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = (x - y^2, x^2 + y)$$

En este caso, las parametrizaciones son:

Para el arco de parábola C_1

$$C_1: \alpha_1(t) = (t, t^2) \quad 0 \le t \le 1 \quad \alpha_1(0) = (0,0) \quad \alpha_1(1) = (1,1)$$

Para los segmentos de utiliza la fórmula

$$C_S: \alpha(t) = A_S + t \cdot (B_S - A_S) \quad 0 \le t \le 1 \quad \alpha(0) = A_S \quad \alpha(1) = B_S$$

Para el segmento C_2

$$C_2: \alpha_2(t) = (1,1) + t\left(\overbrace{(0,1) - (1,1)}^{(-1,0)}\right) = (1 - t, 1) \quad 0 \le t \le 1$$

Y finalmente para el segmento C_3

$$C_3: \alpha_3(t) = (0, 1 - t) \quad 0 \le t \le 1$$

Entonces, se calculan las integrales de línea de

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = (x - y^2, x^2 + y)$$

Individualmente. Para el caso de la integral sobre C_1, se tiene

$$\int_{C_1} F\, d\alpha = \int_{t=0}^{t=1} F[\alpha_1(t)] \bullet \alpha'_1(t)dt = \int_{t=0}^{t=1} F[(t, t^2)] \bullet (1,2t)dt$$

$$\int_{C_1} F\, d\alpha = \int_{t=0}^{t=1} (t - (t^2)^2, t^2 + t^2) \bullet (1,2t)dt = \int_{t=0}^{t=1} (t - t^4, 2t^2) \bullet (1,2t)dt$$

$$\int_{C_1} F\, d\alpha = \int_{t=0}^{t=1} (t - t^4 + 4t^3)dt = \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^5}{5} + t^4\right) \Bigg|_{t=0}^{t=1} = \frac{13}{10}$$

Esto quiere decir que la integral de línea de F a lo largo de la curva C_1 es igual a

$$\int_{C_1} F\,d\alpha = \frac{13}{10}$$

Para el caso de la integral sobre C_2, se tiene

$$\int_{C_2} F\,d\alpha = \int_{t=0}^{t=1} F[\alpha_2(t)] \bullet \alpha'_2(t)dt = \int_{t=0}^{t=1} F[(1-t,1)] \bullet (-1,0)dt$$

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = (x - y^2, x^2 + y)$$

$$\int_{C_2} F\,d\alpha = \int_{t=0}^{t=1} \big((1-t) - 1^2, (1-t)^2 + 1\big) \bullet (-1,0)dt = \int_{t=0}^{t=1} (-t)(-1)dt$$

$$\int_{C_2} F\,d\alpha = \int_{t=0}^{t=1} t\,dt = \left(\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2}$$

O sea

$$\int_{C_2} F\,d\alpha = \frac{1}{2}$$

Para el caso de la integral sobre C_3, se tiene

$$\int_{C_3} F\,d\alpha = \int_{t=0}^{t=1} F[\alpha_3(t)] \bullet \alpha'_3(t)dt = \int_{t=0}^{t=1} F[(0,1-t)] \bullet (0,-1)dt$$

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = (x - y^2, x^2 + y)$$

$$\int_{C_3} F\,d\alpha = \int_{t=0}^{t=1} \big(0 - (1-t)^2, 0^2 + (1-t)\big) \bullet (0,-1)dt = \int_{t=0}^{t=1} (1-t)(-1)dt$$

$$\int_{C_3} F\,d\alpha = \int_{t=0}^{t=1} (t-1)\,dt = \left(\frac{t^2}{2} - t\right)\Bigg|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Esto es

$$\int_{C_3} F\,d\alpha = -\frac{1}{2}$$

En definitiva, resulta que

$$I_l = \oint_{C^+} F\, d\alpha = \int_{C_1} F\, d\alpha + \int_{C_2} F\, d\alpha + \int_{C_3} F\, d\alpha = \frac{13}{10} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{13}{10}$$

Es decir que

$$I_l = \oint_{C^+} F\, d\alpha = \oint_{C^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \frac{13}{10}$$

<u>Cálculo de la integral doble</u>

$$I_d = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy$$

Sobre la región del plano

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge x^2 \leq y \leq 1\}$$

En este caso, se tiene que

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = (x - y^2, x^2 + y)$$

Y, por lo tanto

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y) - \frac{\partial}{\partial y}(x - y^2) = 2x - (-2y) = 2x + 2y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2x + 2y$$

Así, la integral doble a calcular es

$$I_d = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy = \iint_D (2x + 2y)\, dxdy$$

$$I_d = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy = \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=x^2}^{y=1} (2x + 2y)\, dy \right) dx$$

$$I_d = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy = \int_{x=0}^{x=1} (2xy + y^2) \Big|_{y=x^2}^{y=1} dx$$

$$I_d = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy = \int_{x=0}^{x=1} [(2x+1) - (2xx^2 + (x^2)^2)]\, dx$$

$$I_d = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy = \int_{x=0}^{x=1} (2x + 1 - 2x^3 - x^4)\, dx$$

$$I_d = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy = \left(x^2 + x - \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = 1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{13}{10}$$

Se tiene entonces que la integral doble es

$$I_d = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy = \frac{13}{10}$$

Así, para este caso particular, se verifica el Teorema de Green, y resulta

$$\oint_{C^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy = \frac{13}{10}$$

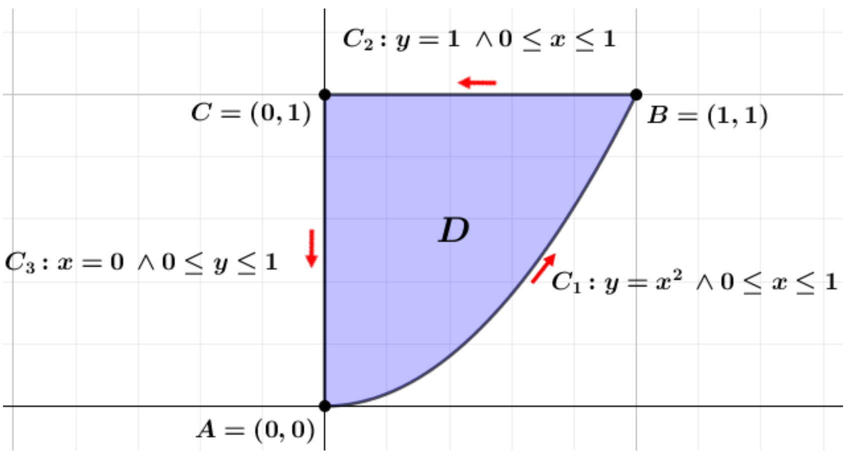
Ejemplo 3. Aplicar el Teorema de Green para calcular la integral de línea del campo vectorial

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = (x - y^2, x^2 + y)$$

A lo largo de la curva C, frontera de la región

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \wedge x^2 \le y \le 1\}$$

recorrida en sentido positivo.



Representación gráfica de la región D y la curva C.

En este tipo de ejercicios, se satisfacen las condiciones del Teorema de Green, o sea que se cumple la igualdad

$$\oint_{C^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy$$

Y a partir de esto, se la puede utilizar para calcular la integral línea pedida, a saber

$$\oint_{C^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

calculando la integral doble a la cual ésta es igual.

Ahora, si se pidiera calcular la integral de línea de campo F a lo largo de la curva cerrada C, pero recorrida en sentido negativo, según la observación realizada más arriba, vale

$$\oint_{C^-} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\oint_{C^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

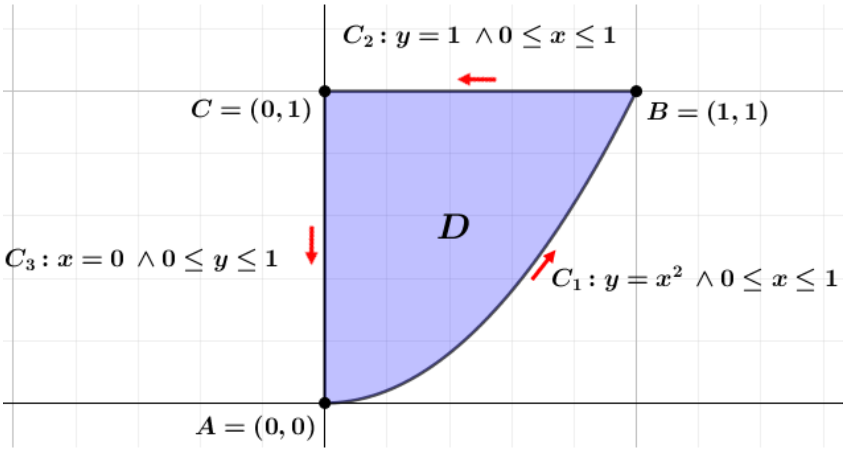
Ejemplo 4. Calcular la integral de línea del campo vectorial

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = (x - y^2, x^2 + y)$$

a lo largo de la curva C, frontera de la región

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge x^2 \leq y \leq 1\}$$

recorrida en sentido positivo.



Representación gráfica de la región D y la curva C.

En un problema como este, uno se vale del Teorema de Green para calcular la integral de línea que se pide. Pero para poder resolver el ejercicio de esta manera, es necesario mostrar que se verifican las condiciones de validez del Teorema de Green.

Cálculo del área de una región aplicando el Teorema de Green

En las condiciones del Teorema de Green, vale la igualdad

$$\oint_{C^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) dxdy$$

Ahora bien, si el campo vectorial involucrado

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$$

verifica la condición

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1$$

Se tiene que

$$\oint_{C^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D 1\, dxdy$$

Luego, teniendo en cuenta que la integral doble

$$\iint_D 1\, dxdy$$

ofrece como resultado un número positivo que, salvo las unidades, equivale al área de la región, esto es

$$\iint_D 1\, dxdy = \text{área}(D)$$

Es decir que, en estas condiciones, la integral de línea del campo vectorial F, a lo largo de la curva cerrada C, recorrida en sentido positivo, es, salvo las unidades, igual al área de la región D limitada esta. O sea

$$\oint_{C^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \text{área}(D)$$

Un ejemplo de este tipo de campos vectoriales es el siguiente

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = (0, x)$$

Obsérvese que se cumple

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(0) = 1$$

Así, si la curva cerrada C, está parametrizada positivamente por

$$\alpha(t) = \big(x(t), y(t)\big) \qquad a \le t \le b$$

Resulta que

$$\alpha'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big)$$

Y, por otro lado

$$F[\alpha(t)] = F\big(x(t), y(t)\big) = \Big(P\big(x(t), y(t)\big), Q\big(x(t), y(t)\big)\Big) = \big(0, x(t)\big)$$

Así, se tiene entonces que

$$F[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t) = \big(0, x(t)\big) \bullet \big(x'(t), y'(t)\big) = x(t) \cdot y'(t)$$

Así, la integral de línea del campo F a lo largo de C es

$$\oint_{C^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \oint_{C^+} x dy = \int_{t=a}^{t=b} F[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t)\, dt = \int_{t=a}^{t=b} x(t) \cdot y'(t)\, dt$$

Es decir que

$$\oint_{C^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t=a}^{t=b} x(t) \cdot y'(t)\, dt = \text{área}(D)$$

O sea

$$\text{área}(D) = \int_{t=a}^{t=b} x(t) \cdot y'(t)\, dt$$

Ejemplo 5. Según el desarrollo anterior, se puede aplicar el Teorema de Green para calcular el área del círculo

$$D: x^2 + y^2 \le R^2$$

Recuérdese que una parametrización para la curva C que limita a D, que es una circunferencia de centro en el origen y radio igual a R, es la siguiente

$$C: \alpha(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (R\cos(t), R\,\mathrm{sen}(t)) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Luego, resulta que

$$\alpha'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big) = (-R\,\mathrm{sen}(t), R\cos(t))$$

Por otra parte

$$F[\alpha(t)] = \big(0, x(t)\big) = (0, R\cos(t))$$

Y de esta manera, de la relación

$$\oint_{C^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t=0}^{t=2\pi} F[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t)\,dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} x(t)\cdot y'(t)\,dt = \text{área}(D)$$

Se tiene que

$$\text{área}(D) = \int_{t=0}^{t=2\pi} x(t)\cdot y'(t)\,dt = \int_{t=0}^{t=2\pi} R\cos(t)\cdot R\cos(t)\,dt$$

o sea

$$\text{área}(D) = \int_{t=0}^{t=2\pi} r\cos(t)\cdot r\cos(t)\,dt = R^2\cdot\left(\int_{t=0}^{t=2\pi} \cos^2(t)\,dt\right)$$

$$\text{área}(D) = R^2\cdot\left(\int_{t=0}^{t=2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos(2t)}{2}\right)dt\right) = R^2\cdot\left(\frac{t}{2}+\frac{\mathrm{sen}(2t)}{4}\ \Bigg|_{t=0}^{t=2\pi}\right) = R^2\cdot\pi$$

Es decir que

$$\text{área}(D) = \pi\cdot R^2$$

tal como se sabe.

Observación. Para calcular la integral

$$\int_{t=0}^{t=2\pi} \cos^2(t)\,dt = \pi$$

Se utilizó la identidad

$$\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2} = \frac{1}{2}+\frac{\cos(2t)}{2} \qquad \mathrm{sen}^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2} = \frac{1}{2}-\frac{\cos(2t)}{2}$$

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \mathrm{sen}^2(t)$$

Claramente, es posible hallar infinitos campos vectoriales

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$$

tales que

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 1$$

y utilizarlos calcular el área de regiones a partir del Teorema de Green. Otro ejemplo de este tipo de campos es el siguiente

$$F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}\right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

Y en este caso, se tiene

$$\oint_{C^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \frac{1}{2}\oint_{C^+} xdy - ydx = \int_{t=a}^{t=b} F[\alpha(t)] \bullet \alpha'(t)\, dt$$

$$\oint_{C^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t=a}^{t=b} \left(-\frac{y(t)}{2}, \frac{x(t)}{2}\right) \bullet \big(x'(t), y'(t)\big)\, dt$$

Por lo cual, resulta

$$\text{área}(D) = \int_{t=a}^{t=b} \left(-\frac{x'(t)y(t)}{2} + \frac{x(t)y'(t)}{2}\right) dt$$

o bien

$$\text{área}(D) = \int_{t=a}^{t=b} \left(\frac{x(t)y'(t)}{2} - \frac{x'(t)y(t)}{2}\right) dt = \frac{1}{2}\int_{t=a}^{t=b} \big(x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\big)\, dt$$

que también se puede escribir del siguiente modo

$$\text{área}(D) = \frac{1}{2}\int_{t=a}^{t=b} \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ x'(t) & y'(t) \end{vmatrix} dt$$

Ejemplo 6. Aplicar el Teorema de Green para calcular el área de la región elíptica

$$D\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$$

Recuérdese que una parametrización para la curva C que limita a D, una elipse de centro en el origen con valores de semiejes "a" el horizontal, y "b"el vertical, es la siguiente

$$C\colon \alpha(t)=\big(x(t),y(t)\big)=(a\cos(t)\,,b\,\text{sen}(t))\quad 0\leq t\leq 2\pi$$

De este modo, resulta

$$\alpha'(t)=\big(x'(t),y'(t)\big)=(-a\,\text{sen}(t)\,,b\cos(t))$$

Entonces, utilizando la fórmula de área obtenida en el desarrollo anterior, se tiene

$$\text{área}(D)=\frac{1}{2}\int_{t=0}^{t=2\pi}\begin{vmatrix}x(t) & y(t)\\ x'(t) & y'(t)\end{vmatrix}dt=\int_{t=0}^{t=2\pi}\left(\frac{x(t)y'(t)}{2}-\frac{x'(t)y(t)}{2}\right)dt$$

$$\text{área}(D)=\frac{1}{2}\int_{t=0}^{t=2\pi}\big(x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\big)\,dt$$

$$\text{área}(D)=\frac{1}{2}\int_{t=0}^{t=2\pi}(a\cos(t)\,b\cos(t)-(-a\,\text{sen}(t))b\,\text{sen}(t))\,dt$$

$$\text{área}(D)=\frac{1}{2}\int_{t=0}^{t=2\pi}ab(\cos^2(t)+\text{sen}^2(t))\,dt$$

$$\text{área}(D)=\frac{1}{2}\int_{t=0}^{t=2\pi}ab\,dt=ab\frac{1}{2}\int_{t=0}^{t=2\pi}1\,dt=ab\frac{1}{2}\left(t\;\Big|_{t=0}^{t=2\pi}\right)=ab\frac{1}{2}\,2\pi=ab\pi$$

Esto quiere decir que, el área de la región elíptica

$$D\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$$

es igual a

$$\text{área}(D)=ab\pi$$