Matemática Discreta

CLASE 2

Ing. Marcela Bellani
UNLAM | FLORENCIO VARELA 1903 .B1754.SAN JUSTO.BUENOS AIRES

En esta clase se desarrollarán los siguientes temas:

- Operaciones entre hileras.

Lenguaje formal. Operaciones entre lenguajes: concatenación, inversión, unión, intersección, diferencia. Cerradura de Kleene, cerradura positiva.

- Relación: definición, dominio, imagen, conjunto de partida, conjunto de llegada; relación intersección, unión, complemento, inversa: definición, propiedades. Representación gráfica. Manejo matricial. Composición de relaciones: definición, propiedades. Relación de conectividad. Relación de alcanzabilidad.

Para todas las clases contamos con la ayuda del sitio de la cátedra http://discretaunlam.net.ar donde encontrarás videos, ejercicios, explicaciones, autoevaluaciones de todos los temas de Matemática Discreta.

Operaciones entre cadenas o palabras.

1. Concatenación o producto w.y

$\forall w \in V^*$, $\forall y \in V^*$ la concatenación o producto de palabras w.y es otra palabra de V* formada por los símbolos de w seguidos de los símbolos de y. Muchas veces se representará simplemente como xy.

EJEMPLO:

Sea w = 011; y = 1011 elementos de V*entonces w.y = 0111011 ;

y.w = 1011011

Propiedades

1. Elemento neutro

"La hilera nula, λ, es el elemento neutro de la concatenación"

$\forall w \in V^*$ se verifica que **$\lambda . w = w. \lambda = w$**

2. Asociativa

$\forall w \in V^*$, $\forall y \in V^*$, $\forall z \in V^*$ se verifica que **$(w.y) .z = w. (y. z)$**

3. La concatenación de palabras no es conmutativa

$\forall w \in V^*$, $\forall y \in V^*$, $\forall z \in V^*$ se verifica que **$w.y \neq y.w$**

4. Longitud de la concatenación

"La longitud de la concatenación de palabras es igual a la suma de las longitudes de dichas palabras"

long w.y = long w + long y

EJEMPLO:

Sea V = { a,b} ;w = 0011 ;y = 01 entonces w.y = 001101   ; long w.y = 6

Solución: long w.y = long w + long y = 4 + 2 = 6

2. Inversión w^R

Consiste en invertir el orden de cada uno de los símbolos de w

EJEMPLO:

Sea w = 011 $\in$ V* = {0,1}*; la inversión es $w^R = 110$

Propiedades

1. "La inversa de la palabra nula es la misma palabra nula"

$$\lambda^R = \lambda$$

2. Involución

"La inversa de la inversa de una palabra es la misma palabra"

$$(w^R)^R = w$$

3. "La inversa de la concatenación de dos palabras es igual a la concatenación de la inversa de la segunda palabra por la inversa de la primera palabra."

$$\forall w \in V^*, \forall z \in V^* \text{ se verifica que } (w.z)^R = z^R.w^R$$

4. "La longitud de la inversa de una palabra es igual a la longitud de esa palabra"

$$\forall w \in V^* \text{ se verifica que } \text{long } w = \text{long } w^R$$

3. Potenciación w^n

Consiste en concatenar n veces la palabra w consigo misma.

Definición

Si $n = 0$ entonces $w^0 = \lambda$

$n = 1$ entonces $w^1 = w$

$n \geq 2$ entonces $w^n = w.\ w^{n-1}$

EJEMPLO:

Sea $V = \{a,b\}$ y $w = aab$ entonces

$w^0 = \lambda$

$w^1 = aab$

$w^2 = w.w = aabaab$

$w^3 = w.\ w^2 = w.w.w = aabaabaab$

Propiedad

"La longitud de la potencia n-ésima de la palabra w es igual n veces la longitud de w."

$$\textbf{long } w^n = n \textbf{ long } w$$

EJEMPLO:

Sea $V = \{a,b\}$ y $w = aab$

<u>Solución:</u> $\text{long } w^3 = 3 .\text{long } w = 3.3 = 9$

Lenguajes especiales

1. Lenguaje vacío: no tiene elementos.

$$L = \varnothing$$

2. Lenguaje nulo: es el lenguaje que tiene como único elemento a la hilera nula.

$$L = \{\lambda\} = \Delta$$

<u>Observación:</u> el símbolo Δ corresponde a la letra griega delta mayúscula.

OPERACIONES ENTRE LENGUAJES

Como los lenguajes son conjuntos son válidas todas las operaciones entre conjuntos: unión, intersección, diferencia y complemento.

También son válidas todas las operaciones entre hileras ya que los lenguajes están formados por hileras.

1.OPERACIONES ENTRE LENGUAJES COMO CONJUNTOS

EJEMPLO:

Sea el alfabeto romano $V = \{a, b, c, d,\ldots, z\}$ y los lenguajes $L_1 = \Delta$, $L_2 = \{la, Dora\}$,

$L_3 = \{la, vaca, vuela\}$:

a) Hallar: $L_2 \cup L_3$, $L_2 \cap L_3$, $L_1 \cup L_3$, $L_1 \cap L_2$ y $L_2 - L_3$

Solución

$L_2 \cup L_3$ = {la, Dora} $\cup$ {la, vaca, vuela} = {la, Dora, vaca, vuela}

$L_2 \cap L_3$ = {la, Dora} $\cap$ {la, vaca, vuela} = {la}

$L_1 \cup L_3$ = $\Delta \cup$ {la, vaca, vuela} = {λ} $\cup$ {la, vaca, vuela} = {λ, la, vaca, vuela}

$L_1 \cap L_2$ = $\Delta \cap$ {la, Dora} = {λ} $\cap$ {la, Dora} = $\varnothing$

$L_2 - L_3$ = {la, Dora} - {la, vaca, vuela} = {Dora}

2. Operaciones entre lenguajes como hileras

2.1. Concatenación de lenguajes.

Consiste en concatenar cada una de las hileras del primer lenguaje con cada una de las hileras del segundo lenguaje.

$L_1 . L_2 = \{w_1.w_2 \ / \ w_1$ es elemento de L_1 y w_2 es elemento de $L_2\}$

EJEMPLO:

Sea el alfabeto romano V = {a, b, c, d,…, z} y los lenguajes L_1 = {la, Dora} y L_2 = {la, vaca, vuela}

$L_1 . L_2$ = {la, Dora}.{la, vaca, vuela} = {la la, la vaca,la vuela,Dora la,Dora vaca,Dora vuela}

Propiedades

1) Asociativa

$\forall L_1 \in P(V^*)$; $\forall L_2 \in P(V^*)$; $\forall L_3 \in P(V^*)$ se verifica que $(L_1 . L_2). L_3 = L_1 .(L_2 . L_3)$

2) Elemento neutro

"El lenguaje nulo, Δ , es el elemento neutro de la concatenación de lenguajes."

$$\forall L \in P(V^*) \quad \text{se verifica que} \quad L \,.\, \Delta = \Delta \,.\, L = L$$

3) No es conmutativa.

$$L_1 \,.\, L_2 \neq L_2 \,.\, L_1$$

4) Elemento absorbente

"El lenguaje vacío $\varnothing$ es el elemento absorbente de la concatenación de lenguajes"

$$\forall L \in P(V^*) \quad \text{se verifica que} \quad L \,.\, \varnothing = \varnothing \,.\, L = \varnothing$$

5) Distributiva

"La **concatenación** de lenguajes **distribuye** respecto a la **unión** de lenguajes."

$\forall L_1 \in P(V^*)$; $\forall L_2 \in P(V^*)$;$\forall L_3 \in P(V^*)$ se verifica que

$$L_1 \,.(L_2 \cup L_3) = (L_1 \,.L_2) \cup (L_1 \,.\, L_3)$$

"La **concatenación** de lenguajes **no distribuye** respecto a la **intersección** de lenguajes"

$$L_1 \,.\, (L_2 \cap L_3) \neq (L_1 \,.L_2) \cap (L_1 \,.\, L_3)$$

<u>Ejemplo</u>: sean $L_1 = \{1, 11,111\}$; $L_2 = \{10,11\}$ y $L_3 = \{10, 0,1\}$

$L_1 \,.\, (L_2 \cap L_3) = \{1, 11,111\}. \{10\} =$ **{110, 1110,11110}**

$(L_1 \,.L_2) \cap (L_1 \,.\, L_3) = \{110,111,1110,1111,11110,11111\} \cap$
$\{110,10,11,1110,110,111,11110,1110,1111\}=$
{110,111,1110,1111,11110}

"La **unión** de lenguajes **no distribuye** respecto a la **concatenación** de lenguajes"

$$L_1 \cup (L_2 \, . \, L_3) \neq (L_1 \cup L_2) \, . \, (L_1 \cup L_3)$$

<u>Ejemplo</u>: sean L_1= {1, 11,111}; L_2= {10,11} y L_3= {10, 0,1}

$L_1 \cup (L_2 \, . \, L_3)$ = {1, 11,111} ∪ {1010, 100, 101, 1110, 110,111}=

{1, 11, 111, 1010, 100, 101, 1110, 110,111}

$(L_1 \cup L_2) \, . \, (L_1 \cup L_3)$ = {1, 11, 111, 10}.{1, 11,111, 10, 0}=

{11,111,1111,110,10,11111,1110,111111,11110,101,1011,10111,1010,100}

"La **intersección** de lenguajes **no distribuye** respecto a la **concatenación** de lenguajes"

$$L_1 \cap (L_2 \, . \, L_3) \neq (L_1 \cap L_2) \, . \, (L_1 \cap L_3)$$

2.2. Inversión de lenguajes

Consiste en invertir cada una de las hileras del lenguaje.

$$L^R = \{w^R \;/\; w \text{ es elemento de } L\}$$

<u>EJEMPLO</u>:

Sea el alfabeto romano V = {a, b, c, d,…, z} y los lenguajes L_1 = {la, Dora} y $L_2 = \Delta$

$L_1^{\ R}$ = {al, arod}

$L_2^{\ R} = \Delta^R = \Delta$

2.3. Potenciación de lenguajes

Consiste en concatenar p veces el lenguaje consigo mismo.

$L^0 = \{\lambda\}$

$L^1 = L$

$L^p = L.L^{p-1}$ con $p \geq 2$

EJEMPLO:

Sea el alfabeto romano V = {a, b, c, d,…, z} y los lenguajes L_1 = {la, Dora}

$L_1^0 = \{\lambda\}$

$L_1^1 = L_1 = \{la, Dora\}$

$L_1^2 = L_1^1 \cdot L_1^1$ = {la, Dora}. {la, Dora} = {la la, la Dora, Dora la , Dora Dora}

3.Clausura o cierre de Kleene

Es el conjunto de todas las hileras finitas construidas con los elementos de L. En otras palabras, la clausura se forma por la unión de todas las potencias del lenguaje.

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup L^4 \ldots = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$$

EJEMPLO:

Sea el alfabeto romano V = {a, b, c, d,…, z} y los lenguajes L_1 = {la, Dora}

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup L^4 \ldots =$$

= {λ} ∪ {la, Dora} ∪ {la la,la Dora,Dora la, Dora Dora} ∪ … =

= {λ, la, Dora,la la,la Dora,Dora la ,Dora Dora,…}

Propiedades

1-"La clausura del lenguaje nulo es el lenguaje nulo"

$$\Delta^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta^i = \Delta^0 \cup \Delta^1 \cup \Delta^2 \cup \ldots = \{\lambda\}^0 \cup \{\lambda\}^1 \cup \{\lambda\}^2 \cup \ \ldots = \{\lambda\} = \Delta$$

2-"La clausura del lenguaje vacío es el lenguaje nulo"

$$\varnothing^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \varnothing^i = \varnothing^0 \cup \varnothing^1 \cup \varnothing^2 \cup \ldots = \{\lambda\} \cup \{\varnothing\} \cup \{\varnothing\} \cup \ \ldots = \{ \lambda \} = \Delta$$

4. Clausura positiva

Es el conjunto de todas las hileras finitas no nulas construidas con los elementos de L. En otras palabras, la clausura positiva se forma por la unión de todas las potencias del lenguaje, excluyendo la potencia 0.

$$L^+ = L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup L^4 \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$$

EJEMPLO:

Sea el alfabeto romano V = {a, b, c, d,…, z} y los lenguajes L_1 = {la, Dora}

$L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i = L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup L^{4\ldots} =$

= {la, Dora} ∪ {lala, laDora, Dorala, DoraDora} ∪ … =

= {la, Dora, lala, laDora, Dorala, DoraDora,…}

5. Complementación

Sea un alfabeto V, sea $L \subseteq V^*$ el complemento de un lenguaje es el conjunto de hileras de V* que no pertenecen al lenguaje L.

$$\overline{L} = V^* - L$$

Para finalizar con esta parte te proponemos que ingreses al sitio de la cátedra " https://discretaunlam.net.ar " para leer y hacer las actividades por clase (AxC) correspondientes al tema "Vocabularios-Hileras-Lenguajes" que te proponemos en la plataforma.

Luego comienza a hacer los ejercicios de Vocabularios-Hileras-Lenguajes de la guía de ejercicios para el primer parcial y por último resuelve la autoevaluación "Vocabularios-Hileras-Lenguajes" que figura en el sitio.

Tené en cuenta que todas las actividades que realices forman parte del seguimiento académico que hará tu tutor.

Relaciones

Introducción

El concepto matemático de relación está basado en la noción de vínculo entre objetos. Algunas relaciones describen comparaciones entre elementos de un conjunto: Una caja es más pesada que otra, un hombre es más rico que otro, etc. Otras relaciones involucran elementos de conjuntos diferentes, tal como "x vive en y", donde x es una persona e y es una ciudad, "x es propiedad de y" donde x es un edificio e y es una empresa, ´o "x nació en el País y en el año z".

Todos los ejemplos anteriores son de relaciones entre dos o tres objetos, sin embargo, en principio, podemos describir relaciones que abarquen n objetos, donde n es cualquier entero positivo.

Las relaciones tienen una importancia fundamental tanto en la teoría como en las aplicaciones a la informática, en las bases de datos y problemas de clasificación.

Aplicaciones numéricas, recuperación de información y problemas de redes son algunos ejemplos donde las relaciones ocurren como parte de la descripción del problema, y la manipulación de relaciones es importante en la resolución de procedimientos.

Las relaciones también juegan un importante papel en la teoría de computación, incluyendo estructuras de programas y análisis de algoritmos.

Las relaciones pueden ser utilizadas para resolver problemas tales como la determinación de qué pares de ciudades están unidas por vuelos de líneas aéreas en una red, la búsqueda de un orden viable para las diferentes etapas de un proyecto complicado o la producción de una forma útil para almacenar información en bases de datos informáticas.

La matemática intenta hacerse eco de tales sucesos y, mediante un proceso de abstracción, expresarlas y estudiarlas científicamente.

SUGERENCIA ANTES DE AVANZAR:

Mirá el video "¿Por qué estudiar relaciones?" en el sitio de la cátedra http://discretaunlam.net.ar sección Apuntes-Relaciones.

Definición de relación

Sean los conjuntos $A_1, A_2, . . . , A_n$. Una relación R sobre $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ es cualquier subconjunto de este producto cartesiano, es decir,

$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$$

EJEMPLO: Las tablas de una base de datos relacional.

- Si $\mathbf{R = \varnothing}$, llamaremos a R, la ***relación vacía***.
- Si $\mathbf{R = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n}$, llamaremos a R la ***relación universal***.
- Si **n = 2**, diremos que R es una ***relación binaria*** y si **n = 3**, una ***relación ternaria***.

Relaciones Binarias

La clase más importante de relaciones es la de las relaciones binarias. Debido a que este tipo de relaciones son las más frecuentes, el término "relación" denota generalmente una relación binaria; adoptaremos este criterio cuando no haya confusión y especificaremos las que no sean binarias con términos tales como "ternaria" o "n-aria".

Si $(a, b) \in R$ diremos que a está relacionado con b y lo notaremos por:

$$a \; R \; b.$$

Si $(a, b) \notin R$, escribiremos $a \not R b$ y diremos que a no está relacionado con b.

Notación

1. R es una relación de A en B, también se denota por $R: A \to B$

2. Si el par (x, y) pertenece a la relación R, se acostumbra a denotar por $(x, y) \in R$ ó $x \, R \, y$ ó $y = R(x)$

EJEMPLO:

1. Sea A = {rosas, margaritas, claveles, violetas} y B = {blancas, amarillos, rojas, bordo, azul}. Escribir la relación R de A en B definida por: $(a; b) \in R \leftrightarrow$ "a es del color b"

Solución

R = {(rosas, rojas), (margaritas, blancas), (claveles, amarillos)}

2.

2.1. Sea R la relación "mayor e igual que" definida en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros.

Escribiremos $7 \geq 6$ para indicar que $(7; 6) \in R$ y $6 \ngeq 7$ para indicar que $(6, 7) \notin R$

2.2. Sea R la relación "es divisor de" en el conjunto de los enteros positivos. En símbolos $x \; R \; y \leftrightarrow x \mid y$.

Entonces, 4 R 8 pero 8 no está relacionado con 4 ya que el 8 no divide exactamente a 4.

2.3. Cuando un compilador traduce un programa informático construye una tabla de símbolos que contiene los nombres de los símbolos presentes en el programa, los atributos asociados a cada nombre y las sentencias de programa en las que están presentes cada uno de los nombres. Así pues, si S es el conjunto de los símbolos, A es el conjunto de los posibles atributos y P es el conjunto de las sentencias de programa, entonces la tabla de símbolos incluye información representada por las relaciones binarias de S a A y de S a P.

Relaciones sobre el mismo conjunto

Este tipo de relaciones son de especial interés.

Una relación sobre un conjunto A es una relación de A en A. Es decir,

$$R \subseteq A \times A$$

EJEMPLO:

En el conjunto A= {1, 2,3} se define la relación $R \subseteq A^2$ / R = {(x; y) / x $\geq$ y}

Por extensión R= {(1;1), (1;2), (1;3), (2;2), (2;3), (3;3)}

Ejercicio resuelto.

Enumera los pares ordenados de la relación R de A={0,1,2,3,4} en B={0,1,2,3},donde (a,b) $\in$ R si y solo si:

1. a=b

Rta: $R=\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$

2. a+b = 4

Rta: $R=\{(1,3),(2,2),(3,1),(4,0)\}$

3. a $\geq$ b

Rta:

$$R=\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(1,0),(2,0),(2,1),(3,0),(3,1),(3,2),(4,0),(4,1),(4,2),(4,3)\}$$

4. .a $\mid$ b

Rta: $R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,3)\}$

5. .**mcd (a, b) =1**

Rta: $R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1),(4,3)\}$

6. mcm(a, b) = 2

Rta: $R=\{(1,2),(2,1),(2,2)\}$

EJEMPLO:

Para los conjuntos U = {1, 2, 3, 4, 5}, A = {1, 3, 5}, B = {2, 4}, determinar:

1. |A x B|.

|A x B| =|A| . | B| = 3.2 = 6

2. El número de relaciones de A en B coincide con el número de subconjuntos de A x B .

$$| P(A \times B) | = 2^6$$

3. El número de relaciones binarias en A coincide con el número de subconjuntos de A x A.

$$| P(A \times A) | = 2^9$$

✓ Dominio e imagen

Sea R $\subseteq$ A x B una relación, se definen:

Dominio de la relación R.

"Es el conjunto formado por todos los primeros elementos de los pares ordenados de la relación"

$$D_R = \{x \in A / \exists y \in B: (x, y) \in R\}$$

Recorrido o imagen de la relación.

"Es el conjunto formado por todos los segundos elementos de los pares ordenados de la relación"

$$I_R = \{y \in B / \exists x \in A: (x, y) \in R\}$$

Es claro que Dom R $\subseteq$ A y que Im R $\subseteq$ B

EJEMPLO:

Sea A = {rosas, margaritas, claveles, violetas} y B = {blancas, amarillos, rojas, bordo, azul} y

R = {(rosas, rojas), (margaritas, blancas), (cláveles, amarillos)}

Entonces

D_R = {rosas, margaritas, claveles} y I_R = {blancas, amarillos, rojas}

Representación de una relación

1. Matriz de adyacencia

Veremos una de las formas de representar una relación entre dos conjuntos finitos, como es su matriz booleana.

Dados dos conjuntos finitos, no vacíos,

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ *y* $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$

y una relación R cualquiera de A a B, llamaremos matriz de R a la matriz booleana siguiente:

$$M_R = (m_{ij}) = \begin{cases} 1 \text{ si } (a_i, b_j) \in R \\ 0 \text{ si } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

donde $i=1,2,3,\ldots,m$ *y* $j=1,2,3,\ldots,n$

- La matriz de una relación caracteriza a la misma, o sea, si se conoce la relación se conoce la matriz y si se conoce la matriz sabremos de qué relación trata.
- La matriz M_R tiene m filas y n columnas.
- Los elementos de una matriz booleana son 0 y 1.
- Si m = n la matriz M_R se dice matriz cuadrada
- De la definición dada se deduce que la matriz de una relación en el mismo conjunto

  $R \subseteq A \times A$ es cuadrada.

- Si $m \neq n$ entonces la matriz M_R se dice rectangular.

- Cualquier elemento a_{ij} con i = j, es decir un elemento a_{ii}, está en la diagonal principal.
- Si aij = 0 si i ≠ j la matriz A $\in$ {0, 1}^{mxn} se dice diagonal.

EJEMPLO:

1. Si A = {1, 2, 3} y B ={1, 4, 6, 9}

- Escribir por extensión R: A $\rightarrow$ B tal que a R b $\Leftrightarrow$ a | b

R= {(1;1), (1;4), (1;6), (1;9), (2;4), (2;6), (3;6), (3;9)}

- Hallar la matriz de R

A \ B	1	4	6	9
1	1	1	1	1
2	0	1	1	0
3	0	0	1	1

$$\rightarrow M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- El dominio y la imagen de R

D_R = {1, 2,3} y I_R = {1, 4, 6,9}

2. Si A = {1, 2, 3}

- Escribir por extensión R: A $\rightarrow$ A tal que a R b $\Leftrightarrow$ a | b

R= {(1;1), (1;2), (1;3), (2;2), (3;3)}

- Hallar la matriz de R

A \ A	1	2	3
1	1	1	1
2	0	1	0
3	0	0	1

$$\rightarrow M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- El dominio y la imagen de R

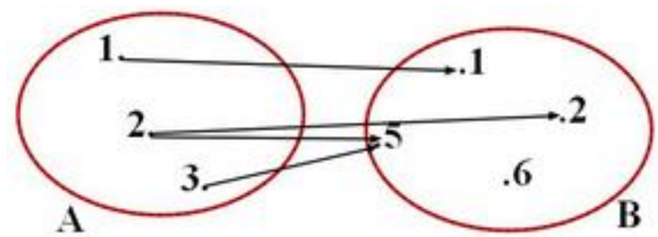
D_R = {1, 2,3} y I_R = {1, 2, 3}

2. Representación con diagrama sagital

R: A $\rightarrow$ B

A= {1,2,3} B={1,2,5,6}

R= {(1;1), (2;2), (2;5), (3;5)}



R

Existe otra forma de representar una relación cuando es de un conjunto en si mismo, es decir, cuando R $\subseteq$ A^2 :

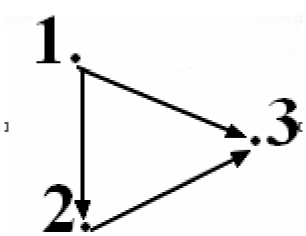
3. Grafo Dirigido o dígrafo de una Relación

Existe otra forma de representar una relación cuando es de un conjunto en si mismo, es decir, cuando R $\subseteq$ A^2 :

R: A $\rightarrow$ A

A= {1,2,3}

R= {(1;2), (1;3), (2;3)}



R

Los dígrafos nos ofrecen una forma bastante conveniente de visualizar cuestiones relativas a una relación binaria definida en el mismo conjunto.

Por esta razón desarrollaremos algunos conceptos de dígrafos paralelamente a nuestro tratamiento de las relaciones binarias.

Representación de una relación mediante un dígrafo

Cuando dos elementos x e y de A estén relacionados, es decir, x R y, trazaremos un arco dirigido desde x hasta y.

Definiremos a **x** como vértice inicial y a **y** como vértice final de la arista **(x, y).**

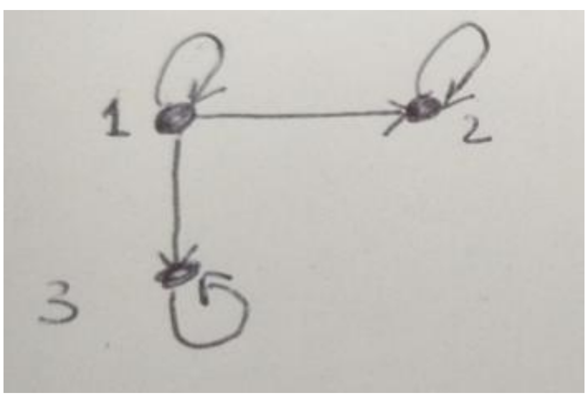
Una arista que una un punto consigo mismo la llamaremos ***bucle***.

Un vértice que no sea inicial ni final de ninguna arista es un ***vértice aislado***.

EJEMPLO:

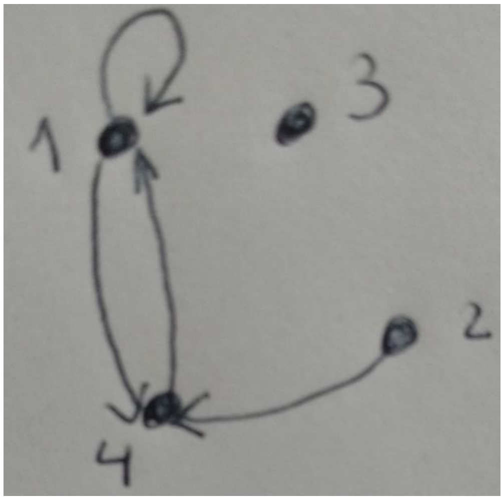
Si A = $\{1, 2, 3\}$ y R: A $\rightarrow$ A tal que a R b $\Leftrightarrow$ a $|$ b

Su dígrafo es



1. Si A={1,2,3,4} y R: A $\rightarrow$ A tal que R = {(1;1),(2;4),(4;1),(1;4)}

   Su dígrafo es



Relación inversa

Dada una relación cualquiera siempre es posible definir su relación inversa. Si R es la relación "x es el padre de y"; su relación inversa es "y es el hijo de x". Por ejemplo, si Juan es el padre de Sergio entonces Sergio es el hijo de Juan.

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, llamaremos relación inversa de una relación R de A en B, y la denotaremos por R^{-1}, al subconjunto de pares ordenados (b; a) del producto cartesiano BxA, tales que (a; b) $\in$ R.

En símbolos:

$$R^{-1}: B \rightarrow A \;/\; R^{-1} = \{(b;a) \;/\; (a;b) \in R\}$$

EJEMPLO:

1. Si A= {1, 2, 3,4} y R: A $\rightarrow$ A tal que R = {(1; 1), (2; 4), (4; 1), (1; 4)}

R^{-1} = {(1; 1), (4; 2), (1; 4), (4; 1)}

$D_{R^{-1}} = \{1,4\}$ $I_{R^{-1}} = \{1, 2,4\}$

Matricialmente

La matriz de la relación inversa R^{-1} se puede obtener a partir de la matriz de la relación R intercambiando filas por columnas. Hay que hallar la matriz traspuesta de la matriz de R.

$$\mathbf{M_R^{-1} = (M_R)^T}$$

EJEMPLO:

Si A= {1, 2, 3,4} y R: A → A tal que R = {(1; 1), (2; 4), (4; 1), (1; 4)}

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow (M_R)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La fila 1 pasa a ser la columna 1; la fila 2 pasa a ser la columna 2; la fila 3 pasa a ser la columna 3 y la fila 4 pasa a ser la columna 4.

Propiedades

- El dominio de la relación inversa R^{-1} es igual a la imagen de la relación R.

$D_R^{-1} = I_R$

- La imagen de la relación inversa R^{-1} es igual al dominio de la relación R.

$I_R^{-1} = D_R$

Relación complemento o complementaria.

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, llamaremos relación complemento de una relación R de A en B, y la denotaremos por $\overline{R}$, al subconjunto de pares ordenados (a, b) del producto cartesiano AxB, tales que (a, b) $\notin$ R.

En símbolos:

$$\overline{R} : A \rightarrow B \,/\, \overline{R} = \{(a; b) / (a; b) \notin R\} = (A \times B) - R$$

<u>*EJEMPLO*</u>:

Si A= {1, 2, 3,4} y R: A $\rightarrow$ A tal que R = {(1,1), (2,4), (4,1), (1,4)}

$\overline{R}$ está formada por los pares ordenados de AxA que no son elementos de R.

$\overline{R}$ = {(1;2), (1;3), (2;1), (2;2), (2;3), (3;1), (3;2), (3;3), (3;4), (4;2), (4;3), (4;4)}

<u>*Matricialmente*</u>

La matriz de la relación complemento se puede obtener a partir de la matriz de la relación R intercambiando unos por ceros. Hay que hallar el complemento de la matriz de la relación.

$$\mathbf{M}_{\overline{R}} = \overline{\mathbf{M}_{\mathbf{R}}}$$

- *Ejercicio resuelto*

Sea A = {a, b, c} y B = {1, 2, 3, 4} y las relaciones R y S definida de A en B:

R = {(a, 1), (a, 2), (a, 4), (b, 4), (c, 1), (c, 2), (c, 3)}

S = {(a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 4), (c, 1), (c, 2)},

Hallar: $\overline{R}$, R^{-1} , $\overline{S}$, S^{-1} , $S \cap R$, $(R \cup S)^{-1}$, R-S, S-R

Rta:

$$\overline{R}=\{(a,3);(b,1);(b,2);(b,3);(c,4)\}$$
$$R^{-1}=\{(1,a);(2,a);(4,a);(4,b);(1,c);(2,c);(3,c)\}$$
$$\overline{S}=\{(a,1);(a,4);(b,1);(b,2);(b,3);(c,3);(c,4)\}$$
$$S^{-1}=\{(2,a);(3,a);(1,b);(4,b);(1,c);(2,c)\}$$
$$S\cap R=\{(a,2);(b,4);(c,1);(c,2)\}$$
$$(R\cup S)^{-1}=\{(1,a);(2,a);(3,a);(4,a);(1,b);(4,b);(1,c);(2,c);(3,c)\}$$
$$R-S=\{(a,1);(a,4);(c,3)\}$$
$$S-R=\{(a,3);(b,1)$$

Operaciones con relaciones

Como las relaciones de A en B son conjuntos se pueden realizar con ellas las mismas operaciones entre conjuntos.

Todas las operaciones las podemos hacer por extensión o matricialmente.

1. UNIÓN DE RELACIONES.

Sea A ={1,2,3}; B = {a,b} y las relaciones

R_1={(1;a),(1;b),(2;a),(3;a)} y

R_2 = {(1; b), (2; a), (3; a), (3; b)} definidas de A en B.

1.1. Por extensión: consiste en nombrar todos los pares de R_1 y de R_2

$R_1 \cup R_2 = \{(1; a), (1; b), (2; a), (3; a), (3; b)\}$

En símbolos:

$R_1 \cup R_2 = \{(a; b) \in A \times B \,/\, (a; b) \in R_1$ *ó* $(a; b) \in R_2$ *ó a ambas*$\}$

1.2. Matricialmente: La suma booleana entre M_{R1} y M_{R2} se indica $M_{R1} \vee M_{R2}$ y se lee "**operación o**"

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2}$$

Cuya tabla es

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Para el ejemplo

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Propiedades

Sea A; B y C matrices booleanas se cumple:

- Idempotencia : $A \vee A = A$
- Conmutativa: $A \vee B = B \vee A$
- Asociativa: $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
- Elemento neutro: la matriz nula N= ((0)), solamente formada por ceros, es el neutro para la operación "o"

2. INTERSECCIÓN DE RELACIONES.

Sea A = {1,2,3}; B = {a, b} y las relaciones R_1= {(1; a), (1; b), (2; a), (3; a)} y R_2 = {(1; b), (2; a), (3; a), (3; b)} definidas de A en B.

2.1. Por extensión: consiste en nombrar los pares comunes a R_1 y a R_2

$$R_1 \cap R_2 = \{(1;\, b),\ (3;\, a),\ (2;\, a)\}$$

En símbolos:

$$R_1 \cap R_2 = \{(a;\, b) \in A \times B \,/\, (a;\, b) \in R_1 \ \ y \ \ (a;\, b) \in R_2\}$$

2.2. Matricialmente: Se indica $M_{R1} \wedge M_{R2}$ y se lee "**operación y**"

$$M_{R1 \cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2}$$

Cuya tabla es

∧	0	1
0	0	0
1	0	1

Para el ejemplo

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Propiedades

Sea A; B y C matrices booleanas se cumple:

- Idempotencia : $A \wedge A = A$
- Conmutativa: $A \wedge B = B \wedge A$
- Asociativa: $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$
- Elemento neutro: la matriz H= ((1)),solamente formada por unos, es el neutro para la operación "y"

3. DIFERENCIA

Sea A = {1,2,3}; B = {a, b} y las relaciones R_1= {(1; a), (1; b), (2; a), (3; a)} y R_2 = {(1; b), (2; a), (3; a), (3; b)} definidas de A en B.

2.1. Por extensión: consiste en sacar de R_1 los pares que tiene en común con R_2

$$R_1 - R_2 = \{(1; a)\}$$

En símbolos: $R_1 - R_2 = \{(a;b) \in A \times B \ / (a;b) \in \mathrm{R}_1 \text{ y } (\mathrm{a;b}) \notin R_2\} = R_1 \cap \overline{R_2}$

2.2. Matricialmente

$$\mathrm{M}_{\mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2} = \mathrm{M}_{\mathrm{R}_1} \wedge \overline{\mathrm{M}_{\mathrm{R}_2}}$$

Para el ejemplo

$$\mathrm{M}_{\mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2} = \mathrm{M}_{\mathrm{R}_1} \wedge \overline{\mathrm{M}_{\mathrm{R}_2}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Propiedades

1. "La inversa de la intersección de relaciones es igual a la intersección de sus inversas"

$$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$$

2. "La inversa de la unión de relaciones es igual a la intersección de sus inversas"

$$(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$$

3." El complemento de la intersección de relaciones es igual a la unión de sus complementos"

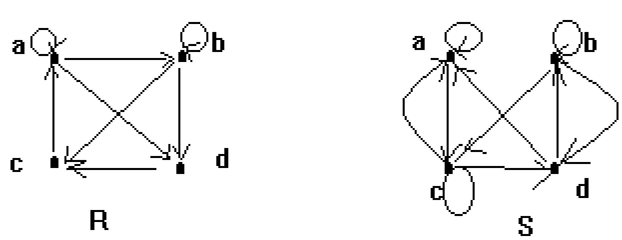
$$\overline{R \cap S} = \overline{R} \cup \overline{S}$$

4." El complemento de la unión de relaciones es igual a la intersección de sus complementos"

$$\overline{R \cup S} = \overline{R} \cap \overline{S}$$

- *Ejercicio resuelto*

Calcular $R \cap S$, $R \cup S$, R^{-1}, $\overline{R}$, S^{-1}, $\overline{S}$ para R y S definidas por los siguientes esquemas:



Rta:

$$R=\{(a,a);(b,b);(a,b);(a,d);(b,d);(b,c);(c,a);(d,a)\}$$
$$S=\{(a,a);(b,b);(b,c);(b,d);(c,c);(a,c);(c,a);(c,d);(d,a);(d,b)\}$$
$$R\cap S=\{(a,a);(b,b);(b,d);(b,c);(c,a);(d,a)\}$$
$$R\cup S=\{(a,a);(b,b);(a,b);(a,d);(b,d);(b,c);(c,a);(d,a);(c,c);(a,c);(c,d);(d,b)\}$$
$$R^{-1}=\{(a,a);(b,b);(b,a);(d,a);(d,b);(c,b);(a,c);(a,d)\}$$
$$\overline{R}=\{(c,c);(d,d);(a,c);(b,a);(c,b);(c,d);(d,b);(d,c)\}$$

$$S^{-1}=\{(a,a);(b,b);(c,b);(d,b);(c,c);(c,a);(a,c);(d,c);(a,d);(b,d)\}$$
$$\overline{S}=\{(d,d);(b,a);(a,b);(a,d);(c,b);(d,c)\}$$

Composición de relaciones

Para entender la idea de composición de relaciones podemos empezar por un ejemplo simple.
Supongamos que tenemos el conjunto de personas y en él se definen dos relaciones La primera de ellas R que relaciona dos personas si "x es la madre de y" y la segunda relación S tal que dos personas están relacionadas si "y es el padre de z". Al hacer la composición entre R y S se obtiene otra relación que establece que dos personas están relacionadas si "x es la abuela de z".

DEFINICIÓN

Sean A, B, C conjuntos, R una relación de A en B, y S una relación de B en C. Entonces se puede definir una nueva relación, la composición de R y S, que se escribe S°R formada por los pares (a; c) donde a es un elemento de A y c es un elemento de C para los cuales existe un elemento b de B tal que el par ordenado (a; b) es elemento de la relación R y el par (b; c) es elemento de la relación S.

En símbolos: $S°R = \{(a; c) \in A\times C \,/\, \exists\, b \in B \wedge (a, b) \in R \wedge (b; c) \in S\}$.

Es decir, a está relacionado con c por S°R si se puede ir de a a c en dos etapas: primero a un vértice intermedio b por la relación R y luego de b a c por la relación S. La relación S°R se puede entender como "S a continuación de R" puesto que representa el efecto combinado de dos relaciones, primero R y después S.

Gráficamente

$$a \xrightarrow{\textbf{R}} b \xrightarrow{\textbf{S}} c$$

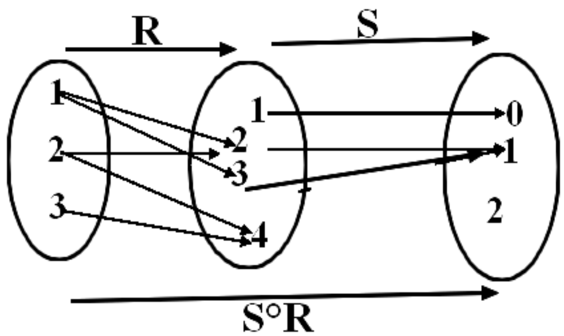
<u>*EJEMPLO*</u>:

Sean dos relaciones $R \subseteq A\times B$ y $S \subseteq B\times C$ siendo

A= {1,2,3}; B= {1,2,3,4}; C= {0,1,2};

R= {(1;2), (1;3), (2;2), (2;4), (3;4)} y S= {(1;0), (2;1), (3;1)}

Gráficamente:



S°R = {(1; 1), (2; 1)}

Analíticamente:

(S°R) (1) = S (R (1)) = S (2 ó 3) = 1 → (1; 1)

(S°R) (2) = S (R (2)) = S (2 ó 4) = 1 → (2; 1)

Matricialmente

La matriz de la composición de relaciones se obtiene realizando el producto booleano entre ellas. **Importa el orden** en el cual se colocan las matrices.

$$M_{S°R} = M_R \otimes M_S$$

El producto booleano es similar al producto usual de matrices pero reemplazando las operaciones suma y multiplicación por $\vee$ y $\wedge$ .El elemento neutro de la operación $\otimes$ es la matriz identidad I formada por unos en diagonal principal y el resto por ceros.

EJEMPLO:

Sean dos relaciones $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$ siendo

A= {1,2,3}; B= {1,2,3,4}; C= {0,1,2};

R= {(1;2), (1;3), (2;2), (2;4), (3;4)} y S= {(1;0), (2;1), (3;1)}

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{S°R} = M_R \otimes M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De donde

S°R = {(1; 1), (2; 1)}

<u>Aclaración:</u> para que se pueda realizar el producto booleano el número de columnas de la primera matriz debe coincidir con el número de filas de la segunda matriz.

> *Ejercicios resueltos*

<u>1.</u> Calcular $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \otimes B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A \vee B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A \wedge B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A \otimes B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sean A = {a, b, c}, B = {x, y, z}, C = {a, y, b}, R $\subseteq$ A x B, S $\subseteq$ B x C tal que

R = {(a, y), (b, x), (b, z)}, S = {(x, a), (y, y), (z, a), (y; b)},

hallar S $\circ$ R

$$M_{S \circ R} = M_R \otimes M_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto S $\circ$ R = {(a; y), (a; b), (b; a)}

Propiedades de la composición

- Asociativa

$$R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$$

- No cumple propiedad conmutativa

$$R_1 \circ R_2 \neq R_2 \circ R_1$$

- "La inversa de la composición de relaciones es igual a la composición de las inversas de cada relación"

$$(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$$

La composición de relaciones es especialmente interesante para relaciones en un mismo conjunto. Para **R** $\subseteq$ $\mathbf{A^2}$, se pueden definir *potencias*, de esta manera:

R^0 = I relación identidad

R^1 = R

R^2 = R $\circ$ R

R^3 = (R $\circ$ R) $\circ$ R = $R^2 \circ$ R

$R^4 = (R \circ R \circ R) \circ R = R^3 \circ R$

.

.

.

$R^{n+1} = R^n \circ R, \quad n \geq 0$

EJEMPLO:

Para el conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y la relación R_1 definida de A en A

$R_1 = \{(0; 0), (1; 3), (2; 1), (3; 2)\}$

Algunas de sus potencias son

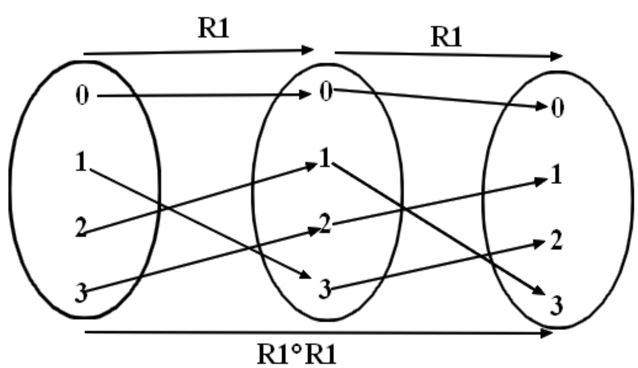
$R_1{}^0 = I = \{(0; 0), (1; 1), (2; 2), (3; 3)\}$

$R_1{}^1 = R_1 = \{(0; 0), (1; 3), (2; 1), (3; 2)\}$

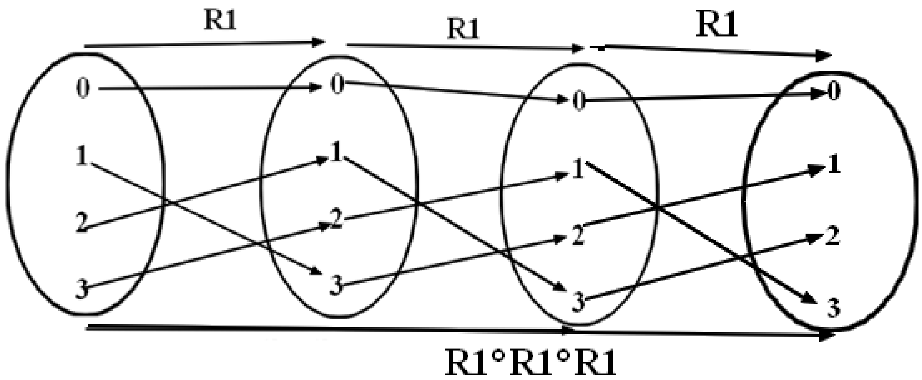
$R_1{}^2 = R_1 \circ R_1 = \{(0;0),(1;2),(2;3),(3;1)\}$

Gráficamente

$R_1{}^2 = R_1 \circ R_1 = \{(0;0),(1;2),(2;3),(3;1)\}$



$R_1{}^3 = (R_1 \circ R_1) \circ R_1 = R_1{}^2 \circ R_1 = \{(0;0),(1;1),(2;2),(3;3)\}$



Matricialmente

En este caso, es claro que, para n ≥0:

$$(M_R)^n = M_{R^n}$$

Interpretación geométrica de la composición

Los arcos o flechas entre dos elementos del dígrafo de una relación nos indican que esos elementos están relacionados.

Los pares ordenados de la relación R indican los pares de elementos conectados por un camino de longitud uno. (Hay un solo arco que los une.)

Cuando calculamos R^2 buscamos todos los pares ordenados (x; z) tales que ∃ y ∈A tal que (x; y), (y; z) ∈ R. Es decir, buscamos aquellos pares de elementos que están unidos, conectados, por dos flechas (arcos).

En R: **En R^2**:

x → z **x → y → z**

Entonces R^2 representa todos los caminos de longitud 2 existentes en la relación original R.

Análogamente, si calculamos R^3, estarán todos los pares ordenados correspondientes a caminos de longitud 3 en el dígrafo de R. Y así sucesivamente.

La unión de todas las potencias de una relación binaria representa la relación de conectividad $\mathbf{R^\infty}$.

Sea R una relación binaria. La relación de conectividad R^∞ consta de todos los pares (a; b) tales que hay un camino de longitud al menos uno de a a b

$$R^\infty = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

Matricialmente: $$M_{R^\infty} = \bigvee_{i=1}^{\infty} M_R{}^i$$

Relación de alcanzabilidad. R*

La relación de alcanzabilidad consiste en la idea que un elemento y es alcanzable desde otro elemento x si y es x o si hay alguna trayectoria de x a y.

Definición

$$a\ R^*\ b \leftrightarrow a = b \ \vee a \ R^\infty\ b$$

Es decir: $R^* = \Delta_A \cup R^\infty$ matricialmente $M_{R^*} = I \vee M_{R^\infty}$ siendo I la matriz identidad

- Ejercicio resuelto

Hallar R^∞ para la relación R= {(1;1), (2;3), (3;4)} definida en el conjunto A= {1,2,3,4}. ¿Coincide R* con R^∞?

$$R^\infty = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$$

$R = \{(1;1), (2;3), (3;4)\}$

$R^2 = R \circ R = \{(1;1),(2;4)\}$

$R^3 = R^2 \circ R = \{(1;1)\}$

$R^4 = R^3 \circ R = \{(1;1)\}$

$R^\infty = \{(1;1), (2;3), (3;4)\} \cup \{(1;1), (2;4)\} \cup \{(1;1)\} \cup \{(1;1)\} =$

$= \{(1;1), (2;3), (3;4), (2;4)\}$

$R^* = \Delta_A \cup R^\infty = \{(1;1),(2;2),(3;3),(4;4)\} \cup \{(1;1), (2;3), (3;4), (2;4)\} =$

$= \{(1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (2;3), (3;4), (2;4)\}$

Como vemos R^∞ y R^* son distintas.

Para finalizar con esta segunda clase te proponemos que ingreses al sitio de la cátedra " https://discretaunlam.net.ar " para leer y hacer las actividades por clase (AxC) correspondientes al tema "Relaciones" que te proponemos en la plataforma. No hagas la autoevaluación de "Relaciones"

Luego comienza a hacer los ejercicios de Relaciones de la guía de ejercicios para el primer parcial.

Tené en cuenta que todas las actividades que realices forman parte del seguimiento académico que hará tu tutor.


RELACIONES