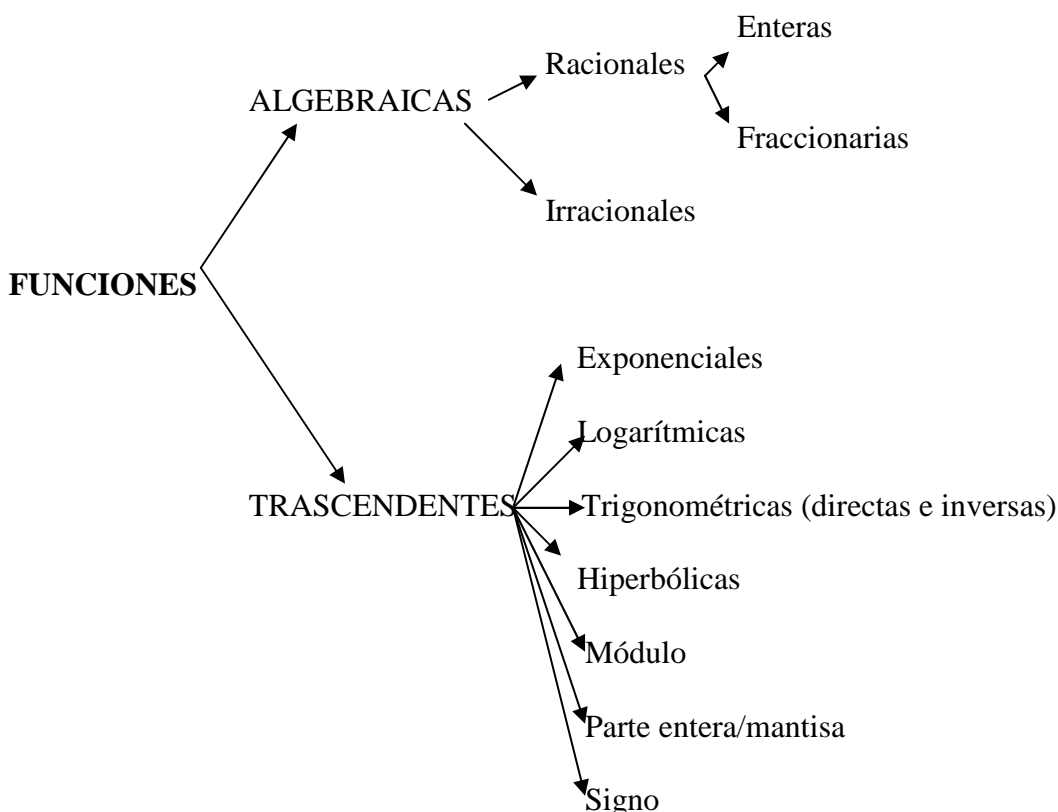


Clasificación de funciones

Clasificaremos los distintos tipos de funciones teniendo en cuenta la operación que realizamos sobre la variable independiente.

**FUNCIONES ALGEBRAICAS**

Una función es algebraica si se puede formar mediante las operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces).

FUNCIONES RACIONALES ENTERAS

A las funciones racionales enteras también las llamamos *polinomios*. Estas funciones tienen la siguiente forma:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad a_i \in R \wedge n \in N_0$$

Los a_i son los llamados *coeficientes* del polinomio, n es entero no negativo y si $a_n \neq 0$ decimos que P es un polinomio de *grado* n . Las funciones polinómicas tienen dominio el conjunto de los números reales R . Son ejemplos las siguientes:

$$P(x) = \sqrt{2}x^4 - \frac{3}{14}x^{12} + x^2 - 5.78$$

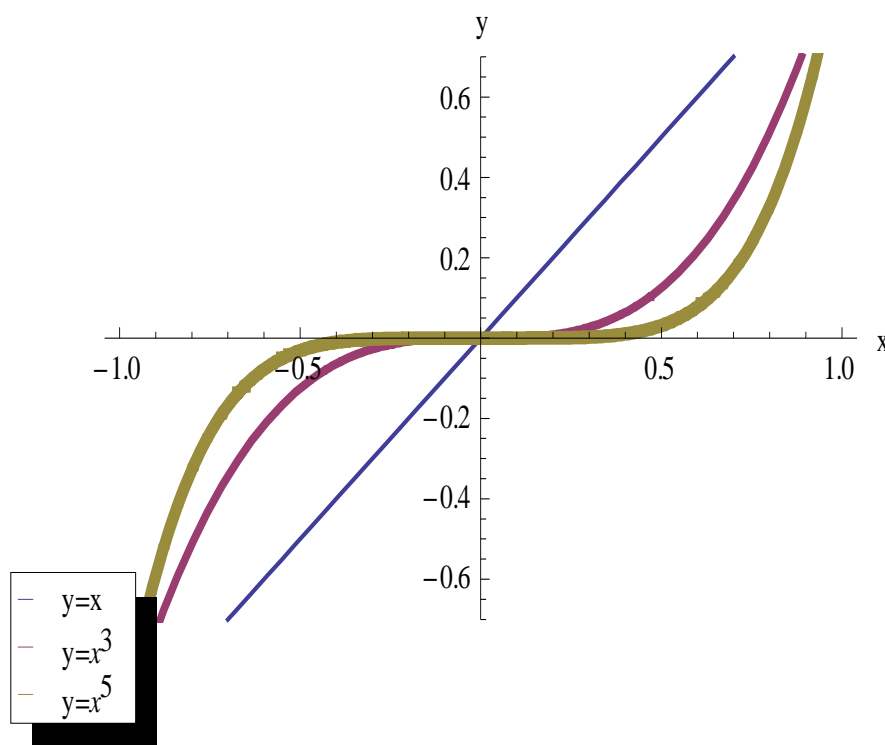
$$Q(x) = \pi + 3x^3 - \frac{\sqrt{5}}{3}x^7$$

P es un polinomio de grado 12 y Q es un polinomio de grado 7.

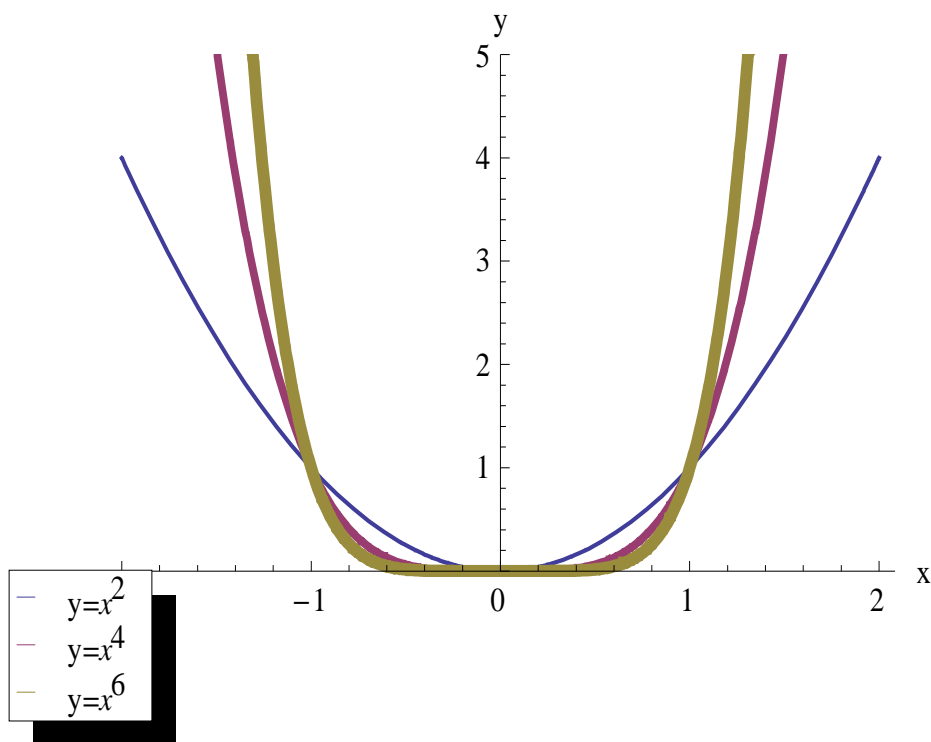
Nosotros ya trabajamos con funciones polinómicas de grado 0 (las funciones constantes), polinomios de grado 1 ($y = m x + b$) cuya gráfica es una recta y polinomios de grado 2 ($y = a x^2 + b x + c$), cuya gráfica es una parábola.

Las funciones de la forma $y = f(x) = x^n$, donde n es natural, se suelen llamar funciones *potenciales* o de *potencias* (son un caso particular de polinomios). Graficamos a continuación alguna de ellas:

n impar (en este caso $D_f = I_f = \mathbb{R}$, son funciones biyectivas e impares)



n par (en este caso $D_f = \mathbb{R}$, $I_f = [0, +\infty)$, son funciones pares)



Observación: algunos autores consideran que el exponente n puede tomar cualquier valor real, nosotros lo consideraremos natural.

FUNCIONES RACIONALES FRACCIONARIAS

Estas funciones son cociente de polinomios, es decir tienen la forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{donde } P \text{ y } Q \text{ son polinomios}$$

El dominio de toda función racional es el conjunto de todos los números reales para los cuales $Q(x) \neq 0$. En símbolos: $D_f = \{x \in \mathbb{R} / Q(x) \neq 0\}$

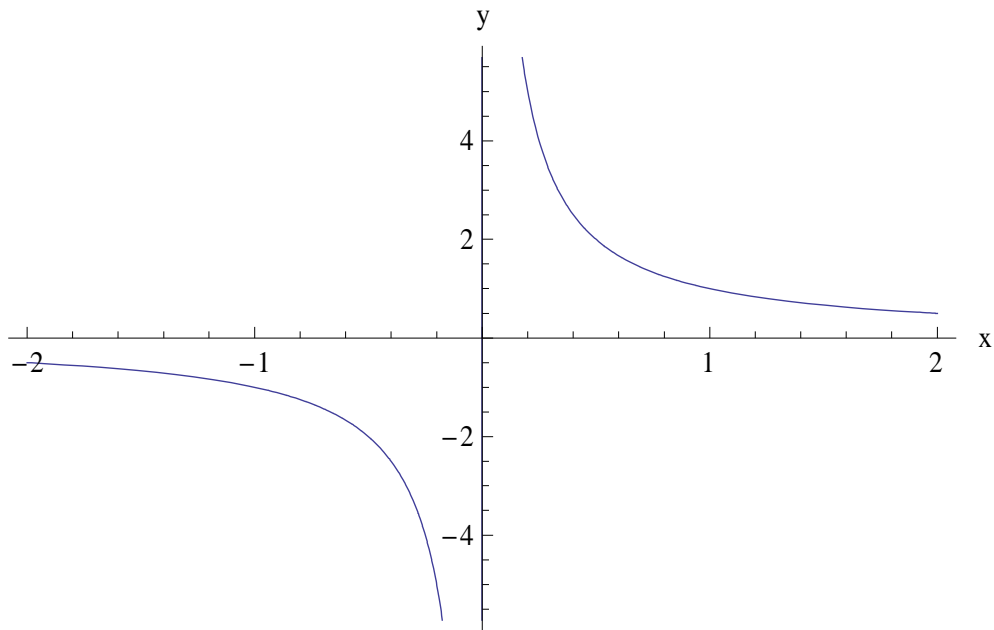
Por ejemplo: la función $f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$ es una función racional fraccionaria con dominio $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2 \wedge x \neq -2\} = \mathbb{R} - \{2, -2\}$.

La función racional fraccionaria $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ tiene dominio \mathbb{R} ya que su denominador no se anula en el conjunto de números reales.

Dentro de esta clase de funciones tenemos las *homográficas*, que tienen la forma:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad c \neq 0, \quad ad - bc \neq 0$$

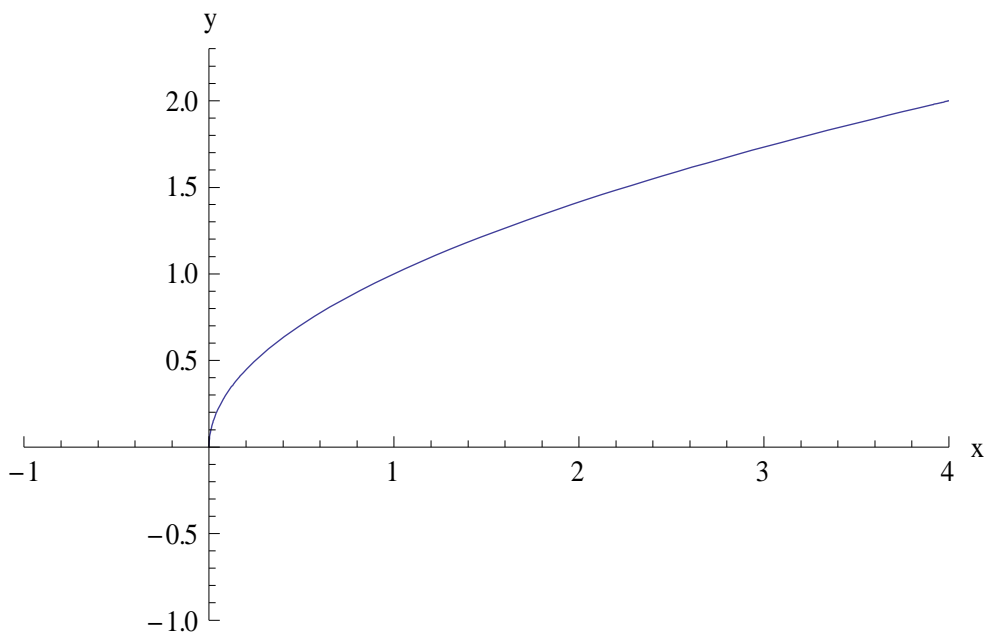
con dominio $D_f = \mathbb{R} - \{-d/c\}$, $I_f = \mathbb{R} - \{a/c\}$. Por ejemplo: $y = 1/x$ con gráfica:



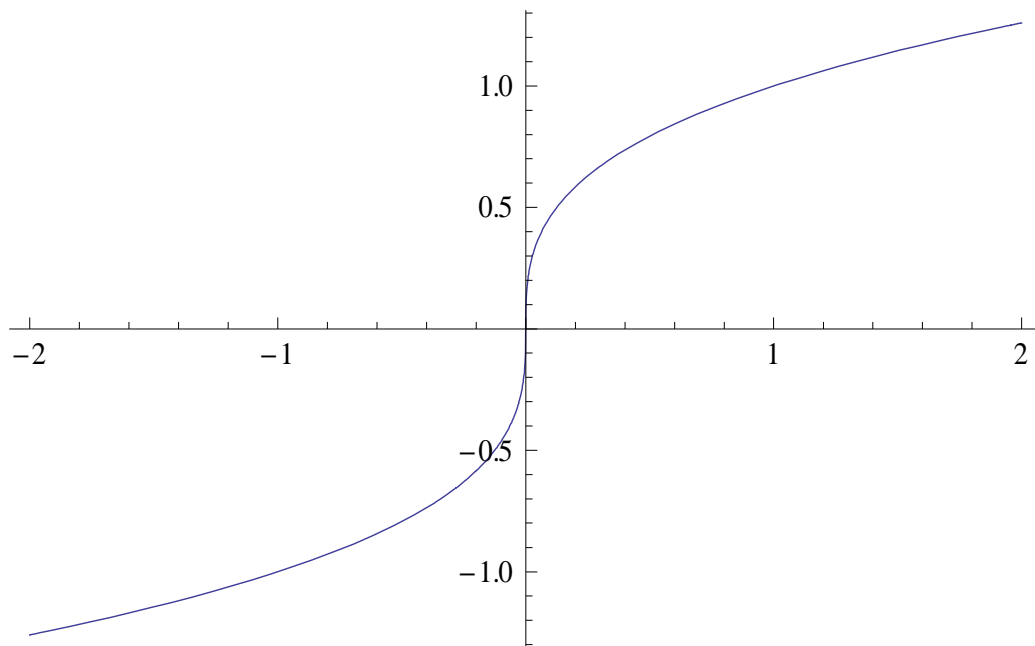
FUNCIONES ALGEBRAICAS IRRACIONALES

Son aquellas funciones en las que la variable independiente está afectada por una raíz o exponente fraccionario. Entre ellas:

$y = \sqrt{x}$ con dominio $D_f = [0, +\infty)$ y cuyo gráfico es:

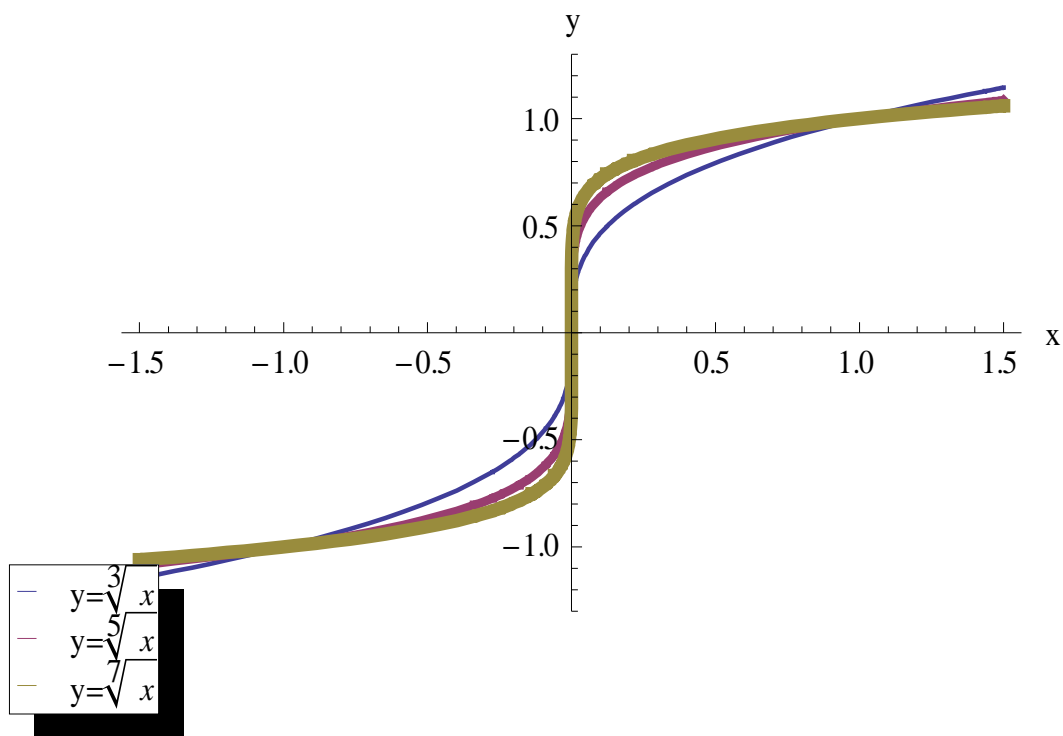


$y = \sqrt[3]{x}$ cuyo dominio es $D_f = \mathbb{R}$ y cuyo gráfico es:

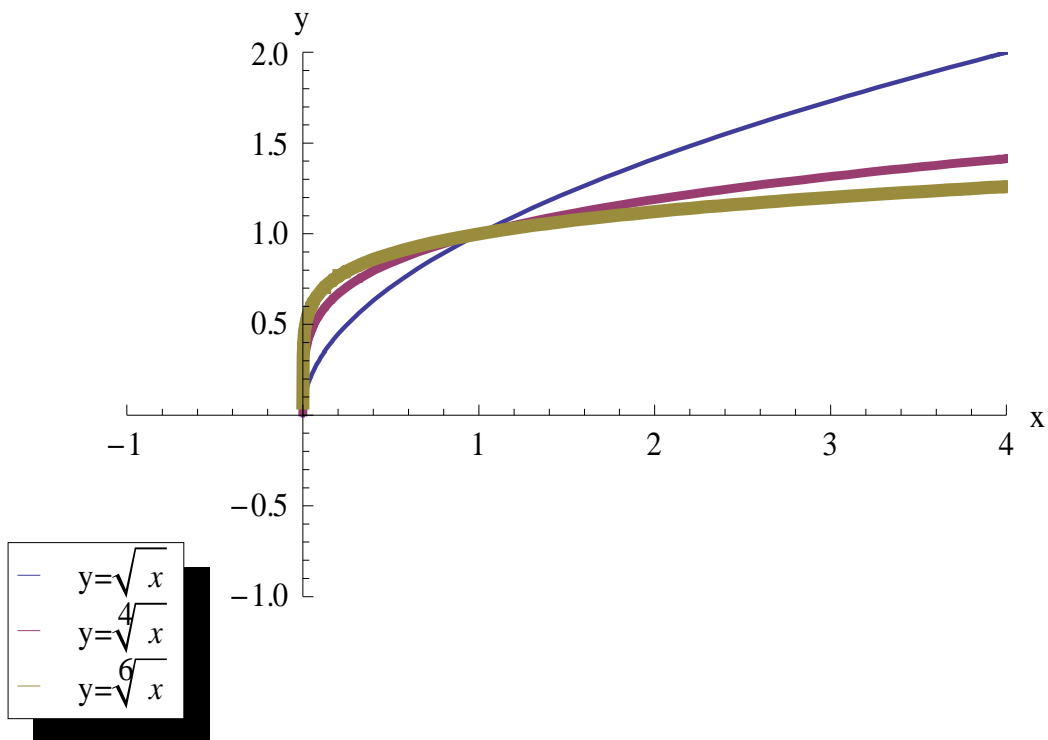


Así tenemos las funciones del tipo $y = \sqrt[n]{x}$ donde n es natural:

n impar (distinto de 1) (en este caso $D_f = I_f = \mathbb{R}$, son funciones biyectivas e impares)



n par (en este caso $D_f = I_f = [0, +\infty)$)



FUNCIONES TRASCENDENTES

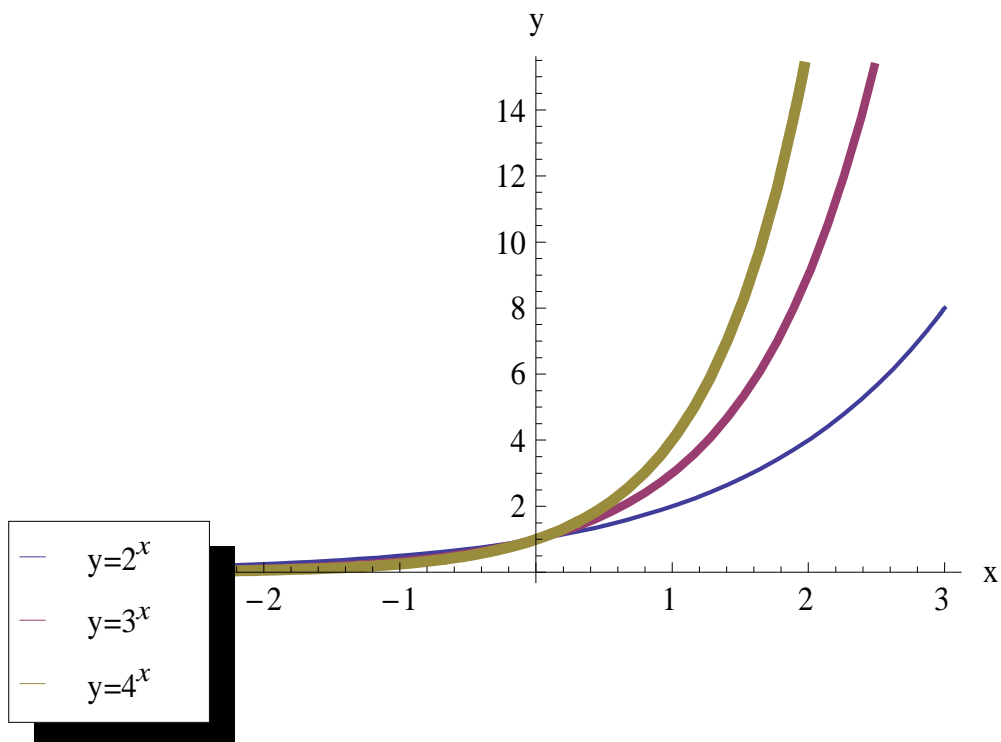
FUNCIONES EXPONENCIALES

Son aquellas funciones que tienen la forma $y = f(x) = a^x$ donde $a \in \mathbb{R}^+ \wedge a \neq 1$.
 Todas las funciones exponenciales $y = f(x) = a^x$ tienen dominio $D_f = \mathbb{R}$ e imagen $I_f = (0, +\infty)$

Estas funciones tienen distintas características dependiendo del valor de a .
 Consideramos los casos $a > 1$ y $0 < a < 1$.

$a > 1$

Graficamos las funciones $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 4^x$

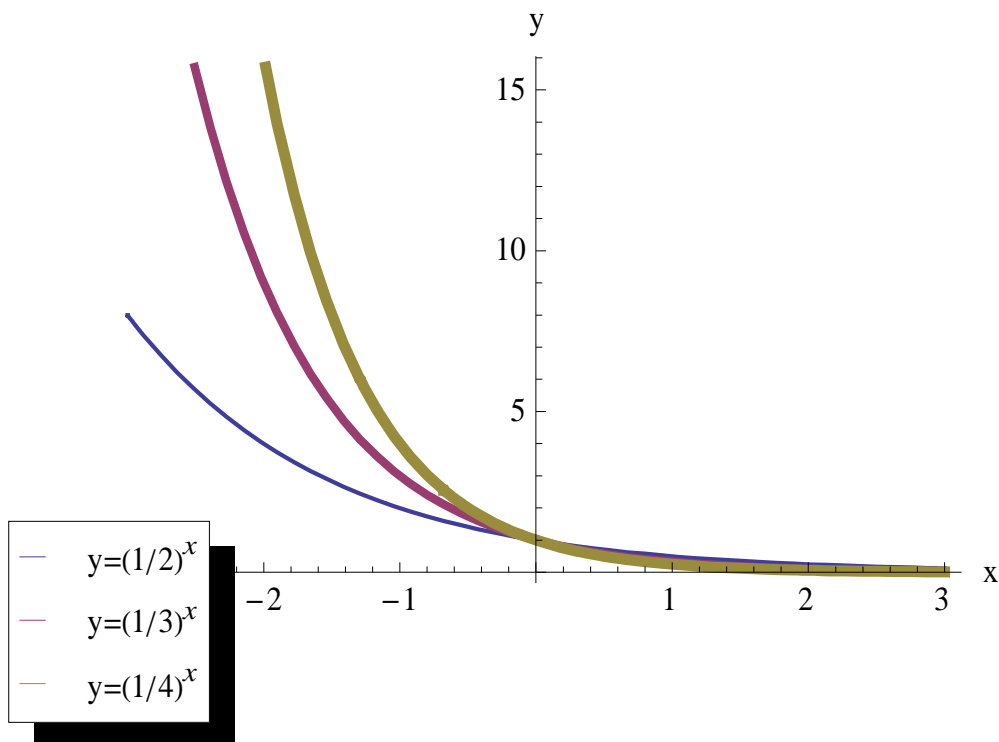


Observamos que:

- Son funciones crecientes
- Son funciones inyectivas
- Todas cortan al eje y en (0,1)
- No tienen intersección con el eje x.

$0 < a < 1$

Graficamos las funciones $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$



Observamos que:

- Son funciones decrecientes
- Son funciones inyectivas
- Todas cortan al eje y en (0,1)
- No tienen intersección con el eje x
- No tienen paridad definida.

FUNCIONES LOGARÍTMICAS

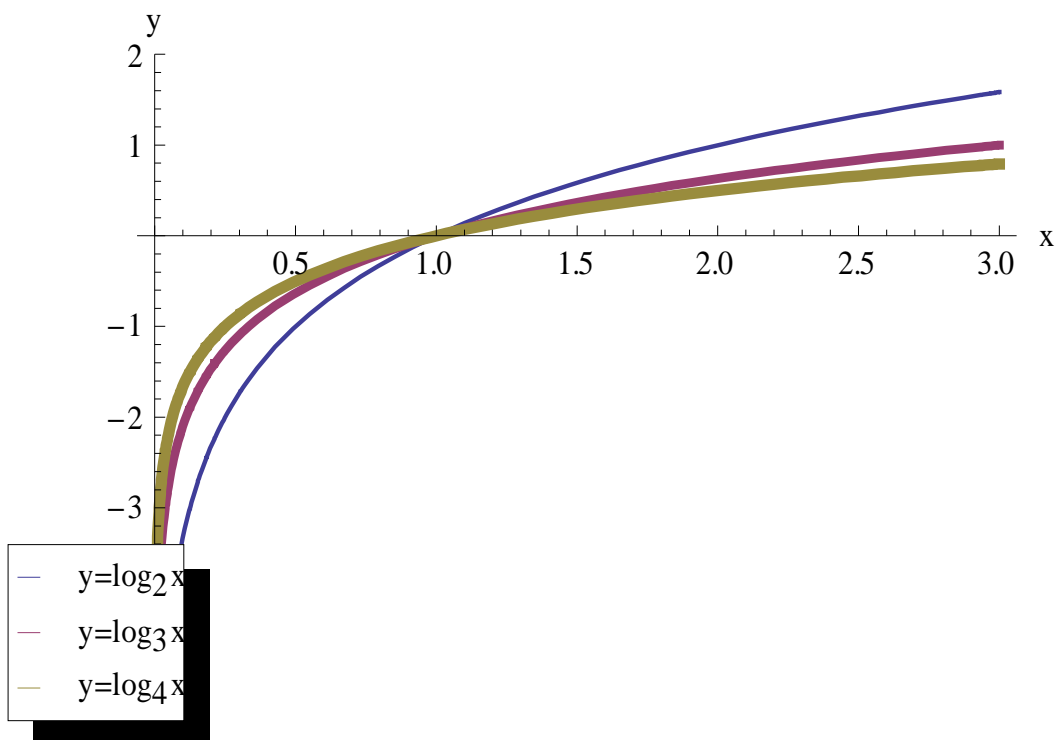
Las funciones del tipo $y = f(x) = \log_a x$ donde $a \in \mathbb{R}^+ \wedge a \neq 1$, se llaman funciones logarítmicas. Recordemos que: $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$ (son inversas de las funciones exponenciales)

Todas las funciones logarítmicas $y = f(x) = \log_a x$ tienen dominio $D_f = (0, +\infty)$ e imagen $I_f = \mathbb{R}$

Al igual que las funciones exponenciales, tienen distintas características dependiendo del valor de a . Consideramos los casos $a > 1$ y $0 < a < 1$.

$a > 1$

Graficamos las funciones $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$, $y = \log_4 x$

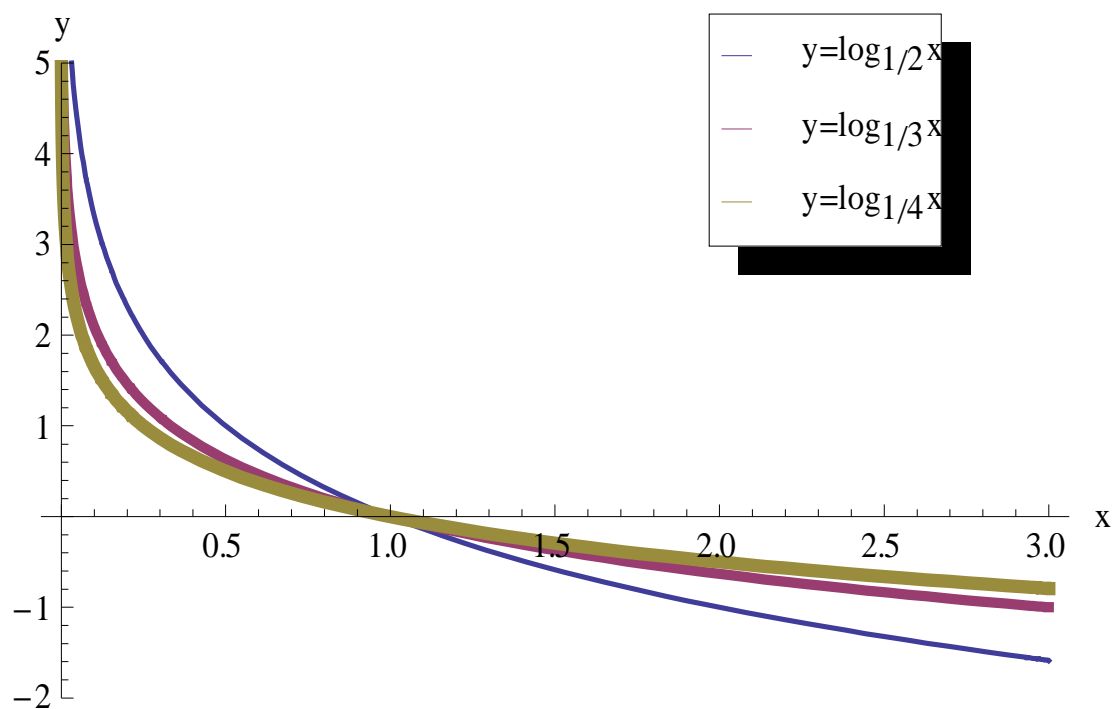


Observamos que:

- Son funciones crecientes
- Son funciones inyectivas
- Todas cortan al eje x en $(1, 0)$
- No tienen intersección con el eje y

$0 < a < 1$

Graficamos las funciones $y = \log_{1/2} x$, $y = \log_{1/3} x$, $y = \log_{1/4} x$



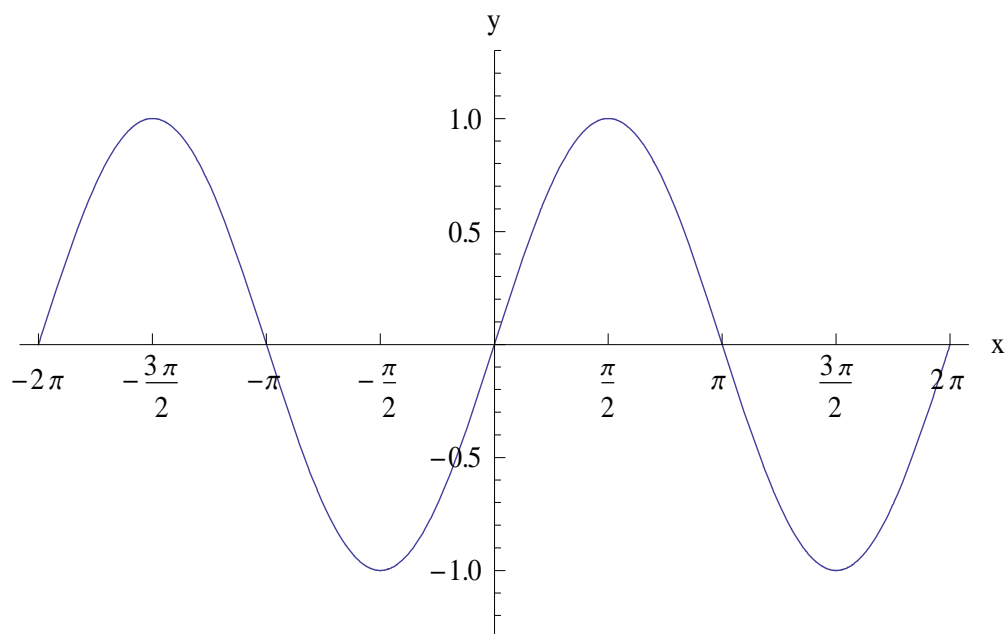
Observamos que:

- Son funciones decrecientes
- Son funciones inyectivas
- Todas cortan al eje x en (1,0)
- No tienen intersección con el eje y

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Función seno

La función $y = \text{sen}x$ tiene el siguiente gráfico:

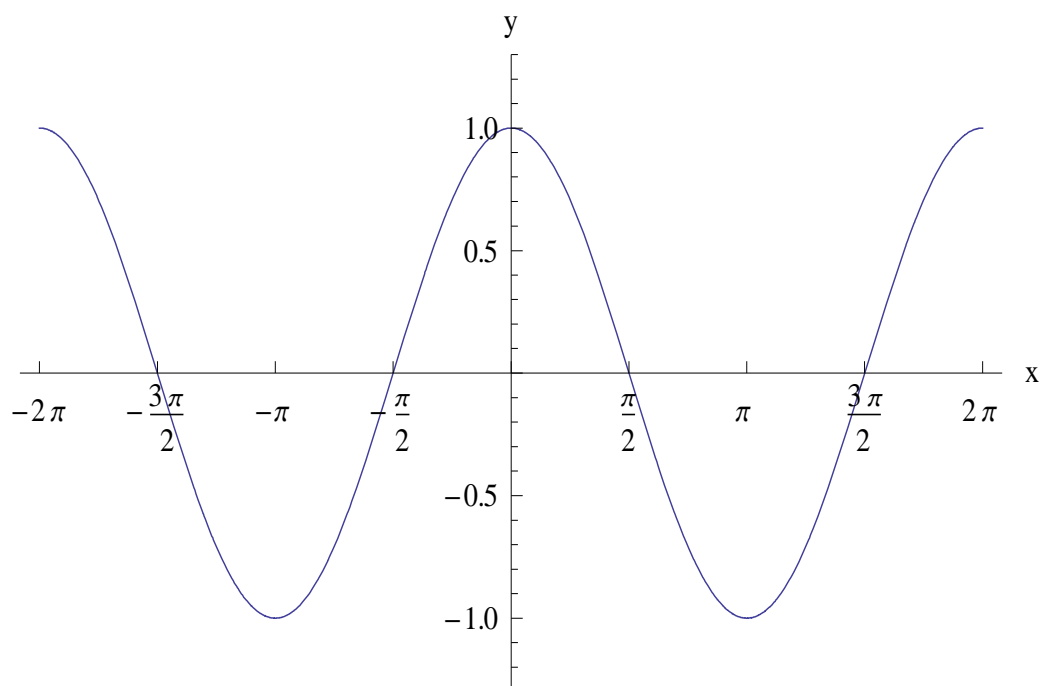


Características:

- $Dom = \mathbb{R}$, $Im = [-1, 1]$
- Es impar: $sen(-x) = -senx$
- No es inyectiva
- $Ceros = \{x \in \mathbb{R} / x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}\}$
- Periódica de período 2π . Es decir: $sen(x + 2k\pi) = senx \quad k \in \mathbb{Z}$

Función coseno

La función $y = \cos x$ tiene el siguiente gráfico:



Características:

- $Dom = \mathbb{R}$, $Im = [-1, 1]$
- Es par: $\cos(-x) = \cos x$
- No es inyectiva
- Ceros = $\{x \in \mathbb{R} / x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}\}$
- Periódica de período 2π . Es decir: $\cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad k \in \mathbb{Z}$

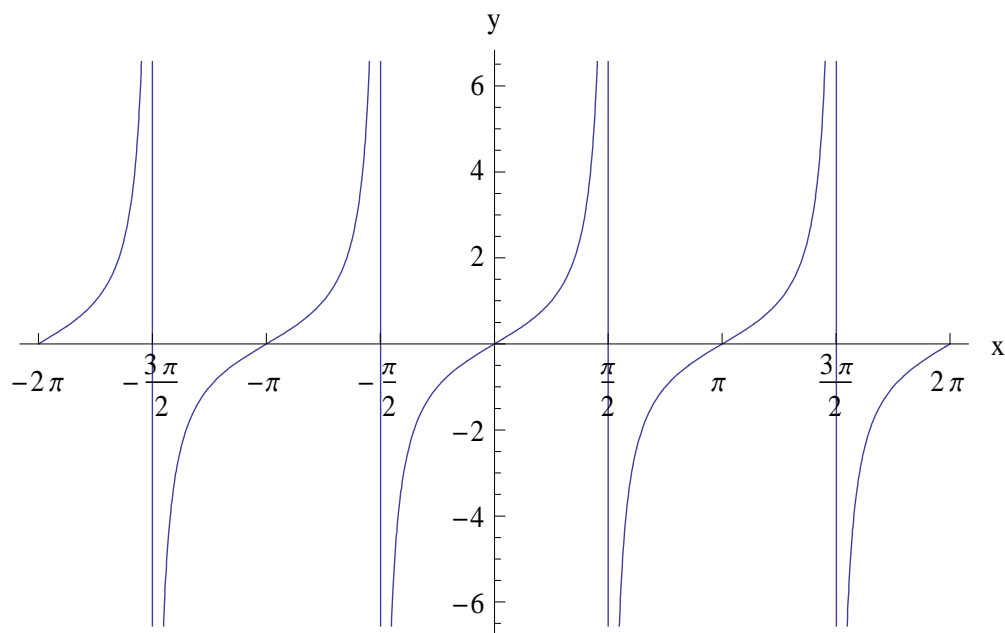
Identidades importantes para recordar

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Función tangente

La función $y = \operatorname{tg} x$ tiene el gráfico:

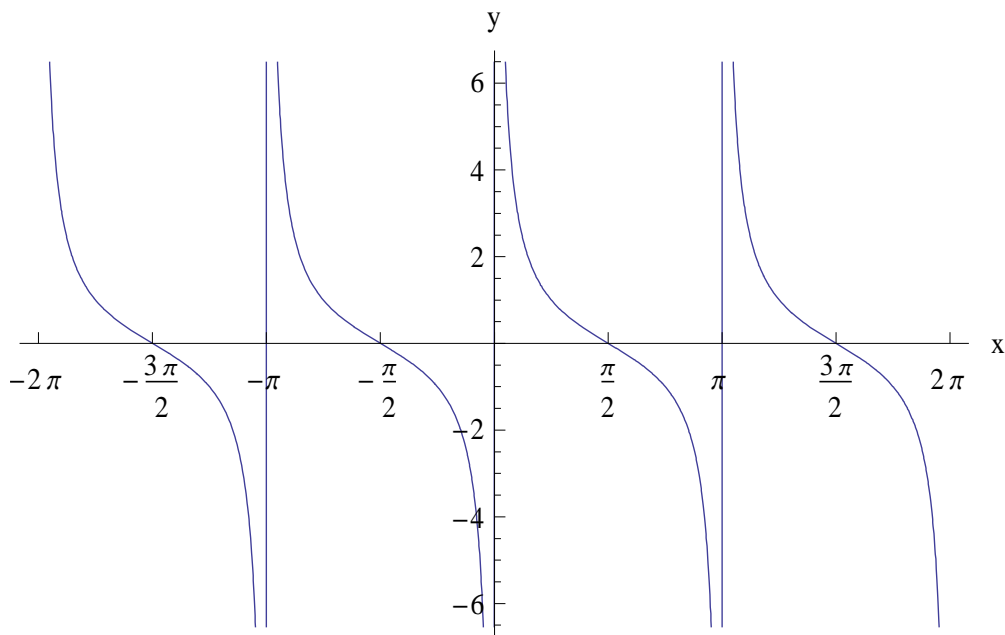


Sus características principales son:

- $Dom = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}\}$ $Im = \mathbb{R}$
- Es impar: $tg(-x) = -tgx$
- No es inyectiva
- $Ceros = \{x \in \mathbb{R} / x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}\}$
- Periódica de período π . Es decir: $tg(x+k\pi) = tgx \quad k \in \mathbb{Z}$

Función cotangente

La función $y = \cotg x$ tiene el gráfico:

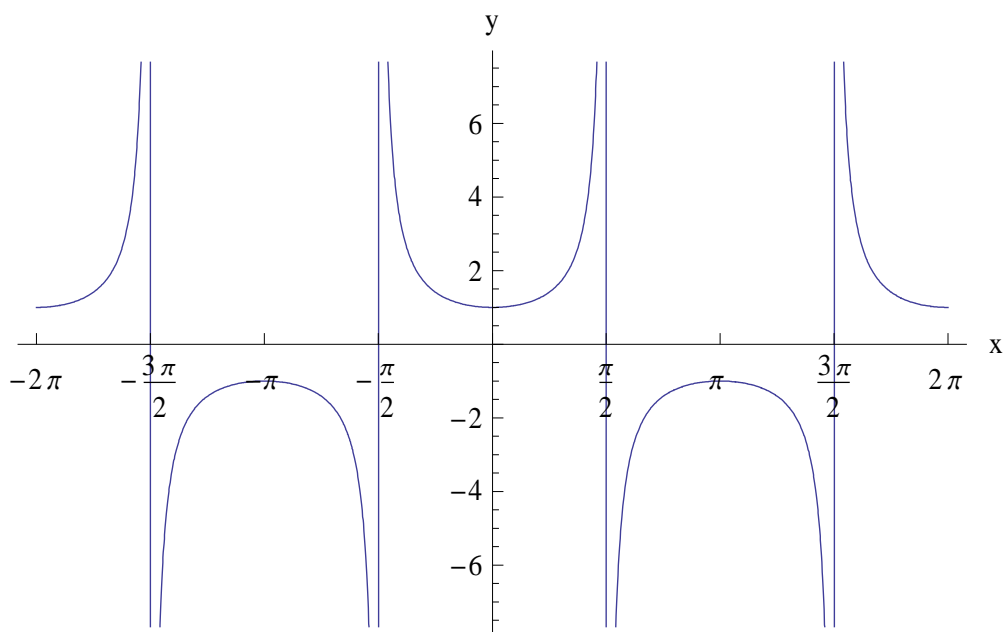


Sus características principales son:

- $Dom = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}\}$ $Im = \mathbb{R}$
- Es impar: $\cot g(-x) = -\cot gx$
- No es inyectiva
- $Ceros = \{x \in \mathbb{R} / x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}\}$
- Periódica de período π . Es decir: $\cot g(x+k\pi) = \cot gx \quad k \in \mathbb{Z}$

Función secante

La función $y = \sec x$ tiene el gráfico:

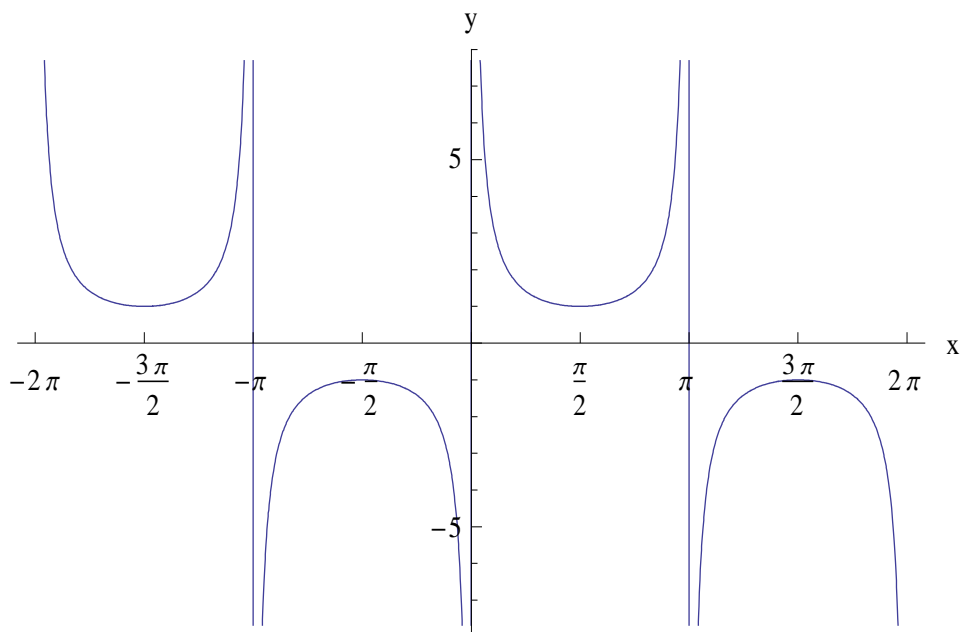


Sus características principales son:

- $Dom = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}\}$ $Im = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
- Es par, es decir: $\sec(-x) = \sec x$
- No es inyectiva
- No tiene ceros
- Periódica de período 2π : $\sec(x + 2k\pi) = \sec x \quad k \in \mathbb{Z}$

Función cosecante

La función $y = \operatorname{cosec} x$ tiene el gráfico:



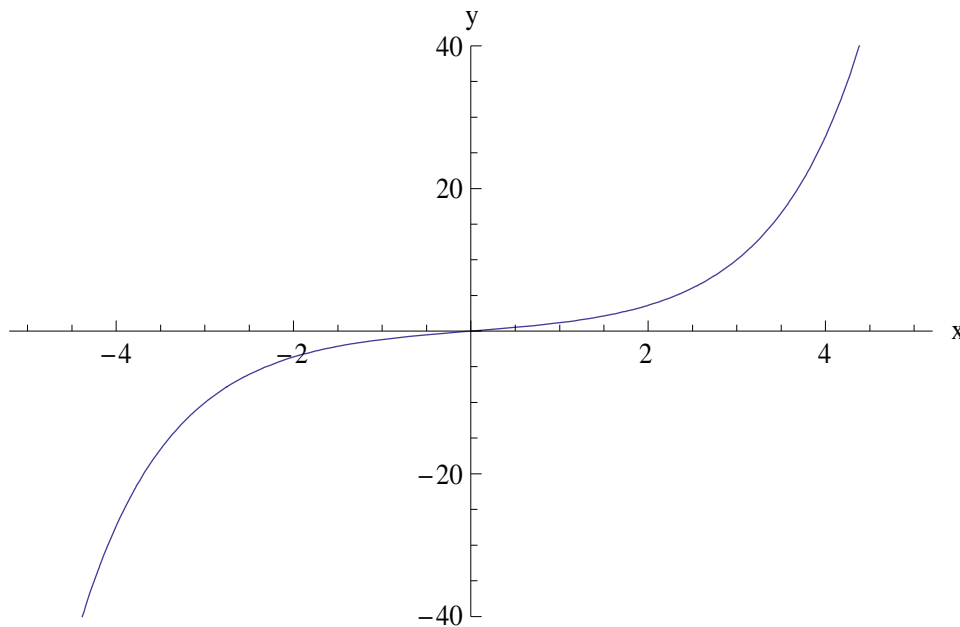
Sus características principales son:

- $Dom = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}\}$ $Im = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
- Es impar, es decir: $\cos ec(-x) = -\cos ecx$
- No es inyectiva
- No tiene ceros
- Periódica de período 2π . Es decir: $\cos ec(x + 2k\pi) = \cos ecx \quad k \in \mathbb{Z}$

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Función seno hiperbólico

La función seno hiperbólico se define: $y = Shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ Su gráfico es:

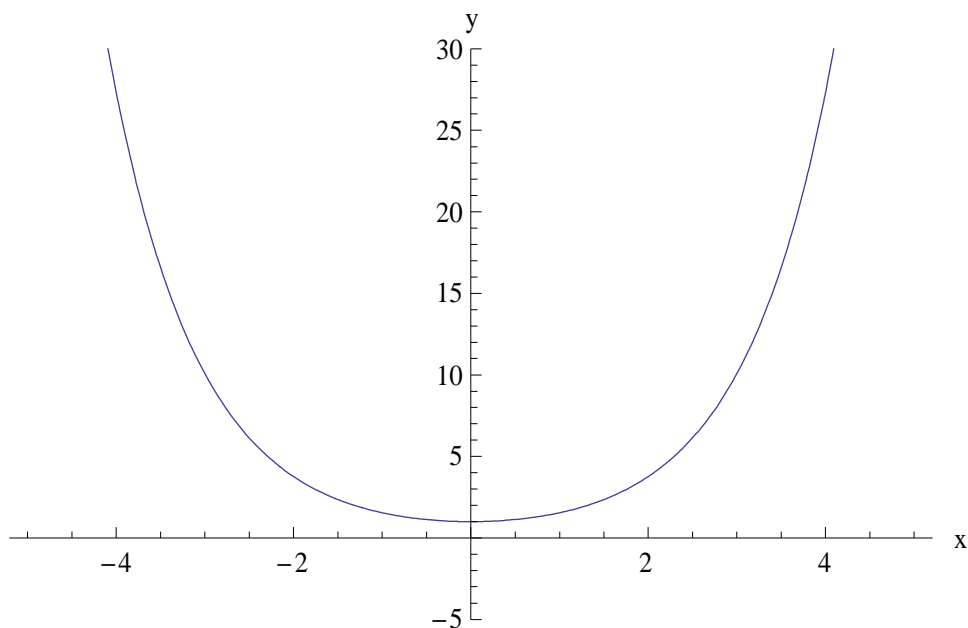


Sus características principales:

- $Dom = \mathbb{R}$ $Im = \mathbb{R}$
- Es biyectiva e impar
- $Cero = \{0\}$

Función coseno hiperbólico

La función seno hiperbólico se define: $y = Chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ Su gráfico es:



Sus características principales:

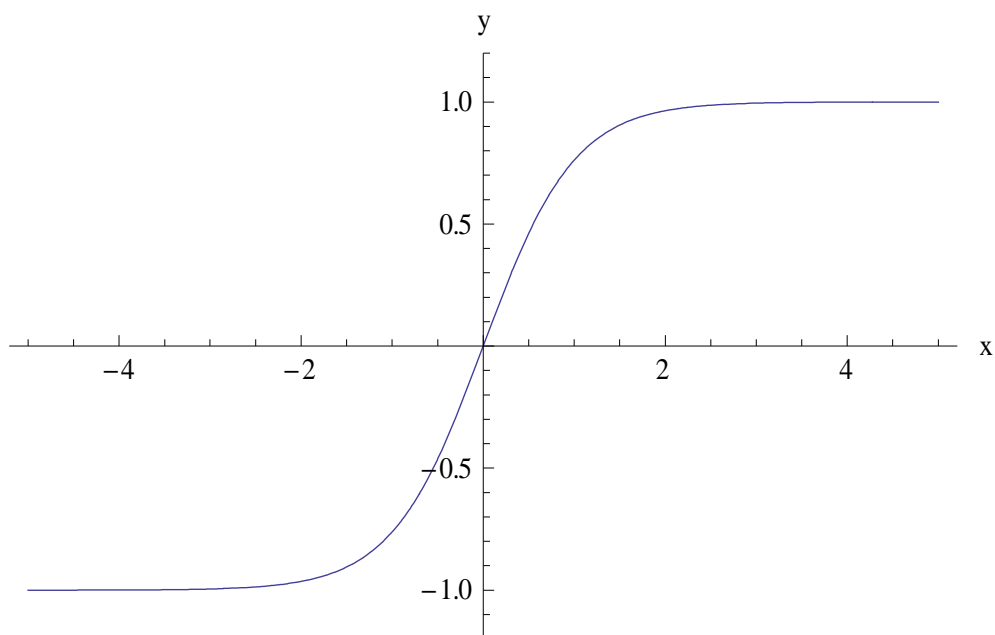
- $Dom = \mathbb{R}$ $Im = [0, +\infty)$
- No es inyectiva y es par
- No tiene ceros

Identidades importantes para recordar

$$Thx = \frac{Shx}{Chx} \quad Cothx = \frac{Chx}{Shx} \quad Ch^2x - Sh^2x = 1$$

Función tangente hiperbólica

La función tangente hiperbólica se define: $y = Thx = \frac{Shx}{Chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ Su gráfico es:



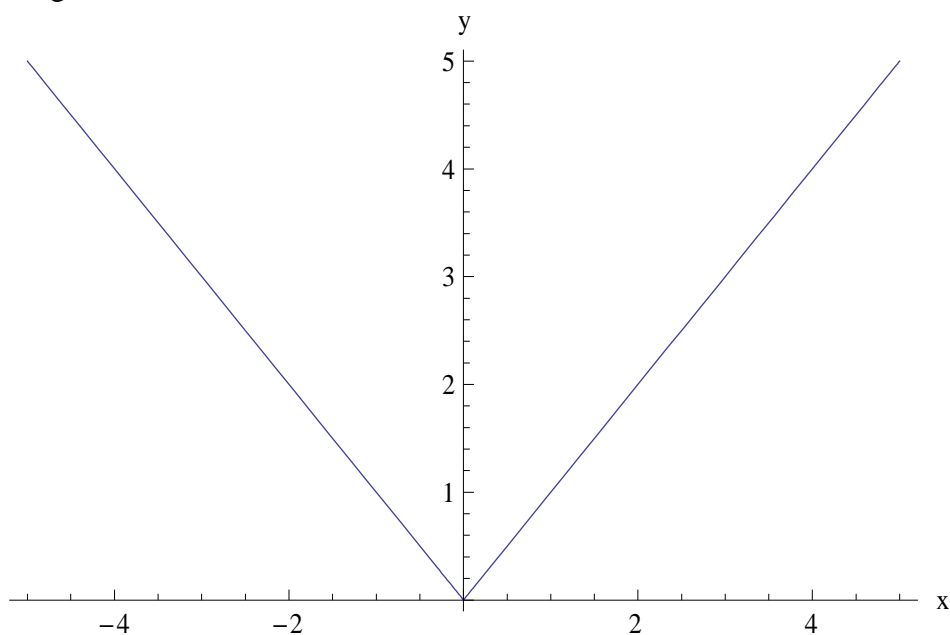
Sus características principales:

- $Dom = \mathbb{R}$ $Im = (-1,1)$
- Es biyectiva e impar
- $Cero = \{0\}$

FUNCIÓN MÓDULO

La función módulo o valor absoluto se define: $y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

Su gráfico es:



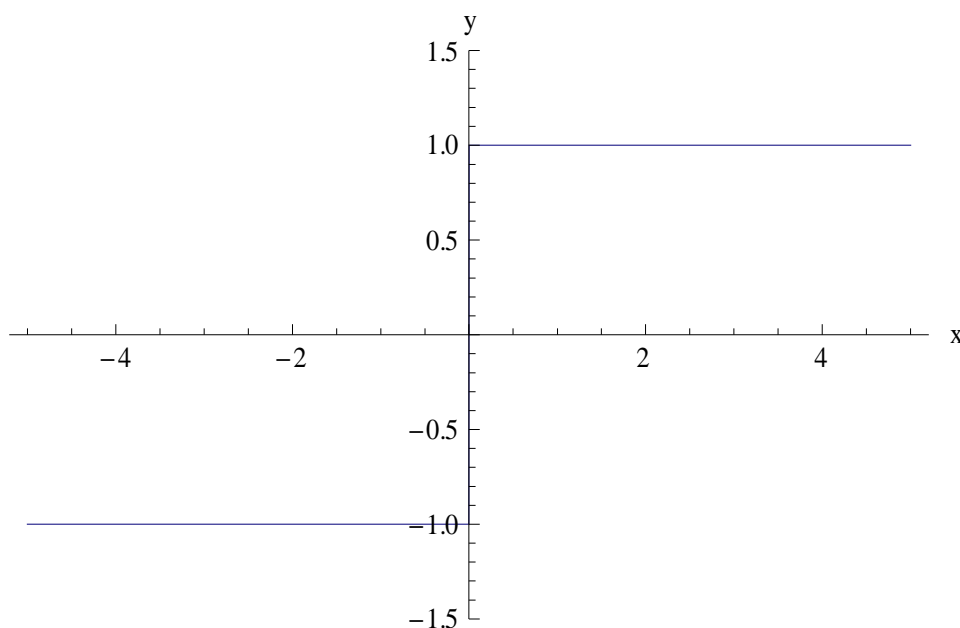
Y sus principales características:

- $Dom = \mathbb{R}$ $Im = [0, +\infty)$
- Es par
- No es inyectiva

FUNCIÓN SIGNO

La función signo se define: $y = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

Su gráfico es:



Sus principales características:

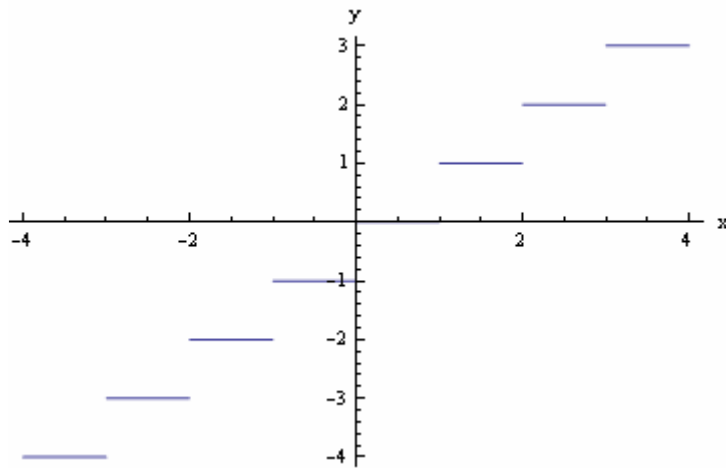
- $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$ $Im = \{-1, 1\}$
- No es inyectiva
- Es impar

FUNCIÓN PARTE ENTERA

Definimos como parte entera de un número real x al mayor número entero que es menor o igual que él. Lo denotamos con $[x]$ Así se cumple la siguiente desigualdad:
 $[x] \leq x < [x] + 1$

$$\begin{aligned}
[3,897] &= 3 & \text{porque} & & 3 \leq 3,897 < 4 \\
[145,7] &= 145 & \text{porque} & & 145 \leq 145,7 < 146 \\
\text{Por ejemplo: } [-9,2] &= -10 & \text{porque} & & -10 \leq -9,2 < -9 \\
[-4] &= -4 & \text{porque} & & -4 \leq -4 < -3 \\
[-35,69] &= -36 & \text{porque} & & -36 \leq -35,69 < -35
\end{aligned}$$

La función parte entera es $f(x) = [x]$ y su gráfico:



Características:

- $Dom = R$ $Im = Z$
- No es inyectiva
- No tiene paridad definida

FUNCIÓN MANTISA

La mantisa de un número real x , que se indica $\text{mant}(x)$, se define como la diferencia de dicho número y su parte entera, es decir $\text{mant}(x) = x - [x]$. En los ejemplos anteriores:

$$\text{mant}(3,897) = 3,897 - 3 = 0,897$$

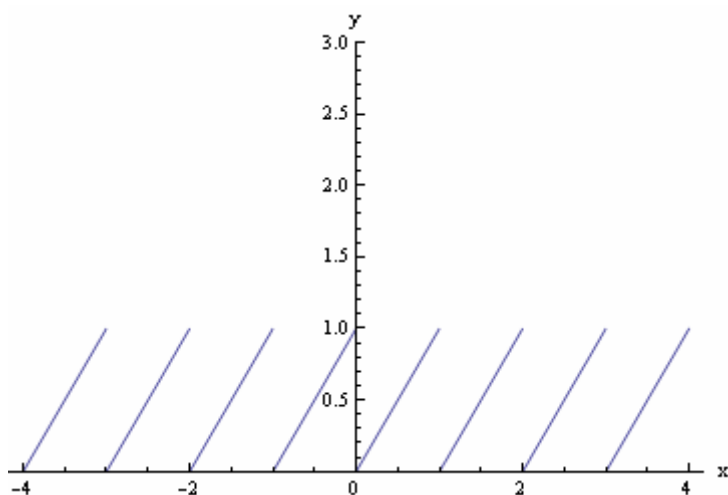
$$\text{mant}(145,7) = 145,7 - 145 = 0,7$$

$$\text{mant}(-9,2) = -9,2 - (-10) = 0,8$$

$$\text{mant}(-4) = -4 - (-4) = 0$$

$$\text{mant}(-35,69) = -35,69 - (-36) = 0,31$$

La función $y = f(x) = \text{mant}(x)$ tiene el siguiente gráfico:



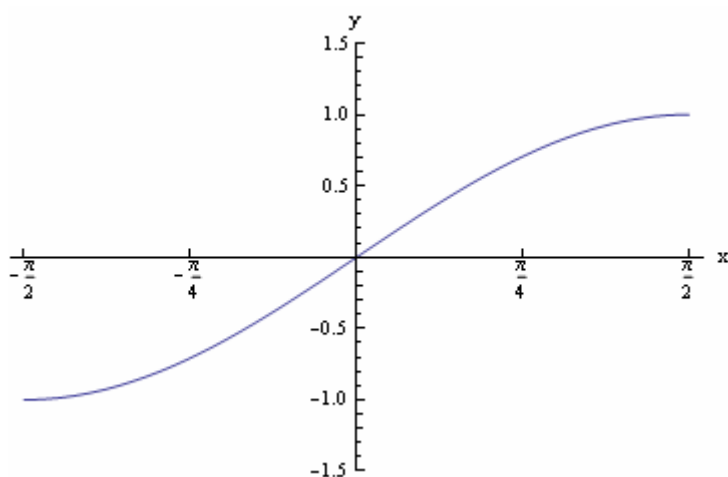
$Dom = R$ $Im = [0,1]$, no es inyectiva y no tiene paridad definida.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Función arcoseno

Ya hemos visto que la función $f(x) = \text{sen}(x)$ no es inyectiva en su dominio. Para poder calcular la función inversa debemos restringir el dominio, es decir, definirla en un intervalo donde sí sea inyectiva. Por convención, tomamos

$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1,1] / f(x) = \text{sen}x$, cuyo gráfico es:



Esta función es biyectiva, por lo tanto tiene función inversa. Para hallarla debemos despejar x en la igualdad $y = \text{sen}(x)$. La forma de hacerlo es la siguiente $y = \text{sen}x \Leftrightarrow x = \text{arcsen}y$, es decir x es el ángulo cuyo seno vale y . Ésta es la función inversa, que expresándola en las variables correspondientes queda:

$$f^{-1} : [-1,1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] / f^{-1}(x) = \text{arcsen}x$$

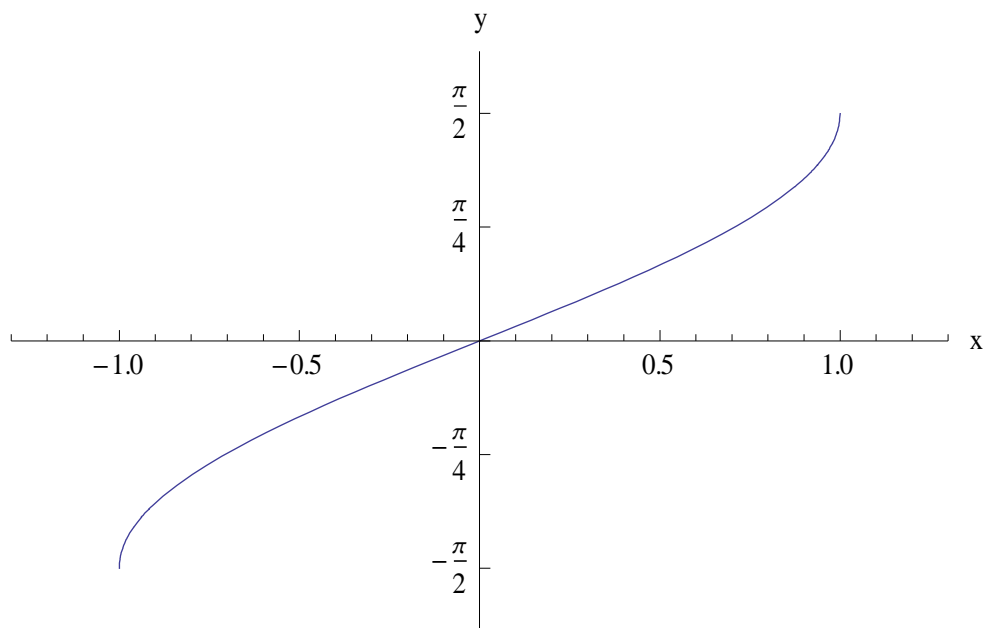
Por ejemplo:

$$\arcsen 1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{porque} \quad \sen \frac{\pi}{2} = 1$$

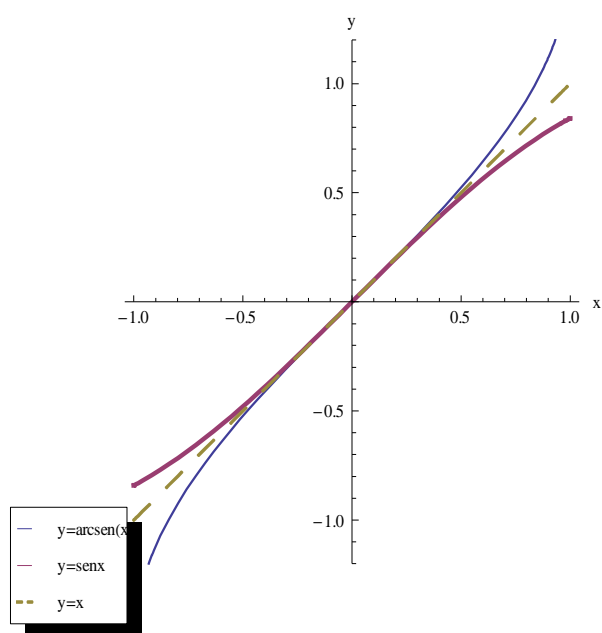
$$\arcsen \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{porque} \quad \sen \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\arcsen \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{\pi}{6} \quad \text{porque} \quad \sen \left(-\frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2}$$

El gráfico de esta función es:



Graficando las dos funciones:

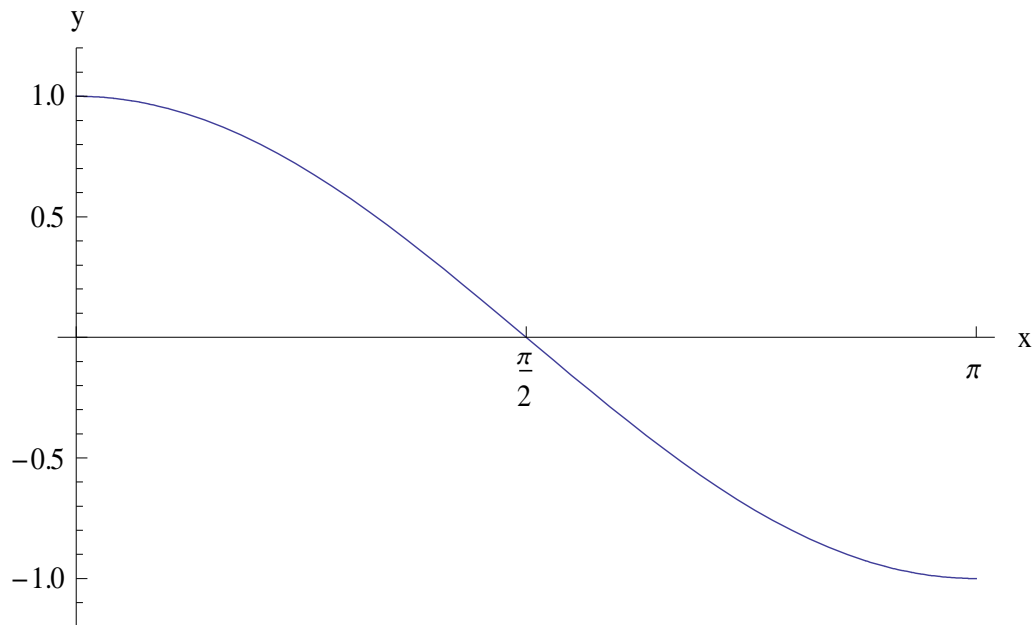


Función arcocoseno

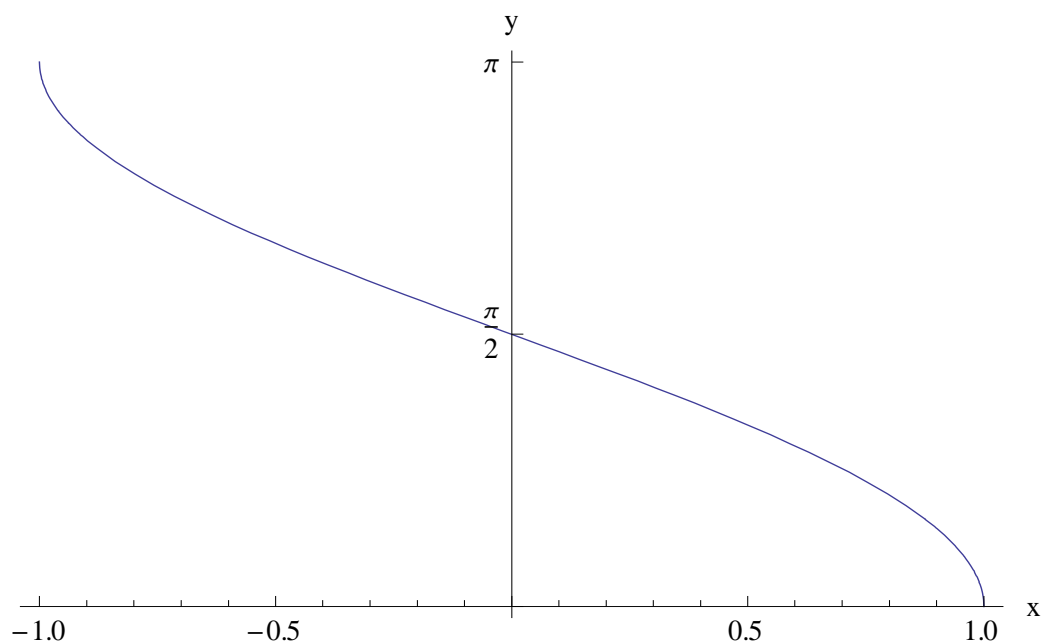
Las mismas consideraciones que hicimos para definir la función arcoseno, debemos hacerlas para definir la función arcocoseno. Tenemos que encontrar un intervalo donde la función $y = \cos x$ sea inyectiva. En este caso por convención se toma $[0, \pi]$

Entonces $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1] / f(x) = \cos x$ $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] / f^{-1}(x) = \arccos x$

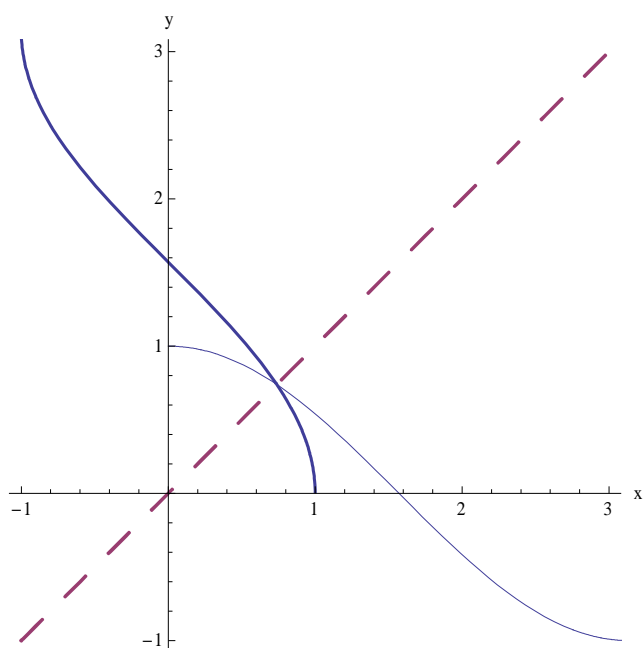
La gráfica de $f(x) = \cos x$ en ese intervalo es:



La gráfica de $f^{-1}(x) = \arccos(x)$:



Los dos gráficos juntos:

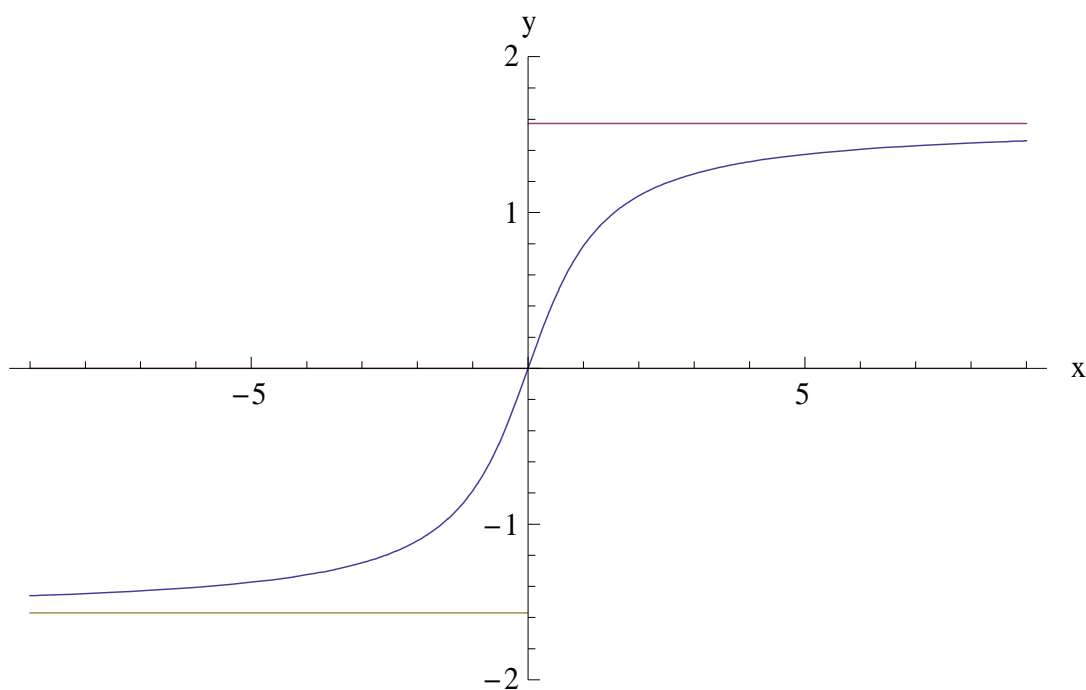


Función arco tangente

En este caso, por convención tomamos:

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \tg x \Leftrightarrow f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) / f^{-1}(x) = \arctg x$$

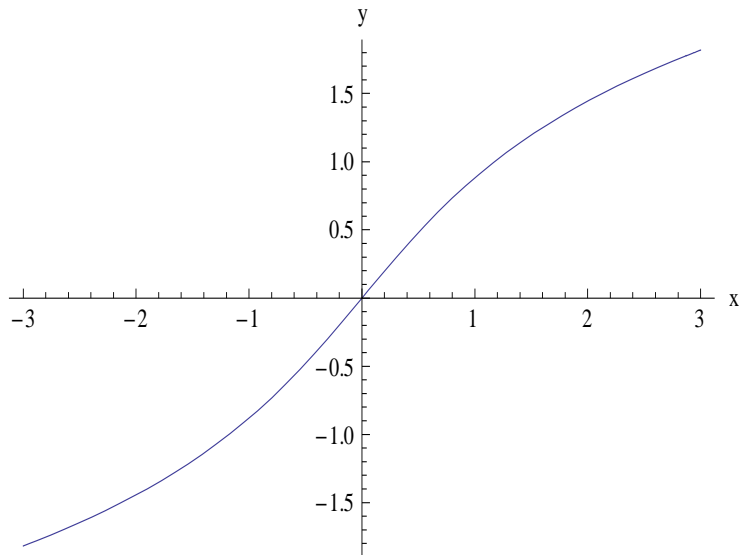
El gráfico de $f^{-1}(x) = \arctg x$ es:



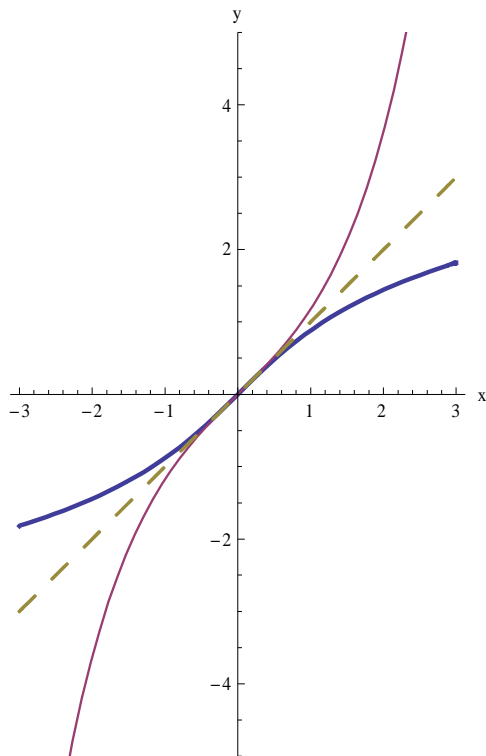
FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

Función argumento seno hiperbólico

Como vimos en la página 15, la función Seno hiperbólico es una función biyectiva, por lo tanto admite función inversa, la cual se llama “Argumento Seno hiperbólico” y se simboliza: $\text{ArgSh}(x)$. Su gráfico es:



Cuyas características principales son: $D_f = I_f = \mathbb{R}$, es biyectiva, impar. Si graficamos las dos funciones podemos observar la simetría respecto a la recta $y = x$:

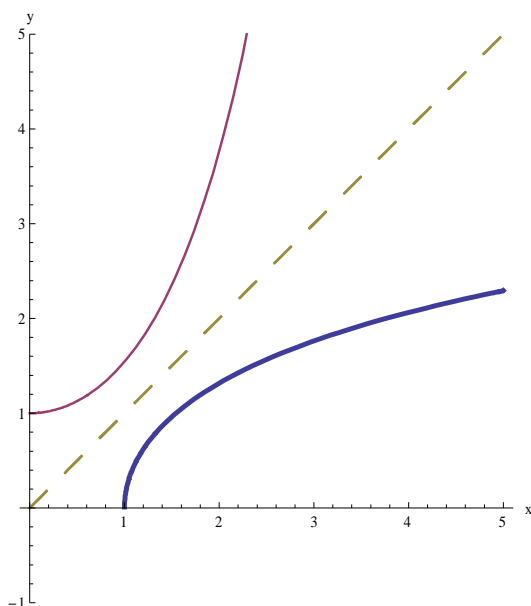


Función argumento coseno hiperbólico

La función $\text{Ch}x$ no es biyectiva, por lo que para definir f^{-1} debemos restringir el dominio. Por convención tomamos:

$$f : [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty) / f(x) = \text{Ch}(x) \Rightarrow f^{-1} : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) / f^{-1}(x) = \text{ArgCh}(x)$$

Esta función inversa se llama “Argumento coseno hiperbólico” y se simboliza $\text{ArgCh}(x)$. Entre las características más importantes encontramos que: no tiene paridad definida, es creciente e inyectiva. Su gráfico, junto al de su función inversa es:

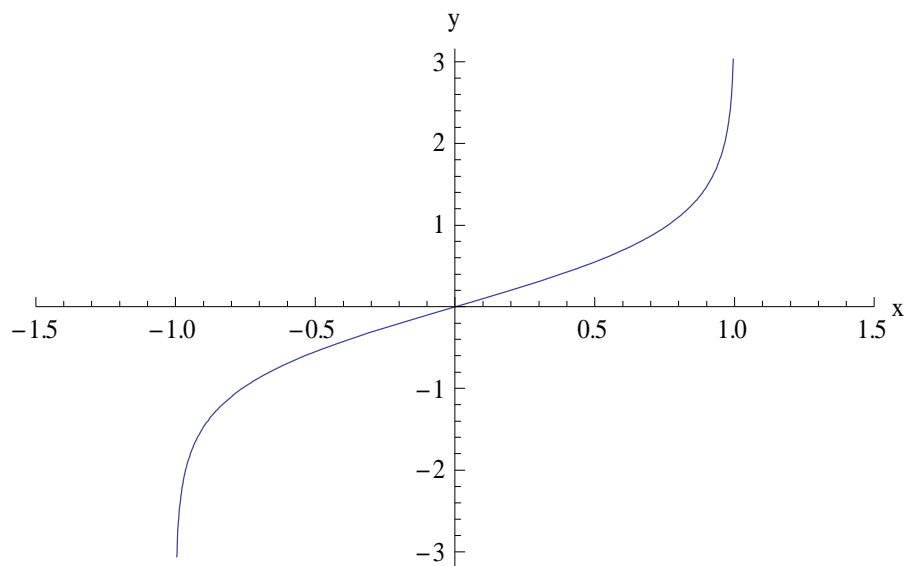


Función argumento tangente hiperbólica

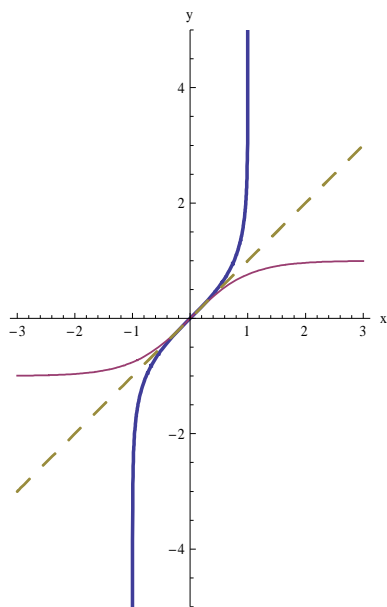
La función tangente hiperbólica es inyectiva, para que sea sobreyectiva y admita función inversa la definimos:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1) / f(x) = \text{Th}(x) \Leftrightarrow f^{-1} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} / f^{-1}(x) = \text{ArgTh}(x)$$

Esta función inversa se llama “argumento tangente hiperbólica”. Su gráfico es:



Es biyectiva, impar, creciente. Graficamos las dos funciones en un mismo par de ejes cartesianos:



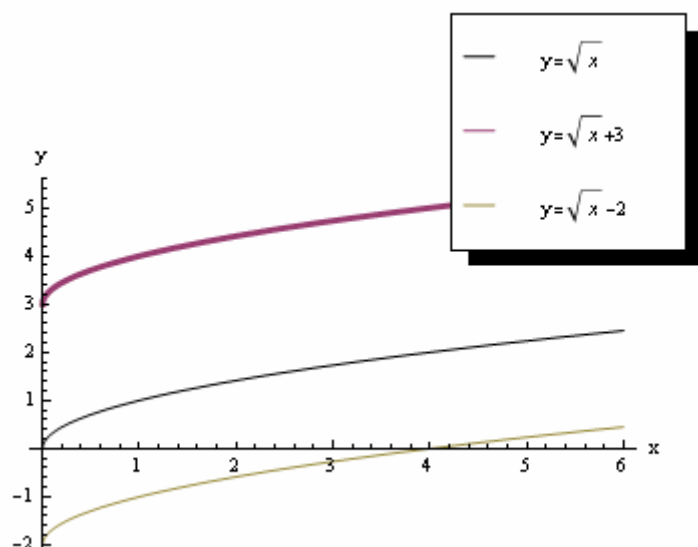
Transformaciones de funciones

Podemos graficar muchas funciones conociendo éstas últimas (rationales, irracionales, trascendentes) y diferentes transformaciones que se pueden realizar sobre ellas. Tenemos distintos tipos de movimientos:

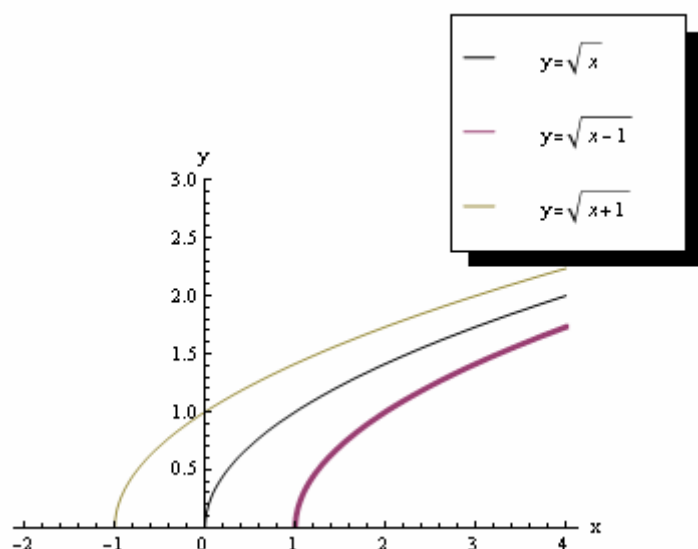
- Desplazamientos o traslaciones verticales y horizontales
- Reflexiones respecto al eje x y al eje y.
- Contracciones y dilataciones verticales y horizontales

Desplazamientos o traslaciones verticales y horizontales

Si a una función le sumamos un número “c” obtenemos un desplazamiento vertical: si c es positivo, la curva se traslada hacia arriba, si c es negativo, hacia abajo. Veamos un ejemplo con la función $y = \sqrt{x}$. Graficaremos en el mismo par de ejes $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} + 3$, $y = \sqrt{x} - 2$. La primera es la función original, la segunda es una traslación de la misma 3 unidades hacia arriba y la tercera dos unidades hacia abajo:



Si queremos realizar un desplazamiento horizontal hacemos: $y = f(x - c)$. Si c es positivo se traslada c unidades hacia la derecha y si c es negativo, -c unidades a la izquierda. Con esta misma función graficamos $y = \sqrt{x - 1}$, $y = \sqrt{x + 1}$. La primera es la traslación de $y = \sqrt{x}$ una unidad hacia la derecha y la segunda una unidad hacia la izquierda:



Entonces, para recordar:

Desplazamientos horizontales y verticales

sea $y = f(x)$

$y = f(x) + c$ es el desplazamiento de $y = f(x)$ c unidades hacia arriba si $c > 0$ y $-c$ unidades hacia abajo si $c < 0$

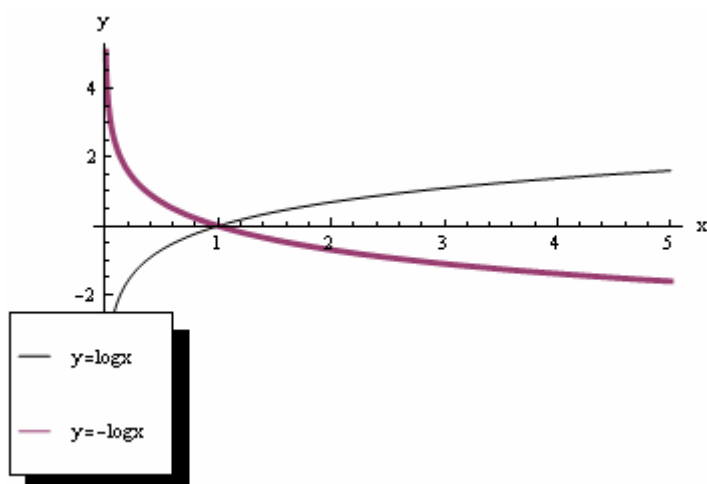
$y = f(x - c)$ es el desplazamiento de $y = f(x)$ c unidades hacia la derecha si $c > 0$ y $-c$ unidades hacia la izquierda si $c < 0$

Reflexiones

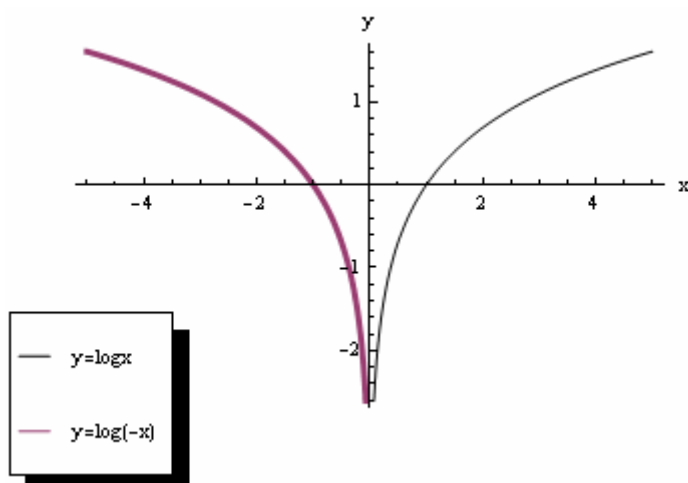
Si queremos reflejar la curva $y = f(x)$ respecto al eje x , hacemos: $y = -f(x)$

Si queremos reflejar la curva $y = f(x)$ respecto al eje y , hacemos: $y = f(-x)$

Realicemos estos movimientos en la función $y = \ln x$. Primero la reflexión respecto al eje x :

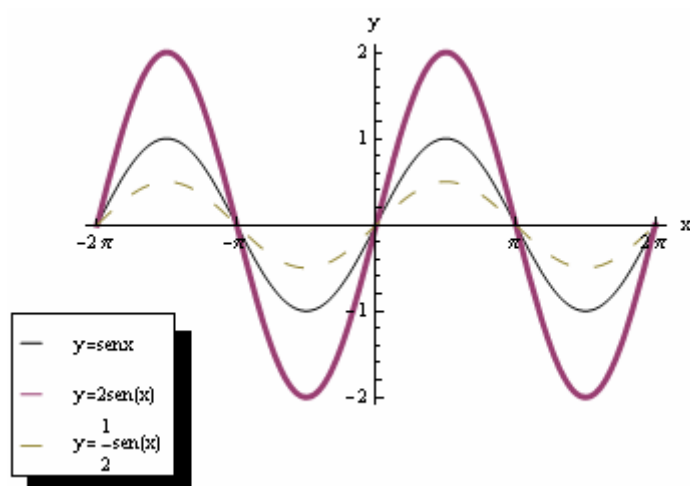


Ahora respecto al eje y :

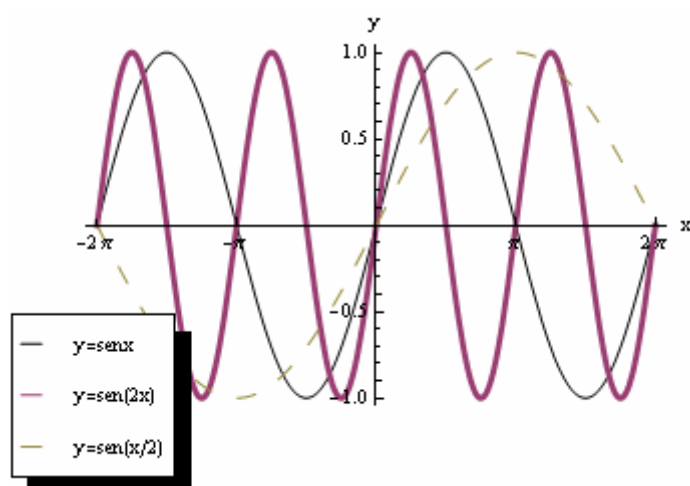


Contracciones y dilataciones verticales y horizontales

Supongamos que queremos “alargar” o “comprimir” una función en forma vertical. Por ejemplo, grafiquemos la función $y = \sin x$. Para “alargarla” o dilatarla en forma vertical debemos multiplicarla por un factor c , con $c > 1$. Para comprimirla o contraerla verticalmente, debemos multiplicarla por un factor c , con $0 < c < 1$. Veámoslo gráficamente:



Por último, si queremos contraer o dilatar una función genérica $y = f(x)$ en forma horizontal, debemos hacer $y = f(cx)$, con $c > 1$ y $0 < c < 1$, respectivamente. Continuemos con el ejemplo de la función $y = \sin x$:



Para recordar:

Sea $y = f(x)$ una función cualquiera, $c > 0$ un número real positivo:

- $y = c f(x)$ es una dilatación vertical (o alargamiento vertical) de la función f en un factor c , si $c > 1$
- $y = c f(x)$ es una contracción vertical (o compresión vertical) de la función f en un factor c , si $c < 1$.
- $y = f(c x)$ es una contracción horizontal (o compresión horizontal) de la función f en un factor c , si $c > 1$.
- $y = f(c x)$ es una dilatación horizontal (o alargamiento horizontal) de la función f en un factor c , si $c < 1$.