OTROS EJEMPLOS DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES RESUELTOS APLICANDO EL MÉTODO DE GAUSS

Resolver el sistema de ecuaciones de 6x5:
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 12 & \textit{ecuación } 1 \\ 3x_1 - 5x_2 + \quad 2x_4 - x_5 = 3 & \textit{ecuación } 2 \\ 3x_2 - x_3 \quad + 2x_5 = 1 & \textit{ecuación } 3 \\ 4x_1 - 4x_2 \quad + x_4 + 3x_5 = 16 & \textit{ecuación } 4 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 5x_5 = -21 & \textit{ecuación } 5 \\ x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 7x_5 = -33 & \textit{ecuación } 6 \end{cases}$$

Armamos nuestra matriz M con el orden 5, 6, 3, 1, 2 y 4 en las ecuaciones.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & -5 & -21 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -7 & -33 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & 12 \\ 3 & -5 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & -4 & 0 & 1 & 3 & 16 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & -5 & -21 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -7 & -33 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -5 & 7 & 33 \\ 0 & -2 & 6 & -10 & 14 & 66 \\ 0 & 0 & 8 & -15 & 23 & 100 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ -f_1 + f_4 \\ -3f_1 + f_5 \\ -4f_1 + f_6 \end{array} \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & -5 & -21 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -7 & -33 \\ 0 & 0 & 8 & -15 & 23 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -15 & 23 & 100 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -3f_2 + f_3 \\ f_2 + f_4 \\ 2f_2 + f_5 \\ \\ \end{array}$$

las filas 3 y 6 son nulas así que las eliminamos

Nos queda el sistema:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 & -5 & -21 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -7 & -33 \\ 0 & 0 & 8 & -15 & 23 & 100 \end{array}\right]$$ y empezamos con la resolución de atrás hacia delante.

Tome lápiz y papel y haga las cuentas con nosotros:

$8x_3 = 15\,x_4 - 23x_5 + 100 \rightarrow$ $\boxed{x_3 = \frac{1}{8}.[15x_4 - 23x_5 + 100]}$

$x_2 = 3x_3 - 5x_4 + 7x_5 - 33 = \frac{3}{8}.[15x_4 - 23x_5 + 100] - 5x_4 + 7x_5 - 33 =$

$x_2 = \frac{1}{8}.[45\ x_4 - 69x_5 + 300 - 40x_4 + 56x_5 - 264] \rightarrow$ $\boxed{x_2 = \frac{1}{8}.[5x_4 - 13x_5 + 36]}$

$x_1 = x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 5x_5 - 21 \rightarrow x_1 = \frac{1}{8}.[5x_4 - 13x_5 + 36] + \frac{2}{8}.[15x_4 - 23x_5 + 100] - 4x_4 + 5x_5 - 21$

$x_1 = \frac{1}{8}.[5x_4 - 13x_5 + 36 + 30x_4 - 46x_5 + 200 - 32x_4 + 40x_5 - 168] \rightarrow$ $\boxed{x_1 = \frac{1}{8}.[3x_4 - 19x_5 + 68]}$

Se obtuvieron infinitas soluciones de la forma:

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{1}{8}.[3x_4 - 19x_5 + 68], \frac{1}{8}.[5x_4 - 13x_5 + 36], \frac{1}{8}.[15x_4 - 23x_5 + 100], x_4, x_5)$

con x_4 y x_5 cualquier par de números reales. El sistema es ***compatible indeterminado***.

Las variables x_1, x_2 y x_3 que corresponden a las posiciones de los pivotes suele llamárselas ***variables principales*** y a x_4 y x_5 son las ***variables libres.***

De acuerdo a los infinitos valores que pueden tomar las variables libres se van obteniendo el correspondiente valor para cada variable principal.

No seremos fundamentalistas de esta asignación en el papel que cumple cada variable pues bien podríamos en la tercera ecuación de la matriz final haber despejado a x_5 y considerarla como variable principal; se hubiera obtenido *otra forma de expresar el mismo conjunto solución*.

La solución obtenida puede reescribirse del siguiente modo:

Si $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \rightarrow$

$X = (\frac{3}{8}x_4, \frac{5}{8}x_4, \frac{15}{8}x_4, x_4, 0) + (-\frac{19}{8}x_5, -\frac{13}{8}x_5, -\frac{23}{8}x_5, 0, x_5) + (\frac{17}{2}, \frac{9}{2}, \frac{25}{2}, 0, 0)$

$X = \frac{x_4}{8}(3, 5, 15, 8, 0) + \frac{x_5}{8}(-19, -13, -23, 0, 8) + (\frac{17}{2}, \frac{9}{2}, \frac{25}{2}, 0, 0);$

si a $\frac{x_4}{8}$ y $\frac{x_5}{8}$ los denominamos respectivamente α y β tenemos:

$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \alpha.(3, 5, 15, 8, 0) + \beta.(-19, -13, -23, 0, 8) + (\frac{17}{2}, \frac{9}{2}, \frac{25}{2}, 0, 0)$ α y $\beta \in R$

Otro ejemplo

Supongamos el sistema

$$\begin{cases} 2x+3y+z+10w=10 \\ x+3y-z+8w=5 \\ y-z+t+w=2 \end{cases}$$

Si representamos con cuidado todas las ecuaciones y las variables utilizadas en una matriz y operamos convenientemente se llega a (obviamente es uno de los caminos de resolución):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 10 & 10 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) 2f_2 - f_1 \to f_2 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) 1/3\, f_2 \to f_2 \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} 3f_2 - f_1 \to f_1 \\ \\ f_3 - f_2 \to f_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 0 & -4 & 0 & -4 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) -1/2\, f_1 \to f_1 \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Lo que nos indica que las soluciones serán de la forma:

$$\begin{cases} x+2z+2w=5 \\ y-z+2w=0 \\ t-w=2 \end{cases} \text{ de donde surge que } \begin{cases} t=w+2 \\ z=y+2w \\ x+2z+2w=5 \end{cases} \to \begin{cases} t=w+2 \\ z=y+2w \\ x+2(y+2w)+2w=5 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} t=w+2 \\ z=y+2w \\ x+2y+4w+2w=5 \end{cases} \to \begin{cases} t=w+2 \\ z=y+2w \\ x=-2y-6w+5 \end{cases}$$

Luego las soluciones dependerán tanto de y como de w; serán del tipo

$(x,y,z,t,w) = (-2y-6w+5, y, y+2w, w+2, w) = y(-2,1,1,0,0) + w(-6,0,2,1,1) + (5,0,0,2,0)$ (1)

Siendo "y" y "w" números reales cualesquiera.

Se trata de un sistema compatible indeterminado, (1) es la **solución general** y el término encerrado en el *último paréntesis* $(5,0,0,2,0)$ es una **solución particular**.