Resolución TP4:

Ejercicio 16

Si un pato esta nadando en dirección de la circunferencia de ecuación $r(t) = (\cos(\mathrm{t}), \mathrm{sen}(\mathrm{t}))$ y la temperatura está dada por $T(x, y) = x^2 e^y - xy^3$ hallar la tasa de cambio que sufre el pato en el punto $P = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Herramientas:

- Si $T(x, y, z)$ es Diferenciable vale la formula de derivada direccional $T_{\vec{v}}(x, y) = \frac{\nabla T(x,y)\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$ para hallar la tasa de cambio.

Para empezar:

- Recordando ejercicios de TP4-1 podemos tomar $\vec{v}$ en base a la velocidad en P
- Según $r(t) = \left(\cos(\mathrm{t}), \mathrm{sen}(\mathrm{t})\right)$; se da $r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = P$

Según regla de la cadena:

$$\begin{cases} T(x, y) = x^2 e^y - xy^3 \\ r(t) = \left(\cos(\mathrm{t}), \mathrm{sen}(\mathrm{t})\right) \\ r'(t) = (-\mathrm{sen}(\mathrm{t}), \cos(\mathrm{t})) \end{cases} \rightarrow T\left(r(t)\right) \rightarrow T_{\vec{v}}(P) = \nabla T\left(r(t_0)\right) \cdot r'(t_0)$$

$$\nabla T(x, y) = (2xe^y - y^3, x^2 e^y - 3xy^2)$$

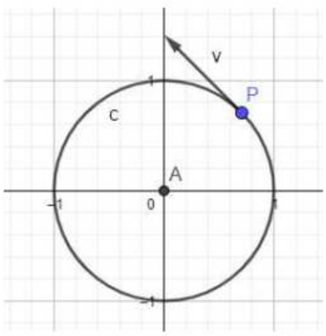
$$r(t) = (\cos(\mathrm{t}), \mathrm{sen}(\mathrm{t}))$$

$$\nabla T\left(r(t)\right) = \left(2\cos(t)\, e^{sen(t)} - sen^3(t), \cos^2(t)\, e^{sen(t)} - 3\cos(t)\, sen^2(t)\right)$$

$$r'(t) = (-\mathrm{sen}(\mathrm{t}), \cos(\mathrm{t}))$$

$$\nabla T\left(r(t)\right) r'(t) = -\left(2\cos(t)\, e^{sen(t)} - sen^3(t)\right) sen(t) + (\cos^2(t)\, e^{sen(t)} - 3\cos(t)\, sen^2(t))\cos(t)$$

$$T_{\vec{v}}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \nabla T\left(r\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) r'\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(2^{-\frac{3}{2}} - 1\right) - \frac{1}{2}$$



Según regla derivada del límite:

$$\begin{cases} T(x,y) \\ \mathrm{B}(t) = (\mathrm{x}_0 + \mathrm{at}, \mathrm{y}_0 + \mathrm{bt}) \end{cases} \to T(B(t)) = g(t) \to T_{\vec{v}}(P) = g'(0)$$

$$\mathrm{B}(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{t}, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{t})$$

$$T(B(t)) = g(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{t}\right)^2 e^{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{t}} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{t}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{t}\right)^3$$

$$g'(t) = ?$$

Lo que sabemos con seguridad es que el resultado debe coincidir

$$g'(0) = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(2^{-\frac{3}{2}} - 1\right) - \frac{1}{2}$$