Problema (Tipo parcial)

Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2 - 4\,x$ que sea perpendicular a la recta $\vec{r}(t) = (3 + 4\,t, -2\,t, 1 + t)$ con $t \in \mathbb{R}$.

$$z = x^2 + y^2 - 4\,x = x^2 - 2.2\,x + y^2 + (-2)^2 - (-2)^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4 =$$
$$= (x-2)^2 + y^2 - 4 = z$$

Si el plano tangente pedido tiene que ser perpendicular a la recta dada, entonces el vector normal al plano tiene que ser paralelo a la recta.

Tomaremos como vector normal al plano pedido un vector director de la recta, por ejemplo, tomar como vector director de la recta a

$$\vec{v} = (4, -2, 1)$$
$$\vec{r}(t) = (3 + 4\,t, -2\,t, 1 + t) = (3,0,1) + (4t, -2t, t) = (3,0,1) + t\,\underbrace{(4,-2,1)}_{\vec{v}}$$

Tomaremos como vector normal $\vec{N}$ a

$$\vec{N} = (4, -2, 1)$$

Ecuación del plano normal a $\vec{N}$ y tangente a la superficie dada ($z = x^2 + y^2 - 4\,x$)

$$\pi: (x, y, z) \cdot \vec{N} = P \cdot \vec{N}$$

Incógnita P

De la propiedad recientemente vista, el $\nabla F(x, y, z)$, siendo $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4\,x - z$=0, tiene que ser paralelo al vector $\vec{N}$, esto es

$$\nabla F(x, y, z) = \lambda\,\vec{N}$$
$$\nabla F(x, y, z) = (2x - 4, 2y, -1) = \lambda\,(4, -2, 1)$$
$$2x - 4 = 4\lambda \Rightarrow \boxed{x = 0}$$
$$2y = -2\lambda \;\Rightarrow \boxed{y = 1}$$
$$\boxed{-1 = \lambda}$$

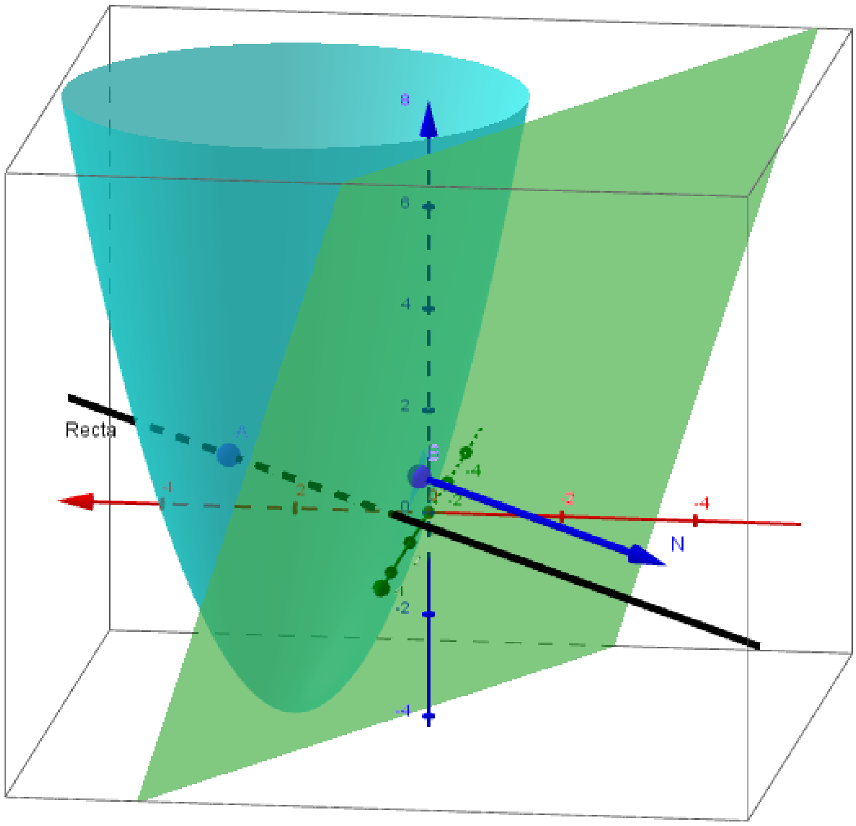
Falta z, $z = z(x, y) = x^2 + y^2 - 4\,x$

$$\boxed{z = 1}$$

El punto es $P = (0,1,1)$

Finalmente

$$\pi: (x, y, z) \cdot \vec{N} = P \cdot \vec{N}$$
$$\pi: (x, y, z) \cdot (4, -2, 1) = (0,1,1) \cdot (4, -2, 1)$$
$$\boxed{\Pi: 4x - 2y + z = -1}$$


Recta
A
B
N