T P 04 Ej. 5-g

Calcular la derivada direccional de la siguiente función en el punto p y la dirección $\vec{v}$ especificados.

$$f(x,y) = ln(e^x + e^y + e^z) \qquad P = (0,0,0)$$

$\vec{v}$ es la dirección que forma el mismo ángulo con los tres ejes coordenados en el sentido positivo.

En este ejercicio, en lugar de tener el vector $\vec{v}$ dado a partir de sus coordenadas cartesianas, lo tenemos descripto por su relación con los ejes coordenados x, y, z por tratarse de una función de tres variables en lugar de dos, como veníamos teniendo en puntos anteriores. Adicionalmente, sabemos que el vector $\vec{v}$ debe tener longitud 1.

A partir de esa información, lo que podemos deducir es que, si los ángulos con los tres ejes son los mismos, entonces las tres componentes del vector $\vec{v}$ serán iguales entre sí. Esto es que el vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ se podría escribir $\vec{v} = (k, k, k)$.

Combinando este dato con el de la longitud igual a 1, sabemos que

$$\sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2} = \sqrt{k^2 + k^2 + k^2} = \sqrt{3k^2} = 1$$

Ya que la raíz cuadrada de las componentes al cuadrado nos da la longitud del vector (que sabemos que es 1) y además sabemos que las tres componentes son iguales. De ahí obtenemos que

$$k = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Por lo tanto, el vector nos queda:

$$\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Para una explicación del procedimiento que se va a aplicar a continuación, referirse al ejercicio 5-a donde está explicado en detalle.

1. Definir la función $g(t) = f(P + tv)$:

$$g(t) = f\left((0,0,0) + t\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$g(t) = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t, \frac{1}{\sqrt{3}}t, \frac{1}{\sqrt{3}}t\right)$$

$$g(t) = ln\left(e^{\frac{1}{\sqrt{3}}t} + e^{\frac{1}{\sqrt{3}}t} + e^{z\frac{1}{\sqrt{3}}t}\right)$$

$$g(t) = ln\left(3e^{\frac{1}{\sqrt{3}}t}\right)$$

Luego, por propiedad de logaritmo, podemos sacar el 3 que está multiplicando al argumento como $ln(3)$ sumando.

$$g(t) = ln(3) + \; ln\left(e^{\frac{1}{\sqrt{3}}t}\right)$$

Y finalmente aplicarle el logaritmo a una expresión exponencial de base e nos devuelve como resultado el exponente de la e, por lo que nos queda

$$g(t) = ln(3) + \frac{1}{\sqrt{3}}t$$

2. Derivar la función respecto de su variable: $g'(t)$.

$$g'(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Siendo que la expresión de la derivada es constante, al evaluarla en cero nos va a quedar el mismo valor.

3. Evaluar la función derivada en 0: $g'(0)$.

$$g'(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Por lo tanto, la derivada direccional de la función f en el punto P en el sentido del vector $\vec{v}$ es :

$$f_{\vec{v}}(P) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$