Divergencia de un campo vectorial

Teorema de Gauss (o de la divergencia)

Práctica sobre

- **Divergencia de un campo vectorial.**
- **Teorema de la Gauss (o de la divergencia).**

Divergencia de un campo vectorial

Definición (divergencia de un campo vectorial). Sea el campo vectorial

$$F: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3: F(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big)$$

de clase $\mathcal{C}^1$ en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^3$. Se llama divergencia de F, denotada por $Div(F)(x,y,z)$, al campo escalar

$$Div(F)(x,y,z) : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}: Div(F)(x,y,z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)$$

Para simplificar la escritura, se suele escribir

$$Div(F) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

O bien

$$Div(F) = P_x + Q_y + R_z$$

También, se introduce el operador gradiente (llamado también operador nabla)

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Y se ofrece la escritura simbólica

$$Div(F) = \nabla \bullet F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \bullet (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Esto es

$$Div(F) = \nabla \bullet F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Ejemplo 1. Cálculo de la divergencia del campo vectorial

$$F(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x.y.z)\big) = (x,y,z)$$

Se tiene

$$Div(F) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3$$

Es decir que

$$Div(F) = 3$$

Ejemplo 2. Cálculo de la divergencia del campo vectorial

$$F(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,yz)\big) = (2xy, yz^2, xz)$$

Se tiene

$$Div(F) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) = 2y + z^2 + x$$

O sea

$$Div(F) = x + 2y + z^2$$

Ejemplo 3. Cálculo de la divergencia del campo vectorial

$$F(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x.y.z)\big) = (x^3, y^3, z^3)$$

resulta

$$Div(F) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(z^3) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$$

O sea

$$Div(F) = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

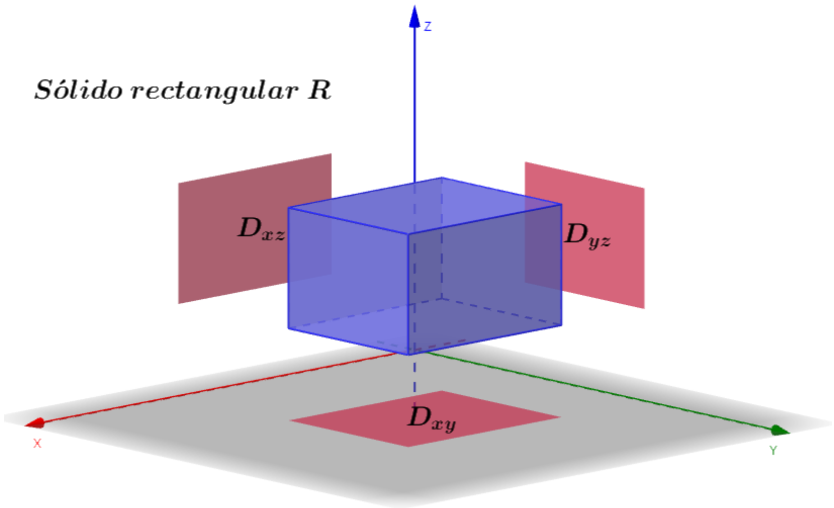
Teorema de la divergencia

Considérese el campo vectorial

$$F(x, y, z) = \big(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x. y. z)\big)$$

de clase C^1 en el conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^3$ y el sólido rectangular $R \subset U$ definido como

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x_0 \leq x \leq x_1 \wedge y_0 \leq y \leq y_1 \wedge z_0 \leq z \leq z_1\}$$



Sólido rectangular R de proyección D_{xy} sobre el plano xy, D_{xz} sobre el plano xz y D_{yz} sobre el plano yz

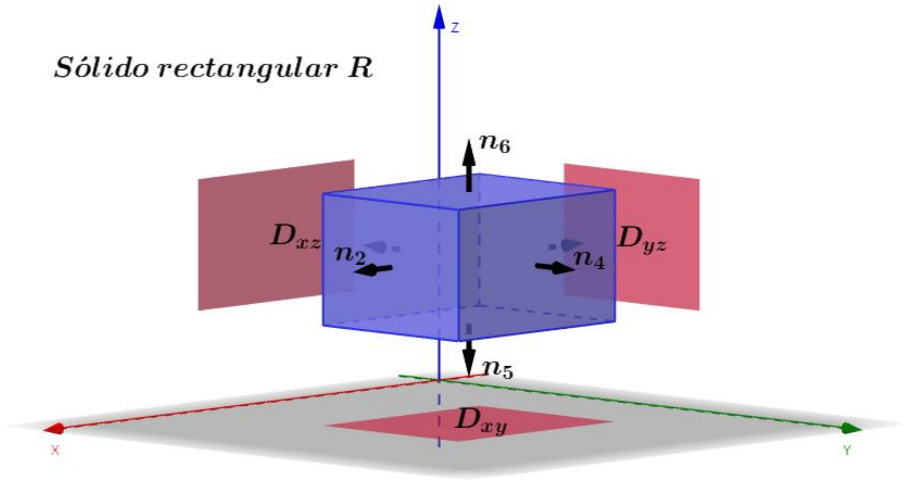
Calcular la integral de superficie de F a través de la superficie $S = \partial R$ frontera del sólido R, orientada según la normal exterior $\vec{n}_{ext}$, a saber

$$I = \oiint\limits_S F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS$$

consiste en calcular las siguientes seis integrales de superficies.

$$I = \iint\limits_{S_1} F \cdot \vec{n}_1\, dS + \iint\limits_{S_2} F \cdot \vec{n}_2\, dS + \iint\limits_{S_3} F \cdot \vec{n}_3\, dS + \iint\limits_{S_4} F \cdot \vec{n}_4\, dS + \iint\limits_{S_5} F \cdot \vec{n}_5\, dS + \iint\limits_{S_6} F \cdot \vec{n}_6\, dS$$

a través de las caras S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 y S_6 que componen a $S = \partial R$, orientando a cada una según el sentido de orientación heredado del sentido de orientación exterior de S.



Representación de los vectores normales a las caras con la orientación heredada del sentido orientación de $S = \partial R$

Llamando a las caras

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = x_0 \wedge y_0 \leq y \leq y_1 \wedge z_0 \leq z \leq z_1\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = x_1 \wedge y_0 \leq y \leq y_1 \wedge z_0 \leq z \leq z_1\}$$

$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = y_0 \wedge x_0 \leq x \leq x_1 \wedge z_0 \leq z \leq z_1\}$$

$$S_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = y_1 \wedge x_0 \leq x \leq x_1 \wedge z_0 \leq z \leq z_1\}$$

$$S_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = z_0 \wedge x_0 \leq x \leq x_1 \wedge y_0 \leq y \leq y_1\}$$

$$S_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = z_1 \wedge x_0 \leq x \leq x_1 \wedge y_0 \leq y \leq y_1\}$$

Se tiene las siguientes parametrizaciones

$$S_1 : \vec{\Phi}_1(y, z) = (x_0, y, z), \qquad (y, z) \in D_{yz} = [y_0, y_1] \times [z_0, z_1]$$

$$S_2 : \vec{\Phi}_2(y, z) = (x_1, y, z), \qquad (y, z) \in D_{yz} = [y_0, y_1] \times [z_0, z_1]$$

$$S_3 : \vec{\Phi}_3(x, z) = (x, y_0, z), \qquad (x, z) \in D_{xz} = [x_0, x_1] \times [z_0, z_1]$$

$$S_4 : \vec{\Phi}_4(x, z) = (x, y_1, z), \qquad (x, z) \in D_{xz} = [x_0, x_1] \times [z_0, z_1]$$

$$S_5 : \vec{\Phi}_5(x, y) = (x, y, z_0), \qquad (x, y) \in D_{xy} = [x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$$

$$S_6 : \vec{\Phi}_6(x, y) = (x, y, z_1), \qquad (x, y) \in D_{xy} = [x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$$

Ahora, a partir de las mencionadas parametrizaciones se calculan las integrales de superficie indicadas más arriba

$$\iint_{S_1} F \cdot \vec{n}_1 \, dS = -\iint_{D_{yz}} F(x_0, y, z) \cdot (1,0,0) dydz = -\iint_{D_{yz}} P(x_0, y, z) \, dydz$$

$$\iint_{S_2} F\cdot\vec{n}_2\,dS = +\iint_{D_{yz}} F(x_1,y,z)\cdot(1{,}0{,}0)dydz = +\iint_{D_{yz}} P(x_1,y,z)\,dydz$$

$$\iint_{S_3} F\cdot\vec{n}_3\,dS = -\iint_{D_{xz}} F(x,y_0,z)\cdot(0{,}1{,}0)dxdz = -\iint_{D_{xz}} Q(x,y_0,z)\,dxdz$$

$$\iint_{S_4} F\cdot\vec{n}_4\,dS = +\iint_{D_{xz}} F(x,y_1,z)\cdot(0{,}1{,}0)dxdz = +\iint_{D_{xz}} Q(x,y_1,z)\,dxdz$$

$$\iint_{S_5} F\cdot\vec{n}_5\,dS = -\iint_{D_{xy}} F(x,y,z_0)\cdot(0{,}0{,}1)dxdy = -\iint_{D_{xy}} R(x,y,z_0)\,dxdy$$

$$\iint_{S_6} F\cdot\vec{n}_6\,dS = +\iint_{D_{xy}} F(x,y,z_1)\cdot(0{,}0{,}1)dxdy = +\iint_{D_{xy}} R(x,y,z_1)\,dxdy$$

De esta manera, se tiene que

$$\iint_{S_1} F\cdot\vec{n}_1\,dS + \iint_{S_2} F\cdot\vec{n}_2\,dS = -\iint_{D_{yz}} P(x_0,y,z)\,dydz + \iint_{D_{yz}} P(x_1,y,z)\,dydz$$

Esto es

$$\iint_{S_1} F\cdot\vec{n}_1\,dS + \iint_{S_2} F\cdot\vec{n}_2\,dS = \iint_{D_{yz}} [P(x_1,y,z) - P(x_0,y,z)]\,dydz$$

O lo que es lo mismo

$$\iint_{S_1} F\cdot\vec{n}_1\,dS + \iint_{S_2} F\cdot\vec{n}_2\,dS = \iint_{D_{yz}} \left[P(x,y,z)\,\Big|_{x=x_0}^{x=x_1}\right]dydz$$

Que también se puede escribir como

$$\iint_{S_1} F\cdot\vec{n}_1\,dS + \iint_{S_2} F\cdot\vec{n}_2\,dS = \iint_{D_{yz}} \left[\int_{x=x_0}^{x=x_1} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)\right]dydz$$

O bien

$$\iint_{S_1} F\cdot\vec{n}_1\,dS + \iint_{S_2} F\cdot\vec{n}_2\,dS = \iiint_{R} \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)\right)dxdydz$$

Procediendo de manera análoga, se dan los siguientes resultados

$$\iint_{S_3} F \cdot \vec{n}_3 \, dS + \iint_{S_4} F \cdot \vec{n}_4 \, dS = \iiint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)\right) dxdydz$$

$$\iint_{S_5} F \cdot \vec{n}_5 \, dS + \iint_{S_6} F \cdot \vec{n}_6 \, dS = \iiint_R \left(\frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\right) dxdydz$$

Entonces, la integral de superficie de F a través de la superficie $S = \partial R$, orientada según la normal exterior $\vec{n}_{ext}$

$$I = \oiint_S F \cdot \vec{n}_{ext} \, dS$$

Es igual a

$$I = \iint_{S_1} F \cdot \vec{n}_1 \, dS + \iint_{S_2} F \cdot \vec{n}_2 \, dS + \iint_{S_3} F \cdot \vec{n}_3 \, dS + \iint_{S_4} F \cdot \vec{n}_4 \, dS + \iint_{S_5} F \cdot \vec{n}_5 \, dS + \iint_{S_6} F \cdot \vec{n}_6 \, dS$$

$$I = \iiint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)\right) dxdydz + \iiint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)\right) dxdydz + \iiint_R \left(\frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\right) dxdydz$$

O sea

$$I = \iiint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\right) dxdydz$$

Es decir que

$$\oiint_S F \cdot \vec{n}_{ext} \, dS = \iiint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\right) dxdydz$$

Nótese que el integrando en la integral triple es la divergencia del campo vectorial F, por lo que se tiene la relación

$$\oiint_S F \cdot \vec{n}_{ext} \, dS = \iiint_R Div(F) \, dxdydz$$

Que muestra que la integral de superficie del campo vectorial F a través de la superficie cerrada $S = \partial R$ frontera del sólido rectangular R, orientada según la normal exterior $\vec{n}_{ext}$, es igual a la integral triple de la divergencia de F, es decir de $Div(F)$, sobre R. Esta relación no es casual, se cumple también en situaciones más generales, así como se establece en el siguiente resultado conocido como el Teorema de la divergencia, Teorema de Gauss o Teorema de Gauss-Ostrogradski.

Teorema de Gauss (o de la divergencia). Sea el campo vectorial

$$F: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3: F(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big)$$

de clase C^1 en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^3$. Y sea la superficie cerrada regular orientable

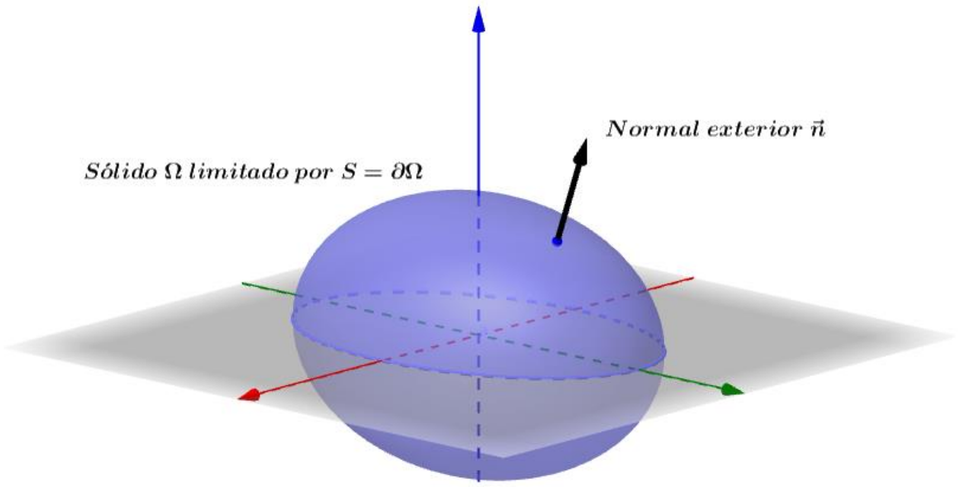
$$S = \partial\Omega \subset U$$

frontera del sólido $\Omega \subset U$. Entonces

$$\oiint\limits_{S=\partial\Omega} F \cdot \vec{n}\, dS = \iiint\limits_{\Omega} Div(F)\, dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\right) dxdydz$$

siendo <u>$\vec{n}$ la normal exterior</u> a la superficie $S = \partial\Omega$.

El Teorema de Gauss, o Teorema de la divergencia, es un teorema integral del cálculo vectorial que relaciona una integral de superficie con una integral de volumen.



<u>Sólido Ω limitado por $S = \partial\Omega$, orientada según la normal unitaria exterior $\vec{n}$</u>

Ejemplo 4. <u>Verificar el Teorema de la divergencia</u> para el campo vectorial

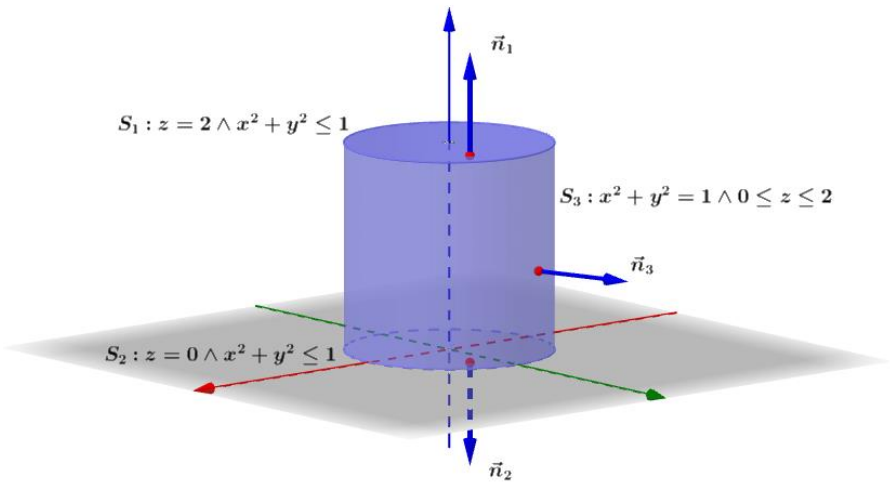
$$F(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big) = (x,y,z)$$

Y la superficie $S = \partial\Omega$, frontera del sólido cilíndrico

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 2\}$$

Hay que verificar la igualdad

$$\oiint\limits_{S} F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS = \iiint\limits_{\Omega} Div(F)\, dxdydz$$



Representación del sólido Ω, las superficies que conforman su frontera y la orientación heredada de la orientación exterior de su frontera

Cálculo de la integral de superficie

$$I_s = \oiint_S F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS$$

Dado que la frontera del sólido Ω está formada por tres superficies bien distintas, a saber

$$S_1 : z = 2 \wedge x^2 + y^2 \leq 1$$

$$S_2 : z = 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 1$$

$$S_3 : x^2 + y^2 = 1 \wedge 0 \leq z \leq 2$$

Es necesario, parametrizar cada superficie y calcular la integral a través de cada una parte de S. Se tiene así, que

$$I_s = \oiint_S F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS = \iint_{S_1} F \cdot \vec{n}_1\, dS + \iint_{S_2} F \cdot \vec{n}_2\, dS + \iint_{S_3} F \cdot \vec{n}_3\, dS$$

Orientando a cada una de estas superficies, según el sentido heredado de la orientación exterior de S.

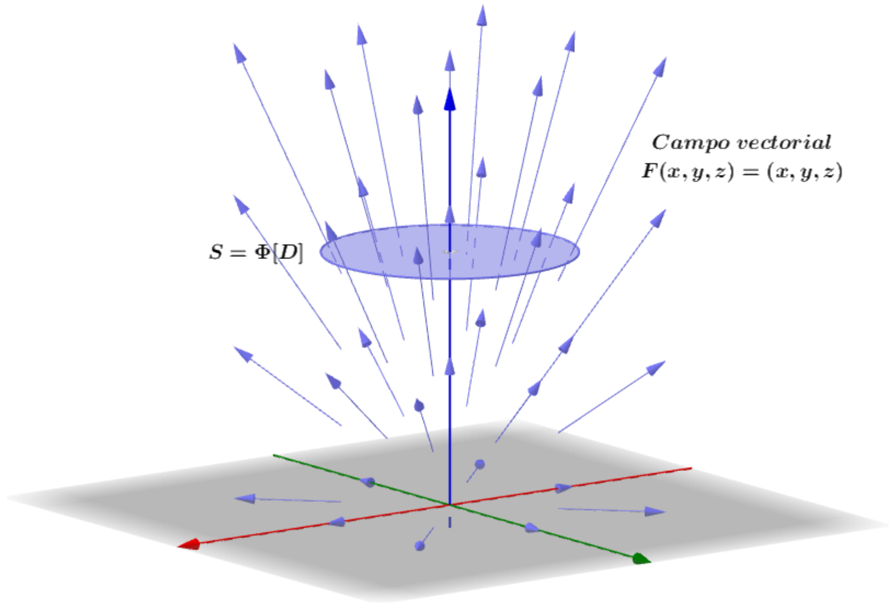
Cálculo de la integral de superficie del campo vectorial

$$F(x, y, z) = \big(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\big) = (x, y, z)$$

A través de la superficie plana

$$S_1 : z = 2 \wedge x^2 + y^2 \leq 1$$

orientada según la normal ascendente.



Representación geométrica de la superficie $S_1 = \Phi[D]$ y el campo vectorial $F(x, y, z)$

En este caso, una parametrización para S_1 es la

$$\vec{\Phi}(x, y) = (x, y, 2)$$

Con dominio paramétrico

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Resulta de este modo que

$$\vec{\Phi}_x(x, y) = (1,0,0)$$

$$\vec{\Phi}_y(x, y) = (0,1,0)$$

Y luego

$$\vec{\Phi}_x(x, y) \times \vec{\Phi}_y(x, y) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1)$$

O sea

$$\vec{\Phi}_x(x, y) \times \vec{\Phi}_y(x, y) = (0,0,1)$$

Que es <u>la normal ascendente</u>, pues posee tercera componente siempre positiva. Entonces, el signo que se antepone a la integral doble es el positivo.

Por otra parte, resulta que el campo

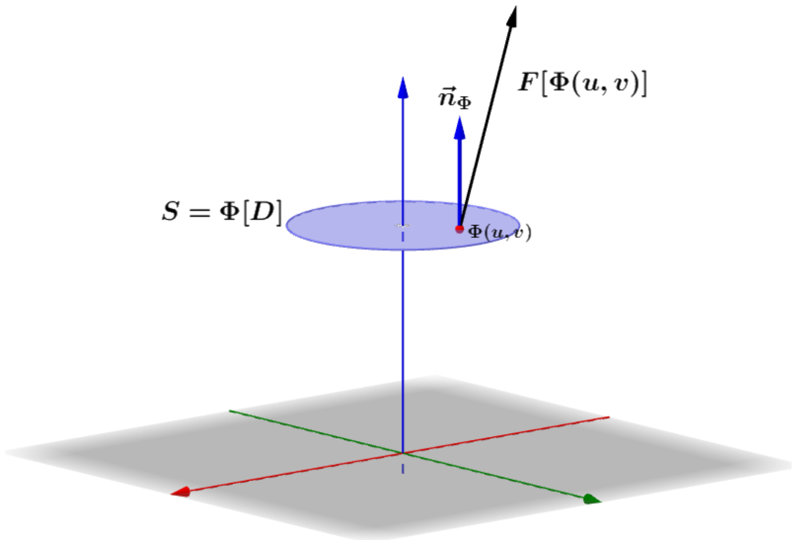
$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

Evaluado en los puntos que ofrece

$$\vec{\Phi}(x,y) = (x,y,2)$$

Da como resultado

$$F[\vec{\Phi}(x,y)] = F(x,y,2) = (x,y,2)$$



Representación geométrica de la superficie $S = \Phi[D]$, el punto $P = \Phi(u,v)$, la normal $\vec{n}_\Phi$ y la imagen del campo vectorial $F(x,y,z)$ en P

Y así

$$\iint_{S_1} F \cdot \vec{n}\, dS = +\iint_D F[\vec{\Phi}(x,y)] \cdot \left(\vec{\Phi}_x(x,y) \times \vec{\Phi}_y(x,y)\right) dxdy$$

$$\iint_{S_1} F \cdot \vec{n}\, dS = +\iint_D (x,y,2) \cdot (0,0,1) dxdy = \iint_D 2\, dxdy = 2 \iint_D dxdy$$

O sea

$$\iint_{S_1} F \cdot \vec{n}\, dS = 2 \iint_D dxdy = 2 \cdot \text{área}(D) = 2 \cdot \pi$$

Se tiene entonces que

$$\iint_{S_1} F \cdot \vec{n}\, dS = 2 \cdot \pi$$

Cálculo de la integral de superficie del campo vectorial

$$F(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big) = (x,y,z)$$

a través de la superficie plana

$$S_2 : z = 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 1$$

orientada según la normal descendente.

Siguiendo lo hecho en el cálculo anterior, la parametrización cartesiana de la superficie plana S_2 es

$$\vec{\Phi}(x,y) = (x,y,0)$$

Con dominio paramétrico

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Se tiene así, que

$$\vec{\Phi}_x(x,y) = (1,0,0)$$

$$\vec{\Phi}_y(x,y) = (0,1,0)$$

Y luego

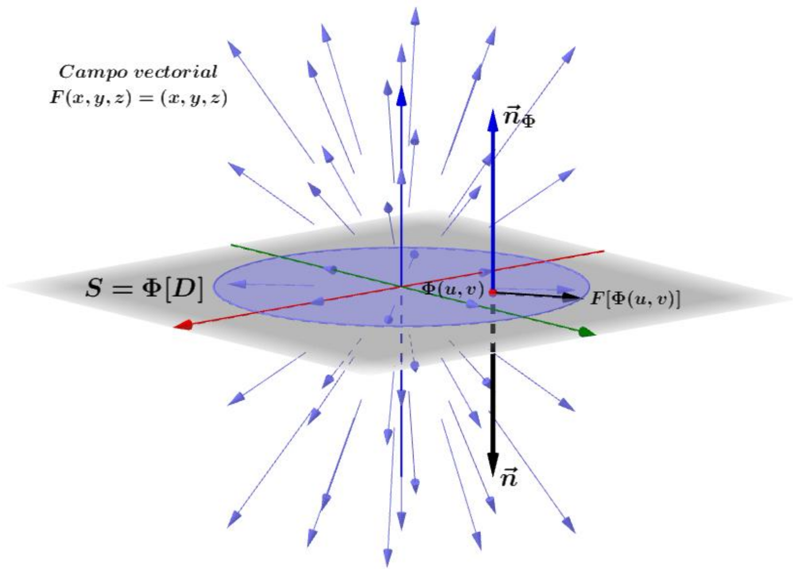
$$\vec{\Phi}_x(x,y) \times \vec{\Phi}_y(x,y) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1)$$

Es decir que la normal ofrecida por la parametrización aplicada es

$$\vec{n}_\Phi = \vec{n}(x,y) = \vec{\Phi}_x(x,y) \times \vec{\Phi}_y(x,y) = (0,0,1)$$

Que es la normal ascendente. Lo que significa que es opuesta a la normal $\vec{n}$ respecto de la cual se pide orientar a la superficie a través de la que se quiere calcular la integral de superficie pedida. En consecuencia, para obtener el valor pedido, deberá anteponerse el signo negativo a la integral doble de la definición. O sea

$$\iint_{S_2} F \cdot \vec{n}\, dS = -\iint_D F\big[\vec{\Phi}(x,y)\big] \cdot \left(\vec{\Phi}_x(x,y) \times \vec{\Phi}_y(x,y)\right) dxdy$$



Representación geométrica de la superficie $S = \Phi[D]$, el campo vectorial $F(x,y,z)$, la normal $\vec{n}_\Phi$ dada por la parametrización $\Phi(u,v)$ y la normal unitaria $\vec{n}$, opuesta a $\vec{n}_\Phi$

Ahora bien, se cumple que el campo

$$F(x,y,z) = (x,y,z)$$

Evaluado en

$$\vec{\Phi}(x,y) = (x,y,0)$$

es

$$F\left[\vec{\Phi}(x,y)\right] = (x,y,0)$$

Y, en definitiva

$$\iint_{S_2} F \cdot \vec{n}\, dS = -\iint_D F\left[\vec{\Phi}(x,y)\right] \cdot \left(\vec{\Phi}_x(x,y) \times \vec{\Phi}_y(x,y)\right) dxdy$$

$$\iint_{S_2} F \cdot \vec{n}\, dS = -\iint_D (x,y,0) \cdot (0,0,1) dxdy = -\iint_D 0\, dxdy = 0$$

En conclusión, la integral de superficie del campo vectorial

$$F(x,y,z) = (x,y,z)$$

A través de la superficie plana

$$S_2: z = 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 1$$

Es nula. Simbólicamente

$$\iint_{S_2} F \cdot \vec{n}\, dS = 0$$

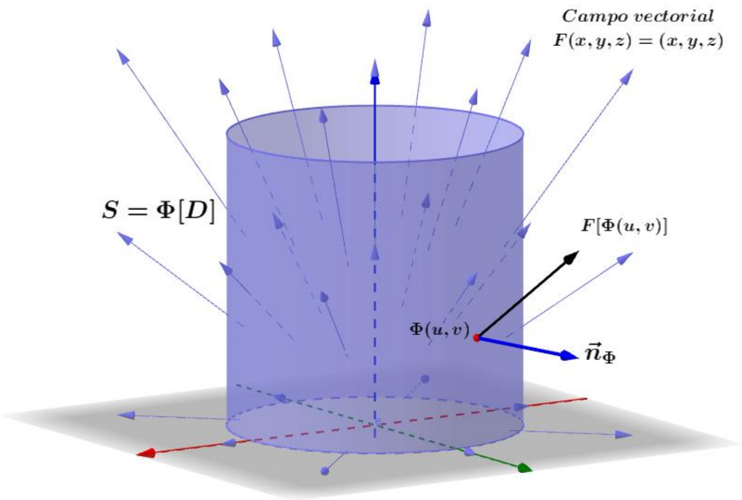
Cálculo de la integral de superficie del campo vectorial

$$F(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big) = (x,y,z)$$

a través de la superficie cilíndrica

$$S_3: x^2 + y^2 = 1 \land 0 \leq z \leq 2$$

<u>orientada según la normal unitaria $\vec{n}$, exterior al cilindro vertical S_3</u>.



<u>Representación gráfica de la superficie cilíndrica S, la normal $\vec{n}_\Phi$ que orienta a S en el mismo sentido que $\vec{n}$ y el campo vectorial $F(x,y,z)$</u>

La parametrización cilíndrica de S es

$$\vec{\Phi}(t,z) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), z)$$

Con dominio paramétrico

$$D = \{(t,z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq 2\pi \land 0 \leq z \leq 2\}$$

Entonces

$$\vec{\Phi}_t(t,z) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 0)$$

$$\vec{\Phi}_z(t,z) = (0,0,1)$$

Y de este modo

$$\vec{\Phi}_t(t,z) \times \vec{\Phi}_z(t,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\operatorname{sen}(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), 0)$$

$$\vec{\Phi}_t(t,z) \times \vec{\Phi}_z(t,z) = (\cos(t)\,,\operatorname{sen}(t)\,,0)$$

Y esta es la normal externa al cilindro. Es decir que en este caso $\vec{n}_\Phi = \vec{n}(t,z) = \vec{\Phi}_t(t,z) \times \vec{\Phi}_z(t,z)$ y $\vec{n}$ coinciden en sentido, con lo cual, en la integral doble se antepone el signo positivo. Por otra parte, se cumple que

Por otra parte, se cumple que

$$F\big[\vec{\Phi}(t,z)\big] = F(\cos(t)\,,\operatorname{sen}(t)\,,z) = (\cos(t)\,,\operatorname{sen}(t)\,,z)$$

Queda entonces

$$\iint_{S_3} F \cdot \vec{n}\, dS = + \iint_D F\big[\vec{\Phi}(t,z)\big] \cdot \left(\vec{\Phi}_t(t,z) \times \vec{\Phi}_z(t,z)\right) dtdz$$

$$\iint_{S_3} F \cdot \vec{n}\, dS = + \iint_D (\cos(t)\,,\operatorname{sen}(t)\,,z) \cdot (\cos(t)\,,\operatorname{sen}(t)\,,0)\, dtdz$$

$$\iint_{S_3} F \cdot \vec{n}\, dS = \iint_D (\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t))\, dtdz = \iint_D dtdz$$

$$\iint_{S_3} F \cdot \vec{n}\, dS = \left(\int_{t=0}^{t=2\pi} dt\right)\left(\int_{z=0}^{z=2} dz\right) = 4\pi$$

$$\iint_{S_3} F \cdot \vec{n}\, dS = 4\pi$$

Que es valor de la integral de superficie del campo

$$F(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big) = (x,y,z)$$

a través de la superficie cilíndrica

$$S: x^2 + y^2 = 1 \wedge 0 \leq z \leq 2$$

orientada según la normal unitaria $\vec{n}$ exterior al cilindro vertical S.

De este modo, resulta que

$$I_s = \oiint_S F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS = \iint_{S_1} F \cdot \vec{n}_1\, dS + \iint_{S_2} F \cdot \vec{n}_2\, dS + \iint_{S_3} F \cdot \vec{n}_3\, dS$$

$$I_s = \oiint_S F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS = 2\pi + 0 + 4\pi = 6\pi$$

Esto es

$$I_s = \oiint_S F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS = 6\pi$$

<u>Cálculo de la integral triple</u>

$$I_T = \iiint_\Omega Div(F)\, dxdydz$$

Donde Ω es el sólido cilíndrico

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 2\}$$

Limitado por S.

En este caso, la divergencia del campo

$$F(x, y, z) = \big(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\big) = (x, y, z)$$

es

$$Div(F) = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3$$

$$Div(F) = 3$$

Luego, resulta

$$I_T = \iiint_\Omega Div(F)\, dxdydz = \iiint_\Omega 3\, dxdydz = 3 \iiint_\Omega 1\, dxdydz$$

Ahora, para calcular la integral triple, se aplica la <u>transformación cilíndrica</u>. Así, queda

$$I_T = \iiint_\Omega Div(F)\, dxdydz = \iiint_\Omega 3\, dxdydz = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\int_{r=0}^{r=1} \left(\int_{z=0}^{z=2} 3 \cdot r dz \right) dr \right) d\theta$$

$$I_T = \iiint_\Omega Div(F)\, dxdydz = \left(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \right) \left(\int_{r=0}^{r=1} 3r\, dr \right) \left(\int_{z=0}^{z=2} dz \right) = 2\pi \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 = 6\pi$$

Resulta entonces que

$$I_T = \iiint\limits_{\Omega} Div(F)\, dxdydz = 6\pi$$

Y de este modo, se verifica la igualdad

$$\oiint\limits_{S} F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS = \iiint\limits_{\Omega} Div(F)\, dxdydz$$

Ejemplo 5. Aplicar el Teorema de la divergencia para calcular la integral de superficie del campo vectorial

$$F(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big) = (x^3, y^3, z^3)$$

a través de la superficie esférica

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

orientada según la normal exterior.

El ejercicio consiste en valerse de la igualdad

$$\oiint\limits_{S} F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS = \iiint\limits_{\Omega} Div(F)\, dxdydz$$

Para calcular el valor de la integral de superficie a partir de calcular la integral triple.

La divergencia del campo vectorial

$$F(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big) = (x^3, y^3, z^3)$$

es

$$Div(F) = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

Y el sólido limitado por S, es el sólido esférico

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

Entonces, por el Teorema de la divergencia, se tiene que

$$\oiint\limits_{S} F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS = \iiint\limits_{\Omega} Div(F)\, dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz$$

Ahora, para calcular la integral triple, se aplica la transformación esférica. Así, resulta

$$\oiint_S F\cdot\vec{n}_{ext}\,dS=\iiint_\Omega Div(F)\,dxdydz=\iiint_{\Omega'} 3\rho^2\cdot(\rho^2\operatorname{sen}(\varphi))\,d\rho d\theta d\varphi$$

Siendo

$$\Omega'=\{(\rho,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3\colon 0\le\rho\le 1\wedge 0\le\theta\le 2\pi\wedge 0\le\varphi\le\pi\}$$

luego

$$\oiint_S F\cdot\vec{n}_{ext}\,dS=\iiint_\Omega Div(F)\,dxdydz=\left(\int_{\rho=0}^{\rho=1}3\rho^4\,d\rho\right)\left(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\right)\left(\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}\operatorname{sen}(\varphi)\,d\varphi\right)$$

$$\oiint_S F\cdot\vec{n}_{ext}\,dS=\iiint_\Omega Div(F)\,dxdydz=\left(\frac{3}{5}\rho^5\Big|_{\rho=0}^{\rho=1}\right)\left(\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\right)\left(-\cos(\varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}\right)$$

$$\oiint_S F\cdot\vec{n}_{ext}\,dS=\iiint_\Omega Div(F)\,dxdydz=\frac{3}{5}\cdot 2\pi\cdot 2=\frac{12}{5}\pi$$

En conclusión, la integral de superficie del campo vectorial

$$F(x,y,z)=\big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\big)=(x^3,y^3,z^3)$$

A través de la superficie esférica

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2+z^2=1\}$$

Orientada según la <u>normal exterior</u>, es igual a

$$\oiint_S F\cdot\vec{n}_{ext}\,dS=\frac{12}{5}\pi$$

Si se hubiese pedido calcular

$$\oiint_S F\cdot\vec{n}_{int}\,dS=-\oiint_S F\cdot\vec{n}_{ext}\,dS=-\frac{12}{5}\pi$$

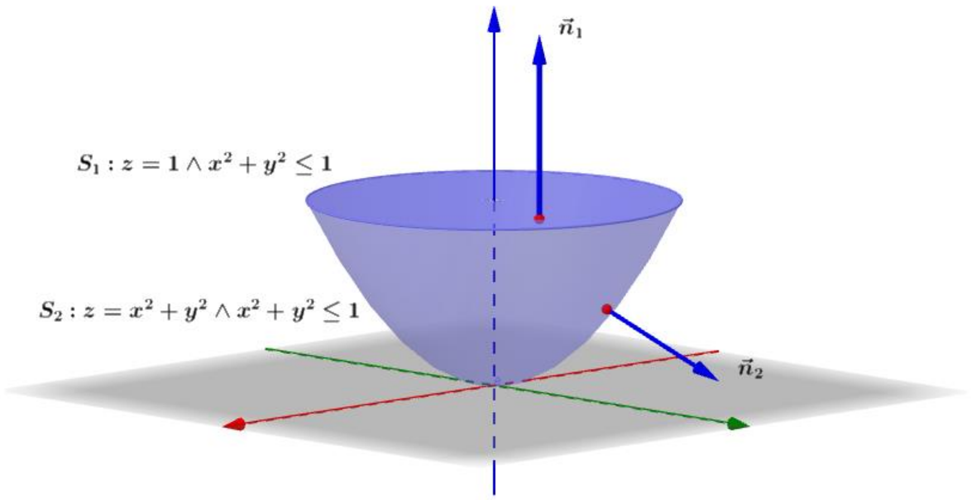
Ejemplo 6. <u>Aplicar el Teorema de la divergencia para calcular la integral de superficie</u> del campo vectorial

$$F(x,y,z)=\big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\big)=(x-y,x+y,-z)$$

a través de la superficie $S=\partial\Omega$, frontera del sólido

$$\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2\le z\le 1\}$$

Orientada según la normal exterior.



<u>Representación del sólido Ω, las superficies que conforman su frontera y la orientación heredada de la orientación exterior de su frontera</u>

Así como en el ejemplo anterior, este ejercicio consiste en valerse de la igualdad establecida en el Teorema de la divergencia, a saber

$$\oiint\limits_{S} F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS = \iiint\limits_{\Omega} Div(F)\, dxdydz$$

para calcular el valor de la integral de superficie a partir de calcular la integral triple.

La divergencia del campo vectorial

$$F(x, y, z) = \big(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\big) = (x - y, x + y, -z)$$

es

$$Div(F) = 1 + 1 - 1 = 1$$

$$Div(F) = 1$$

Luego, se tiene que

$$\oiint\limits_{S} F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS = \iiint\limits_{\Omega} Div(F)\, dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} 1\, dxdydz$$

Aplicando la <u>transformación cilíndrica</u> para calcular la integral doble de la derecha, queda

$$\oiint\limits_{S} F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS = \iiint\limits_{\Omega} Div(F)\, dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} 1\, dxdydz$$

$$\oiint_S F\cdot\vec{n}_{ext}\,dS=\iiint_\Omega Div(F)\,dxdydz=\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left(\int_{r=0}^{r=1}\left(\int_{z=r^2}^{z=1}1\cdot r dz\right)dr\right)d\theta$$

Esto es

$$\oiint_S F\cdot\vec{n}_{ext}\,dS=\iiint_\Omega Div(F)\,dxdydz=\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left(\int_{r=0}^{r=1}r(1-r^2)dr\right)d\theta$$

$$\oiint_S F\cdot\vec{n}_{ext}\,dS=\iiint_\Omega Div(F)\,dxdydz=\left(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\right)\left(\int_{r=0}^{r=1}(r-r^3)dr\right)$$

$$\oiint_S F\cdot\vec{n}_{ext}\,dS=\iiint_\Omega Div(F)\,dxdydz=2\pi\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\Big|_{r=0}^{r=1}\right)=2\pi\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$$

Es decir que la integral de superficie del campo vectorial

$$F(x,y,z)=\big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\big)=(x-y,x+y,-z)$$

a través de la superficie $S=\partial\Omega$, frontera del sólido

$$\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2\leq z\leq 1\}$$

orientada según la normal exterior, es

$$\oiint_S F\cdot\vec{n}_{ext}\,dS=\frac{\pi}{2}$$

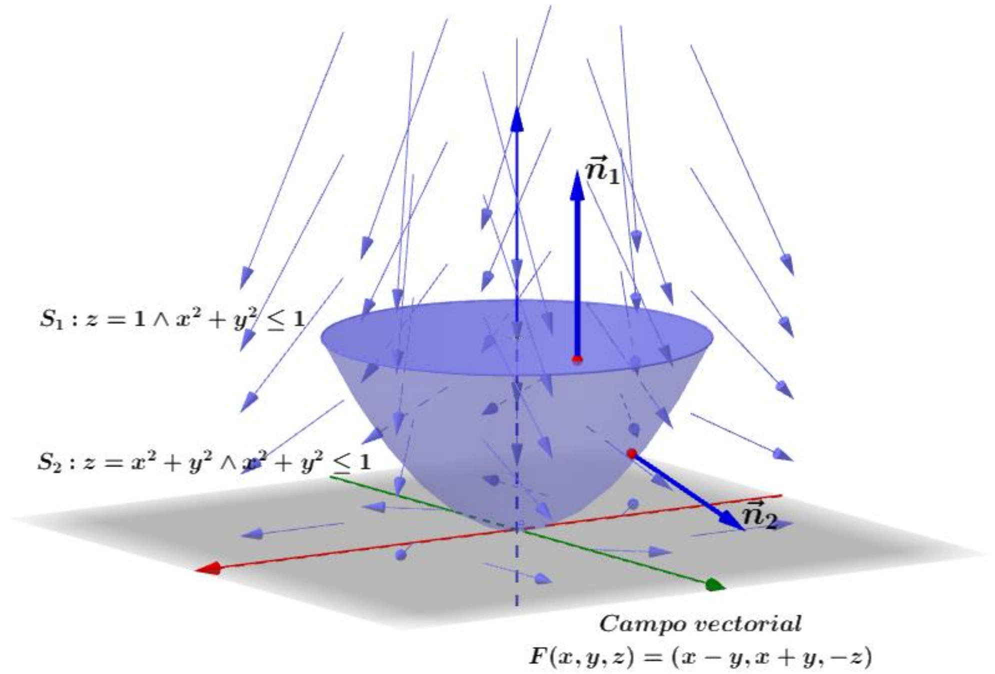
Ejemplo 6 (Complemento). Calcular la integral de superficie del campo vectorial

$$F(x,y,z)=\big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\big)=(x-y,x+y,-z)$$

A través de la superficie $S=\partial\Omega$, frontera del sólido

$$\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2\leq z\leq 1\}$$

orientada según la normal exterior.



Representación geométrica de las superficies S_1 y S_1 junto con la representación del campo vectorial $F(x,y,z)$

i) Cálculo de la integral se superficie de

$$F(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big) = (x-y, x+y, -z)$$

a través de la superficie plana S_1

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\}$$

La parametrización cartesiana de S_1 es

$$\vec{\Phi}(x,y) = (x,y,1)$$

Con dominio paramétrico

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Luego

$$\vec{\Phi}_x(x,y) = (1,0,0)$$

$$\vec{\Phi}_y(x,y) = (0,1,0)$$

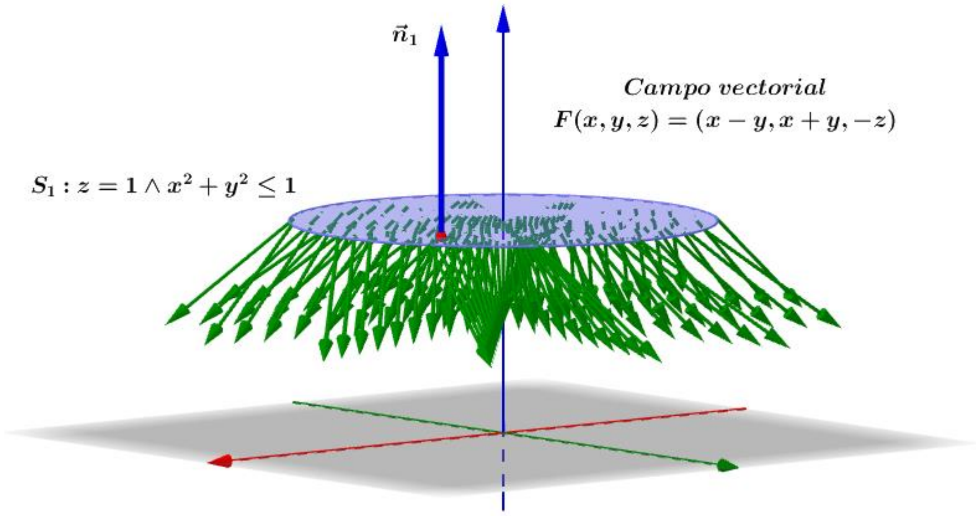
Y luego

$$\vec{\Phi}_x(x,y) \times \vec{\Phi}_y(x,y) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1)$$

O sea

$$\vec{\Phi}_x(x,y) \times \vec{\Phi}_y(x,y) = (0,0,1)$$

Que es la normal ascendente, pues posee tercera componente siempre positiva. Entonces, el signo que se antepone a la integral doble es el positivo.



Representación geométrica del campo vectorial $F(x,y,z) = (x-y,x+y,-z)$ aplicado sobre los puntos de la superficie S_2

$$F\left[\vec{\Phi}(x,y)\right] = F(x,y,1) = (x-y, x+y, -1)$$

$$\iint_{S_1} F \cdot \vec{n}\, dS = + \iint_D F\left[\vec{\Phi}(x,y)\right] \cdot \left(\vec{\Phi}_x(x,y) \times \vec{\Phi}_y(x,y)\right) dxdy$$

$$\iint_{S_1} F \cdot \vec{n}\, dS = + \iint_D (x-y, x+y, -1) \cdot (0,0,1) dxdy = + \iint_D -1\, dxdy$$

$$\iint_{S_1} F \cdot \vec{n}\, dS = - \iint_D 1\, dxdy = -a(D) = -\pi \cdot 1^2 = -\pi$$

O, aplicando la transformación polar, resulta

$$\iint_{S_1} F \cdot \vec{n}\, dS = - \iint_D 1\, dxdy = - \iint_{D'} 1 \cdot r\, drd\theta$$

$$\iint_{S_1} F \cdot \vec{n}\, dS = - \iint_{D'} 1 \cdot r\, drd\theta = -\left(\int_{r=0}^{r=1} r\, dr\right)\left(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta\right) = -\frac{1}{2} \cdot 2\pi = -\pi$$

En definitiva

$$\iint_{S_1} F \cdot \vec{n}\, dS = -\pi$$

Que es el valor de la integral de superficie de F, a través de S_1, orientando la superficie según la normal ascendente.

ii) Cálculo de la integral de superficie de

$$F(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big) = (x-y, x+y, -z)$$

A través de la superficie parabólica S_2

$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Si bien se puede utilizar la parametrización cartesiana de S_2, que es

$$\overrightarrow{\Phi}_2(x,y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

Con dominio paramétrico

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

A modo ilustrativo, se calculará la integral de superficie pedida, <u>aplicando la parametrización cilíndrica de S_2</u>. Esta es

$$\overrightarrow{\Phi}(r,\theta) = \big(x(r,\theta), y(r,\theta), z(r,\theta)\big) = (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta), r^2)$$

Cuyo dominio paramétrico es

$$D^* = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 1 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Así, resulta

$$\overrightarrow{\Phi}_r(r,\theta) = (\cos(\theta), \mathrm{sen}(\theta), 2r)$$

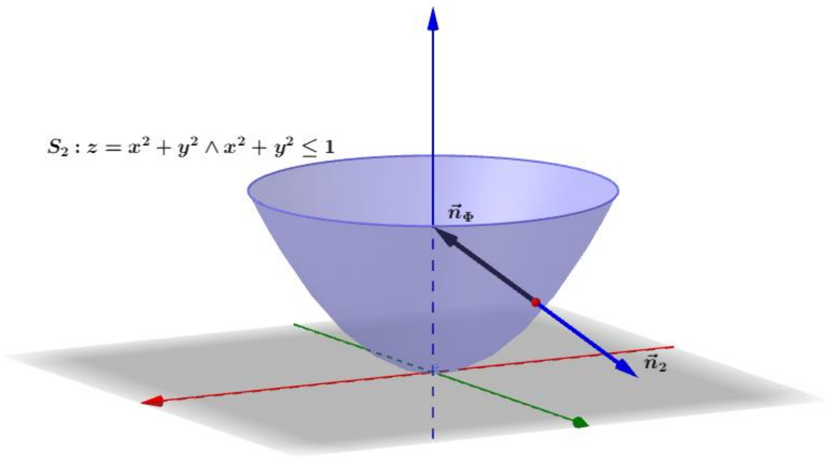
$$\overrightarrow{\Phi}_\theta(r,\theta) = (-r\,\mathrm{sen}(\theta), r\cos(\theta), 0)$$

$$\overrightarrow{\Phi}_r(r,\theta) \times \overrightarrow{\Phi}_\theta(r,\theta) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) & 2r \\ -r\,\mathrm{sen}(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = (-2r^2\cos(\theta), -2r^2\,\mathrm{sen}(\theta), r)$$

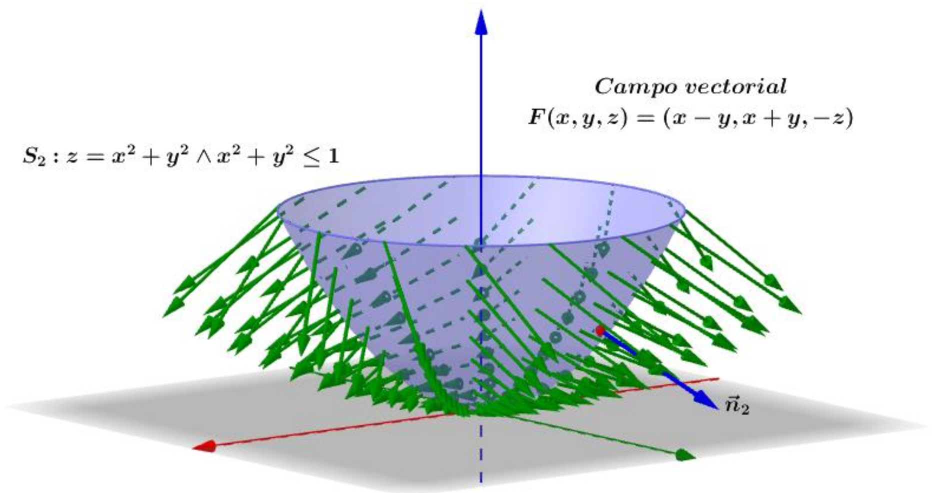
Es decir que la normal dada por la parametrización es

$$\overrightarrow{\Phi}_r(r,\theta) \times \overrightarrow{\Phi}_\theta(r,\theta) = (-2r^2\cos(\theta), -2r^2\,\mathrm{sen}(\theta), r)$$

Ahora, dado que $0 \leq r \leq 1$, la tercera componente es positiva, o nula para $r = 0$, se deduce que es la normal ascendente. Así que es opuesta a la normal al paraboloide, heredada de la orientación exterior del sólido Ω. De este modo, se obtiene que el signo que se antepone a la integral doble es el negativo.



La normal $\vec{n}_2$ heredada de la orientación exterior de S es opuesta a la normal $\vec{n}_\Phi$ ofrecida por la parametrización



Representación geométrica del campo vectorial $F(x, y, z) = (x - y, x + y, -z)$ aplicado sobre los puntos de la superficie S_2

Resulta así

$$\iint_{S_2} F \cdot \vec{n}\, dS = -\iint_{D^*} F[\vec{\Phi}(r, \theta)] \cdot \left(\vec{\Phi}_r(r, \theta) \times \vec{\Phi}_\theta(r, \theta)\right) dr d\theta$$

Recordando que

$$F(x, y, z) = (x - y, x + y, -z)$$

y

$$\vec{\Phi}(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta), r^2)$$

Queda entonces

$$\iint_{S_2} F \cdot \vec{n}\, dS = -\iint_{D^*} F[\vec{\Phi}(r,\theta)] \cdot \left(\vec{\Phi}_r(r,\theta) \times \vec{\Phi}_\theta(r,\theta)\right) drd\theta$$

$$\iint_{S_2} F \cdot \vec{n}\, dS = -\iint_{D^*} F(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta), r^2) \cdot (-2r^2\cos(\theta), -2r^2\,\mathrm{sen}(\theta), r) drd\theta =$$

$$-\iint_{D^*} (r\cos(\theta) - r\,\mathrm{sen}(\theta), r\cos(\theta) + r\,\mathrm{sen}(\theta), -r^2) \cdot (-2r^2\cos(\theta), -2r^2\,\mathrm{sen}(\theta), r) drd\theta$$

Efectuando los cálculos resulta

$$\iint_{S_2} F \cdot \vec{n}\, dS = -\iint_{D^*} (-2r^3 - r^3)\, drd\theta$$

$$\iint_{S_2} F \cdot \vec{n}\, dS = -\iint_{D^*} (-3r^3)\, drd\theta = \iint_{D^*} (3r^3)\, drd\theta$$

Y así, resulta

$$\iint_{S_2} F \cdot \vec{n}\, dS = 3\iint_{D^*} (r^3)\, drd\theta = 3\left(\int_{r=0}^{r=1} r^3\, dr\right)\left(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta\right) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{3}{2} \cdot \pi$$

Esto es

$$\iint_{S_2} F \cdot \vec{n}\, dS = \frac{3}{2} \cdot \pi$$

Que es el valor de la integral de superficie del campo vectorial

$$F(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big) = (x - y, x + y, -z)$$

A través de la superficie parabólica S_2

$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\}$$

orientada según la normal descendente. Resulta entonces que

$$\oiint_S F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS = \iint_{S_1} F \cdot \vec{n}_1\, dS + \iint_{S_2} F \cdot \vec{n}_2\, dS = -\pi + \frac{3}{2} \cdot \pi = \frac{\pi}{2}$$

Es decir que

$$\oiint\limits_{S} F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS = \frac{\pi}{2}$$

Y este es el valor de la integral de superficie del campo

$$F(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big) = (x-y, x+y, -z)$$

a través de la superficie $S = \partial\Omega$, frontera del sólido parabólico

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$$

orientada según la normal exterior.

Ejemplo 7. Verificar el Teorema de la divergencia para el campo vectorial

$$F(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big) = (0, y, 0)$$

y la superficie esférica

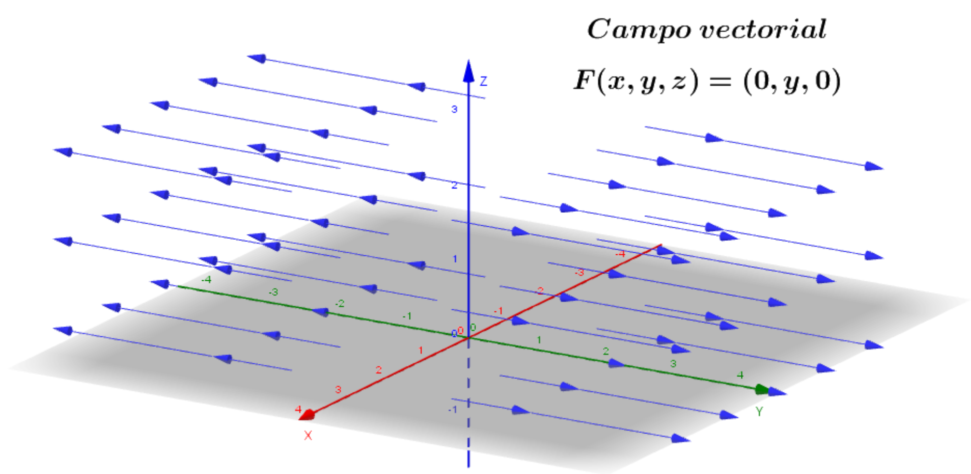
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

frontera del sólido esférico

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

En este caso, se trata de verificar la igualdad

$$\oiint\limits_{S=\partial\Omega} F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS = \iiint\limits_{\Omega} Div(F)\, dxdydz$$



Representación geométrica del campo vectorial $F(x,y,z) = (0,y,0)$

Cálculo de la integral de superficie

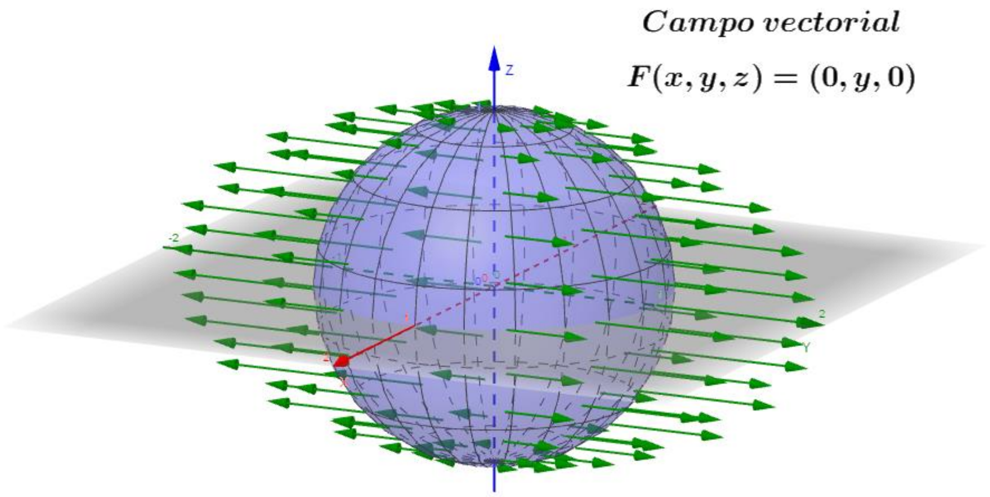
$$I_s = \oiint_S F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS$$

Se considera la parametrización esférica de S

$$\vec{\Phi}(\theta, \varphi) = (\cos(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\varphi)\,, \operatorname{sen}(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\varphi)\,, \cos(\varphi))$$

Con dominio paramétrico

$$D = \{(\, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \theta \le 2\pi \wedge 0 \le \varphi \le \pi\}$$



Representación geométrica del campo vectorial $F(x, y, z) = (0, y, 0)$ aplicado sobre los puntos de la superficie S

Las derivadas parciales son

$$\vec{\Phi}_\theta(\theta, \varphi) = (-\operatorname{sen}(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\varphi)\,, \cdot \cos(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\varphi)\,, 0)$$

$$\vec{\Phi}_\varphi(\theta, \varphi) = (\cos(\theta) \cdot \cos(\varphi)\,, \operatorname{sen}(\theta) \cdot \cos(\varphi)\,, -\operatorname{sen}(\varphi))$$

De este modo, resulta

$$\vec{\Phi}_\theta(\theta, \varphi) \times \vec{\Phi}_\varphi(\theta, \varphi) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\operatorname{sen}(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\varphi) & \cos(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\varphi) & 0 \\ \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) & \operatorname{sen}(\theta) \cdot \cos(\varphi) & -\operatorname{sen}(\varphi) \end{vmatrix}$$

$$\vec{\Phi}_\theta(\theta, \varphi) \times \vec{\Phi}_\varphi(\theta, \varphi) = (-\cos(\theta) \cdot \operatorname{sen}^2(\varphi)\,, -\operatorname{sen}(\theta) \cdot \operatorname{sen}^2(\varphi)\,, -\cos(\varphi) \cdot \operatorname{sen}(\varphi))$$

Que se puede escribir como

$$\vec{\Phi}_\theta(\theta, \varphi) \times \vec{\Phi}_\varphi(\theta, \varphi) = -\operatorname{sen}(\varphi) \cdot (\cos(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\varphi)\,, \operatorname{sen}(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\varphi)\,, \cos(\varphi))$$

Es decir que la normal ofrecida por la parametrización es

$$\vec{\Phi}_\theta(\theta,\varphi)\times\vec{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi) = -\operatorname{sen}(\varphi)\cdot\vec{\Phi}(\theta,\varphi)$$

Ahora, teniendo en cuenta que para los valores

$$0\le\varphi\le\pi$$

Resulta

$$\operatorname{sen}(\varphi)\ge 0$$

Entonces

$$-\operatorname{sen}(\varphi)\le 0$$

Esto quiere decir que la expresión

$$\vec{\Phi}_\theta(\theta,\varphi)\times\vec{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi) = -\operatorname{sen}(\varphi)\cdot\vec{\Phi}(\theta,\varphi)$$

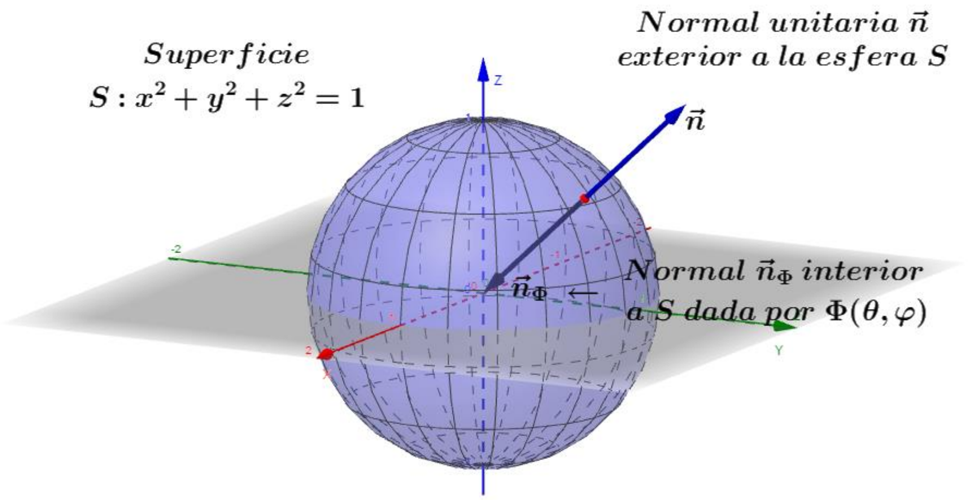
muestra que la normal ofrecida por la parametrización se obtiene al multiplicar a cada terna

$$\vec{\Phi}(\theta,\varphi)$$

por el número no positivo

$$-\operatorname{sen}(\varphi)$$

Y esto significa que $\vec{n}_\Phi$ es la normal interior a la superficie, por lo que en la integral de superficie a calcular se antepone un signo menos.



Representación geométrica de la superficie esférica S, el vector normal unitario $\vec{n}$ exterior a S y la normal $\vec{n}_\Phi$ interior a S dada por la parametrización $\vec{\Phi}(\theta,\varphi)$

Por otra parte, recordando que

$$F(x,y,z)=\big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\big)=(0,y,0)$$

Y que

$$\vec{\Phi}(\theta,\varphi) = (\cos(\theta)\cdot \operatorname{sen}(\varphi), \operatorname{sen}(\theta)\cdot \operatorname{sen}(\varphi), \cos(\varphi))$$

se tiene

$$F\left[\vec{\Phi}(\theta,\varphi)\right] = (0, \operatorname{sen}(\theta)\cdot \operatorname{sen}(\varphi), 0)$$

Y dado que

$$\vec{\Phi}_\theta(\theta,\varphi)\times\vec{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi) = (-\cos(\theta)\cdot \operatorname{sen}^2(\varphi), -\operatorname{sen}(\theta)\cdot \operatorname{sen}^2(\varphi), -\cos(\varphi)\cdot \operatorname{sen}(\varphi))$$

Resulta

$$F\left[\vec{\Phi}(\theta,\varphi)\right]\cdot\left(\vec{\Phi}_\theta(\theta,\varphi)\times\vec{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi)\right) = -\operatorname{sen}^2(\theta)\cdot \operatorname{sen}^3(\varphi)$$

Entonces

$$\oiint_S F\cdot\vec{n}_{ext}\,dS = -\iint_D F\left[\vec{\Phi}(\theta,\varphi)\right]\cdot\left(\vec{\Phi}_\theta(\theta,\varphi)\times\vec{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi)\right)d\theta d\varphi$$

$$\oiint_S F\cdot\vec{n}_{ext}\,dS = -\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}\left(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} -\operatorname{sen}^2(\theta)\cdot \operatorname{sen}^3(\varphi)\,d\theta\right)d\varphi$$

Finalmente

$$\oiint_S F\cdot\vec{n}_{ext}\,dS = \left(\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi}\operatorname{sen}^3(\varphi)\,d\varphi\right)\left(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\operatorname{sen}^2(\theta)\,d\theta\right) = \frac{4}{3}\pi$$

Es decir que la integral de superficie del campo vectorial F a través de la superficie S orientada según la normal unitaria exterior $\vec{n}$ es

$$\oiint_S F\cdot\vec{n}_{ext}\,dS = \frac{4}{3}\pi$$

<u>Cálculo de la integral triple</u>

$$I_T = \iiint_\Omega Div(F)\,dxdydz$$

donde Ω es el sólido esférico

$$\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 1\}$$

limitado por S.

En este caso, la divergencia del campo

$$F(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big) = (0,y,0)$$

es

$$Div(F) = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(0) = 1$$

$$Div(F) = 1$$

Luego, resulta

$$I_T = \iiint\limits_{\Omega} Div(F)\, dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} 1\, dxdydz$$

Aplicando la <u>transformación esférica</u>, la integral triple se expresa de la siguiente, manera

$$I_T = \iiint\limits_{\Omega} Div(F)\, dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} 1\, dxdydz = \iiint\limits_{\Omega'} \rho^2 \operatorname{sen}(\varphi)\, d\rho d\theta d\varphi$$

donde

$$\Omega' = \{(\rho,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le \rho \le 1 \wedge 0 \le \theta \le 2\pi \wedge 0 \le \varphi \le \pi\}$$

Entonces

$$I_T = \iiint\limits_{\Omega} Div(F)\, dxdydz = \left(\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \left(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left(\int_{\rho=0}^{\rho=1} \rho^2 \operatorname{sen}(\varphi)\, d\rho \right) d\theta \right) d\varphi \right)$$

Finalmente, se tiene que

$$I_T = \iiint\limits_{\Omega} Div(F)\, dxdydz = \frac{4}{3}\pi$$

En consecuencia, se verifica la igualdad

$$\oiint\limits_{S=\partial\Omega} F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS = \iiint\limits_{\Omega} Div(F)\, dxdydz$$

<u>Observación</u>. Para calcular la integral

$$\int \operatorname{sen}^3(\theta)\, d\theta$$

Se puede utilizar la identidad

$$\operatorname{sen}^3(\theta) = \operatorname{sen}^2(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\theta) = (1 - \cos^2(\theta)) \cdot \operatorname{sen}(\theta) = \operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}(\theta) \cdot \cos^2(\theta)$$

O directamente aplicar el Método de integración por partes.

Cálculo del volumen de un sólido aplicando el Teorema de la Divergencia

En las condiciones de Teorema de la Divergencia vale la siguiente igualdad

$$\oiint_{S=\partial\Omega} F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS = \iiint_{\Omega} Div(F)\, dxdydz$$

Ahora bien, si se tiene que el campo vectorial $F(x, y, z)$ posee divergencia constante D_0 positiva, es decir

$$F(x, y, z) = (P, Q, R)$$

$$Div(F)(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) = constante = D_0 > 0$$

La igualdad anterior asume la forma

$$\oiint_{S} F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS = \iiint_{\Omega} Div(F)\, dxdydz = \iiint_{\Omega} D_0\, dxdydz$$

$$\oiint_{S} F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS = \iiint_{\Omega} Div(F)\, dxdydz = D_0 \iiint_{\Omega} 1\, dxdydz$$

$$\frac{1}{D_0} \oiint_{S} F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS = vol(\Omega)$$

Y de esta relación se deduce que

$$\iiint_{\Omega} dxdydz = \frac{1}{D_0} \oiint_{S} F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS$$

Ahora, teniendo en cuenta que el volumen del sólido Ω es igual a la integral triple

$$vol(\Omega) = \iiint_{\Omega} dxdydz$$

Se tiene entonces la relación

$$vol(\Omega) = \iiint_{\Omega} dxdydz = \frac{1}{D_0} \oiint_{S} F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS$$

Que permite calcular el volumen del sólido Ω a partir de calcular una integral de superficie a través de su frontera, la superficie cerrada $S = \partial\Omega$.

Por ejemplo, para el campo vectorial

$$F(x,y,z)=\big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\big)=(x,y,z)$$

Se tiene

$$Div(F)=\frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z)=D_0=3$$

Entonces, siendo Ω un sólido de $\mathbb{R}^3$, se tiene

$$vol(\Omega)=\iiint\limits_{\Omega} dxdydz=\frac{1}{D_0}\oiint\limits_{S=\partial\Omega} F\cdot\vec{n}_{ext}\,dS=\frac{1}{3}\oiint\limits_{S=\partial\Omega} F\cdot\vec{n}_{ext}\,dS$$

Esto es

$$vol(\Omega)=\frac{1}{3}\oiint\limits_{S=\partial\Omega} F\cdot\vec{n}_{ext}\,dS$$

Ejemplo 7. Calcular el volumen del sólido esférico de centro en el origen y radio R

$$\Omega: x^2+y^2+z^2\le\rho_0^2$$

Se sabe que una parametrización de la superficie S frontera del sólido Ω es la siguiente

$$\vec{\Phi}(\theta,\varphi)=(\rho_0\cdot\cos(\theta)\cdot\operatorname{sen}(\varphi),\rho_0\cdot\operatorname{sen}(\theta)\cdot\operatorname{sen}(\varphi),\rho_0\cdot\cos(\varphi))$$

Con dominio paramétrico

$$D=\{(\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^2/0\le\theta\le 2\pi\wedge 0\le\varphi\le\pi\}$$

Se tiene así que

$$\vec{\Phi}_\theta(\theta,\varphi)=(-\rho_0\cdot\operatorname{sen}(\theta)\cdot\operatorname{sen}(\varphi),\rho_0\cdot\cos(\theta)\cdot\operatorname{sen}(\varphi),0)$$

$$\vec{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi)=(\rho_0\cdot\cos(\theta)\cdot\cos(\varphi),\rho_0\cdot\operatorname{sen}(\theta)\cdot\cos(\varphi),-\rho_0\cdot\operatorname{sen}(\varphi))$$

De este modo, resulta

$$\vec{\Phi}_\theta(\theta,\varphi)\times\vec{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -\rho_0\cdot\operatorname{sen}(\theta)\cdot\operatorname{sen}(\varphi) & \rho_0\cdot\cos(\theta)\cdot\operatorname{sen}(\varphi) & 0\\ \rho_0\cdot\cos(\theta)\cdot\cos(\varphi) & \rho_0\cdot\operatorname{sen}(\theta)\cdot\cos(\varphi) & -\rho_0\cdot\operatorname{sen}(\varphi)\end{vmatrix}$$

$$\vec{\Phi}_\theta(\theta,\varphi)\times\vec{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi)=(-\rho_0^2\cos(\theta)\cdot\operatorname{sen}^2(\varphi),-\rho_0^2\operatorname{sen}(\theta)\cdot\operatorname{sen}^2(\varphi),-\rho_0^2\cdot\cos(\varphi)\cdot\operatorname{sen}(\varphi))$$

$$\vec{\Phi}_\theta(\theta,\varphi)\times\vec{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi)=(-\rho_0^2\cos(\theta)\cdot\operatorname{sen}^2(\varphi),-\rho_0^2\operatorname{sen}(\theta)\cdot\operatorname{sen}^2(\varphi),-\rho_0^2\cdot\cos(\varphi)\cdot\operatorname{sen}(\varphi))$$

$$\vec{\Phi}_\theta(\theta,\varphi) \times \vec{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi) = -\rho_0 \operatorname{sen}(\varphi)\,(\rho_0 \cos(\theta)\cdot \operatorname{sen}(\varphi)\,, \rho_0 \operatorname{sen}(\theta)\cdot \operatorname{sen}(\varphi)\,, \rho_0 \cdot \cos(\varphi))$$

$$\vec{\Phi}_\theta(\theta,\varphi) \times \vec{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi) = -\rho_0 \operatorname{sen}(\varphi)\,\vec{\Phi}(\theta,\varphi)$$

Que es la normal interior a la superficie, por lo que en la integral de superficie a calcular se antepone un signo menos.

Por otra parte, siendo

$$F(x,y,z) = (x,y,z)$$

resulta

$$F\left[\vec{\Phi}(\theta,\varphi)\right] = (\rho_0 \cdot \cos(\theta)\cdot \operatorname{sen}(\varphi)\,, \rho_0 \cdot \operatorname{sen}(\theta)\cdot \operatorname{sen}(\varphi)\,, \rho_0 \cdot \cos(\varphi))$$

Y así

$$\begin{aligned} F\left[\vec{\Phi}(\theta,\varphi)\right] \cdot \left(\vec{\Phi}_\theta(\theta,\varphi) \times \vec{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi)\right) = \\ = (\rho_0 \cdot \cos(\theta)\cdot \operatorname{sen}(\varphi)\,, \rho_0 \cdot \operatorname{sen}(\theta)\cdot \operatorname{sen}(\varphi)\,, \rho_0 \cdot \cos(\varphi)) \\ \cdot (-\rho_0^2 \cos(\theta)\cdot \operatorname{sen}^2(\varphi)\,, -\rho_0^2 \operatorname{sen}(\theta)\cdot \operatorname{sen}^2(\varphi)\,, -\rho_0^2 \cdot \cos(\varphi)\cdot \operatorname{sen}(\varphi)) \end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{aligned} F\left[\vec{\Phi}(\theta,\varphi)\right] \cdot \left(\vec{\Phi}_\theta(\theta,\varphi) \times \vec{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi)\right) = \\ = -\rho_0^3 \operatorname{sen}^3(\varphi)\,(\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)) - \rho_0^3 \cos^2(\varphi)\cdot \operatorname{sen}(\varphi) \end{aligned}$$

O sea

$$F\left[\vec{\Phi}(\theta,\varphi)\right] \cdot \left(\vec{\Phi}_\theta(\theta,\varphi) \times \vec{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi)\right) = -\rho_0^3 \operatorname{sen}^3(\varphi) - \rho_0^3 \cos^2(\varphi)\cdot \operatorname{sen}(\varphi)$$

$$F\left[\vec{\Phi}(\theta,\varphi)\right] \cdot \left(\vec{\Phi}_\theta(\theta,\varphi) \times \vec{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi)\right) = -\rho_0^3 \operatorname{sen}(\varphi)\,(\operatorname{sen}^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) = -\rho_0^3 \operatorname{sen}(\varphi)$$

$$F\left[\vec{\Phi}(\theta,\varphi)\right] \cdot \left(\vec{\Phi}_\theta(\theta,\varphi) \times \vec{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi)\right) = -\rho_0^3 \operatorname{sen}(\varphi)$$

Luego

$$vol(\Omega) = \frac{1}{3} \oiint_{S=\partial\Omega} F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS = \frac{1}{3}\left(- \iint_D F\left[\vec{\Phi}(\theta,\varphi)\right] \cdot \left(\vec{\Phi}_\theta(\theta,\varphi) \times \vec{\Phi}_\varphi(\theta,\varphi)\right)\, d\theta d\varphi \right)$$

(el signo menos se antepone por el sentido opuesto de la normal obtenida según la parametrización con respecto al vector normal exterior que es el que se aplica en el Teorema de la Divergencia)

$$vol(\Omega) = \frac{1}{3} \oiint_{S=\partial\Omega} F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS = \frac{1}{3}\left(- \iint_D -\rho_0^3 \operatorname{sen}(\varphi)\ d\theta d\varphi \right)$$

$$vol(\Omega) = \frac{1}{3} \oiint_{S=\partial\Omega} F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS = \frac{1}{3} \iint_D \rho_0^3 \operatorname{sen}(\varphi)\, d\theta d\varphi$$

En definitiva

$$vol(\Omega) = \frac{1}{3} \oiint_{S=\partial\Omega} F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS = \frac{1}{3} \iint_D \rho_0^3 \operatorname{sen}(\varphi)\, d\theta d\varphi = \frac{1}{3}\rho_0^3 \left(\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \operatorname{sen}(\varphi)\, d\varphi \right)\left(\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \right)$$

$$vol(\Omega) = \frac{1}{3} \oiint_{S=\partial\Omega} F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS = \frac{1}{3} \iint_D \rho_0^3 \operatorname{sen}(\varphi)\, d\theta d\varphi = \frac{1}{3}\rho_0^3 \left(-\cos(\varphi) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \right)\left(\theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right)$$

$$vol(\Omega) = \frac{1}{3} \oiint_{S=\partial\Omega} F \cdot \vec{n}_{ext}\, dS = \frac{1}{3} \iint_D R^3 \operatorname{sen}(\varphi)\, d\theta d\varphi = \frac{1}{3}\rho_0^3 (2)(2\pi) = \frac{4}{3}\pi\rho_0^3$$

Es decir que el volumen del sólido esférico

$$\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq \rho_0^2$$

Es

$$vol(\Omega) = \frac{4}{3}\pi\rho_0^3$$