MÓDULO 1

INVERSA DE UNA MATRIZ

Formas para calcularla

Primera parte

Correspondiente a la clase 3

Matriz inversa

La inversa de una matriz A de R^{nxn}, si existe, es la matriz A^{-1} perteneciente a R^{nxn} que cumple que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Maneras de calcular la inversa de una matriz

a) *Por definición*
b) *Por el método de Gauss -Jordan*
c) *Por Determinantes y la matriz Adjunta*
(Lo veremos más adelante)

a) *Por definición*

- Supongamos que la matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Se le asignan letras a los elementos de la inversa de la matriz que debemos calcular:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a) *Por definición*

- Se aplica la definición:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Se resuelve el producto de matrices $A.A^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta multiplicación debe ser igual a la matriz Identidad

a) *Por definición*

- Se igualan los elementos de las matrices:

$$a + c = 1$$

$$c = 0$$

$$b + d = 0$$

$$d = 1$$

Y se resuelve el sistema

de ecuaciones

- Se resuelven los sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{c} a + c = 1 \\ c = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\text{a=1}} \; ; \; \boxed{\text{c=0}}$$

$$\left.\begin{array}{c} b + d = 0 \\ d = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\text{d=1}} \; ; \; \boxed{\text{b=-1}}$$

Matriz Inversa

- Por lo que la inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Como existe la matriz inversa , se dice que la matriz A es inversible, regular o no singular

Verificación

- Verifica que el producto $A.A^{-1}$ es la identidad

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0+1.0 & 1.(-1)+1.1 \\ 0.0+1.0 & 0.(-1)+1.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) *Por método de Gauss - Jordan*

Consideremos la matriz A de 2x2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Hallaremos su inversa, si es que existe, por el método de Gauss Jordan

b) *Por método de Gauss - Jordan*

- Se escribe la matriz original (izquierda) al lado, la matriz identidad (derecha):

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

- Mediante este método se debe obtener la matriz identidad en el lugar de la matriz original, quedando la inversa de la matriz en el lugar que estaba la matriz identidad:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & u & v \end{array}\right)$$

b) *Por método de Gauss - Jordan*

- El 3 que ocupa el lugar (2;1) debe dar 0 y para ello se realizan la siguiente operación:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - 3.F_1$$

- El 2 que ocupa el lugar (1;2) queremos que de 0, para ello sumamos las dos filas:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$F_1 \rightarrow F_1 + F_2$$

b) *Por método de Gauss - Jordan*

- El valor del elemento (2;2) debe ser 1 entonces multiplicamos la fila 2 por -1/2

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \dfrac{3}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$F_2 \to -\frac{1}{2} F_2$$

b) *Por método de Gauss - Jordan*

Hemos obtenido la Identidad del lado izquierdo

La matriz inversa quedó
a la derecha:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

b) *Por método de Gauss - Jordan*

- La matriz inversa resultó:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Verificamos:

$$A.A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.(-2)+2.\frac{3}{2} & 1.1+2.\left(-\frac{1}{2}\right) \\ 3.(-2)+4.\frac{3}{2} & 3.1+4.\left(-\frac{1}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) *Por Determinantes*

Por Determinantes y la matriz Adjunta

(Lo veremos más adelante)

Universidad Nacional de La Matanza

GRACIAS

En la clase 5 seguiremos con estos temas