Unidad 8
Integral de línea de funciones vectoriales
Guía de clase. Com 02

INTEGRALES DE LÍNEA DE CAMPOS VECTORIALES

Llamaremos campos vectoriales a las funciones vectoriales en las cuales el dominio y codominio están en$\mathbb{R}^n$, para $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{F}: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

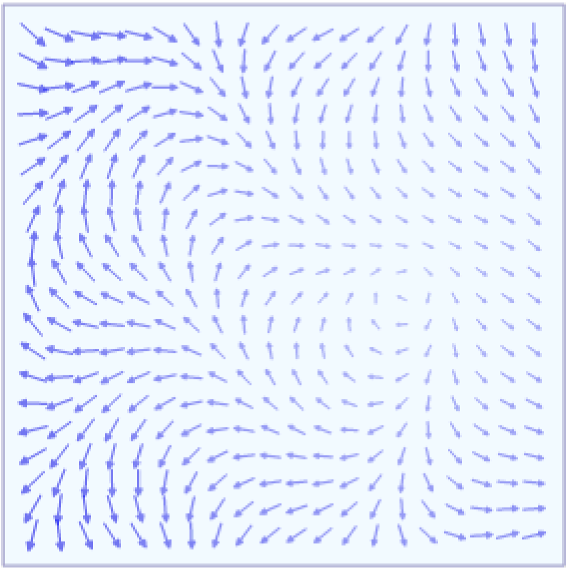
$$\vec{F}(x, y, z) = \big(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\big)$$

Para $\mathbb{R}^2$:

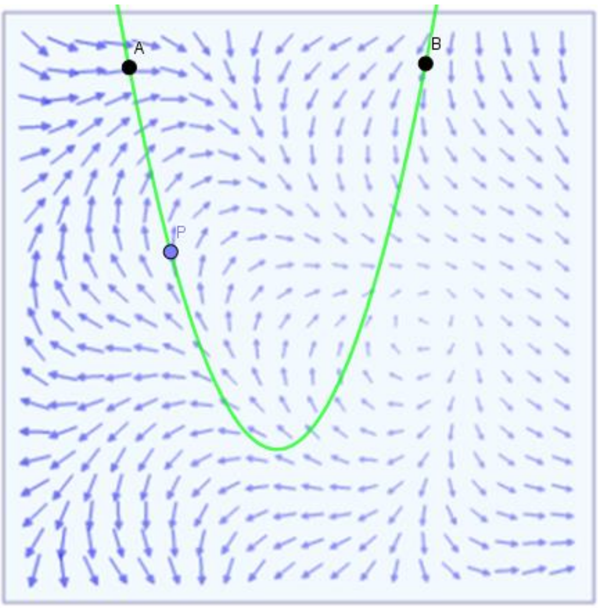
$$\vec{F}: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\vec{F}(x, y) = \big(P(x, y), Q(x, y)\big)$$

A continuación se muestra el gráfico de un campo vectorial del plano , en dicho gráfico cada vector tiene su extremo inicial en (x, y) y $\vec{F}_{(x,y)}$ corresponde a su extremo final.



Si un objeto puntual se mueve dentro de dicho campo vectorial, tiene sentido calcular el trabajo que realiza el campo sobre dicho objeto moviéndose desde A hasta B como se muestra en la figura.



Link al applet de geogebra para una visualización dinámica de algunos vectores imágenes para un campo vectorial dado

https://www.geogebra.org/m/s5nk4xgg

Definición de integral de línea de un campo vectorial.

Dado un campo vectorial continuo

$$\vec{F}(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big)$$

y dada una curva C de clase C^1 con parametrización $\vec{\gamma}_{(t)} = (x(t), y(t), z(t)),\ a \leq t \leq b$, Imagen$(\vec{\gamma}) \subseteq U$.

(Recordemos que para distinguir los casos del plano $(\mathbb{R}^2)$ y del espacio $(\mathbb{R}^3)$ se usarán respectivamente las letras $\vec{r}$ y $\vec{\gamma}$).

La integral de línea del campo $\vec{F}$ a lo largo de la curva C se define como:

$$\int_{t=a}^{b} \underbrace{\vec{F}\big(\vec{\gamma}(t)\big) \cdot \vec{\gamma}'(t)}_{Función\ escalar}\ dt = \int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}$$

Con

$$\vec{F}(\vec{\gamma}(t)) = \left(P(\vec{\gamma}(t)), Q(\vec{\gamma}(t)), R(\vec{\gamma}(t))\right)$$

y,

$$\vec{\gamma}'(t) = \left(x'(t), y'(t), z'(t)\right)$$

Notación (importante):

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_{t=a}^{b} \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\, dt =$$

$$= \int_{t=a}^{b} \left(P(\vec{\gamma}(t)), Q(\vec{\gamma}(t)), R(\vec{\gamma}(t))\right) \cdot \left(x'(t), y'(t), z'(t)\right) dt =$$

$$= \int_{t=a}^{b} \left(P(\vec{\gamma}(t)) \underbrace{x'(t)\,dt}_{dx} + Q(\vec{\gamma}(t)) \underbrace{y'(t)\,dt}_{dy} + R(\vec{\gamma}(t)) \underbrace{z'(t)\,dt}_{dz}\right) =$$

$$(x,y,z) \in \mathcal{C}, \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = x'(t)\,dt \\ dy = y'(t)\,dt \\ dz = z'(t)\,dt \end{cases}, \quad \vec{\gamma}_{(t)} = (x,y,z) \in \mathcal{C}$$

$$= \int_{\mathcal{C}} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz$$

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_{t=a}^{b} \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \vec{\gamma}'(t)\, dt = \int_{\mathcal{C}} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz}$$

Para un campo del plano la igualdad anterior es:

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t=a}^{b} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt = \int_{\mathcal{C}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy}$$

Ejercicio 1

Calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para

$\vec{F} = (2xy, x^2 + y)$

Para cada una de las siguientes curvas

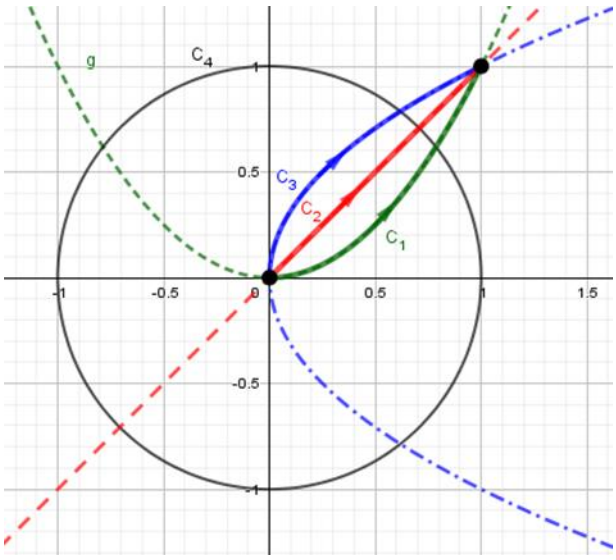
$C_1 : y = x^2,\ 0 \leq x \leq 1,$ Punto inicial cuando $x = 0$, punto final si $x = 1$

$C_2 : y = x,\ 0 \leq x \leq 1$

$C_3 : x = y^2,\ 0 \leq y \leq 1$

$C_4 : x^2 + y^2 = 1$ recorrida en cualquier sentido

Calcular las integrales de línea para cada curva, las tres primeras dan $3/2$ y la última da cero.



Primera parte

$\vec{F} = (2xy, x^2 + y)$

$C_1 : y = f(x) = x^2,\ 0 \leq x \leq 1$

Haciendo $t = x = x(t),\ y = f(x) = f(t) = y(t)$, puede expresarse la curva C_1 como:

$\vec{r_1}(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (t, t^2),\ \text{con } t \in [0,1]$!!!!!

De esta manera

$$x(t) = t \to dx = x'(t)\, dt = dt$$

$$y(t) = t^2 \to dy = y'(t)\, dt = 2t\, dt$$

$$\vec{r}_1{}'(t) = (1{,}2t)$$

$$\vec{F} = (2xy, x^2 + y)$$

$$\vec{F}[\vec{r}_1(t)] = (2t^3, 2t^2)$$

$$P[\vec{r}_1(t)] = 2t^3$$

$$Q[\vec{r}_1(t)] = 2t^2$$

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 = \int_{t=0}^{1} \vec{F}[\vec{r}_1(t)] \cdot \vec{r}_1'(t)\, dt =$$

$$\int_{t=0}^{1} (P[\vec{r}_1(t)], Q[\vec{r}_1(t)]) \cdot \vec{r}_1{}'(t)\, dt = \int_{t=0}^{1} \underbrace{(2t^3, 2t^2) \cdot (1{,}2t)\, dt}_{2t^3+4t^3=6t^3} = \frac{3}{2}$$

Cálculo de la misma integral de línea, con la fórmula

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = \int_{\mathcal{C}} P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy \overset{*}{=}$$

$\vec{F} = (2xy, x^2 + y)$

$C_1 \colon y = f(x) = x^2, 0 \le x \le 1$

Si $y = x^2$, entonces $dy = 2x\, dx$

$$P\big(x, y(x)\big) = 2\, x\, x^2 = 2x^3$$

$$Q\big(x, y(x)\big) = x^2 + x^2 = 2x^2$$

$$\overset{*}{=} \int_{x=0}^{1} 2x^3\, dx + 2x^2\, 2x\, dx = \int_{x=0}^{1} 6x^3\, dx = \frac{3}{2}$$

$\vec{F} = (2xy, x^2 + y)$

$C_2 \colon y = x,\ 0 \le x \le 1$

$\vec{r}_2(t) = (t, t),$ con $t \in [0{,}1]$

$$x(t) = t \to dx = x'(t)\, dt = dt$$

$$y(t) = t \to dy = y'(t)\,dt = \,dt$$
$$\vec{r}_1{}'(t) = (1,1)$$
$$\vec{F}[\vec{r}_1(t)] = (2t^2, t^2 + t)$$
$$P[\vec{r}_2(t)] = 2t^2$$
$$Q[\vec{r}_2(t)] = t^2 + t$$
$$\int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}_2 = \int_{t=0}^{1} (P[\vec{r}_2(t)] + Q[\vec{r}_2(t)])\,dt = \int_{t=0}^{1} (2t^2 dt + (t^2 + t)\,dt) = \frac{3}{2}$$

$\vec{F} = (2xy, x^2 + y)$

C_3: $x = f(y) = y^2, 0 \le y \le 1$

$t = y$

$\vec{r}_3(t) = (t^2, t)$, con $t \in [0,1]$

$$x(t) = t^2 \to dx = x'(t)\,dt = 2t\,dt$$
$$y(t) = t \to dy = y'(t)\,dt = \,dt$$
$$\vec{r}_1{}'(t) = (2t, 1)$$
$$\vec{F}[\vec{r}_1(t)] = (2t^3, t^4 + t)$$
$$P[\vec{r}_3(t)] = 2t^3$$
$$Q[\vec{r}_3(t)] = t^4 + t$$
$$\int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{r}_3 = \int_{t=0}^{1} \vec{F}[\vec{r}_3(t)]\cdot \vec{r}_3'(t)\,dt = \int_{t=0}^{1} (P[\vec{r}_1(t)], Q[\vec{r}_1(t)])\cdot \vec{r}_1{}'(t)\ \,dt$$
$$= \int_{t=0}^{1} (2t^3, t^4 + t)\cdot(2t, 1)\,dt = \frac{3}{2}$$

Cálculo de la misma integral de línea, con la fórmula

$$\int_{C} \vec{F}\cdot d\vec{\gamma} = \int_{C} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \overset{*}{\triangleq}$$

$\vec{F} = (2xy, x^2 + y)$

C_3: $x = f(y) = y^2, 0 \le y \le 1$

Si $x = y^2$, entonces $dx = 2y\,dy$

$$P(x(y), y) = 2\,y^2\,y = 2y^3$$
$$Q(x(y), y) = (y^2)^2\ + y = y^4 + y$$

$$\overset{*}{=} \int_{y=0}^{1} 2y^3\, 2y\, dy + (y^4 + y)\ dy = \int_{y=0}^{1} (5y^4 + y)\, dy = \frac{3}{2}$$

$\vec{F} = (2xy, x^2 + y)$

$C_4: x^2 + y^2 = 1$ recorrida en cualquier sentido

$$C_4: \vec{r}_4(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))\ \text{ con } \ 0 \le t \le 2\pi$$

$$\vec{r}_4{}'(t) = \big(x'(t), y'(t)\big) = (-\operatorname{sen}(t), \cos(t))$$

$$\vec{F}[\vec{r}_4(t)] = (2\cos(t)\operatorname{sen}(t), \cos^2(t) + \operatorname{sen}(t))$$

$$\int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{r}_4 = \int_{t=0}^{2\pi} \vec{F}[\vec{r}_4(t)] \cdot \vec{r}_4'(t)\, dt =$$

$$= \int_{t=0}^{2\pi} \underbrace{(2\cos(t)\operatorname{sen}(t), \cos^2(t) + \operatorname{sen}(t)) \cdot (-\operatorname{sen}(t), \cos(t))}_{-2\cos(t)\operatorname{sen}^2(t) + \cos^3(t) + \cos(t)\operatorname{sen}(t)}\ dt = 0$$

Tarea, calcular las tres primeras integrales de línea para la mismas curvas recorridas en sentido contrario.

Ejercicio 2

1. Dado el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y) = (e^y, e^x)$$

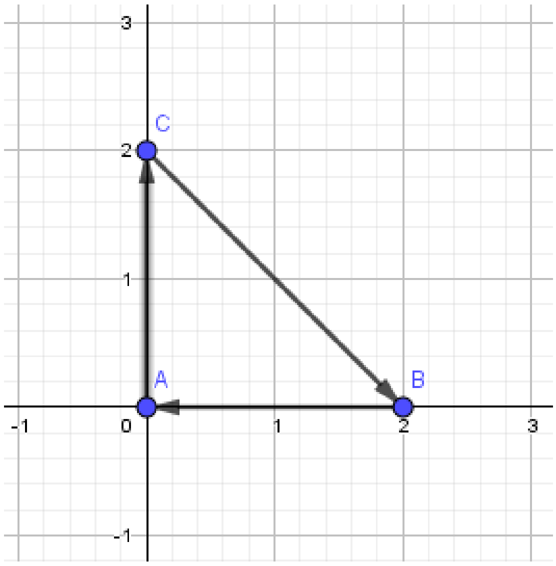
Calcular la integral de línea de $\vec{F}$ sobre el triángulo de vértices (0,0), (2,0), (0,2), recorrido en sentido horario.

$\mathcal{C}_1$: $r_1(t) = \overrightarrow{(0,0),(0,2)} = (0,t)$, $con \;\; 0 \le t \le 2$

$r_1{}'(t) = (0,1)$

$\vec{F}[r_1(t)] = (e^t, e^0)$

$\vec{F}[r_1(t)] \cdot r_1'(t) = (e^t, 1) \cdot (0,1) = 1$



$\mathcal{C}_2$: $r_2(t) = \overrightarrow{(0,2),(2,0)} = (0,2) + t\big((2,0) - (0,2)\big) =$

$= (2t, 2 - 2t)$, $con \;\; 0 \le t \le 1$

$r_2{}'(t) = (2,-2)$

$\vec{F}[r_2(t)] = (e^{2-2t}, e^{2t})$

$\mathcal{C}_3$: $r_3(t) = \overrightarrow{(2,0),(0,0)} = (t,0)$, $con \;\; 0 \le t \le 2$

$r_3{}'(t) = (1,0)$

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\overrightarrow{r_1} + \int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\overrightarrow{r_2} + \int_{\mathcal{C}_3} \vec{F} \cdot d\overrightarrow{r_3}$$

Tarea: graficar e identificar diferentes sentidos de recorrido

$$(\operatorname{sen}(t), \operatorname{sen}(t)), \qquad con \; 0 \le t \le 2\pi$$

Propiedad:

Si $\mathcal{C}$ tiene una parametrización $\vec{\gamma}$, entonces llamando $-\mathcal{C}$ a la curva $\mathcal{C}$ recorrida en sentido contrario mediante una parametrización $\vec{\beta}$, se cumple:

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = -\int_{-\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{\beta}}$$

HERRAMIENTA IMPORTANTE!!!!!!!

Ejercicio 3

Dado el campo vectorial

$$\vec{F}_{(x,y)} = (x - x\,y, x^2 + y^2)$$

Calcular la integral de línea de $\vec{F}$ sobre la curva frontera del recinto delimitado por $x^2 + y^2 \le 4$, $y \ge |x|$, recorriendo dicha curva en sentido positivo.

Rta: 0