Derivadas parciales de orden superior

Llamamos así a derivar nuevamente la función que ya ha sido derivada en forma general. En análisis I dada una función $y = f(x)$ derivable, a partir de $y' = f'(x)$, tiene sentido derivar ésta última expresión, obteniéndose la que se conoce como derivada segunda, y así sucesivamente se calcula la derivada tercera, etc., éstas se denotan como y''(x)=$f''(x)$, $y'''(x) = f'''(x)$.
Para el caso de una función escalar de tres variables, con dominio en el espacio tridimensional, es:

$$w = f(x, y, z)$$

$$w_x = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = f_x(x, y, z)$$

$$w_y = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = f_y(x, y, z)$$

$$w_z = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = f_z(x, y, z)$$

$$w_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y, z)$$

$$w_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y\, \partial x} = f_{xy}(x, y, z)$$

$$w_{xz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z\, \partial x} = f_{xz}(x, y, z)$$

$$w_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x\, \partial y} = f_{yx}(x, y, z)$$

$$w_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y, z)$$

$$w_{yz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z\, \partial y} = f_{yz}(x, y, z)$$

$$w_{zx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x\, \partial z} = f_{zx}(x, y, z)$$

$$w_{zy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial y\, \partial z} = f_{zy}(x, y, z)$$

$$w_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial z^2} = f_{zz}(x, y, z)$$

Y así sucesivamente, se pueden obtener las derivadas terceras y más.

Para nosotros, con las derivadas segundas tendremos suficiente.

Ejemplo: Hallar hasta las derivadas parciales segundas de f

$$f(x,y,z) = x^2\, y^3\, e^z + \cos(2x - 3y + 5z)$$

Derivadas parciales primeras de f:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = f_x(x,y,z) = 2x\, y^3\, e^z - 2\, sen(2x - 3y + 5z)$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = f_y(x,y,z) = 3x^2\, y^2\, e^z + 3\, sen(2x - 3y + 5z)$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = f_z(x,y,z) = x^2\, y^3\, e^z - 5\, sen(2x - 3y + 5z)$$

Derivadas parciales segundas de f:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} = 2y^3\, e^z - 4\cos(2x - 3y + 5z)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y\, \partial x} = 6x\, y^2\, e^z + 6\cos(2x - 3y + 5z)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z\, \partial x} = 2x\, y^3\, e^z - 10\cos(2x - 3y + 5z)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x\, \partial y} = 6x\, y^2\, e^z + 6\cos(2x - 3y + 5z)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} = 6\, x^2 y\, e^z - 9\cos(2x - 3y + 5z)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z\, \partial y} = 3x^2\, y^2\, e^z + 15\cos(2x - 3y + 5z)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x\, \partial z} = 2x\, y^3\, e^z - 10\cos(2x - 3y + 5z)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y\, \partial z} = 3\, x^2\, y^2\, e^z + 15\cos(2x - 3y + 5z)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} = x^2\, y^3\, e^z - 25\cos(2x - 3y + 5z)$$

De lo expuesto precedentemente, se observa que hay tres pares de derivadas parciales segundas que son iguales, estas son:

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x\, \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z\,\partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x\,\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z\,\partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y\,\partial z}$$

El siguiente teorema nos pondrá más precisión sobre lo observado.

Teorema de Clairaut o de Schwarz

Dada la función $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con A un conjunto abierto no vacío, si las derivadas parciales $f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y}$ y $f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x}$, son continuas en A, entonces

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x} = f_{yx}(x,y)$$

Teorema de Taylor

Similar al teorema de Taylor visto en análisis I, tenemos el teorema de Taylor para varias variables. Nosotros expondremos solamente el de funciones escalares de dos variables de orden dos, ya que éste luego se usará para elaborar un criterio de clasificación de puntos críticos.

Dada la función $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con A un conjunto abierto no vacío y $f \in C^3$ (derivadas parciales hasta el orden 3 continuas), el polinomio de Taylor para la función $z = f(x,y)$ en las cercanías del punto $(x_0, y_0) \in A$ de orden 2 es

$$P(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}(y-y_0) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\,(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}(y-y_0)^2 + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y}(x-x_0)(y-y_0) +$$

$$+r(x-x_0, y-y_0)$$

Donde $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} r(x-x_0, y-y_0) = 0$

Ejemplo: hallar el polinomio de Taylor para la función $f(x,y) = x^{2y}$ en las cercanías de (1,1).

Resolución

$$f(1,1) = 1$$

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial x} = (2y\,x^{2y-1})|_{(1,1)} = 2$$

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial y} = (2\,x^{2y}\ln x)|_{(1,1)} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x^2} = (2y(2y-1)\,x^{2y-2})|_{(1,1)} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y \partial x} = (2x^{2y-1} + 4y\,x^{2y-1}\ln x)|_{(1,1)} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial y^2} = (4\,x^{2y}\ln^2 x)|_{(1,1)} = 0$$

Luego

$$P(x,y) = 1 + 2(x-1) + 0\,(y-1) + \frac{1}{2}\,2\,(x-1)^2 + \frac{1}{2}\,0\,(y-1)^2 + 2\,(x-1)(y-1)$$

Biblioteca digital. Cap 5, p. 177, 181.Cap 6, p. 224. Cálculo varias variables. W Mora.

Link contenidos pertinentes (Ctrl+Clic mouse para ir al enlace)
Khan Academy
En este sitio no hay información sobre este tema