ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA I
MÓDULO 5 – TRANSFORMACIONES LINEALES – PRIMERA CLASE

Lee las páginas 256 a 261 de Apunte III TEJIENDO EL ÁLGEBRA LINEAL. ("Observación Importante" se tratará en la segunda clase) Realiza todos los ejercicios y actividades propuestas en esas páginas. Del TG30 pág. 263 realiza los incisos 1, 2 y 3.

En este apunte encontrarás otras explicaciones y ejemplos correspondientes a estos temas.
También en el archivo llamado M5. EJERCITACIÓN COMPLEMENTARIA. PRIMERA CLASE están propuestos otros ejercicios y actividades.

Video de la cátedra que puede ayudarte con estos temas:

Prueba de Transformación lineal.

https://www.youtube.com/watch?v=3wqDpWT4gpw

Para empezar, recordemos algunas cuestiones:

Si A y B son conjuntos arbitrarios, una función f : A→ B es una relación entre los elementos de A y B que a cada elemento "x" de A le asigna un único elemento "y" de B. Escribimos y = f (x), "y" es la imagen de "x" por f.
A se denomina **dominio** de la función y B **conjunto de llegada** de la función.
La **imagen** de f es el subconjunto de B constituido por las imágenes de todos los elementos de a, por los correspondientes de cada elemento de A. Es decir:
Im (f) = $\{y \in B /$ existe $x \in A$ que cumple: $y = f(x)\}$

TRANSFORMACIÓN LINEAL:

Definición:

Si V y W son espacios vectoriales reales, una función f: V→W es una **transformación lineal** si y sólo si verifica:

a) $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$.

b) $f(k.\vec{u}) = k.f(\vec{u})$ $\forall k \in R$ y $\forall \vec{u} \in V$.

Advierte que una transformación lineal es una función que se establece entre dos espacios vectoriales, el Dominio V es un espacio vectorial y el conjunto de llegada W es otro espacio vectorial, la función f a cada vector de V le asigna un único vector de W.

Ejemplo:

Sea f: $R^2 \to R^2$, f ((x,y)) = (x + 2 y , 2 x - y)

Llamaremos $\vec{u}$ = (x ; y) y $\vec{v}$ = (a ; b) vale entonces:

$f(\vec{u} + \vec{v}) = f((x,y)+(a,b)) = f((x+a, y+b)) =$

$= ((x+a) +2 (y+b) , 2(x+a) - (y+b)) =$

$= (x+2y +a+2 b , 2x - y + 2 a - b) =$

$= (x+2 y , 2x - y) + (a+2 b , 2 a - b) = f(\vec{u}) +f(\vec{v})$

$f(k.\vec{u}\cdot) =f (k\cdot(x , y)) = f ((k\cdot x , k\cdot y)) =$

$= ((k\cdot x)+2(k\cdot y) , 2(k\cdot x)-(k\cdot y)) = (k\cdot(x+2 y) ,k\cdot(2 x - y)) =$

$= k\cdot(x+2 y, 2 x - y) = k\cdot f(\vec{u})$

Comprobamos entonces que f es una transformación lineal.

Además f puede expresarse en la forma:

$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ Llamando $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, finalmente podemos escribir: f(u) =A·u .

Usando las propiedades de las operaciones con matrices es sencillo probar la linealidad con esta representación:

f(u + v) = A(u+v) = A·u + A·v = f(u) + f(v)

f(k·u) = A(k·u) =k·(A·u) = k·f(u)

A partir de una matriz A $\in R^{mxn}$ (m filas y n columnas) podemos construir una aplicación lineal f: $R^n \to R^m$ mediante la expresión:
W = f(u) = A·u, o

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ w_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

la misma prueba dada anteriormente demuestra que f es lineal.
No es sorprendente que estas funciones sean lineales, ya que son sus propiedades las que dan origen a la definición de transformación lineal. Volveremos a esta cuestión la próxima clase.

PROPIEDADES DE UNA TRANFORMACIÓN LINEAL

Las siguientes propiedades de una transformación lineal f: V $\rightarrow W$ se deducen de su definición:

Si f es una transformación lineal se verifica:

1) f($\overrightarrow{0_V}$) = $\overrightarrow{0_W}$

2) f(-$\vec{u}$) = - f($\vec{u}$) $\forall\, \vec{u} \in V$

3) f($\vec{u}$ - $\vec{v}$) = f($\vec{u}$) - f($\vec{v}$) $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V$

4) f($a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n) = a_1 f(u_1) + a_2 f(u_2) + ... + a_n f(u_n)$ $\quad a_1, a_2, ..a_n \in R$ y $u_1, u_2, ...u_n \in V$

La última propiedad dice que la transformada de una combinación lineal de vectores de V es la combinación lineal de los vectores transformados con los mismos coeficientes.

NÚCLEO DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Definición:
Sea f: V $\rightarrow W$ una transformación lineal, el núcleo de f es:

$$\text{Nu(f)} = \{\vec{v} \in V \ / \ f(\vec{v}) = \overrightarrow{0_W}\}$$

Nota: por la propiedad 1) se infiere que el vector nulo de V siempre pertenece al núcleo de una transformación lineal.

Propiedad:

Nu(f) es un subespacio de V.

Demostración:

1) El vector nulo de V pertenece Nu(f) ya que de acuerdo a la propiedad 1) su imagen es el nulo del espacio de llegada W, f ($\overrightarrow{0_V}$) = $\overrightarrow{0_W}$

2) Se debe probar que cualesquiera sean $\vec{u}$ $\in$ Nu(f) y $\vec{v}$ $\in$ Nu(f) $\rightarrow$ $\vec{u} + \vec{v} \in$ Nu(f) .

Si $\vec{u}$ $\in$ Nu(f) $\rightarrow$ f ($\vec{u}$) = $\overrightarrow{0_W}$
Si $\vec{v}$ $\in$ Nu(f) $\rightarrow$ f ($\vec{v}$) = $\overrightarrow{0_W}$ sumamos miembro a miembro
f ($\vec{u}$) + f ($\vec{v}$) = $\overrightarrow{0_W} + \overrightarrow{0_W}$

Como f es una trasformación lineal, de acuerdo a la primera parte de la definición, la suma de las imágenes es igual a la imagen de la suma: $f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = f(\vec{u} + \vec{v})$ y además por neutro $\overrightarrow{0_W} + \overrightarrow{0_W} = \overrightarrow{0_W}$

Entonces: $f(\vec{u} + \vec{v}) = \overrightarrow{0_W}$ significa que la imagen de la suma es el neutro de W, entonces la suma $\vec{u} + \vec{v}$ pertenece al Núcleo de f.
Se cumple lo que queríamos probar: $\vec{u} + \vec{v} \in$ Nu(f)

3) Se debe probar que cualesquiera sea $\vec{u} \in$ Nu(f) y k $\in R \rightarrow$ k $\vec{u} \in$ Nu(f) .

Si $\vec{u} \in$ Nu(f) $\rightarrow f(\vec{u}) = \overrightarrow{0_W}$ multiplicamos ambos miembros por k real

$$k\ f(\vec{u}) = k\ \overrightarrow{0_W}$$

Como f es una trasformación lineal, de acuerdo a la segunda parte de la definición, el producto de un escalar por la imagen de un vector es igual a la imagen del producto del número real por el vector: $k\,f(\vec{u}) = f(k\vec{u})$ y por propiedad de espacios vectoriales $k\ \overrightarrow{0_W} = \overrightarrow{0_W}$

Entonces: $f(k\vec{u}) = \overrightarrow{0_W}$ significa que el producto del vector por un número real tiene como imagen al neutro de W, entonces k $\vec{u}$ pertenece al Núcleo de f, que es lo que debíamos probar.

Por 1) 2) y 3) Nu(f) es un subespacio de V.

IMAGEN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

La Imagen de una transformación lineal es el conjunto formado por todos los vectores de W que son los correspondientes de algún vector de V.

Im(f) $= \{\vec{w} \in W \,/\, \exists\ \vec{v} \in V \ \wedge\ f(\vec{v}) = \vec{w}\ \}$

Propiedad:

Im(f) es un subespacio de W.

1) El vector nulo de W ($\overrightarrow{0_W}$) pertenece Im(f) ya que de acuerdo a la propiedad 1) es imagen del vector nulo del espacio Dominio V, $\exists\ \overrightarrow{0_V} \in V \ \wedge\ f(\overrightarrow{0_V}) = \overrightarrow{0_W}$

2) Se debe probar que cualesquiera sean $\vec{u} \in$ Im(f) y $\vec{v} \in$ Im(f) $\rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in$ Im(f) .

Si $\vec{u} \in$ Im(f) $\rightarrow \exists\ \vec{t} \in V \ / \ f(\vec{t}) = \vec{u}$
Si $\vec{v} \in$ Im(f) $\rightarrow \exists\ \vec{s} \in V \ / \ f(\vec{s}) = \vec{v}$ sumamos miembro a miembro

$$\overline{f(\vec{t}) + f(\vec{s})} = \overline{\vec{u} + \vec{v}}$$

Como f es una trasformación lineal, de acuerdo a la primera parte de la definición, la suma de las imágenes es igual a la imagen de la suma: $f(\vec{t}) + f(\vec{s}) = f(\vec{t} + \vec{s})$ y además si $\vec{t} \in V$ y $\vec{s} \in V$ entonces $\vec{t} + \vec{s} \in V$, por ser V un espacio vectorial.

Entonces: $f(\vec{t} + \vec{s}) = \vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{t} + \vec{s} \in V$ entonces $\vec{u} + \vec{v}$ pertenece a la Imagen de f , por ser el correspondiente de $\vec{t} + \vec{s}$,es decir , se cumple lo que queríamos probar, la suma pertenece a la Imagen de f

3) Se debe probar que cualesquiera sea $\vec{u} \in \mathrm{Im}(f)$ y $k \in R \rightarrow k\,\vec{u} \in \mathrm{Im}(f)$.

Si $\vec{u} \in \mathrm{Im}(f) \rightarrow \exists\ \vec{t} \in V \ /\ f(\vec{t}) = \vec{u}$ multiplicamos ambos miembros por k real

$$k\, f(\vec{t}) = k\,\vec{u}$$

Como f es una trasformación lineal, de acuerdo a la segunda parte de la definición, el producto de un escalar por la imagen de un vector es igual a la imagen del producto del número real por el vector: $k\, f(\vec{t}) = f(k\,\vec{t})$.

Entonces: $f(k\,\vec{t}) = k\,\vec{u}$ y $k\,\vec{t} \in V$ por ser V un espacio vectorial cumple la ley externa.
Significa que $k\,\vec{u} \in \mathrm{Im}(f)$, por ser el correspondiente del vector $k\,\vec{t}$ que pertenece a V .
Entonces se cumple la ley externa

Por 1) 2) y 3) Im(f) es un subespacio de W.

Ejemplo: Sea f: $R^3 \rightarrow R^3$ f((x,y,z)) = (x + y + z, x - y +z , 2x + 2z)

a) Hallar una base del núcleo de f:

El núcleo es el conjunto de los vectores $\vec{v} \in V \ /\ f(\vec{v}) = \overrightarrow{0_W}$

f((x,y,z)) = (0 ; 0 ; 0) de acuerdo a la definición de f resulta el siguiente sistema de ecuaciones

$x + y + z = 0$
$x - y + z = 0$ que resolvemos por el método de Gauss
$2x + 2z = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 2 & 0 & 2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ \quad -2y = 0 \end{cases} \rightarrow \quad y = 0 \quad \wedge \quad x + z = 0 \quad \rightarrow \quad x = -z$$

Entonces los vectores $\vec{v}$ de R^3 que pertenecen al Nu (f) son tales que

$(x ; y , z) = (- z ; 0 ; z) = z . (-1 ; 0 ; 1)$

Se encuentra: Nu(f) = <(-1,0,1)>; obviamente, {(-1,0,1)} es una base y dim Nu (f) = 1

a) Hallar una base de Im(f)

Si $w \in$ Im(f), es de la forma:

$w = (x + y + z,\ x - y + z , 2x + 2z)$

$w = (x : x ; 2x) + (y ; - y ; 0) + (z ; z ; 2 z)$

$w = x(1,1,2) + y(1,-1,0) + z (1,1,2)$

A partir de la última identidad se tiene: Im(f) = <(1,1,2) , (1,-1,0) , (1,1,2)>

Extraemos una base, como el primer y último vector son igualesy los dos primeros son L.I., se obtiene :

B={(1,1,2) , (1,-1,0)} base de Im(f).

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN EL PLANO

Veremos ahora Transformaciones geométricas en el plano R^2 , algunas de las cuales estudiaste en el curso de Ingreso .
Estas funciones están definidas de R^2 en R^2, si bien pueden estudiarse en el espacio R^3, nosotros nos limitaremos al plano .

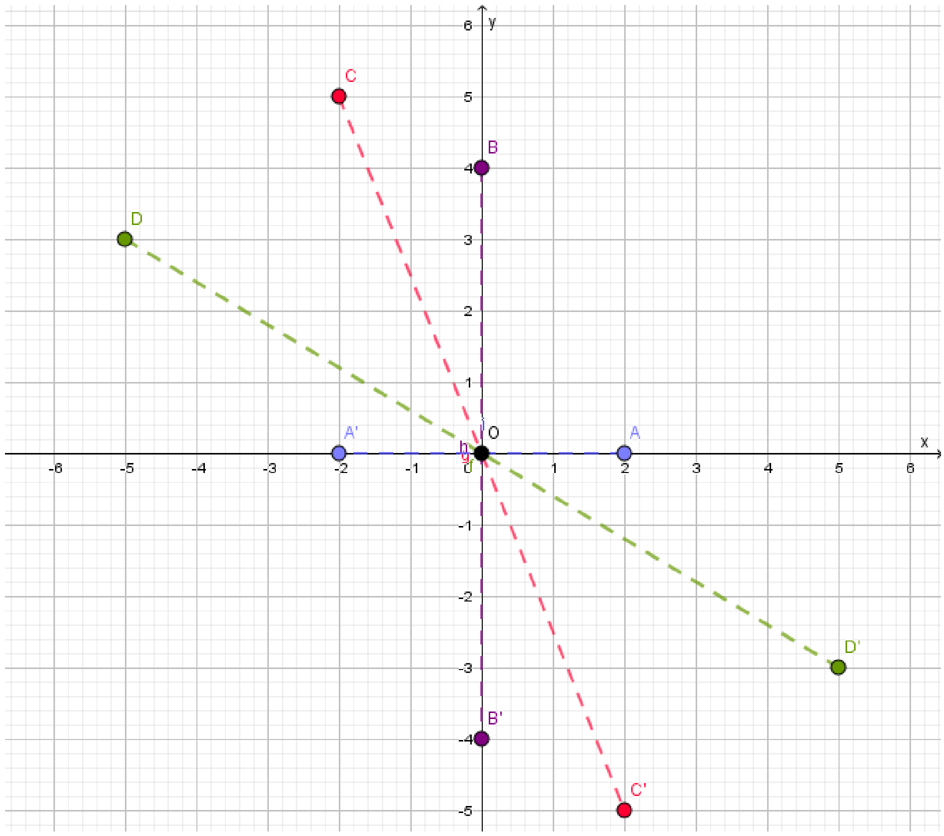
SIMETRÍA CENTRAL

A través de una simetría central a cada punto del plano le hace corresponder otro punto y solo otro, es un tipo de función puntual, una transformación.

Buscaremos los puntos simétricos respecto al origen de coordenadas O de varios puntos, recuerda que la simetría central a cada punto A del plano le hace corresponder un punto A' del mismo plano tal que los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OA'}$ son opuestos (están incluidos en la misma recta, tienen sentidos contrarios e igual norma)

A= (2; 0) → S_o (A) = (- 2 ; 0)
B= (0; 4) → S_o (B) = (0 ; - 4)
C= (–2; 5) → S_o (C) = (2 ; - 5)
D = (–5, 3) → S_o (D) = (5 ; - 3)
P= (x; y) → S_o (P) = (….. ; …..)

Los ubicaremos en un sistema de ejes cartesianos.



Grafica el segmento $\overline{CD}$ y comprueba geométricamente que la <u>*simetría*</u> realizada lo transforma en otro segmento $\overline{C_0 D_0}$ de la misma longitud del primero.

Puede notarse, que para cada punto la simetría da por resultado un único punto, es decir que **la simetría central** es una **función.**

La expresión de su fórmula es: $\boxed{S_o\ (x; y) = (-x; -y)}$

Analizaremos si la simetría cumple con las dos condiciones necesarias para ser una Transformación Lineal:

Consideramos $M = (m_1; m_2)$ y $N = (n_1; n_2)$ y k un número real cualquiera

a) $\mathbf{S_o}\ (M+N) = \mathbf{S_o}\ (M) + \mathbf{S_o}\ (N)$ para cualquier par de puntos M y N

b) $\mathbf{S_o}\ (k.M) = k.\ \mathbf{S}(M)$ para cual número k real y cualquier punto M

a) Sabemos que $M+N = (m_1, m_2) + (n_1, n_2) = (m_1 + n_1\ ; m_2 + n_2)$

luego $\mathbf{S_o}\ (M+N) = \mathbf{S_o}\ ((m_1 + n_1\ ; m_2 + n_2)) = (-(m_1 + n_1)\ ; -(m_2 + n_2)) = (-m_1 - n_1\ ; -m_2 - n_2)$

$\mathbf{S_o}\ (M+N) = (-m_1 - n_1\ ; -m_2 - n_2)$

como $\mathbf{S_o}$ (M) = S((m$_1$, m$_2$))= (–m$_1$, –m$_2$) y $\mathbf{S_o}$ (N) = S((n$_1$, n$_2$))= (–n$_1$, –n$_2$)

se obtiene $\mathbf{S_o}$ (M) +$\mathbf{S_o}$ (N) = (–m$_1$, –m$_2$) + (–n$_1$, –n$_2$) = (–m$_1$ – n$_1$; –m$_2$ – n$_2$)

$\mathbf{S_o}$ (M) +$\mathbf{S_o}$ (N) = (–m$_1$ – n$_1$; –m$_2$ – n$_2$) = $\mathbf{S_o}$ (M+N) Se cumple la primera parte.

b) Conociendo k.M = k. (m$_1$, m$_2$) = (k.m$_1$, k.m$_2$)

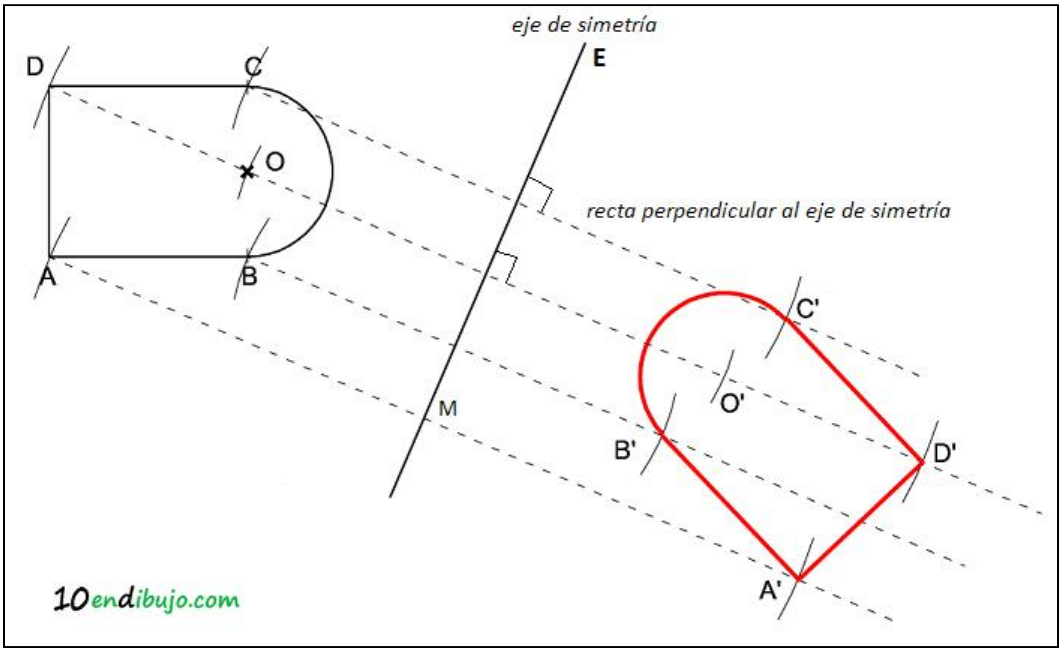
$\mathbf{S_o}$ (k.M) = $\mathbf{S_o}$ ((k.m$_1$, k.m$_2$)) = (–k.m$_1$, –k.m$_2$) = k. (–m$_1$, –m$_2$) = k. $\mathbf{S_o}$ (M)

Se cumplen las dos condiciones para ser una transformación lineal

La simetría central S_o respecto al origen de coordenadas O es una **transformación lineal**.

SIMETRÍA AXIAL

El siguiente esquema muestra la *simetría axial* de la figura[1] ABCD respecto al eje (de simetría) **E**.



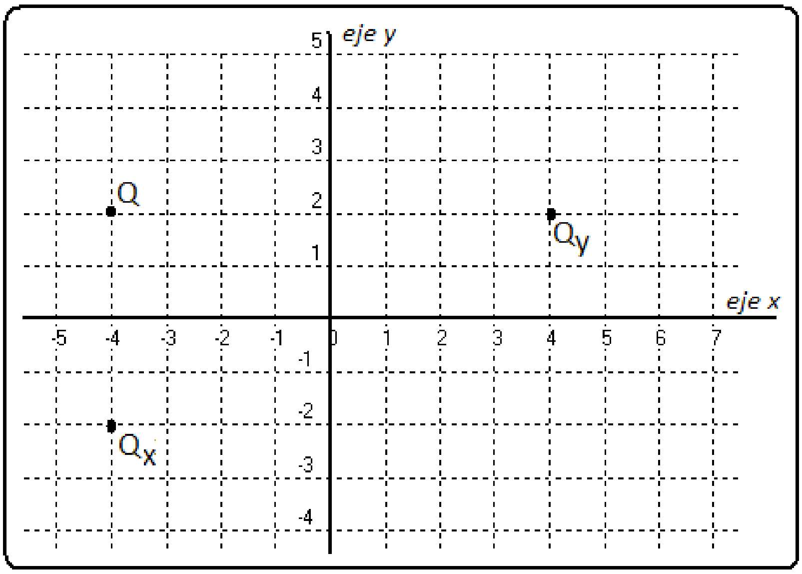
La imagen (o simétrico) del punto A es A’ que se obtiene *trazando la recta perpendicular a **E** que pasa por A y cuya intersección es M*; A’ se obtiene a una *distancia idéntica* a AM pero del “otro lado” del eje **E** (o sea en semiplanos opuestos).

De tal forma que el eje de simetría es la mediatriz del segmento determinado por cada punto y su imagen.

Nosotros abordaremos las simetrías axiales $\mathbf{S_x}$ y $\mathbf{S_y}$ según los ejes x e y respectivamente.

[1] http://www.10endibujo.com/wp-content/uploads/2014/05/03_simetria-axial.jpg

El dibujo muestra las simetrías axiales para un punto Q.



Q = (- 4 ; 2) su simétrico respecto del eje x es S_x (Q) = (- 4 ; -2) y el simétrico de Q respecto del eje y es **S_y (Q) = (4 ; 2)**

Otros ejemplos se encuentran en la siguiente tabla:

Punto	S_x: Simétrico eje x	S_y: Simétrico eje y
A= (2; 0)	S_x (A) = (2 ; 0)	**S_y** (A) = (- 2 ; 0)
B= (4; 0)	S_x (B) = (4 ; 0)	**S_y** (B) = (- 4 ; 0)
C= (–2; 5)	S_x (C) = (- 2 ; -5)	**S_y (** C) = (2 ; 5)
D = (–5, 3)	S_x (D) = (-5 ; - 3)	**S_y** (D) = (5 ; 3)
P= (x; y)	S_x (P) =	**S_y** (P) =

La expresión de sus fórmulas son: $\boxed{S_x\ (x; y) = (x ; - y)}$

$\boxed{S_y\ (x; y) = (- x ; y)}$

Demostraremos que S_x es una trasformación lineal.
Analizamos si la simetría cumple con las dos condiciones necesarias para ser una Transformación Lineal:

Consideramos M= (m_1; m_2) y N = (n_1; n_2) y k un número real cualquiera

a) **S**$_x$ (M+N) = **S**$_x$ (M) +**S**$_x$ (N) para cualquier par de puntos M y N
b) **S**$_x$ (k.M) = k. **S**$_x$ (M) para cual número k real y cualquier punto M

a) Sabemos que M+N= $(m_1, m_2) + (n_1, n_2) = (m_1 + n_1 ; m_2 + n_2)$

luego **S**$_x$ (M+N) = **S**$_x$ $((m_1 + n_1 ; m_2 + n_2)) = (m_1 + n_1 ; -(m_2 + n_2)) = (m_1 + n_1 ; -m_2 - n_2)$

$\mathbf{S}_x (M+N) = (m_1 + n_1 \; ; -m_2 - n_2)$

como $\mathbf{S}_x (M) = S_x ((m_1, m_2)) = (m_1, -m_2)$ y $\mathbf{S}_x (N) = S((n_1, n_2)) = (n_1, -n_2)$

Se obtiene $\mathbf{S}_x (M) + \mathbf{S}_x (N) = (m_1, -m_2) + (n_1, -n_2) = (m_1 + n_1 \; ; -m_2 - n_2)$

$\mathbf{S}_x (M) + \mathbf{S}_x (N) = (m_1 + n_1 \; ; -m_2 - n_2) = \mathbf{S}_x (M+N)$ Cumple la primera parte

b) Conociendo $k.M = k. (m_1, m_2) = (k.m_1, k.m_2)$

$\mathbf{S}_x (k.M) = \mathbf{S}_x ((k.m_1, k.m_2)) = (k.m_1, -k.m_2) = k. (m_1, -m_2) = k. \mathbf{S}_x (M)$

Se cumplen las dos condiciones para ser una transformación lineal

La demostración de $\mathbf{S}_y$ es similar.

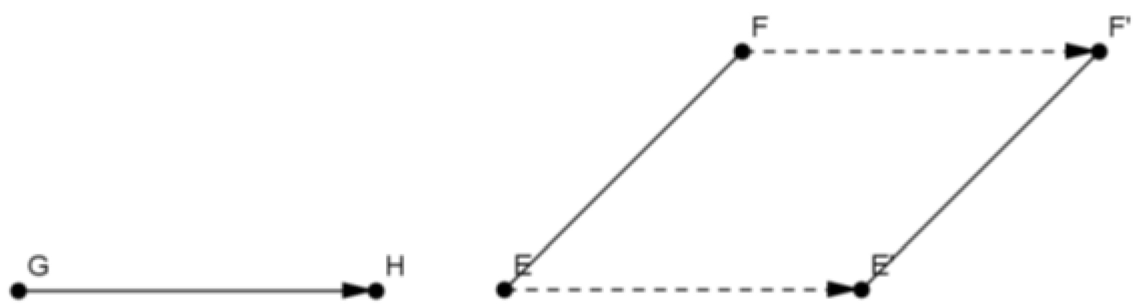
La simetría axial S_x respecto al eje x, y la simetría axial S_y respecto al eje y son **transformaciones lineales**.

Ejercicio:

La Simetría axial con respecto a la recta y = x tiene como expresión S (x ; y) = (y ; x)
Demostrar que es una transformación lineal.
¿Cuál es la fórmula de la Simetría axial con respecto a la recta y = -x ?

TRASLACIÓN

Recordemos que se llama **traslación** de vector $\overrightarrow{GH}$ a la transformación del plano en sí mismo, que a cada punto F le hace corresponder como imagen otro punto F' del mismo plano tal que $\overrightarrow{FF'} = \overrightarrow{GH}$



La traslación es un tipo de función puntual

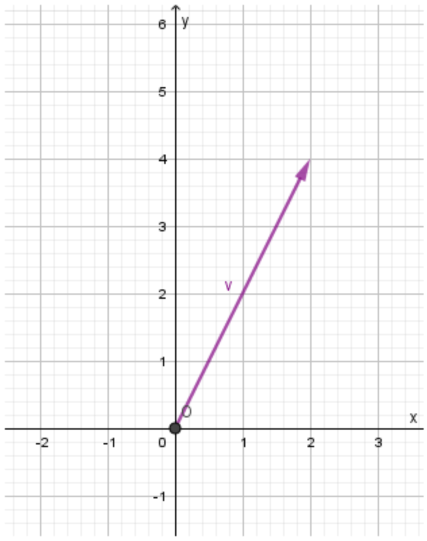
Consideremos la traslación de vector

$\vec{v}$ = (2 ; 4)

que puede asociarse a la idea de trasladar los puntos del plano dos lugares hacia la derecha y cuatro lugares para arriba

A= (-2; 0) ⟶ T (A) = (….. ; …..)

B= (-1; 1) ⟶ T (B) = (….. ; …..)



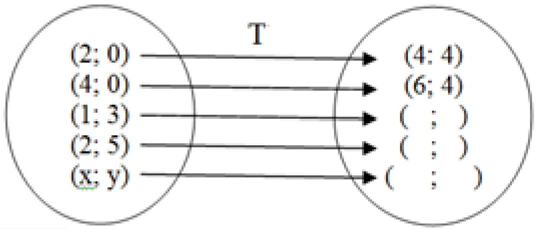
Completa para P = (x, y) con x e y cualquier número real

P= (x; y) ⟶ T (**P**)**=** (x + 2 ; y + 4)

Puede notarse que para cada punto (y en cada caso) la traslación da por resultado un único punto, es decir que a cada punto le corresponde una única imagen al trasladarlo.

La traslación es un tipo de función

Completar todos los espacios en blanco



De esto último se desprende que la traslación T transforma al punto P en otro punto P’ de coordenadas (…….. ; ……..).

Al valor horizontal ***x*** de P se le adicionan 2 unidades y al valor vertical ***y*** se lo incrementa en 4 unidades.

Podría pensarse que la función T le adiciona el vector (2; 4) a cada punto inicial obteniendo de esta forma que para el punto P = (x; y) el resultado de la traslación es

T(x;y) = (x; y) + (2; 4) = (x+2; y+4)

Si la función traslación fuera de vector (a; b) a cada punto inicial lo traslada “a” unidades hacia la derecha y “b” unidades hacia arriba, su fórmula es: **T (x ; y) = (x; y) + (a; b) = (x+a; y+b)**

Analizaremos ahora si la Traslación cumple las condiciones para ser una transformación lineal.

Lo haremos con el ejemplo anterior $T(x;y) = (x; y) + (2; 4) = (x+2; y+4)$

Para verificar si se cumple la condición a), desarrollamos los dos miembros de la igualdad

$T(M+N) = T((m_1 + n_1 ; m_2 + n_2)) = (m_1 + n_1 + 2 ; m_2 + n_2 + 4)$

$T(M) + T(N) = (m_1 + 2 ; m_2 + 4) + (n_1 + 2 ; n_2 + 4) = (m_1 + 2 + n_1 + 2 ; m_2 + 4 + n_2 + 4) =$

$= (m_1 + n_1 + 4 ; m_2 + n_2 + 8)$

y observamos que $T(M+N) \neq T(M) + T(N)$. Es bastante evidente la diferencia pues la primera coordenada es en un caso $m_1 + n_1 + 2$ y en otro $m_1 + n_1 + 4$; sumar 2 unidades a un número ($m_1 + n_1$) da distinto que sumar 4 unidades. En situaciones menos claras se debe mostrar un contraejemplo.

La primera condición **<u>no se</u>** <u>cumple</u>.

¿Qué ocurrirá con $T(k.M) = k.\ T(M)$?

$k.M = k.\ (m_1, m_2) = (k.m_1, k.m_2)$

$T(k.M) = T((k.m_1, k.m_2)) = \boxed{(k.m_1 + 2, k.m_2 + 4)}$

$k.\ T(M) = k.\ T((m_1, m_2)) = k.\ (m_1 + 2, m_2 + 4) = (k.\ (m_1 + 2), k.(m_2 + 4)) =$

$= \boxed{(k.\ m_1 + k.\ 2, k.\ m_2 + k.\ 4)}$

Los dos recuadros no parecen ser iguales pero que no lo parezcan no necesariamente indica que sean diferentes.

Para ver que son diferentes busquemos un contraejemplo

Si $k= 3$ y $M= (1, -1)$, entonces $T((1, -1))= (1+2, -1+4) = (3, 3)$

$3.\ T(M) = 3.\ (3, 3) = \boxed{(9, 9)}$

$3.M = 3.\ (1, -1) = (3, -3)$

$T(3.M)= T((3, -3)) = (3 +2, -3 +4) = \boxed{(5, 1)}$

Los dos recuadros son diferentes y por eso la propiedad no es válida.

La Traslación **<u>NO</u>** es una **transformación lineal**.

PROYECCIONES ORTOGONALES

Sean $\mathbf{P_x}$ y $\mathbf{P_y}$ las proyecciones sobre los ejes x e y de un punto en el plano.

Teniendo en cuenta lo trabajado en los módulos anteriores te pedimos marcar los puntos A, B, H, I y Z en un gráfico cartesiano y completar las proyecciones.

A= (2; 0)	$\longrightarrow$	$\mathbf{P_x}$(A)= (….. ; …..)	$\mathbf{P_y}$(A)= (….. ; …..)
B= (4; 0)	$\longrightarrow$	$\mathbf{P_x}$(B)= (….. ; …..)	$\mathbf{P_y}$(B)= (….. ; …..)
H= (–2; 5)	$\longrightarrow$	$\mathbf{P_x}$(H)= (….. ; …..)	$\mathbf{P_y}$(H)= (….. ; …..)
I= (–5, 3)	$\longrightarrow$	$\mathbf{P_x}$(I)= (….. ; …..)	$\mathbf{P_y}$(I)= (….. ; …..)
Z= (x; y)	$\longrightarrow$	$\mathbf{P_x}$(Z)= (….. ; …..)	$\mathbf{P_y}$(Z)= (….. ;…..)

En la proyección sobre el eje x a cada punto del plano le hace corresponder el punto sobre el eje de abscisas que tiene su mismo valor de x, a saber:

$$\boxed{\mathbf{P_x(x;\ y) = (x;\ 0)}}$$

Así P_x (3; –5) = (3; 0), P_x (–7; 4) = (–7; 0), y así sucesivamente.

En la proyección sobre el eje y a cada punto del plano le hace corresponder el punto sobre el eje de ordenadas que tiene su mismo valor de y, a saber:

$$\boxed{\mathbf{P_y(x;\ y) = (0\ ;\ y\ )}}$$

Demostraremos que se trata de transformaciones lineales.

Lo haremos con la proyección sobre el eje x.
Siendo $\vec{M} = (m_1; m_2)$ $\vec{N} = (n_1; n_2)$

Para verificar la condición a) planteamos
$P_x(\vec{M} + \vec{N}) = P_x((m_1; m_2) + (n_1; n_2)) = P_x(m_1 + n_1; m_2 + n_2) = (m_1 + n_1; 0)$
$P_x(\vec{M}) + P_x(\vec{N}) = P_x(m_1; m_2) + P_x(n_1; n_2) = (m_1; 0) + (n_1; 0) = (m_1 + n_1; 0)$.
Luego la condición se verifica.

Para la segunda planteamos:
$P_x(k.\ \vec{M}) = P_x(k.\ (m_1; m_2)) = P_x(k.m_1; k.m_2) = (k.m_1; 0)$
$k.\ P_x(\vec{M}) = k.\ (P_x(m_1; m_2)) = k.\ (m_1; 0) = (k.m_1; 0)$.

Y la segunda condición también se cumple.

La demostración de la proyección sobre el eje y es similar.

Las proyecciones ortogonales son **transformaciones lineales**.

PROYECCIÓN ORTOGONAL SOBRE UN VECTOR CUALQUIERA

Recordemos que en el módulo 2 al estudiar vectores vimos que el vector proyección de

$$proy_{\vec{A}}\vec{v} = = \frac{\vec{v} \bullet \vec{A}}{\|\vec{A}\|^2}.\vec{A}$$

Consideramos la función que a cada vector le hace corresponder su proyección sobre el vector $\vec{A} = (\, a\,;\, b\,)$

$$f(\vec{v}) = f((x\,,\,y)) = proy_{\vec{A}}\vec{v} = = \frac{\vec{v} \bullet \vec{A}}{\|\vec{A}\|^2}.\vec{A} = = \frac{(x;y)\bullet(a;b)}{a^2+b^2}.(a;b) =$$

$$= \frac{x.a + y.b}{a^2+b^2}.(a;b)$$ Entonces

$\boxed{f((x\,,\,y)) = \left(\frac{a^2x+aby}{a^2+b^2}, \frac{abx+b^2y}{a^2+b^2}\right)}$ representa la proyección del vector (x; y) sobre el vector (a;b)

Ejercicio:

Demostrar que $f((x\,,\,y)) = \left(\frac{a^2x+aby}{a^2+b^2}, \frac{abx+b^2y}{a^2+b^2}\right)$ es una transformación lineal.

En la próxima clase analizaremos los giros o rotaciones.