T P 08 Ej. 19-d

Verificar el teorema de Green para el campo y el camino dado.

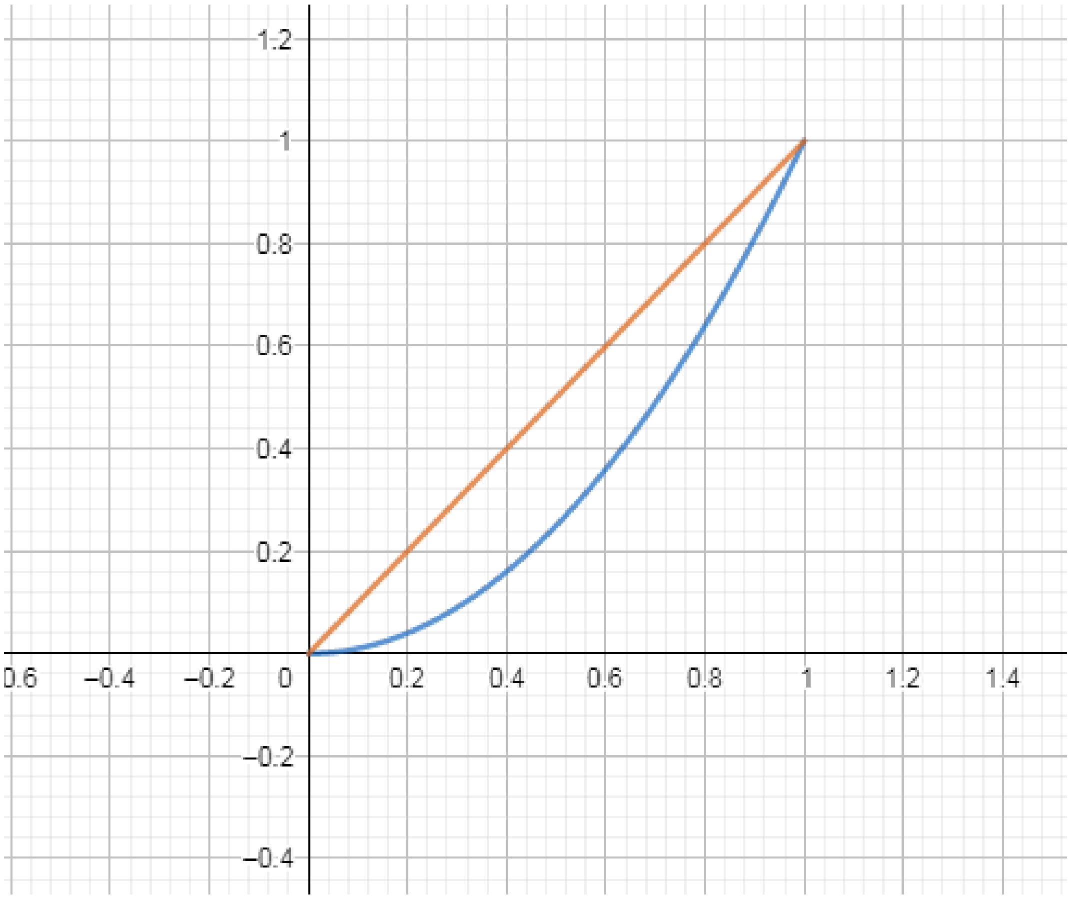
$$F(x, y) = (2xy, 3x^2)$$

C está definida por $\begin{cases} C_1: y = x^2 \ \ con\ 0 \leq x \leq 1 \\ C_2: y = x \ \ con\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

En este ejercicio se pide verificar el teorema de Green, por lo que podemos empezar por repasar su enunciado:

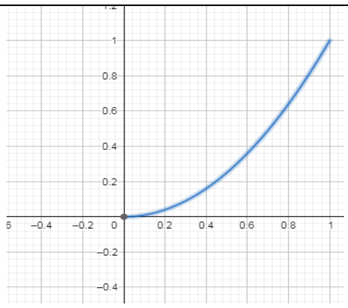
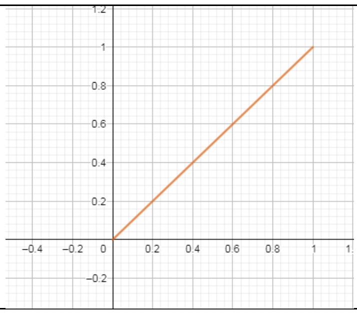
$$\int_C F dC = \int_C F(\bar{r}(t)) \cdot \bar{r}'(t)\, dt = \iint_R [Q_x - P_y]\, dx\, dy$$

Donde R es la región encerrada por la curva c y la curva es recorrida en sentido positivo. Por lo que se sugiere <u>tener cuidado respecto de las parametrizaciones a utilizar</u>.



Comenzamos con la integral de línea. Una integral de línea sobre un campo vectorial se calcula del siguiente modo:

$$\int_{C} F\big(\bar{r}(t)\big)\cdot \bar{r}'(t)\,dt = \int_{C_1}^{+} F\big(\bar{r}(t)\big)\cdot \bar{r}'(t)\,dt + \int_{C_2}^{+} F\big(\bar{r}(t)\big)\cdot \bar{r}'(t)\,dt$$

	$C_1: y = x^2 \;\; con\; 0 \le x \le 1$ $C_1: r(t) = (t, t^2) \;\; con\; 0 \le t \le 1$ Recorrida en sentido positivo $r'(t) = (1,2t)$ $F\big(r(t)\big) = F(t,t^2) = (2t^3, 3t^2)$ $F\big(r(t)\big)\cdot r'(t) = 2t^3 + 6t^3 = 8t^3$
	$C_1: y = x \;\; con\; 0 \le x \le 1$ $C_1: r(t) = (t, t) \;\; con\; 0 \le t \le 1$ Recorrida en sentido negativo $r'(t) = (1,1)$ $F\big(r(t)\big) = F(t,t^2) = (2t^2, 3t^2)$ $F\big(r(t)\big)\cdot r'(t) = 2t^2 + 3t^2 = 5t^2$

Entonces en base a las parametrizaciones dadas:

$$\int_{C} F dC = \int_{C} F\big(\bar{r}(t)\big)\cdot \bar{r}'(t)\,dt = \int_{0}^{1} F\big(\bar{r}_1(t)\big)\cdot \bar{r}_1'(t)\,dt - \int_{0}^{1} F\big(\bar{r}_2(t)\big)\cdot \bar{r}_2'(t)\,dt$$

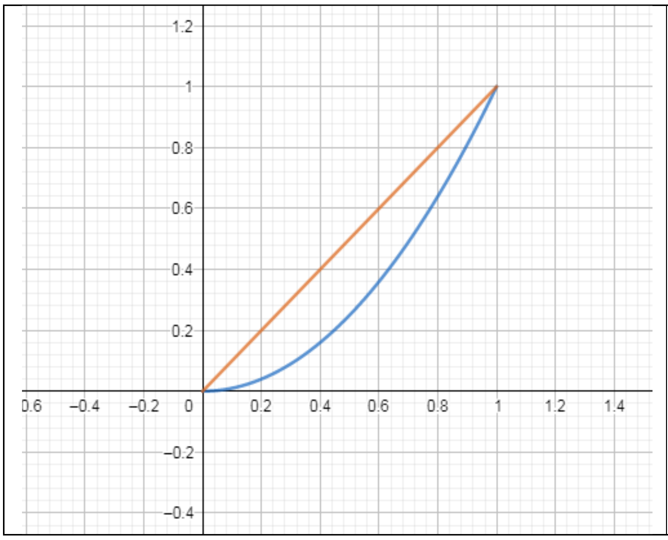
$$\int_{C} F dC = \int_{0}^{1} 8t^3\,dt - \int_{0}^{1} 5t^2\,dt = \int_{0}^{1} 8t^3 - 5t^2 dt$$

$$\int_{C} F dC = \left[\frac{8t^4}{4} - \frac{5t^3}{3}\right]_0^1$$

$$\int_{C} F dC = \left(2 - \frac{5}{3}\right) - (0 - 0)$$

$$\int_{C} F dC = \frac{1}{3}$$

Con eso completamos el cálculo de la integral de línea. Como la parametrización dada recorre la curva en sentido positivo, como lo pide el teorema, el resultado debería coincidir con la integral doble sobre el recinto encerrado por la curva.



Recinto tipo 1:

$$R: \begin{cases} x^2 \leq y \leq x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Recinto tipo 2:

$$R: \begin{cases} y \leq x \leq \sqrt{y} \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

El integrando que vamos a utilizar es $Q_x - P_y$, por lo que debemos calcularlos.

$$P(x, y) = 2xy \rightarrow P_y(x, y) = 2x$$

$$Q(x, y) = 3x^2 \rightarrow Q_x(x, y) = 6x$$

Por lo que:

$$Q_x - P_y = 6x - 2x = 4x$$

Entonces la integral que debemos calcular es:

$$\int_C FdC = \iint_R [Q_x - P_y]\, dx\, dy = \iint_R 4x\, dxdy = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} 4xdydx$$

$$\int_C FdC = \int_0^1 4x(x - x^2)dx = 4\int_0^1 (x^2 - x^3)dx = 4\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$\int_C FdC = 4\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{0}{3} - \frac{0}{4}\right)\right] = 4\left[\frac{1}{12} - 0\right] = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\int_C FdC = \frac{1}{3}$$