Resolución TP5:

Ejercicio 9.a

Tomando el sistema conformado por:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-1=0 \\ x^2+y^2+z^2-2y-1=0 \end{cases} \; como \; \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \; respectivamente$$

Determinar si definen $y = f(x) \; e \; z = g(x) \; en \; P = (1,1,1)$ y si es así determinar sus derivadas

Herramientas:

- Se deben cumplir las 3 condiciones de TFI2.
  - $F(P) = 0 \cap G(P) = 0$ Se cumple
  - Las derivadas F_x F_y F_z y G_x G_y G_z son continuas en el entorno del punto. Se cumple
  - $\begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix} \neq 0$ Se cumple
- Si se cumple TFI2 existen $y = f(x) \; e \; z = g(x)$ y valen:
  - $y_x(x_0) = f_x(x_0) = -\dfrac{\begin{vmatrix} F_x(P) & F_z(P) \\ G_x(P) & G_z(P) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix}}$
  - $z_x(x_0) = g_x(x_0) = -\dfrac{\begin{vmatrix} F_y(P) & F_x(P) \\ G_y(P) & G_x(P) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix}}$

Resolviendo:

1)

- $¿P \epsilon F(x,y,z) = 0?$

$$x^2+y^2+z^2-2x-1=0$$
$$1^2+1^2+1^2-2\cdot 1-1=0$$
$$3-2-1=0$$

- $¿P \epsilon G(x,y,z) = 0?$

$$x^2+y^2+z^2-2y-1=0$$
$$1^2+1^2+1^2-2\cdot 1-1=0$$
$$3-2-1=0$$

Se cumple el primer enunciado.

2)

$$\begin{cases} F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 1 = 0 \\ G(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

- ¿Son F_x F_y F_z y G_x G_y G_z continuas en R^3?

$F_x = 2x - 2$ $\quad$ $G_x = 2x$

$F_y = 2y$ $\quad$ $G_y = 2y - 2$

$F_z = 2z$ $\quad$ $G_z = 2z$

Al ser funciones lineales son continuas y se cumple el segundo enunciado.

3)

- $¿\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix} \neq 0?$

$F_x(P) = 0$ $\quad$ $G_x(P) = 2$

$F_y(P) = 2$ $\quad$ $G_y(P) = 0$

$F_z(P) = 2$ $\quad$ $G_z(P) = 2$

$$\frac{J(F,G)}{J(y,z)} = \begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

Se cumple el tercer enunciado.

$$\frac{J(F,G)}{J(x,z)} = \begin{vmatrix} F_x(P) & F_z(P) \\ G_x(P) & G_z(P) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$\frac{J(F,G)}{J(y,x)} = \begin{vmatrix} F_y(P) & F_x(P) \\ G_y(P) & G_x(P) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

Se cumple TFI por lo tanto existen $y = f(x)$ e $z = g(x)$ en $x = 1$

- $y_x(1) = f_x(1) = -\frac{\begin{vmatrix} F_x(P) & F_z(P) \\ G_x(P) & G_z(P) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{J(F,G)}{J(x,z)}}{\frac{J(F,G)}{J(y,z)}} = -\frac{-4}{4} = 1$
- $y_x(1) = 1$
- $z_x(1) = g_x(1) = -\frac{\begin{vmatrix} F_y(P) & F_x(P) \\ G_y(P) & G_x(P) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{J(F,G)}{J(y,x)}}{\frac{J(F,G)}{J(y,z)}} = -\frac{4}{4} = -1$
- $z_x(1) = -1$