T P 04 Ej. 5-c

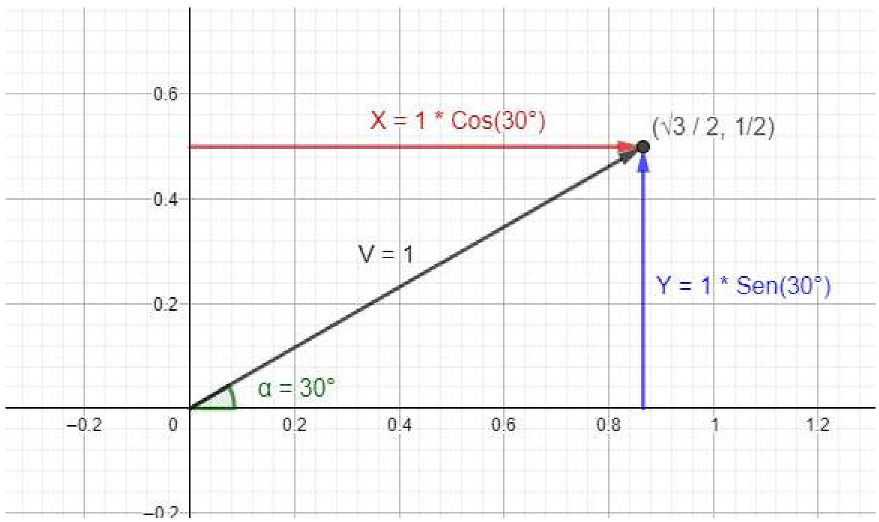
Calcular la derivada direccional de la siguiente función en el punto p y la dirección $\vec{v}$ especificados.

$$f(x,y) = x^2 + xy \qquad P = (0,1)$$

$\vec{v}$ es la dirección que forma un ángulo de 30° con el eje x en el sentido positivo.

En este ejercicio, en lugar de tener el vector $\vec{v}$ dado a partir de sus coordenadas cartesianas, lo tenemos descripto por su relación con el eje x. Adicionalmente, sabemos que el vector $\vec{v}$ debe tener longitud 1.

Con esos dos datos podemos obtener la expresión cartesiana del vector.



En la imagen vemos cómo el valor de y va a ser el seno de 30 grados, el cual es $\frac{1}{2}$ y el valor de x va a ser el coseno de ese mismo ángulo, o sea $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Entonces: $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Para una explicación del procedimiento que se va a aplicar a continuación, referirse al ejercicio 5-a donde está explicado en detalle.

1. Definir la función $g(t) = f(P + tv)$:

$$g(t) = f\left((0,1) + t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$g(t) = f\left(0 + \frac{\sqrt{3}}{2}t, 1 + \frac{1}{2}t\right)$$

$$g(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\left(1 + \frac{1}{2}t\right)$$

Dejamos esta expresión tal como está porque es sencilla de derivar

2. Derivar la función respecto de su variable: $g'(t)$.

$$g'(t) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{1}{2}t\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

Dejamos esta expresión tal y como está porque al evaluarla en 0, la mayor parte de los términos se van a anular.

3. Evaluar la función derivada en 0: $g'(0)$.

$$g'(0) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}0\right)\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{1}{2}0\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}0\right)$$

$$g'(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto, la derivada direccional de la función f en el punto P en el sentido del vector $\vec{v}$ es :

$$f_{\vec{v}}(P) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$