ESPACIOS VECTORIALES

Por la profesora Edith Gutierrez

Ya hemos visto en unidades previas vectores en R^2 y R^3, así como también resoluciones de ecuaciones lineales de n incógnitas por m ecuaciones. Estudiaremos en este capítulo el ***concepto de espacio vectorial***, su estructura fundamental y diferentes aplicaciones a las ciencias e ingeniería , en particular. Es importante remarcar que se trata de una generalización de las propiedades de los vectores de R^2 y R^3 .

Enunciado del problema

Todos los mensajes emitidos, tales como una señal de radio, un mensaje de un satélite, una llamada de teléfono, etc., están sujetos a un ***ruido*** (otra señal que no corresponde al mensaje de origen y que interfiere con ella). Por lo tanto es importante codificar una señal de manera tal que después de quedar mezclada por el ruido, pueda decodificarse a su forma original.. Un código o clave para detectar errores (en el mensaje) se llama ***clave o código de detección de error***. La mayor parte de los mensajes son digitales , sucesiones de ceros y unos , por ejemplo 110001, 100,0101, etc.

Una técnica sencilla es la ***comprobación de paridad*** que consiste en agregar un cero o un uno según si la cantidad de unos que tiene es par o impar, por ejemplo el número 101, queda 1010, si se recibe el número 1011 se sabe que hay un error, el problema es que no se sabe si el mensaje es 111 o 100 o 001 o 010 .

Actualmente existen variados códigos de error, pero para comenzar es interesante analizar el ***código(7,4) de Hamming***.

1. ¿Los números 111, 100, 001, 010, cómo pueden expresarse como vectores?
2. ¿El número 110001 puede escribirse como un vector de R^3 ?
3. Si representamos a los vectores de 6 componentes como $(x_1 , x_2 , x_3 , x_4, x_5 , x_6)$ que pertenecen a R^6 .¿ cómo se representa el número del ítem anterior?

Veamos las características de las operaciones suma de elementos de R^n, y el producto de un número real (escalar) por elementos de R^n.

Definición 4.1: Un elemento $\boldsymbol{v} \in R^n$ si es una n-upla de números reales $(x_1 , x_2 , x_3 , x_4, x_5 ,..., x_n)$, donde $x_i \in R$ para $i=1,2,...,n$

Definición 4.2: Dados
$\boldsymbol{u} \in R^n$ y $\boldsymbol{v} \in R^n$
$\boldsymbol{u}=(x_1 , x_2 , x_3 , x_4, x_5 ,..., x_n)$,
$\boldsymbol{v}=(y_1 , y_2 , y_3 , y_4, y_5 ,..., y_n)$, y $k \in R$, las operaciones suma de elementos de R^n y multiplicación de un elemento de R^n por un número real k se definen como
$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} =(x_1+ y_1 , x_2 + y_2, x_3 + y_3,..., x_n + y_n)$,
$k.\boldsymbol{u}=(kx_1 ,k x_2 , kx_3 , ...,k x_n)$ para $i=1,2,...,n$

Estas dos operaciones satisfacen las siguientes propiedades:
1) a) Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ pertenecen a R^n, entonces $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ pertenece a R^n .(condición de cerradura)
b) $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$, para todo u,v,w pertenecientes a R^n .(asociatividad)
c) Existe un elemento $\boldsymbol{0}$ en R^n tal que $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{u}$ para cualquier u de . R^n (elemento neutro).

d)Para cada $\boldsymbol{u}$ existe $-\boldsymbol{u}$ también en R^n , tal que $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=-\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}=0$ (elemento opuesto aditivo)
e) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ para todo $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ pertenecientes a R^n .(conmutatividad)

2) a) Si k es un número real y $\boldsymbol{u}$ pertenece a R^n, entonces k.$\boldsymbol{u}$ pertenece a R^n (cerradura).
b)$k.(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=k.\boldsymbol{u}+k.\boldsymbol{v}$ para todo $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ perteneciente a R^n y k perteneciente a R.
c)$(k+t).\boldsymbol{u}=k\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{u}$ para todo $\boldsymbol{u}$ de R^n y para todo k y t reales.
d)$1.\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$ para todo $\boldsymbol{u}$ de R^n (1 es el neutro para la multiplicación de reales)

Es fácil demostrar que se cumplen estas propiedades, además en capítulos anteriores se ha demostrado que si se suman dos vectores del plano (R^2) se obtiene otro vector del mismo.

Actividad: Determinar
1) (2,1)+(1,2)=(3,3)
2) 3.(4,5)=(12;15)
3) (1,1,1)+(0,0,1)=(1;1;2)
4) 0.(2,100,24)=(0;0;0)
5) 8.(0,0,0)=(0;0;0)
6) (1,2,3,4)+(0,0,0,2)=(1;2;3;6)
7) (2,1)+(1,1,0) ¿??No se pueden sumar porque pertenecen a distintos espacios.

Ejemplo:
1) a) Es evidente que pertenece a R^n, pues $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3,\dots, x_n+y_n)$
por definición 4.1 tiene n componentes reales ya que cada componente es la suma de dos números reales y este es un número real .
1)e) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3,\dots, x_n+y_n)=(y_1+x_1, y_2+x_2, y_3+x_3,\dots, y_n+x_n)=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

2)c) (k+t)***u*** se multiplica por cada $x_i \in R$ para i=1,2,...,n, entonces por propiedad distributiva del producto con respecto a la suma de números reales
$(k+t).\ x_i = k.\ x_i + t.\ x_i$ para i=1,2,...,n. Entonces por definición de suma de k***u***+t***u***.

Definición 4.3: ***Dados un conjunto V(vectores) y un conjunto de números(escalares)y dos operaciones*** $\oplus$ *y* $\otimes$***que cumplen con las 10 propiedades que*** R^n ***y R se llama espacio vectorial.***

Ejercicio2:

¿El conjunto de todos los pares ordenados de números reales (x,y) tales que x<=0 es un espacio vectorial con las operaciones definidas en 4.2?

Si no lo es, enumere las propiedades de la definición que no se cumplen.

Ejemplo de un vector que pertenece a ese conjunto: (-1,4), otro ejemplo (-2,-3), otro (0;5)

Un par que no pertenece es (2,-5)

Si multiplicamos -2.(-2;4)=(4;-8) No pertenece al conjunto de los vectores dados(segundo,tercer cuadrante y el eje Y)

Podemos afirmar que ese conjunto de elementos con x<=0 no es un espacio vectorial con las operaciones usuales.

Ejercicio 3:

¿El conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 5 es un espacio vectorial con las operaciones definidas en 4.1?

Si no lo es, enumere las propiedades de la definición que no se cumplen.

Si es espacio vectorial

Ejercicio 4: Idem ejercicio 3 pero para polinomios de grado exactamente igual a 2.

No es espacio vectorial

Basta un contraejemplo:

$X^2+2x+(-x^2-5x)=-3x$ no pertenece al conjunto de los polinomios de grado exactamente 2.(no cumple la ley de cierre)

.

Podemos mostrar con estos ejemplos que la ventaja de la definición 4.3 es que en ella no interesa como se representa un vector. Por ejemplo un vector de R3 ¿es una terna ordenada de números reales? ¿ es un segmento orientado? ¿es una matriz de 3x1?. La definición 4.3 se ocupa solamente del comportamiento algebraicos de los elementos de un espacio vectorial. En el caso mencionado, sin importar el punto de vista que se adopte, el comportamiento algebraico es el mismo. El matemático se fija en las características comunes a todos ellos (es decir, aquellas propiedades que los hacen comportarse de manera similar) y ***define una nueva estructura llamada espacio vectorial E.V*** Esto nos permite hablar de un vector como un elemento de un E.V. El concepto ya no tiene que estar asociado a un segmento orientado..

Resumen

Algunos espacios vectoriales reales vistos en esta sección son

(R^n,+,R.)

(R^{2x2},+,R,.)

(P_n[R],+,R,.)

Espacios vectoriales sobren Z_2.

Para poder estudiar el código de error creado por Hamming alrededor de 1950, estudiaremos un E.V que so usa a R como conjunto de escalares. Los elementos de Z_2. son los números 0 y 1. Las operaciones $\oplus$ *y* $\otimes$están dadas por los cuadros :

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\otimes$	0	1
0	0	0
1	0	1

También tiene una aplicación electrónica que son los circuitos flip-flop

Ejercicio 5:
Probar que (Z_2, $\oplus$,Z_2, $\otimes$) es un espacio vectorial.

Ejercicio 6: Consideremos en R^2 la suma de vectores usual Componente a componente, y las siguientes leyes externas:
a)k(x;y)=(kx;0)
b)k(x;y)=(kx;ky)
c)k(x;y)=(x;y)

a) Para este caso podemos observar que $1(x;y)=(1x;0)=(x;0)$
Pero la condición para que sea espacio vectorial es que $1.(x;y)=(x;y)$, ***<u>cosa que no se cumple</u>***, entonces R^2 con la suma usual y con este producto no es EV.

b) En este caso , vemos que
B1) $k(x;y)=(kx;ky)$ pertenece a R^2 cumple la ley de cierre externa.
B2)$k(t(x;y)=k(tx;ty)=(k(tx);k(ty))=((kt)x;(kt)y)=(kt)(x;y)$
B3)$(k+t)(x;y)=((k+t)x;(k+t)y)=(kx+tx;ky+ty)$
$(k+t)(x;y)=(kx;ky)+(tx;ty)=k(x;y)+t(x;y)$
B4)$k((x;y)+(x';y'))=k(x+x'+y+y')=(k(x+x');k(y+y'))$
$k((x;y)+(x';y'))=(kx+kx';ky+ky')=(kx;ky)+(kx';ky')$
$k((x;y)+(x';y'))=k(x;y)+k(x';y')$
B5)$1(x;y)=(1x;1y)=(x;y)$
Como verifica todas las propiedades, entonces R^2 con la suma usual y esta ley externa es un EV.

c) En esta ley podemos observar que se cumplen B1,B2, pero B3 no
$(k+t)(x;y)=(x;y)$
$k(x;y)+t(x;y)=(x;y)+(x;y)=(2x;2y)$
Luego $(k+t)(x;y)\neq k(x;y)+t(x;y)$
Aunque se cumple la otras, basta con que no cumpla una de las propiedades para decir que no es EV si se usa esa ley externa.

SUBESPACIOS

Definición 4.4: Un subespacio es un subconjunto de un espacio vectorial que contiene al vector nulo (o en forma equivalente un subconjunto no vacío) y satisface las siguientes propiedades: ***si v y w pertenecen al subconjunto y*** c ***es un escalar***

1) v $\oplus$ ***w pertenece al subconjunto.***

2) c $\otimes$ ***v pertenece al conjunto.***

Veamos el caso de un plano en R^3 que contiene al origen (0,0,0)

Ejemplo: $S=\{(x;y;z)\in\Re^3 / x+y-z=0\}$

Vemos que 0+0-0=0, por lo tanto, el (0;0;0) pertenece al conjunto de elementos del plano. (vectores del plano)

Si (x;y;z) pertenece al subconjunto S

(x´,y',z') pertenece a S

(x:y;z)+(x',y',z') pertenece a S?

$(x:y;z)+(x',y',z')=(x+x';y+y';z+z')$

$(x+x')+(y+y')-(z+z')=x+y-z+x'+y'-z'=0+0=0$

Queda demostrado que la suma de dos elementos de S también pertenecen a S

Si(x;y;z) pertenece a S hay que demostrar que el producto k(x;y;z) también pertenece a S.

$K(x;y;z)=(kx;ky;kz)$

$Kx+ky-kz=k(x+y-z)=k.0=0$

Entonces S es un subespacio de R^3

$T=\{(x;y;z)\in\Re^3 / x+y-z=3\}$

¿Es T un subespacio de $\Re^3$?

Ejercicio 7: Determinar todos los subespacios que tiene R^3

- ✓ Rectas y planos que pasan por el origen de coordenadas.
- ✓ {(0;0;0)}
- ✓ $\Re^3$

Ejercicio 8: Determinar todos los subespacios que tiene R^2

Ejercicio 9: Dada la matriz A=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ que pertenece al espacio vectorial de R^{2x3} , indicar cual es a)–A , b) 0. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Ejercicio 10: ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos con las operaciones de suma y producto por un real son subespacios de R^3?

a) (x,y,z) con y=z
b) (x,y,z) tal que y=2.
c)(x,y,z) tal que y>0

11)Probar que un plano en R^3 y una recta que pasan por el origen ,y su intersección es un subespacio de R^3.