UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA MATANZA

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA II - Ejercicio resuelto

TEMA: **ESPACIOS EUCLÍDEOS.**

Ejercicio 1 Consideramos el espacio euclideo $\left(\mathbb{R}^{2x2}, \langle , \rangle\right)$ con $\langle A, B\rangle = tr\left(A.B^t\right)$
Sea $S = \left\{A \in \mathbb{R}^{2x2} / \ 2a_{22} - a_{21} = a_{11} \quad \wedge \quad a_{12} + a_{11} = 0\right\}$.

(a) Hallar el ángulo entre los vectores de alguna base de S.

(b) Dar una base del complemento ortogonal de S.

(c) Decidir si $d\left(v, S\right) = d\left(v, S^{\perp}\right)$ siendo $v = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2 Consideramos el espacio euclideo $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ y sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base ortonormal de $\mathbb{V}$.
Sea S un subespacio de $\mathbb{V}$ tal que $S = gen\left\{v_1 + v_3, v_3\right\}$ y dado $v = 3v_1 - 2v_2 + v_3$, se pide hallar la proyección de v sobre S.

Ejercicio 3

Considerar el espacio euclídeo $(\mathcal{P}_2[\mathbb{R}], \langle , \rangle)$, donde el producto interno está definido por:

$$\langle a_2x^2 + a_1x + a_0, b_2x^2 + b_1x + b_0\rangle = a_2.b_2 + a_1.b_1 + a_0.b_0$$

Sea S un subespacio de $\mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$ tal que $S = \{p \in P_2[\mathbb{R}] / \langle 2.q \ , \ p - 2.q\rangle = -20\}$, siendo $q = 2x^2 - 1$

(a) Dar una base ortonormal de $S^{\perp}$

(b) Hallar $proy_S v$ siendo $v = x^2 - 2x + 1$

Solución.

1. Ejercicio 1

Consideramos el espacio euclideo $\left(\mathbb{R}^{2x2}, \langle , \rangle\right)$ con $\langle A, B\rangle = tr\left(A.B^t\right)$

Sea $S = \left\{A \in \mathbb{R}^{2x2} / \ 2a_{22} - a_{21} = a_{11} \quad \wedge \quad a_{12} + a_{11} = 0\right\}$.

(a) Hallar el ángulo entre los vectores de alguna base de S.

Primero debemos hallar los generadores de S. Son matrices de $\mathbb{R}^{2x2}$ que cumplen dos condiciones:

$$2a_{22} - a_{21} = a_{11}$$

$$a_{12} + a_{11} = 0$$

Despejando de la segunda ecuación, podemos escribir: $a_{12} = -a_{11}$

Y despejando de la primera, podemos escribir: $a_{21} = 2a_{22} - a_{11}$

Y por lo tanto una matriz genérica de S es de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & -a_{11} \\ 2a_{22} - a_{11} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Y entonces:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & -a_{11} \\ 2a_{22} - a_{11} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}. \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}. \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces $S = gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Y por ser sólo dos generadores, podemos decir que como uno no es múltiplo del otro, son Linealmente Independientes. Finalmente, damos una base de S:

$$B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ahora sí,busquemos el ángulo entre los vectores de la base hallada, utilizando la siguiente fórmula:

$$cos\ \alpha = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|.\|w\|}$$

Recordemos que: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Reemplazamos:

$$cos\ \alpha = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\| \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \|.\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \|}$$

$$cos\ \alpha = \frac{tr\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^t\right]}{\sqrt{tr\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^t\right]} \cdot \sqrt{tr\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^t\right]}}$$

$$cos\ \alpha = \frac{tr\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]}{\sqrt{tr\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right]} \cdot \sqrt{tr\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]}}$$

$$cos\ \alpha = \frac{-2}{\sqrt{3}\ .\ \sqrt{5}} \rightarrow \alpha = 121^{\mathrm{o}}$$

Finalmente, el ángulo entre los vectores de la base de S hallada es 121^{o}.

(b) Dar una base del complemento ortogonal de S.

Recordemos lo que es el Complemento Ortogonal de un subespacio:

$$S^{\perp} = \{w \in E / \langle w, v_S\rangle = 0\}$$

Es decir, el complemento ortogonal de un subespacio S, son todos los vectores del espacio euclídeo ortogonales a los vectores de S.

Recordemos además la propiedad que nos asegura: $dim\ S + dim\ S^{\perp} = dim\ E$

Como $dim\ S = 2$ y $dim\ E = 4$, entonces $dim\ S^{\perp} = 2$

Busquemos generadores de $S^{\perp}$, es decir, matrices de orden $2x2$ que sean ortogonales a S.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

De la primera ecuación obtenemos: $tr \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^t \right] = 0$

$tr \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] = a - b - c = 0$

De la segunda ecuación obtenemos: $tr \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^t \right] = 0$

$tr \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 2c + d = 0$

Finalmente obtenemos de ambas ecuaciones: $d = -2c$ y $a = b + c$

Reemplazando en la matriz genérica, obtenemos los generadores de $S^{\perp}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+c & b \\ c & -2c \end{pmatrix} = b. \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Entonces $S^{\perp} = gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$

Y por ser sólo dos generadores, podemos decir que como uno no es múltiplo del otro, son Linealmente Independientes. Finalmente, damos una base de $S^{\perp}$:

$$B_{S^{\perp}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

(c) Decidir si $d\left(v, S\right) = d\left(v, S^{\perp}\right)$ siendo $v = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Recordemos que

$$d(v, S) = \|proy_{S^{\perp}} v\|$$
$$d(v, S^{\perp}) = \|proy_S v\|$$

Debemos encontrar ambas proyecciones para decidir si son iguales las distancias.

Una forma de escribir a un vector genérico de E, es como la suma de un vector del subespacio S más un vector del complemento ortogonal. Estos vectores son únicos ya que S y $S^{\perp}$ están en suma directa, y corresponden a las proyecciones sobre cada subespacio. Es decir,

$$v = proy_S v \; + \; proy_{S^{\perp}} v$$

Recordemos:

$$B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$B_{S^{\perp}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Entonces escribiré el vector dado en combinación lineal de los vectores de S y de su complemento ortogonal.

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 . \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La proyección sobre S será la combinación lineal de los dos primeros vectores y la proyección sobre $S^{\perp}$ será la combinación lineal de los últimos dos vectores.

Resolvemos:

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 & -\alpha_1 + \alpha_3 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 & \alpha_2 - 2\alpha_4 \end{pmatrix}$$

Armamos el sistema y lo resolvemos.

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = 7$$
$$-\alpha_1 + \alpha_3 = 2$$
$$-\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_4 = 5$$
$$\alpha_2 - 2\alpha_4 = 1$$

De aquí resulta: $\alpha_1 = \dfrac{5}{2}$; $\alpha_2 = \dfrac{13}{4}$; $\alpha_3 = \dfrac{7}{2}$; $\alpha_4 = 1$

Entonces reeemplazando en la combinación lineal:

$$proy_S v = \frac{5}{2}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{13}{4}.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto proy_S v = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 4 & \frac{13}{4} \end{pmatrix}$$
$$proy_{S^\perp} v = \frac{7}{2}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \longmapsto proy_{S^\perp} v = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & \frac{7}{2} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d(v,S) = \|proy_{S^\perp} v\| = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & \frac{7}{2} \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & \frac{7}{2} \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & \frac{7}{2} \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\rangle} = \frac{\sqrt{150}}{2} \simeq 6,12$$

$$d(v,S^\perp) = \|proy_S v\| = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 4 & \frac{13}{4} \end{pmatrix} \| = \sqrt{\left\langle \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 4 & \frac{13}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ 4 & \frac{13}{4} \end{pmatrix} \right\rangle} = \frac{25}{4} \simeq 6,25$$

Finalmente, podemos decir que $d\,(v,S) \neq d\left(v,S^\perp\right)$

2. Ejercicio 2

Consideramos el espacio euclideo $(\mathbb{V}, \langle , \rangle)$ y sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base ortonormal de $\mathbb{V}$.
Sea S un subespacio de $\mathbb{V}$ tal que $S = gen\,\{v_1 + v_3, v_3\}$ y dado $v = 3v_1 - 2v_2 + v_3$, se pide hallar la proyección de v sobre S.

Para poder aplicar la fórmula de proyección, primero daremos una base ortogonal de S. Como los vectores generadores dados son LI, forman una base. Veamos ahora si $B_S = \{v_1 + v_3, v_3\}$ es o no ortogonal.

$\langle v_1 + v_3, v_3\rangle = \langle v_1, v_3\rangle + \langle v_3, v_3\rangle$ (Aplicamos prop. de producto interno - Suma)

Como la base B es una base ortonormal, sabemos que los vectores son ortogonales entre sí y de norma 1. Por lo tanto:

$\langle v_1 + v_3, v_3\rangle = \langle v_1, v_3\rangle + \langle v_3, v_3\rangle = 0 + 1 = 1 \neq 0$

Como el producto es distinto de 0, la base de S no es ortogonal. Vamos a ortogonalizarla usando el método de Gramm Schmidt para luego calcular la proyección pedida.
Tenemos: $B_S = \{v_1 + v_3, v_3\}$

Sea $B'_S = \{w_1, w_2\}$ la base ortogonal que armaremos.

Propongo: $w_1 = v_1 + v_3$
Aplicando el método: $w_2 = v_3 - \dfrac{\langle v_3, v_1 + v_3\rangle}{\langle v_1 + v_3, v_1 + v_3\rangle}\ .(v_1 + v_3)$

Aplicando nuevamente propiedades de producto resolvemos:

$$w_2 = v_3 - \frac{\langle v_3, v_1\rangle + \langle v_3, v_3\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle + \langle v_1, v_3\rangle + \langle v_3, v_1\rangle + \langle v_3, v_3\rangle}.(v_1 + v_3)$$

$$w_2 = v_3 - \frac{0+1}{1+0+0+1}.(v_1 + v_3)$$

$$w_2 = v_3 - \frac{1}{2}.(v_1 + v_3)$$

$$w_2 = -\frac{1}{2}.v_1 + \frac{1}{2}v_3$$

Para no trabajar con fracciones, pondremos un múltiplo de w_2 como segundo vector de la base ortogonal de S.

Por lo tanto $B'_S = \{v_1 + v_3, -v_1 + v_3\}$ es una base ortogonal de S.

Hallemos ahora la proyección pedida:

$$proy_S v = proy_S \left(3v_1 - 2v_2 + v_3\right)$$

$$proy_S v = \frac{\langle 3v_1 - 2v_2 + v_3, v_1 + v_3\rangle}{\langle v_1 + v_3, v_1 + v_3\rangle}.\left(v_1 + v_3\right) + \frac{\langle 3v_1 - 2v_2 + v_3, -v_1 + v_3\rangle}{\langle -v_1 + v_3, -v_1 + v_3\rangle}.\left(-v_1 + v_3\right)$$

Aplicando propiedad de suma y producto por escalar en producto interno,y sabiendo que los productos entre vectores distintos son 0,resolvemos:

$$proy_S v = \frac{3+1}{1+1}.\left(v_1 + v_3\right) + \frac{-3+1}{1+1}.\left(-v_1 + v_3\right)$$

$$proy_S v = 2.\left(v_1 + v_3\right) - 1.\left(-v_1 + v_3\right)$$

$$proy_S v = 3v_1 + v_3$$

3. Ejercicio 3

Considerar el espacio euclídeo $(\mathcal{P}_2[\mathbb{R}], \langle , \rangle)$, donde el producto interno está definido por:

$$\langle a_2x^2 + a_1x + a_0, b_2x^2 + b_1x + b_0\rangle = a_2.b_2 + a_1.b_1 + a_0.b_0$$

Sea S un subespacio de $\mathcal{P}_2[\mathbb{R}]$ tal que $S = \{p \in P_2[\mathbb{R}] / \langle 2.q\ ,\ p - 2.q\rangle = -20\}$, siendo $q = 2x^2 - 1$

(a) Dar una base ortonormal de $S^{\perp}$.

Primero veamos cómo son los elementos de S.

$S = \{p \in P_2[\mathbb{R}] / \langle 2.q \, , \, p - 2.q \rangle = -20\}$, siendo $q = 2x^2 - 1$

Es decir, $p = ax^2 + bx + c$ que cumple con la condición dada. Veamos.

$$\langle 2.q \, , \, p - 2.q \rangle = \langle 2.q, p \rangle + \langle 2.q, -2.q \rangle = -20$$

Aplicando propiedad de producto interno..

$$\langle 2.q \, , \, p - 2.q \rangle = 2.\langle q, p \rangle - 4.\langle q, q \rangle = -20$$

Hallemos $\langle q, q \rangle$ ya que lo tenemos de dato. Usamos el producto interno dado.

$$\langle q, q \rangle = \langle 2x^2 - 1, 2x^2 - 1 \rangle = 4 + 1 = 5$$

Entonces reemplazando:

$$\langle 2.q \, , \, p - 2.q \rangle = 2.\langle q, p \rangle - 4{,}5 = -20$$

$$\langle 2.q \, , \, p - 2.q \rangle = 2.\langle q, p \rangle - 20 = -20 \longrightarrow \langle q, p \rangle = 0$$

Esto me dice entonces, que todos los polinomios $p \in P_2[\mathbb{R}]$ que pertenecen a S son ortogonales a q. Y por lo tanto, $S^{\perp} = gen\,\{q\}$

Finalmente,

$$B_{S^{\perp}} = \left\{2x^2 - 1\right\}$$

Pero nos pedían una base ortonormal de $S^{\perp}$. Como la base sólo tiene un elemento, ya es ortogonal. Lo que nos queda es normalizarla. Es decir, tenemos que hallar la norma del vector de la base y luego expresar al vector dividido por su norma.

$$\|q\| = \sqrt{\langle q, q \rangle} = \sqrt{5}$$

Por lo tanto, una base ortonormal de $S^{\perp}$ es:

$$BON_{S^{\perp}} = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}.\left(2x^2 - 1\right)\right\}$$

(b) Hallar $proy_S v$ siendo $v = x^2 - 2x + 1$.

Como no tenemos una base de S, y sí tenemos una base de $S^{\perp}$, y por tener un solo elemento, es una base ortogonal, podemos hallar la proyección de v sobre $S^{\perp}$ y luego relacionarla con la pedida de la siguiente forma:

$$v = proy_S v + proy_{S^{\perp}} v$$

$$proy_{S^{\perp}}v = \frac{\langle v, 2x^2-1\rangle}{\langle 2x^2-1, 2x^2-1\rangle}.\left(2x^2-1\right)$$

Reemplazamos v y resolvemos usando el producto interno definido.

$$proy_{S^{\perp}}v = \frac{\langle x^2-2x+1, 2x^2-1\rangle}{\langle 2x^2-1, 2x^2-1\rangle}.\left(2x^2-1\right)$$

$$proy_{S^{\perp}}v = \frac{1}{4+1}.\left(2x^2-1\right)$$

$$proy_{S^{\perp}}v = \frac{1}{5}.\left(2x^2-1\right)$$

$$proy_{S^{\perp}}v = \frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}$$

Ahora si hallamos la proyección pedida:

$$proy_{S}v = v - proy_{S^{\perp}}v$$

$$proy_{S}v = x^2-2x+1-\left(\frac{2}{5}x^2-\frac{1}{5}\right)$$

$$proy_{S}v = \frac{3}{5}x^2-2x+\frac{6}{5}$$

AUTOEVALUACIÓN

SOBRE EL TEMA ESPACIOS EUCLÍDEOS.

Para resolver esta evaluación, realizar las guías de estudio y leer atentamente la resolución de los ejercicios de este documento.
Cada ejercicio tiene un valor de 2 puntos.

1. Sea el espacio euclídeo $\left(\mathbb{R}^{2x2}, \langle , \rangle\right)$ el espacio euclídeo tal que el producto interno definido es: $\langle A, B\rangle = tr\left[A.B^t\right]$

   a) Hallar todas las matrices ortogonales a $C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ (De ser infinitas, darlas como generadores de un subespacio)

   b) Hallar $k \in \mathbb{R}$ tal que $\| \begin{pmatrix} 0 & k+2 \\ 2 & -k \end{pmatrix} \| = \sqrt{14}$

2. Sea el espacio euclídeo $\left(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle\right)$ el espacio euclídeo tal que el producto interno definido es:

   $$\langle (x, y, z) \, ; (x', y', z') \rangle = x.x' + (x+y).(x'+y') + (x+y+z).(x'+y'+z')$$

   Sea $B = \{(0,-1,2), (1,0,-2), (2,1,-1)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$
   A partir de la base dada en a), hallar una base ortogonal de $\left(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle\right)$ usando el producto dado. (Usar método de Gramm Schmidt).

3. Sea $(E, \langle , \rangle)$ un espacio euclídeo. Y sean v, w, u tres vectores de E. Para las siguiente proposiciones, decidir si son Verdaderas o falsas justificando adecuadamente.

   a) Si v es un vector unitario, entonces $\langle v, v\rangle = 1$

   b) $\langle v, w - 2u\rangle = 2. \langle v, w - u\rangle$

   c) Si $\langle v, 2u\rangle = 4 \ \wedge \ \|u\| = \sqrt{5} \ \wedge \ \langle v, v\rangle = 2$, entonces el ángulo entre los vectores v y u es $\simeq 51^{\text{o}}$

4. Sea $\left(\mathbb{R}^{2x2}, \langle , \rangle\right)$ el espacio euclídeo tal que: $\langle A, B\rangle = tr\left[A.B^t\right]$ el producto interno definido. Sea $S = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

   a) Hallar $proy_S \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Hallar $k, t \in \mathbb{R}$ tal que $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ k & 2 \end{pmatrix}$ pertenezca al complemento ortogonal de S.

5. Consideramos el espacio euclideo $(\mathcal{P}_2, \langle , \rangle)$ con

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(1).q(1) + p(0).q(0) + p(-1).q(-1).$$

Sea $W = \{p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathcal{P}_2 \ : \ a_2 = 2a_1\}$.

a) Hallar la proyección de $v = x^2 - x$ sobre W.

b) Hallar $W^{\perp}$.

c) Sin hacer ningún cálculo y usando sólo la información obtenida en los ítems anteriores, dar la proyección sobre W del polinomio $3x^2 - 2x - 2 + 3(x^2 - x)$.

6. Responder justificando:

a) En el ejercicio resuelto N$^{\text{o}}$ 2, se podría hallar el complemento ortogonal de S en forma genérica? Asi como se obtuvo genéricamente una base ortogonal de S? Si se puede, cómo lo plantearía?

b) En el ejercicio resuelto N$^{\text{o}}$ 3 item a), dar las condiciones de S y una base de S y a partir de esa base, hallar $S^{\perp}$. Obtengo lo mismo que se obtuvo en el resuelto?

c) En el ejercicio resuelto N$^{\text{o}}$ 3 item b), ¿por qué se obtiene la proyección sobre el complemento y no directamente la pedida? ¿cuales serían los pasos para obtener directamente la proyección sobre S?