Matemática Discreta

CLASE N°1

Ing.Marcela Bellani
UNLAM | FLORENCIO VARELA 1903 .B1754.SAN JUSTO.BUENOS AIRES

En esta clase se desarrollarán los siguientes temas:

-Elementos de Lógica proposicional: conectores, leyes lógicas.

-Conjuntos: pertenencia, inclusión, conjunto de partes. Diagrama de Venn. Conjuntos especiales: vacío, universal, alfabeto. Hileras.
Operaciones entre conjuntos. Propiedades.Producto Cartesiano: definición, propiedades.

Para todas las clases contamos con la ayuda del sitio de la cátedra http://discretaunlam.net.ar donde encontrarás videos, ejercicios, explicaciones, autoevaluaciones de todos los temas de Matemática Discreta.

Lógica Matemática

Los fundamentos de la Matemática Discreta están dados por la lógica matemática, los conjuntos y las funciones. Las leyes de la lógica especifican el significado de los enunciados matemáticos. Por ejemplo, nos ayudan a entender y razonar enunciados como "Existe un número entero cuyo cuadrado es mayor o igual a cero". La lógica matemática proporciona un conjunto de reglas y técnicas para determinar si es o no válida la afirmación dada a partir de la aplicación de una sistematización en los argumentos y, por ende, de un análisis de su estructura lógica, sin tener en cuenta el contenido de lo que se ha argumentado ni considerar siquiera el lenguaje utilizado, y sin contemplar el estado de realidad del contenido.

El razonamiento lógico se utiliza en matemática para demostrar teoremas, en las ciencias de la computación para verificar si son o no correctos los programas; en ingeniería electrónica, para el diseño de circuitos mediante compuertas lógicas; en el diseño de equipos informáticos, en inteligencia artificial; en lenguajes de computación y en otros muchos campos.

Proposición

Una proposición es una oración declarativa que es verdadera o falsa pero no ambas cosas a la vez.

Por lo general, a las proposiciones se las representa por las letras del alfabeto desde la letra p, es decir, p, q, r, s, t, ... etc. Así, por ejemplo, podemos citar las siguientes proposiciones y su valor de verdad:

p: 10 + 5 = 21 (F)

q: Buenos Aires es la capital de Argentina. (V)

r: La Tierra gira alrededor del sol. (V) s: $7 \geq 21$. (F)

Expresiones No Proposicionales

Son aquellos enunciados a los que no se les puede asignar un valor de verdad. Entre ellos tenemos a los exclamativos, interrogativos o imperativos.
Por ejemplo:

- ¡Qué calor!
- ¿Qué hora es?
- Prohibido fumar
- Borra el pizarrón.
- $x < 12$

CLASIFICACIÓN DE LAS PROPOSICIONES

Aquellas proposiciones que constan o se les puede representar por una sola variable, se llaman proposiciones **simples o atómicas**. Por ejemplo, sea la proposición "p: 3 + 6 = 9" es una proposición simple o atómica.
Cuando una proposición consta de dos o más enunciados simples, se le llama proposición **compuesta o molecular**. Así, por ejemplo, en:

$$\underbrace{\textit{Messi es argentino}}_{p} \quad \textit{y} \quad \underbrace{\textit{jugador de football}}_{q}$$

encontramos dos enunciados. El primero (p) nos afirma que Messi es argentino y el segundo (q) que Messi es jugador de football. Es decir, las proposiciones compuestas se construyen con proposiciones simples y operadores que se denominan conectivos lógicos. En el ejemplo son proposiciones simples p, q siendo "y" el conector.

Operadores lógicos

En el siguiente cuadro se presentan los conectivos lógicos con su respectivo nombre y el modo de leerlo.

Conectivo	Nombre	Se lee
$\neg$	Negación	No
$\wedge$	Conjunción o producto lógico	Y
$\vee$	Disyunción o suma lógica	O inclusivo
$\Rightarrow$	Implicación	Si...entonces...
$\Leftrightarrow$	Doble implicación	Si y sólo si
$\veebar$	Diferencia simétrica	O exclusivo

Para obtener el valor de verdad de una proposición compuesta se utilizan tablas de verdad[1] teniendo en cuenta cómo actúan los conectivos lógicos según las siguientes definiciones:

⌧ Negación

Dada una proposición p, se denomina la negación de p a otra proposición denotada por ~ p o ¬ p (se lee "no p").

Por ejemplo:

[1] La cantidad de renglones de una tabla de verdad se calcula haciendo 2^n siendo n igual a la cantidad de proposiciones simples de la proposición compuesta.

p: Juan estudia Matemática Discreta

~ p: Juan no estudia Matemática Discreta

Por lo que nos resulta sencillo construir su tabla de verdad:

p	~ p
V	F
F	V

Observación: aquí que al valor V de p, la negación le hace corresponder el valor F, y viceversa.

Se trata de una operación unitaria, pues a partir de una proposición se obtiene otra, que es su negación.

⌧Conjunción

Dadas dos proposiciones p y q, se denomina conjunción de estas proposiciones a la proposición p $\wedge$ q (se lee "p y q"), cuya tabla de verdad es:

p	$\wedge$	q
V	V	V
F	F	V
V	F	F
F	F	F

Observación: la conjunción es verdadera sólo si lo son las dos proposiciones simples. En todo otro caso, es falsa.

POR EJEMPLO:

Sean las proposiciones simples:

p: Juan estudia Matemática Discreta

q: Juan toma mate

Entonces la conjunción es p $\wedge$ q: Juan estudia Matemática Discreta y toma mate

⌧ Disyunción

Dadas dos proposiciones p y q, la disyunción de las proposiciones p y q es la proposición $p \vee q$ cuya tabla de valor de verdad es:

p	$\vee$	q
V	V	V
F	V	V
V	V	F
F	F	F

OBSERVACIÓN: La disyunción ***o*** es utilizada en sentido excluyente, ya que la verdad de la disyunción se da en el caso de que al menos una de las proposiciones sea verdadera. En el lenguaje ordinario la palabra ***o*** es utilizada en sentido incluyente o excluyente indistintamente. Para agotar toda posibilidad de ambigüedades, en matemática se utiliza la disyunción definida por la tabla precedente, que nos muestra que la disyunción sólo es falsa cuando ambas proposiciones son falsas.

POR EJEMPLO:

Sean las proposiciones simples:

p: Juan estudia Matemática Discreta

q: Juan toma mate

Entonces la disyunción es p $\vee$ q: Juan estudia Matemática Discreta o toma mate

⌧ Implicación o Condicional

Implicación de las proposiciones p y q es la proposición $p \rightarrow q$ (si p entonces q) cuya tabla de valores de verdad es:

p	$\rightarrow$	q
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	V	F

La proposición p se llama antecedente, hipótesis o premisa y la proposición q se llama consecuente, conclusión o tesis de la implicación o condicional.

OBSERVACIÓN: la implicación sólo es falsa si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

En español, la proposición $p \rightarrow q$ se puede encontrar con los siguientes términos gramaticales:

"si p, entonces q",

"p sólo si q",

"p solamente si q",

"q si p", "si p, q",

"q con la condición de que p",

"q cuando p", "q siempre que p",

"q cada vez que p",

"q ya que p",

"q debido a que p",

"q puesto que p",

“q porque p”,

“se tiene q si se tiene p”,

“sólo si q, p”,

“q, pues p”,

“cuando p, q”,

“los p son q”,

“p implica q”,

o cualquier expresión que denote causa y efecto.

Por ejemplo:

Sean las proposiciones simples:

p: Juan aprueba Matemática Discreta

q: Me presta sus apuntes

Entonces la implicación es $p \rightarrow q$: Si Juan aprueba Matemática Discreta entonces me presta sus apuntes.

Nos interesa conocer la verdad o falsedad de esa implicación, en relación a la verdad o falsedad de las proposiciones p y q. El enunciado puede pensarse como un compromiso, condicionado por p, y podemos asociar su verdad al cumplimiento del compromiso. Es evidente que, si p es F, es decir si Juan no aprueba Matemática Discreta, queda liberado del compromiso y me preste o no sus apuntes la implicación es verdadera. Si p es verdadera, es decir si Juan aprueba Matemática Discreta, y no me presta sus apuntes, el compromiso no se cumple y la proposición es falsa. Si p y q son verdaderas, entonces la proposición es verdadera pues el compromiso se cumple.

⌦ Doble condicional o bicondicional

Doble implicación de las proposiciones p y q es la proposición $p \leftrightarrow q$ (se lee "p si y sólo si q") cuya tabla de valores de verdad es

p	↔	q
V	V	V
F	F	V
V	F	F
F	V	F

<u>OBSERVACIÓN</u>: la doble implicación o bicondicional sólo es verdadera si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

<u>POR EJEMPLO:</u>

Sean las proposiciones simples:

p: Juan aprueba Matemática Discreta

q: Me presta sus apuntes

Entonces la doble implicación es p ↔ q: Juan aprueba Matemática Discreta si y sólo si me presta sus apuntes.

⌦ Disyunción excluyente

Disyunción excluyente o Diferencia simétrica de las proposiciones p y q es la proposición p $\veebar$ q (se lee "p o q en sentido excluyente") cuya tabla de valores de verdad es:

p	$\veebar$	q
V	F	V
F	V	V
V	V	F
F	F	F

OBSERVACIÓN: la disyunción excluyente será falsa si las proposiciones simples tienen el mismo valor de verdad.

POR EJEMPLO:

Sean las proposiciones simples:

p: Juan usa zapatillas para ir a la UNLaM

q: Juan usa ojotas para ir a la UNLaM

Entonces la disyunción excluyente es $p \veebar q$: Juan usa zapatillas u ojotas para ir a la UNLaM. Queda claro que sólo podremos usar uno solo de los dos tipos de calzado para ir a la universidad.

Ejercicio

Para las siguientes proposiciones compuestas dar todos los posibles valores de verdad de las proposiciones simples de modo que resulten falsas:

1 $[(p \wedge q) \wedge r] \rightarrow (s \vee t)$

$V([(p \wedge q) \wedge r] \rightarrow (s \vee t)) = F$ por lo tanto $V([(p \wedge q) \wedge r]) = V$ y $V((s \vee t)) = F$

De donde V (p)=V; V (q)=V; V(r)=V; V(s)=F; V (t)=F

2 $[p \wedge (q \wedge r)] \rightarrow (s \wedge \neg t)$

$V([p \wedge (q \wedge r)] \Rightarrow (s \wedge \neg t)) = F$ por lo tanto $V([p \wedge (q \wedge r)]) = V$ y $V((s \wedge \neg t)) = F$

De donde V (p)=V; V (q)=V; V(r)=V; V(s)=F y V (t)=V ó V(s)=F y V (t)=F ó V(s)=V y V (t)=V

Tautología, Contingencia y Contradicción

Al conjunto de proposiciones, conectivos lógicos y símbolos de agrupación lo denominamos **fórmula lógica**. Por ejemplo: ~ {(p → q) ∧ (s ∨ t)}

⌧ Tautología

Si al evaluar una fórmula lógica, resulta que todos los valores de verdad resultantes son siempre V independientemente del valor de verdad de las proposiciones simples que la componen, decimos que dicha fórmula es una **Tautología** o **Ley lógica**.

EJEMPLO:

{ (p	→	q)	∧	p }	→	q
V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F
F	V	F	F	F	V	F

➢ Contradicción

Si al evaluar una fórmula lógica, resulta que para cualquier valor de verdad de las proposiciones intervinientes el resultado de dicha fórmula es siempre falso, decimos que dicha fórmula es una **Contradicción**.

EJEMPLO:

{ (p	∨	q)	∧	¬	(p	∨	q)
V	V	V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V	V

V	V	F	F	F	V	V	F
F	F	F	F	V	F	F	F

- Contingencia

Si una proposición no es una tautología ni una contradicción (es decir que contiene al menos un valor V y otro F) **es una contingencia**

EJEMPLO:

{ (p	$\wedge$	q)	$\vee$	p }	$\rightarrow$	q
V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	F	F	F	F	V	F

SUGERENCIA ANTES DE AVANZAR:

Mirá el video "¿Cómo elaborar una tabla de verdad ?" en el sitio de la cátedra http://discretaunlam.net.ar sección Apuntes-Lógica.

Condicionales asociados

Existen otras proposiciones relacionadas con la condicional p → q, las cuales se denominan: recíproca, inversa y contrarrecíproca (o contrapositiva).

- La Recíproca, es representada simbólicamente por: $q \rightarrow p$
- La Inversa, es representada simbólicamente por: $\neg p \rightarrow \neg q$.
- La Contrarrecíproca, es representada simbólicamente por: $\neg q \rightarrow \neg p$.

EJEMPLO:

"Si un número es divisible para 6, entonces es divisible para 3".

Siendo las proposiciones simples:

p: un número es divisible para 6

q: el número es divisible para 3

Entonces la implicación es $p \rightarrow q$ y sus condicionales asociados son:

• Recíproca:

"Si un número es divisible para 3, entonces es divisible para 6".

• Inversa:

"Si un número no es divisible para 6, entonces no es divisible para 3".

• Contrarrecíproca:

"Si un número no es divisible para 3, entonces no es divisible para 6".

Proposiciones lógicamente equivalentes

Dos proposiciones p y q se llaman equivalentes si sus tablas de verdad son idénticas. De ser así se denota: $p \equiv q$

Se observa al realizar las tablas de verdad de las proposiciones: $p \rightarrow q$ y $\sim p \vee q$

p	→	q
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	V	F

¬	p	∨	q
F	V	V	V
V	F	V	V

F	V	F	F
V	F	V	F

Como vemos, luego de realizar las tablas de verdad encontramos que ambas proposiciones tienen el mismo resultado final. Con esto, decimos que ambas proposiciones son lógicamente equivalentes, y en este caso particular lo simbolizamos:

$(p \rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

SUGERENCIA ANTES DE AVANZAR:

Mirá el ejemplo de las tablas de verdad de los condicionales asociados en el sitio de la cátedra http://discretaunlam.net.ar sección Apuntes-Lógica.

Leyes del álgebra proposicional

Aquellas fórmulas lógicas que resultan ser siempre verdaderas sin importar la combinación de los valores de verdad de sus proposiciones simples, son tautologías o leyes lógicas. En el cálculo proposicional existen algunas tautologías especialmente útiles cuya demostración se reduce a la confección de su correspondiente tabla de verdad, a saber:

Involución

$\sim(\sim p) \equiv p$ (se lee "no, no p, equivale a p")

Idempotencia

$(p \wedge \sim p) \equiv p$

$(p \vee \sim p) \equiv p$

Conmutatividad

a) de la disyunción: $p \vee q \equiv q \vee p$

b) de la conjunción: $p \wedge q \equiv q \wedge p$

Asociatividad

a) de la disyunción: $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

b) de la conjunción: $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

Distributividad:

De la conjunción respecto de la disyunción: $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

De la disyunción respecto de la conjunción: $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \vee (q \vee r)$

Leyes de De Morgan

$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

"La negación de una disyunción equivale a la conjunción de las negaciones"

$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

"La negación de una conjunción equivale a la disyunción de las negaciones"

Leyes de absorción

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$

Leyes de identidad

$p \wedge T \equiv p$

$p \vee F \equiv p$

Leyes de dominación

$p \wedge F \equiv F$

$p \vee V \equiv V$

Leyes de negación

$p \wedge \neg p \equiv F$

$p \vee \neg p \equiv V$

Aclaración: Se representa con T a una tautología y con F a una contradicción.

 **SUGERENCIA ANTES DE AVANZAR:**

Mirá el video "¿Cómo simplificar proposiciones lógicas? en el sitio de la cátedra http://discretaunlam.net.ar sección Apuntes-Lógica.

PRINCIPALES LEYES LÓGICAS:

Equivalencia	Nombre
$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$	Leyes de identidad
$p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$ $p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$	Leyes de dominación
$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$	Leyes idempotentes
$\neg(\neg p) \equiv p$	Ley de doble negación
$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$	Leyes conmutativas
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	Leyes asociativas
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Leyes distributivas

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	Leyes de De Morgan
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$	Leyes de absorción
$p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$ $p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$	Leyes de negación

Equivalencias lógicas relacionadas con implicaciones
$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$
$p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$
$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$

Ejercicio

Simplificar las siguientes expresiones:

1 $\neg [\neg p \wedge \neg (q \vee \neg p)]$

$\neg [\neg p \wedge \neg (q \vee \neg p)] \underset{1.}{\leftrightarrow} \neg[\neg p \wedge (\neg q \wedge p)] \underset{2.}{\leftrightarrow} p \vee \neg(\neg q \wedge p) \underset{3.}{\leftrightarrow} p \vee (q \vee \neg p) \underset{4.}{\leftrightarrow}$

$(p \vee \neg p) \vee q \underset{5.}{\leftrightarrow} V \vee q \underset{6.}{\leftrightarrow} V$

1. Ley de De Morgan
2. Ley de De Morgan e Involución
3. Ley de De Morgan e Involución
4.Conmutativa.Asociativa
5. Ley de contradicción
6. Ley de identidad

2 $\neg [p \vee (\neg p \wedge q)]$

$$\neg [p \vee (\neg p \wedge q)] \underset{1.}{\leftrightarrow} [\neg p \wedge \neg (\neg p \wedge q)] \underset{2.}{\leftrightarrow} \neg p \wedge (p \vee \neg q) \underset{3.}{\leftrightarrow} (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \underset{4.}{\leftrightarrow}$$

$$F \vee (\neg p \wedge \neg q) \underset{5.}{\leftrightarrow} (\neg p \wedge \neg q)$$

1. Ley de De Morgan
2. Ley de De Morgan e involución
3. Ley distributiva
4. Ley de contradicción
5. Ley de identidad (elemento neutro)

Funciones proposicionales y cuantificadores

Función Proposicional

Supongamos los siguientes enunciados:

" x es la capital de Buenos Aires"

" $y + 4 = 11$"

Estos no tienen un valor de verdad ya que va a depender del valor que le demos a las variables x e y. Pero si en el primero de ellos hacemos x = La Plata, tenemos:

"La Plata es la capital de Buenos Aires" al cual le asociamos un valor de verdad (Verdadero)

Asimismo, si en el segundo hacemos $x = 9$, resulta: $9 + 4 = 11$ lo cual es (Falso)

Podemos, entonces, dar la siguiente definición: *"Una función proposicional es un enunciado abierto de la forma $P_{(x)}$ que se convierte en una proposición cuando se le asigna un valor específico a la variable".*

EJEMPLO:

$p_{(x)}$:" $2x + 5 > 11$" , si $x = 4 \therefore 13 > 11$ (Verdadero)

$q_{(x)}$: "$3x + 7 = 11$" , si $x = 5 \therefore 22 = 16$ (Falso)

$r_{(x)}$: "$2x + 1 = 5$ ", si $x = 2 \therefore 5 = 5$ (Verdadero)

$s_{(x)}$: "x es un animal", si x = mesa se tendrá : mesa es un animal (Falso)

$t_{(x)}$: "x es un ave", si x = flamenco se tiene: el flamenco es un ave (Verdadero)

Cuantificadores

A partir de funciones proposicionales es posible obtener proposiciones generales mediante un proceso llamado de cuantificación. Asociados a la indeterminada x, introducimos los símbolos $\forall$**x** y $\exists$**x**, llamados **cuantificador universal** y **cuantificador existencial** respectivamente. Las expresiones

- Para todo x, se verifica $p_{(x)}$ se denota por $\forall$**x : p**$_{(x)}$
- Existe x, tal que se verifica $p_{(x)}$ se denota por $\exists$**x / p**$_{(x)}$

Corresponden a una función proposicional $p_{(x)}$ cuantificada universalmente en el primer caso, y existencialmente en el segundo.

Una función proposicional cuantificada universalmente es V si y sólo si son V todas las proposiciones particulares asociadas a aquella.

- Para indicar que una función proposicional es Verdadera para cualquier elemento de un conjunto A, basta con cuantificarla universalmente. Se lee: "para todo", "cualquiera sea", "para cada"

- Para indicar que una función proposicional es Verdadera para algún elemento de un conjunto A, basta con cuantificarla existencialmente. Se lee: "existe un", "existe al menos uno", "existe algún".
- Para indicar que una proposición es verdadera para un único elemento de un conjunto A se usa el símbolo $\exists!$.Se lee "existe un único"

Un problema de interés es la negación de funciones proposicionales cuantificadas.

Por ejemplo: La negación de *"Todos los enteros son impares" es "Existen enteros que no son impares"* y en símbolos: $\exists\, x \,/\, \sim p_{(x)}$

Entonces, para negar una función proposicional cuantificada universalmente se cambia el cuantificador en existencial, y se niega la función proposicional.

EJEMPLO:

Sea la proposición: Todos los alumnos de mi curso de Matemática Discreta son aplicados.

La vamos a escribir en lenguaje simbólico, negarla y retraducir la negación al lenguaje ordinario.

Nos damos cuenta pronto que se trata de la implicación de dos funciones proposicionales:

$p_{(x)}$: es alumno de mi curso

$q_{(x)}$: es aplicado

Tenemos entonces: $\forall x$: $p_{(x)} \rightarrow q_{(x)}$

Teniendo en cuenta la forma de negar una función proposicional cuantificada universalmente y una implicación resulta:

$\exists\, x \,/\, p_{(x)} \wedge \sim q_{(x)}$

Y traduciendo al lenguaje ordinario resulta:

Existen alumnos de mi colegio que no son aplicados.

Negación de cuantificadores.

Se tienen las siguientes relaciones universales:

$$\forall x \in A : \quad P(x) \qquad \longleftrightarrow \qquad \neg\exists x \in A : \quad \neg P(x)$$

$$\exists x \in A : \quad P(x) \qquad \longleftrightarrow \qquad \neg\forall x \in A : \quad \neg P(x)$$

EJEMPLO:

Negar cada una de las siguientes proposiciones

p(x): $\forall x \in \mathbb{R}$: $(x>0 \rightarrow x + 3 \geq 5)$

q(x): $\exists x \in \mathbb{Z}$: $(x + 2 = 6 \wedge x \geq 3)$

Solución

¬p(x): $\neg (\forall x \in \mathbb{R}$: $(x>0 \rightarrow x + 3 \geq 5))$

¬p(x): $\neg (\forall x \in \mathbb{R})$:$\neg(x>0 \rightarrow x + 3 \geq 5))$

¬p(x): $\exists x \in \mathbb{R}$: $x \leq 0 \vee x + 3 \geq 5$

¬q(x):$\neg(\exists x \in \mathbb{Z}$: $(x + 2 = 6 \wedge x \geq 3)$)

¬q(x):$\neg(\exists x \in \mathbb{Z})$: $\neg$ $(x + 2 = 6 \wedge x \geq 3)$)

¬q(x): $\forall x \in \mathbb{Z}$: $x + 2 \neq 6 \vee x < 3$

Antes de comenzar con el tema de “Conjuntos” te proponemos que ingreses al sitio de la cátedra “

https://discretaunlam.net.ar ” para leer y hacer las actividades por clase (AxC) que te proponemos en la plataforma.

Luego comienza a hacer los ejercicios de Lógica de la guía de ejercicios para el primer parcial y por último resuelve la autoevaluación que figura en el sitio.

Tené en cuenta que todas las actividades que realices forman parte del seguimiento académico que hará tu tutor.

Apuntes

AxC (actividades por clase)

Autoevaluaciones

CONJUNTOS

El concepto de conjunto es de fundamental importancia en Matemática Discreta ya que a partir de él se define o describe el resto de las estructuras discretas: relaciones; combinaciones; grafos y máquinas de estado finito.
Nuestro interés en los conjuntos se debe tanto al papel que representan en matemática como a su utilidad en la modelización e investigación de problemas en informática.
Comencemos por definir qué se entiende por conjunto:

Un conjunto es cualquier colección desordenada de objetos

Los conjuntos tienen por finalidad agrupar objetos que generalmente pero no siempre tienen características similares. De esta manera todas las mujeres nacidas en Bs. As. forman un conjunto.
A cada objeto de la colección lo llamaremos elemento o miembro del conjunto.
A los conjuntos los designaremos con letras mayúsculas y a sus elementos con letras minúsculas. La afirmación: *"x es elemento del conjunto A"* o bien *"el elemento x pertenece al conjunto A"* se escribe

$$x \in A$$

y la negación de este hecho, $\neg(x \in A)$, es decir " *x no es elemento del conjunto A"* o bien *"el elemento x no pertenece al conjunto A"* ,se escribe

$$x \notin A$$

Al definir un conjunto no debe haber confusión para determinar si un objeto particular pertenece, o no, al mismo.

Formas de representación de un conjunto

✓ Representación por Extensión o Ennumeración

Un conjunto está definido por extensión cuando se nombra a cada uno de sus elementos.

Tendremos en cuenta las siguientes reglas para designar conjuntos por extensión:

- Los escribiremos separados por comas y encerrados por una llave inicial y otra final.
- No repetiremos ninguno de ellos teniendo en cuenta que si se lista un elemento más de una vez no importa.
- Los denotaremos en cualquier orden ya que el orden en que se especifican los elementos es irrelevante.

Ejemplo

Los siguientes conjuntos están definidos por extensión.
(a) El conjunto de las vocales del alfabeto romano A = {a, e, i, o, u}
(b) El conjunto formado por los números impares no negativos y menores que diez.

B = {1, 3,5, 7,9}

Ejercicio resuelto

Definir por extensión los siguientes conjuntos.

El conjunto de los enteros no negativos menores que cinco.

A = {0, 1, 2, 3, 4}

(b) El conjunto de las letras de la palabra papa

B = {p, a}

(c) El conjunto de los números primos entre 3 y 15.

C = {3, 5, 7,11, 13}

A veces tanto en conjuntos finitos demasiado grandes como en conjuntos infinitos, se utiliza el etcétera matemático: los tres puntos **. . .**, para caracterizar a los elementos de un conjunto. Por ejemplo, el conjunto de los números enteros del 1 al 100,

C = {1, 2, 3,. . ., 100}

o el conjunto de los enteros pares no negativos,

D = {0, 2, 4, 6,. . .}

Los elementos de un conjunto infinito no pueden especificarse de una forma explícita; consecuentemente, necesitaremos una forma alternativa de describir tales conjuntos implícitamente.

✓ Representación por Comprensión

Un conjunto está definido por comprensión cuando se especifica una propiedad que caracteriza a todos los elementos del mismo.

Se utiliza la notación { : } o { / } y se lee "tal que "
Antes de los dos puntos se escribe la variable por ejemplo x o n y después de los dos puntos se da la propiedad. Esta propiedad o especificación implícita, se hace a menudo mediante un predicado[2] con una variable libre[3].

Ejemplo

Definir por comprensión los siguientes conjuntos:

(a) El conjunto de los enteros mayores que cinco
. El universal es Z y el predicado es $x > 5$ por lo tanto

$$A = \{x \in Z \ / \ x > 5\}$$

(b) El conjunto de los enteros impares.
El universal es Z y el predicado es x = 2n + 1 por lo tanto

$$B = \{x \in Z \ / \ x = 2n + 1;\ n \in Z\}$$

(c) El conjunto de los enteros pares.
El universal es Z y el predicado es x = 2n por lo tanto

$$C = \{x \in Z \ / \ x = 2n;\ n \in Z\}$$

Conjuntos especiales

1.Conjunto Universal

---

[2] Predicado: sentencias abiertas, en las que se incluyen una o más variables (enunciado)// Expresión en la que intervienen cuantificadores, como existe o para todo
[3] Variable libre: variable de la cual no se conoce su tipo ni su valor

Los elementos de todos los conjuntos en consideración pertenecen a un gran conjunto fijo llamado conjunto universal. Lo notaremos por **U**.

Ejemplo

- Para cada uno de los conjuntos siguientes, elegir un conjunto universal y un predicado apropiado para definirlo.

(a) El conjunto de los enteros entre 10 y 50

El conjunto universal es el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ y el predicado son los enteros entre 10 y 50; por lo tanto, el conjunto A se escribe de la siguiente forma:

$A = \{x \in \mathbb{Z} \; / \; 10 < x < 50\}$

(b) El conjunto de los múltiplos de 15.

El conjunto universal es el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ y el predicado es enteros múltiplos de 5; por lo tanto, el conjunto B se escribe de la siguiente forma:

$B = \{x \in \mathbb{Z} \; / \; x = 15\,q, \; q \in Z\}$

2. Conjunto Vacío

Al conjunto único que no contiene elementos, lo llamaremos conjunto vacío. Lo notaremos con el símbolo $\varnothing$.

Aclaración: El símbolo $\varnothing$ no es la letra griega fi sino que proviene del alfabeto noruego y los no noruegos debemos leerlo como "conjunto vacío"

Observación**:** Los conjuntos son objetos, por lo tanto, pueden ser elementos de otros conjuntos, por ejemplo, el conjunto A = {{a}, {b}, {d, c}} tiene tres elementos que son los conjuntos {a}, {b} y {d, c}. Se puede interpretar como una caja con tres paquetes de caramelos, la consideraríamos como una caja con paquetes antes que una caja con caramelos, por lo que se trataría de un conjunto **(la caja)** con tres elementos **(los paquetes).**

Análogamente, si {a, b, c} es un conjunto, entonces {{a, b, c}} es un conjunto con un único elemento, {a, b, c}, sin importarnos cuantos elementos tenga {a, b, c}.

Una caja con un paquete vacío de caramelos no es una caja vacía ya que contiene algo, un paquete. Es decir **{∅}** es un conjunto con un elemento.

3.Vocabulario o Alfabeto

Un ***alfabeto o vocabulario*** *es un conjunto finito no vacío cuyos elementos son símbolos. A esos símbolos se los llama letras, strings o caracteres. Lo notaremos con el símbolo* ***V****.*

Ejemplo

V_1= {1,2,3}; V_2= {a, b, c, d}; V_3= {0,1}; V_4= {☻, ♣, ♥, ♫}

A partir del conjunto V se puede construir el conjunto **V***, V estrella, formado por **todas las secuencias finitas de los elementos de V**. A las secuencias finitas se las llama palabras o cadenas o hileras de V.

Una ***palabra o hilera*** *sobre* V *es una secuencia finita de elementos de* V*.*

La **palabra vacía** o **cadena vacía**, denotada por λ, lambda, es la cadena que **no contiene símbolos**.

En símbolos

$$V^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} V^i$$

Ejemplo

Sea el alfabeto V= {0,1} el conjunto de todas las hileras que se pueden formar con el alfabeto V es

$V^*= \{\lambda,0,1,00,11,01,10,001,010,100,011, 101,\ldots\}$ siendo algunas de sus palabras $w_1=001$; $w_2=100$; $w_3=10101010$

Existen muchas interpretaciones posibles sobre los elementos de V*, según la naturaleza de V.

Si V es un conjunto de “palabras” entonces V* será la colección de todas las “oraciones” posibles formadas con las palabras de V, tengan o no sentido o una estructura evidente.

Ejemplo

V = {Ana, Luis, mariposa, come, reir, rápido, lento, bien}

Algunas palabras de V: w_1=Ana come; w_2=reir rápido bien; w_3=Luis mariposa Ana

V*= {λ, Ana Luis mariposa, Ana come rápido, Luis reir bien, Luis Juan bien,…}

También se define el conjunto **V^+**, V más, como el conjunto de **todas las hileras no nulas** que se pueden construir con el alfabeto V. En símbolos

$$V^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} V^i = V^* - \{\lambda\}$$

Ejemplo

Para el alfabeto V= {0,1} el conjunto de todas las hileras no nulas es

$V^+= \{0,1,00,11,01,10,001,010,100,011, 101,\ldots\}$ siendo algunas de sus palabras $w_1=001$; $w_2=100$; $w_3=10101010$

4.A LO LARGO DEL curso TRABAJAREMOS con los siguientes conjuntos:

Z = {…, -3,-2,-1.0, 1, 2, 3,…}, Conjunto de los números enteros.

N = Z $^+$ = {1, 2, 3,…} Conjunto de los números naturales o enteros positivos. (Sin el cero)

Z $_0{}^+$ = {0, 1, 3, 4,…} Conjunto de los enteros no negativos.

CARDINALIDAD: |A|

Llamaremos cardinal de A al número de elementos distintos de A.
Si un conjunto A tiene una cantidad finita de elementos, diremos que es un conjunto finito; si el conjunto tiene una cantidad no finita de elementos diremos que es un conjunto infinito y que su cardinal es infinito.

Ejemplo

1. A = {{a}, {b, c}, 5, 4}, entonces |A| = 4.

2. B = {n $\in$ N / n^2 = 3}, entonces |B| = 0

3. C = ∅, entonces |∅| = 0.

4. D = { ∅ }, entonces |{∅}| = 1

5.|N| es infinito.

LONGITUD[4] DE UNA CADENA O PALABRA:

Es la cantidad de símbolos de V que tiene la cadena o palabra contados tantas veces como aparezcan. Se denota long w = | w |

Ejemplo

[4] Depende del alfabeto o vocabulario, con el cual se está trabajando.

1. V= {a, b, c……..x, y, z}

   long Ana = 3

   long Luis salta bien = 13

2. V= {Ana, tiene, Salta, Luis, bien, joyas}

   long Ana = 1

   long Luis salta bien = 3

3. La longitud de la palabra nula es cero: long λ = 0

4. V= {1,0}

   long 110=3

   long 10= 2

5. V= {0,10,11}

   long 110=2

   long 10= 1

Igualdad entre conjuntos

Dos conjuntos A y B son iguales si, y sólo si tienen los mismos elementos. Es decir, cada elemento del conjunto A es un elemento de B y cada elemento de B es un elemento de A.

Por lo tanto

$$\{1, 3, 5,7\} = \{7,1,3,5,\} = \{1,1,3,7,5,3\}$$

El orden en que se enumeran los elementos es irrelevante al igual que la repetición del elemento.
Su expresión formal es:

$$A = B \leftrightarrow \forall x: [(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)]$$

Entonces dos conjuntos son distintos A ≠ B si existe un elemento de A que no es elemento de B o bien existe un elemento de B que no es elemento de A.

En símbolos

$A \neq B \leftrightarrow (\exists\, x \in A \,/\, x \notin B) \;\; \vee \;\; (\exists x \in B \,/\, x \notin A)$

Ejemplo

¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?

$A = \{ a, b, c, \{a, b \}, \varnothing\}$ $B = \{ a, \varnothing, b, \varnothing, c, \varnothing, \{a, b\}, \varnothing\}$ $C=\{ a, b, c, \{a, b \}\}$

$(a \in A \rightarrow a \in B) \wedge (a \in B \rightarrow a \in A)$

$(b \in A \rightarrow b \in B) \wedge (b \in B \rightarrow b \in A)$

$(c \in A \rightarrow c \in B) \wedge (c \in B \rightarrow c \in A)$

$(\{a, b\} \in A \rightarrow \{a, b\} \in B) \wedge (\{a, b\} \in B \rightarrow \{a, b\} \in A)$

$(\varnothing \in A \rightarrow \varnothing \in B) \wedge (\varnothing \in B \rightarrow \varnothing \in A)$

Por lo tanto, **A = B**

Como $\varnothing \in A \wedge \varnothing \notin C$ entonces **A ≠ C**

Inclusión de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos. Diremos que A está contenido en B o que es un subconjunto de B, si cada elemento de A es también un elemento de B.

Se denota por $A \subseteq B$, es decir,

$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x\colon (x \in A \rightarrow x \in B)$

Ejemplo

1. Probar cuales de los siguientes conjuntos $A = \{2, 4,6\}$ y $C= \{8,1\}$ son subconjuntos de

$B = \{x \in N \,/\, x= 2\, q,\, q \in N\}$

Probamos con cada uno de los elementos de A y B:

$2 \in A \rightarrow 2 \in B$

$4 \in A \rightarrow 4 \in B$

$6 \in A \rightarrow 6 \in B$

Por lo tanto $A \subseteq B$

$8 \in C \rightarrow 8 \in B$

$1 \in C \wedge 1 \notin B$

Por lo tanto C no es subconjunto de B

2.

Cada subconjunto (finito o infinito) de V* *se llama* *lenguaje* *sobre* V*. En otras palabras, todo lenguaje sobre un conjunto* V *es un conjunto finito o infinito de palabras construidas a partir de* V*.*

<u>*Ejemplo*</u>

1. Para el conjunto de hileras
   V*= {λ,0,1,00,11,01,10,001,010,100,011, 101,…} son subconjuntos de V* los siguientes lenguajes L_1= {0,00,000. 0000,….}; L_2= {λ, 0, 1, 00,11}; L_3 = {1, 00, 1011, 11111,0}

Se puede pensar en un lenguaje, natural o formal, como una descripción completa de tres cosas:
1. Debe existir un conjunto V* con todas las "palabras" que se consideran parte del lenguaje
2. Hay que designar un subconjunto de V* como el conjunto de las "oraciones con construcción adecuada" en el lenguaje.
3. Hay qué determinar cuáles de las oraciones con construcción adecuada tienen significado y cuál es éste.

La disciplina que regula la construcción adecuada de las oraciones es la sintaxis de un lenguaje y la que se encarga del significado de las oraciones es la semántica de un lenguaje.
Entonces ¿Qué se entiende por lenguaje?
Un lenguaje es un conjunto de símbolos y palabras (vocabulario o léxico) y un conjunto de reglas (sintaxis y semántica) que permiten agrupar los símbolos para formar las frases del lenguaje.

Los ***lenguajes naturales*** son los idiomas, como el español, el inglés y el francés. No fueron concretamente diseñados, sino que se han desarrollado naturalmente.

Los ***lenguajes formales*** son diseñados por las personas con un fín determinado. La notación matemática, por ejemplo, es un lenguaje formal, ya que se presta a la representación de las relaciones entre números y símbolos. Los químicos utilizan un lenguaje formal para representar la estructura química de las moléculas.

Los ***lenguajes de programación son lenguajes formales*** que sirven para describir algoritmos ejecutables en una computadora.

Un programa se escribe como una secuencia de frases del lenguaje.

Un lenguaje de programación viene definido por un léxico, una sintaxis y una semántica.

Nosotros estudiaremos la sintáxis de una clase de lenguajes llamada gramática de estructura de frase en la unidad N°4.

PROPIEDADES DE LA INCLUSIÓN

1. Sea U el conjunto universal y A un conjunto cualquiera. Entonces $A \subseteq U$.

$$\forall A: A \subseteq U$$

"Todo conjunto es subconjunto del universal"

2. Sea A un conjunto cualquiera, entonces; $\varnothing \subseteq A$.

$$\forall A: \varnothing \subseteq A$$

"El vacío es subconjunto de cualquier conjunto"

3. Propiedad Reflexiva:

   Para cualquier conjunto A, se verifica que $A \subseteq A$

$$\forall A: A \subseteq A$$

"Todo conjunto es subconjunto de si mismo"

Ejemplo

Determinar todos los subconjuntos de los siguientes conjuntos:

(a) $A = \{a, b\}$

Utilizaremos la definición de subconjunto $A \subseteq B \leftrightarrow \forall x: (x \in A \rightarrow x \in B)$

De la proposición 2 se sigue que el conjunto vacío, $\varnothing \subseteq \{a, b\}$

$a \in \{a, b\}$ entonces $\{a\} \subseteq \{a,b\}$
$b \in \{a, b\}$ entonces $\{b\} \subseteq \{a,b\}$
$a \in \{a, b\}$ y $b \in \{a,b\}$ entonces $\{a,b\} \subseteq \{a,b\}$

Por lo tanto, el conjunto A tiene cuatro subconjuntos distintos:

$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, y $\{a, b\}$

(b) $B = \{\{a\}\}$
Es un conjunto unitario ya que tiene un único elemento, el conjunto $\{a\}$.
Sus subconjuntos son el $\varnothing$ y el $\{\{a\}\}$.

(c) $C = \{1, 2, 3\}$

$\varnothing \subseteq \{1, 2, 3\}$ (Proposición 1).

$1 \in \{1, 2, 3\}$, luego $\{1\} \subseteq \{1, 2, 3\}$.

$2 \in \{1, 2, 3\}$, luego $\{2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$.

$3 \in \{1, 2, 3\}$, luego $\{3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$.

$1 \in \{1, 2, 3\}$ y $2 \in \{1, 2, 3\}$, luego $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$.

$1 \in \{1, 2, 3\}$ y $3 \in \{1, 2, 3\}$, luego $\{1, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$.

$2 \in \{1, 2, 3\}$ y $3 \in \{1, 2, 3\}$, luego $\{2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$.

$1 \in \{1, 2, 3\}$, $2 \in \{1, 2, 3\}$ y $3 \in \{1, 2, 3\}$, luego $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$.

por lo tanto, los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ son

$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ y $\{1, 2, 3\}$

(d) $D = \{1, \{2, 3\}\}$

1 y $\{2, 3\}$ son los dos elementos que tiene este conjunto, luego razonando igual que en los otros ejemplos, sus subconjuntos son:

$\varnothing$, $\{1\}$, $\{\{2, 3\}\}$ y $\{1, \{2, 3\}\}$

4. Propiedad Transitiva:

Sean A, B y C tres conjuntos cualesquiera de un universal arbitrario U. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subseteq C$.

$$\forall A, B, C: A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$$

"Si un conjunto A es subconjunto de otro B y éste subconjunto B de un tercero C entonces el primero A es subconjunto del tercero C"

5. Propiedad antisimétrica:

Sean A, B dos conjuntos cualesquiera de un universal arbitrario U. Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, entonces $A = B$

$$\forall A, B: A \subseteq B \wedge B \subseteq A \rightarrow A=B$$

"Si un conjunto A es subconjunto de otro B y esté subconjunto B del primero A entonces son iguales "

El criterio de igualdad de conjuntos se puede reformular teniendo en cuenta la propiedad antisimétrica:

Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si A es subconjunto de B y B es subconjunto de A.

$$A = B \rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Esto se utiliza con frecuencia para comprobar que dos conjuntos son iguales, es decir, para probar que $A = B$, se prueba que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

IGUALDADPPROPI

Ejercicios

1. Dado el conjunto A = {-1, 2, {3}, {1; 2}}, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

$3 \in A$ Falso, no figura en la lista de los elementos de A

$\{1, 2\} \subseteq A$ Falso, 1 es elemento de {1,2} y 1 no es elemento de A. En símbolos: $1 \in \{1,2\} \wedge 1 \notin A$

$\{1, 2\} \in A$ **Verdadero,** figura en la lista de los elementos de A

$\{\{3\}\} \subseteq A$ **Verdadero**, $\{3\} \in \{\{3\}\} \rightarrow \{3\} \in A$

$\{3\} \subseteq A$ Falso, 3 es elemento de {3} y 3 no es elemento de A. En símbolos: $3 \in \{3\} \wedge 3 \notin A$

$\varnothing \in A$ Falso, no figura en la lista de elementos de A

$\{-1, 2\} \subseteq A$ **Verdadero**, $-1 \in \{-1,2\} \rightarrow -1 \in A$ y $2 \in \{-1,2\} \rightarrow 2 \in A$

$\varnothing \subseteq A$ **Verdadero**, propiedad $\forall A: \varnothing \subseteq A$

$\{\{1, 2\},-1\} \in A$ Falso, no figura en el listado de los elementos de A

2. Indicar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones para el alfabeto V = {a, b}

a) $\lambda \in V$ Falso, no figura en el listado de los elementos de V

b) $\lambda \subseteq V$ Falso, λ no es elemento de V

c) $\lambda \in V^*$ Verdadero**,** por definición de $V^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} V^i$

d) $\lambda \in V^+$ Falso, por definición de

$$V^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} V^i$$

Conjunto de partes P(A) o conjunto potencia

*El conjunto de partes de un conjunto A es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A. Lo denotamos **P(A)**.*

Ejemplo

Determinar el conjunto de partes de los siguientes conjuntos:

(a) A = {a, b}; (b) B = {{a}}; (c) C = {1, 2, 3};(d) D = {1, {2, 3}}

(a) P(A) = {∅, {a}, {b}, {a, b}}

(b) P (B) = {∅ , {{a}}}

(c) P(C) = {∅, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}}

(d) P (D) = {∅, {1}, {{2, 3}}, {1, {2, 3}}

- **Si A es un conjunto finito con n elementos, entonces el cardinal del conjunto de partes, |P(A)|, es 2^n.**

Ejemplo

1. a) Para A = {1, 2, 3}, tenemos que |A| = 3 y |P(A)| = 8.

b) Para B = {a}, tenemos |B| = 1 y |P (B)| = 2.

c) Para C=∅ se cumple que |∅| = 0, y |P (∅)| = |{∅}| = 1.

2. a) Si $L \subseteq V^*$ *entonces un lenguaje L es elemento del conjunto de partes de* V^*, $L \in P(V^*)$

b) Si V*= {λ,0,1,00,11,01,10,001,010,100,011, 101,…} entonces su conjunto de partes es

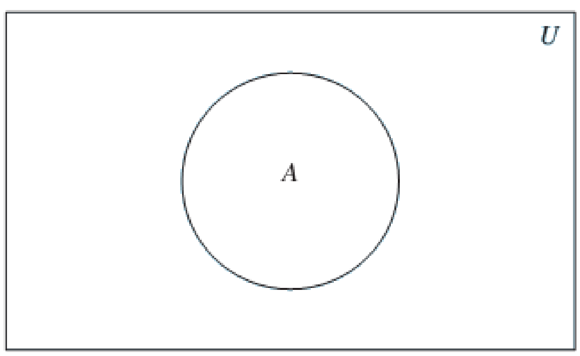
P (V*)={∅,{ λ},{ λ.0},{ λ,1},{ λ,0,1,00,11},…} y el lenguaje L_1= {λ, 0, 1, 00,11} es un elemento de P (V*)

SUGERENCIA ANTES DE AVANZAR:

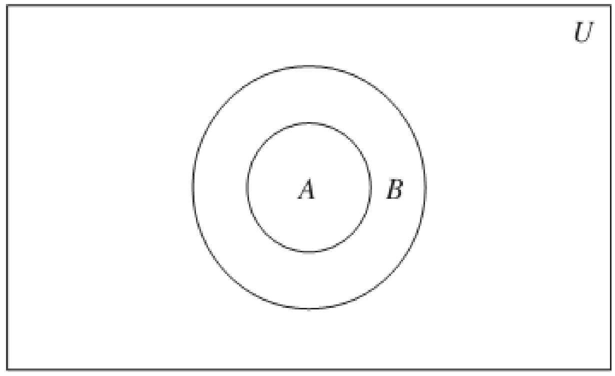
Mirá el video "¿Qué es el conjunto potencia y cómo se calcula su cardinal? en el sitio de la cátedra http://discretaunlam.net.ar sección Apuntes-Conjuntos.

Representación gráfica: Diagramas de Venn

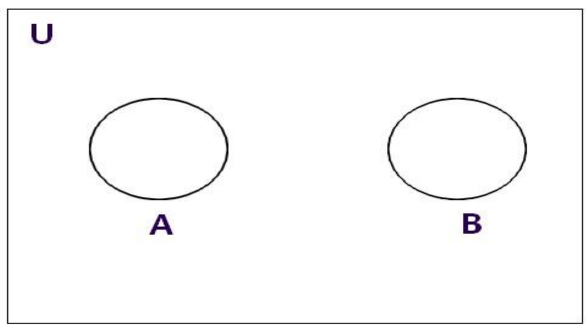
Una representación gráfica para los conjuntos son los diagramas de Venn. El conjunto universal se representa por el interior de un rectángulo y todos los demás conjuntos se representan por regiones cerradas incluidos en el mismo.



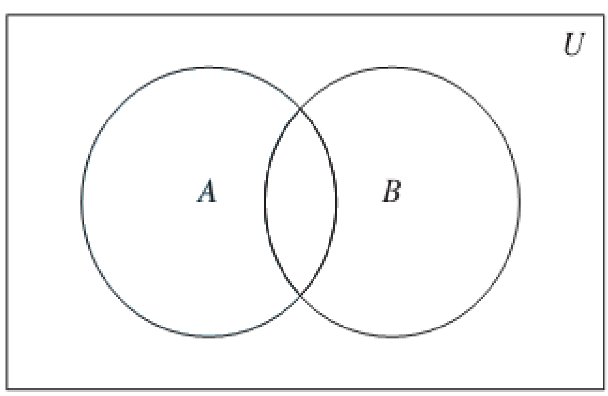
− Si A es un subconjunto de B, A ⊆ B, entonces la región que representa a A, estaría contenida en la que representa a B.



– Si A y B no tienen elementos en común (A y B son disjuntos), entonces la región que representa a A estará separada completamente de la región que representa a B.



− Si A y B son dos conjuntos arbitrarios, entonces es posible que algunos elementos estén en A pero no en B, algunos en B pero no en A, algunos en los dos, A y B, y algunos ni en A, ni en B.



Ejercicios Resueltos

1. Dado A = $\{$ a,b,c, {a,b},∅ $\}$:

1.1 Hallar P (A)

P({a,b,c,{a,b},∅})={∅,{a},{b},{c},{{a,b}},{∅},{a,b},{a,c},
{a,{a,b}},{a,∅},{b,c},{b,{a,b}},{b,∅},{c,{a,b}},{c,∅},{{a,b},∅},
{a,b,c},{a,b,{a,b}},{a,b,∅},{b,c,{a,b},{b,c,∅},{c,{a,b},∅},
{a,c,{a,b}},{a,c,∅},{b,{a,b},∅},{c,{a,b},∅},{a,b,c,{a,b}},{a,b,c,∅},
{b,c,{a,b},∅},{a,c,{a,b},∅},{a,b,{a,b},∅},{a,b,c,{a,b},∅}}

1.2. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) $\varnothing \subseteq \varnothing$ Verdadero; propiedad $\forall$A: $\varnothing \subseteq$ A

b) $\varnothing \in \varnothing$ Falso; el conjunto vacío no tiene elementos

c){a} $\subseteq$ {a,b,c, {a,b},∅ } Verdadero ;a es elemento de {a,b,c,{a,b},∅} entonces {a} $\subseteq$ {a,b,c, {a,b},∅ }por la definición de inclusión. O bien {a} es elemento de P(A)

d) $\varnothing \in$ {∅} Verdadero; ∅ figura en el conjunto

e) | {a,b,c,{a,b},},∅}| = 4 Falso; | {a,b,c,{a,b},},∅}| = 5

f) {∅} $\in \varnothing$ Falso; el conjunto vacío no tiene elementos

g) {∅} $\subseteq$ {∅} Verdadero; propiedad $\forall$A: A $\subseteq$ A

h) {∅} $\in$ {∅} Falso; ∅ es elemento de {∅}

i) $\{a,b\} \subseteq \{a,b,c, \{a,b\},\varnothing \}$ Verdadero; a y b son elementos de $\{a,b,c,\{a,b\},\varnothing \}$entonces $\{a,b\} \subseteq \{a,b,c, \{a,b\},\varnothing \}$ por definición de inclusión

j) $\{a, b,c\} \in \{a, b,c, \{a,b\},\varnothing \}$ Falso; los elementos del conjunto son :

$$a \in \{a,b,c, \{a,b,c\}\}$$
$$b \in \{a,b,c, \{a,b\},\varnothing\}$$
$$c \in \{a, b,c, \{a,b\},\varnothing\}$$
$$\{a, b\} \in \{a,b,c, \{a,b\},\varnothing\}$$
$$\varnothing \in \{a,b,c, \{a,b\},\varnothing\}$$

2. Dado $A = \{5\}$:

2.1 Hallar P(P(A)) y P(P(P(A)))

$|A| = 1$; $|P(A)| = 2^1= 2$ **P(A) =** $\{\varnothing, \{5\}\}$

$|P(A)| = 2$; $|P(P(A))| =.2^2= 4$ **P(P(A)) =** $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{5\}\}, \{\varnothing, \{5\}\}\}$

$|P(P(A))| = 4$; $|P(P(P(A)))| =.2^4= 16$

P(P(P(A)))$=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\{\{5\}\}\},\{\{\varnothing,\{5\}\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\{5\}\}\},$ $\{\varnothing,\{\varnothing,\{5\}\},\{\{\varnothing\},\{\{5\}\}\},\{\{\varnothing\},\{\varnothing,\{5\}\}\},\{\{\{5\}\},\{\varnothing,\{5\}\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{5\}\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{5\}\}\},\{\varnothing,\{\{5\}\},\{\varnothing,\{5\}\}\},\{\{\varnothing\},\{\{5\}\},\{\varnothing,\{5\}\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{5\}\},\{\varnothing,\{5\}\} \}\}$

2.2 Determinar el valor de verdad de las siguientes expresiones, justificar:

a) $5 \in P(P(A))$ Falso; no figura en el listado de $P(P(A))=\{\varnothing,\{\varnothing\}, \{\{5\}\}, \{\varnothing, \{5\}\}\}$

b) $\varnothing \notin P(A)$ Falso; $\varnothing$ figura en el listado de $P(A) = \{\varnothing, \{5\}\}$

c) $\{\{5\}\} \in$ P (P (A)) Verdadero; figura en el listado de P (P (A))

d) $\{5\} \subseteq$ P (A) Falso; no es elemento de P (P (A))

e) P (A) $\subseteq$ P (P (A)) Falso; no es elemento de P (P (P (A)))

Operaciones entre *conjuntos*

Introduciremos las operaciones con conjuntos que nos van a permitir obtener nuevos conjuntos, partiendo de conjuntos ya conocidos. A y B serán dos conjuntos cualesquiera de un universal arbitrario U.
Definiremos las principales operaciones entre conjuntos.

1. Unión

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A **o** a B **o a ambos**. Se denota $A \cup B$.

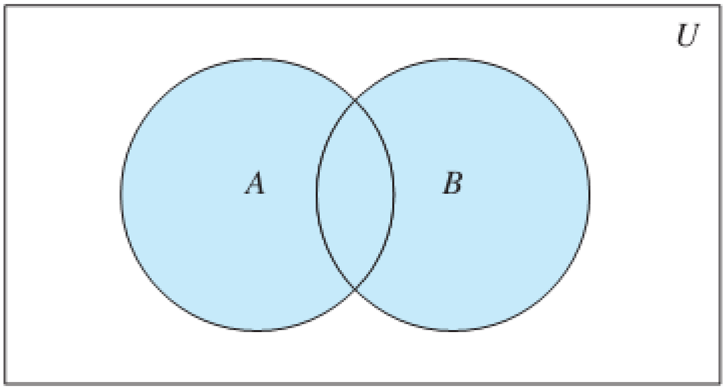
$A \cup B$ = {x / x es elemento de A o bien de B}

En símbolos

$$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \vee x \in B\}$$

Se lee A unión B

Su representación gráfica es la siguiente



Ejemplo

1. Sean los conjuntos A = {n ∈ N: n ≤ 8}; B = {n ∈ N: n es par y n ≤ 10}

Hallar A ∪ B

Solución

A ∪ B = {n ∈ N: n ≤ 8} ∪ {n ∈ N: n es par y n ≤ 10} =

= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} ∪ {2, 4, 6, 8, 10} = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,10}

2. Sean los lenguajes L_1= {10, 11,110} y L_2= {1010, 0, 1, λ, 11}

Hallar $L_1 \cup L_2$

Solución

$L_1 \cup L_2$ ={10,11,110} ∪{1010,0,1,λ,11}= { 10,11,110,1010,0,1,λ}

2. Intersección

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que tienen en común los conjuntos A y B. Se denota A ∩ B.

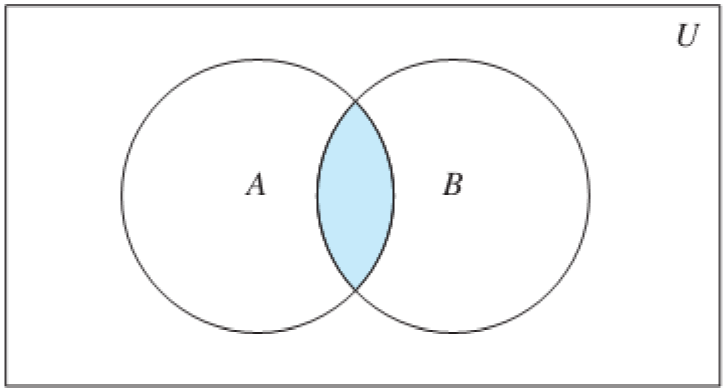
A ∩ B = {x: x es elemento de A y de B}

En símbolos

$$A \cap B = \{x: x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$

Se lee A intersección B

Su representación gráfica es la siguiente



Si A y B no tienen elementos en común, es decir, si $A \cap B = \varnothing$; entonces diremos que A y B son conjuntos disjuntos.

Ejemplo

1. Sean los conjuntos $A = \{n \in N: n \leq 8\}$;

$B = \{n \in N: n \text{ es par y } n \leq 10\}$

Hallar $A \cap B$

Solución

$A \cap B = \{n \in N: n \leq 8\} \cap \{n \in N: n \text{ es par y } n \leq 10\} =$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{2, 4, 6, 8, 10\} = \{2, 4, 6, 8\}$

2. Sean los lenguajes $L_1 = \{10, 11, 110\}$ y $L_2 = \{1010, 0, 1, \lambda, 11\}$

Hallar $L_1 \cap L_2$

Solución

$L_1 \cap L_2 = \{10, 11, 110\} \cap \{1010, 0, 1, \lambda, 11\} = \{11\}$

3. Complemento

El complemento de un conjunto A es el conjunto formado por todos los elementos del conjunto universal que no son elementos de A.

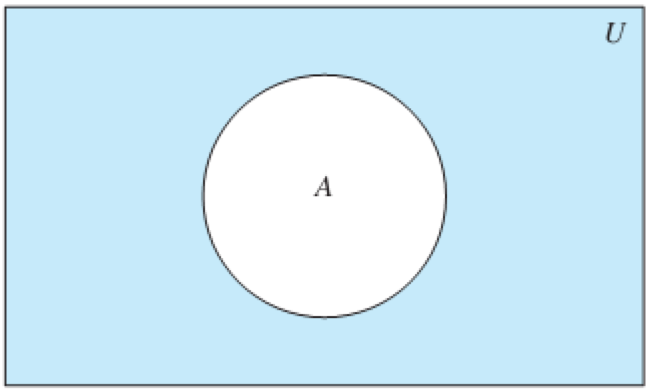
$$\overline{A} = A^c = \{x: x \text{ no es elemento de } A\}$$

Se denota $\overline{A}$ o A^c.
En símbolos

$$\overline{A} = A^c = \{x: x \in U \wedge x \notin A\}$$

El conjunto A^c se lee "complemento de A"

Su representación gráfica es la siguiente



Ejemplo

1. Sea $A = \{n \in N: n \leq 12\}$ su complemento es

$A^C = \{n \in N: n > 12\}$

2. Sea $L = \{1010, 0, 1, \lambda, 11\}$ su complemento es $L^C = V^* - L$

4. Diferencia

La diferencia entre dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B. Se denota por A - B.

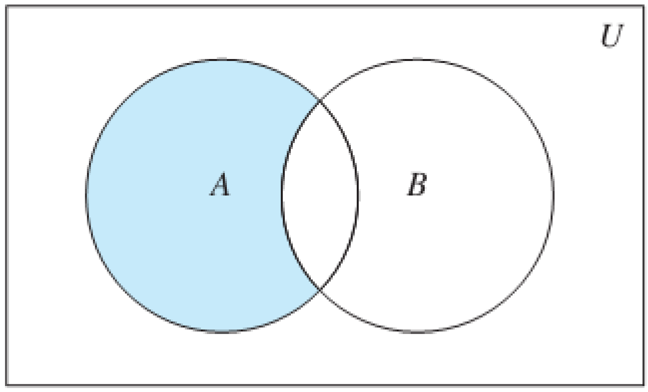
$$A - B = \{x: x \text{ es elemento de } A \text{ y no de } B\}$$

En símbolos

$$A - B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap \overline{B}$$

Se lee “A menos B”

Su representación gráfica es la siguiente



<u>Observación:</u> el complemento de A es igual a la diferencia entre U (universal) y A, es decir,

$$A^c = U - A.$$

<u>Ejemplo</u>

1. Sea $A = \{n \in N: n \leq 12\}$ y $B = \{n \in N: n \text{ es impar y } n \leq 10\}$.

Hallar A – B y B – A.

<u>Solución:</u> $A - B = \{2, 4, 6, 8, 10, 11,12\}$; $B - A = \varnothing$

2. Sean los lenguajes $L_1= \{10, 11,110\}$ y $L_2= \{10,110, 0, 1, \lambda, 11\}$.

Hallar $L_1 - L_2$ y $L_2 - L_1$

<u>Solución:</u> $L_1 - L_2 = \{10, 11,110\} - \{10,110, 0, 1, \lambda, 11\}= \varnothing$;

$L_2 - L_1 = \{10,110, 0, 1, \lambda, 11\} - \{10, 11,110\} = \{0, 1, \lambda\}$

5. Diferencia Simétrica

La diferencia simétrica entre dos conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o a B pero no a ambos. Se denota por $A \Delta B$.

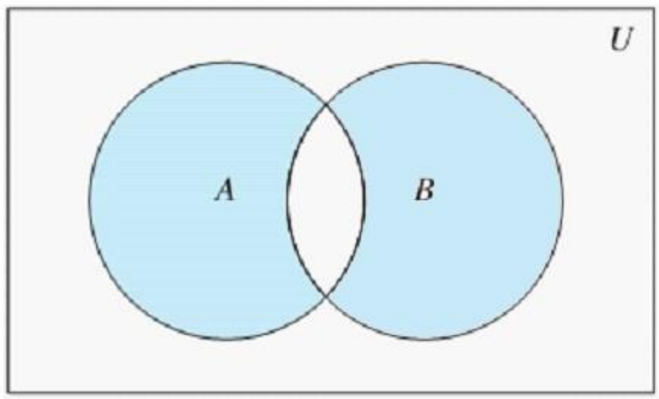
A Δ B = {x / x es elemento de A o de B pero no de ambos}

En símbolos

$A \Delta B = \{x / x \in A \veebar x \in B\} = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap B) \cup (B \cap A)$

Se lee "A diferencia simétrica B"

Su representación gráfica es la siguiente



<u>Ejemplo</u>

Sea $A = \{n \in N: n \leq 12\}$ y $B = \{n \in N$: n es impar y $n \leq 10\}$

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{2,4,6,8,10,11,12\} - \varnothing = \{2,4,6,8,10,11,12\}$

Ejercicio resuelto

Se consideran los conjuntos A = {2,4,6}; B= {6, 4,2,6}; C = {1, 0,3}; E= {6};D= $\{x \in Z / x^2 \leq 3\}$= {-1.0, 1} (números enteros cuyo cuadrado es menor que 3)

<u>1.</u> Indicar, justificando, cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas:

A = B Verdadera**,** en un conjunto no importa si se repiten los elementos ni el orden de los mismos

$1 \in D$ Verdadera, figura en el listado del conjunto

$\{4,6\} \in A$ Falso, $4 \in A$ y $6 \in A$.

$D \subseteq C$ Falso, $-1 \in D$ y $-1 \notin C$

$\{6\} \subseteq E$ Verdadera por propiedad $\forall A: A \subseteq A$

$E \subseteq \{\{6\}\}$ Falso, $6 \in E$ y $6 \notin \{\{6\}\}$

2. Hallar P(C) y P (P (E))

$P(C) = \{ \emptyset.\{1\},\{0\},\{3\}.\{1,0\},\{1,3\},\{0,3\},\{1,0,3\} \}$

$P(E) =\{ \emptyset ,\{6\} \}$; $P(P(E)) = \{ \emptyset , \{\emptyset\},\{\{6\}\},\{\emptyset,\{6\}\} \}$

3. Realizar las siguientes operaciones:

$(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) - \mathbf{C} = (\{2,4,6\} \cup \{6,4,2,6\}) - \{1,0,3\} = \{ 2,4,6\}$

$(\mathbf{C} \cap \mathbf{B}) \cup \mathbf{A} = (\{1,0,3\} \cap \{6,4,2,6\}) \cup \{2,4,6\} = \emptyset \cup \{2,4,6\} = \{2,4,6\}$

$\mathbf{E} \cup \mathbf{A} = \{6\} \cup \{2, 4,6\}= \{2, 4,6\}$

$(\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) \cap \mathbf{E} = (\{2,4,6\} \cup \{ 1,0,3\}) \cap \{6\} = \{ 2,4,6,1,0,3 \} \cap \{6\} = \{6\}$

$(\mathbf{A} \Delta \mathbf{E}) - \mathbf{B} = ((A\text{-}E) \cup (E\text{-}A))-B =(\{2,4,6\} - \{6\}) \cup (\{6\} - \{2,4,6\}) - \{6,4,2,6\} = (\{2,4\} \cup \emptyset) - \{6,2,4,6\}= \emptyset$

$\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ = complemento de D $= Z - \{ -1, 0,1\}$

PROPIEDADES ALGEBRAICAS ENTRE CONJUNTOS

Las operaciones con conjuntos cumplen muchas propiedades algebraicas, algunas de las cuales son similares a las propiedades que cumplen los números reales y sus operaciones.

Propiedades Idempotentes

Dado cualquier conjunto A en un universal arbitrario U, se verifica:

1. $A \cup A = A$
2. $A \cap A = A$

Propiedades Conmutativas

Dados dos conjuntos A y B de un universal arbitrario U, se verifica:

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$

Propiedades Asociativas

Dados tres conjuntos A, B y C de un universal arbitrario, U, se verifica:

1. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Propiedades de Absorción

Dados dos conjuntos A, B de un universal arbitrario, U, se verifica:

1. $A \cup (A \cap B) = A$
2. $A \cap (A \cup B) = A$

Propiedades Distributivas

Dados tres conjuntos A, B y C de un conjunto universal arbitrario, U, se verifica:

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Elemento neutro

Dado un conjunto cualquiera de un universal arbitrario, U, se verifica:

1. $A \cup \varnothing = A$ entonces $\varnothing$ es elemento neutro de $\cup$ de conjuntos
2. $A \cap U = A$ entonces U es elemento neutro de $\cap$ de conjuntos

Elemento absorbente

Dado un conjunto cualquiera de un universal arbitrario, U, se verifica:

1. $A \cup U = U$ entonces U es elemento absorbente de $\cup$ de conjuntos

2. $A \cap \varnothing = \varnothing$ entonces $\varnothing$ es elemento absorbente de $\cap$ de conjuntos

Propiedad Involutiva

Dado un conjunto cualquiera A de un universal U, se verifica:

$(A^c)^c = A$

Propiedades del Complemento

Dado un conjunto cualquiera A de un universal arbitrario U, se verifica:

1. $A \cup A^c = U$
2. $U^c = \varnothing$
3. $A \cap A^c = \varnothing$
4. $\varnothing^c = U$

Leyes de De Morgan

Dados dos conjuntos A y B en un universal U, se verifica:

1. "El complemento de la unión de conjuntos es igual a la intersección de sus complementos."

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

2. "El complemento de la intersección de conjuntos es igual a la unión de sus complementos."

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Observación.

El conjunto *P*(*X*), con las operaciones definidas anteriormente unión$\cup$, intersección $\cap$, verifica las propiedades que definen a un álgebra de Boole. Esta estructura es similar a la de la lógica proposicional, circuitos de conmutación o álgebra de sucesos.

Ejemplo

Probar las siguientes identidades utilizando las propiedades anteriores:

1. $A \cap B = A - B^c$

Demostración

$A - B^c =$ por definición de diferencia

$A \cap (B^c)^c =$ propiedad de involución

$A \cap B$

2. $A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$

Demostración

$A \cup (A^c \cap B) =$ Propiedad distributiva

$(A \cup A^c) \cap (A \cup B) =$ Propiedad de identidad

$U \cap (A \cup B) =$ elemento neutro

$A \cup B$

3. $A - (A^c \cup B) = A - B$

Demostración

$A - (A^c \cup B) =$ por definición de diferencia

$A \cap (A^c \cup B)^c =$ ley de De Morgan

$A \cap ((A^c)^c \cap B^c) =$ ley de involución

$A \cap (A \cap B^c) =$ ley asociativa

$(A \cap A) \cap B^c =$ idempotencia

$A \cap B^c =$ definición de diferencia

$A - B$

SUGERENCIA ANTES DE AVANZAR:

Mirá el video "Simplificación de expresiones en teoría de conjuntos" en el sitio de la cátedra http://discretaunlam.net.ar sección Apuntes-Conjuntos.

Ejercicios resueltos

1. ¿Qué podés decir de los conjuntos A y B si se sabe que

a) $A \cup B = A$?

Para que $A \cup B = A$ se debe cumplir que $B \subseteq A$

b) $A - B = A$?

Para que $A - B = A$ se debe cumplir $A \cap B = \varnothing$

c) $A \Delta B = A$?

$A \Delta B = (A-B) \cup (B-A) = A$ por lo tanto $B = \varnothing$

2. ¿Es verdadera o falsa la siguiente proposición? Justificar

$$(A \cup B) \cap (A \cap B) = U$$

La proposición es falsa. Para demostrarlo damos un contraejemplo (ejemplo que no cumple con la proposición)

Sea $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{1,3,5,7\}$; $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$$(A \cup B) \cap (A \cap B) = (\{1,2,3,4\} \cup \{1,3,5,7\}) \cap (\{1,2,3,4\} \cap \{1,3,5,7\}) =$$
$$= \{1, 2, 3, 4, 5,7\} \cap \{1,3\} = \{1,3\}$$

Entonces $\{1,3\} \neq U$ Por lo tanto $(A \cup B) \cap (A \cap B) \neq U$

PRODUCTO CARTESIANO ENTRE CONJUNTOS

El orden de los elementos de una colección a menudo es importante.

Como los conjuntos no están ordenados se necesita una estructura diferente para representar conjuntos ordenados. Esto es proporcionado por n-tuplas ordenadas.

Usaremos las n-tuplas ordenadas de elementos para especificar una secuencia finita de objetos no necesariamente distintos; la posición relativa de los objetos en la secuencia nos dará la ordenación necesaria de los mismos.

n-tupla ordenada

Llamaremos n-tupla ordenada a una secuencia de n objetos $a_1, a_2, \ldots,$ a_n dados en un cierto orden y la notaremos por $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Obsérvese que es fundamental el orden en que escribamos los elementos de la n-tupla, así

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ es distinto } (a_2, a_1, \ldots, a_n)$$

Si n = 2, una n-tupla ordenada se llama "par ordenado" y si n = 3, "terna ordenada".

Igualdad de n-tuplas

Diremos que dos n-tuplas ordenadas son iguales si, y sólo si, sus i-ésimas componentes son iguales para todo i, $1 \leq i \leq n$, es decir,

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \leftrightarrow a_i = b_i, \forall i, 1 \leq i \leq n$

Producto cartesiano

Dada una colección arbitraria de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, llamaremos producto cartesiano de los mismos y lo notaremos por $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, al conjunto formado por todas las n-tuplas ordenadas,

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, donde $a_i \in A_i$, $1 \leq i \leq n$, es decir,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2 \ldots, a_n) : a_i \in A_i \; 1 \leq i \leq n\}$$

En el caso de dos conjuntos A y B, tendremos

$$A \times B = \{(a, b): a \in A \text{ y } b \in B\}$$

y este producto se llama binario si A = B, o sea,

$$A \times A = \{(a, b): a \in A \text{ y } b \in A\}$$

y suele notarse por A^2.

Obsérvese que $A \times \varnothing = \varnothing$. En efecto, si $A \times \varnothing$ no fuese vacío, entonces existiría, al menos, un par $(a, b) \in A \times \varnothing$ de aquí que $a \in A$ y $b \in \varnothing$, lo cual es imposible.

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b, c\}$. Entonces

$A \times B = \{(1; a), (1; b), (1; c), (2; a), (2; b), (2; c)\}$

$B \times A = \{(a;1), (a; 2), (b;1), (b; 2), (c;1), (c; 2)\}$

También,

$A \times A = \{(1; 1), (1; 2), (2;1), (2; 2)\}$

$B \times B = \{(a; a), (a; b), (a; c), (b; a), (b; b), (b; c), (c; a), (c; b), (c; c)\}$

En los ejemplos anteriores se observa que el producto cartesiano de dos conjuntos no es conmutativo. Es decir, en general, $A \times B$ es distinto de $B \times A$

Ejemplo

1. Sean $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{a, b\}$ y $A_3 = \{z, y\}$. Calcular $A_1 \times A_2 \times A_3$, $A_2 \times A_1 \times A_3$ y $A_3{}^2$

Solución

$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(1; a; z), (1; a; y), (1; b; z), (1; b; y), (2; a; z), (2; a; y), (2; b; z), (2; b; y)\}$

$A_2 \times A_1 \times A_3 = \{(a; 1; z), (a; 1; y), (a; 2; z), (a; 2; y), (b; 1; z), (b; 1; y), (b; 2; z), (b; 2; y)\}$

$A_3{}^2 = A_3 \times A_3 = \{(z; z), (z; y), (y; z), (y; y)\}$

Cardinal del producto cartesiano

Si |A|= n y |B|= m entonces | A x B | = |A|. |B|= n.m

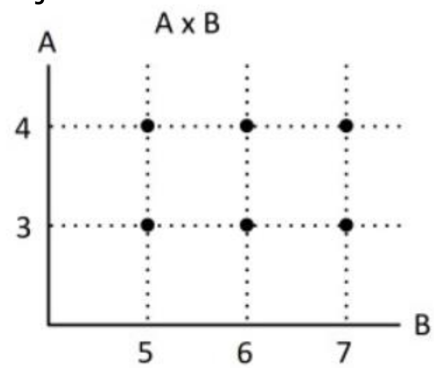
Ejemplo

Sea A= {1,2} y B= {a, b, c}; |A|= 2 y |B|=3 entonces | A x B | = |A|. |B|= 2.3 = 6

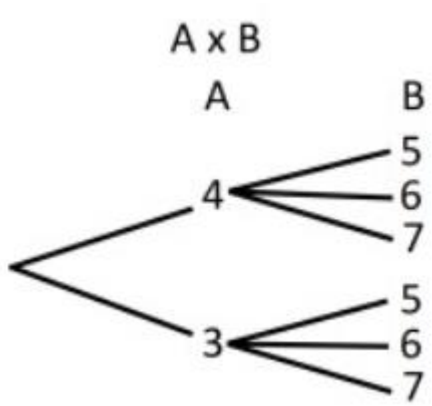
Representación del producto cartesiano

Sean los conjuntos A= {3,4} y B= {5, 6, 7} el producto cartesiano | A x B | se puede representar mediante:

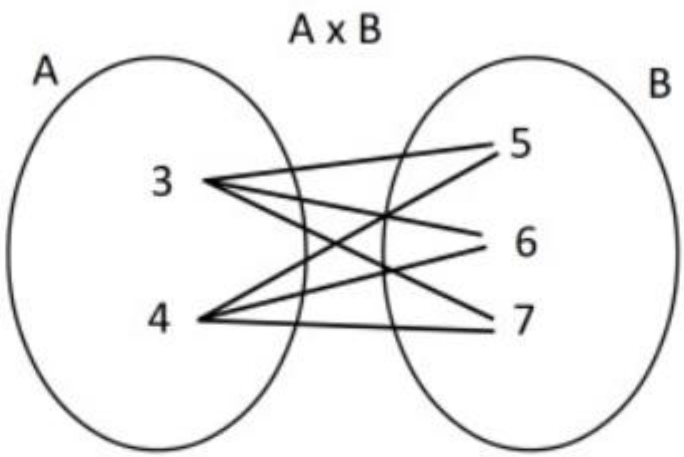
1. Ejes cartesianos



2. Diagrama en árbol



3.Diagrama Sagital



Propiedades

El producto cartesiano es **distributivo** respecto de la **unión** y la **intersección** de conjuntos, es decir, si A, B y C son tres conjuntos cualesquiera, se verifica:

$$(a)\ A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$
$$(b)\ A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$
$$(c)\ (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$
$$(d)\ (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

Para finalizar con esta primer clase te proponemos que ingreses al sitio de la cátedra " https://discretaunlam.net.ar " para leer y hacer las actividades por clase (AxC) correspondientes al tema "Conjuntos" que te proponemos en la plataforma.

Luego comienza a hacer los ejercicios de Conjunto de la guía de ejercicios para el primer parcial y por último resuelve la autoevaluación que figura en el sitio.

Tené en cuenta que todas las actividades que realices forman parte del seguimiento académico que hará tu tutor.

APUNTES PRÁCTICA ACTIVIDADES NOSOTROS CERRAR SESIÓN

/ Apuntes

-AxC (actividades por clase)

16
03, 2020

Clase 01

/ marzo 16, 2020 / Actividades por Clase / 0 comments

Actividades para la clase 01 Te...

-Autoevaluaciones solo hacer la de conjuntos (en este caso hay una autoevaluación para conjuntos y otra autoevaluación para hileras y lenguajes)

Apuntes AxC AC Autoevaluaciones

Actividad Conjuntos

- Autoevaluación-Conjuntos
- Autoevaluación Vocabularios-Hileras-Lenguajes