Resolución TP5:

Ejercicio 6

Tomando $F(x,y,z) = x\ sen(\pi\mathrm{y} + \mathrm{z}) + z\ ln(x+y) = 0$ define implícitamente $z = f(x,y)$ en $P = (1,1,0)$. Calcular la derivada direccional de $z = f(x,y)$, en el punto $(1,1)$ en dirección $\vec{v} = (2,1)$.

Herramientas:

- Si se cumple TFI entonces existe $z = f(x,y)$ y valen:
  - $f_x(x_0,y_0) = -\frac{F_x(P)}{F_z(P)}$
  - $f_y(x_0,y_0) = -\frac{F_y(P)}{F_z(P)}$
  - $\nabla f(x_0,y_0) = (-\frac{F_x(P)}{F_z(P)}, -\frac{F_y(P)}{F_z(P)})$
- Si se cumple TFI, $f(x,y,z)$ es Diferenciable y vale la formula de derivada direccional $f_{\vec{v}}(x,y) = \frac{\nabla f(x,y)\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$.

Para empezar:

- Damos por hecho que cumple las condiciones de TFI (Pueden comprobarlas para cerciorarse).

Resolviendo para $F(x,y,z) = 0$ en $P = (1,1,0)$

$$F_x = sen(\pi\mathrm{y} + \mathrm{z}) + \frac{z}{x+y}$$

$$F_y = \pi x\ cos(\pi\mathrm{y} + \mathrm{z}) + \frac{z}{x+y}$$

$$F_z = x\ cos(\pi\mathrm{y} + \mathrm{z}) + ln(x+y)$$

$$F_x(\mathrm{P}) = sen(\pi * 1 + 0) + \frac{0}{1+1} = 0$$

$$F_y(\mathrm{P}) = \pi * 1 * cos(\pi * 1 + 0) + \frac{0}{1+1} = -\pi$$

$$F_z(\mathrm{P}) = 1 * cos(\pi * 1 + 0) + ln(1+1) = \ln(2) - 1$$

$$f_x(x_0,y_0) = -\frac{F_x(P)}{F_z(P)} \text{ y } f_y(x_0,y_0) = -\frac{F_y(P)}{F_z(P)}$$

$$f_x(1,1) = -\frac{0}{ln(2)-1} \text{ y } f_y(1,1) = -\frac{-\pi}{ln(2)-1}$$

$$f_x(1,1) = 0 \text{ y } f_y(1,1) = \frac{\pi}{ln(2)-1}$$

$$\nabla z(1,1) = \nabla f(1,1) = (0, \frac{\pi}{ln(2)-1})$$

Resolviendo $f_{\vec{v}}(x,y) = \frac{\nabla f(x,y)\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}$ para $P' = (1,1)$ en dirección $\vec{v} = (2,1)$

$$f_{\vec{v}}(1,1) = \frac{(0, \frac{\pi}{ln(2)-1}) \cdot (2,1)}{\sqrt{5}}$$

$$f_{\vec{v}}(1,1) = \frac{0 * 2 + \frac{\pi}{ln(2)-1} * 1}{\sqrt{5}}$$

$$f_{\vec{v}}(1,1) = \frac{\pi}{\sqrt{5}(ln(2)-1)} = \frac{\pi\sqrt{5}}{5(ln(2)-1)}$$