Resolución TP5:

Ejercicio 13

Tomando el sistema conformado por:

$$\begin{cases} \ln(xy) + 2\ln(z) = 0 \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} - \sqrt{3} = 0 \end{cases} \quad como \quad \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases} \quad respectivamente$$

Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva definida implícitamente en el sistema en $P = (1,1,1)$. Hallar ademas la ecuación del plano perpendicular a la curva.

Herramientas:

- Si se cumple TFI2 existen $y = f(x)$ e $z = g(x)$ sus derivadas valen:
  - $y_x(x_0) = f_x(x_0) = -\dfrac{\begin{vmatrix} F_x(P) & F_z(P) \\ G_x(P) & G_z(P) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix}}$
  - $z_x(x_0) = g_x(x_0) = -\dfrac{\begin{vmatrix} F_y(P) & F_x(P) \\ G_y(P) & G_x(P) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix}}$
- Si existen $y = f(x)$ e $z = g(x)$ se puede suponer:
  - $r(x) = (x, f(x), g(x))$
  - $r'(x) = (1, f'(x), g'(x))$
  - $\vec{v} = r'(x_0) = \left(1, -\dfrac{\begin{vmatrix} F_x(P) & F_z(P) \\ G_x(P) & G_z(P) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix}}, -\dfrac{\begin{vmatrix} F_y(P) & F_x(P) \\ G_y(P) & G_x(P) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix}}\right)$ el cual posee dirección tangente a $r(x)$ en x_0

- De un vector normal a un plano podemos obtener su ecuación mediante: $\vec{v} \cdot \vec{x} = \vec{v} \cdot P$. Siendo $\vec{x} = (x, y, z)$ generico.
- Se puede fabricar una recta con la ecuación

$$\alpha(t) = P + t\vec{v} = r(1) + t \cdot r'(1)$$
$$r(1) = \big(1, f(1), g(1)\big) = (1,1,1) = P$$
$$r'(1) = (1, f'(1), g'(1))$$

Para empezar:

- Damos por hecho que cumple las condiciones de TFI2 (Pueden comprobarlas para cerciorarse).

Resolviendo (Método TFI2):

$$\begin{cases} \ln(xy) + 2\ln(z) = 0 \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} - \sqrt{3} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F(1,1,1) = 0 \\ G(1,1,1) = 0 \end{cases} \rightarrow Se\ cumple\ 1$$

$$F_x = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$$

$$F_y = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{xy}} = \frac{1}{\mathrm{y}}$$

$$F_z = 2\frac{1}{\mathrm{z}} = \frac{2}{\mathrm{z}}$$

$$G_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$G_y = \frac{\mathrm{y}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$G_z = \frac{\mathrm{z}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Derivadas de F, continuas en $xy > 0$ y $z > 0$

Derivadas de G, continuas en $x^2 + y^2 + z^2 > 0$

$$Se\ cumple\ 2$$

$$F_x(\mathrm{P}) = \frac{1}{1} = 1$$

$$F_y(\mathrm{P}) = \frac{1}{1} = 1$$

$$F_z(\mathrm{P}) = \frac{2}{1} = 2$$

$$G_x(\mathrm{P}) = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$G_y(\mathrm{P}) = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$G_z(\mathrm{P}) = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$Se\ cumple\ 3$$

$$Se\ cumple\ TFI2 \rightarrow las\ funciones\ implicitas\ en\ x = 1\ existen$$

$$Se\ cumple\ TFI2 \rightarrow las\ funciones\ implicitas\ en\ x = 1$$
$$tienen\ derivadas\ con\ la\ siguiente\ formula$$

$$\begin{vmatrix} F_x(P) & F_z(P) \\ G_x(P) & G_z(P) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{vmatrix} F_y(P) & F_x(P) \\ G_y(P) & G_x(P) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = 0$$

$$y_x(1) = f_x(1) = -\frac{\begin{vmatrix} F_x(P) & F_z(P) \\ G_x(P) & G_z(P) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix}} = -\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = -1$$

$$z_x(1) = g_x(1) = -\frac{\begin{vmatrix} F_y(P) & F_x(P) \\ G_y(P) & G_x(P) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix}} = -\frac{0}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = 0$$

$$f_x(1) = -1$$
$$g_x(1) = 0$$

Entonces para $\vec{v} = (1, f_x(1), g_x(1)) = (1, -1, 0)$ podemos encontrar la recta tangente y el plano normal a esta basados en el punto P.

$$\overrightarrow{R_{tg}} = P + t\,\vec{v} = (1,1,1) + t(1,-1,0)$$

$$\overrightarrow{R_{tg}} = (1+t, 1-t, 1)$$

$$\Pi_n: \vec{v} \cdot \vec{x} = \vec{v} \cdot P$$

$$\Pi_n: (1,-1,0) \cdot (x,y,z) = (1,-1,0) \cdot (1,1,1)$$

$$\Pi_n: x - y = 1 - 1$$

$$\Pi_n: x - y = 0$$

Resolviendo (Método de los gradientes):

Se puede usar $\nabla F(P) X \nabla G(P)$ como vector tangente a la curva en P.

Dado: $\nabla F(P) = (1,1,2)$ y $\nabla G(P) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$\nabla F(P) X \nabla G(P) = \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}$$

$$\nabla F(P) X \nabla G(P) = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} \right)$$

$$\nabla F(P) X \nabla G(P) = \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} \right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), 0\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$$

Entonces para $\vec{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$ podemos encontrar la recta tangente y el plano normal a esta basados en el punto P.

$$\vec{v} = \nabla F(P) X \nabla G(P) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) \ \textit{es distinto de}\ \overrightarrow{v_{TFI}} = (1,-1,0)$$

$$\nabla F(P) X \nabla G(P) = k\ \overrightarrow{v_{TFI}} \quad \textit{calculamos}\ k = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$\overrightarrow{R_{tg}} = P + t\,\vec{v} = (1,1,1) + t\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$$

$$\overrightarrow{R_{tg}} = \left(1 - \frac{t}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{t}{\sqrt{3}}, 1\right)$$

$$\Pi_n\colon \vec{v} \cdot \vec{x} = \vec{v} \cdot P$$

$$\Pi_n\colon \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) \cdot (x,y,z) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) \cdot (1,1,1)$$

$$\Pi_n\colon -\frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} = 0$$

$$\Pi_n\colon -x + y = 0$$

$$\Pi_n\colon x - y = 0$$

Corolario I:

$$\nabla F(P) X \nabla G(P) = \left(\begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} F_x(P) & F_z(P) \\ G_x(P) & G_z(P) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x(P) & F_y(P) \\ G_x(P) & G_y(P) \end{vmatrix} \right)$$

$$\nabla F(P) X \nabla G(P) = \left(\begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} F_x(P) & F_z(P) \\ G_x(P) & G_z(P) \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} F_y(P) & F_x(P) \\ G_y(P) & G_x(P) \end{vmatrix} \right)$$

En la última columna es difícil notar el cambio ya que ambas matrices son idénticas.

Se ve que los dos vectores obtenidos son paralelos:

$$(x_0, y_x(x_0), z_x(x_0)) = k(\nabla F(P) X \nabla G(P))$$

Por lo tanto se llega al mismo resultado al resolver el ejercicio con el método 1 o el método 2. si bien las rectas o planos pueden no tener la misma apariencia pero son equivalentes.

Incluso podemos determinar que $k = \frac{1}{\begin{vmatrix} F_y(P) & F_z(P) \\ G_y(P) & G_z(P) \end{vmatrix}}$