T P 04 Ej. 30-i

Aplicando la regla de la cadena, calcular las derivadas de las funciones compuestas que se indican:

Calcular F_x y F_y donde F = G o H $\begin{cases} G(u,v) = (g_1(u,v), g_2(u,v)) = (u^2 v, v) \\ H(x,y) = \big(u(x,y), v(x,y)\big) = (x-y, x+y) \end{cases}$

Para resolver este ejercicio debemos aplicar, como bien dice el enunciado, la regla de la cadena. La herramienta a usar es la Matriz Jacobiana, ya ejercitado en ejercicios anteriores. Como estamos buscando las derivadas parciales de la composición de dos funciones, El Jacobiano va a obtenerse del producto de dos matrices.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial h_m}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & \cdots & \alpha \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z & \cdots & \omega \end{bmatrix}$$

donde g_m son las componentes del campo G y h_n son las componentes del campo H.

Si miramos la matriz resultante, la drivada parcial de la composición con respecto a la primera variable es:

F_{x_1}=(a,b,c,…) las componentes dependen de filas que tenga la matriz resultante

$\vdots$

F_{x_n}=(α, β, γ, ...) las componentes dependen de filas que tenga la matriz resultante.

Ahora, vamos al ejercicio en cuestión:

$$J = \begin{bmatrix} g_{1_u} & g_{1_v} \\ g_{2_u} & g_{2_v} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_x & u_v \\ v_x & v_v \end{bmatrix}$$

Operando

$$J = \begin{bmatrix} 2uv & u^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Operando

$$J = \begin{bmatrix} 2uv + u^2 & 2uv + u^2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora lo que hay que haces es reemplazar u y v por su equivalente denotado en la función H:

J = $\begin{bmatrix} 2(x-y)(x+y)+(x+y)^2 & 2(x-y)(x+y)+(x+y)^2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Una vez obtenida esta matriz, expresamos las derivadas parciales:

$F_x(x,y) = (2(x^2-y^2)+(x+y)^2, 1)$

$F_y(x,y) = (2(x^2-y^2)+(x+y)^2, 1)$