Extremos condicionados. Multiplicador de Lagrange

El problema de extremos condicionados consiste en hallar los valores extremos de una función $f(x,y)$ (llamada función objetivo) cuando se restringe su variación sobre un cierto conjunto de su dominio, definido a partir de una ecuación de la forma $g(x,y)=0$ (o cte.), llamada ecuación de restricción, de ligadura o de constricción. Un problema de estas características es, por ejemplo, el siguiente:

Problema: *Hallar el punto más cercano y el más lejano al origen, de la elipse C dada por la ecuación:*

$$g(x,y) = 17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100 = 0.$$

En este caso, la función objetivo es $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, que es precisamente aquella función que permite calcular la distancia al origen de cada par (x,y), y la ecuación de restricción es $g(x,y) = 17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100 = 0$.

El siguiente resultado establece una condición necesaria para la existencia de extremos condicionados.

Teorema. Sean $f\colon A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ y $g\colon A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dos funciones de clase $\mathcal{C}^1$ en el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$, y sea el conjunto

$$S=\{(x,y)\in A / g(x,y)=0\}$$

Supóngase que en $(x_0,y_0)\in S$, la función f posee un punto de extremo condicionado en S, es decir que existe un entorno U de centro en (x_0,y_0) tal que

$$f(x,y)\le f(x_0,y_0) \ \vee \ f(x,y)\ge f(x_0,y_0)$$

para todo $(x,y)\in U\cap S$. Supóngase además que

$$\nabla g(x_0,y_0)\ne\vec{0}$$

Entonces, existe un número real λ_0 (lambda cero) tal que el punto (x_0,y_0,λ_0) es un punto crítico de la función lagrangiana

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\cdot g(x,y)$$

Es decir que, en tales circunstancias, el punto (x_0,y_0,λ_0) es solución del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \lambda \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \lambda \cdot \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = g(x,y) = 0 \end{cases}$$

La variable auxiliar “λ” que interviene en el teorema anterior, se conoce como “multiplicador de Lagrange”.

Obsérvese que el teorema anterior permite hallar, siempre que se cumplan las condiciones establecidas, posibles puntos de extremo condicionado, pues ocurre que no todo punto crítico (x_0, y_0, λ_0) de la función lagrangiana, estará asociado a un punto de extremo condicionado de f.

En el siguiente resultado se dan condiciones suficientes para la existencia de extremos condicionados a partir del llamado *hessiano limitado*.

Teorema. Sean $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones de clase C^2 en el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$, y sea el conjunto

$$S = \{(x,y) \in A / g(x,y) = 0\}$$

Supóngase que en el punto $(x_0, y_0) \in S$, se cumple que

$$\nabla g(x_0, y_0) \neq \vec{0}$$

y supóngase además que existe número real λ_0 tal que (x_0, y_0, λ_0) es un punto crítico de la función lagrangiana

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$$

Sea el *hessiano limitado* de $L(x,y,\lambda)$ en (x_0, y_0, λ_0):

$$\overline{H}L(x_0,y_0,\lambda_0) = \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) & -\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x_0,y_0,\lambda_0) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x_0,y_0,\lambda_0) \\ -\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x_0,y_0,\lambda_0) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x_0,y_0,\lambda_0) \end{vmatrix}$$

i) Si $\overline{H}L(x_0, y_0, \lambda_0) > 0$, entonces f posee un punto de máximo local condicionado en (x_0, y_0).

ii) Si $\overline{H}L(x_0, y_0, \lambda_0) < 0$, entonces f posee un punto de mínimo local condicionado en (x_0, y_0).

iii) Si $\overline{H}L(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$, no es posible, con tal información, determinar la naturaleza del punto (x_0, y_0).

Ejemplo 1: Hallar y clasificar los puntos de extremo de la función $f(x, y) = 3x + 2y$, condicionados según

$$g(x, y) = x^2 - y^2 - 5 = 0$$

En principio se define la función lagrangiana

$$L(x, y, \lambda) = 3x + 2y + \lambda \cdot (x^2 - y^2 - 5)$$

El sistema de puntos críticos es

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 3 + 2x\lambda = 0 & \text{(A)} \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 2 - 2y\lambda = 0 & \text{(B)} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 - 5 = 0 & \text{(C)} \end{cases}$$

Multiplicando la ecuación (B) por $\frac{3}{2}$, y sumando a la ecuación resultante, la ecuación (A), se obtiene la relación

$$\lambda \cdot (2x + 3y) = 0 \qquad \text{(D)}$$

De esta expresión se deduce que puede ser

$$\lambda = 0$$

O bien

$$2x + 3y = 0 \qquad \text{(E)}$$

Sin embargo, la primera posibilidad queda descartada, ya que, al considerarla, no se verifican las ecuaciones (A) y (B).

Así, entonces, teniendo en cuenta la relación dada por (E), junto con la ecuación (C), se obtiene la siguiente condición sobre x

$$x^2 = 9$$

Resultando así, los valores

$$x_1 = 3 \qquad \text{y} \qquad x_2 = -3$$

Utilizando nuevamente la ecuación (E), con cada valor de x hallado, se obtienen los respectivos valores de y, que son

$$y_1 = -2 \qquad \text{y} \qquad y_2 = 2$$

Por otra parte, la ecuación (B), permite obtener λ en función de y, según la relación

$$\lambda = \frac{1}{y}$$

Finalmente, se encuentran los únicos dos puntos críticos de la función lagrangiana, que son:

$$P_1 = \left(3, -2, -\frac{1}{2}\right) \qquad P_2 = \left(-3, 2, \frac{1}{2}\right)$$

Esto significa que los posibles puntos de extremo condicionado de la función f, según la condición dada, son:

$$\bar{P}_1 = (3, -2) \quad \text{y} \quad \bar{P}_2 = (-3, 2)$$

Resulta, además, que hessiano limitado es

$$\bar{H}L(x, y, \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & -2x & 2y \\ -2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & -2\lambda \end{vmatrix}$$

P_i	$\bar{\Delta}_L(P_i)$	Conclusión
$P_1 = \left(3, -2, -\frac{1}{2}\right)$	$\bar{H}L(P_1) = -20 < 0$	La función $f(x, y)$ posee un punto de mínimo local condicionado por $g(x, y) = 0$, en $\bar{P}_1 = (3, -2)$, y el valor extremo es $f(\bar{P}_1) = 5$.
$P_2 = \left(-3, 2, \frac{1}{2}\right)$	$\bar{H}L(P_2) = 20 > 0$	La función $f(x, y)$ posee un punto de máximo local condicionado por $g(x, y) = 0$, en $\bar{P}_2 = (-3, 2)$, y el valor extremo es $f(\bar{P}_2) = -5$.

A continuación, se ofrece la resolución del problema mencionado al principio de esta sección, en la cual se aplican las herramientas utilizadas en el Ejemplo 22.

Ejemplo 2: Hallar los extremos de la función $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, según la restricción

$$g(x, y) = 17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100 = 0.$$

En este caso, la función lagrangiana asociada es

$$L(x, y, \lambda) = \sqrt{x^2 + y^2} + \lambda \cdot (17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100)$$

Y sus puntos críticos están dados por el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \lambda \cdot (34x + 12y) = 0 & \text{(A)} \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \lambda \cdot (12x + 16y) = 0 & \text{(B)} \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = 17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100 = 0 & \text{(C)} \end{cases}$$

Multiplicando la ecuación (A) por y, la ecuación (B) por x, y restando ambos resultados, se obtiene la expresión

$$\lambda \cdot (2x^2 - 3xy - 2y^2) = 0 \qquad \text{(D)}$$

A partir de esta ecuación, es posible contemplar la posibilidad de que λ sea igual a 0, sin embargo, esta situación, en conjunto con las ecuaciones (A) y (B), obliga a que x e y sean nulas, y en tal caso no se estaría verificando la ecuación (C). Así que la posibilidad de que λ sea igual a 0 no aporta soluciones al problema que se quiere resolver. Por otra parte, a partir de la ecuación (D), se observa que puede ser también

$$2x^2 - 3xy - 2y^2 = 0 \qquad \text{(E)}$$

Luego, multiplicando esta ecuación por 4, y restando ese resultado con la ecuación (C), se obtiene la relación

$$25x^2 = 100$$

de la cual surgen los valores $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$.

Asumiendo en un primer momento que $x = 2$, y utilizando la ecuación (E), se llega a la ecuación en y:

$$y^2 + 3y - 4 = 0$$

De la cual surgen los valores de y asociados a $x_1 = 2$, que son:

$y_1 = 1$ y $y_2 = -4$

Luego, con cada uno de estos valores de y, el valor asociado de x, y la ecuación (A) (también puede utilizarse la (B)), se logra obtener los valores correspondientes de λ, que resultan ser:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{40 \cdot \sqrt{5}} \quad y \quad \lambda_2 = -\frac{1}{20 \cdot \sqrt{5}}$$

De este modo, se obtienen dos puntos críticos de la función lagrangiana:

$$P_1 = \left(2, 1, -\frac{1}{40 \cdot \sqrt{5}}\right) \quad y \quad P_2 = \left(2, -4, -\frac{1}{20 \cdot \sqrt{5}}\right).$$

Por otra parte, procediendo de manera análoga, asumiendo que $x = -2$, se obtienen los últimos dos puntos críticos de la función lagrangiana:

$$P_3 = \left(-2, -1, -\frac{1}{40 \cdot \sqrt{5}}\right) \quad y \quad P_4 = \left(-2, 4, -\frac{1}{20 \cdot \sqrt{5}}\right).$$

Esto se traduce en que los puntos de extremo condicionado de la función f, según la condición de restricción dada, son:

$$\bar{P}_1 = (2,1) \quad \bar{P}_2 = (2,-4) \quad \bar{P}_3 = (-2,-1) \quad \bar{P}_4 = (-2,4)$$

El siguiente paso consiste en plantear el hessiano limitado para proceder con la clasificación de los puntos de extremo condicionado. En este caso es:

$$\bar{H}L(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & -(34x+12y) & -(12x+16y) \\ -(34x+12y) & \dfrac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} + 34 \cdot \lambda & \dfrac{-xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} + 12 \cdot \lambda \\ -(12x+16y) & \dfrac{-xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} + 12 \cdot \lambda & \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} + 16 \cdot \lambda \end{vmatrix}$$

P_i	$\bar{H}L(P_i)$	Conclusión
$P_1 = \left(2,1,-\frac{1}{40 \cdot \sqrt{5}}\right)$	$\bar{H}L(P_1) = \frac{-6000}{\sqrt{5}} < 0$	La función $f(x,y)$ posee un punto de mínimo condicionado por $g(x,y) = 0$, en $\bar{P}_1 = (2,1)$, y el valor extremo es $f(\bar{P}_1) =$
$P_2 = \left(2,-4,-\frac{1}{20 \cdot \sqrt{5}}\right)$	$\bar{H}L(P_2) = \frac{3000}{\sqrt{5}} > 0$	La función $f(x,y)$ posee un punto de máximo condicionado por $g(x,y) = 0$, en $\bar{P}_2 = (2,-4)$, y el valor extremo es $f(\bar{P}_2) =$
$P_3 = \left(-2,-1,-\frac{1}{40 \cdot \sqrt{5}}\right)$	$\bar{H}L(P_3) = \frac{-6000}{\sqrt{5}} < 0$	La función $f(x,y)$ posee un punto de mínimo condicionado por $g(x,y) = 0$, en $\bar{P}_3 = (-2,-1)$, y el valor extremo es $f(\bar{P}_3) =$
$P_4 = \left(-2,4,-\frac{1}{20 \cdot \sqrt{5}}\right)$	$\bar{H}L(P_4) = \frac{3000}{\sqrt{5}} > 0$	La función $f(x,y)$ posee un punto de máximo condicionado por $g(x,y) = 0$, en $\bar{P}_4 = (-2,4)$, y el valor extremo es $f(\bar{P}_4) =$

Nótese que, como se aclaró al principio de esta sección, este problema es equivalente al de hallar los puntos más cercanos y más lejanos al origen de coordenadas, de la elipse C de ecuación

$$C: g(x,y) = 17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100 = 0$$

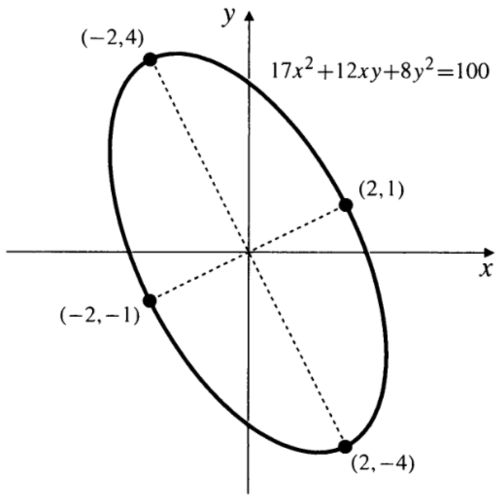
Así que, en base a lo realizado, se concluye que los puntos de la elipse C, más cercanos al origen son:

$$\bar{P}_1 = (2,1) \quad y \quad \bar{P}_3 = (-2,-1).$$

Y los más lejanos al origen son:

$$\bar{P}_2 = (2,-4) \quad y \quad \bar{P}_4 = (-2,4).$$

Esta situación puede verse en el gráfico siguiente.



Los puntos $(2,1)$, $(-2,-1)$ y $(2,-4)$, $(-2,4)$ de la elipse, son respectivamente, los más cercanos y más legajos al origen de coordenadas

Una observación que puede realizarse respecto del problema anterior tiene que ver con lo siguiente. Supóngase que (x_0, y_0) es un punto de la curva

$$C: g(x,y) = 17x^2 + 12xy + 8y^2 - 100 = 0$$

donde la función objetivo $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ posee un extremo, por ejemplo, un mínimo local. Esto significa que ha de existir un entorno U, de centro en (x_0, y_0), tal que

$$f(x_0, y_0) \leq f(x,y) \qquad \forall (x,y) \in U \cap C$$

Esto es

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \forall (x,y) \in U \cap C$$

lo cual equivale a decir que

$$x_0^2 + y_0^2 \leq x^2 + y^2 \qquad \forall (x,y) \in U \cap C$$

Y de esta expresión se deduce que, si (x_0, y_0) es un punto de extremo condicionado (en este caso se supuso que se trata de un punto de mínimo, pero vale de igual manera si se tratase de un punto de máximo) de $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ sobre $C: g(x,y)=0$, también lo será para la función $\bar{f}(x,y)=x^2+y^2$, sobre el mismo conjunto.

De este modo, es posible hallar los puntos de extremo condicionado de f, a partir de hallar los puntos de extremo condicionado de $\bar{f}$. La ventaja de proceder de esta manera tiene que ver con el aspecto del sistema a resolver. La diferencia radica, básicamente, en la apariencia de las derivadas de cada función.

Concretamente, tomando como función objetivo a la

$$\bar{f}(x,y)=x^2+y^2$$

la función lagrangiana asociada adopta la forma

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda\cdot(17x^2+12xy+8y^2-100)$$

Siendo el sistema de puntos críticos de la misma

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda)=2x+\lambda\cdot(34x+12y)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda)=2y+\lambda\cdot(12x+16y)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=17x^2+12xy+8y^2-100=0\end{cases}$$

Cuyas soluciones son:

$$P_1=\left(2,1,-\frac{1}{20}\right)\quad P_2=\left(2,-4,-\frac{1}{5}\right)\quad P_3=\left(-2,-1,-\frac{1}{20}\right)\quad P_4=\left(-2,4,-\frac{1}{5}\right)$$

A su vez, el hessiano limitado es

$$\bar{H}L(x,y,\lambda)=\begin{vmatrix}0 & -(34x+12y) & -(12x+16y)\\ -(34x+12y) & 2+34\cdot\lambda & 12\cdot\lambda\\ -(12x+16y) & 12\cdot\lambda & 2+16\cdot\lambda\end{vmatrix}$$

Finalmente, y tal como debe ocurrir, las mismas conclusiones se obtienen en la clasificación. Véase pues que

P_i	$\bar{H}L(P_i)$	Conclusión
$P_1=\left(2,1,-\frac{1}{20}\right)$	$\bar{H}L(P_1)=-12000<0$	La función $\bar{f}(x,y)$ posee un punto de mínimo condicionado por $g(x,y)=0$, en $\bar{P}_1=(2,1)$.

$P_2 = \left(2, -4, -\frac{1}{5}\right)$	$\overline{H}L(P_2) = 12000 > 0$	La función $\bar{f}(x, y)$ posee un punto de máximo condicionado por $g(x, y) = 0$, en $\bar{P}_2 = (2, -4)$.
$P_3 = \left(-2, -1, -\frac{1}{20}\right)$	$\overline{H}L(P_3) = -12000 < 0$	La función $\bar{f}(x, y)$ posee un punto de mínimo condicionado por $g(x, y) = 0$, en $\bar{P}_3 = (-2, -1)$.
$P_4 = \left(-2{,}4, -\frac{1}{5}\right)$	$\overline{H}L(P_4) = 12000 > 0$	La función $\bar{f}(x, y)$ posee un punto de máximo condicionado por $g(x, y) = 0$, en $\bar{P}_4 = (-2{,}4)$.

Biblioteca digital. Cap 6, p. 233. Cálculo varias variables. W Mora.

Link contenidos pertinentes (Ctrl+Clic mouse para ir al enlace)
Khan Academy
https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/applications-of-multivariable-derivatives#optimizing-multivariable-functions-videos