T P 04 Ej. 24-iii

En los siguientes ítems, se da la ecuación de una superficie S y un vector N ϵ $\mathbf{R}^3$. Determinar los puntos de S para los que N es un vector Normal a S:

$x^2 + 4y^2 - z^2 = 1 \qquad N = (0,3,4)$

Para resolver este ejercicio primero debemos entender algo; en geometría, un vector normal a una cantidad geométrica (línea, curva, superficie, etc) es un vector de un espacio con producto escalar que contiene tanto a la entidad geométrica como al vector normal. Este vector tiene la propiedad de ser ortogonal a todos los vectores tangentes a la entidad geométrica.

En el caso tridimensional, una superficie normal a un punto P es un vector que es perpendicular al plano tangente a esa superficie en P. La herramienta que utilizamos para obtener a este vector normal es el Vector Gradiente.

El vector gradiente tiene la siguiente forma:

$$\nabla f(\mathrm{P}) = \left(\frac{\partial f(\mathrm{P})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathrm{P})}{\partial x_2}, \ldots\ldots, \frac{\partial f(\mathrm{P})}{\partial x_n}\right)$$

Donde cada componente del vector es la derivada parcial para cada una de las variables que tiene la función original.

Una vez que obtuvimos el vector Normal a la superficie S, lo que tenemos que hacer es observar si dicho vector es Colineal al vector N dado en el enunciado. Un Vector Colineal a otro tiene la siguiente particularidad: Se trata de aquellos vectores que aparecen en la misma recta o que resultan paralelos a una cierta recta.

En nuestro caso nos interesan los que están sobre la misma recta. Para saber si el Vector Normal de la superficie S es Colineal a N debemos realizar la siguiente cuenta:

$\nabla f(\mathrm{P}) = \lambda \mathrm{N}$ donde λ es un escalar que permite diferenciar la intensidad entre los vectores.

Entonces en nuestro ejercicio obtendríamos el siguiente Sistema de ecuaciones:

$$\left(\frac{\partial f(\mathrm{x,y,z})}{\partial \mathrm{x}}, \frac{\partial f(\mathrm{x,y,z})}{\partial \mathrm{y}}, \frac{\partial f(\mathrm{x,y,z})}{\partial \mathrm{z}}\right) = \lambda(0, 3, 4)$$

Resolviendo las derivadas y distribuyendo lambda obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones igualando componente a componente:

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 8y = \lambda 3 \\ -2z = \lambda 4 \end{cases}$$

Donde $x^2 + 4y^2 - z^2 = 1$, ya que si no ponemos esta condición en el sistema, tendríamos un sistema incompatible.

Operando y simplificando obtenemos:

$$x = 0$$
$$y = \lambda 3/8$$
$$z = -\lambda 4/3$$

Sustituyendo en la función *f* obtenemos:

$(0)^2 + 4(3/8.\lambda)^2 - (-4/3.\lambda)^2 = 1$ Sumando obtenemos

$(-175/144)\lambda^2 = 1$ Resolviendo obtenemos

$\lambda^2 = (-144/175)$. Esto no tiene solución en $\boldsymbol{R}^3$, por consecuencia no existe ningún punto donde N sea normal a S