T P 04 Ej. 7

Si una función tiene, en un punto determinado, derivada en todas las direcciones ¿es necesariamente continua en dicho punto? Analizar el siguiente caso:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy^2/(x^2+y^4) & \mathrm{si}(\mathrm{x,y}) \neq (0,0) \\ 0 & \mathrm{si}(\mathrm{x,y}) = (0,0) \end{cases}$$ en el punto (0,0).

Veremos ahora que una función puede tener derivadas en TODAS las direcciones posibles en un punto y eso no asegura la continuidad de dicha función.

Hallamos las derivadas direccionales en $(0,0)$ según cualquier dirección $\vec{v} = (a,b)$ con $\|v\| = 1$ es decir $1 = a^2 + \ b^2$

$$f'_{\vec{v}}(0,0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f((0,0)+h\vec{v})-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h\vec{v})}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f((ha,hb))}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{ha.h^2b^2}{(h^2a^2+h^4b^4)}}{h} = \ldots$$

$$\ldots \lim_{h\to 0^+} \frac{ah^2b^2}{h^2(a^2+h^2b^4)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{ab^2}{(a^2+h^2b^4)} = \frac{ab^2}{a^2} = \frac{b^2}{a}$$ Si a≠0.

Si a=0 =>$\vec{v} = (0,b)$; tendremos dos direcciones: $\overrightarrow{v_1} = (0,1)$ y $\overrightarrow{v_2} = (0,-1)$.

$$f'_{\overrightarrow{v_1}}(0,0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h\overrightarrow{v_1}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f\big(h(0,1)\big)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0,h)}{h} = \cdots$$

$$\ldots \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{0.h^2}{0^2+h^4}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0^+} 0 = 0$$

Análogamente

$$f'_{\overrightarrow{v_2}}(0,0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h\overrightarrow{v_2}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f\big(h(0,-1)\big)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0,-h)}{h} = \cdots$$

$$\ldots \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{0.(-h)^2}{0^2+(-h)^4}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0^+} 0 = 0$$

También existe y vale cero. Por lo tanto, existen las derivadas direccionales de f en $(0,0)$ para todas las direcciones.

Veamos ahora si f es continua en $(0,0)$.

1) $\exists f(0,0) = 0$? Sí
2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^4)} = \frac{0}{0}$

Hallamos los límites radiales $y = mx$

Lr=$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x(mx)^2}{(x^2+(mx)^4)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3m^2}{x^2(1+m^4x^2)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{xm^2}{(1+m^4x^2)} = 0$

No dependen de m

Hallamos los límites cuadráticos $x = ay^2$

Lc=$\lim\limits_{y\to 0} \frac{ay^2y^2}{(a^2y^4+y^4)} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{ay^4}{y^4(a^2+1)} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{a}{(a^2+1)} = \frac{a}{(a^2+1)}$

El límite depende de a, por lo tanto, no existe el límite doble y f no es continua en $(0,0)$.