Extremos Libres.

EJEMPLO 1

Hallar los puntos críticos de la siguiente función.

$$f(x,y) = x^2 + x + y^2 + 1$$

Sistema de ecuaciones que nos permite hallar los puntos críticos.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + 1 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases}$$

Vemos que, al resolver el sistema, obtenemos los valores de $x = -\frac{1}{2}$ e $y = 0$

Punto crítico: $P = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

Teorema (de clasificación de puntos críticos)

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, una función definida en el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$, tal que exista un entorno $U \subseteq A$ de centro en el punto critico (x_0, y_0), en el cual f es de clase C^2. Sea además el Hessiano de f en (x_0, y_0)

$$\Delta_f(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

- Si $\Delta_f(x_0, y_0) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, entonces f posee un mínimo local en (x_0, y_0).
- Si $\Delta_f(x_0, y_0) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, entonces f posee un máximo local en (x_0, y_0).
- Si $\Delta_f(x_0, y_0) < 0$, entonces f posee un punto de ensilladura en (x_0, y_0).
- Si $\Delta_f(x_0, y_0) = 0$, no es posible, con tal información, determinar la naturaleza del punto crítico (x_0, y_0)

Definimos el Hessiano.

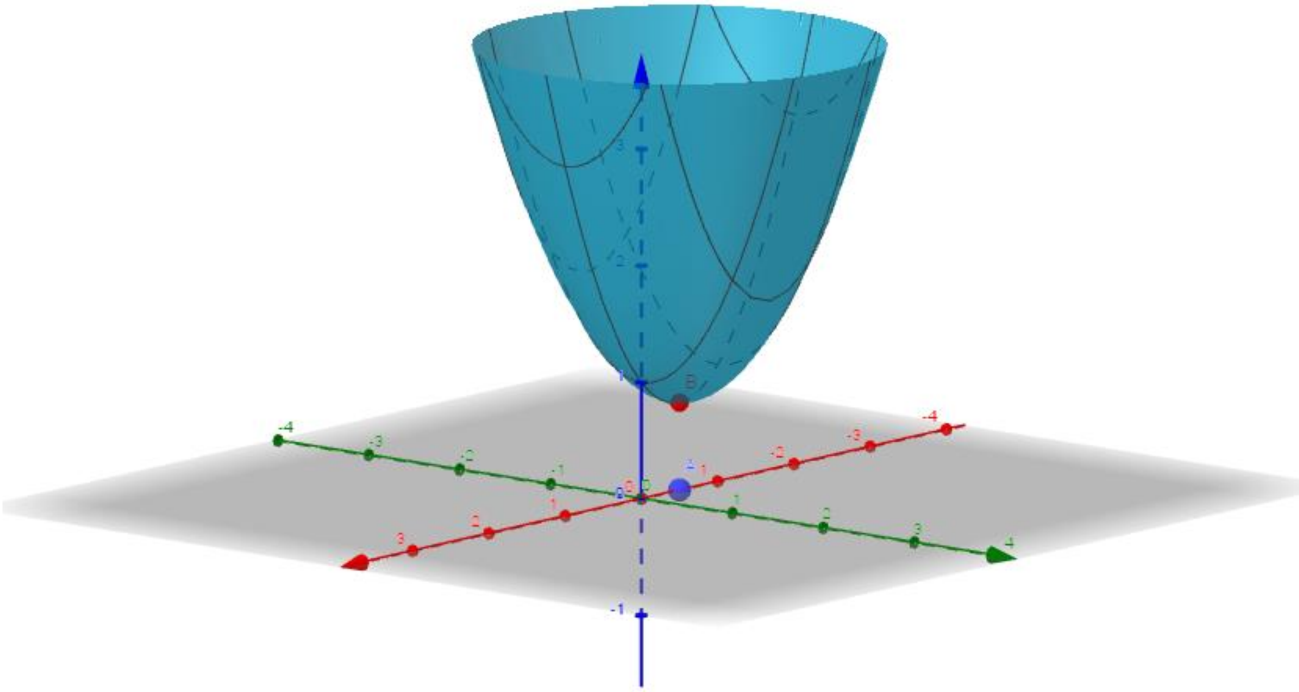
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\Delta f(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Evaluamos $\Delta f(x,y)$ en el punto P

$$\Delta f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

Hay extremo en $P = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, y como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = 2 > 0$. Entonces en P hay un mínimo.



EJEMPLO 2

Hallar los puntos críticos de la siguiente función.

$$f(x,y) = x^2y - x^2 - 3xy + 3x + 2y - 2$$

Sistema de ecuaciones que nos permite hallar los puntos críticos.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 2x - 3y + 3 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación obtenemos que

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x_1 = 1 \qquad\qquad x_2 = 2$$

Reemplazando en la primera ecuación nos queda

Si $x = 1$

$$2y - 2 - 3y + 3 = 0$$

$$-y + 1 = 0$$

$$y = 1$$

Si $x = 2$

$$4y - 4 - 3y + 3 = 0$$

$$y - 1 = 0$$

$$y = 1$$

Por lo tanto, los puntos críticos serán:

$$P_1 = (1,1) \qquad\qquad P_2 = (2,1)$$

Clasificación de puntos críticos.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - 2x - 3y + 3$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 3x + 2$$

$$\Delta f(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y-2 & 2x-3 \\ 2x-3 & 0 \end{vmatrix}$$

En $P_1 = (1,1)$

$$\Delta f(1,1) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

Por lo tanto, en P_1 hay un punto de ensilladura.

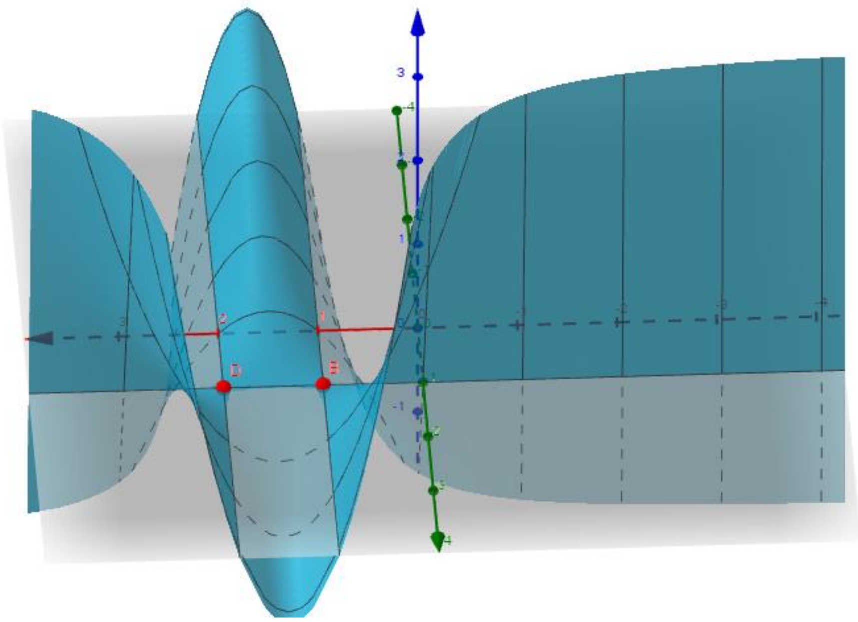
En $P_1 = (2,1)$

$$\Delta f(1,1) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$$

Por lo tanto, en P_2 hay un punto de ensilladura.

$$f(x,y) = x^2y - x^2 - 3xy + 3x + 2y - 2$$

$$f(P_1) = f(1,1) = 0 \qquad\qquad f(P_2) = f(2,1) = 0$$



EJEMPLO 3

Hallar los puntos críticos de la siguiente función y determinar si son máximos, mínimos o punto de ensilladura.

$$f(x,y) = 2(x-1)^2 + 3(y-2)^2$$

Búsqueda de puntos críticos.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4(x-1) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 6(y-2) = 0 \end{cases}$$

Con lo cual, el único punto crítico es: $P = (1,2)$

Veamos, que tipo de extremo libre es.

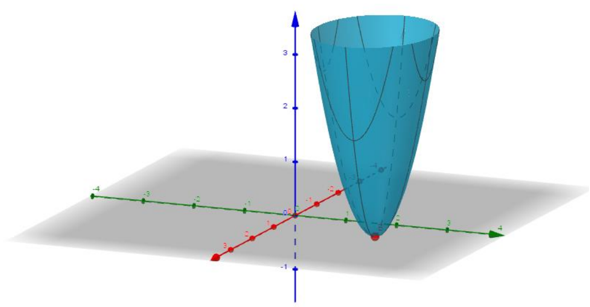
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4(x-1) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 6(y-2) = 0 \end{cases}$$

$$\Delta f(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\Delta f(1,2) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 24 > 0$$

Por lo tanto, hay extremo en el punto P, además como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) > 0$. Se puede afirmar que en $P = (1,2)$ hay un mínimo.

$$f(P) = 0$$



EJEMPLO 4

Hallar los puntos críticos de la siguiente función y determinar si son máximos, mínimos o punto de ensilladura.

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

Búsqueda de puntos críticos.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^3 - y = 0 \quad (i) \\ y^3 - x = 0 \quad (ii) \end{cases}$$

De la ecuación (i) despejamos x y obtenemos

$$x^3 = y$$

Reemplazamos en la ecuación (ii)

$$y^3 - x = 0$$

$$(x^3)^3 - x = 0$$

Resolvemos la ecuación para x.

$$x^9 - x = 0$$

$$x(x^8 - 1) = 0$$

$$x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = 0$$

$$x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$$

$$x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$$

Y como de la ecuación (i) tenemos

$$x^3 = y$$

Los puntos críticos serán

$$P_1 = (0,0) \qquad P_2 = (1,1) \qquad P_3 = (-1,-1)$$

Clasificación de extremos.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x$$

$$\Delta f(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{vmatrix}$$

En $P_1 = (0,0)$

$$\Delta f(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$$

Por lo tanto, en P_1 hay un punto de ensilladura.

En $P_2 = (1,1)$

$$\Delta f(1,1) = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 16 = 128 > 0$$

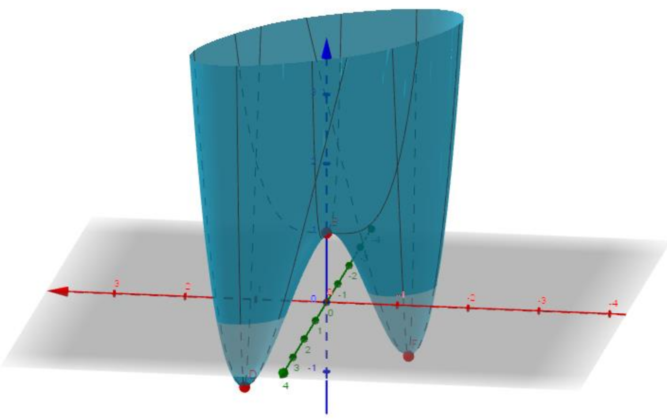
Y como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 12 > 0$. Entonces en P_2 hay un mínimo.

En $P_3 = (-1,-1)$

$$\Delta f(-1,-1) = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 16 = 128 > 0$$

Y como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = 12 > 0$. Entonces en P_3 hay un mínimo.

$$f(0,0) = 1 \qquad\qquad f(1,1) = -1 \qquad\qquad f(-1,-1) = -1$$



EJEMPLO 5

Hallar los puntos críticos de la siguiente función y determinar si son máximos, mínimos o punto de ensilladura.

$$f(x,y) = x^3 - y^3 - 3x + 3y - 1$$

Búsqueda de puntos críticos.

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 3 = 0 \\ f_y = -3y^2 + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \quad (i) \\ -y^2 + 1 = 0 \quad (ii) \end{cases}$$

Observemos que los valores para $x = \{1, -1\}$ y $y = \{1, -1\}$

Es decir que los puntos críticos serán:

$$P_1 = (1,1) \qquad P_2 = (-1,1) \qquad P_3 = (1,-1) \qquad P_4 = (-1,-1)$$

Clasificación de puntos críticos.

$$\Delta f(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{vmatrix}$$

Para $P_1 = (1,1)$

$$\Delta f(1,1) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -36 < 0$$

Por lo tanto, en P_1 hay un punto de ensilladura.

Para $P_2 = (-1,1)$

$$\Delta f(1,1) = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 36 > 0$$

Y como $f_{xx}(P_2) = -6 < 0$ entonces en P_2 hay un máximo.

Para $P_3 = (1,-1)$

$$\Delta f(1,1) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36 > 0$$

Y como $f_{xx}(P_3) = 6 > 0$ entonces en P_3 hay un mínimo.

Para $P_4 = (-1, -1)$

$$\Delta f(1,1) = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -36 < 0$$

Entonces en P_4 hay un punto de ensilladura.

$$f(1,1) = -1$$

$$f(-1,1) = 3$$

$$f(1,-1) = -5$$

$$f(-1,-1) = -1$$