Ecuaciones diferenciales ordinarias

Una ecuación diferencial ordinaria es una ecuación en la que la incógnita es una función $y = y(x)$, en la que además intervienen una o más derivadas de dicha función. Resolver la ecuación diferencial significa encontrar (si existe) una función (o cada función) que satisface la ecuación.

Una gran cantidad de leyes de la física y de relaciones entre cantidades estudiadas en varias disciplinas científicas se expresan matemáticamente a partir de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, La Segunda Ley del Movimiento de Newton establece que la posición $y(x)$ en el instante x, de un objeto de masa constante m, sujeto a una fuerza $F(x)$, satisface la ecuación

$$F(x) = m\, a(x)$$

donde $a(x)$ es la aceleración del objeto en el instante x. Pero teniendo en cuenta que la aceleración y la posición $y(x)$ están relacionadas según

$$a(x) = y''(x)$$

La Segunda Ley de Movimiento de Newton se puede escribir a partir de la siguiente ecuación diferencial

$$F(x) = m\, y''(x)$$

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

En esta parte de la materia se estudiará un tipo muy particular de ecuación diferencial, llamada ecuación diferencial lineal de primer orden.

Una ecuación diferencial lineal de primer orden es la que adopta la siguiente forma

$$y'_{(x)} + P(x)\, y_{(x)} = Q(x) \qquad (1)$$

donde $y_{(x)}$ es la función incógnita, $y'_{(x)}$ es su derivada, y las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ dos funciones conocidas. Se asume de ahora en más que todas ellas son continuas en algún intervalo de números reales $I \subseteq \mathbb{R}$.

Cuando la función $Q(x)$ es idénticamente nula, se tiene la ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden.

$$y'_{(x)} + P(x) \cdot y_{(x)} = 0 \qquad (2)$$

En el estudio que se realizará en este apartado, se verá que la solución de la ecuación diferencial (1) se obtiene a partir de encontrar previamente una solución particular de la ecuación homogénea (2).

Ejemplo 1. Un ejemplo sencillo de este tipo de ecuación diferencial es el siguiente

$$y'_{(x)} - y_{(x)} = 0 \qquad (3)$$

Es decir, donde

$$P(x) = -1$$

Nótese que la ecuación (3) se puede escribir equivalentemente del siguiente modo

$$y'_{(x)} = y_{(x)} \qquad (3)^*$$

Así, <u>la solución de esta ecuación es una función $y_{(x)}$ que es exactamente igual a su derivada $y'_{(x)}$</u>. Entonces, una solución particular inmediata, y conocida, es la exponencial de base e

$$y_{(x)} = e^x$$

Obsérvese pues, que

$$y'_{(x)} = y_{(x)} = e^x$$

para cada $x \in \mathbb{R}^2$.

Pero, también puede verse la función

$$y_{(x)} = k_0\, e^x$$

Para un cierto $k_0 \in \mathbb{R}$, también es solución de la ecuación (3). Esto se sigue inmediatamente de

$$y'_{(x)} - y_{(x)} = k_0\, e^x - k_0\, e^x = 0$$

Más aun, a la expresión

$$y_{(x)} = k\, e^x, \qquad k \in \mathbb{R} \qquad (4)$$

Se la llama <u>solución general</u> de la ecuación diferencial (3)

$$y'_{(x)} - y_{(x)} = 0$$

Debido a que para toda constante $k \in \mathbb{R}$, la función definida en (4) es una solución posible de esta ecuación.

Solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea

A continuación, se ofrece un método para hallar la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden

$$y'_{(x)} + P(x)\, y_{(x)} = 0 \qquad (2)$$

En principio se escribe la ecuación del siguiente modo

$$y'_{(x)} = -P(x)\, y_{(x)} \qquad (2)^{*}$$

Supóngase que

$$I \subseteq \mathbb{R}$$

es el intervalo de referencia, donde se consideran continuas todas las funciones intervinientes. Ahora, considérese que en I, la función $y_{(x)}$ siempre es distinta de cero. Con lo cual, la ecuación $(2)^{*}$ se puede escribir

$$\frac{y'_{(x)}}{y_{(x)}} = -P(x)$$

Ahora, se integra respecto de x a ambos lados

$$\int \frac{y'_{(x)}}{y_{(x)}}\, dx = -\int P(x)\, dx + c_0, \qquad c_0 \in \mathbb{R} \qquad (2)^{**}$$

La aparición de la constante real c_0 tiene que ver con el hecho de considerar el caso más general posible correspondiente a esta situación. Téngase en cuenta que, al derivar a ambos lados, se llega a la igualdad anterior. Y escribir c_0 significa tener en cuenta que dos primitivas difieren a lo sumo en una constante aditiva.

Luego, en $(2)^{**}$, se considera la sustitución

$$w = y_{(x)}$$

Con lo cual

$$dw = y'_{(x)}\, dx$$

Reemplazando, resulta

$$\int \frac{y'_{(x)}}{y_{(x)}}\, dx = \int \frac{dw}{w} = \ln|w| = -\int P(x)\, dx + c_0$$

$$\ln|w| = -\int P(x)\, dx + c_0$$

O sea

$$\ln|w| = \ln\left|y_{(x)}\right| = -\int P(x)\,dx + c_0$$

Esto es

$$\ln\left|y_{(x)}\right| = -\int P(x)\,dx + c_0$$

Aplicando la definición de logaritmo, queda

$$\left|y_{(x)}\right| = e^{\left(-\int P(x)dx + c_0\right)} = e^{-\int P(x)dx}\, e^{c_0}$$

Tomando

$$c_1 = e^{c_0} > 0$$

Se puede escribir

$$\left|y_{(x)}\right| = c_1\, e^{-\int P(x)dx}$$

Con lo cual hay dos tipos de soluciones posibles

$$y_1(x) = c_1\, e^{-\int P(x)dx} \qquad\qquad y_2(x) = -c_1\, e^{-\int P(x)dx}$$

La primera, estrictamente positiva, y la segunda, estrictamente negativa.

Estas dos se pueden presentar en la notación única

$$y(x) = c_2\, e^{-\int P(x)dx} \qquad (2)^{***}$$

Donde se considera que c_2 es un número real distinto de cero.

Notando ahora que, si en $(2)^{***}$ se tomase $c_2 = 0$, se tiene que

$$y_n(x) \equiv 0$$

Es decir que $y_n(x)$ es idénticamente nula en todo $I \subseteq \mathbb{R}$. Y esta función también es solución de la ecuación homogénea

$$y'_{(x)} + P(x)\, y_{(x)} = 0 \qquad (2)$$

Véase pues que

$$y_n{'}_{(x)} + P(x)\, y_{n_{(x)}} = 0 + P(x)\, 0 = 0$$

A esta solución idénticamente nula, se la llama <u>solución trivial</u>.

A partir de esta observación final, se llega a la solución general de la ecuación homogénea (2). Esta se expresa según la fórmula

$$y(x) = k\, e^{-\int P(x)dx}, \qquad k \in \mathbb{R} \qquad \boxed{2}$$

Resulta entonces

$$\overbrace{y'_{(x)} + P(x)\, y_{(x)} = 0}^{\text{Ecuacion diferencial homogénea (2)}} \quad \rightarrow \quad \overbrace{y(x) = k\, e^{-\int P(x)dx},\ \ k \in \mathbb{R}}^{\text{Solución general de (2)}}$$

Observación: En el procedimiento desplegado, la solución trivial se obtuvo al considerar $c_2 = 0$. Sin embargo, esa posibilidad no está contemplada en las condiciones que permitieron llegar al tipo de soluciones exhibidas en $(2)^{***}$. Es más, se ha considerado que

$$y(x) \neq 0$$

en todo el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. De todas maneras, puede demostrarse que, si existe algún x_0 en I, para el cual la función solución $y(x)$ es nula, es decir $y(x_0) = 0$, entonces esa función no puede ser otra si no, la función idénticamente nula

$$y_n(x) \equiv 0$$

Ejemplo 2. La solución general de la ecuación diferencial homogénea

$$y'_{(x)} + x^2 \cdot y_{(x)} = 0$$

Es

$$y(x) = k \cdot e^{-\frac{x^3}{3}}, \qquad k \in \mathbb{R}$$

En este caso, se tiene

$$P(x) = x^2$$

Luego

$$y(x) = k \cdot e^{-\int P(x)dx} = k \cdot e^{-\int x^2 dx} = k \cdot e^{-\frac{x^3}{3}}$$

Es decir

$$y(x) = k \cdot e^{-\frac{x^3}{3}}$$

Donde k es un número real.

Problemas de valor inicial

Se llama problema de valor inicial al que consiste en determinar una solución de una cierta ecuación diferencial, sujeta a la condición $y(x_0) = y_0$.

Esta condición se puede interpretar del siguiente modo. Se trata de hallar la solución particular de la ecuación diferencial propuesta, cuya gráfica pasa por el punto $(x_0 y_0)$.

Ejemplo 3. La solución particular de la ecuación diferencial homogénea

$$y'_{(x)} + x^2 \cdot y_{(x)} = 0$$

Que verifica la condición inicial $y(1) = 1$.

Del Ejemplo 2 se sabe que la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden

$$y'_{(x)} + x^2 \cdot y_{(x)} = 0$$

Es

$$y(x) = k \cdot e^{-\frac{x^3}{3}}, \qquad k \in \mathbb{R}$$

Este problema consiste entonces en determinar la constante k que permita verificar la condición inicial $y(1) = 1$.

Entonces, se reemplaza el valor de x indicado en la fórmula de la solución general

$$y(x) = k \cdot e^{-\frac{x^3}{3}}$$

Es decir

$$y(1) = k \cdot e^{-\frac{1^3}{3}}$$

Y teniendo en cuenta que $y(1) = 1$, resulta

$$k \cdot e^{-\frac{1^3}{3}} = 1$$

Con lo cual, la constante correspondiente es

$$k = e^{\frac{1}{3}}$$

Entonces, la solución particular buscada es

$$y(x) = k \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} = e^{\frac{1}{3}} \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} = e^{\frac{1}{3}-\frac{x^3}{3}}$$

Es decir que

$$y(x) = e^{\frac{1}{3}-\frac{x^3}{3}}$$

Es la solución particular de la ecuación diferencial

$$y'_{(x)} + x^2 \cdot y_{(x)} = 0$$

Que verifica la condición $y(1) = 1$.

En general, se tiene que, para la ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden

$$y'_{(x)} + P(x) \cdot y_{(x)} = 0$$

La solución particular que verifica la condición inicial

$$y(x_0) = y_0$$

Es

$$y(x) = y_0 \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} P(\omega) d\omega}$$

En los Ejemplo 3 se ha visto que la solución de la ecuación diferencial homogénea que satisface la condición $y(1) = 1$ existe y es única. Este hecho se da de forma general en este tipo de ecuaciones. El resultado que lo establece es el siguiente teorema.

Teorema 1. (de existencia y unicidad) Sea $P(x)$ una función continua en el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Sean, además, el número real $x_0 \in I$, y el número real y_0. Entonces, existe una única función

$$y = y(x)$$

que satisface el problema de valor inicial

$$y'(x) + P(x) \cdot y(x) = 0 \quad \text{con} \quad y(x_0) = y_0$$

en el intervalo I, y se tiene además que esta función viene dada por la fórmula

$$y(x) = y_0 \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} P(\omega) d\omega}$$

Solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden completa

Existen varios métodos para hallar la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$y'_{(x)} + P(x) \cdot y_{(x)} = Q(x) \qquad (1)$$

que, en esencia, consisten en determinar primeramente una solución de una ecuación diferencial homogénea

$$u'_{(x)} + P(x) \cdot u_{(x)} = Q(x) \qquad (1)^*$$

A la ecuación $(1)^*$ se la llama ecuación diferencial lineal homogénea asociada a (1), puesto que del lado izquierdo de la igualdad preserva el mismo formato que esta.

El procedimiento que aquí se desarrollará permitirá determinar la solución $y_{(x)}$, que quedará expresada en términos de las funciones coeficientes conocidas en (1), a saber

$$P(x) \quad \text{y} \quad Q(x)$$

Método de resolución

Este método consiste en considerar que la solución $y_{(x)}$ de la ecuación

$$y'_{(x)} + P(x) \cdot y_{(x)} = Q(x) \qquad (1)$$

es de la forma

$$y_{(x)} = u(x) \cdot v(x) \qquad (A)$$

donde $u(x)$ y $v(x)$ son funciones continuas en el intervalo de referencia $I \subseteq \mathbb{R}$. En principio puede parecer que el problema ha incrementado su dificultas, ya que inicialmente se tenía la incógnita funcional $y_{(x)}$ y ahora las dos nuevas incógnitas $u(x)$ y $v(x)$. Sin embargo, se trata de condicionar convenientemente a una de estas dos funciones, como se verá a continuación.

Ahora, derivando la ecuación (A), se obtiene la fórmula de la derivada de $y_{(x)}$

$$y'_{(x)} = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \qquad (B)$$

Reemplazando en

$$y'_{(x)} + P(x) \cdot y_{(x)} = Q(x) \qquad (1)$$

Queda

$$\overbrace{u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}^{y'(x)} + \ P(x) \cdot \overbrace{u(x) \cdot v(x)}^{y(x)} = Q(x)$$

Notando que el primer y el tercer término del lado izquierdo tienen en común a $v(x)$, se puede escribir

$$v(x) \cdot [u'(x) + P(x) \cdot u(x)] + u(x) \cdot v'(x) = Q(x) \qquad (C)$$

En este momento es donde ingresa el condicionamiento conveniente. De las dos funciones $u(x)$ y $v(x)$ seleccionadas, cuyo producto es $y(x)$, se elige a $u(x)$ como una función particular no idénticamente nula, que verifique la ecuación homogénea asociada

$$u'(x) + P(x) \cdot u(x) = 0 \qquad (D)$$

Se elige de este modo, para que se anule la expresión del corchete en (C)

$$v(x) \cdot \overbrace{[u'(x) + P(x) \cdot u(x)]}^{0} + u(x) \cdot v'(x) = Q(x) \qquad (C)$$

Y al ser así, esta ecuación quedará reducida a la siguiente

$$u(x) \cdot v'(x) = Q(x) \qquad (E)$$

En la cual, la única función desconocida es $v(x)$. Pero que en las condiciones planteadas se podrá obtener a partir de la fórmula (E), integrando la expresión

$$v'(x) = \frac{Q(x)}{u(x)} \qquad (F)$$

Y concluir así que la función $v(x)$ más general posible que verifica la ecuación (F) es

$$v(x) = \int \frac{Q(x)}{u(x)} dx + h \qquad (G)$$

Y luego, finalmente escribir la fórmula de $y(x)$ según

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) = u(x) \cdot \left(\int \frac{Q(x)}{u(x)} dx + h \right), \qquad h \in \mathbb{R} \qquad (H)$$

Entonces, considéresela expresión

$$v(x) \cdot [u'(x) + P(x) \cdot u(x)] + u(x) \cdot v'(x) = Q(x) \qquad (C)$$

Y se busca ahora la $u(x) \not\equiv 0$ que verifique la homogénea asociada

$$u'(x) + P(x) \cdot u(x) = 0 \qquad (D)$$

De lo hecho anteriormente, se sabe que la solución general de este tipo de ecuación diferencial de primer orden es

$$u(x) = k \cdot e^{-\int P(x) dx}$$

Siendo k un número real distinto de cero, ya que se desestima la solución trivial $u(x) \equiv 0$.

Entonces, se puede tomar, por ejemplo, la solución $u(x)$ particular asociada al valor de $k = 1$. Es decir

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx}$$

Reemplazando ahora en (C)

$$v(x) \cdot [u'(x) + P(x) \cdot u(x)] + u(x) \cdot v'(x) = Q(x) \qquad (C)$$

se tiene

$$v(x) \cdot \underbrace{\left[\overbrace{-P(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}}^{u'(x)} + P(x) \cdot \overbrace{e^{-\int P(x)dx}}^{u(x)}\right]}_{0} + \overbrace{e^{-\int P(x)dx}}^{u(x)} \cdot v'(x) = Q(x) \qquad (C)$$

Y así, queda

$$e^{-\int P(x)dx} \cdot v'(x) = Q(x) \qquad (E)$$

Y, en consecuencia

$$v'(x) = Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \qquad (F)$$

Luego, la función $v(x)$ más general posible, que verifica (F) es

$$v(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}\, dx + h, \qquad h \in \mathbb{R} \qquad (G)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

Y que, además

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx}$$

$$v(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}\, dx + h, \qquad h \in \mathbb{R}$$

Se obtiene <u>la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden completa</u>

$$y'_{(x)} + P(x) \cdot y_{(x)} = Q(x) \qquad (1)$$

Y esta es

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}\, dx + h\right], \qquad h \in \mathbb{R}$$

es decir

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}\, dx + h\right], \qquad h \in \mathbb{R} \qquad \boxed{1}$$

Esta fórmula ofrece la solución de la ecuación diferencial (1), independientemente de la constante real h. Resulta que para cada $h = h_0$ particular, se tiene una solución particular de (1). Por ejemplo, para $h = 0$, la solución particular $y_p(x)$ asociada es

$$y_p(x) = e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}\, dx$$

Recuérdese que el procedimiento realizado para hallar la solución general necesitó en cierto momento, determinar una solución particular de la ecuación homogénea asociada.

$$u'(x) + P(x) \cdot u(x) = 0$$

Un hecho notable de este tipo de ecuaciones diferenciales lineales es que la solución general se obtiene como la suma de una solución particular más la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada.

Obsérvese pues que la solución general de (1)

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}\, dx + h\right], \qquad h \in \mathbb{R} \qquad \boxed{1}$$

se puede escribir en la forma

$$y(x) = \overbrace{e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}\, dx}^{\substack{\text{Solucion particular} \\ \text{de la Ec. Dif.(1)}}} + \overbrace{h \cdot e^{-\int P(x)dx}}^{\substack{\text{Solución general de la} \\ \text{homogénea asocioada}}}$$

Esencialmente, se tiene la siguiente secuencia

$$y'_{(x)} + P(x) \cdot y_{(x)} = Q(x) \quad \leftarrow \text{Ecuacion diferencial}$$

$$y_{(x)} = u(x) \cdot v(x) \quad \leftarrow \quad \text{Formato de la solución}$$

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx} \quad \leftarrow \quad \text{Solución particular de la homogénea}$$

$$v(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}\, dx + h, h \in \mathbb{R} \quad \leftarrow \text{Fórmula más general de } v(x)$$

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}\, dx + h\right], h \in \mathbb{R} \quad \leftarrow \quad \text{Solución general de la Ec. Dif.}$$

Si bien, para este tipo de ecuaciones se cuenta con la fórmula que permite obtener la solución general a partir de un proceso de integración que involucra a las funciones coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$, esta no es evidente y puede que resulte difícil recordarla, por tal razón <u>es conveniente, al menos en los primeros ejercicios, aplicar particularmente el</u>

método aquí desarrollado para el caso general, realizando todas las operaciones exhibidas más arriba.

Ejemplo 4. Determinar la solución general de la ecuación diferencial lineal

$$y'_{(x)} + y_{(x)} = x + e^x$$

En este caso se presenta la siguiente situación

$$P(x) = 1$$

$$Q(x) = x + e^x$$

Se sabe que la solución general es

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx}$$

$$v(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}\, dx + h, \qquad h \in \mathbb{R}$$

En esta situación particular se tiene

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int 1dx} = e^{-x}$$

Es decir

$$u(x) = e^{-x}$$

Por otra parte

$$v(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}\, dx + h = \int (x + e^x) \cdot e^{\int 1dx}\, dx + h = \int (x + e^x) \cdot e^x dx + h$$

$$v(x) = \int (xe^x + e^{2x})\, dx + h$$

Integrando, queda

$$v(x) = (x-1)e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + h$$

Entonces, la solución general de la ecuación diferencial

$$y'_{(x)} + y_{(x)} = x + e^x$$

Es

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) = e^{-x} \cdot \left[(x-1)e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + h\right], \qquad h \in \mathbb{R}$$

Es decir

$$y(x) = x - 1 + \frac{1}{2}e^{x} + h \cdot e^{-x}, \qquad h \in \mathbb{R}$$

Se verifica el resultado

$$y(x) = x - 1 + \frac{1}{2}e^{x} + h \cdot e^{-x}$$

$$y'(x) = 1 + \frac{1}{2}e^{x} - h \cdot e^{-x}$$

$$y'_{(x)} + y_{(x)} = \overbrace{1 + \frac{1}{2}e^{x} - h \cdot e^{-x}}^{y'(x)} + \overbrace{x - 1 + \frac{1}{2}e^{x} + h \cdot e^{-x}}^{y(x)} = x + e^{x}$$

O sea

$$y'_{(x)} + y_{(x)} = x + e^{x}$$

Tal como se pedía.

Ejemplo 5. Determinar la solución general de la ecuación diferencial lineal

$$y'_{(x)} - \frac{1}{x} \cdot y_{(x)} = x^{2} \cdot \cos(x) \qquad x > 0$$

Se tiene

$$P(x) = -\frac{1}{x}$$

$$Q(x) = x^{2} \cdot \cos(x)$$

La solución general es

$$y(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx}$$

$$v(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}\, dx + h, \qquad h \in \mathbb{R}$$

Para este caso, resulta

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int -\frac{1}{x}dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln|x|}$$

Es decir

$$u(x) = e^{\ln|x|}$$

Pero teniendo en cuenta la identidad

$$a = e^{\ln(a)}, a > 0$$

Queda

$$u(x) = e^{\ln|x|} = |x|$$

Y teniendo en cuenta que $x > 0$, se tiene

$$u(x) = x$$

Recuérdese que esta función es una solución particular de la homogénea asociada

$$u'(x) + P(x) \cdot u(x) = 0$$

Que en este caso es

$$u'_{(x)} - \frac{1}{x} \cdot u_{(x)} = 0$$

En este momento, antes de avanzar conviene verificar que la función $u(x)$ es verdaderamente una solución particular de la homogénea asociada.

Por otra parte

$$v(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}\, dx + h = \int (x^2 \cdot \cos(x)) \cdot e^{\int -\frac{1}{x}dx}\, dx + h$$

$$v(x) = \int (x^2 \cdot \cos(x)) \cdot e^{-\ln|x|}\, dx + h = \int (x^2 \cdot \cos(x)) \cdot \frac{1}{e^{\ln|x|}}\, dx + h$$

$$v(x) = \int (x^2 \cdot \cos(x)) \cdot \frac{1}{|x|}\, dx + h = \int (x^2 \cdot \cos(x)) \cdot \frac{1}{x}\, dx + h$$

$$v(x) = \int x \cdot \cos(x)\, dx + h$$

Aplicando el método de integración por partes, resulta

$$v(x) = x \cdot \operatorname{sen}(x) + \cos(x) + h$$

Luego

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) = x \cdot [x \cdot \operatorname{sen}(x) + \cos(x) + h] = x^2 \cdot \operatorname{sen}(x) + x \cdot \cos(x) + x \cdot h$$

O sea

$$y(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen}(x) + x \cdot \cos(x) + x \cdot h, \quad h \in \mathbb{R}$$

Ahora se efectúa la verificación

$$y(x) = x^2 \cdot \mathrm{sen}(x) + x \cdot \cos(x) + x \cdot h$$

$$y'(x) = 2x \cdot \mathrm{sen}(x) + x^2 \cdot \cos(x) + \cos(x) - x \cdot \mathrm{sen}(x) + h$$

$$y'(x) = x \cdot \mathrm{sen}(x) + x^2 \cdot \cos(x) + \cos(x) + h$$

Así

$$y'_{(x)} - \frac{1}{x} \cdot y_{(x)} = \overbrace{x \cdot \mathrm{sen}(x) + x^2 \cdot \cos(x) + \cos(x) + h}^{y'(x)} - \frac{1}{x} \cdot \overbrace{(x^2 \cdot \mathrm{sen}(x) + x \cdot \cos(x) + x \cdot h)}^{y(x)}$$

$$y'_{(x)} - \frac{1}{x} \cdot y_{(x)} = x \cdot \mathrm{sen}(x) + x^2 \cdot \cos(x) + \cos(x) + h - x \cdot \mathrm{sen}(x) - \cos(x) - h$$

$$y'_{(x)} - \frac{1}{x} \cdot y_{(x)} = x^2 \cdot \cos(x)$$

Tal como debe ser.

Esto quiere decir que la solución general de la ecuación diferencial

$$y'_{(x)} - \frac{1}{x} \cdot y_{(x)} = x^2 \cdot \cos(x) \qquad x > 0$$

Es efectivamente

$$y(x) = x^2 \cdot \mathrm{sen}(x) + x \cdot \cos(x) + x \cdot h, \quad h \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 6. Determinar la solución particular de la ecuación diferencial lineal

$$y'_{(x)} - \frac{1}{x} \cdot y_{(x)} = x^2 \cdot \cos(x) \qquad x > 0$$

Que verifica la condición inicial

$$y(\pi) = 0$$

Del Ejemplo 5 se sabe que la solución general de la ecuación diferencial dada es

$$y(x) = x^2 \cdot \mathrm{sen}(x) + x \cdot \cos(x) + x \cdot h, \quad h \in \mathbb{R}$$

Se trata entonces de hallar determinar la constante h para que la función satisfaga la condición inicial

$$y(\pi) = 0$$

Reemplazando según esta condición en la expresión de la solución general resulta

$$y(\pi) = \pi^2 \cdot \mathrm{sen}(\pi) + \pi \cdot \cos(\pi) + \pi \cdot h = -\pi + \pi \cdot h = \pi \cdot (-1 + h)$$

Teniendo en cuenta entonces que debe ser $y(\pi) = 0$, se tiene la igualdad

$$y(\pi) = \pi \cdot (-1 + h) = 0$$

Con lo cual, la constante correspondiente es

$$h = 1$$

Finalmente, se concluye que la solución particular de la ecuación diferencial

$$y'_{(x)} - \frac{1}{x} \cdot y_{(x)} = x^2 \cdot \cos(x) \qquad x > 0$$

Que verifica la condición inicial $y(\pi) = 0$, es

$$y(x) = x^2 \cdot \mathrm{sen}(x) + x \cdot \cos(x) + x$$

Para el problema de valor inicial como el del Ejemplo 6, se tiene el siguiente teorema de existencia y unicidad

---

Teorema 2. (de existencia y unicidad) Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos funciones continuas en el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$. Sean, además, el número real $x_0 \in I$, y el número real y_0. Entonces, existe una única función

$$y = y(x)$$

que satisface el problema de valor inicial

$$y'(x) + P(x) \cdot y(x) = Q(x) \quad \text{con} \quad y(x_0) = y_0$$

en el intervalo I, y se tiene además que esta función viene dada por la fórmula

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} P(\omega)d\omega} \cdot \left[\int_{x_0}^{x} Q(\omega) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} P(\omega)d\omega}\, d\omega + y_0 \right]$$
