Matemática Discreta

CLASE N°3

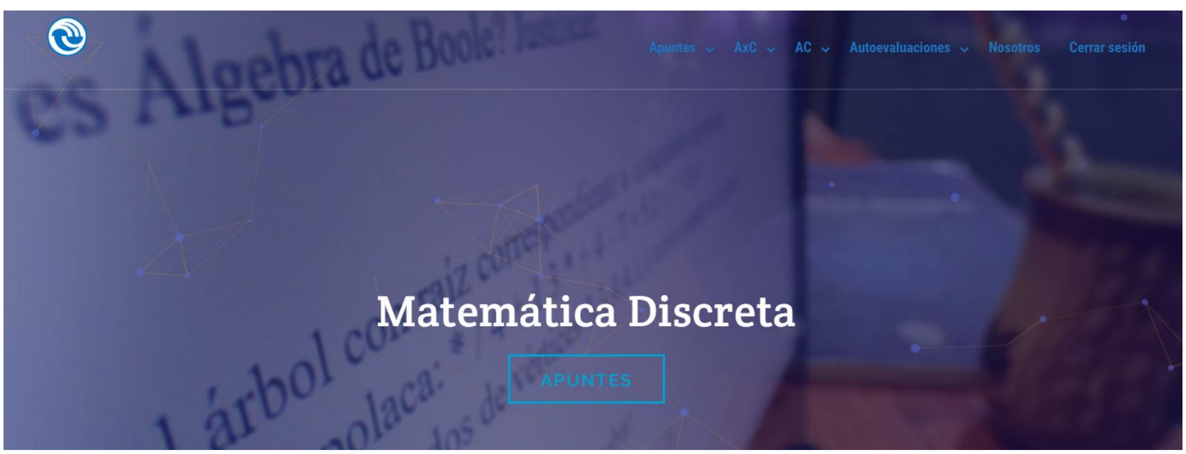
Ing. Marcela Bellani Matemática
UNLAM | FLORENCIO VARELA 1903 .B1754.SAN JUSTO.BUENOS AIRES

En esta clase se desarrollarán los siguientes temas:

- Relaciones binarias: definición, propiedades, reconocimiento matricial y gráfico de las mismas, clasificación: orden amplio, orden estricto, equivalencia.

-Relaciones de equivalencia: Partición: definición. Teorema Fundamental de Relaciones de Equivalencia. Relación congruencia módulo n. Relación congruencia módulo n.
Clausuras: definición, manejo matricial, propiedades, cálculo de trayectoria Relaciones clausura. Algoritmo de Warshall

Para todas las clases contamos con la ayuda del sitio de la cátedra http://discretaunlam.net.ar donde encontrarás videos, ejercicios, explicaciones, autoevaluaciones de todos los temas de Matemática Discreta.



Relaciones Binarias

Dado un conjunto A, una **relación binaria** en A es cualquier subconjunto *R* del producto cartesiano A x A

$$R \subseteq A \times A = \{(a;\, b) \,/\, a,\, b \in A\}$$

Propiedades de las relaciones binarias

- Estudio de las propiedades de una relación binaria sobre un conjunto finito

Sea A un conjunto y R una relación binaria definida en él. Diremos que:

- *R* es ***reflexiva*** si: "Todos los elementos están relacionados consigo mismo", en otras palabras, para todo x elemento de A, x está relacionado con x. Es decir:

R es reflexiva $\Leftrightarrow \forall x\!: x \in A \rightarrow x\, R\, x$.

R **no es reflexiva** si existe algún $x \in A$ tal que x *no esté relacionado con* x. Es decir

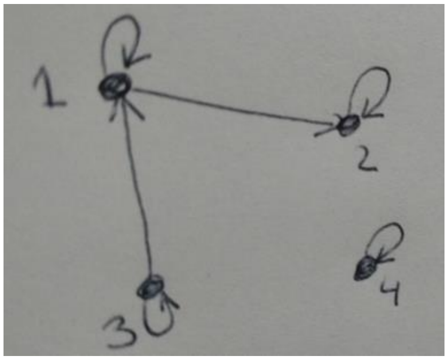
R **no es reflexiva** $\Leftrightarrow \exists\, x\, (\boldsymbol{x} \in A \wedge x$ no está relacionado con $x)$

Gráficamente, *R* es reflexiva si ***todos los elementos tienen bucle***. No lo es si hay algún elemento que no tiene bucle.

__**Ejemplo**__:

Si A = {1, 2, 3, 4} y R es la relación R = {(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (1; 2), (3; 1)}.

En el dígrafo



Propiedad

$$\boldsymbol{R \text{ es reflexiva} \Leftrightarrow \Delta_A \subseteq R} \text{ siendo } \Delta_A = \{(a; a) / a \in A\}$$

Matricialmente

$$\boldsymbol{R \text{ es reflexiva} \Leftrightarrow I \leq M_R}$$

Ejemplo:

Si A = {1, 2, 3, 4} y R es la relación R = {(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (1; 2), (3; 1)}.

Por extensión:

Δ_A ={(1;1),(2;2),(3;3),(4;4)} $\subseteq$ *R* = {(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (1; 2), (3; 1)}

Matricialmente:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leq M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de una relación reflexiva se caracteriza por tener todos los elementos de su diagonal principal igual a uno. Es decir, si $M_R = (r_{ij})$, entonces

R es reflexiva ⇔ $r_{ii} = 1$, ∀i

y

R no es reflexiva ⇔ ∃i : $r_{ii} = 0$

- R es **Arreflexiva** si: "Ningún elemento está relacionado consigo mismo", en otras palabras, no existe x elemento de A que esté relacionado consigo mismo:

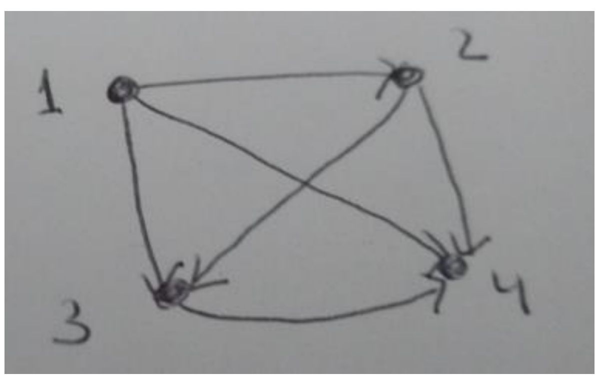
∀ *x* ∈ *A*, *x no está relacionado con x*.

Gráficamente, *R* es arreflexiva si ***ningún elemento tiene bucle***.

Ejemplo:

Si A = {1, 2, 3, 4} y *R* es la relación R = {(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 4)}

En el dígrafo



Propiedad

R es arreflexiva ⇔ $\Delta_A \cap R = \varnothing$

Matricialmente

R es arreflexiva ⇔ $I \wedge M_R = N$ *siendo N la matriz nula*

Ejemplo:

Si A = {1, 2, 3, 4} y *R* es la relación R = {(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 4)}

Por extensión

Δ_A ={(1;1),(2;2),(3;3),(4;4)} ∩ ***R*** = {(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 4)} = ∅

Matricialmente:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \wedge M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I \wedge M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de una relación arreflexiva se caracteriza por tener todos los elementos de su diagonal principal igual a cero. Es decir, si $M_R = (r_{ij})$, entonces

***R* es arreflexiva ⇔ $r_{ii} = 0, \forall i$**

- *R* es Simétrica si "Cada vez que *x* está relacionado con *y* se sigue que *y* está relacionado con *x*". Es decir

R es simétrica ⇔ $\forall x, y \in A: x\, R\, y \rightarrow y\, R\, x$

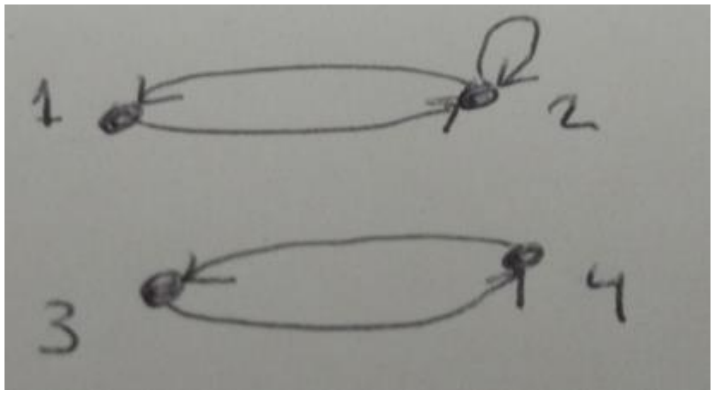
Gráficamente:

R es simétrica si "Cada flecha de ida tiene otra de vuelta ". Es decir si todos los elementos que están relacionados entre sí tienen *doble flecha*. No lo es si hay alguna flecha que no sea doble.

<u>Ejemplo:</u>

Si A = {1, 2, 3, 4} y R es la relación R = {(1;2), (2;1), (2;2), (3;4), (4;3)}

En el dígrafo (DG):



Si DG es el dígrafo de una relación simétrica, entonces entre cada dos vértices distintos del DG existen dos aristas o no existe ninguna.

<u>Propiedad</u>

R es simétrica $\Leftrightarrow$ ***R = R*** $^{-1}$

Matricialmente

R es simétrica $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{M_R = M_R^{-1} = (M_R)^t}$

<u>Ejemplo</u>:

Si A = {1, 2, 3, 4} y R es la relación R = {(1;2), (2;1), (2;2), (3;4), (4;3)}

Por extensión

R = {(1;2), (2;1), (2;2), (3;4), (4;3)} =

{(2;1),(1;2),(2;2),(4;3),(3;4)}= ***R*** $^{-1}$

Matricialmente

$$M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (M_R)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M_R = (M_R)^t$$

La matriz $M_R = (m_{ij})$ de una relación simétrica, satisface la propiedad de que todo par de elementos colocados simétricamente respecto de la diagonal principal son iguales. Luego si $M_R = (r_{ij})$ es la matriz de R, entonces

R es simétrica $\Leftrightarrow r_{ij} = r_{ji}, \ \forall i, j$

En la matriz de una relación simétrica hay coincidencia de unos en las posiciones simétricas. La diagonal principal puede tener unos o ceros.

***R* no es simétrica** si podemos encontrar dos elementos *x e y* en A tales que *x* esté relacionado con *y* e *y* no lo esté con *x*. En otras palabras:

R es no simétrica $\Leftrightarrow \exists\, x, y \in A: x \,R\, y \wedge$ **y no está relacionado con x**

Si $M_R = (r_{ij})$ es la matriz de *R*, entonces

R es no simétrica $\Leftrightarrow \exists i, j : r_{ij} \neq r_{ji}$

En la matriz de una relación no simétrica no hay coincidencia de unos en las posiciones simétricas y su diagonal principal debe tener todos ceros.

SUGERENCIA ANTES DE AVANZAR:

Mirá el video "Propiedades reflexiva y simétrica de las relaciones binarias" en el sitio de la cátedra http://discretaunlam.net.ar sección Apuntes-Relaciones.

- *R* es **Antisimétrica** **s**i cuando (*x, y*) $\in$ R y (*y;x*) $\in$ R, entonces *x* = *y*. Es decir,

R es antisimétrica $\Leftrightarrow \forall$ ***x, y*** $\in$ ***A: x R y*** $\wedge$ ***y R x*** $\rightarrow$ ***x = y***

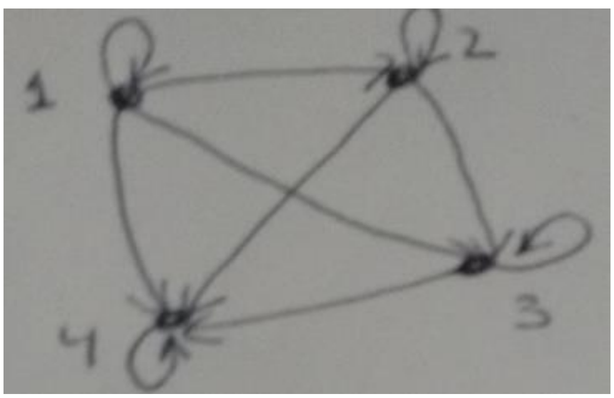
***Gráficamente*:**

Ninguna flecha de ida tiene otra de vuelta, salvo en el caso de los bucles, que están permitidos. Es decir, si todos los elementos que están relacionados entre sí tienen *flecha simple*. No lo es si hay alguna *flecha doble*.

Ejemplo:

Si A = {1, 2, 3, 4} y *R* es la relación "ser menor o igual que", se tiene:

R = {(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 3), (2; 4), (3; 4), (1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4)}



Si DG es el dígrafo de una relación antisimétrica, entonces entre cada dos vértices distintos de A, existe un arco o no existe ninguno.

Propiedad

R es antisimétrica $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A}$

Matricialmente: ***R es antisimétrica*** $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{M_R \wedge M_R^{-1} \leq I}$ *siendo I la matriz identidad*

Ejemplo:

Si A = {1, 2, 3} y *R* es la relación "ser menor o igual que", se tiene:

R = {(1; 2), (1; 3), (2; 3), (1; 1), (2; 2), (3; 3)}

Por extensión

R ={(1; 2), (1; 3), (2; 3),(1; 1), (2; 2), (3; 3)} ∩ ***R*** $^{-1}$

={(2;1),(3;1),(3;2),(1;1),(2;2),(3;3)}= (1;1),(2;2),(3;3)}= Δ_A

Matricialmente

$$M_R \wedge (M_R)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

La matriz $M_R = (r_{ij})$ de una relación antisimétrica, satisface la propiedad de que si i ≠ j, entonces

$r_{ij} = 0$ ó $r_{ji} = 0$. Es decir,

R es antisimétrica ⇔ ∀i ≠ j, $r_{ij} = 0 \vee r_{ji} = 0$

En la matriz de una relación antisimétrica no hay coincidencia de unos en las posiciones simétricas pudiendo haber unos en la diagonal principal de la matriz.

***<u>R es no antisimétrica</u>* ⇔ ∃ x,y ∈ A : (x R y ∧ y R x ∧ x ≠y)**

O sea, si podemos encontrar dos elementos *x* y *y* en A tales que *x* esté relacionado con *y e* y relacionado con *x*, siendo ambos distintos, entonces la relación es no antisimétrica.

En la matriz de una relación no antisimétrica hay coincidencia de unos en las posiciones simétricas.

***<u>R es no antisimétrica</u>* ⇔ ∃i, j : $r_{ij} = 1 \wedge r_{ji} = 1 \wedge i \neq j$**

- R es **Asimétrica** si "Cada vez que *x R y* se sigue que *y no está relacionado con x.* Es decir,

***R* es asimétrica** $\Leftrightarrow \forall\ x, y \in A: x\ R\ y \rightarrow y$ *no está relacionado con* x

En otras palabras

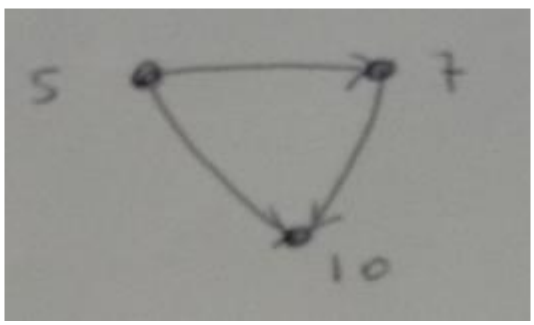
R es asimétrica $\Leftrightarrow \forall$ ***x, y*** $\in$ ***A: x no está relacionado con y ó y no está relacionado con x***

***Gráficamente*:** Ninguna flecha de ida tiene otra de vuelta, y no están permitidos los bucles.

Ejemplo:

Si A = {5, 7, 10} y *R* es la relación "ser menor que", se tiene:

R = {(5; 7), (5; 10), (7; 10)}



Propiedad

R es asimétrica $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} = \varnothing$

Matricialmente

R es asimétrica $\Leftrightarrow M_R \wedge M_R^{-1} = N$ *siendo N la matriz nula*

Ejemplo:

Si A = {5, 7, 10} y *R* es la relación "ser menor que", se tiene:

R = {(5; 7), (5; 10), (7; 10)}

Por extensión

R = {(5; 7), (5; 10), (7; 10)} $\cap$ **R⁻¹** = {(7; 5), (10; 5), (10; 7)} **=** $\varnothing$

Matricialmente:

$$M_R \wedge (M_R)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = N$$

La matriz $M_R = (r_{ij})$ de una relación asimétrica, satisface la propiedad de que si i ≠ j, entonces $\mathbf{r_{ij} = 0}$ **ó** $\mathbf{r_{ji} = 0}$.

En la matriz de una relación asimétrica no hay coincidencia de unos en las posiciones simétricas y su diagonal principal tiene todos ceros.

R no es asimétrica ⇔ *∃ x,y ∈ A : x R y ∧ y R x*

En la matriz de una relación no asimétrica puede haber coincidencia de unos en las posiciones simétricas ó bien unos en la diagonal principal.

- *R es* **Transitiva** si "cuando (*x; y*) ∈ R y (*y; z*) ∈ *R,* entonces (*x; z*) ∈ *R.* Es decir,

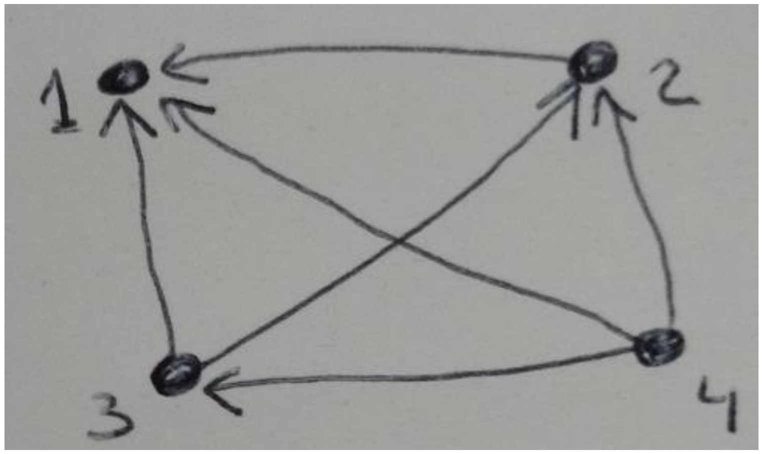
R es transitiva ↔ ∀ ***x, y, z*** ∈ **A: *x R y*** ∧ ***y R z*** → ***x R z***

***Gráficamente*:** Siempre que haya dos flechas consecutivas, debe haber otra que una el primer elemento con el tercero.

- **Ejemplo**:

Si A = {1, 2, 3, 4} y *R* es la relación "ser mayor que", se tiene:

R = {(2; 1), (3; 1), (3; 2), (4; 1), (4; 2), (4; 3)}



SUGERENCIA ANTES DE AVANZAR:

Mirá el video "Propiedad antisimétrica y transitiva de las relaciones binarias" en el sitio de la cátedra http://discretaunlam.net.ar sección Apuntes-Relaciones.

Propiedad

R* es transitiva** $\Leftrightarrow$ ***R* ° *R $\subseteq$ ***R***
Matricialmente: ***R* es transitiva** $\Leftrightarrow$ $M_R \otimes M_R \leq M_R$

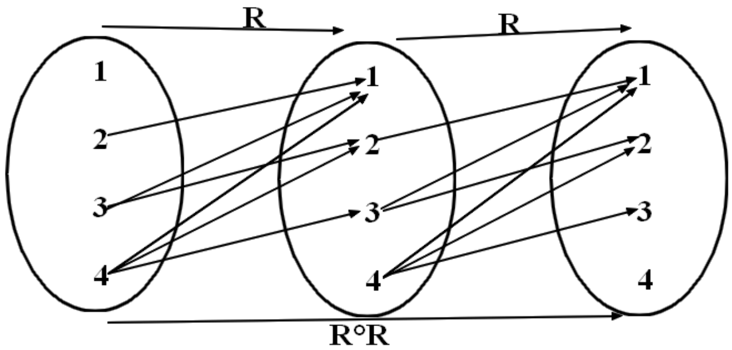
Ejemplo:

Si A = {1, 2, 3, 4} y *R* es la relación "ser mayor que", se tiene:

R = {(2; 1), (3; 1), (3; 2), (4; 1), (4; 2), (4; 3)}

Por extensión

R* ° *R **=** {(3; 1), (4; 1), (4; 2)} $\subseteq$ ***R*** = {(2; 1), **(3; 1)**, (3; 2), **(4; 1), (4; 2)**, (4; 3)}



Matricialmente:

$$M_R \otimes M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leq M_R$$

Si la matriz de una relación transitiva es $M_R = (r_{ij})$,

R es transitiva *⇔ ($r_{ij} = 1 \wedge r_{jk} = 1 \rightarrow r_{ik} = 1$)*

La relación **R no es transitiva**, si podemos encontrar elementos *a, b, c* en A tales que *a R b* y *b R c*, pero *a* no esté relacionado con *c*.

R es no transitiva ⇔ ∃ a, b, c ∈ A: a R b ∧ b R c ∧ a no está relacionado con c

Si la matriz de una relación transitiva es $M_R = (r_{ij})$,

R es no transitiva ⇔ $r_{ij} = 1 \wedge r_{jk} = 1 \wedge r_{ik} = 0$

Ejemplo de una relación no transitiva utilizando matrices

Sea la relación R definida en el conjunto A= {1,2} dada por su matriz M_R $= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- Hacemos el producto booleano de la matriz consigo misma

$$M_R \otimes M_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Luego comparamos la matriz de la relación y la matriz del producto booleano. Esto se hace posición contra posición. Es decir, la posición a_{11} de la matriz booleana con la posición a_{11} de la matriz de la relación. Para el ejemplo sería 1 **> 0.**

COMO HAY UNA POSICIÓN MAYOR EN LA MATRIZ DEL PRODUCTO NO SE SIGUE HACIENDO LA COMPARACIÓN

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ no es mayor que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, por lo tanto R no es transitiva

Conclusiones

Sea $R \subseteq A \times A$ y sea M_R la matriz asociada a R (en el caso en que A sea finito).

Sea $\Delta_A = \{(x; x) \,/\, x \in A\}$ (la "relación diagonal" de $A \times A$).

Entonces:

- ✓ ***R* es reflexiva ⇔ ($\Delta_A \subseteq R$) ⇔ I ≤ M_R .**

  M_R tiene 1 en todas las posiciones de la diagonal principal. En el dígrafo *todos los elementos tienen bucle*.

- ✓ ***R* es arreflexiva ⇔ $\Delta_A \cap R = \varnothing$ ⇔ I ∧ M_R = N** siendo N la matriz nula.

  M_R tiene 0 en todas las posiciones de la diagonal principal. En el dígrafo *todos los elementos no tienen bucle*.

- ✓ ***R* es simétrica ⇔ ($R = R^{-1}$) ⇔ ($M_R = (M_R)^t$),** es decir, si M_R es simétrica. En el dígrafo de una relación simétrica, cada dos vértices distintos del dígrafo existen dos aristas en sentido contrario o no existe ninguna.

- ✓ ***R* es no simétrica** $\Leftrightarrow \exists$ ***x, y*** $\in$ **A: x *R y*** $\wedge$ ***y no está relacionado con x .*** En M_R no hay coincidencia de unos en las posiciones simétricas y su diagonal principal tiene todos ceros

- ✓ ***R* es antisimétrica** $\Leftrightarrow$ $(R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_A) \Leftrightarrow (M_R \wedge (M_R)^t \leq I)$.En M_R no existen fuera de la diagonal principal dos posiciones simétricas cuyos valores sean 1 simultáneamente.

  I denota la "matriz identidad", es decir, aquella que tiene unos en la diagonal principal y el resto de elementos son nulos. En el dígrafo de una relación antisimétrica, entre cada dos vértices distintos de A, existe un arco o no existe ninguno.

- ✓ **R es no antisimétrica** $\Leftrightarrow$ $\exists\, x, y \in A: (x\, R\, y \wedge y\, R\, x \wedge x \neq y)$. En la matriz de una relación no antisimétrica M_R hay coincidencia de unos en las posiciones simétricas.

- ✓ **R es asimétrica** $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} = \varnothing \Leftrightarrow M_R \wedge (M_R)^t = N$ siendo N la matriz nula. En la matriz de una relación asimétrica M_R no hay coincidencia de unos en las posiciones simétricas y su diagonal principal tiene todos ceros. En el dígrafo de una relación asimétrica M_R no hay arcos de ida y vuelta, y no están permitidos los bucles.

- ✓ **R no es asimétrica** $\Leftrightarrow \exists\, x, y \in A: x\, R\, y \wedge y\, R\, x$. En la matriz de una relación M_R no asimétrica puede haber coincidencia de unos en las posiciones simétricas ó bien unos en la diagonal principal.

- ✓ ***R* es transitiva** $\Leftrightarrow (R \circ R \subseteq R) \Leftrightarrow (M_R \otimes M_R \leq M_R)$. En el dígrafo de una relación transitiva M_R siempre que haya dos flechas consecutivas, debe haber otra que una el primer elemento con el tercero.

- ***Ejercicios resueltos***

1. Sea A = $\{0,1\}$.Utilizando el dígrafo, estudiar las propiedades de las siguientes relaciones:

1.1 $R_1 = \{(0; 0), (1; 1)\}$

1.2 $R_2 = \{(0; 1), (1; 0)\}$

1.3 $R_3 = \{(0; 0), (0; 1)\}$

1.4 $R_4 = A \times A$

RTA:

1.1 $R_1 = \{(0; 0), (1; 1)\}$

R_1 es reflexiva, simétrica y transitiva. (Equivalencia)

1.2 $R_2 = \{(0; 1), (1; 0)\}$

R_2 es arreflexiva, simétrica y no transitiva.

1.3 $R_3 = \{(0; 0), (0; 1)\}$

R_3 es no reflexiva, no simétrica, antisimétrica y transitiva.

1.4 $R_4 = A \times A$

A x A es reflexiva, simétrica y transitiva. (Equivalencia)

2. Dar un ejemplo de una relación en el conjunto A= {1, 2, 3,4} que:

2.1 Sea reflexiva y simétrica, pero no transitiva

Solución

R= {(1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (1;2), (2;1), (2;3), (3;2)}

2.2 Sea simétrica y transitiva, pero no reflexiva

Solución

$R = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}$

2.3 Sea reflexiva, antisimétrica, pero no transitiva

Solución

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(2,3),(3,4)\}$

2.4 Sea reflexiva, antisimétrica y transitiva

Solución

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(2,3)\}$

Estudio de propiedades en relaciones binarias no finitas

En el caso de conjuntos infinitos estudiamos sus propiedades a partir de la definición de la relación.

Ejemplos.

Determinar las propiedades de las siguientes relaciones:

1. *R* es la relación definida en Z, donde $x\ R\ y$ si y sólo si $x + y$ es par

En símbolos: $x\ R\ y \Leftrightarrow x + y = 2.q, q \in Z$

Reflexiva. $\forall\ x: x \in A \rightarrow x\ R\ x.$

Dado $x \in$ Z cualquiera, se verifica que $x + x = 2x$ es par, luego $x\ R\ x$, es decir la relación "par" es reflexiva.

En símbolos $\forall x \in Z: x + x = 2x \rightarrow x\ R\ x$

Simétrica. $\forall x, y \in A: x\ R\ y \rightarrow y\ R\ x$

Dados x e y cualesquiera de Z, se verifica: $x\ R\ y$ si y sólo si $x + y$ es par entonces $y + x$ es par si y sólo si $y\ R\ x$ luego la relaciones "par" es simétrica. En símbolos:

$\forall x,y \in Z : x\ R\ y \Leftrightarrow x + y = 2.q, q \in Z \rightarrow y + x = 2.q, q \in Z \Leftrightarrow y\ R\ x$

Conmutatividad

Por lo tanto, la relación "par" es simétrica

Antisimétrica. $\forall x, y \in A: x\ R\ y \wedge y\ R\ x \rightarrow x = y$

Sean x e y dos enteros distintos cualesquiera tales que $x + y$ sea par. Entonces, $y + x$ también es "par", luego $\exists x, y \in Z: x\ R\ y \wedge y\ R\ x \wedge x \neq y$ por lo tanto la relación "par" no es antisimétrica.

Contraejemplo:

$\exists 3,5 \in Z: 3\ R\ 5 \wedge 5\ R\ 3 \wedge 3 \neq 5$

Asimétrica. $\forall x, y \in A : x\ R\ y \rightarrow$ *y no está relacionado con x*

Sean x e y dos enteros distintos cualesquiera tales que $x + y$ sea par. Entonces, $y + x$ también es "par", luego $\exists x, y \in Z: x\ R\ y \wedge y\ R\ x$ por lo tanto la relación "par" no es asimétrica.

Contraejemplo:

$\exists 3,5 \in Z: 3\ R\ 5 \wedge 5\ R\ 3$

Transitiva. $\forall x, y, z \in A: x\ R\ y \wedge y\ R\ z \rightarrow x\ R\ z$

Dados x, y, z cualesquiera de Z, tendremos:

$\forall x, y, z \in A: x\ R\ y \wedge y\ R\ z \rightarrow \exists p \in Z : x + y = 2p \wedge \exists q \in Z : y + z = 2q \rightarrow$ *sumando miembro a miembro* $x + y + y + z = 2p + 2q \rightarrow x + z = 2p + 2q - 2y \rightarrow x + z = 2(p + q - y) \rightarrow x + z = 2k, k \in Z \rightarrow x + z$ par $\rightarrow x\ R\ z$

Por lo tanto, la relación "par" es transitiva.

2. R es la relación definida en Z, donde $x\ R\ y$ si y sólo si $x + y$ es impar.

En símbolos: $x\ R\ y \Leftrightarrow x + y = 2.q + 1, q \in Z$

Reflexiva. $\forall\, x: x \in A \rightarrow x\, R\, x.$

Dado $x \in$ Z cualquiera, se verifica que $x + x = 2x$ es par, luego x no está relacionado con x, es decir la relación "impar" no es reflexiva.

Contraejemplo:

$\exists\, 3 \in$ Z: $3 + 3 = 6$ *no es impar*

Simétrica $\forall x,y \in$ A: $x\, R\, y \rightarrow$ y $R\, x$

Dados x e y cualesquiera de Z, se verifica: $x\, R\, y$ si y sólo si $x + y$ es impar entonces $y + x$ es impar si y sólo si $y\, R\, x$ luego la relaciones "impar" es simétrica

En símbolos:

$\forall x,y \in Z : x\, R\, y \Leftrightarrow x + y = 2.q + 1, q \in Z \rightarrow y + x = 2.q + 1, q \in Z \Leftrightarrow y\, R\, x$

Conmutatividad

Por lo tanto, la relación "impar" es simétrica.

Antisimétrica. $\forall\, x\, ,\, y \in$ A: $x\, R\, y \wedge y\, R\, x \rightarrow x = y$

Sean x e y dos enteros distintos cualesquiera tales que $x + y$ sea impar. Entonces, $y + x$ también es "impar", luego $\exists\, x, y \in$ Z: $x\, R\, y \wedge y\, R\, x \wedge x \neq y$ por lo tanto la relación "impar" no es antisimétrica.

Contraejemplo:

$\exists\, 3{,}4 \in$ Z: $3\, R\, 4 \wedge 4\, R\, 3 \wedge 4 \neq 3$

Asimétrica. $\forall\, x,y \in$ A : $x\, R\, y \rightarrow y$ *no está relacionado con* x

Sean x e y dos enteros distintos cualesquiera tales que $x + y$ sea impar. Entonces, $y + x$ también es "impar", luego $\exists\, x, y \in$ Z: $x\, R\, y \wedge y\, R\, x$ por lo tanto la relación "impar" no es asimétrica.

Contraejemplo:

$\exists\ 4{,}5 \in \mathbb{Z}: 4\ R\ 5\ \wedge\ 5\ R\ 4$

Transitiva. $\forall\ x, y, z \in A: x\ R\ y\ \wedge\ y\ R\ z \rightarrow x\ R\ z$

Sean x, y, z cualesquiera de Z, tendremos:

$\exists\ x, y, z \in A: x\ R\ y\ \wedge\ y\ R\ z \wedge\ x\ R\!\!/\ z \rightarrow x + y = 2p + 1\ \wedge\ y + z = 2q + 1\ \wedge\ x + z \neq 2p + 1$

Por lo tanto la relación "impar" no es transitiva

Contraejemplo:

$\exists\ 2, 3{,}4 \in \mathbb{Z}: 2 + 3 = 5\ \wedge\ 3 + 4 = 7\ \wedge\ 2 + 4 = 6$

3. R es la relación definida en Z × Z, donde $(x; y)\ R\ (z; t)$ si y sólo si $x \leq z$.

En símbolos: $(x; y)\ R\ (z; t) \Leftrightarrow x \leq z$

Reflexiva. $\forall\ x: x \in A \rightarrow x\ R\ x.$

Para cualquier entero, se verifica que $x = x$, luego $x \leq x$, es decir, $(x; y)\ R\ (z; t)$

En símbolos $\forall\ (x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}: x = x \rightarrow x \leq x \rightarrow x\ R\ x$

Simétrica. $\forall x, y \in A: x\ R\ y \rightarrow y\ R\ x$

Sean x, y, z, t cuatro números enteros tales que $x \leq z$. Entonces, $(x, y)\ R\ (z, t)$, sin embargo el par (z, t) no está relacionado con el (x, y) ya que $z \geq x$. Por tanto,

$\exists (x; y), (z; t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}: (x; y)\ R\ (z; t)\ \wedge\ (z; t)$ *no está relacionado con* (x, y)

es decir, la relación no es simétrica.

Contraejemplo:

$\exists$ *(4;5), (6;7)* $\in$ Z × Z : *(4;5) R (6:7)* $\wedge$ *(6:7)* no está relacionado con *(4;5)*

Antisimétrica. $\forall\, x, y \in$ A: $x\ R\ y \wedge y\ R\ x \rightarrow x = y$

Sean *(x; y)* y *(z; t)* dos elementos de Z × Z tales que $x = z$ e $y \leq t$.

Entonces *(x; y) R (z; t)* y *(z; t) R (x; y)*, sin embargo *(x; y) ≠ (z; t)*, es decir,

$\exists$*(x; y), (z; t)* $\in$ Z × Z: *(x; y) R (z; t)* $\wedge$ *(z; t) R (x; y)* $\wedge$ *(x; y) ≠ (z, t)*

por lo tanto, la relación no es antisimétrica.

Contraejemplo

$\exists$ *(4;5),(4;7)* $\in$ Z × Z : *(4;5) R (4:7)* $\wedge$ *(4:7) R (4;5)* $\wedge$ *(4;5) ≠ (4:7)*

Asimétrica. $\forall\, x,y \in$ A : $x\ R\ y \rightarrow$ *y no está relacionado con x*

Sean *(x; y)* y *(z; t)* dos elementos de Z × Z tales que $x = z$ e $y \leq t$.

Entonces *(x; y) R (z; t)* y *(z; t) R (x; y)*, por lo tanto la relación no es asimétrica.

$\exists$*(x; y), (z; t)* $\in$ Z × Z: *(x; y) R (z; t)* $\wedge$ *(z; t) R (x; y)*

Contraejemplo

$\exists$ *(4;5), (4; 7)* $\in$ Z × Z: *(4; 5) R (4:7)* $\wedge$ *(4:7) R (4; 5)*

Transitiva. $\forall\, x, y, z \in$ A: $x\ R\ y \wedge y\ R\ z \rightarrow x\ R\ z$

Dados tres elementos *(x; y), (z; t) y (e; f)*, cualesquiera de Z × Z, se verifica:

(x; y)R (z; t) $\wedge$ *(z; t) R (e; f)* $\rightarrow x \leq z \wedge z \leq e \rightarrow x \leq e \rightarrow$ *(x; t) R (e; f)* luego la relación dada es transitiva.

Estas propiedades permiten caracterizar distintos tipos de relaciones de gran importancia en estructuras de datos, flujos de información, computación, …

Clasificación de relaciones binarias

Sea R una relación binaria en *A*:

1. Se dice que R es una **relación de equivalencia** en *A* si *R* verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo: en el conjunto de las personas nacidas en Argentina la relación *R* en la cual *x* está relacionada con *y* si y sólo si *x* e *y* nacieron en la misma provincia es una relación de equivalencia.

2. Se dice que R es una **relación de orden** en *A* si R verifica las propiedades reflexivas, antisimétrica y transitiva. En este caso, se dice que (*A*, R) es un **conjunto ordenado**.

Ejemplo: Son conjuntos ordenados: (N, ≤), (Z, ≤), (Q, ≤) y (R, ≤).

➢ ***Ejercicios resueltos:***

1. Estudiar las propiedades de cada una de las relaciones R definidas

en cada uno de los

siguientes casos y clasificarlas:

a) $x \; R \; y \iff x = y^2$ en $\{0,1\}$

Solución

$x \; R \; y \iff x = y^2$ en $\{0,1\}$

R *es* Re*flexiva ya que* $\forall x \in \{0,1\} \Rightarrow x = x^2$; $(0 = 0^2 \wedge 1 = 1^2)$

R *es Simétrica ya que* $\forall x, y \in \{0,1\} : (x, y) \in R \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow (y, x) \in R$

R *es Transitiva ya que* $\forall x, y, z \in \{0,1\} : (x, y) \in R \Rightarrow x = y^2 \wedge (y, z) \in R \Rightarrow y = z^2$

$\Rightarrow x = (y^2)^2 \Rightarrow x = y = z = 0 \vee x = y = z = 1 \Rightarrow (x, z) \in R$

Por lo tanto, **R es de equivalencia**

b) x R y $\Leftrightarrow$ n | (x − y) en Z, n $\in$ N

Es decir

$\forall$ x,y $\in$ Z   x R y $\Leftrightarrow$ x − y = n .q ; q $\in$ Z

Solución

Reflexiva $\forall$ *x: x* $\in$ *A* $\rightarrow$ *x R x.*

$\forall$x $\in$ Z $\rightarrow$ x -x = n. 0 $\rightarrow \exists$ 0 $\in$ Z / n | (x − x) $\rightarrow$ **x R x**

Simétrica $\forall$*x,y* $\in$ A: *x R y* $\rightarrow$ y *R x*

$\forall$x , y $\in$ Z   **x R y** $\rightarrow$ x − y = n .q ; q $\in$ Z $\rightarrow$ (-1).(x −y) = (-1).n .q ; q $\in$ Z $\rightarrow$

y − x = n (-1.q); q $\in$ Z $\rightarrow$ y − x = n q_1 ; q_1 $\in$ Z $\rightarrow$ **y R x**

Transitiva $\forall$ *x, y, z* $\in$ A: *x R y* $\wedge$ *y R z* $\rightarrow$ *x R z*

$\forall$x , y ,z $\in$ Z   **x R y** $\wedge$ **y R z** $\rightarrow$ x − y = n .q ; q $\in$ Z $\wedge$ y − z = n q_1 ; q_1 $\in$ Z $\rightarrow$

x − y + y − z = n .q + n q_1; q $\in$ Z; q_1 $\in$ Z $\rightarrow$ x − z = n (.q + q_1); q + q_1 $\in$ Z $\rightarrow$

x − z = n q_2 ; q_2 $\in$ Z $\rightarrow$ **x R z**

Por lo tanto, **R es de equivalencia**

Antisimétrica. $\forall\, x\,,\, y \in$ A: $x\ R\ y\ \wedge\ \ y\ R\ x\ \rightarrow x = y$

R no es antisimétrica ya que $\exists$ **2,*4*** $\in$ **Z: (*2 R 4* $\wedge$ 4 *R 2* $\wedge$ 2 ≠ *4*)** para n=2

Asimétrica. $\forall\ x,y \in$ A : $x\ R\ y \rightarrow$ *y no está relacionado con x*

R no es asimétrica ya que $\exists$ **2,*4*** $\in$ **Z: 2 *R* 4 $\wedge$ 4 *R* 2** para n=2

c) x R y $\Leftrightarrow$ x $\leq$ y en Z

Solución

$$R\ es\ reflexiva\ ya\ que\ \forall x \in Z : x \leq x \Rightarrow (x,x) \in R$$

$$R\ es\ antisimétrica\ ya\ que\ \forall x; y \in Z : (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$$

$$\mathrm{R}\ es\ transitiva\ ya\ que\ \forall x; y; z : (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \leq z \Rightarrow (x,z) \in R$$

Por lo tanto, **R es de orden amplio**

Simétrica. $\forall x,y \in$ A: $x\ R\ y \rightarrow$ y $R\ x$

R no es simétrica ya que $\exists$ **2,*3*** $\in$ **Z: 2 *R 3 y* 3 *no está relacionado con* 2**

Asimétrica. $\forall\ x,y \in$ A : $x\ R\ y \rightarrow$ *y no está relacionado con x*

R no es asimétrica ya que $\exists$ **2** $\in$ **Z: 2 *R* 2 $\wedge$ 2 *R* 2**

2. Si D_{12} = {x / x es divisor positivo de 12}, se define: a R b $\Leftrightarrow$ 2|(a-b), a S b $\Leftrightarrow$ 3|(a-b): calcular $\bar{R}$, R $\cap$ S, R $\cup$ S, S^{-1} y estudiar sus propiedades (clasificar)

Solución

a R b $\Leftrightarrow$ 2 | (a-b) $\Leftrightarrow$ (a-b) = 2.q,q $\in$Z (la diferencia entre los elementos de D_{12} debe ser un múltiplo de 2)

a S b $\Leftrightarrow$ 3 | (a-b) $\Leftrightarrow$ (a-b) = 3.q,q $\in$Z (la diferencia entre los elementos de D_{12} debe ser un múltiplo de 3)

Las relaciones por extensión son:

R= {(1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (6;6), (12;12), (1;3), (3;1), (2;4), (4;2), (2;6), (6;2), (2;12), (12;2), (4;6), (6:4), (4;12),(12;4),(6;12),(12:6)}

S= {(1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (6;6), (12;12), (1;4), (4;1), (3;6), (6;3), (3;12), (12;3), (6;12), (12;6)}

Relación complemento, los pares que le faltan a R para tener todo D_{12} x D_{12} :

$$\overline{R}=\{(1;2),(2;1),(1;4),(4;1),(1;6),(6;1),(1;12),(12;1),(2;3),(3;2),(3;4),(4;3),(3;6),(6;3),(3;12),(12;3)\}$$

R $\cap$ **S** ={(1;1),(2;2),(3;3),(4;4),(6;6),(12;12),(6;12),(12;6)}(pares en común, múltiplos de 2 y de 3)

R$\cup$**S**={(1;1),(2;2),(3;3),(4;4),(6;6),(12;12),(1;3),(3;1),(2;4),(4;2),(2;6),(6;2),(2;12),(12;2),(4;6), (6:4), (4;12), (12;4), (6;12), (12;6), (1;4), (4;1), (3;6), (6;3), (3;12), (12;3)} (todos los pares)

S^{-1} = {(1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (6;6), (12;12), (1;4), (4;1), (3;6), (6;3), (3;12), (12;3), (6;12), (12;6)}

(Invertir todos los pares de S). Es igual a S porque es simétrica.

Tanto S como R son de equivalencia.

Este ejercicio lo podés hacer demostrando las propiedades en forma general o bien por matrices.

En forma general:

$\forall$ a,b $\in$ A $\quad$ a S b $\Leftrightarrow$ a − b = 3 .q ; q $\in$ Z

Reflexiva

$\forall a \in Z \rightarrow a - a = 3.\ 0 \rightarrow 0 \in Z \rightarrow a - a = 3\ .q\ ;\ q \in Z \rightarrow$ **a S a**

Simétrica

$\forall a, b \in Z$ **a S b** $\rightarrow a - b = 3\ .q\ ;\ q \in Z \rightarrow (-1)\ a - b = (-1)3\ .q\ ;\ q \in Z \rightarrow b - a = 3\ (-1.q)\ ;\ q \in Z \rightarrow b - a = 3\ q_1\ ;\ q_1 \in Z \rightarrow$ **b S a**

Transitiva

$\forall a, b, c \in Z$ **a S b** $\wedge$ **b S c** $\rightarrow a - b = 3\ .q\ ;\ q \in Z \wedge b - c = 3\ q_1\ ;\ q_1 \in Z \rightarrow a - b + b - c = 3\ .q + 3\ q_1;\ q \in Z\ ;\ q_1 \in Z \rightarrow a - c = 3\ (.q + q_1);\ q + q_1 \in Z \rightarrow a - c = 3\ q_2\ ;\ q_2 \in Z \rightarrow$

a S c

Para finalizar con esta parte te proponemos que ingreses al sitio de la cátedra " https://discretaunlam.net.ar " para leer y hacer las actividades por clase (AxC) correspondientes al tema "Relaciones binarias" que te proponemos en la plataforma.

Luego comienza a hacer los ejercicios de Relaciones binarias de la guía de ejercicios para el primer parcial y por último resuelve la autoevaluación "Relaciones binarias" que figura en el sitio.

Tené en cuenta que todas las actividades que realices forman parte del seguimiento académico que hará tu tutor.

Relaciones de equivalencia

Este tipo de relaciones binarias permiten clasificar o agrupar a los elementos del conjunto en el que están definidas. Por ejemplo, podemos clasificar a los números en pares e impares; a los colores en fríos y cálidos. Es decir, trataremos a los elementos de un conjunto más por sus propiedades que como objetos individuales. En tales situaciones, podremos ignorar todas las propiedades que no sean de interés y tratar elementos diferentes como "equivalentes", a menos que puedan diferenciarse utilizando únicamente las propiedades que nos interesen.

¿Cuándo una relación binaria es de equivalencia?

Una relación binaria es de equivalencia cuando la relación cumple con las propiedades reflexiva; simétrica y transitiva

Esto no la excluye de cumplir otras propiedades, pero para decir que es de equivalencia debe cumplir si o si reflexividad, simetría y transitividad.

Dígrafo de una relación de equivalencia

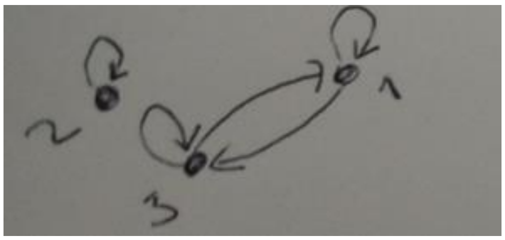
El dígrafo asociado a una relación de equivalencia, R, tiene algunas características que lo distinguen.

- Como R es reflexiva, cada vértice tiene un bucle.
- La simetría implica que si existe un arco desde a hasta b, también existe un arco desde b hasta a.
- La transitividad implica que si existe un arco desde a hasta b y existe un arco desde b hasta c entonces existe un arco desde a hasta c.

Ejemplo

En el conjunto A= {1, 2, 3}se define la siguiente relación R= {(1;1), (2;2), (3;3), (1;3), (3;1)}

Cuya matriz es $M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y su dígrafo es



Veamos si es una relación de equivalencia a partir de su matriz

<u>Reflexiva</u> **I ≤ M_R**

La relación es reflexiva ya que $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ por lo tanto **R** es **reflexiva**

<u>Simétrica</u> **$M_R = (M_R)^t$**

$(M_R)^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = M_R$ por lo tanto **R** es **simétrica**

<u>Transitiva</u> **$M_R \otimes M_R \leq M_R$**

$M_R \otimes M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ por lo tanto **R** es **transitiva**

*Al ser **R** reflexiva, simétrica y transitiva **R** es de **equivalencia**.*

En el dígrafo de la relación **R s**e observan dos partes. Cada una de ellas muestra los elementos que están relacionados entre sí. Así se tiene que el 1 está relacionado con el 1 (propiedad reflexiva) y con el 3; el 2 está relacionado con el 2 (propiedad reflexiva) y el 3 está relacionado con el 3 (propiedad reflexiva) y con el 1.A cada una de esas partes del dígrafo se la llama clase de equivalencia. Es decir, R tiene dos clases de equivalencia: la clase formada por el 1 y el 3, y la clase formada por el 2. Lo nombramos así: la clase del 1 o la clase del 3, y la clase del 2.

¿Qué se entiende por clase de equivalencia de un elemento?

Sea A un conjunto y R una relación de equivalencia en A. Para cada elemento $a \in A$ se define la **clase de equivalencia de *a*** como el conjunto de todos los elementos de A que están relacionados con a. Se denota: $[a] = \{x \in A \mid x \text{ R } a\}$.

Cualquier elemento $x \in [a]$ se llama **representante** de la clase $[a]$.

Para el ejemplo:

$[\mathbf{1}] = \{x \in A \mid x \text{ R } 1\} = \{1, 3\} = [\mathbf{3}]$

$[\mathbf{2}] = \{x \in A \mid x \text{ R } 2\} = \{2\}$

$[\mathbf{3}] = \{x \in A \mid x \text{ R } 3\} = \{3, 1\} = [\mathbf{1}]$

En las relaciones de equivalencia se suele utilizar el símbolo ≡. Es decir, que en lugar de
escribir ***1R2*** pondremos ***1≡2*** indicando la relación (equivalencia) entre dichos elementos.

SUGERENCIA ANTES DE AVANZAR:

Mirá el video "Relaciones binarias de equivalencia" en el sitio de la cátedra http://discretaunlam.net.ar sección Apuntes-Relaciones de equivalencia.

Propiedades.

Si R es una relación de equivalencia en A, $\forall\ a, b \in A$, se satisfacen las propiedades siguientes:

- *Toda clase de equivalencia tiene por lo menos un elemento ya que la relación R es reflexiva. Es decir* $a \in [a]$ y por tanto $[a] \neq \varnothing$.

- *Dos elementos cualesquiera del conjunto A están relacionados si y sólo si pertenecen a la misma clase de equivalencia.*

  Es decir $[a] = [b] \leftrightarrow a\ R\ b$.

- *La intersección de dos clases de equivalencia [a]; [b] cualquiera es igual al vacío si y sólo si los elementos a, b no están relacionados.*

  Es decir $[a] \cap [b] = \varnothing \leftrightarrow$ *a no está relacionado con b.*

Observación: La relación de equivalencia establece en el conjunto A una partición: cada clase de equivalencia es un conjunto no vacio; la unión de todas las clases de equivalencia es el conjunto A y éstas son disjuntas dos a dos.

¿Qué es partición de un conjunto A?

Sea A un conjunto y sea P un conjunto formado por subconjuntos de A. $A_i \subseteq A$

Decimos que $P= \{A_i\}$, $\forall i\ \ A_i \subseteq A$, es una partición de A si se verifican las siguientes tres condiciones:

1) *Los elementos de la partición son no vacíos. En símbolos:*

$$\forall A_i \in P \rightarrow A_i \neq \varnothing$$

2) *Dos elementos distintos de la partición son disjuntos. En símbolos:*

$$\text{Dados } A_i,\ A_j \in P \rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing,\ \text{si } i \neq j$$

3) *Todo elemento de A pertenece a algún elemento de la partición o, lo que es lo mismo, A es la unión de todos los elementos de la partición.*

$$\forall a \in A \ \ \exists A_i \in P \,/\, a \in A_i$$

Ejemplo.

Sea A = {1; 2; 3; 4; 5; a; b; c; d}. Entonces P_1 = {{1; a; c} ;{2; 3; 4; 5} ;{b; d}} es una partición de A ya que:

1) *Los elementos de la partición son no vacíos*

$A_1 = \{1; a; c\} \neq \emptyset$; $A_2 = \{2; 3; 4; 5\} \neq \emptyset$; $A_3 = \{b; d\} \neq \emptyset$

2) *Dos elementos distintos de la partición son disjuntos.*

$A_1 \cap A_2 = \{1; a; c\} \cap \{2; 3; 4; 5\} = \emptyset$

$A_1 \cap A_3 = \{1; a; c\} \cap \{b; d\} = \emptyset$

$A_2 \cap A_3 = \{2; 3; 4; 5\} \cap \{b; d\} = \emptyset$

3) *Todo elemento de A pertenece a algún elemento de la partición*

$1 \in A_1$; $2 \in A_2$, $3 \in A_2$, $4 \in A_2$, $5 \in A_2$, $a \in A_1$, $b \in A_3$, $c \in A_1$, $d \in A_3$

Pero **<u>no</u>** son particiones de A los conjuntos:

P_2= {{5; b; c}; {2; 3; 4; 1}; {d}} ya que no se verifica ***3)***

P_3= {{1; a; c}; {2; 3; 4; 5}; {b; d; 1}} ya que no se verifica ***2).***

> **<u>¡Importante!:</u>** *no confundir el concepto de partición de un conjunto A con el conjunto de partes de A.*

Conjunto cociente

Sea A un conjunto y R una relación de equivalencia en A. Se llama **conjunto cociente** de A por R al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia de los elementos de A. Lo denotamos:

$$A \,/\, R = \{[a] \,/\, a \in A\}.$$

indicando así que es el conjunto A partido por la relación de equivalencia R.

Para el ejemplo $\boldsymbol{A \,/\, R = \{[1], [2]\}}$

SUGERENCIA ANTES DE AVANZAR:

Mirá el video "Ejemplos sencillos de relaciones binarias de equivalencia" en el sitio de la cátedra http://discretaunlam.net.ar sección Apuntes-Relaciones de equivalencia.

Teorema

Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A, entonces la familia de todas las clases de equivalencia de los elementos de A produce una partición de A.

$$\frac{A}{R} = P$$

➢ *Ejercicios resueltos*

1. Hallar todas las particiones del conjunto $A = \{1; 2; 3\}$. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A?

Solución:

Podemos armar la partición, cuya clase solo contenga un solo elemento:

P_1= {{1}, {2}, {3}}

Las que contengan más de un elemento:

P_2= {{1}, {2,3}}

P_3= {{1,2}, {3}}

P_4= {{1,3}, {2}}

P_5= {{1, 2,3}}

Por lo tanto, son 5 relaciones de equivalencia las que pueden definirse en A

2. Sea *A* = {*a; b; c; d; e; f*}. Dada la relación de equivalencia en *A*

R= {(*a; a*) ;(*b; b*) ;(*c; c*) ;(*d; d*) ;(*e; e*) ;(*f; f*) ;(*a; b*) ;(*b; a*) ;(*a; f*) ;(*f; a*) ;(*b; f*) ;(*f; b*) ;(*c; e*) ;(*e; c*)}

Hallar

2.1. La clase de *b*

2.2. La clase de *c*

2.3. La clase de *d*

2.4. La partición asociada a *R*

Solución

2.1. [b] = {x $\in$ A / x R b}= {b, a, f}

2.2. [c] = {x $\in$ A / x R c}= {c, e}

2.3. [d] = {x $\in$ A / x R d}= {d}

2.4. P = {{a, b, f}, {c, e}, {d}}

Teorema

Dada una partición de un conjunto A, puede definirse en él una relación de equivalencia R tal que el conjunto cociente A/R coincida con la partición dada.

$$\mathbf{P = \frac{A}{R}}$$

Ejemplo

Sea A = {1, 2, 3, 4} y {{1, 2}, {3,4}} una partición de A. Determínese la relación de
equivalencia correspondiente en A.

Solución

Si tenemos en cuenta que las clases de equivalencia son los subconjuntos de la partición, tendremos

[1] = {1, 2} y [3] = {3,4}

A partir de la definición de clases de equivalencia y de que R ha de ser de equivalencia, tendremos:

[1] = {1, 2}, luego (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2) ∈ R

[3] = {3,4}, luego (3,3), (3; 4), (4, 4), (4,3) ∈ R

Entonces

R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (4, 3), (3, 4), (3, 3), (4, 4)}

Relación congruencia módulo n

EL RELOJ DE GAUSS

A Gauss[1] se lo conoce como "el príncipe de los matemáticos", es uno de los grandes genios de toda la historia, su talento destacó ya desde la infancia.

Cuando apenas tenía 24 años escribió el libro "*Disquisitiones arithmeticae"*, en el cual introduce las congruencias, que han sido utilizadas por todos los matemáticos a partir de entonces.

Veamos en qué consiste esta teoría de las congruencias o aritmética de los relojes.

La esfera de un reloj tiene doce números distribuidos en el perímetro de un círculo. Después del número 12 debería venir el 13, pero lo que hacemos es volver a contar desde el principio. Podríamos construir una tabla que tuviese 12 columnas, para comprenderlo más claramente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Esta operación la llevamos a cabo cada día cuando miramos el reloj, ya que para distinguir las horas que preceden al mediodía de las que le siguen es habitual seguir contando a partir del número 12. Por ejemplo, cuando nos referimos a las 17 hs entendemos que equivale a las "5 de la tarde", por lo que en ese sentido sabemos que el 17 es la misma "clase" que el 5.

Gauss se plantea diferentes relojes. Por ejemplo, un reloj que tenga sólo cinco horas cuya tabla sería:

[1] Johann Carl Friedrich Gauss(Gauß) (Brunswick, 30 de abril de 1777 – Gotinga, 23 de febrero de 1855), fue un matemático,astrónomo, geodesta, y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos campos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la estadística, el álgebra, la geodesia, el magnetismo y la óptica

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
…	…	…	…	…

Ahora podemos decir que el 17 es de la misma "clase" que el 2.

Es fácil saber a qué clase pertenece un número cualquiera. Por ejemplo, para el 19 tendríamos que dar 3 vueltas al reloj de 5 horas para sumar 15 y luego empezar de nuevo hasta llegar al número 4, de modo que pertenece a la clase del 4. Esto es lo mismo que dividir 19 por 5 y quedarnos con el resto de la división que es 4.

Esta operación es muy práctica cuando se trata de números muy grandes. Si queremos saber a qué clase pertenece el número 40248, en ese reloj de 5 horas, dividimos al número dado por 5, lo que nos da un cociente de 8049 y un resto de 3; por lo tanto, pertenece a la clase del 3. Como los múltiplos de 5 dan resto 0 al dividirlos por 5, lo que se hace es llamar 0 a la clase del 5.

Por lo tanto, la tabla queda de la siguiente manera:

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	…	…	…	…

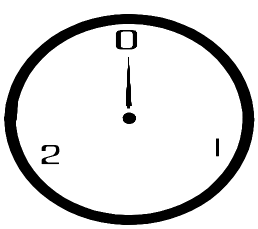
Podríamos decir que el 16 es lo mismo que el 1, pero una igualdad como 16 = 1 se podría prestar a confusión, por lo que se suele poner de la forma 16 ≡ 1. Pero es obvio que hay que añadir un dato más: es necesario saber en qué tipo de reloj nos estamos moviendo.

Para este reloj de 5 horas lo indicamos poniendo a la derecha mod 5 (mod: módulo). Por lo cual la expresión anterior queda: 16 ≡ 1 (mod 5) o bien 16 ≡ 1 (5).

Esta expresión es lo mismo que decir que 16 y 1 son equivalentes en módulo 5. Sin embargo, la forma correcta de referirse a la expresión anterior es "16 es congruente con 1 módulo 5".

Para saber si dos números cualesquiera son congruentes módulo 5 basta con hacer la diferencia[2] y ver si el resultado es múltiplo de 5. Para este caso tendríamos 16 – 1 =15, que es múltiplo de 5.

La aritmética del reloj

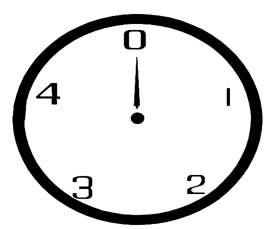


Módulo 3

$$8 \equiv 2 \ \ (3)$$

Módulo 5

$$11 \equiv 1 \ \ (5)$$



Ahora comencemos a formalizar:

Definición: En Z se define la relación congruencia módulo n $\in$ N como:

$$\forall a, b \in Z \ \ a \equiv b \ (n) \Leftrightarrow n / (a - b), \ n \in N$$

Se dice que dos enteros cualesquiera a, b son congruentes módulo n si su diferencia es divisible por n, siendo n un número natural.

Probaremos que es una relación de equivalencia

$$\forall \ a,b \in Z \ : a \equiv b \ (n) \leftrightarrow a - b = n \, .q \ \ ; q \in Z$$

[2] Dividir consiste en realizar restas sucesivas, por eso podemos o bien dividir el número por el módulo y considerar el resto, o bien restarle al número los múltiplos necesarios de 5.

Reflexiva **¿a ≡ a(n)**?

$\forall a \in Z \rightarrow a - a = n.\ 0 \rightarrow 0 \in Z \rightarrow a - a = n.q\ ;\ q \in Z \rightarrow$ **a ≡ a(n)**

Simétrica **a ≡ b (n)** →¿**b ≡ a (n)**?

$\forall a, b \in Z$ **a ≡ b (n)** $\rightarrow a - b = n.q\ ;\ q \in Z \rightarrow (-1)\ a - b = (-1).n.q\ ;\ q \in Z \rightarrow$

$b - a = n(-1.q)\ ;\ q \in Z \rightarrow b - a = n.\ q_1\ ;\ q_1 \in Z \rightarrow$ **b ≡ a (n)**

Transitiva **a ≡ b (n)** ∧ **b ≡ c (n)** → ¿ **a ≡ c (n)?**

$\forall a, b, c \in Z$ **a ≡ b (n)** ∧ **b ≡ c (n)** $\rightarrow a - b = n.q\ ;\ q \in Z \wedge b - c = n.q_1\ ;\ q_1 \in Z \rightarrow a - b + b - c = n.q + n.q_1;\ q \in Z\ ;\ q_1 \in Z \rightarrow a - c = n.(.q + q_1);\ q + q_1 \in Z \rightarrow$

$a - c = n.\ q_2\ ;\ q_2 \in Z \rightarrow$ **a ≡ c (n)**

Al ser una relación de equivalencia buscamos las clases de equivalencia:

$[a] = \{x \in Z / x \equiv a\ (n)\} = \{x \in Z / x - a = n.q;\ q \in Z\} = \{x \in Z / x = n.q + a\ ;\ q \in Z\}$

Analizando la expresión anterior para algunos casos particulares se llega a las siguientes conclusiones:

[0] $= \{x \in Z / x \equiv 0\ (n)\} = \{x \in Z / x - 0 = n.q;\ q \in Z\} = \{x \in Z / x = n.q\ ;\ q \in Z\} =$

= {múltiplos enteros de *n*}

[1] $= \{x \in Z / x \equiv 1\ (n)\} = \{x \in Z / x - 1 = n.q;\ q \in Z\} = \{x \in Z / x = n.q + 1;\ q \in Z\} =$

= {los enteros que al dividir por *n* dan resto 1}

[2] $= \{x \in Z / x \equiv 2\ (n)\} = \{x \in Z / x - 2 = n.q;\ q \in Z\} = \{x \in Z / x = n.q + 2;\ q \in Z\} =$

= {los enteros que al dividir por *n* dan resto 2}

[3] = {x $\in$ Z / x ≡ 3 (n)**}**= {x $\in$ Z / x – 3 = n.q; q $\in$ Z}= {x $\in$ Z / x = n.q + 3; q $\in$ Z}=

= {los enteros que al dividir por *n* dan resto 3}

…

…

[n-1] = {x $\in$Z / x ≡ **n-1**(n)**}**= {x$\in$Z / x – (n-1) = n.q;q $\in$ Z}={x$\in$Z / x = n.q + (n-1);q $\in$ Z}= {los enteros que al dividir por *n* dan resto n-1}

[n] = {x $\in$ Z / x ≡ **n** (n)**}**= {x $\in$ Z / x – n = n.q; q $\in$ Z}= {x $\in$ Z / x = n.q + n; q $\in$ Z }=

= {x $\in$ Z / x = n.(q +1); q $\in$ Z }= {múltiplos enteros de *n*}= [0]

A partir del entero n comienzan a repetirse las clases de equivalencia. Por lo tanto, el conjunto cociente es:

$$\frac{Z}{\equiv n} = Z_n = \{[0],\ [1],\ [2],\ [3], \ldots,\ [n-1]\}$$

Un ejemplo clásico de clasificación de los números enteros es el de las ***clases de restos***. Elegido un cierto número natural como módulo, se ordenan todos los números enteros en tantas filas como dicho módulo.

Los infinitos números enteros que formen cada fila formarían una clase de equivalencia. Para saber rápidamente a qué clase pertenece un cierto elemento se busca el resto de su división entera (no decimal) por el módulo. Si el resto es cero, o sea que el número es múltiplo del módulo, pertenecería a la fila superior, la llamada clase cero. En otro caso, el resto (entre uno y el módulo menos uno) indicaría la fila a la que pertenece. Si el número fuese negativo se actúa igual, pero dividiendo de manera que el cociente sea negativo pero el resto positivo.

Por ejemplo, las clases de restos módulo 3:

[0]=Clase 0 ={$b \in Z$ / su resto al dividir por 3 es 0}={....,-6,-3 ,0,3,6,9,12 ,...}=[3]=…

[1]=Clase 1={$b \in Z$ / su resto al dividir por 3 es 1}={....,-5,-2,1,4,7,10,13 ,...}= [4]=…

[2]=Clase 2 ={$b \in Z$ / su resto al dividir por 3 es 2}={...,-4,-1,2,5,8,11,14, ...}= [5]=…

El número 4571 pertenece a la clase 2 ya que al dividirlo por 3 resulta, 2 de resto.

-5 pertenece a la clase 1 ya que: -5 =3. (-2) + 1.

➢ *Ejercicio resuelto*

En el conjunto A= {15, 22, 34, 45, 62, 54,125} se define la siguiente relación de equivalencia:

$a \equiv b \ (10) \leftrightarrow 10|(a-b)$.

Hallar las clases de equivalencia y el conjunto cociente.

Solución

$[a] = \{x \in A \ / \ x \equiv a \ (10)\} = \{x \in A \ / \ x - a = 10.q;\ q \in Z\} = \{x \in A \ / \ x = 10.q + a\ ;\ q \in Z\}$

Es decir:

[45] = {x $\in$ A / x $\equiv$ **45** (10)**}**= {x $\in$ A / x – 45 = 10.q; q $\in$ Z}= {x $\in$ A / x = 10.q + 45; q $\in$ Z }= {x $\in$ A / x = 10.q + 40 +5 ; q $\in$ Z }= {x $\in$ A / x = 10.q_1 + 5 ; q_1 $\in$ Z }=
{los elementos de A que al dividir por 10 dan resto 5} = {45, 25,125} = **[25]= [125]**

[62] = {x $\in$ A / x $\equiv$ **62** (10)**}**= {x $\in$ A / x – 62 = 10.q; q $\in$ Z}= {x $\in$ A / x = 10.q + 62; q $\in$ Z}= {x $\in$ A / x = 10.q + 60 +2; q $\in$ Z}= {x $\in$ A / x = 10.q_1 + 2 ; q_1 $\in$ Z }=
{los elementos de A que al dividir por 10 dan resto 2} = {22,62} = **[22]**

[54] = {x $\in$ A / x $\equiv$ **54** (10)**}**= {x $\in$ A / x – 54 = 10.q; q $\in$ Z}= {x $\in$ A / x = 10.q +54; q $\in$ Z}= {x $\in$ A / x = 10.q + 50 +4 ; q $\in$ Z }= {x $\in$ A / x = 10.q_1 + 4 ; q_1 $\in$ Z }=
{los elementos de A que al dividir por 10 dan resto 4} = {54,34} = **[54]= [34]**

Conjunto cociente: $\frac{A}{\equiv(10)} = \{[\mathbf{45}],\ [\mathbf{62}],\ [\mathbf{54}]\}$

Clausura de una relación binaria

Imaginemos una relación cualquiera R. Supongamos que estamos interesados en transformar a R en una relación reflexiva, añadiendo, si se necesita, más elementos a la relación, o en otras palabras, extendiéndola.

Por ejemplo, sea R= {(1;1), (2;1), (1;3), (3;2)} definida en el conjunto A= {1, 2, 3}. Para que sea reflexiva, debemos agregarle los elementos (2; 2) y (3; 3).

Esto es, la relación: $S = R \cup \{(2; 2); (3; 3)\}$ es una extensión reflexiva de R, es decir, S es reflexiva.

El ejemplo anterior ilustra lo que queremos hacer: cerrar una relación, añadiendo el mínimo número de elementos, para que ella se transforme en una relación que cumpla con una determinada propiedad. Generalmente se trata que una relación cumpla con las propiedades: reflexiva, simétrica o transitiva.

DEFINICIONES

Dada una relación R sobre un conjunto A, definimos las siguientes relaciones:

▶ Clausura reflexiva: r(R)

r(R) es la mínima relación reflexiva que contiene a R y que se obtiene uniendo R con los pares ordenados cuyos componentes son iguales $\Delta_A = \{(a; a) / a \in A\}$

$$\mathbf{r(R) = R \cup \Delta_A}$$

▶ Clausura simétrica: s(R)

s(R) es la mínima relación simétrica que contiene a R y que se obtiene uniendo R con los pares ordenados invertidos de R.

$$\mathbf{s(R) = R \cup R^{-1}}$$

▶ Clausura transitiva: t(R)

t(R) es la mínima relación transitiva que contiene a R y que se obtiene hallando la relación de conectividad

$$t(R) = R^{\infty} = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

SUGERENCIA ANTES DE AVANZAR:

Mirá el video "Cerradura transitiva-Algoritmo de Warshall" en el sitio de la cátedra http://discretaunlam.net.ar sección Apuntes-Relaciones de equivalencia.

Ejemplo de clausura transitiva

Si A = {a, b, c} y R = {(a; a), (a; b), (a; c), (c; a), (c; b), (b; c)}:

Para que R sea transitiva faltan los pares (b; b), (c; c) y (b; a): Se puede realizar de dos formas distintas usando:

a) $M_R{}^{\infty} = M_R \vee (M_R)^2 \vee (M_R)^3$ o

b) Utilizando el algoritmo de Warshall[3]

(Se hacen hasta 3 uniones en a) o matrices (en Warshall) porque la cantidad de elementos de A es 3)

a) Hallar $M_R{}^{\infty}$ usando: $M_R{}^{\infty} = M_R \vee (M_R)^2 \vee (M_R)^3$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

[3] El algoritmo de Warshall es un ejemplo de algoritmo booleano. A partir de una tabla inicial compuesta de 0 (no hay correspondencia inicial en el grafo) y 1 (hay una correspondencia, llamase "flecha", entre nodos), obtiene una nueva matriz denominada "Matriz de Clausura Transitiva" en la que se muestran todas las posibles uniones entre nodos, directa o indirectamente. Es decir, si de "A" a "B" no hay una "flecha", es posible que si haya de "A" a "C" y luego de "C" a "B". Luego, este resultado se verá volcado en la matriz final.

$$(M_R)^2 = M_R \otimes M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(M_R)^3 = (M_R)^2 \otimes M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M_R}^{\infty} = \mathbf{M_R} \vee (\mathbf{M_R})^2 \vee (\mathbf{M_R})^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Hallar R^{∞} usando el algoritmo de Warshall

$$W_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para obtener W_1

Hay que analizar la columna 1: tiene unos en las posiciones1 y 3; y la fila 1 tiene unos en las posiciones 1, 2,3. Por lo tanto la matriz W_1 tiene que tener unos en la posición 11, 12, 13, 31, 32,33

Luego, queda W_1:

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para obtener W_2

Hay que analizar la columna 2: tiene unos en las posiciones 1 y 3; y la fila 2 tiene uno en la posición 3. Por lo tanto, la matriz W_2 tiene que tener unos en la posición 13, 33. Entonces $W_{2\ \text{queda}}$ igual a W_1

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para obtener W_3

Hay que analizar la columna 3: tiene unos en las posiciones 1, 2 y 3; y la fila 3 tiene unos en las posiciones1,2,3. Por lo tanto la matriz W_3 tiene que tener unos en la posición 11,12,13,21,22,23,31,32, 33.
Por lo que W_3 es igual a:

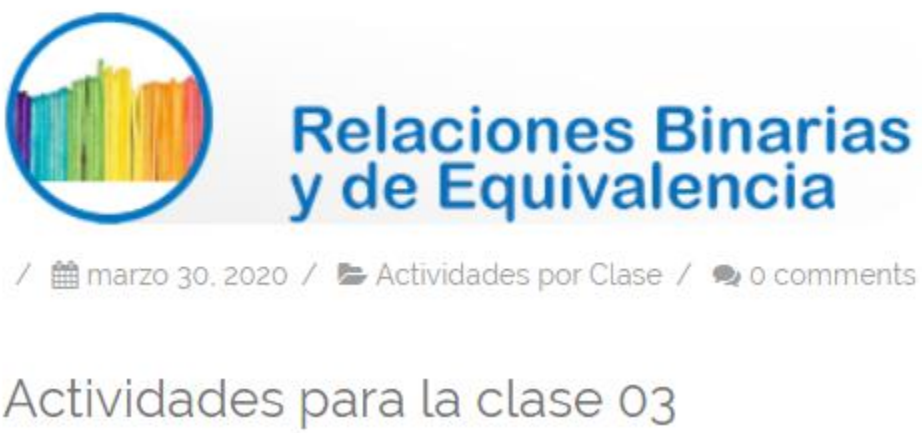
$$\mathbf{W_3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M_R}^{\infty}$$

Para finalizar con esta tercer clase te proponemos que ingreses al sitio de la cátedra " https://discretaunlam.net.ar " para leer y hacer las actividades por clase (AxC) correspondientes al tema "Relaciones de equivalencia" que te proponemos en la plataforma.

Luego comienza a hacer los ejercicios de Relaciones de equivalencia de la guía de ejercicios para el primer parcial y por último resuelve la autoevaluación que figura en el sitio.

Tené en cuenta que todas las actividades que realices forman parte del seguimiento académico que hará tu tutor.

-AxC (actividades por clase)



-Autoevaluaciones.

Relaciones de Equivalencia

*Obligatorio

Dirección de correo electrónico *

Tu dirección de correo electrónico