Matemática Discreta

CLASE N°5

Ing. Marcela Bellani Matemática
UNLAM | FLORENCIO VARELA 1903 .B1754.SAN JUSTO.BUENOS AIRES

En esta clase se desarrollarán los siguientes temas:

- Red /retículo algebraico; propiedades, clasificación. Álgebra de Boole. Propiedades.

Para todas las clases contamos con la ayuda del sitio de la cátedra http://discretaunlam.net.ar donde encontrarás videos, ejercicios, explicaciones, autoevaluaciones de todos los temas de Matemática Discreta.

Retículos

Primera definición de retículo - red

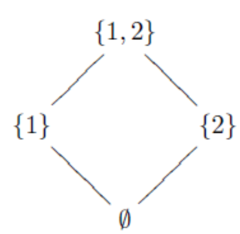
Un retículo es un conjunto ordenado $(A, \underline{\alpha})$ que verifica que para cada par de elementos $a, b \in A$ existen supremo $\{a, b\}$ e ínfimo $\{a, b\}$ en el conjunto A.

Son retículos: $(N,\leq)$, $(N, \mid)$, $(D_n, \mid)$ con $n \in N$, $(P(X), \subseteq)$, $(\{0, 1\}, \leq)$ y $(\{0, 1\}^n, \leq)$ con $n \in N$.

Ejemplo

- ¿Es $(P(A), \subseteq)$ con $A=\{1,2\}$ red ?

Construimos las tablas de ínfimo y supremo a partir del diagrama de Hasse.



ínfimo	∅	{1}	{2}	{1,2}
∅	∅	∅	∅	∅
{1}	∅	{1}	∅	{1}
{2}	∅	∅	{2}	{2}
{1,2}	∅	{1}	{2}	{1,2}

supremo	∅	{1}	{2}	{1,2}
∅	∅	{1}	{2}	{1,2}
{1}	{1}	{1}	{1,2}	{1,2}
{2}	{2}	{1,2}	{2}	{1,2}
{1,2}	{1,2}	{1,2}	{1,2}	{1,2}

Todo subconjunto de 2 elementos tiene ínfimo y supremo tal como lo muestran las tablas de ínfimo y supremo por lo tanto (P(A), $\subseteq$) es red.

- ¿Es ({0, 1}, $\leq$) con A= {1,2} red?

Construimos las tablas de ínfimo y supremo a partir del diagrama de Hasse.

ínfimo	0	1
0	0	0
1	0	1

supremo	0	1
0	0	1
1	1	1

Todo subconjunto de 2 elementos tiene ínfimo y supremo tal como lo muestran las tablas de ínfimo y supremo por lo tanto ({0, 1}, $\leq$) es red.

Observación

- Al supremo entre a y b se lo denota: sup {a, b} = $a \vee b$
- Al ínfimo entre a y b se lo denota: ínf {a, b} = $a \wedge b$

En vez de construir las tablas de ínfimo y supremo para probar que un conjunto ordenado
(A, $\underline{\alpha}$) es red se puede utilizar la siguiente propiedad:

Propiedad

$a \,\underline{\alpha}\, b \leftrightarrow a \vee b = b$ y $a \wedge b = a$

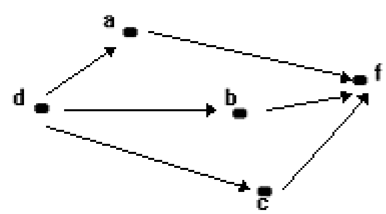
Es decir siempre existen el supremo, $a \vee b$, y el ínfimo, $a \wedge b$, entre elementos que están relacionados.

Por lo tanto, para saber si es red alcanza con fijarse solamente si existe el supremo y el ínfimo entre los elementos que son incomparables.

Ejemplo

1. Determinar si el conjunto con la relación dada es retículo:

1.1 A = {a, b, c, d, f}



Solución

Los elementos incomparables son a, b y c. Entonces buscamos el ínfimo y supremo entre ellos para saber si (A, $\underline{\alpha}$) es red.

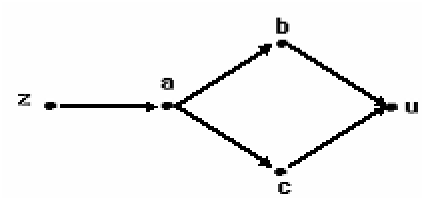
Inf {a, b}= a $\wedge$ b = d y sup {a, b} = a $\vee$ b = f

Inf {c, b}= c $\wedge$ b = d y sup {c, b} = c $\vee$ b = f

Inf {a, c}= a $\wedge$ c = d y sup {a, c} = a $\vee$ c = f

Como todos tienen ínfimo y supremo (A, $\underline{\alpha}$) es red.

1.2 A = {a, b, c, z, u }



Solución

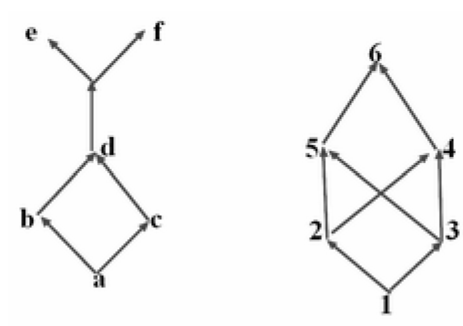
Los elementos incomparables son b y c. Entonces buscamos el ínfimo y supremo entre ellos para saber si (A, $\underline{\alpha}$) es red.

Inf {c, b}= c $\wedge$ b = a y sup {c, b} = c $\vee$ b = u

Como todos tienen ínfimo y supremo (A, $\underline{\alpha}$) es red.

2. Los siguientes diagramas de Hasse no representan retículos. ¿Por qué?

2.1. A= {a, b, c, d, e, f, g} 2.2. B= {1, 2, 3, 4, 5,6}



2.1. Solución

Los elementos incomparables son b, c, e y f .Entonces buscamos el ínfimo y supremo entre ellos para saber si (A, $\underline{\alpha}$) es red.

Inf {b, c}= b $\wedge$ c = a y sup {b, c} = b $\vee$ c = d

Inf {e, f}= e $\wedge$ f = g y sup {e, f} = e $\vee$ f no existe

Como no existe el supremo entre e y f entonces (A, $\underline{\alpha}$) no es red.

2.2. Solución

Los elementos incomparables son 2, 3,4 y 5.Entonces buscamos el ínfimo y supremo entre ellos para saber si (B, $\underline{\alpha}$) es red.

Inf {2, 3}= 2 $\wedge$ 3 = 1 y sup {2, 3} = 2 $\vee$ 3 = no existe ya que el conjunto de cotas superiores = {4, 5,6} y no tiene supremo.

Como no existe el supremo entre 2 y 3 entonces (A, $\underline{\alpha}$) no es red.

Segunda definición de retículo – red como retículo algebraico

Un retículo algebraico es una terna (A, $\vee$, $\wedge$) donde A es un conjunto no vacío y $\vee$ y $\wedge$ son dos operaciones binarias definidas sobre A y que cumplen las siguientes propiedades:

Idempotente: a $\wedge$ a = a; a $\vee$ a = a

Asociativa: (a $\wedge$ b) $\wedge$ c = a $\wedge$ (b $\wedge$ c); (a $\vee$ b) $\vee$ c = a $\vee$ (b $\vee$ c)

Conmutativa: a $\wedge$ b = b $\wedge$a; a $\vee$ b = b $\vee$ a

Absorción: a $\wedge$ (b $\vee$ a) =a; a $\vee$ (b $\wedge$ a) = a

Equivalencia entre las dos definiciones

Las dos definiciones son equivalentes en el sentido de que si un conjunto A es retículo con una definición lo es también con la otra siempre que la relación de orden y las operaciones binarias estén relacionadas de la siguiente manera:

a $\underline{\alpha}$ b $\leftrightarrow$ a $\vee$ b = b y a $\wedge$ b = a

Es decir, **(A, $\underline{\alpha}$) ≡ (A, sup {a, b}, inf{a,b})**

Ejemplos

(N, |) ≡ (N, mcm, mcd)

$(P(X), \subseteq) \equiv (P(X), \cup, \cap)$

➢ *Ejercicio resuelto*

Para cada uno de los siguientes conjuntos ordenados, definir, si es posible, dos operaciones binarias de modo de obtener un retículo algebraico

1.1 $(P(A), \subseteq)$,A={1,2}

1.2 $(D_{30}, \mid)$

1.3 $(\{0,1\}, \underline{\alpha}_1)$ siendo a $\underline{\alpha}_1$ b ⇔

.	0	1
0	0	0
1	0	1

a.b = a

Soluciones:

1.1. $(P(A), \subseteq) \equiv (P(A), \cup, \cap)$

1.2. $(D_{30}, \mid) \equiv (D_{30}, \text{mcm}, \text{mcd})$

1.3.

$(\{0,1\}, \underline{\alpha}_1) \equiv (\{0,1\},$

+	0	1
0	0	1
1	1	1

+, .)

Subretículo:

Si $(A,\underline{\alpha})$ es un retículo y $B \subseteq A$, $(B,\underline{\alpha})$ es un subretículo de $(A,\underline{\alpha})$ sí y solo sí:

$$\forall a, \forall b \in B : \sup_A\{a,b\} \in B \quad e \quad \inf_A\{a,b\} \in B$$

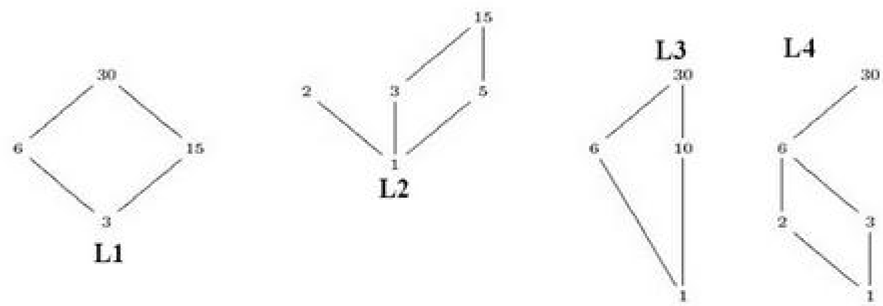
Ejemplos:

1- (Dn,|) es un subretículo de (N,|), $\forall n \in N$, ya que $\forall a, \forall b \in D_n$:

$\sup_N \{a,b\} = mcm(a,b)$ y como el $mcm(a,b) \in D_n$ es: $\sup_{D_n} \{a,b\} = mcm(a,b)$.

Análogamente sucede con el ínfimo.

2- Determinar si los siguientes son subretículos o no del retículo (D30,|).



L1 y L4 son subretículos de D (30)

L2 y L3 no subretículos de D (30)

L2 no es subretículo porque el supremo de 2 y 3 es 6, que no pertenece a L2.

L3 no es subretículo porque el ínfimo de 6 y 10 es 2, que no pertenece a L3.

Pero L3, con el orden que hereda de D (30) es un retículo, pero no es subretículo de L3.

Tipos de retículos

Definición: Se dice que el retículo $(A, \underline{\alpha})$ es ***acotado*** si posee máximo y mínimo, que se designan por 1 y 0, respectivamente.

Definición: Sea $(A, \underline{\alpha})$ un retículo acotado. Dado a $\in$ A, se dice que $\bar{a}$ A es ***complementario*** de a si:

$a \vee \overline{a} = 1$ y $a \wedge \overline{a} = 0$.

Un retículo se dice complementado si todos sus elementos poseen complemento.

La definición de complemento también se puede pensar en función del ínfimo y supremo de un subconjunto de dos elementos: un elemento cualquiera a y su complemento.

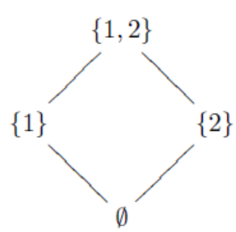
Reescribiendo la definición nos queda:

$\overline{a}$ **es el complemento de a, si cumple: $a \vee \overline{a} = 1$** $\rightarrow$ sup{$\overline{a}$,a}= último elemento del retículo y $a \wedge \overline{a} = 0$ $\rightarrow$ inf{$\overline{a}$,a}= primer elemento del retículo.

<u>*Ejemplos*</u>

Hallar los complementos de:

<u>1</u>. (P(A), $\subseteq$) con A={1,2}



De acuerdo al diagrama de Hasse:

sup {a, $\overline{a}$}= {1,2}   y   inf {$\overline{a}$, a}= $\varnothing$

ó bien: $X \cup \mathbf{X} = \{1,2\}$ y $X \cap \mathbf{X} = \varnothing$

Por lo tanto:

$\varnothing \cup \overline{\varnothing} = \{1, 2\}$ y $\varnothing \cap \overline{\varnothing} = \varnothing \rightarrow \overline{\varnothing} = \{1,2\}$

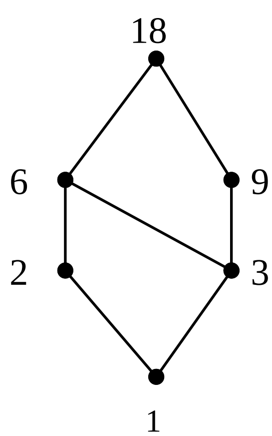
$\{1\} \cup \overline{\{1\}} = \{1,2\}$ y $\{1\} \cap \overline{\{1\}} = \varnothing \rightarrow \overline{\{1\}} = \{2\}$

$\{2\} \cup \overline{\{2\}} = \{1,2\}$ y $\{2\} \cap \overline{\{2\}} = \varnothing \rightarrow = \overline{\{2\}}\ \{1\}$

$\{1,2\} \cup \overline{\{1,2\}} = \{1,2\}$ y $\{1,2\} \cap \overline{\{1,2\}} = \varnothing \rightarrow \overline{\{1,2\}} = \varnothing$

Como todos los elementos de P(A) tienen complemento **la red es complementada**.

<u>2.</u> (D18 , |)



De acuerdo al diagrama de Hasse:

sup $\{a, \bar{a}\}$= 18 y inf $\{a, \bar{a}\}$= 1 o bien **a** $\vee\ \bar{a}$ = 18 y **a** $\wedge\ \bar{a}$ = 1 o bien

mcm$\{a, \bar{a}\}$= 18 y mcd$\{a, \bar{a}\}$= 1

Por lo tanto:

Para 1

sup$\{1, \bar{1}\}$ = 18 → $\bar{1} \in$ {18} y inf$\{1, \bar{1}\}$ = 1 → $\bar{1} \in$ {1,2,3,6,9,18}, ahora

buscamos la intersección entre esos dos conjuntos: {18}$\cap$

{1,2,3,6,9,18} = {18} → $\bar{1}$ = 18

Para 2

sup$\{2, \bar{2}\} = 18$ → $\bar{2} \in$ {9,18} y inf$\{2, \bar{2}\} = 1$ → $\bar{2} \in$ {1,3,9} ahora

buscamos la intersección entre esos dos conjuntos: {9,18} $\cap$ {1,3,9} =

{9} → $\bar{2}$ = 9

Para 3

sup$\{3, \bar{3}\}$ = 18 → $\bar{3} \in$ {18} y inf$\{3, \bar{3}\}$ = 1 → $\bar{3} \in$ {1,2} ahora buscamos la

intersección entre esos dos conjuntos: {18} $\cap$ {1,2} = $\varnothing$ → no existe el

complemento de 3.

Para 9

sup$\{9, \bar{9}\}$ = 18 → $\bar{9} \in$ {2,6,18} y inf$\{9, \bar{9}\}$ = 1 → $\bar{9} \in$ {1,2} ahora

buscamos la intersección entre esos dos conjuntos: {2,6,18} $\cap$ {1,2} =

{2} → $\bar{9}$ = 2

Para 6

sup$\{6, \bar{6}\}$ = 18 → $\bar{6} \in$ {9,18} y inf$\{6, \bar{6}\}$ = 1 → $\bar{6} \in$ {1,18} ahora

buscamos la intersección

entre esos dos conjuntos: {9,18} $\cap$ {1,18} = $\varnothing$ → no existe el

complemento de 6.

Para 18

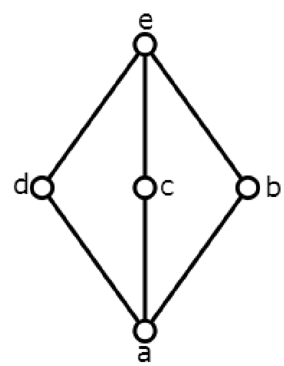
sup$\left\{18,\ \overline{18}\right\}$ = 18 $\rightarrow \overline{18}$ $\in$\{1,2,3,6,9,18\} y inf$\left\{18,\ \overline{18}\right\}$ = 1 $\rightarrow$ $\overline{18}$

$\in$\{1,18\}ahora buscamos la intersección entre esos dos conjuntos:

\{1,2,3,6,8,18\}$\cap$ \{1,18\} = \{18\} $\rightarrow$ $\overline{18}$ = 1

Conclusión: como hay elementos que no tienen complemento la red es no complementada.

3. Para la red (A= \{a, b, c, d, e\}, $\underline{\alpha}$); sus complementos son:



De acuerdo al diagrama de Hasse:

sup $\left\{x,\ \overline{x}\right\}$ = e y inf$\left\{x,\ \overline{x}\right\}$ = a

Para a

sup \{a, $\overline{a}$ \}= e $\rightarrow$ a $\in$\{e\} y inf\{a, $\overline{a}$ \}= a $\rightarrow$ $\overline{a}$ $\in$ \{a,b,c,d,e\} ahora buscamos la

intersección entre esos dos conjuntos: \{e\} $\cap$ \{a,b,c,d,e\} = \{e\}$\rightarrow$ $\overline{a}$ = e .

Para b

sup$\left\{b,\ \overline{b}\right\}$ = e $\rightarrow$ b $\in$\{d,c,e\} y inf$\left\{b,\ \overline{b}\right\}$ = a $\rightarrow$ $\overline{b}$ $\in$ \{a,c,d\} ahora buscamos la intersección entre esos dos conjuntos: {c,d,e} $\cap$ {a,c,d} = {c,d}$\rightarrow \bar{b}$ = {c,d}.

Para c

sup$\left\{c,\ \bar{c}\right\}$= e $\rightarrow$ c $\in${b,d,e} y inf$\left\{c,\ \bar{c}\right\}$= a $\rightarrow$ $\bar{c} \in$ {a,b,d} ahora buscamos la

intersección entre esos dos conjuntos: {b,d,e} $\cap$ {a,b,d} = {b,d}$\rightarrow$ $\bar{c}$ = {b,d}.

Para d

sup$\left\{d,\ \bar{d}\right\}$= e $\rightarrow$ $\bar{d}$ $\in${b,c,e} y inf$\left\{d,\ \bar{d}\right\}$= a $\rightarrow$ $\bar{d} \in$ {a,b,c} ahora buscamos la

intersección entre esos dos conjuntos: {b,c,e} $\cap$ {a,b,c} = {b,c}$\rightarrow$ $\bar{d}$ = {b,c}.

Para e

sup$\left\{e,\ \bar{e}\right\}$= e $\rightarrow$ $\bar{e}$ $\in${a,b,c,d,e} y inf$\left\{e,\ \bar{e}\right\}$= a $\rightarrow$ $\bar{e}$ $\in$ {a} ahora buscamos la

intersección entre esos dos conjuntos: {a,b,c,d,e} $\cap$ {a} = {a}$\rightarrow$ $\bar{e}$ = a .

Por lo tanto, como cada elemento del retículo tiene complemento entonces el retículo es complementado.

Observación

- En una red, cada elemento puede tener un único complemento, más de uno o ninguno.

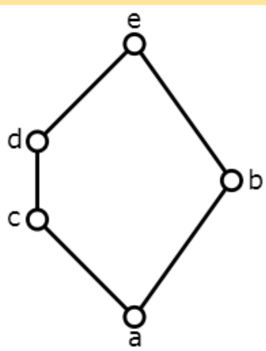
Definición: Un retículo $(A, \vee, \wedge)$ se dice ***distributivo*** si para cualesquiera a, b, c $\in$ A se cumple que:

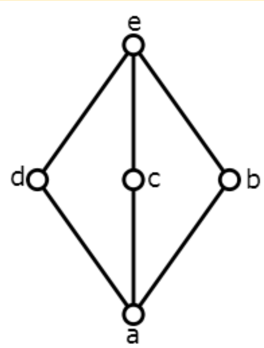
- $\mathbf{a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)}$
- $\mathbf{a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)}$

El siguiente teorema resulta muy útil cuando se desea determinar si un reticulado es distributivo. Sólo daremos el enunciado y remitimos al libro de Davey and Priestley, Introduction to lattices and order[1], Teorema 6.10 para quien desee conocer una demostración del mismo.

Teorema

Un retículo es distributivo si y sólo si no contiene subreticulos isomorfos a los siguientes:





Retículo 1 ***Retículo 2***

Probemos que no son retículos distributivos.

Retículo 1

¿$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$?

$x \vee (y \wedge z) = c \vee (b \wedge d) = c \vee a = c$ (I).

$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = (c \vee d) \wedge (c \vee b) = d \wedge e = d$ (II).

***Por lo tanto* (I) ≠ (II)**

[1] *B. A. Davey, H. A. Priestley*, **Introduction to Lattices and Order**, Cambridge University Press, 2002

Retículo 2 ¿$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$?

$x \vee (y \wedge z) = d \vee (b \wedge c) = d \vee a = d$ (I).

$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = (d \vee b) \wedge (d \vee c) = e \wedge e = e$ (II).

Por lo tanto (I) ≠ (II)

<u>Propiedad</u>

En toda red distributiva, el complemento, si existe, es único.

Esto significa que, si existe un elemento con más de un complemento, la Red no será distributiva.

Para los ejemplos anteriores se tiene:

<u>1.</u> $(P(A), \subseteq)$ con A={1,2}es una red distributiva y complementada

<u>2.</u> (D18 , |) es una red distributiva no complementada

<u>3.</u>(A= {a, b, c, d, e}, $\underline{\alpha}$) es una red complementada y no distributivaEstudio de las propiedades de una relación binaria sobre un conjunto finito.

Álgebras de Boole

La herramienta fundamental para el *análisis* y *diseño* de circuitos digitales es el Álgebra Booleana. Esta álgebra es un conjunto de reglas matemáticas pero que tienen la virtud de corresponder al comportamiento de circuitos basados en *dispositivos de conmutación* (interruptores, relevadores, transistores, etc).

Se puede definir un Álgebra de Boole como un retículo distributivo y complementado con las mismas propiedades que P(A) y $\{0, 1\}^n$.

En el álgebra de Boole $(A, \vee, \wedge)$ se cumplen, además, las siguientes propiedades para cualesquiera $a, b \in A$:

Involutiva: $\overline{\overline{a}} = a$

Leyes de Morgan:

i) $\overline{(a \wedge b)} = \overline{a} \vee \overline{b}$

ii) $\overline{(a \vee b)} = \overline{a} \wedge \overline{b}$

Con frecuencia, en las álgebras de Boole, las operaciones $\vee$ y $\wedge$ se representan también por + y · respectivamente.

Átomo

Sea (A, $\underline{\alpha}$) retículo con mínimo *m*, un elemento $x \in$ A es un átomo si es "inmediatamente posterior" al mínimo *m*.

Los elementos que son "inmediatamente anteriores" al máximo se llaman **super átomos**

Ejemplos

- (P(A), $\cup$, $\cap$) es un Álgebra de Boole ya que :

- **Operaciones binarias.** La operación binaria $\vee$ es la *unión* de conjuntos ($\cup$) y la operación binaria $\wedge$ es la *intersección* ($\cap$) de conjuntos.

$$\cup : P(A) \times P(A) \longrightarrow P(A)$$
$$\cap : P(A) \times P(A) \longrightarrow P(A)$$

- **Asociatividad**. La unión y la intersección de conjuntos son asociativas, ya que para cualesquiera tres conjuntos X, Y, Z:

$$\forall X \subseteq A, \forall Y \subseteq A, \forall Z \subseteq A: (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$$

$$\forall X \subseteq A, \forall Y \subseteq A, \forall Z \subseteq A: (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$$

- **Conmutatividad.** La unión y la intersección son conmutativas, ya que para cualquier par de conjuntos X, Y:

$$\forall X \subseteq A, \forall Y \subseteq A: X \cup Y = Y \cup X$$
$$\forall X \subseteq A, \forall Y \subseteq A: X \cap Y = Y \cap X$$

- **Existencia de neutros.** El neutro de la unión es el conjunto vacío $\varnothing$, mientras que el neutro de la intersección es el conjunto A, ya que para cualquier conjunto arbitrario X,

$$X \cup \varnothing = X \quad \text{y} \quad X \cap A = X$$

- **Distributividad.** La unión de conjuntos es distributiva sobre la intersección, y viceversa, la intersección es distributiva sobre la unión, ya que para cualesquiera tres conjuntos X, Y, Z:

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \quad \text{y}$$
$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Y)$$

- **Existencia de complementos**. El conjunto complemento $\overline{X}$ cumple con las condiciones deseadas:

$$X \cup \overline{X} = A \quad \text{y} \quad X \cap \overline{X} = \varnothing$$

- **(D_8, mcm, mcd)** no es un Álgebra de Boole ya que si bien cumple con :

  - **Operaciones binarias**.

$$mcm: D_8 \times D_8 \longrightarrow D_8$$
$$mcd: D_8 \times D_8 \longrightarrow D_8$$

- **Asociatividad**

  $\forall a \in D_8$, $\forall b \in D_8$, $\forall c \in D_8$: mcm{ mcm{a, b},c} = mcm{a, mcm{b, c}}

  $\forall a \in D_8$, $\forall b \in D_8$, $\forall c \in D_8$: mcd{ mcd{a, b},c} = mcd{a, mcd{b, c}}

- **Conmutatividad**

  $\forall a \in D_8$, $\forall b \in D_8$: mcm{a, b} = mcm{b, a}

  $\forall a \in D_8$, $\forall b \in D_8$: mcd{a, b} = mcd{b, a}

- **Existencia de neutros**. El neutro del mcm {a, b} es 1 y el neutro del mcd {a, b} es 8

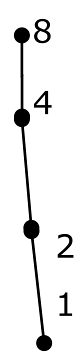
- **Distributividad.** El mcm {a, b} distribuye respecto al mcd {a, b}, y viceversa, el mcd {a, b} es distributivo sobre el mcm {a, b}, ya que para cualesquiera tres elementos a, b, c:

  mcm {a, mcd {b, c}} =mcd {mcm {a, b},mcm{a, c}} y

  mcd{a, mcm{b. c}}=mcm{mcd{a, b},mcd{a, c}}

No tiene complemento: ya que el 2 y 4 no tienen complemento; $\bar{1} = \bar{8}$

Diagrama de Hasse



➢ ***Ejercicios* resueltos**

<u>1.</u> Sea (D_{182}, mcm, mcd) red:

1.1. Indicar los elementos neutros correspondientes a cada operación,

1.2. El complemento para cada elemento,

1.3. Los átomos

1.4. ¿Es un Álgebra de Boole?

<u>Solución</u>

<u>1.1.</u>

Elemento neutro del mcm= 1

Elemento neutro del mcd = 182

<u>1.2.</u>

$\overline{1} = \overline{182}$; $\overline{2} = \overline{91}$; $\overline{7} = \overline{26}$; $\overline{13} = \overline{14}$

$\overline{182} = 1$; $\overline{91} = 2$; $\overline{26} = \overline{7}$; $\overline{14} = 13$

<u>1.3.</u>

Átomos = {2, 7,13}

<u>1.4.</u>

$182 = 2^{1}.7^{1}.13^{1}$

Como todos los exponentes de los factores primos en los que se descompone 182 valen uno

(D_{182}, mcm, mcd) es un Álgebra de Boole.

2. Dado el conjunto A = {a, b, c, d, e} completar la tabla de $\vee$: $A^2 \to A$ y definir la operación $\wedge$: $A^2 \to A$ para que (A, $\vee$, $\wedge$) sea una red, indicar justificando adecuadamente si es álgebra de Boole.

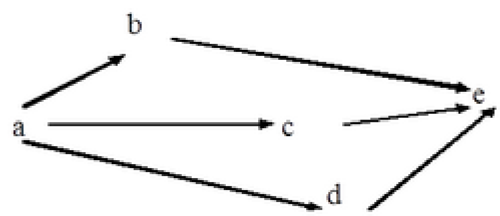
$\vee$	a	b	c	d	e
a		b	c	d	e
b			e	e	e
c				e	e
d					e
e					

Solución

$\vee$	a	b	c	d	e
a	**a**	b	c	d	e
b	**b**	**b**	e	e	e
c	**c**	**e**	**c**	e	e
d	**d**	**e**	**e**	**d**	e
e	**e**	**e**	**e**	**e**	**e**

Se completa teniendo en cuenta que $\vee$ cumple con idempotencia y que es conmutativo por lo tanto la tabla debe ser simétrica respecto a la diagonal principal. Con la tabla se construye el diagrama de Hasse

Primer elemento para el $\vee$ (supremo) es el neutro **a** y el último elemento es el absorbente **e**



Entonces, se construye la tabla del $\wedge$, guiándose por el diagrama:

$\wedge$	a	b	c	a	e
a	**a**	a	a	a	a
b	**a**	**b**	a	a	b
c	**a**	**a**	**c**	a	c
d	**a**	**a**	**a**	**d**	d
e	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**

Para saber si es álgebra de Boole buscamos los complementos.

$$\mathrm{Inf}\left\{a,\bar{a}\right\} = a \quad \wedge \ \mathrm{Sup}\left\{a,\bar{a}\right\} = e \rightarrow \bar{a} = e \quad \wedge \quad \bar{e} = a$$

$$\mathrm{Inf}\left\{b,\bar{b}\right\} = a \quad \wedge \ \mathrm{Sup}\left\{b,\bar{b}\right\} = e \rightarrow \bar{b} = \left\{c,d\right\} \quad \wedge \quad c = \left\{b,d\right\} \quad \wedge \quad d = \left\{b,c\right\}$$

Por lo tanto, la red es *complementada*, cada elemento tiene complemento, pero como el complemento no es único la red *no es distributiva* entonces **no es álgebra de Boole.**

Homomorfismo / morfismo entre Álgebras de Boole

Los morfismos son funciones que "conservan" la estructura. Al ser funciones se clasifican de acuerdo a las propiedades que cumpla la función recibiendo distintos nombres.

- ✓ Si la función es sobreyectiva se llama **epimorfismo.**
- ✓ Si la función es inyectiva se llama **monomorfismo**
- ✓ Si la función es biyectiva (inyectiva y sobreyectiva) se llama **isomorfismo**; dos objetos isomorfos son totalmente indistinguibles por lo que a su estructura se refiere.
- ✓ Si la función es de un conjunto a sí mismo se llama **endomorfismo**; si es también un isomorfismo se llama **automorfismo.**

Definición de morfismo

Sean (A, $\vee$, $\wedge$) y (B, $\vee_1$, $\wedge_1$) dos Álgebras de Boole.

f: A $\rightarrow$ B se dice homomorfismo si verifica las siguientes condiciones:

$\forall a \in A$, $\forall b \in B$ $f(a \vee b) = f(a) \vee_1 f(b)$

$\forall a \in A$, $\forall b \in B$ $f(a \wedge b) = f(a) \wedge_1 f(b)$

Propiedades que cumple por ser morfismo:

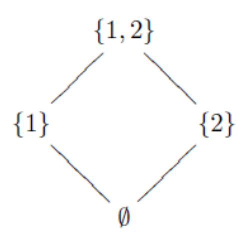
1. $\forall a \in A \quad f(\overline{a}) = \overline{f(a)}$

2. $f(0_A) = 0_B$

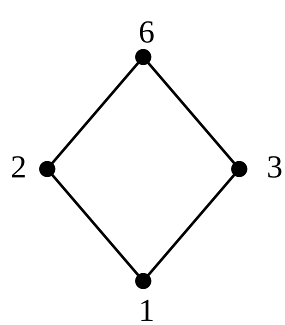
3. $f(1_A) = 1_B$

Ejemplo

Establecer un isomorfismo entre (P(A), $\cup$, $\cap$) con A={1,2} y (D$_6$,mcm,mcd)



(P(A), $\cup$, $\cap$)



(D$_6$, mcm, mcd)

Definimos una función: P(A) $\rightarrow$ D$_6$ / f ($\varnothing$) = 1; f ({1}) = 2; f ({2}) = 3; f ({1,2}) = 6

Verifiquemos que se trata de un morfismo:

1. $\forall a \in A \quad f(\overline{a}) = \overline{f(a)}$

Complementos

x	$\overline{x}$
$\varnothing$	{1,2}
{1}	{2}
{2}	{1}
{1,2}	$\varnothing$

x	$\overline{x}$
1	6
2	3
3	2
6	1

$$f(\overline{\varnothing}) = f(\{1,2\}) = 6 \quad \text{y} \quad \overline{f(\varnothing)} = \overline{1} = 6 \rightarrow f(\overline{\varnothing}) = \overline{f(\varnothing)}$$

$$f\left(\overline{\{1\}}\right) = f(\{2\}) = 3 \quad \text{y} \quad \overline{f(\{1\})} = \overline{2} = 3 \rightarrow f\left(\overline{\{1\}}\right) = \overline{f(\{1\})}$$

$$f\left(\overline{\{2\}}\right) = f(\{1\}) = 2 \quad \text{y} \quad \overline{f(\{2\})} = \overline{3} = 2 \rightarrow f\left(\overline{\{2\}}\right) = \overline{f(\{2\})}$$

$$f\left(\overline{\{1,2\}}\right) = f(\varnothing) = 1 \quad \text{y} \quad \overline{f(\{1,2\})} = \overline{6} = 1 \rightarrow f\left(\overline{\{1,2\}}\right) = \overline{f(\{1,2\})}$$

2. $\forall a \in A\ ,\ \forall b \in B \quad f(a \vee b) = f(a) \vee_1 f(b)$

$f(\varnothing \cup \{1\}) = f(\{1\}) = 2$ y $\text{mcm}\{f(\varnothing); f(\{1\})\} = \text{mcm}\{1,2\} = 2 \rightarrow$
$f(\varnothing \cup \{1\}) = \text{mcm}\{f(\varnothing)\ ;\ f(\{1\})\}$

$f(\varnothing \cup \{2\}) = f(\{2\}) = 3$ y $\text{mcm}\{f(\varnothing); f(\{2\})\} = \text{mcm}\{1,3\} = 3 \rightarrow$
$f(\varnothing \cup \{2\}) = \text{mcm}\{f(\varnothing)\ ;\ f(\{2\})\}$

$f(\varnothing \cup \{1,2\}) = f(\{1,2\}) = 6$ y $\text{mcm}\{f(\varnothing); f(\{1,2\})\} = \text{mcm}\{1,6\} = 6$ $\rightarrow$

$$f(\varnothing \cup \{1,2\}) = \text{mcm}\{f(\varnothing) \; ; \; f(\{1,2\})\}$$

$f(\{1\} \cup \{2\}) = f(\{1,2\}) = 6$ y $\text{mcm}\{f(\{1\}); f(\{2\})\} = \text{mcm}\{2,3\} = 2.3 = 6$ $\rightarrow$

$$f(\{1\} \cup \{2\}) = \text{mcm}\{f(\{1\}) \; ; \; f(\{2\})\}$$

3. $\forall a \in A \;,\; \forall b \in B \;\; f(a \wedge b) = f(a) \wedge_1 f(b)$

Se puede demostrar de la misma manera que en el punto anterior siendo:

$$\wedge = \cap \;\; \text{y} \;\; \wedge_1 = \text{mcd}\,\{a, b\}$$

Por lo tanto, f es un morfismo. Como la función es inyectiva y sobreyectiva se trata de un isomorfismo.

Isomorfismos entre álgebras de Boole

En matemática, la noción de isomorfismo expresa la idea de que dos estructuras son indistinguibles cuando nos concentramos en ciertos aspectos relevantes, ignorando otros aspectos particulares.

- En particular, dos álgebras de Boole son isomorfas si existe una biyección entre ellas que conserva la ordenación.
- El conjunto de partes de un conjunto X es siempre un álgebra de Boole.

El siguiente resultado da una caracterización de las álgebras de Boole que son isomorfas al álgebra de Boole del conjunto de partes de un conjunto:

Teorema de representación

Sea B un álgebra de Boole finita con más de un elemento. Entonces B es un álgebra de Boole isomorfa al álgebra de Boole del conjunto de partes P (X), donde X es el conjunto de átomos de B.

Teorema de Stone

Si A es un álgebra de Boole finita entonces existe un conjunto finito X tal que A y P(X) son isomorfas.

Teorema 1

El Cardinal de un álgebra de Boole finita A, es $|\mathbf{A}| = \mathbf{2^n}$ para algún n $\in$ N, siendo n el número de átomos de A.
Cualesquiera dos Álgebras de Boole, con la misma cardinalidad, son isomorfas.

Ejemplo

Dadas las Álgebras de Boole D_{30} y D_{195}:

a) Definir un isomorfismo entre ellas.
b) Verificar el isomorfismo definido
c) ¿Cuántos isomorfismos existen entre esas dos Álgebras de Boole?

Solución:

a) D_{30}= {1,2,3,5,6,10,15,30}

D_{195}= {1,3,5,13,15,39,65,195}

Los átomos de dichas Álgebras de Boole, son para D_{30}= {2,3,5} y para D_{195}= {3,5,13}

Por el Teorema de Stone, uno de los isomorfismos queda definido de la siguiente manera:

f: $D_{30} \rightarrow D_{70}$/

f (2) =3

f (3) =5

f (5) =13

b) Ahora, se verifica el isomorfismo construido *f*: $D_{30} \rightarrow D_{195}$:

f (1) =1

f (2) =3

f (3) =5

f (5) =13

f (6) =15

f (10) =39

f (15) =45

f (30) =195

También probamos:

a) $\forall a \in A$, $\forall b \in B$ $f(a \vee b) = f(a) \vee_1 f(b)$

b) $\forall a \in A$, $\forall b \in B$ $f(a \wedge b) = f(a) \wedge_1 f(b)$

Lo haremos con dos elementos solamente, quedando el resto como ejercicio:

a) $f(6 \vee 10) = f(mcm(6,10))=f(30)=195$

$f(6) \vee f(10) = mcm(f(6), f(10))=mcm(15,39)=195$

por lo tanto: $f(6 \vee 10)=f(6) \vee f(10)$

b) $f(6 \wedge 10) = f(mcd(6,10))=f(2)=3$

$f(6) \wedge f(10) = mcd(f(6), f(10))=mcd(15,39)=3$

por lo tanto: $f(6 \wedge 10)=f(6) \wedge f(10)$

c) El isomorfismo construido en el punto anterior, resultó de las asignaciones que se hizo entre átomos.

Las otras que se podrían haber tomados son:

f (2) =13

f (3) =5

f (5) =3

f (2) =3

f (3) =13

f (5) =5

f (2) =13

f (3) =3

f (5) =5

f (2) =5

f (3) =13

f (5) =2

f(2)=5

f(3)=3

f(5)=13

Es decir, que tenemos las permutaciones de los 3 átomos:

P3=3! =3.2.21=6

Generalizando:

Sea A, un álgebra de Boole finita, donde T_A es el conjunto de sus átomos, el número de isomorfismos que se pueden definir está dado por:

$P(T_A) = T_A!$

- ***Ejercicio resuelto***

Sea el Álgebra de Boole (D2310,|) y sea TB=$\{\mu,\pi,\rho,\omega,\psi\}$el conjuntos de átomos del álgebra de Boole $(B,\subseteq)$

Si se Define un isomorfismo *f*: (D2310,|) → $(B,\underline{\alpha})$, tal que

$f(2)=\{\mu\}$ $f(3)=\{\pi\}$ $f(5)=\{\rho\}$ $f(7)=\{\omega\}$ $f(11)=\{\psi\}$

1. ¿Cuáles serán las imágenes de 35, 110, 210, 330, en el isomorfismo definido?
2. Dar el número de isomorfismos que pueden definirse entre ambas Álgebras de Boole.

<u>*Solución*</u>

1. Para buscar las imagines pedidas se procede así:

- $f(35)$

35 es el mcm {5,7}, es decir, es el supremo entre esos elementos. Además $f(5)=\{\rho\}, f(7)=\{\omega\}$, entonces por la asignación acordada y la definición de isomorfismo, se debe buscar el supremo de las imágenes de 5 y 7:

Sup [$\{\rho\}$, $\{\omega\}$] $=\{\rho,\omega\}$

Luego: $f(35)=\{\rho,\omega\}$

Con el mismo procedimiento:

$$f(110)=\{\mu,\rho,\psi\}$$
$$f(210)=\{\mu,\pi,\rho,\omega\}$$
$$f(330)=\{\mu,\pi,\rho,\psi\}$$

2. P5= 5!

Para finalizar con esta parte te proponemos que ingreses al sitio de la cátedra " https://discretaunlam.net.ar " para leer y hacer las actividades por clase (AxC) correspondientes al tema "Red-Álgebra de Boole" que te proponemos en la plataforma.

Luego comienza a hacer los ejercicios de Red-Álgebra de Boole de la guía de ejercicios para el primer parcial, resuelve la AC N°2 (actividad en clase) y por último resuelve la autoevaluación "Redes y Álgebra de Boole" que figura en el sitio.

Tené en cuenta que todas las actividades que realices forman parte del seguimiento académico que hará tu tutor.

-AxC (actividades por clase)

-AC N°2

-Autoevaluaciones.

- **Redes y Álgebra de Boole**
- **BONUS: Integral Relaciones**