UNIDAD 4. Autovectores y autovalores de endomorfismos y de matrices.

DEF. Dado un endomorfismo $f: V \to V$, llamamos AUTOVECTOR de f al vector v que verifica $f(v) = \lambda v$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \neq v_0$. Llamaremos AUTOVALOR al escalar λ

EJEMPLO 1

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ / \ f(x,y) = (2x, 2x-2y)$

$f(2,1) = (4,2) = 2(2,1)$

$f(-1,3) = (-2,-8) = \lambda(-1,3)$ NO ES AUTOV.

$f(2,0) = (4,4) \neq 2(2,0)$

$f(6,2) = (12,8) \neq 2(6,2) \therefore (6,2)$ NO ES AUTOV.

$f(-3,9) = (-6,-24) = \lambda(-3,9)$, NO ES AUTOVECTOR EL VECTOR $(-3,9)$

$f(-30,0) = (-60,-60)$

DEF. CONJUNTO DE AUTOVECTORES $V_\lambda = \{ v \in V / f(v) = \lambda v \wedge v \neq v_0 \}$

DEF. AUTOESPACIO ASOCIADO $E_\lambda = \{ v \in V \ / \ f(v) = \lambda . v \}$

Se demuestra que E_λ es un subespacio de V

EJEMPLO 2 Sea $f: P_2[\mathbb{R}] \to P_2[\mathbb{R}] \ / \ f(a+bx+cx^2) = -2c + (a+2b+c)x + (a+3c)x^2$

$f(-1+x^2) = -2 \quad 0x + 2x^2 = -2 + 2x^2 = 2(-1+x^2)$ AUTOV.

$f(x) = 0 + 2x + 0x^2 = 2x = 2(x)$ AUTOV

$f(-2+x+x^2) = -2 + x + x^2 = 1(-2+x+x^2)$ AUTOV.

$f(-2+3x+2x^2) = -4 + 6x + 4x^2 = 2(-2+3x+2x^2)$

EJERCICIO 1 pág 17

g) $f(v) = \lambda v$
$f(w) = \lambda w$
$f: V \to V$

i) $f(\alpha v) = \alpha . f(v) = \alpha \lambda v = (\alpha \lambda) v = \lambda \alpha v = \lambda(\alpha v) \therefore \alpha v$ es autovector
λ es el autovalor

ii) $f(v+w) = f(v) + f(w) = \lambda v + \lambda w = \lambda(v+w)$

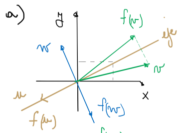
iii) $f(\alpha v + \beta w) = f(\alpha v) + f(\beta w) = \alpha . f(v) + \beta f(w) = \alpha \lambda v + \beta \lambda w =$
$= \lambda(\alpha v + \beta w) \therefore \alpha v + \beta w$ es AUTOVEC.
λ es el AUTOVALOR.

h) $f(v) =$
$f(w) =$

$f(v+w) =$

EJERCICIO 2

a)

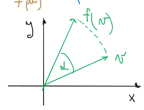


$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad y = \frac{1}{2}x \to y' = -2x \to y \perp y'$

v no es AUTOVECTOR

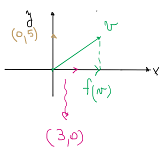
$f(w) = -w = -1 . w \quad \therefore w$ es autovector $\lambda = -1 \quad V_{-1} = \{(a,-2a) ; a \neq 0\}$

$f(u) = u = 1 . u \quad \therefore u$ es autovector $\lambda = 1$; $V_1 = \{(a, \frac{1}{2}a) ; a \neq 0\}$



$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ / \ f$ es la rotación de $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

NO TIENE AUTOVECTORES



$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 /$ f es la proyección ortogonal sobre el eje x

AUTOVECTORES

v no es autovector

$f(3,0) = 1(3,0) \quad \therefore (3,0)$ es AUTOVECTOR de $\lambda = 1$

$f(0,5) = (0,0) = 0(0,5)$ es " " $\lambda = 0$

$V_1 = \{(a,0) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \neq 0\}$

$V_0 = \{(0,a) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \neq 0\}$

$E_1 = \{(a,0) \wedge \forall a \in \mathbb{R}\}$; $E_1 = \text{gen}\{(1,0)\}$; $B_{E_1} = \{(1,0)\}$; $\dim E_1 = 1$

$E_0 = \{(0,a) \in \mathbb{R}^2, \forall a \in \mathbb{R}\}$; $B_{E_0} = \{(0,1)\}$; $\dim E_0 = 1$

$\dim \mathbb{R}^2 = \dim E_1 + \dim E_0$

Sea $f: V \to V$ y sea λ un autovalor de f, entonces E_λ es un subespacio de V.

$E_\lambda = \{ v \in V \ / \ f(v) = \lambda . v \}$

DEMOSTRACIÓN