Derivadas parciales de un campo escalar

Definición . Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida en el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$ y sea el par $(x_0, y_0) \in A$. Se define la "derivada parcial de f respecto de la variable x, en el punto (x_0, y_0)", como el límite, siempre que exista:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Análogamente se define la "derivada parcial de f respecto de la variable y, en el punto (x_0, y_0)", según el límite:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

El símbolo ∂ utilizado recientemente se debe a Jacobi, muy común en ciencias e ingeniería, otras notaciones usuales son:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} = f'_x(x_0, y_0)$ Notación última de Lagrange

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} = f'_y(x_0, y_0)$ Notación última de Lagrange

Debido a que ahora la derivada dependerá respecto de qué variable estamos derivando, es que suele evitarse la prima, resultando,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$$

Es conveniente resaltar, que una derivada parcial consiste en dejar libre solamente a la variable en cuestión, esto es, las otras variables quedan literalmente fijadas, ya sea como constantes momentáneas o en el valor de su coordenada del punto de cálculo.

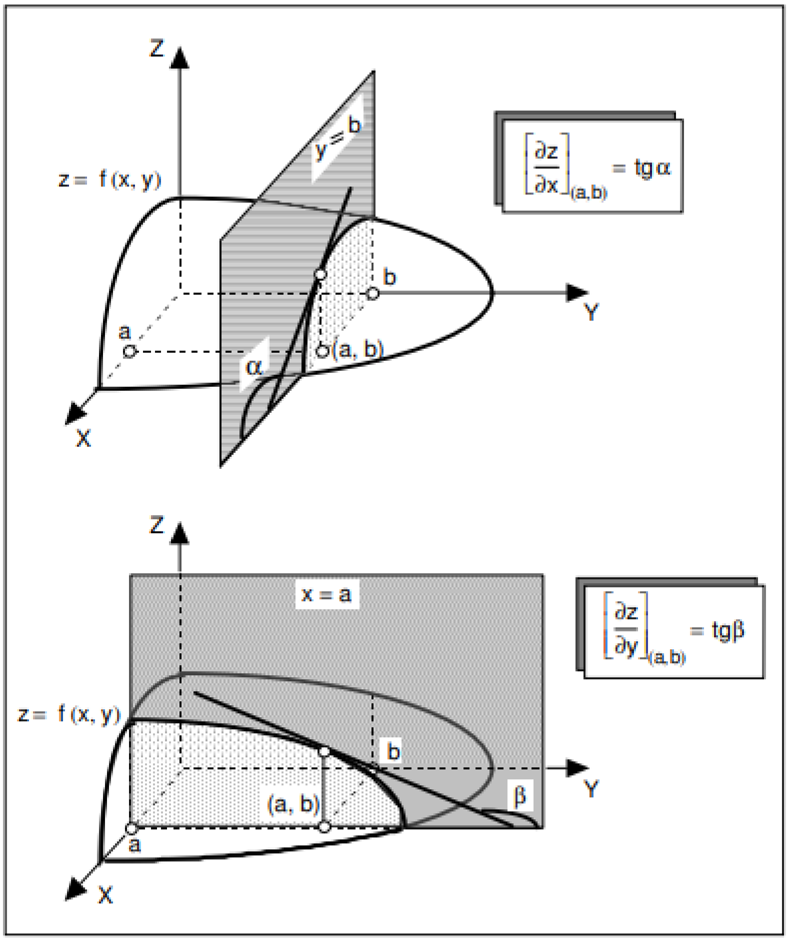
Para el caso de una función escalar de dos variables, cuya gráfica está en el espacio tridimensional, la recta tangente que hace a la interpretación geométrica de la derivada, se encontrará sobre un plano vertical paralelo al plano coordenado xz, si la derivada parcial es respecto de la variable x, o sobre un plano vertical paralelo al plano coordenado yz, si la derivada es respecto de la variable y.

Como en una variable:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \tan \alpha$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \tan \beta$$

Una interpretación geométrica de las derivadas parciales se muestra en la siguiente figura:



Interpretación de la derivada Parcial respecto a x y respecto a y

Ejemplo 1. Calcular las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ para la función f definida en todo el plano según la fórmula:

$$f(x, y) = 3x^2y + y^2$$

Cálculo de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(x_0 + h)^2 y_0 + y_0^2 - 3x_0^2 y_0 - y_0^2}{h}$$

Desarrollando la expresión, extrayendo factor común h, y luego simplificando, queda:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0}(6x_0 y_0 + 3h y_0) = 6x_0 y_0$$

Esto es:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 6x_0 y_0$$

Cálculo de $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} = \lim_{h\to 0}\frac{3x_0^2(y_0 + k) + (y_0 + k)^2 - 3x_0^2 y_0 - y_0^2}{k}$$

Procediendo algebraicamente resulta:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0}(3x_0^2 + 2y_0 + k) = 3x_0^2 + 2y_0$$

Finalmente:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 3x_0^2 + 2y_0$$

Ejemplo 2

Calculamos las derivadas parciales del campo escalar $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\mathrm{xy}}{\mathrm{x}^2-\mathrm{y}^2} & \text{si } |\mathrm{x}| \neq |\mathrm{y}| \\ 0 & \text{si } |\mathrm{x}| = |\mathrm{y}| \end{cases}$$

en el punto $(0,0)$.

Vemos que $(0,0)$ es un punto interior a $dom\, f = \mathbb{R}^2$. La derivada parcial de f en $(0,0)$ respecto de x, si existe, está dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{(0+\Delta x)0}{\Delta x^2-0}-0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x} = 0$$

luego, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Análogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Ejemplo 3

Calculamos las derivadas parciales $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en $(0,0)$.

Obviamente, $(0,0)$ es un punto interior a $dom\, f = \mathbb{R}^2$. La derivada parcial de f en $(0,0)$ respecto de x, si existe, está dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sqrt{\Delta x^2+0}-\sqrt{0^2+0^2}}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\right) \text{ (no existe)}$$

luego, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ no existe. Análogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ tampoco existe.

Ejemplo 4

Calculamos las derivadas parciales $f(x,y) = ln(x + 2y)$ en $(1,1)$.

Vemos que $dom\, f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, y > -\frac{x}{2}\}$ y obviamente,$(1,1)$ es un punto interior a $dom\, f$. La derivada parcial de f en $(1,1)$ respecto de x, si existe, está dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1{,}1) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0{,}0)}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{ln(1+\Delta x+2) - ln(1+2)}{\Delta x}\right)$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{ln(3+\Delta x) - ln(3)}{\Delta x}\right) = \frac{1}{3}$$

porque este último límite es, por definición, la derivada de ln en 3.
Luego, $\frac{\partial f}{\partial x}(1{,}1) = \frac{1}{3}$. Análogamente, podemos probar que $\frac{\partial f}{\partial y}(1{,}1) = \frac{2}{3}$.

Derivadas parciales por reglas de derivación

Así como en análisis I se aprendió primeramente la derivada en el formato de una definición, luego aparecieron los teoremas que facilitaron el cálculo de las derivadas. Aquí pasa exactamente igual, en el cálculo las derivadas se obtienen en general mediante reglas de derivación y el uso de la definición se deja para casos en los que no se puede aplicar la metodología práctica.

Ejemplo 5
Del ejemplo 1: $f(x,y) = 3x^2y + y^2$, las funciones derivadas parciales son:
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6xy$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2 + 2y$

Del ejemplo 4: $f(x,y) = ln(x+2y)$, las funciones derivadas parciales son:
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x+2y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2}{x+2y}$ en ambos casos $(x,y) \in dom\, f$

Derivadas direccionales de un campo escalar

Definición . Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida en el conjunto abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$, el par $(x_0, y_0) \in A$ y el vector $\vec{v} = (a,b)$ tal que $\|\vec{v}\| = 1$. Se define la “derivada direccional de f respecto de la dirección y sentido del vector $\vec{v}$, en el punto (x_0, y_0)”, como el límite, siempre que exista:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0}\frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Suelen utilizarse las notaciones equivalentes

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\right|_{(x_0,y_0)} = f'_{\vec{v}}(x_0, y_0) = D_{\vec{v}}f(x_0, y_0)$$

Obsérvese que cuando se consideran los vectores

$$\vec{v}_1 = e_1 = (1{,}0) \quad y \quad \vec{v}_2 = e_2 = (0{,}1)$$

se obtienen las derivadas parciales de f respecto de la variable x e y respectivamente.

Ejemplo 6. Calcular $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$, para la función

$$f(x,y) = xy^2$$

respecto de la dirección y sentido de $\vec{v} = (a,b)$.

Según la definición es:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(x_0 + at)(y_0 + bt)^2 - x_0 y_0^2}{t}$$

Procediendo algebraicamente resulta:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0}(y_0^2 a + 2x_0 y_0 b + x_0 bt + 2ab y_0 t + ab^2 t^2) = y_0^2 a + 2x_0 y_0 b$$

resulta que:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = y_0^2 a + 2x_0 y_0 b$$

Esto muestra que la función f posee derivada direccional en cualquier dirección y sentido, en cada punto de su dominio, y la misma se obtiene según la fórmula anterior.

Para calcular la derivada direccional, evitando resolver el límite de la definición, es posible emplear el siguiente artificio.

Se define la función de una variable

$$g(t) = f(x_0 + at, y_0 + bt)$$

Obsérvese que en este caso resulta

$$g(0) = f(x_0, y_0)$$

Luego, según la definición de derivada direccional:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \left.\frac{dg}{dt}\right|_{t=0}$$

Es decir que, finalmente se tiene la relación:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \left.\frac{dg}{dt}\right|_{t=0}$$

Así, por ejemplo, para la función de Ejemplo 8, es:

$$g(t) = (x_0 + at)(y_0 + bt)^2$$

con lo cual

$$\left.\frac{dg}{dt}\right|_{t=0} = a(y_0 + bt)^2 + 2b(x_0 + at)(y_0 + bt)|_{t=0} = y_0^2 a + 2x_0 y_0 b$$

Esto es:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \left.\frac{dg}{dt}\right|_{t=0} = y_0^2 a + 2x_0 y_0 b$$

Biblioteca digital. Cap 5, p. 170/2. Cálculo varias variables. W Mora.

Link contenidos pertinentes (Ctrl+Clic mouse para ir al enlace)
Khan Academy
https://es.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives