Aplicaciones a la Geometría Analítica.

Ecuación cuadrática general.

$ax^2 + \underline{bxy} + cy^2 + dx + ey = f,\ a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0$ ⇐ sistema Oxy

$a'x'^2 + c'y'^2 + d'x' + e'y' = f'$ ← ec. canónica

O x'y'

Buscaremos otro sistema, repecto del cual la ecuación sea

I) $(x\ \ y)\cdot\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(ax+\frac{b}{2}y \quad \frac{b}{2}x+cy\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$

$= ax^2 + bxy + cy^2$

II) $(d\ \ e)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = dx + ey$

La ecuación podrá escribirse en forma matricial

III) $(x\ \ y)\cdot\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (d\ \ e)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f$, con $S = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ matriz simétrica

$\lambda_1,\ \|u_1\| = 1$ $\qquad$ $S = \underline{C.D}.C^{-1}$

$\lambda_2,\ \|u_2\| = 1$ $\qquad$ $S = \underline{C.D}.C^{T}$

IV) $C\cdot\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\left[C\cdot\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right]^T = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T$

$(x'\ \ y')\cdot C^T = (x\ \ y)$

Transformación de la ec. cuadrática.

$(x\ y)\cdot S\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (d\ \ e)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f \qquad (Oxy)$

$(x'\ \ y')\cdot\underbrace{C^T\ C}_{I}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\cdot\underbrace{C^T\cdot C}_{I}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \underline{(d\ \ e)\cdot C}\cdot\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f$

$(x'\ \ y')\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (d'\ \ e')\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f$

$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' = f$

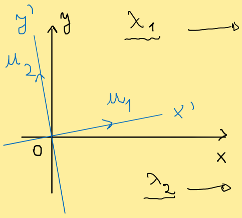
$\lambda_1 \to u_1$, $\lambda_2 \to u_2$, C

pues $(d'\ \ e') = (d\ \ e)\cdot\begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{pmatrix}$

Tipo parabólico → $\lambda_1\cdot\lambda_2 = 0$ $(\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = 0)$

Tipo hiperbólico → $\lambda_1\cdot\lambda_2 < 0$ $(\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0)$

Tipo elíptico → $\lambda_1\cdot\lambda_2 > 0$ $(|\lambda_1| < |\lambda_2|)$



$\underline{\lambda_1} \longrightarrow u_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix}$

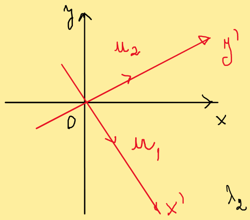
$u_{11} > 0$

$u_{12} > 0$

$\underline{\lambda_2} \longrightarrow u_2 = u_1^*$

def :

vector cruzado de v=(a,b) es v*=(-b,a)



$\lambda_1 \to u_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix}$

$u_{11} > 0$

$u_{12} < 0$

$\lambda_2 \to u_2 = u_1^*$