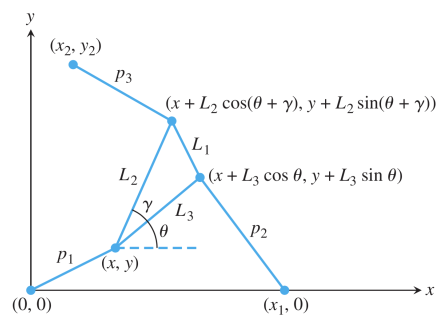
Inngangur

Skýrsla þessi fjallar um Gough-Stewart platform. Stewart platform er þrívíður pallur sem haldinn er uppi af sex fótum. Í þessari skýrslu skoðum við tvívíða útgáfu af pallinum, sem haldið er uppi af þremur fótum. Fyrir tvívíða pallinn eru forrit í Python skrifuð. Í lok hennar skoðum við þrívíðu sex fóta útgáfuna.

Skoðum tvívítt Stewart-platform með þrjá fóta með festipunkta $(0, 0)$, $(x_1, 0)$ og (x_2, y_2). Eftirfarandi skýringarmynd er fengin úr bókinni Numerical Analysis eftir Timothy Sauer.



Mynd 1: Skýringarmynd

Við leysum framvirku hreyfifræðina, þ.e. með gefna lengd fóta p_1, p_2, p_3 og hornið γ leysum við fyrir hornið θ. Mismunandi gildi á horninu θ gefa okkur mismunandi stellingar á þríhyrningnum sem sýndur er á skýringarmyndinni. Fáum bakvirku hreyfifræðin:

$$p_1^2 = x^2 + y^2$$

$$p_2^2 = (x + A_2)^2 + (y + B_2)^2$$

$$p_3^2 = (x + A_3)^2 + (y + B_3)^2$$

þar sem

$$A_2 = L_3 cos(\theta) - x_1$$

$$B_2 = L_3 sin(\theta)$$

$$A_3 = L_2 cos(\theta + \gamma) - x_2$$

$$B_3 = L_2 sin(\theta + \gamma) - y_2$$

En framvirku hreyfifræðin eru örlítið flóknari. Hægt er að leysa fyrir θ og (x, y) með því að setja

$$x = \frac{N_1}{D} = \frac{B_3(p_2^2 - p_1^2 - A_2^2 - B_2^2) - B_2(p_3^2 - p_1^2 - A_3^2 - B_3^2)}{2(A_2 B_3 - B_2 A_3)}$$

og

$$y = \frac{N_2}{D} = \frac{-A_3(p_2^2 - p_1^2 - A_2^2 - B_2^2) + A_2(p_3^2 - p_1^2 - A_3^2 - B_3^2)}{2(A_2 B_3 - B_2 A_3)}$$

svo lengi sem $D \neq 0$. Ritum þá að lokum fall f sem

$$f = N_1^2 + N_2^2 - p_1^2 D^2 = 0$$

sem hægt er að leysa fyrir óþekkt gildi á θ. Við skoðum aðeins lausnir á gildum fyrir θ frá $[-\pi,\ \pi]$.

Liður 1

Í þessum lið er forrit skrifað í Python sem tekur inn lengdir, γ og festipunkta Stewart-platforms og skilar gildi á fallinu f.

Lausn á lið 1 1

```
# -*- coding: utf-8 -*-

#Setjum inn söfn.
import numpy as np

#f-fallið okkar, prufum fallið fyrir theta = pi/4.
def f1(L1, L2, L3, gamma, p1, p2, p3, x1, x2, y2, theta, skila_xy):
    #Reiknum skv. formúlum í bók.
    A2 = L3*np.cos(theta) - x1
    B2 = L3*np.sin(theta)
    A3 = L2*np.cos(theta+gamma) - x2
    B3 = L2*np.sin(theta+gamma) - y2

    N1 = B3*(p2**2 - p1**2 - A2**2 - B2**2) - B2*(p3**2 - p1**2 - A3**2 - B3**2)

    D = 2*(A2*B3 - B2*A3)

    N2 = -A3*(p2**2 - p1**2 - A2**2 - B2**2) + A2*(p3**2 - p1**2 - A3**2 - B3**2)
    x = N1/D
    y = N2/D
    fall = N1**2 + N2**2 - (p1*D)**2

    #Viljum búa til tilvik þar sem við viljum skurðpunktana x og y.
    if skila_xy == True:
        return x, y
    else:
        return fall

#f sem aðeins fall af theta.
def f(theta, skila_xy=False):
    return f1(2, np.sqrt(2), np.sqrt(2), np.pi/2, np.sqrt(5), np.sqrt(5), np.sqrt(5),
    4, 0, 4, theta, skila_xy)

#f fyrir lið 4.
def f4(theta, skila_xy):
    return f1(3, 3*np.sqrt(2), 3, np.pi/4, 5, 5, 3, 5, 0, 6, theta, skila_xy)

#f sem er einnig fall af p2.
def f2(theta, p2, skila_xy):
    return f1(3, 3*np.sqrt(2), 3, np.pi/4, 5, p2, 3, 5, 0, 6, theta, skila_xy)

#f sem er aðeins fall af p2.
def f3(p2, skila_xy=False):
    def theta(theta):
        return f1(3, 3*np.sqrt(2), 3, np.pi/4, 5, p2, 3, 5, 0, 6, theta, skila_xy)
    return theta

def main():
    #Sjáum niðurstöður fyrir theta = pi/4.
    print f(np.pi/4)
```

```python
if __name__== "__main__":
    main()
```

Keyrsla á lið 1

```
>> python lidur1.py
python: -2.2737367544323206e-13
```

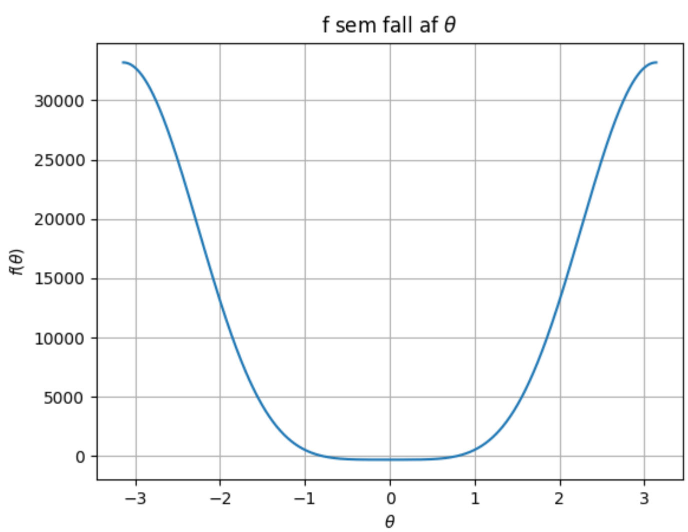
Niðurstöðurnar eru nokkuð skýrar, $-2.273767 * 10^-13$ er ansi nálægt 0.

Liður 2

Í þessum lið búum við til graf fyrir fallið f á bilinu $\theta \in [-\pi,\ \pi]$. Hér notum við $L_1 = 2,\ L_2 = L_3 = \sqrt{2}$ *og* $p_1 = p_2 = p_3 = \sqrt{2}$. $\gamma = \frac{\pi}{2}$

Lausn á liði 2

```
# -*- coding: utf-8 -*-

#Setjum inn söfn og f-fallið okkar úr lið 1.
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from lidur1 import f

#Bilið okkar sem er -pi:pi með gildum teknum á 10**-5 millibili.
range = np.arange(-np.pi, np.pi, 10**-5)

#Búum til graf af fallinu okkar, og notum grid til að sýna nálægð
# við núllpunktinn í theta = +-pi/4.
x = np.arange(-np.pi, np.pi, 10**-5)
plt.title('f sem fall af ' + r'$\theta, p2 = 7$')
plt.xlabel(r'$\theta$')
plt.ylabel(r'$f(\theta)$')
plt.grid(True)
plt.plot(x, f2(x, 7,False))
plt.show()
```



Mynd 2: Fall úr lið 2

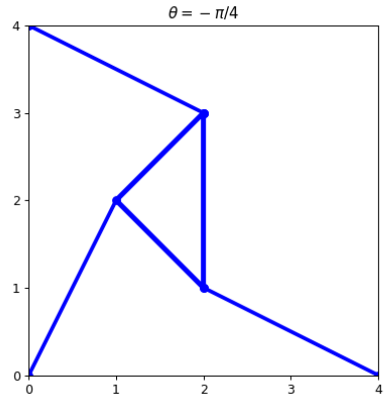
Liður 3

Núllstöðvar fallsins f fyrir gildin í lið 2 fengust sem $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$. Hér sýnum við mynd af þríhyrningnum fyrir þær tvær stellingar og einnig festipunkta og fótalengd.

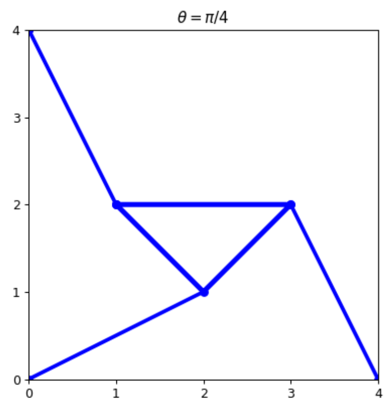
Lausn á liði 3

```
# -*- coding: utf-8 -*-

#Setjum inn söfn og f-fallið okkar úr lið 1.
import numpy as np
import math
import matplotlib.markers as marker
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.patches as patch
from shapely.geometry.polygon import LinearRing, Polygon
from lidur1 import f, f1, f4

def graf(L1, L2, L3, gamma, p1, p2, p3, x1, x2, y2, theta):
    #Reiknum út hnitin fyrir punktana okkar.
    #fyrir lið 4:
    if y2 == 6:
        (x, y) = f4(theta, skila_xy=True)
    else: (x, y) = f(theta, skila_xy=True)
    (x4, y4) = (x + L2*np.cos(theta + gamma), y + L2*np.sin(theta + gamma))
    (x3, y3) = (x + L3*np.cos(theta), y + L3*np.sin(theta))
    ring = LinearRing([[x4, y4], [x3, y3], [x,y], [x4, y4]])
    t, p = ring.xy

    #Hérna erum við með bilin fyrir hverja línu (strut).
    range1  = np.arange(min(0,x), max(0,x), 10**-5)
    range2 = np.arange(min(x2,x4), max(x2,x4), 10**-5)
    range3 = np.arange(min(x3,x1), max(x1,x3), 10**-5)

    #Myndin sem við viljum birta.
    fig = plt.figure(1, figsize=(6,6), dpi=90)

    #Hérna bætum við hlutum á myndina okkar, tri er þríhyrningur og
    # restin línurnar (struts).
    tri = fig.add_subplot(111)
    line1 = fig.add_subplot(111)
    line2 = fig.add_subplot(111)
    line3 = fig.add_subplot(111)

    #Plotta línurnar og þríhyrninginn
    line1.plot(range1, (y/x)*range1, linewidth=1.0, c='b')
    line2.plot(range2, ((y2-y4)/(x2-x4))*range2+y2, linewidth=1.0, c='b')
    line3.plot(range3, ((y3)/(x3-x1))*range3-((y3)/(x3-x1))*x1, linewidth=1.0, c='b')
    tri.plot(t,p, linewidth=3.0, c='b', marker='o')

    #Setja limit á ásana okkar.
    xmax = math.ceil(max(x, x1, x2, x3, x4))
    xmin = math.floor(min(x, x1, x2, x3, x4))
    ymax = math.ceil(max(y, y2, y3, y4))

    xrange = [xmin, xmax]
    yrange = [0, ymax+1]
    tri.set_xlim(*xrange)
```

```
    tri.set_xticks(np.arange(xmin,xmax+1, step=1))
    tri.set_ylim(*yrange)
    tri.set_yticks(np.arange(*yrange))
    tri.set_aspect(1)

    plt.title(r'$\theta =$' + str(theta))


    #Punktar á grafið.
    punkt1 = fig.add_subplot(111)
    punkt2 = fig.add_subplot(111)
    punkt3 = fig.add_subplot(111)
    punkt4 = fig.add_subplot(111)
    punkt5 = fig.add_subplot(111)
    punkt6 = fig.add_subplot(111)

    punkt1.plot(0, 0, marker='o', c='b')
    punkt2.plot(x2, y2, marker='o', c='b')
    punkt3.plot(x3, y3, marker='o', c='b')
    punkt4.plot(x4, y4, marker='o', c='b')
    punkt5.plot(x, y, marker='o', c='b')
    punkt5.plot(x1, 0, marker='o', c='b')

    #Sýna loks grafið.
    plt.show()
    return 0

def main():
    #Hérna er þægilegra að nota öll gildin sem breytur.
    L1 = 2
    L2 = np.sqrt(2)
    L3 = np.sqrt(2)
    gamma = (np.pi/2)
    p1 = np.sqrt(5)
    p2 = np.sqrt(5)
    p3 = np.sqrt(5)
    x1 = 4
    x2 = 0
    y2 = 4
    theta = -np.pi/4
    theta2 = np.pi/4
    graf(L1, L2, L3, gamma, p1, p2, p3, x1, x2, y2, theta)
    graf(L1, L2, L3, gamma, p1, p2, p3, x1, x2, y2, theta2)
if __name__== "__main__":
    main()
```



Mynd 3: Mynd af Stewart platformi



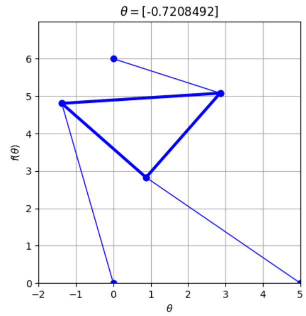
Mynd 4: Mynd af Stewart platformi

Liður 4

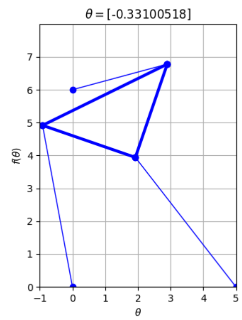
Hér sýnum við þær fjóru stellingar sem fást þegar framvirku hreyfifræðin eru leyst fyrir $x_1 = 5$, $(x_2, y_2) = (0, 6)$, $L_1 = L_3 = 3$, $L_2 = 3\sqrt{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$, $p_1 = p_2 = 5$ og $p_3 = 3$

Lausn á liði 4

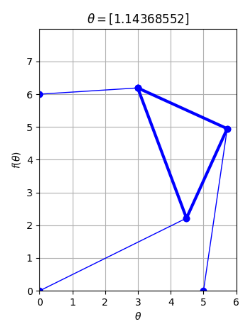
```
# -*- coding: utf-8 -*-

#Setjum inn söfn og f-fallið okkar úr lið 1.
import numpy as np
import scipy.optimize as sci
import matplotlib.markers as marker
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.patches as patch
from shapely.geometry.polygon import LinearRing, Polygon
from lidur1 import f1, f, f4
from lidur3 import graf

#Bilið okkar sem er -pi:pi með gildum teknum á 10**-5 millibili.
x = np.arange(-np.pi, np.pi, 10**-5)

#Búum til graf af fallinu okkar, og notum grid til að sýna nálægð
# við núllpunkta.
plt.title('f sem fall af ' + r'$\theta$')
plt.xlabel(r'$\theta$')
plt.ylabel(r'$f(\theta)$')
plt.grid(True)
#Finnum rætur með fsolve aðferðinni í Scipy pakkanum, setjum lausnir í
# fylkið A.
A = np.zeros((4,1), dtype=float)

for i in np.arange(-3,3):
    x = sci.fsolve(f4, i, args=(False))
    A[i+1] = x

graf(3, 3*np.sqrt(2), 3, np.pi/4, 5, 5, 3, 5, 0, 6, A[0])
plt.title('f sem fall af ' + r'$\theta$')
plt.xlabel(r'$\theta$')
plt.ylabel(r'$f(\theta)$')
plt.grid(True)
graf(3, 3*np.sqrt(2), 3, np.pi/4, 5, 5, 3, 5, 0, 6, A[1])
plt.title('f sem fall af ' + r'$\theta$')
plt.xlabel(r'$\theta$')
plt.ylabel(r'$f(\theta)$')
plt.grid(True)
graf(3, 3*np.sqrt(2), 3, np.pi/4, 5, 5, 3, 5, 0, 6, A[2])
plt.title('f sem fall af ' + r'$\theta$')
plt.xlabel(r'$\theta$')
plt.ylabel(r'$f(\theta)$')
plt.grid(True)
graf(3, 3*np.sqrt(2), 3, np.pi/4, 5, 5, 3, 5, 0, 6, A[3])
```



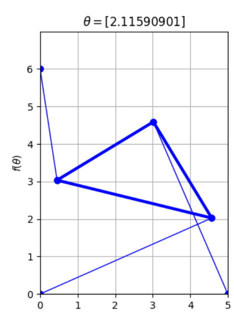
Mynd 5: Mynd úr lið 4



Mynd 6: Mynd úr lið 4



Mynd 7: Mynd úr lið 4



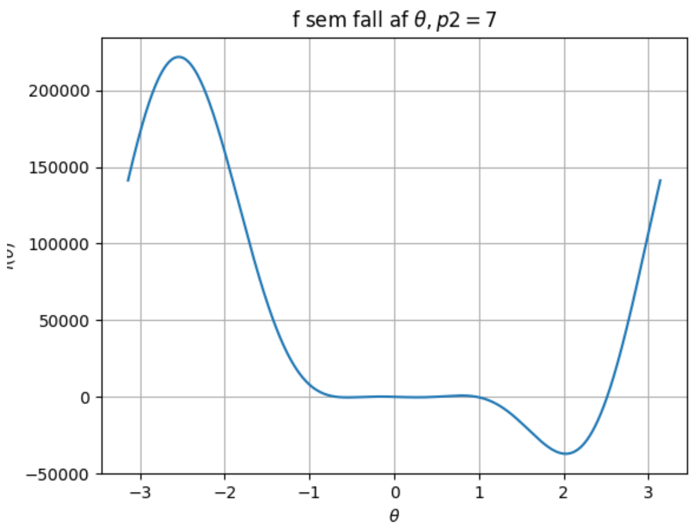
Mynd 8: Mynd úr lið 4

Liður 5

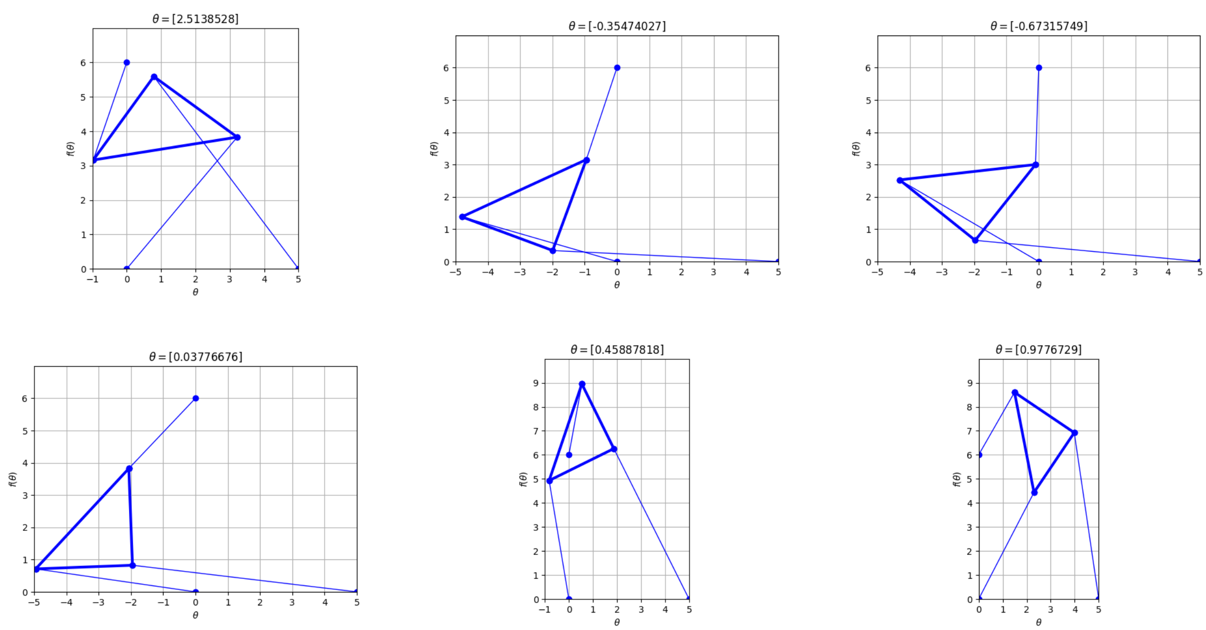
Hér notum við gildi á $p_2 = 7$ sem veitir okkur 6 rætur á fallinu f.

Lausn á liði 5

```
# -*- coding: utf-8 -*-

#Setjum inn söfn og f-fallið okkar úr lið 1.
import numpy as np
import scipy.optimize as sci
import matplotlib.markers as marker
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.patches as patch
from shapely.geometry.polygon import LinearRing, Polygon
from lidur1 import f1, f
#Notum graf fallið sérstaklega fyrir lið 5 úr graf_5.py.
from graf_5 import graf

#Búum til graf af fallinu okkar, og notum grid til að sýna nálægð
# við núllpunkta.
plt.title('f sem fall af ' + r'$\theta$')
plt.xlabel(r'$\theta$')
plt.ylabel(r'$f(\theta)$')
plt.grid(True)
#Finnum rætur með fsolve aðferðinni í Scipy pakkanum, setjum lausnir í
# fylkið A.

A = np.zeros((6,1), dtype=float)

#Finnum rætur. Sjáum á grafi hvar þær eru u.þ.b.
x1 = sci.fsolve(f5, 2.5, args=(False), epsfcn = 0.1)
A[0] = x1
x2 = sci.fsolve(f5, -0.35, args=(False), epsfcn = 0.1)
A[1] = x2
x3 = sci.fsolve(f5, -0.65, args=(False), epsfcn = 0.1)
A[2] = x3
x4 = sci.fsolve(f5, 0.0, args=(False), epsfcn = 0.1)
A[3] = x4
x5 = sci.fsolve(f5, 0.45, args=(False), epsfcn = 0.1)
A[4] = x5
x6 = sci.fsolve(f5, 0.9, args=(False), epsfcn = 0.1)
A[5] = x6


#Sýnum gröfin.
for i in range (0, len(A)):
    graf(3, 3*np.sqrt(2), 3, np.pi/4, 5, 7, 3, 5, 0, 6, A[i])
```



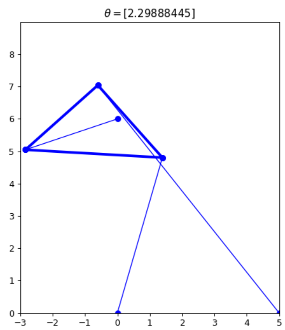
Mynd 9: Mynd úr lið 5



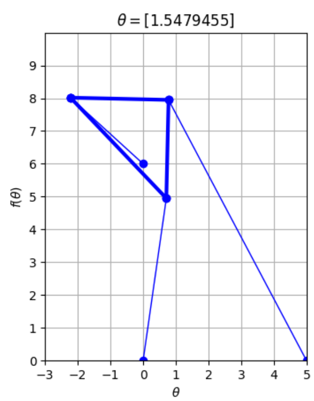
Stellingarnar sex fyrir $p_2 = 7$

Liður 6

Með því að nota kóðann úr lið 4 og 5 og scipy.fsolve var ítrað yfir ýmis heiltölugildi á p_2 og rætur skoðaðar í samhengi við gröf. Þá var fundin lengd $p_2 = 9$ með forritinu úr lið 7 þannig að tvær rætur fengjust ásamt tveimur myndum. Myndirnar tvær eru eftirfarandi.



Mynd 10: Mynd úr lið 6



Mynd 11: Mynd úr lið 6

Liður 7

Í þessum lið er forrit skrifað í Python sem finnur hver margar rætur samsvara ákveðnu gildi á p_2. Fjöldi róta er fundinn með forritinu *Find All Roots* sem tekið var af Github-síðu Pauli Virtanen <pav@iki.fi>. Keyrslutími minnkar töluvert með notkun þess forrits. Síðan er að lokum sýnt á hvaða bilum p_2 hefur engar, tvær, fjórar eða sex rætur.

Lausn á liði 7

```python
# -*- coding: utf-8 -*-

#Setjum inn söfn og f-fallið okkar úr lið 1.
import numpy as np
import scipy.optimize as sci
from lidur1 import f1, f2, f3
import time
#Hér notum við find_all_roots sem Pauli Virtanen <pav@iki.fi>, skrifaði árið 2014.
#Tekið af Github.
from rootfinder import find_all_roots

#Skilgreinum fall rot sem tekur inn upphafsbil (a,b), fjölda róta í núlli, n1 og
#tolerance fyrir bilunum.
def rot(a, b, n1, tol=0.001):
        while a < 9.99:
                #Finnum allar rætur á bilinu -pí:pí fyrir p2.
                x_2, x_2p, y_2p = find_all_roots(f3(b), -np.pi, np.pi)
                x_3, x_3p, y_3p = find_all_roots(f3(b-tol), -np.pi, np.pi)
                #Fjöldi róta er lengd fylkisins sem inniheldur þær.
                n2 = len(x_2)
                n3 = len(x_3)
                if n3 != n2:
                        print(a,b)
                        #Skilyrði fyrir fallinu til að ljúka.
                        if b > 11.0: break
                        a = b + 0.001
                        b = a + 0.01
                        x_1, x_1p, y_1p = find_all_roots(f3(a), -np.pi, np.pi)
                        n1 = len(x_1)
                #Ef fjöldi róta er sá sami höldum við áfram.
                if n1 == n2:
                        b = b + 0.01
                #Ítrum niður.
                else:
                        b = b - 0.00001
#Köllum á fallið.
rot(0.0, 1.0, 0)
```

Fjöldi róta fyrir $0 < p_2 < 10$ og $-\pi < \theta < \pi$ fékkst sem:

Fjöldi róta	Bil á p2
0	0.0 : 3.71152
2	3.71252 : 4.86472
4	4.86572 : 6.96835
6	6.96935 : 7.01935
4	7.02035 : 7.85008
2	7.85108 : 9.26338
0	9.26390 : 11.0

Liður 8

Í þessum lið skoðum við hvernig þrívíðu Gough-Stewart platformi með sex fótum er hagað.

Bakvirk hreyfifræði

Tvö hnitakerfi eru notuð, **P** fyrir pallinn og **B** fyrir grunninn. Miðja hnitakerfis **P** er í miðpunkti hans. z_p-ásinn bendir út og er x_p-ásinn hornréttur á línuna sem tengir tengipunktana $P1$ og $P6$. Hornið á milli $P1$ og $P2$ er táknað með θ_P. Symmetría er fengið með dreifingu liðanna með því að láta hornið á milli $P1$ og $P3$ og hornið á milli $P3$ og $P5$ vera jafnt 120.

Á sama hátt og hnitakerfi pallsins hefur **B** miðju í miðpunkti grunnsins. x_B-ásinn er hornréttur á línuna sem tengir $B1$ og $B6$. Hornið á milli $B1$ og $B2$ er táknað með θ_B. Einnig er hornið á milli $B1$ og $B3$, sett jafnt horninu á milli $B3$ og $B5$, 120. Kartesísku breyturnar eru valdar sem afstæða staða og áttun hnitakerfisins **P** með tilliti til hnitakerfis **B** þar sem staða **P** er miðuð við miðju þess með tilliti til **B**. Ef við táknum hornið á milli PP_i og x_P með λ_i og hornið á milli BB_i og x_B með Λ_i með $i = 1, 2, ..., 6$ og fáum þá:

$$\Lambda_i = 60i - \frac{\theta_B}{2}; \lambda_i = 60i - \frac{\theta_P}{2}, i = 1, 3, 5 \tag{1}$$

og

$$\Lambda_i = \Lambda_{i-1} + \theta_B; \lambda_i = \lambda_{i-1} + \theta_P, i = 2, 4, 6 \tag{2}$$

Látum nú vigurinn ${}^P\mathbf{p}_i = (p_{ix}, p_{iy}, p_{iz})^T$ lýsa stöðu punktanna P_i, sem þjóna sem festipunktar með tilliti til hnitakerfisins **P** og vigurinn ${}^B\mathbf{b}_i = (b_{ix}, b_{iy}, b_{iz})^T$ sem stöðu festipunktanna **P**. Þá er hægt að skrifa vigrana sem:

$${}^P\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} r_P cos(\lambda_i) & r_P sin(\lambda_i) & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3}$$

og

$${}^B\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} r_B cos(\Lambda_i) & r_B sin(\Lambda_i) & 0 \end{bmatrix}^T \tag{4}$$

fyrir $i = 1, 2, ..., 6$ þar sem r_P og r_B eru geislar pallsins og grunnsins. Skoðum nú mynd 12 sem sýnir vigurmynd af hreyfi (e. actuator). Staða kerfisins **P** er táknuð með vigrinum ${}^B\mathbf{d} = [x \ y \ z]^T$ sem inniheldur kartesísk hnit fyrir miðju kerfisins m.t.t. **B**. Lengdarvigurinn ${}^B\mathbf{q}_i = (q_{ix} \ q_{iy} \ q_{iz})^T$ getur verið reiknaður út m.t.t. **B**. Fáum þá:

$${}^B\mathbf{q}_i = {}^B\mathbf{x}_i + {}^B\mathbf{p}_i \tag{5}$$

þar sem

$${}^B\mathbf{x}_i = {}^B\mathbf{d} - {}^B\mathbf{b}_i \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} x - b_{ix} \\ y - b_{iy} \\ z - b_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - b_{ix} \\ y - b_{iy} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{x_i} \\ \overline{y_i} \\ \overline{z_i} \end{bmatrix} \tag{7}$$

sem er hliðraður vigur af ${}^B\mathbf{d}$ og

$${}^B\mathbf{p}_i = {}^B_P\mathbf{R}\,{}^P\mathbf{p}_i \tag{8}$$

$$= \begin{bmatrix} r11 & r12 & r13 \\ r21 & r22 & r23 \\ r31 & r32 & r33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{ix} \\ p_{iy} \\ p_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r11p_{ix} & + & 12p_{iy} \\ r21p_{ix} & + & r22p_{iy} \\ r31p_{iz} & + & r32p_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} \tag{9}$$

sem er útsetning vigursins ${}^B\mathbf{p}_i$ í $\mathbf{B}$ og ${}^B_P\mathbf{R}$ er *áttunarfylkið* sem sýnir áttun $\mathbf{P}$ m.t.t. til $\mathbf{B}$ Þá er lengd l_i af vigri ${}^B\mathbf{q}_i$ reiknuð með:

$$l_i = \sqrt{q_{ix}^2 + q_{iy}^2 + q_{iz}^2} \tag{10}$$

eða

$$l_i = \sqrt{(\overline{x}_i + u_i)^2 + (\overline{y}_i + v_i)^2 + (\overline{z}_i + w_i)^2} \tag{11}$$

Nú fáum við þá úr (3) og (4):

$$p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2 = r_P^2 \tag{12}$$

$$b_{ix}^2 + b_{iy}^2 + b_{iz}^2 = r_B^2 \tag{13}$$

og úr áttunarfylkinu fáum við

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 + r_{31}^2 = r_{12}^2 + r_{22}^2 + r_{32}^2 = r_{13}^2 + r_{23}^2 + r_{33}^2 = 1 \tag{14}$$

og

$$\begin{aligned} r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} + r_{31}r_{32} = 0 \\ r_{11}r_{13} + r_{21}r_{23} + r_{31}r_{33} = 0 \\ r_{11}r_{13} + r_{22}r_{23} + r_{32}r_{32} = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Ritum nú l_i sem

$$\begin{aligned} l_i^2 = x^2 + y^2 + z^2 + r_P^2 + r_B^2 + 2(r_{11}p_{ix} + r_{12}p_{iy})(x - b_{ix}) \\ +2(r_{21}p_{ix} + r_{22}p_{iy})(y - b_{iy}) + 2(r_{31}p_{ix} + r_{32}p_{iy})z - 2(xb_{ix} + yb_{iy}) \end{aligned} \tag{16}$$

Nú lýsir (16) *lokuðu formi* bakvirku hreyfifræðarinnar. Lengdirnar l_i fyrir $i = 1, 2, ..., 6$ fást þá með (16) með kartesísk hnit áttunar og stöðu í $\mathbf{P}$ með tilliti til $\mathbf{B}$.

Áttun pallsins

Áttun $\mathbf{P}$ með tilliti til $\mathbf{B}$ er hægt að lýsa með áttunarfylkinu ${}^B_P\mathbf{R}$. Breyturnar r_{ij} eru níu talsins, fyrir $i, j = 1, 2, 3$, því hin þrjú i, j eru óþörf, eins og sýnt var í fyrri hluta. Nú getum við notað þrjú horn $\alpha, \beta og \gamma$ sem eiga að lýsa áttun $\mathbf{P}$ eftir þrjár aðgerðir í $\mathbf{B}$:

1. $\mathbf{B}$ er snúið um $\mathbf{x}_B$-ásinn um hornið γ. (Yaw)
2. Snúið er um hornið β um $\mathbf{y}_B$-ásinn. (Pitch)
3. Snúið er um hornið α um $\mathbf{z}_B$-ásinn. (Roll)

Þessar þrjár aðgerðir mynda áttun sem sett er fram með áttunarfylkinu

$${}^B_P\mathbf{R} = \mathbf{R}_{RPY} \begin{bmatrix} c\alpha\ c\beta & c\alpha\ s\beta\ s\gamma - s\alpha\ c\gamma & c\alpha\ s\beta\ c\gamma + s\alpha\ s\gamma \\ s\alpha\ c\beta & s\alpha\ s\beta\ s\gamma + c\alpha\ c\gamma & s\alpha\ s\beta\ c\gamma - c\alpha\ s\gamma \\ -s\beta & c\beta\ s\gamma & c\beta\ c\gamma \end{bmatrix} \tag{17}$$

Framvirk hreyfifræði

Nú skoðum við framvirku hreyfifræðina, þegar lengdirnar l_i fyrir $i = 1, 2, ..., 6$ eru mældar og kartesísk hnit áttunar og stöðu pallsins eru reiknuð út m.t.t. grunnsins. Verkefnið er að finna hnitin $(x,\ y,\ z)$ og áttunina skilgreinda með hornunum $\alpha,\ \beta\ og\ \gamma$ sem uppfylla (16), að gefnum lengdum l_i. Nú eru ekki til lokaðar lausnir fyrir framvirku hreyfifræðina. Jafna (16) lýsir sex ólínulegum jöfnum með sex óþekktum stærðum. Ítrunaraðferðir verða því að vera notaðar. Margar aðferðir er hægt að nota, en skoðum hér Newton-Raphson aðferðina.

Til þess að nota Newton-Raphson skilgreinum við sex föll:

$$f_i(\mathbf{a}) = (\overline{x}_i + u_i)^2 + (\overline{y}_i + v_i)^2 + (\overline{z}_i + w_i)^2 - l_i^2 = 0 \tag{18}$$

fyrir $i = 1, 2, ..., 6$ þar sem vigurinn $\mathbf{a}$ er skilgreindur með

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x \ y \ z \ \alpha \ \beta \ \gamma \end{bmatrix}^T \tag{19}$$

Newton-Raphson aðferðin

1. Giskum á upphafsvigur $\mathbf{a}$
2. Reiknuð eru stökin r_{ij} úr ${}^B_P\mathbf{R}$ með því að nota (17) fyrir $i, j = 1, 2, ..., 6$
3. Reiknuð eru gildin $\overline{x}_i,\ \overline{y}_i,\ og\ \overline{z}_i$ með (7) og $\overline{u}_i,\ \overline{v}_i,\ og\ \overline{w}_i$ með (9) fyrir $i, j = 1, 2, ..., 6$.
4. Reiknað er $f_i(\mathbf{a})$ og $A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial a_j}$ með (18) fyrir $i, j = 1, 2, ..., 6$.
5. Reiknað $B_i = -f_i(\mathbf{a})$ fyrir $i, j = 1, 2, ..., 6$. Ef $\sum_{j=1}^{6} |B_j| < tol(tolerance)$, er $\mathbf{a}$ valin sem lausn.
6. Leyst er $\sum_{j=1}^{6} A_{ij}\partial a_j = B_i$ fyrir ∂a_j fyrir $i, j = 1, 2, ..., 6$ með því að nota LU þáttun. Ef $\sum_{j=1}^{6} \partial a_j < tol$ (tolerance), er $\mathbf{a}$ valin sem lausn.
7. Valið er $\mathbf{a}^{new} = \mathbf{a} + \partial a$ og skref 1-7 eru endurtekin.

Hlutaafleiður

Með því að reikna hlutaafleiður er hægt að minnka tímann sem það tekur að reikna með Newton-Raphson. Með því að nota (9) og (17) er hægt að reikna út hlutaafleiðurnar af $u_i,\ v_i,\ og\ w_i$ m.t.t. hornanna $\alpha,\ \beta\ og\ \gamma$ á eftirfarandi hátt:

$$\frac{\partial u_i}{\partial \alpha} = -v_i, \quad \frac{\partial u_i}{\partial \beta} = c\alpha\ w_i, \quad \frac{\partial u_i}{\partial \gamma} = p_{iy} r_{13} \tag{20}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial \alpha} = u_i, \quad \frac{\partial v_i}{\partial \beta} = s\alpha\ w_i, \quad \frac{\partial v_i}{\partial \gamma} = p_{iy} r_{23} \tag{21}$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial w_i}{\partial \beta} = -(c\beta p_{ix} + s\beta s\gamma p_{iy}), \quad \frac{\partial w_i}{\partial \gamma} = p_{iy} r_{33} \tag{22}$$

Nú sjáum við að skv. (7) er:

$$\frac{\partial \overline{x}_i}{\partial x} = \frac{\partial \overline{y}_i}{\partial y} = \frac{\partial \overline{z}_i}{\partial z} = 1 \tag{23}$$

Með því að nota (20)-(23) fáum við:

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_1} = \frac{\partial f_i}{\partial x} = \frac{\partial f_i}{\partial \overline{x}_i} = 2(\overline{x}_i + u_i) \tag{24}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_2} = \frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial f_i}{\partial \overline{y}_i} = 2(\overline{y}_i + v_i) \tag{25}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_3} = \frac{\partial f_i}{\partial z} = \frac{\partial f_i}{\partial \overline{z}_i} = 2(\overline{z}_i + w_i) \tag{26}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_4} = \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} = 2(-\overline{x}_i v_i + \overline{y}_i u_i) \tag{27}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_5} = \frac{\partial f_i}{\partial \beta} = 2[(-\overline{x}_i c\alpha + \overline{y}_i s\alpha) w_i - (p_{ix} c\beta + p_{iy} s\beta s\gamma)\overline{z}_i] \tag{28}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_6} = \frac{\partial f_i}{\partial \gamma} = 2p_{iy}(\overline{x}_i r_{13} + \overline{y}_i r_{23} + \overline{z}_i r_{33}) \tag{29}$$

Breytt Jacobi-fylki

Jacobi-fylkið fyrir *manipulator-inn* er vanalegast skilgreint sem fylkið fyrir hraða fótanna sem sett er fram fyrir hnikunarhraða og snúningshraða í kartesískum hnitum. Setjum fram tímabreytingu lengdanna $\Gamma_1,\ \Gamma_2, ..., \Gamma_6$ sem hraða liðanna. Til þess að reikna hlutaafleiðurnar fyrir framvirku hreyfifræðin skilgreinum við hraðann á kartesískum stöðu pallsins í $\mathbf{B}$, köllum þá $\dot{x},\ \dot{y}, \dot{z}$, sem hnikunarhraða og snúningshraða sem $\dot{\alpha},\ \dot{\beta}, \dot{\gamma}$. Fylkið $\mathbf{J}$ sem tengir saman hraða lengdanna og hnikunarhraðana og snúningshraðana köllum við því *breytta Jacobi-fylkið.* Fáum

$$\dot{\mathbf{a}} = (\dot{a_1},\ \dot{a_2},\ \dot{a_3},\ \dot{a_4},\ \dot{a_5},\ \dot{a_6})^T = (\dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z},\ \dot{\alpha},\ \dot{\beta},\ \dot{\gamma})^T \tag{30}$$

og einnig

$$\mathbf{\Gamma} = (\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3,\ \Gamma_4,\ \Gamma_5,\ \Gamma_6)^T \tag{31}$$

og þá fáum við

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{J}_M \mathbf{\Gamma} \tag{32}$$

eða

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{J}_M^{-1}\ \dot{\mathbf{a}} \tag{33}$$

þar sem $\mathbf{J}_M$ er breytta Jacobi-fylkið. Köllum $k_{ij} = \frac{\partial l_i}{\partial a_j}\dot{a}_j$ ij-stakið í $\mathbf{J}_M^{-1}$. Fáum skv. (33):

$$\Gamma_i = \sum_{j=1}^{6} k_{ij}\dot{a}_j = \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial l_i}{\partial a_j}\dot{a}_j \tag{34}$$

Leysum nú fyrir l_i^2

$$l_i^2 = (\overline{x}_i + u_i)^2 + (\overline{y}_i + v_i)^2 + (\overline{z}_i + w_i)^2 = \overline{f}_i \tag{35}$$

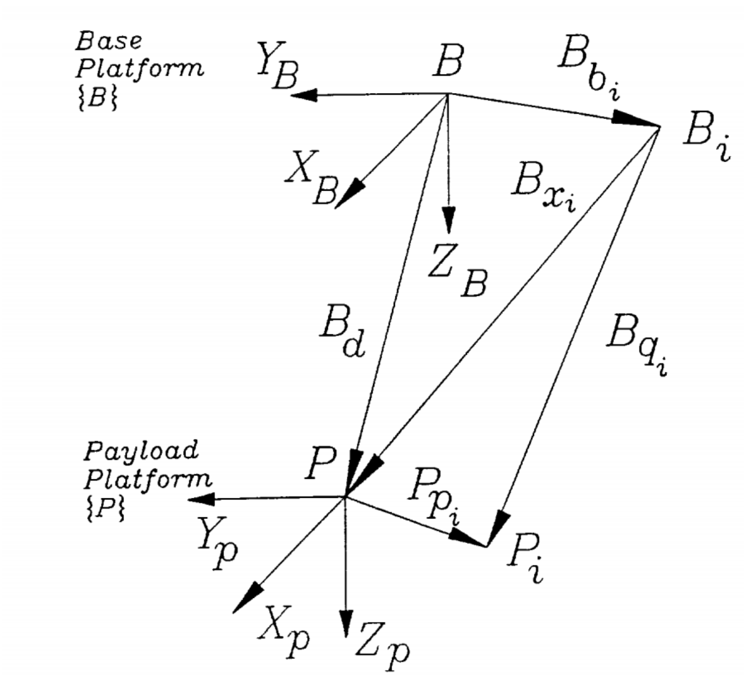
Nú er $\overline{f}_i$ fall af $\overline{x}_i,\ \overline{y}_i,\ \overline{z}_i,\ \alpha,\ \beta,\ og\ \gamma$. Diffrum báðar hliðar (34) og fáum:

$$2l_i\Gamma_i = \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial \overline{f}_i}{\partial a_j}\dot{a}_j \tag{36}$$

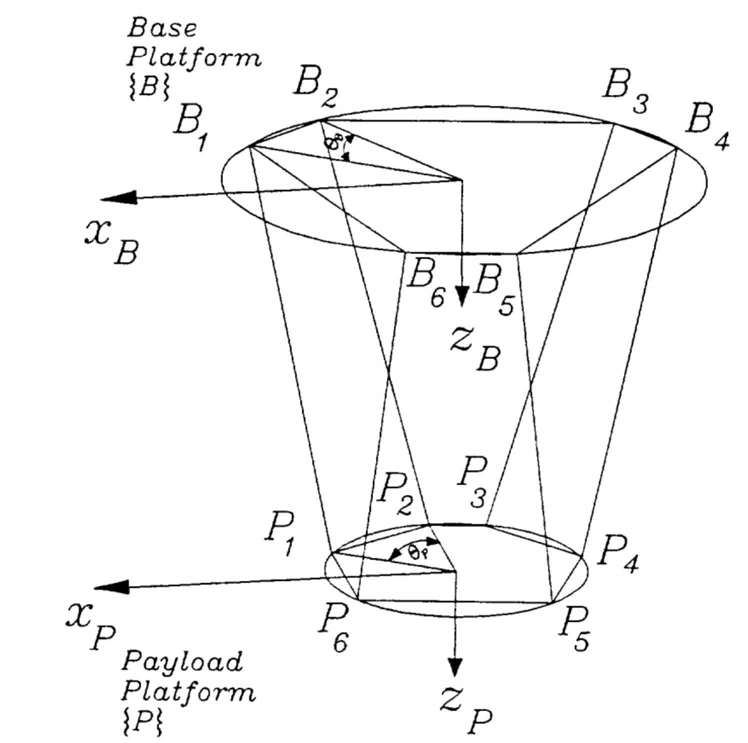
Fáum því að lokum með því að bera saman (34) og (37):

$$k_{ij} = \frac{1}{2l_i}\frac{\partial f_i}{\partial a_j} \tag{37}$$

þar sem $\frac{\partial f_i}{\partial a_j}$ er fengið úr skrefi 4 í Newton-Raphson aðferðinni með því að nota (24)-(29). Með öðrum orðum er hægt að reikna út breytta Jacobi-fylkið með niðurstöðum framvirku hreyfifræðinnar.



Mynd 12: Vigurmynd af actuator nr. i



Mynd 13: Hnitakerfi

Heimildaskrá

Charles C. Nguyen, Sami Antrazi og Zhen-Lei Zhou. (1991). *Analysis and design of a six-degree-of-freedom Stewart Platform-based robotic wrist.* Sótt af ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19910007810.pdf

Timothy Sauer. (2012). $Numerical\ analysis.Boston : PearsonEducation, Inc..$