

Exercice récapitulatif (Partie 1)

Soient les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & -7 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Définissons les ensembles suivants :

- $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = Bx\},$
- $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 = x_2\}.$

Questions :

1. Donnez un espace vectoriel dans lequel E_1 et E_2 sont inclus.
2. E_1 est-il un sous-espace vectoriel ? Justifiez.
3. E_2 est-il un sous-espace vectoriel ? Justifiez.
4. Calculez l'image de $A - B$, puis donnez une base de $\text{Im}(A - B)$.

Exercice récapitulatif (Partie 2)

5. Trouvez le noyau de $A - B$, puis donnez une base de $\ker(A - B)$.
6. Trouvez le noyau de B , puis donnez une base de $\ker(B)$.
7. La famille suivante est-elle une base de \mathbb{R}^3 ?

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

8. Soit $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$. Les colonnes de C forment-elles une base de \mathbb{R}^3 ?
9. **Bonus** : Quel est le noyau de la matrice nulle de taille 3×3 ?