MTH1008 – Chapitre 7 : Réflexion complémentaire

Le corps des scalaires d'un espace vectoriel

Revenons sur la définition qui est donnée d'un espace vectoriel dans le transparent 5 du chapitre 5 :

> Un espace vectoriel **(réel)** est un ensemble V muni de deux opérations : si u et v sont des éléments de V et $c \in \mathbb{R}$, alors on définit des éléments $u + v \in V$ et $cu \in V$.

De nombreux espaces vectoriels rencontrés en génie sont des espaces vectoriels réels, ce qui justifie largement de n'étudier qu'eux dans le cadre de ce cours. Mais il en existe d'autres, et s'y intéresser apporte une nouvelle perspective sur des concepts très importants.

Dans la définition ci-dessus, supposons non plus que $c \in \mathbb{R}$, mais que $c \in \mathbb{C}$. V sera alors appelé un *espace vectoriel complexe*. Pourquoi est-ce que modifier nos scalaires est un changement si important qu'il mérite aussi un changement de nom de l'espace ? C'est ce que ce travail va mettre en lumière.

De manière générale, dans la définition précédente, on peut remplacer $c \in \mathbb{R}$ par $c \in \mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ est un ensemble vérifiant certaines propriétés (volontairement mises de côté ici pour ne pas complexifier les choses). $\mathbb{K}$ est appelé le *corps des scalaires* et on dit que V est *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K}$[1]. Souvent, on aura $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$\mathbb{C}$ est un espace vectoriel réel.

L'addition dans $\mathbb{C}$ est définie comme suit : pour $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$, on a : $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$. La multiplication par $c \in \mathbb{R}$ est définie par $cz_1 = ca_1 + i(cb_1)$.

1. Montrer que $\mathbb{C}$ est fermé pour l'addition de nombres complexes et pour la multiplication par un scalaire **réel**. On considérera cela suffisant pour montrer que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel : on pourrait démontrer les 8 autres propriétés, mais elles sont relativement évidentes une fois que le travail est fait pour $\mathbb{R}$.
2. Soient $z_1 = 1$ et $z_2 = i$. Montrer que $\text{Vect}\{z_1, z_2\} = \mathbb{C}$.
3. Montrer que la famille $\{z_1, z_2\}$ est linéairement indépendante dans $\mathbb{C}$. [*Indication : ceci se montre exactement comme dans* $\mathbb{R}$ *: prendre* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *tels que* $c_1z_1 + c_2z_2 = 0 = 0 + 0i$ *et montrer que forcément,* $c_1 = c_2 = 0$.] On a donc obtenu une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}$.
4. Quelle est la dimension de $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel (réel) ?

$\mathbb{C}$ est un espace vectoriel complexe.

Pour définir un espace vectoriel complexe, il suffit de changer nos scalaires. Considérons donc maintenant la multiplication par un scalaire complexe, et non plus par un scalaire réel : pour $z = a + ib$ et $c = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} cz &= (a + ib)(\alpha + i\beta) \\ &= \alpha a + ia\beta + ib\alpha + i^2 b\beta \\ &= \alpha a + ia\beta + ib\alpha - b\beta \\ &= (\alpha a - \beta b) + i(a\beta + b\alpha). \end{aligned}$$

1. Le mot "corps" a une signification particulière, que nous n'aborderons pas ici. Dans la littérature anglophone, $\mathbb{K}$ peut être remplacé par $\mathbb{F}$, puisque *corps*, au sens mathématique, se dit *field* en anglais.

1. Montrer que $\mathbb{C}$ est toujours fermé pour la multiplication par un scalaire **complexe**, telle que définie ci-dessus. Puisque l'opération d'addition entre nombres complexes n'a pas changé, on peut considérer que $\mathbb{C}$ est toujours un espace vectoriel avec cette nouvelle opération. Comme les scalaires sont désormais complexes, nous avons montré que $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel *complexe*. Nous allons voir qu'une propriété importante de l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ change lorsque l'on considère cette multiplication par des scalaires complexes.
2. Le fait de multiplier par des scalaires complexes permet de créer des combinaisons linéaires complexes : désormais, on a

$$\mathrm{Vect}\{z_1, ..., z_n\} = \{c_1 z_1 + ... + c_n z_n \quad : \quad c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}\},$$

alors que pour un espace vectoriel réel, on avait $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$. Soit $z = 1 + i$. Montrer qu'avec des combinaisons linéaires complexes, on a $\mathrm{Vect}\{z\} = \mathbb{C}$.
3. Lorsque l'on change les scalaires et donc les combinaisons linéaires, on peut ainsi engendrer tout $\mathbb{C}$ avec un seul vecteur ! Montrer que la famille $\{z\}$ est libre dans $\mathbb{C}$. Ceci est évident, mais vous forcera à poser correctement vos raisonnements : ici, on doit écrire $cz = 0$ avec $c \in \mathbb{C}$ (et plus $\mathbb{R}$!) et montrer qu'alors, $c = 0$.
4. En déduire que la dimension de $\mathbb{C}$ avec la multiplication par des scalaires complexes n'est pas la même que la dimension de $\mathbb{C}$ avec la multiplication par des scalaires réels. On dit que la dimension de $\mathbb{C}$ en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ est différente de $\mathbb{C}$ en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.