

TD#7 – Solutions

1 Nombres complexes : exercices supplémentaires

Exercice 11

1. Vrai. $z = \operatorname{Re}(z) \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
2. Vrai. Si $z = a + ib$, alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, or une racine carrée est un nombre réel positif ou nul.
3. Faux. Contre-exemple : $0 \in \mathbb{C}$ admet pour arguments $0, 2\pi, 4\pi \dots$
4. Faux. Contre-exemple : $z_1 = i, z_2 = -i$.
5. Vrai. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = 1$, alors $z^{2n} = (z^n)^2 = 1^2 = 1$, donc z est également une solution de $z^{2n} = 1$.
6. Faux. $B = \frac{1}{2}(A^\top + A)$ est symétrique mais pas nécessairement hermitienne. Contre-exemple : $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$ donne $B = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$, qui n'est pas hermitienne (les termes diagonaux ne sont pas réels).
7. Vrai. $B^* = \left(\frac{1}{2}(A^* + A)\right)^* = \frac{1}{2}(A + A^*) = \frac{1}{2}(A^* + A) = B$, donc B est bien hermitienne.

Exercice 12

1.

$$\begin{aligned} |z_1| &= \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4, \\ \cos \theta &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \sin \theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \theta &= \frac{\pi}{3}, \quad z_1 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}. \end{aligned}$$

2.

$$z_1^3 = (4e^{i\frac{\pi}{3}})^3 = 4^3 e^{i3 \cdot \frac{\pi}{3}} = 64e^{i\pi} = 64(-1) = -64.$$