MTH1008 (Algèbre linéaire appliquée) – TD6

Nombres complexes : exercices

Exercice 1 : quelques démonstrations. La formule de DE MOIVRE est facile à démontrer lorsque l'on connaît l'écriture exponentielle des nombres complexes. Essayons de la démontrer en n'utilisant que les écritures algébrique et polaire.

Soient $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ et $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$.

1. On cherche à montrer que $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$ sans passer par la forme exponentielle.
   (a) Donner l'écriture algébrique de $z_1 z_2$.
   (b) En déduire la forme développée de $|z_1 z_2|$.
   (c) Calculer la forme développée de $|z_1|\,|z_2|$.
   (d) Identifier les formes obtenues en (b) et (c) puis conclure que l'égalité est valide.
2. De la même manière, on cherche à montrer que $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$, en utilisant cette fois l'écriture polaire. Supposons donc que $\arg(z_1) = \theta_1 \in]-\pi, \pi]$ et $\arg(z_2) = \theta_2 \in]-\pi, \pi]$.
   (a) Développer le produit des formes polaires :
   $$z_1 z_2 = |z_1|\,(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))\,|z_2|\,(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)).$$
   (b) Rappelons deux formules issues du cours de trigonométrie : pour tous réels a et b,
   $$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
   $$\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b).$$
   En utilisant ces formules, développer l'expression
   $$\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2).$$
   (c) Identifier les expressions obtenues en (a) et (b) puis conclure que l'égalité est valide : l'argument du produit est la somme des arguments.
3. Une dernière étape nous sépare de la formule de DE MOIVRE. À partir des résultats obtenus en 1. et 2., démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ les propriétés suivantes :
   (a) pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$ [*Indication :* pour la base de la récurrence, remarquer que $z^0 = 1 \in \mathbb{R}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$.] ;
   (b) pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\arg(z^n) = n\arg(z)$ [*Indication :* pour la base de la récurrence, remarquer que $\arg(z^0) = \arg(1) = \arg(1 + 0i)$, pour tout $z \in \mathbb{C}$.].
4. Déduire de tout ce qui précède la formule de DE MOIVRE : pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, si $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta$, alors
   $$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$
   Remarquer qu'on aurait pu s'épargner la question 3. : avec les conclusions des questions 1. et 2., on peut directement démontrer par récurrence la formule de DE MOIVRE.

Exercice 2 ([Ste16] : 2.5. - 4, 5, 7) Donner les expressions algébriques $(a + bi)$ des nombres complexes suivants :

1. $(1 + 2i)(8 - 3i)$;
2. $\overline{12 + 7i}$;
3. $\frac{1+4i}{3+2i}$.

Exercice 3 ([Ste16] : 2.5. - 37, 39) Donner les formes polaires de $z, w, zw, \frac{z}{w}$ et $\frac{1}{z}$ pour :

1. $z = \sqrt{3} + i, w = 1 + \sqrt{3}i$;
2. $z = 2\sqrt{3} - 2i, w = 1 + i$

Exercice 4 Donner l'ensemble des nombres complexes $z = a + bi \in \mathbb{C}$ tels que :

1. $\mathrm{Re}(z\bar{z}) \leqslant \mathrm{Im}(z(1+4i))$;
2. $z^2 + 2z - 3 \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 ([Ste16] : 2.5. - 41, 43) Trouver la puissance indiquée à l'aide de la formule de De Moivre (le résultat peut être donné sous n'importe laquelle des trois formes connues pour les nombres complexes) :

1. $(1+i)^{20}$;
2. $(2\sqrt{3} + 2i)^5$.

Exercice 6 ([Ste16] : 2.5. - 20, 27) Trouver toutes les solutions des équations suivantes :

1. $x^4 = 1$;
2. $x^2 + 2ix + 1 = 0$.

Exercice 7. Utiliser la formule de De Moivre pour exprimer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Exercice 8. Trouver l'ensemble :

1. des racines quatrièmes de i, i.e. l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^4 = i$;
2. des racines cubiques de $1 - i$, i.e. l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^3 = 1 - i$.

Exercice 9.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Exprimer, en fonction de $\bar{z}$, le conjugué du nombre complexe :

$$\frac{7iz - i}{z + i}$$

2. Donner les formes algébriques $(a + bi)$ des nombres complexes suivants :
   (a) $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$;
   (b) $\frac{2+3i}{1-5i}$;
   (c) $\frac{1}{i^{45}}$;
   (d) $e^{2+i\pi}$.

Références

[Ste16] James Stewart. *Calcul à plusieurs variables*. 2ème édition, traduite de l'anglais par Jean Guérin. Modulo, 2016. isbn : 9782897320515.