Équations linéaires, dépendance linéaire

Cours #1

MT1008 – Hiver 2026

Nathan Allaire, Théo Denorme, Sacha Benarroch-Lelong

Objectifs

À l'issue de ce cours, vous serez capables :

- de comprendre un système linéaire sous plusieurs de ses formes, algébriques et géométriques, et de le transformer ;
- d'appliquer l'algorithme du pivot de Gauss sur des matrices quelconques, et de nommer les types de matrices qu'il peut fournir (matrices échelonnées et échelonnées réduites) ;
- d'exprimer l'ensemble des solutions d'un système linéaire sous forme paramétrique ;
- de manipuler des combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathbb{R}^n$;
- de déterminer si famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est liée ou libre.

Plan de cours

Plan de cours

Équation linéaire

Définition

On appelle **équation linéaire** d'inconnues $x_1, x_2, ..., x_n$ une équation que l'on peut mettre sous la forme :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b \tag{1}$$

où les coefficients $a_1, a_2, ..a_n$ et b sont des réels ou des complexes.

Exemples

1. $2x_1 - 3x_2 = -1$
2. $x + 2y + z = a$
3. $(1+i)x_1 + 3ix_2 + x_3 = 2i$
4. $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

Système d'équations linéaires

Définition

On appelle **système d'équations linéaires** (abrégé SÉL) un ensemble d'une ou plusieurs équation(s) linéaire(s) dont les inconnues sont identiques.

Exemples

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 = -2 \end{cases}$$

dont les inconnues sont x_1 et x_2.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 & (2) \\ -x_3 + 3x_4 = -2 & (3) \end{cases}$$

dont les inconnues sont x_1, x_2, x_3 et x_4. Implicitement, (2) doit être lue $2x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$ (de même pour (3)).

Solutions d'un SÉL

Définition

On appelle **solution** d'un système d'équation linéaire toute *liste de nombres*[1] $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ qui satisfait chacune des équations du système.

Exemple

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 = -2 \end{cases}$$

admet pour solution $(s_1, s_2) = (-1, -1)$.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -x_3 + 3x_4 = -2 \end{cases}$$

admet pour solution $(s_1, s_2, s_3, s_4) = (0, 0, 2, 0)$.

À vous de vous en convaincre.

L'expression "le système *admet* $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ pour solution" ne signifie pas que $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ en est **la seule** solution !

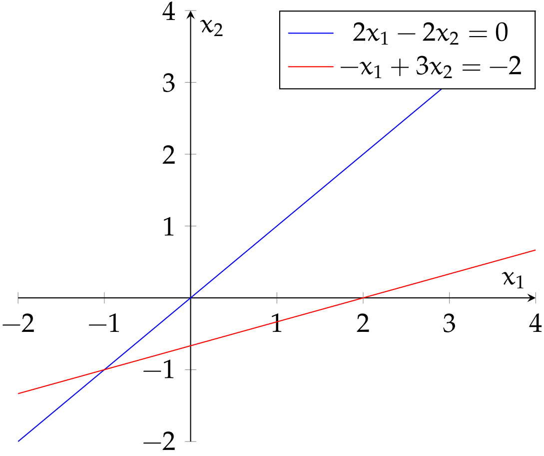
1. Ce terme trop vague sera vite à prescrire de votre vocabulaire, il sera précisé plus tard.

Visualiser un SÉL... | ... par ses lignes

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 & (4) \\ -x_1 + 3x_2 = -2 & (5) \end{cases}$$

dont une solution est $(-1, -1)$.

- Chaque point (x_1, x_2) de la droite bleue satisfait l'équation (4).
- Chaque point (x_1, x_2) de la droite rouge satisfait l'équation (5).



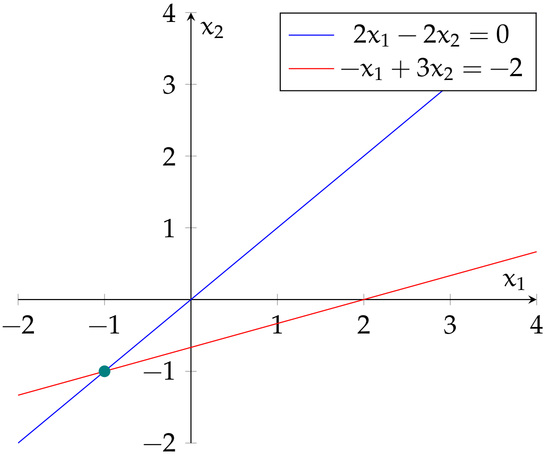
Visualiser un SÉL... | ... par ses lignes

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 = -2 \end{cases}$$

dont une solution est $(-1, -1)$.

- À l'intersection des deux droites, les deux équations sont satisfaites en même temps :

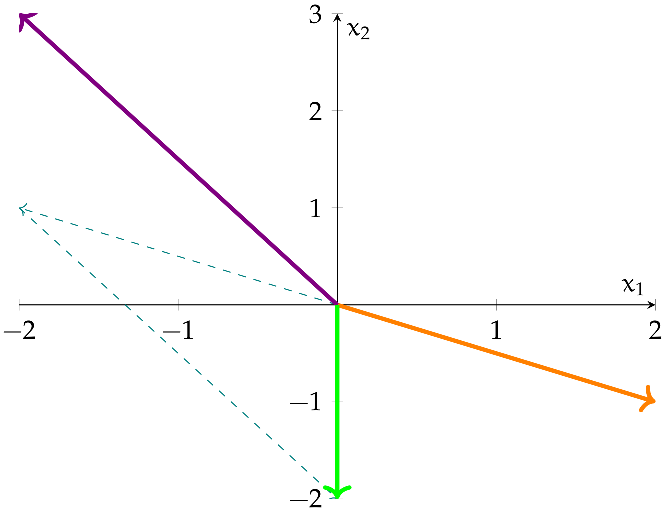
$$\begin{cases} 2 \times (-1) + (-2) \times (-1) = 0 \\ -1 \times (-1) + 3 \times (-1) = -2 \end{cases}$$



Visualiser un SÉL... | ... par ses colonnes

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 = -2 \end{cases}$$

$$-1 \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + (-1) \times \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

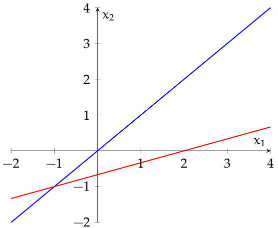


Nombre de solutions d'un SÉL

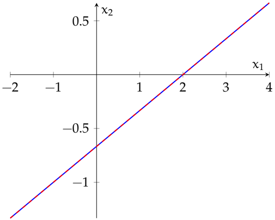
Considérons un SÉL quelconque. Combien de solutions peut-il admettre ?

- Une solution unique (c'est le cas du système utilisé dans les deux diapos précédentes).
- Une infinité de solutions (c'est le cas de l'exemple de droite dans la slide 5).
- Aucune solution.

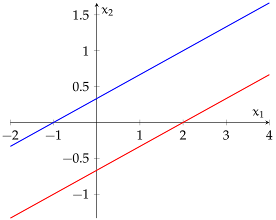
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x_1 + 6x_2 = -4 \\ -x_1 + 3x_2 = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 = -2 \end{cases}$$



(a) Une solution unique



(b) Une infinité de solutions



(c) Aucune solution

Un peu de vocabulaire...

Définition

- Un SÉL admettant au moins une solution est dit **compatible** (ou **réalisable**).
- Un SÉL n'admettant aucune solution est dit **incompatible** (ou **irréalisable**).

Définition

Un SÉL admettant autant d'équations que d'inconnues est appelé un système **carré**.

Par abus de langage, on appelle parfois **rectangulaire** un système qui n'a pas autant d'équations que d'inconnues. En toute rigueur, un système carré est aussi rectangulaire.

Exercices

Tracer les droites et déduire le nombre de solutions des SÉLs suivants :

1.
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} -2x + 2y = 2 \\ 2x - 2y = -2 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 - x_2 = -2 \end{cases}$$

Plan de cours

Résolution d'un SÉL

Exemple

Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ 5x_1 - 5x_3 = 10 \end{cases} .$$

2 méthodes :

1. Par substitution : on isole une variable et on recommence $\Longrightarrow$ on se trompe 90% du temps.
2. Par **pivot de Gauss** (voir méthode slide 15) $\Longrightarrow$ on se trompe 10% du temps

Et à la fin, **on vérifie que la solution trouvée est correcte.**

Méthode du pivot de Gauss pour résoudre un SÉL

1. **Écrire** la matrice augmentée du système.
2. **Appliquer** une suite d'opérations élémentaires pour obtenir une matrice complète équivalente sous forme échelonnée.
3. Grâce à la forme échelonnée, déterminer si le système est compatible. S'il n'y a pas de solution, c'est terminé ; sinon, aller à l'étape suivante.
4. **Appliquer** une suite d'opérations élémentaires pour obtenir une matrice sous forme échelonnée réduite.
5. **Réécrire** chaque équation non nulle issue de l'étape 3 de façon à exprimer son unique inconnue principale en fonction des inconnues non principales apparaissant dans l'équation.

Matrice augmentée d'un SÉL

Définition

La **matrice augmentée** correspondant à un SÉL est construite en prenant les coefficients de chaque variable dans le SÉL et en ajoutant les termes constants à la fin de chaque ligne.

Exemple

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ 5x_1 - 5x_3 = 10 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{array}\right]$$

La matrice augmentée est particulièrement utile car elle permet de travailler avec des méthodes de calcul matriciel pour trouver les solutions du système.

Matrices échelonnées

Ici, on appelle **coefficient principal** d'une ligne le premier[2] coefficient non nul d'une ligne.

Définition

Une matrice rectangulaire est dite sous forme échelonnée si :

1. toutes les lignes non nulles sont au dessus de toutes les lignes nulles ;
2. le premier coefficient principal de chaque ligne se trouve dans une colonne située à droite de celle du coefficient principal de la ligne au dessus d'elle ;
3. tous les coefficients situés dans une colonne en dessous d'un coefficient principal sont nuls.

$\rightarrow$ **"Matrice en escalier"**

2. en lisant de gauche à droite

Matrices échelonnées

Exemple

Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont sous forme échelonnée ?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Réponse : A et C. Dans B, le point 2 de la définition est mis en défaut. Dans D, c'est le point 1.

Matrice échelonnée réduite

Définition

Une matrice rectangulaire est dite sous forme échelonnée réduite si :

1. elle est échelonnée ;
2. le coefficient principal de chaque ligne non nulle est égal à 1 ;
3. les coefficients principaux (égaux à 1) sont les seuls éléments non nuls de leurs colonnes.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Unicité

Proposition

Toute matrice est équivalente à une infinité de matrices sous forme échelonnée.

Démonstration. Si A est équivalente à B et que B est sous forme échelonnée, appliquer une opération de mise à l'échelle sur une des lignes de B la modifie, mais elle reste sous forme échelonnée. □

Théorème

Toute matrice est équivalente selon les lignes à une unique matrice échelonnée réduite.

Démonstration. Bien moins évidente : voir l'annexe A du livre de référence. □

Pivots

Définition

Dans une matrice échelonnée, le **pivot** d'une ligne est le premier élément non nul de cette ligne.

$$\text{Dans une matrice échelonnée :} \quad \boxed{\text{pivot} \iff \text{élément principal}}$$

On appelle **colonne pivot** d'une matrice A une colonne de A contenant un pivot.

Un pivot ne peut donc, par définition, **pas être nul**.

Exemple

Donner les pivots et les colonnes pivot de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Forme échelonnée et solutions

Théorème

Un SÉL est compatible si et seulement si une matrice échelonnée équivalente à sa matrice augmentée ne comporte aucune ligne de forme

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & b \end{array}\right]$$

avec $b \neq 0$.

Théorème

Si un SÉL est compatible, il admet une solution unique si et seulement si une matrice échelonnée équivalente à sa matrice augmentée admet un pivot dans chacune de ses colonnes, sauf la dernière.

Algorithme d'élimination de Gauss

On décrit l'algorithme d'élimination de Gauss appliqué sur une matrice de taille $m \times n$.

1. Phase de descente
   - Pour chaque colonne $j \in \{1, 2, \dots, n\}$
     - Si la colonne j contient un pivot : appliquer une suite d'opérations élémentaires pour obtenir des 0 en-dessous du pivot.
     - Sinon : la colonne j est déclarée libre.

   $\rightarrow$ **Une** forme échelonnée équivalente à A. Indique : compatibilité, nombre de solutions.

2. Phase de remontée
   - Pour chaque colonne $j \in \{n, n-1, \dots, 1\}$
     - Si la colonne j contient un pivot : appliquer une suite d'opérations élémentaires pour obtenir des 0 au-dessus du pivot.
     - Si la colonne est libre : rien à faire.
   - Pour chaque ligne $i \in \{1, 2, \dots, m\}$
     - Si la ligne i contient un pivot : diviser la ligne i par ce pivot.
     - Sinon : rien à faire.

   $\rightarrow$ **La** forme échelonnée réduite équivalente à A. Donne la/les solution(s).

Opérations élémentaires du pivot de Gauss

Définition

On appelle **opération élémentaire** l'une des trois opérations suivantes effectuées sur les lignes d'une matrice :

1. ajout à une ligne d'un multiple d'une autre ligne : $\underset{}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}{\sim}}$
2. échange de 2 lignes : $\overset{L_3 \leftrightarrow L_2}{\sim}$
3. multiplication d'une ligne par un facteur : $\overset{L_1 \leftarrow -\frac{1}{2} L_1}{\sim}$

Attention !

- **Pas de multiplication d'une ligne durant la descente**.
- Éviter les opérations de type $L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2$ (multiplication de la ligne qui reçoit) : mathématiquement correctes, mais elles exposent à des erreurs.

Réduction de la matrice de l'exemple

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -8 & 8 \\ 0 & 0 & \boxed{30} & -30 \end{bmatrix} \textit{ échelonnée } \overset{L_3 \leftarrow L_3/30}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 + 8L_3}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow L_2/2}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2}{\sim} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \textit{ échelonnée réduite}$$

Représentation graphique de la solution

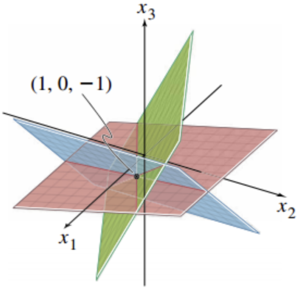


Figure – Représentation graphique de la solution (honteusement tirée du livre)

Ici, la solution $(1, 0, -1)$ appartient aux 3 plans : unique solution du SÉL.

Bilan : formes échelonnées et solutions

Quelles informations lire dans les formes échelonnée et échelonnée réduite équivalentes à $[A|\mathbf{b}]$?

Existence d'une solution	$\rightarrow$	Forme échelonnée	Aucune ligne de forme $[0\ 0\ \dots\ 0 \mid b]$ avec $b \neq 0$.
Unicité de la solution	$\rightarrow$	Forme échelonnée	Un pivot par colonne
Solution	$\rightarrow$	Forme échelonnée (réduite)	Écrire les équations correspondant à chaque ligne et si besoin, fixer des valeurs pour les variables libres

Exercices

Les systèmes suivants sont-ils compatibles ? Si oui, en donner au moins une solution.

1. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} -x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

Plan de cours

Rappel des bases

Notation des vecteurs :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^\top = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des vecteurs à n composantes réelles est noté $\mathbb{R}^n$.

Opérations de base : si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors :

- Addition : $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$.
- Soustraction : $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots, u_n - v_n)$.
- Multiplication scalaire : $\alpha\mathbf{v} = (\alpha u_1, \alpha u_2, \ldots, \alpha u_n)$.

Combinaisons linéaires

Définition

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ tout vecteur de forme

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_p\mathbf{v}_p = \sum_{i=1}^{p} x_i\mathbf{v}_i$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$.

Ensemble engendré

Définition

On appelle **ensemble engendré** (ou **ensemble généré**) par les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$ l'ensemble des combinaisons linéaires possibles de ces vecteurs. Cet ensemble est noté $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$:

$$\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\} = \{x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_p\mathbf{v}_p : x_1, x_2, \ldots, x_p \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

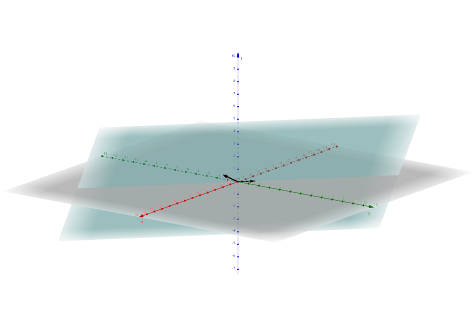
Il est impératif de noter que tout élément de $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ est un **vecteur** de même taille que chacun des vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_p$.

Ensemble engendré

Exemples

Soit $\mathbf{v} = (1, 1)$. Décrire géométriquement $\text{Vect}\{\mathbf{v}\}$ et donner un de ses éléments.

Soient $\mathbf{v}_1 = (2, 0, 1)$ et $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 0)$. Décrire géométriquement $\text{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ et donner un de ses éléments.



Plan de cours

Le produit $A\mathbf{x}$

Rappel

Ce produit n'est défini que si A a autant de colonnes que $\mathbf{x}$ a de composantes !

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

En étudiant les lignes :

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \cdot \mathbf{x} \\ (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}) \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix}$$

En étudiant les colonnes :

$$A\mathbf{x} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Le produit $A\mathbf{x}$

Le produit matrice-vecteur peut donc se comprendre de deux façons, selon que l'on s'intéresse aux lignes ou aux colonnes de A. On note :

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\ell}_1^\top \\ \boldsymbol{\ell}_2^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{\ell}_m^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix}$$

Premier point de vue

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{\ell}_1, \mathbf{x} \rangle \\ \langle \boldsymbol{\ell}_2, \mathbf{x} \rangle \\ \vdots \\ \langle \boldsymbol{\ell}_m, \mathbf{x} \rangle \end{bmatrix}$$

La $i^{\text{ème}}$ ligne de $A\mathbf{x}$ est le produit scalaire entre $\mathbf{x}$ et la $i^{\text{ème}}$ ligne de A.

Deuxième point de vue

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \ldots + x_n\mathbf{c}_n$$

Le produit $A\mathbf{x}$ est la combinaison linéaire des colonnes de A dont les coefficients sont les composantes de $\mathbf{x}$.

Lien avec les SÉLs | Reformulation sous forme matricielle

Le produit $A\mathbf{x}$ peut s'interpréter comme le membre de gauche d'un SÉL :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \iff \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\iff x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Lien avec les SÉLs | Existence d'une solution

Soit $A = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Proposition

Soit $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. On a alors :

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ admet une solution } &\iff \mathbf{b} \text{ est une combinaison linéaire des colonnes de } A \\ &\iff \mathbf{b} \in \operatorname{Vect}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}. \end{aligned}$$

C'est ce qu'illustre l'exemple de la slide 9 : $(0, -2)$ est une combinaison linéaire de $(2, -1)$ et $(-2, 3)$.

Lien avec les SÉLs | Existence d'une solution pour tout $\mathbf{b}$

Proposition

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Les énoncés suivants sont équivalents :

1. L'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est compatible pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.
2. Tout vecteur de $\mathbb{R}^m$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des colonnes de A.
3. Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$.
4. $\mathrm{Vect}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\} = \mathbb{R}^m$.
5. A contient un pivot dans chacune de ses lignes.

Plan de cours

Équation homogène

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. On appelle **équation homogène** associée à A le système d'équations linéaires

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Attention !

On pourrait penser que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet pour seule solution $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ceci est vrai pour certaines matrices, mais faux pour d'autres. Vérifiez avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Note aux futur.e.s vous : Trouver toutes les solutions à $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ fournit des informations essentielles sur A, à tel point que l'on donnera un nom à l'ensemble des solutions de cette équation (*spoiler* : cours #4.).

Utilité de l'équation homogène

Théorème

Soient $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ tels que le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ soit compatible. Soit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ une solution de ce système. L'ensemble de toutes les solutions de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est l'ensemble des vecteurs de forme

$$\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{x}_h$$

où $\mathbf{x}_h$ est une solution de l'équation homogène $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Démonstration. □

Utilité de l'équation homogène

Exemple

En sachant que le SÉL

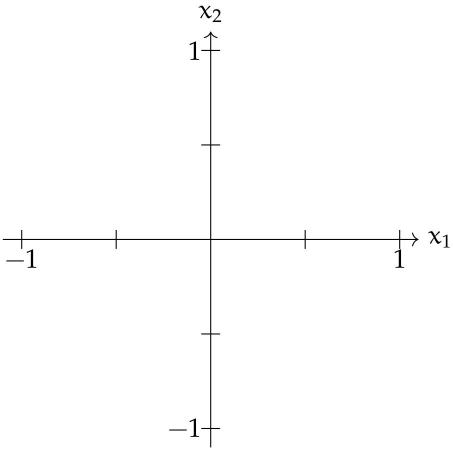
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 2 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 6x_1 + 10x_2 - 8x_3 = 4 \end{cases}$$

admet pour solution $\mathbf{p} = (0, 1, 3/4)$, déterminer une représentation paramétrique de l'ensemble des solutions de ce système.

Plan de cours

Idée géométrique

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



- $\mathbf{u}_3 \in \text{Vect}\{\mathbf{u}_1\}$?
- $\mathbf{u}_2 \in \text{Vect}\{\mathbf{u}_1\}$?
- $\mathbf{u}_4 \in \text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$?
- $\mathbf{u}_4 \in \text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\}$?
- $\mathbf{u}_5 \in \text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$?

Définitions

Définition

Soient $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ p vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

- On dit que les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ sont **linéairement dépendants** si au moins l'un de ces p vecteurs peut s'écrire comme une combinaison linéaire des $p-1$ autres, i.e. s'il existe $i \in [\![1;p]\!]$ tel que

$$\mathbf{v}_i \in \operatorname{Vect}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_p\}.$$

  On dit aussi que la **famille** $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p)$ est **liée**.
- Dans le cas contraire, on dit que les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ sont **linéairement indépendants**, ou que la famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p)$ est **libre**.

En pratique...

Proposition

La famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p)$ est libre si et seulement si l'équation vectorielle

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

admet pour seule solution la solution triviale $(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \mathbf{0}$. S'il existe une solution à cette équation dans laquelle l'un des x_i n'est pas nulle, la famille est liée.

Démonstration. En classe. $\square$

En pratique...

En pratique, on utilise très souvent la proposition précédente pour déterminer si une famille est liée ou libre.

Méthode

Pour déterminer si une famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p) \subset \mathbb{R}^n$ est liée :

1. Former une matrice $A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times p}$.
2. Appliquer l'algorithme du pivot de Gauss pour obtenir une matrice échelonnée équivalente à A.
3. Si cette matrice admet un pivot par colonne, la famille est libre. Sinon, elle est liée.

Quelques propositions utiles

Proposition

Soit $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Si $p > n$, cette famille est liée.

Proposition

Toute famille contenant le vecteur nul est liée.

Démonstration. Ces deux propositions sont l'objet d'un exercice récapitulatif. □

Plan de cours

Exercices

On pose $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

a. Étudier l'indépendance linéaire de $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ et $\mathbf{v_3}$.

b. Déterminer éventuellement une relation de dépendance linéaire entre $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ et $\mathbf{v_3}$.

Théorèmes en exercices

Montrer les propositions suivantes.

- Deux vecteurs sont liés si et seulement si ils sont colinéaires (dessin).
- Une famille $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_p\}$ est liée si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.
- Une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ayant plus d'éléments que leur dimension est forcément liée.
  i.e : si $p > n$, la famille est liée.
- Une famille contenant le vecteur nul est forcément liée.

Exercice récapitulatif - Énoncé du système

Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 = 2 \\ -x_1 + 8x_3 = -4 \end{cases}$$

Partie 1 : Écriture sous différentes formes

a) Écrire le système sous forme d'**équation vectorielle**.

b) Écrire le système sous forme **matricielle** $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en précisant les dimensions de A, $\mathbf{x}$ et $\mathbf{b}$.

c) Écrire la **matrice augmentée** du système.

Exercice récapitulatif - Résolution du système

Partie 2 : Résolution du système

a) Résoudre le système en utilisant la méthode du **pivot de Gauss**, en **entourant les pivots**.

b) Vérifier que la solution trouvée satisfait le système d'équations.

Exercice récapitulatif - Étude de la famille de vecteurs

Partie 3 : Étude de la famille de vecteurs
Soit la famille de vecteurs formée par les colonnes de la matrice A de la partie 1.b :

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$$

a) La famille $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ est-elle **libre** ?

b) Soit $\mathbf{v_4} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$. La famille $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}\}$ est-elle **libre** ?

c) La famille $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_4}\}$ est-elle **liée** ? Si oui, exprimer $\mathbf{v_4}$ en fonction de $\mathbf{v_1}$ et $\mathbf{v_2}$.

Solution

Solution :

a. On forme la matrice augmentée et on applique les opérations élémentaires pour obtenir la forme échelonnée :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient donc x_1 et x_2 comme inconnues principales et x_3 comme inconnue secondaire. Les vecteurs $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ et $\mathbf{v_3}$ sont donc linéairement dépendants.
Le système est compatible, on n'a pas de ligne type "$0 = b$"

Solution (2)

b. La forme échelonnée réduite est :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On choisit $x_3 = 1$, donnant $x_2 = -1$ et $x_1 = 2$. La relation de

$$2\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3} = 0$$