MTH1008 (Algèbre linéaire appliquée) Groupe 10
Polytechnique Montréal
Hiver 2026

TD#1 – Solutions

Section 1.1

33.
$$\begin{cases} 4T_1 - T_2 - T_4 = 30 \\ -T_1 + 4T_2 - T_3 = 60 \\ -T_2 + 4T_3 - T_4 = 70 \\ -T_1 - T_3 + 4T_4 = 40 \end{cases}$$

34. $(T_1, T_2, T_3, T_4) = (20, 27.5, 30, 22.5)$.

Section 1.2

2. a. Échelonnée réduite.
   b. Échelonnée, pas réduite.
   c. Non échelonnée.
   d. Échelonnée, pas réduite.

8. x_3 est une variable libre. Il existe une infinité de solutions de forme $(-9, 4, x_3), x_3 \in \mathbb{R}$.

16. Attention : les matrices proposées sont bien des matrices augmentées, mais le livre n'ajoute pas la barre dans $[A|\mathbf{b}]$.
   a. Seule la dernière ligne peut poser problème. Une ligne de 0 doit également présenter un 0 dans la dernière colonne, sans quoi le système n'est pas compatible (l'équation associée à la dernière ligne serait de forme $0x_1 + 0x_2 = k \neq 0$, ce qui est impossible). C'est bien le cas ici, donc il est compatible. On a une équation de forme $0x = 0$, donc il y a une infinité de solutions (échec de type 2).
   b. Aucune équation de forme $0x = k \neq 0$ donc le système est compatible. Il y a des variables libres (car toutes les colonnes ne comportent pas de pivot), donc une infinité de solutions.

21. a. Faux. Considérez acquis qu'une matrice peut mener (par élimination) à plusieurs formes échelonnées différentes, mais que la forme échelonnée réduite, elle, est unique.
   b. Faux. À toute matrice.
   c. Vrai. Par définition.

d. Vrai. Une représentation paramétrique des solutions fournit de façon exhaustive les solutions d'un système ;

e. Vrai : Faux. Cette ligne se traduit par l'équation $5x_4 = 0$, qui admet pour solution $x_4 = 0$.

Section 1.5 *Note : on traite ici les exercices 6 et 16, et non 5 et 16 comme suggéré dans le plan de cours. Les exercices 5 et 6 sont identiques, mais traiter le 6 permet de faire un lien avec le 16.*

6. La forme échelonnée réduite équivalente à $[A|\mathbf{0}]$ est

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Une représentation paramétrique de l'ensemble des solutions de l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est donc

$$\{x_3(-4,3,1) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\,\{(-4,3,1)\}\,.$$

Il s'agit de la droite de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine et par le point $(-4,3,1)$.

16. Soit $\mathbf{b} = (4,7,-6)$. La matrice échelonnée réduite équivalente à $[A|\mathbf{b}]$ est

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Une représentation paramétrique de l'ensemble des solutions de l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est donc

$$\begin{aligned} \{(-5-4x_3, 3+3x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} &= \{(-5,3,0) + x_3(-4,3,1) : x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-5,3,0) + \mathbf{x}_h \text{ où } A\mathbf{x}_h = \mathbf{0}\}\,. \end{aligned}$$

Une solution particulière à $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est donc $\mathbf{x}_p = (-5,3,0)$. L'ensemble des solutions à $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est la droite identifiée à l'exercice 6, mais translatée par le vecteur $\mathbf{x}_p$.

Section 1.4

9.

$$x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

17. 3. Non, car il y a moins de pivots que de lignes.

24. a. Vrai.
    b. Vrai.
    c. Vrai.
    d. Vrai.
    e. Faux. Contre-exemple : $A = I$, et $\mathbf{b}$ peut être n'importe quel vecteur.
    f. Corrigé en classe.

Section 1.7

2. Indépendants. On le voit facilement en rangeant les vecteurs de droite à gauche dans une matrice :
$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & -8 & 2 \end{bmatrix}$$
en l'échelonnant, on trouve un pivot dans chaque colonne.

21. a. Vrai. Cette affirmation vient de la correspondance entre produit $A\mathbf{x}$ et combinaison linéaire des colonnes de A.
    b. Faux. Contre-exemple : $\mathbf{u} = (1,0), \mathbf{v} = (2,0)$ et $\mathbf{w} = (0,1)$. La famille $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ est liée mais $\mathbf{w} \notin \text{Vect}\,\{u, v\}$.
    c. Corrigé en classe.
    d. Corrigé en classe.

31. Une solution non triviale est $(1, 1, -1)$.

40. Un pivot dans chaque colonne $\implies$ aucune variable libre.