Espaces vectoriels (2/2): dimension, rang, changements de bases

Cours #5

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

MTH1008 – Hiver 2026

Nathan Allaire, Théo Denorme, Sacha Benarroch-Lelong

Bilan du cours précédent

À l'issue du cours précédent, vous êtes capables :

- de montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel ;
- de montrer qu'un sous-ensemble d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel ;
- de comprendre le noyau d'une matrice $m \times n$ comme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$;
- de comprendre l'image d'une matrice $m \times n$ comme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$;
- de construire une base d'un espace vectoriel.

Objectifs

À l'issue de ce cours, vous serez capables :

- de calculer la dimension d'un espace vectoriel ;
- de caractériser une matrice par son rang ;
- d'utiliser le rang d'une matrice pour justifier l'existence et/ou l'unicité de solutions à des systèmes d'équations linéaires ;
- d'exprimer des vecteurs d'un espace vectoriels dans plusieurs de ses bases.

Plan de cours

Rappel : on appelle **base** d'un espace vectoriel V toute famille libre et génératrice (i.e. qui engendre V) de V.

Théorème

Toutes les bases d'un espace vectoriel admettent le même nombre de vecteurs.

Démonstration. Admis. $\square$

Définition

Soit V un espace vectoriel. On appelle **dimension** de V, et on note $\dim(V)$, le nombre de vecteurs que contient n'importe quelle base de V.

Exemples

Donner les dimensions des espaces vectoriels suivants.

1. $\mathbb{R}^3$;
2. $W_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$;
3. $W_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0\}$;
4. $\mathrm{Vect}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$;
5. $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Proposition

Soit V un espace vectoriel de dimension n.

1. Si une famille de vecteurs de V contient plus de n éléments, elle est liée.
2. Si une famille de vecteurs de V génère V, elle contient au moins n éléments.

Démonstration. En classe. □

Corollaire

Soit V un espace vectoriel de dimension n.

1. Toute famille libre de n vecteurs de V est une base de V.
2. Toute famille génératrice de n vecteurs de V est une base de V.
3. V admet un unique sous-espace vectoriel de dimension n : lui-même.

Corollaire

Soient V un espace vectoriel et W un sous-espace vectoriel de V. Alors

$$\dim(W) \leq \dim(V).$$

Résumons...

Soient V un espace vectoriel et $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ une famille de vecteurs de V.

Peut être libre

Si famille libre, c'est une base de V.

Ne peut pas être libre

$p < n$

$p = n = \dim(V)$

$p > n$

p (taille de la famille)

Ne peut pas engendrer V

Si famille génératrice, c'est une base de V.

Peut engendrer V

Soit V un espace vectoriel.

1. Existe-t-il une base de V contenant le vecteur nul $\mathbf{0}_V$?
2. L'ensemble $\{\mathbf{0}_V\}$ est-il un s.e.v. de V ? Si oui, en donner une base et donner sa dimension.
3. Mêmes questions pour l'ensemble $\mathrm{Vect}\,\{\mathbf{0}_V\}$.

Déterminer une base et la dimension de chacun des espaces vectoriels suivants.

1. W_1 est le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$W_1 = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}.$$

2. $W_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}$.

3. W_3 est l'ensemble des matrices 2×2 symétriques :

$$W_3 = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A^\top = A\}.$$

4. W_4 est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_2$ défini par :

$$W_4 = \mathrm{Vect}\left\{1 + t, t + t^2\right\}.$$

Plan de cours

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. On appelle **espace des lignes** de A, et on note $\mathrm{Lgn}(A)$ l'espace engendré par les lignes de A.

Pour obtenir une écriture plus concise, on peut noter que :

$$\mathrm{Lgn}(A) = \mathrm{Im}(A^\top).$$

Remarque : la reformulation $\mathrm{Lgn}(A) = \mathrm{Im}(A^\top)$ permet d'affirmer que **$\mathrm{Lgn}(A)$ est un sous-espace vectoriel de... $\mathbb{R}^n$.**

Théorème

- Si A et B sont deux matrices équivalentes selon les lignes ($A \sim B$), alors $\mathrm{Lgn}(A) = \mathrm{Lgn}(B)$.
- Si A est sous forme échelonnée, ses lignes non nulles forment une base de $\mathrm{Lgn}(A)$.

Exemple

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

1. Combien A contient-elle de colonnes pivot ? De colonnes non pivot ? De lignes pivot ?
2. Déterminer $\dim(\mathrm{Im}(A))$, $\dim(\mathrm{Ker}(A))$ et $\dim(\mathrm{Lgn}(A))$.

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. On appelle **rang** de A et on note $\mathrm{rang}(A)$ la dimension de l'image de A :

$$\mathrm{rang}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A)).$$

En pratique,

$$\mathrm{rang}(A) = \text{ nombre de colonnes pivot de } A.$$

<u>Vocabulaire :</u>

- Si A possède un pivot dans chaque colonne, on dira qu'elle est **de plein rang colonne**.
- Si A possède un pivot dans chaque ligne, on dira qu'elle est **de plein rang ligne**.
- Si A est carrée et possède un pivot dans chacune de ses colonnes (et donc aussi de ses lignes), on dira simplement qu'elle est **de plein rang**.

Aucune matrice ne peut admettre plus d'un pivot par ligne, ni par colonne. Donc :

$$\boxed{\text{Nombre de lignes pivot} = \text{nombre de colonnes pivot} = \text{nombre de pivots de la matrice.}}$$

Ce fait a plusieurs conséquences **fondamentales**.

Proposition

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

1. $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^\top)$.
2. Puisqu'une base de $\operatorname{Lgn}(A)$ est donnée par les lignes pivot de A et qu'il y en autant que des colonnes pivot, on a toutes les égalités suivantes :

$$\dim(\operatorname{Lgn}(A)) = \dim(\operatorname{Im}(A^\top)) = \operatorname{rang}(A^\top) = \operatorname{rang}(A) = \dim(\operatorname{Im}(A)).$$

3. $\operatorname{rang}(A) \leq \min\{m, n\}$.

La dimension de $\mathrm{Ker}(A)$ correspond au nombre de colonnes non pivot de A. On peut donc en déduire que :

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - \mathrm{rang}(A).$$

Théorème (du rang)

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Alors :

$$\mathrm{rang}(A) + \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n$$

et

$$\mathrm{rang}(A) + \dim(\mathrm{Ker}(A^\top)) = m.$$

Démonstration. Très intuitive dès que l'on admet que la dimension de $\mathrm{Ker}(A)$ est le nombre de colonnes non pivot de A. On a alors :

$$\underbrace{\text{nb. de colonnes pivot de } A}_{\mathrm{rang}(A)} + \underbrace{\text{nb. de colonnes non pivot de } A}_{\dim(\mathrm{Ker}(A))} = \underbrace{\text{nb. de colonnes de } A}_{n}.$$

□

Exemple

1. Quel est le rang d'une matrice 4×5 dont le noyau est de dimension 3 ?

2. Le noyau d'une matrice 6×9 peut-il être de dimension 2 ?

3. Sans effectuer de calcul, déterminer le rang et la dimension du noyau de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Théorème (de caractérisation des matrices inversibles)

Soit A une matrice **carrée** de taille n. Tous les énoncés suivants sont équivalents.

1. A est inversible.
2. Il existe $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $CA = I_n$.
3. Il existe $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $AD = I_n$.
4. A est équivalente selon les lignes à I_n.
5. A admet n positions de pivot.
6. **A est de plein rang colonne.**
7. **A est de plein rang ligne.**
8. Pour tout $\mathbf{b}$, l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet une solution unique.
9. $A^\top$ est inversible.
10. L'équation homogène $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet la solution triviale $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pour seule solution.
11. Les colonnes de A sont linéairement indépendantes.
12. $\mathrm{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}$.
13. $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 0$.
14. Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$.
15. $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^n$.
16. $\mathrm{rang}(A) = n$.
17. Les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^n$.
18. $\det(A) \neq 0$.

Exercices

1. Soit $A = \mathrm{O}_{4,4}$. Sans calcul, donner $\mathrm{rang}(A)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(A))$. Donner ensuite une base de $\mathrm{Im}(A)$ et une base de $\mathrm{Ker}(A)$.
2. Si $A \in \mathbb{R}^{4\times 2}$, est-il possible que $\mathrm{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}$?
3. Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 4}$, est-il possible que $\mathrm{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}$?
4. Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Complétez l'énoncé suivant :

   Les colonnes de A forment une famille libre de $\mathbb{R}^{\cdots}$ $\iff$ $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = \dots$.

5. Combien vaut le rang d'une matrice de taille quelconque dont tous les coefficients valent 1 ?
6. Est-il possible que $\mathrm{Ker}(A) = \emptyset$?

On a énoncé plus tôt le théorème suivant, très important :

Théorème

Soit V un espace vectoriel de dimension n. Toute famille libre de n vecteurs de V est une base de V.

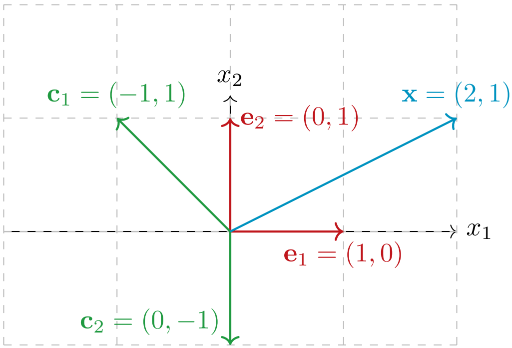
Exemple

Citer deux bases de $\mathbb{R}^2$. Par exemple,

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Exemple introductif



$$\mathbf{x} = 2\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 \quad \Longrightarrow \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = a\mathbf{c}_1 + b\mathbf{c}_2 \quad \Longrightarrow \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} &= [2\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2]_{\mathcal{C}} \\ &= 2[\mathbf{e}_1]_{\mathcal{C}} + 1[\mathbf{e}_1]_{\mathcal{C}} \\ &= \begin{bmatrix} [\mathbf{e}_1]_{\mathcal{C}} & [\mathbf{e}_2]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_1 = -\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 \implies [\mathbf{e}_1]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{e}_2 = 0\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2 \implies [\mathbf{e}_2]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}_{P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{x}]_{\mathcal{E}}} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Définition

Soient V un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$ une base de V. Pour tout $\mathbf{x} \in V$, il existe donc des nombres **uniques** $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \ldots + x_n\mathbf{b}_n.$$

Ces nombres sont appelés les **coordonnées de $\mathbf{x}$ dans la base $\mathcal{B}$**, ce que l'on note :

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Base canonique de $\mathbb{R}^n$

Parmi les bases de $\mathbb{R}^n$ (une infinité, si $n > 0$), une a été choisie comme convention pour la notation commune des coordonnées des vecteurs. On l'appelle la **base canonique** de $\mathbb{R}^n$, notée $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Ses vecteurs sont définis par :

$$\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \quad (i \in [\![1; n]\!]).$$

Ce sont donc les colonnes de la matrice I_n.

Par convention, quand on exprime un vecteur de $\mathbb{R}^n$ sans préciser de base, il s'agit de la base canonique :

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = (x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Dans l'exemple précédent, les ingrédients essentiels pour passer de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{C}$ étaient les coordonnées $[\mathbf{e}_1]_\mathcal{C}$ et $[\mathbf{e}_2]_\mathcal{C}$. La matrice obtenue comme $\begin{bmatrix}[\mathbf{e}_1]_\mathcal{C} & [\mathbf{e}_2]_\mathcal{C}\end{bmatrix}$ permet de prendre un vecteur exprimé dans la base $\mathcal{E}$ et de trouver ses coordonnées dans la base $\mathcal{C}$.

Définition

Soient V un espace vectoriel de dimension n, et $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ et $\mathcal{C} = (\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n)$ deux bases de V. Il existe une unique matrice $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que pour tout $\mathbf{x} \in V$,

$$[\mathbf{x}]_\mathcal{C} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_\mathcal{B}.$$

Cette matrice est appelée **matrice de changement de base** (ou *de passage*) **de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$**. Ses colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ exprimés dans la base $\mathcal{C}$, c'est-à-dire :

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}[\mathbf{b}_1]_\mathcal{C} & [\mathbf{b}_2]_\mathcal{C} & \ldots & [\mathbf{b}_n]_\mathcal{C}\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Calculer une matrice de passage

$$\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n) \subset V \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$
$$\mathcal{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n) \subset V \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Pour passer de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$, il nous faut les coordonnées $[\mathbf{b}_i]_{\mathcal{C}}$.

Méthode

Pour déterminer les coordonnées $[\mathbf{b}_i]_{\mathcal{C}}$, on résout le système $C\mathbf{x} = \mathbf{b}_i$, de sorte que :

$$C[\mathbf{b}_i]_{\mathcal{C}} = \mathbf{b}_i$$

L'astuce consiste à résoudre les systèmes $C\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$, $C\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$... jusque $C\mathbf{x} = \mathbf{b}_n$ en une seule fois.

Méthode

La matrice de changement de base $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ se calcule par :

$$[C|B] \sim [I_n|P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}].$$

Théorème

Soient V un espace vectoriel, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de V.

1. Les colonnes de $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ sont linéairement indépendantes.
2. $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ est inversible.
3. L'inverse de $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ est la matrice de changement de base de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{B}$:

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}^{-1} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}.$$

Décomposition

On peut toujours "intercaler" une base entre deux autres. Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ trois bases d'un espace vectoriel V.

$$P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}} = P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}} P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}.$$

Utilisation de la base canonique

Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$. En reprenant les notations de la slide 27, on a :

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{E}} & [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{E}} & \dots & [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} = P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}.$$

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = B[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}.$$

$\rightarrow$ la base canonique agit comme le "langage commun" le plus facile à manipuler entre toutes les bases de $\mathbb{R}^n$.

Soit V un espace vectoriel de dimension n.

Bases de V :

- $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n)$, $\mathcal{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n)$ et $\mathcal{D} = (\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_n)$.
- Base canonique : $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$.

Matrices de passage :

- $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} \in \mathbb{R}^n$
- $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} & [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} & \ldots & [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$
- $B = \begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{b}_n\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} = P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$
- $C = \begin{bmatrix}\mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \ldots & \mathbf{c}_n\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} = P_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}$.
- $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}^{-1} = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$
- $P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}} = P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$
- $[C|B] = \left[\begin{array}{cccc|cccc}\mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \ldots & \mathbf{c}_n & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{b}_n\end{array}\right] \sim [I_n|P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}]$

Vecteurs :

- $\mathbf{x} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{E}} = B[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = C[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$.

Exercice

Soient

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 9 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ et $\mathcal{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $\mathbf{x} = (3, -10)$. Déterminer les coordonnées de $\mathbf{x}$ dans la base $\mathcal{B}$.
3. Déterminer la matrice de changement de base $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$.
4. Déterminer le vecteur $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathbf{x} = [\mathbf{y}]_{\mathcal{C}}$.

Exercices récapitulatifs

Exercice récapitulatif 1

Soit les matrices suivantes :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Quel est le rang de T ? Donnez une base de son image.
2. Quel est le rang de N ? Donnez une base de son image.
3. Par quel vecteur compléter la base de $\mathrm{Im}(T)$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$?
4. Trouvez une base de $\mathrm{Lgn}(N)$ et déterminez sa dimension.

Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Déterminez $\mathrm{Im}(A)$ et une **base** de $\mathrm{Im}(A)$.
2. Déterminez $\mathrm{Ker}(A)$ et une **base** de $\mathrm{Ker}(A)$.
3. Vérifiez le **théorème du rang** : $\dim(\mathrm{Im}(A)) + \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n$.

Exercice récapitulatif 3

Soit une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et la matrice définie par blocs :

$$B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$$

1. Quelle est la taille de B ?
2. Exprimez $\mathrm{rang}(B)$ en fonction de $\mathrm{rang}(A)$. *(Indice : effectuez un pivot de Gauss sur $B^\top$ et comptez le nombre de pivots, rappelez vous aussi que $\mathrm{rang}(B) = \mathrm{rang}(B^\top)$).*
3. En déduire $\dim(\mathrm{Ker}(B))$ en fonction de $\mathrm{rang}(A)$.

Exercice récapitulatif 4

On considère la base suivante dans $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

et la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$:

$$P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

11 Retrouvez la base $\mathcal{B}$ en utilisant la base $\mathcal{C}$ et $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$.

12 Exprimez $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dans la base $\mathcal{C}$.