MTH1008 (Algèbre linéaire appliquée) Groupe 10
Polytechnique Montréal
Hiver 2026

TD#3 – Solutions

Section 2.4

6. En calculant le produit dans le membre de gauche, on obtient l'égalité :

$$\begin{bmatrix} XA & \mathrm{O} \\ YA + ZB & ZC \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & I \end{bmatrix}.$$

On suppose que les tailles des blocs sont telles que tous les produits et toutes les sommes sont bien définis. D'où par identification :

$$\begin{cases} XA = I & (1) \\ YA + ZB = \mathrm{O} & (2) \\ ZC = I. & (3) \end{cases}$$

— Avec (1) : si on suppose que X et A sont carrées, le théorème de caractérisation des matrices inversibles indique que A est inversible et que $\boxed{X = A^{-1}}$.
— Avec (3) : en supposant que Z et C sont carrées également, le même raisonnement donne C inversible et $\boxed{Z = C^{-1}}$.
— En reprenant le point précédent dans (2), on obtient

$$YA + C^{-1}B = \mathrm{O} \quad \Longrightarrow \quad YA = -C^{-1}B.$$

Le premier point avait montré que A était inversible, donc : $\boxed{Y = -C^{-1}BA^{-1}}$.

12. a. Traité en classe.
 b. Faux. Vous pouvez construire un contre-exemple très simple en prenant $P, Q, R, S \in \mathbb{R}^{1\times 1}$, i.e. chaque bloc est simplement un nombre.

22. Le produit s'écrit

$$M^2 = \begin{bmatrix} A^2 & \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & B^2 & \mathrm{O} \\ CA + DC & \mathrm{O} & D^2 \end{bmatrix}.$$

Il faut donc que :
(a) $A^2 = B^2 = D^2 = I$;
(b) $CA + DC = \mathrm{O}$.

Pour ce faire :

(a) en considérant l'exercice 21, on peut prendre :

$$A = B = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) on pose

$$C \triangleq \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

et on calcule :

$$\begin{aligned} CA + DC &= \begin{bmatrix} c_{11} + 3c_{12} & -c_{12} \\ c_{21} + 3c_{22} & -c_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 3c_{11} - c_{21} & 3c_{12} - c_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2c_{11} + 3c_{12} & 0 \\ 3c_{22} + 3c_{11} & 3c_{12} - 2c_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

On veut donc que les coefficients de C satisfassent le système

$$\begin{cases} 2c_{11} + 3c_{12} = 0 \\ 3c_{22} + 3c_{11} = 0 \\ 3c_{12} - 2c_{22} = 0 \end{cases}, \qquad (*)$$

et on remarque immdédiatement que le coefficient c_{21} est libre de prendre n'importe quelle valeur. Il serait tout à fait correct de résoudre le système (*), mais ce n'est en réalité pas nécessaire. Une solution évidente est $c_{11} = c_{12} = c_{22} = 0$. On fixe ensuite $c_{21} \neq 0$, ce qui permet de s'assurer que $C \neq \mathrm{O}$, comme l'énoncé l'exige.

En prenant par exemple $c_{21} = 1$, on a donc :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

et on vérifie facilement que $M^2 = I$.

Section 2.5

24. Soit $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} = \mathbf{b} &\Leftrightarrow QR\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\Leftrightarrow Q^\top QR\mathbf{x} = Q^\top \mathbf{b} \\ &\Leftrightarrow R\mathbf{x} = Q^\top \mathbf{b} \\ &\Leftrightarrow R^{-1}R\mathbf{x} = R^{-1}Q^\top \mathbf{b} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} = R^{-1}Q^\top \mathbf{b}, \end{aligned}$$

puisqu'on a supposé R inversible. Donc le système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet une solution pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, et cette solution est obtenue par $\mathbf{x} = R^{-1}Q^\top \mathbf{b}$.

Section 3.1

9.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} &= (-1)^{3+1} \times 3 \times \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} \\ &= 3 \times (-1)^{1+3} \times 5 \times \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 15 \times 1 \\ &= 15. \end{aligned}$$

10. Développer selon la deuxième ligne et trouver 12.

24. On a échangé deux lignes, ce qui multiplie le déterminant par -1. D'où :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ a & b & c \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

32. La matrice élémentaire multipliant la ligne i par k est la matrice identité donc le $i^{\text{ème}}$ terme diagonal a été remplacé par k. Cette matrice est diagonale, et sa diagonale est $(1, 1, \dots, k, \dots, 1)$, donc le déterminant vaut $1 \times 1 \times \dots \times k \times \dots \times 1 = k$.

41. Cet exercice illustre le fait que le déterminant d'une matrice 2×2 s'interprète comme l'aire du parallélogramme formé par ses deux colonnes. En remplaçant la première composante de $\mathbf{u}$ par un réel arbitraire x, l'aire du parallélogramme s'exprime comme $2x$. Il s'agit toujours du déterminant de la matrice $\begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. En réalité, le déterminant d'une matrice 3×3 correspond au volume de la forme constituée par ses 3 colonnes dans $\mathbb{R}^3$, et cela se généralise à $\mathbb{R}^n$ avec une notion plus abstraite du volume.

Section 3.2

4. Le déterminant reste inchangé lors d'une combinaison linéaire des lignes.
8. Le but est d'appliquer une combinaison des deux propriétés suivantes :
   - si une matrice carrée est diagonale et inversible, son déterminant est égal au produit de ses pivots ;
   - les opérations de combinaisons linéaires de lignes ne modifient pas le déterminant, et les opérations d'échange de lignes le multiplient par -1.

   De là, on échelonne la matrice et on obtient la forme équivalente :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

   Cette matrice est triangulaire donc son déterminant est le produit de ses éléments diagonaux, soit $1 \times 1 \times 1 \times 10 = 10$. Mais dans l'obtention de cette forme échelonnée, il a fallu effectuer un échange de lignes, donc le déterminant a changé de signe une fois. Le déterminant de la matrice originelle est donc -10.
20. On a réalisé la combinaison linéaire $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3$, qui ne modifie pas le déterminant. D'où

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+3g & e+3h & f+3i \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7.$$

42. On calcule ces 2 membres séparément.

$$\det(A) = 1, \quad \det(B) = ad - bc.$$

   D'autre part,

$$A + B = \begin{bmatrix} a+1 & c \\ b & d+1 \end{bmatrix}$$

   d'où $\det(A+B) = (a+1)(d+1) - bc$ et

$$\begin{aligned} \det(A+B) = \det(A) + \det(B) &\Leftrightarrow (a+1)(d+1) - bc = ad - bc + 1 \\ &\Leftrightarrow ad + a + d + 1 - bc = ad - bc + 1 \\ &\Leftrightarrow a + d = 0. \end{aligned}$$