TD0 | Révisions : calculs matriciel et vectoriel, systèmes d'équations linéaires
MTH1008, Été 2025, Groupe 2

Sacha Benarroch-Lelong, Polytechnique Montréal

Table des matières

§1.1. Systèmes d'équations linéaires

Exercice 2 On commence par transformer ce système en sa matrice augmentée, puis on applique la procédure d'élimination de Gauss.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -4 \\ 5 & 7 & 11 \end{array}\right] \overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 5 & 7 & 11 \end{array}\right]$$
$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 21 \end{array}\right]$$
$$\overset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -7 \end{array}\right]$$
$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & -7 \end{array}\right]$$

L'unique solution de ce système est donc le vecteur $\begin{bmatrix} 12 \\ -7 \end{bmatrix}$.

Exercice 4 Identifier ce point revient à résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 = 5 \end{cases} .$$

Avec la méthode d'élimination de Gauss, vous devriez trouver le point $\begin{bmatrix} 9/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}$.

Exercice 8 Cette matrice admet un pivot dans chaque colonne et le membre de droite est le vecteur 0_3. La seule solution est donc la solution triviale, i.e. le vecteur 0_3 lui-même.

Exercice 14 Même méthode : on écrit la matrice augmentée, puis on applique l'élimination de Gauss.

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]
\underset{\sim}{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -5/2 & -7/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
\underset{\sim}{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -5/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 7/2 & 7/2 \end{array}\right]
$$

$$
\underset{\sim}{L_3 \leftarrow \frac{2}{7}L_3}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -5/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\underset{\sim}{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{5}{2}L_3}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\underset{\sim}{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{5}{2}L_3}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\underset{\sim}{L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]
$$

L'unique solution à ce système est le vecteur $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Exercice 16 L'élimination de Gauss permet d'arriver à la forme dite *échelonnée* suivante :

$$
\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

La dernière ligne du système présente un 0 dans la colonne de droite. La seule façon pour que ce système soit compatible est qu'il n'y ait que des 0 dans le reste de cette ligne. C'est le cas ici, donc le système est bien compatible.

Exercice 30 $1 \to 2$: on a divisé la $2^{\text{ème}}$ ligne par -2. $2 \to 1$: on multiplie par -2.

§1.2. Méthode du pivot de Gauss et formes échelonnées

Exercice 2

a) Échelonnée réduite.
b) Échelonnée, pas réduite.
c) Non échelonnée.
d) Échelonnée, pas réduite.

Exercice 4

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 5 & 7 \\ 0 & \boxed{-4} & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -34 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 5 & 7 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -16 & -34 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_3 \leftarrow L_3 + 8L_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 5 & 7 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-10} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_3 \leftarrow -\frac{1}{10}L_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 5 & 7 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

Il s'agit de la forme échelonnée avec tous les pivots ramenés à 1. Les colonnes pivot sont les colonnes 1, 2 et 4. Si on n'avait pas divisé par le pivot à chaque fois, on aurait obtenu une autre forme échelonnée correcte, mais celle ci-dessus est plus pratique pour arriver à la forme échelonnée réduite ensuite :

$$\underset{\sim}{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 5 & 7 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_1 \leftarrow L_1 - 7L_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 5 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 5 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

Phases de l'élimiation de Gauss

On appelle *descente* la partie de la méthode d'élimination visant à obtenir la forme échelonnée. On appelle *remontée (triangulaire)* la partie permettant de passer de la forme échelonnée à la forme échelonnée réduite.

Exercice 16 Attention : les matrices proposées sont bien des matrices augmentées, mais le livre n'ajoute pas la barre | dans $[A|b]$.

a) Seule la dernière ligne peut poser problème. Une ligne de 0 doit également présenter un 0 dans la dernière colonne, sans quoi le système n'est pas compatible (l'équation associée à la dernière ligne serait de forme $0x_1 + 0x_2 = k \neq 0$, ce qui est impossible). C'est bien le cas ici, donc il est compatible. On a une équation de forme $0x = 0$, donc il y a une infinité de solutions (échec de type 2).

b) Aucune équation de forme $0x = k \neq 0$ donc le système est compatible. Il y a des inconnues non principales (car toutes les colonnes ne comportent pas de pivot), donc une infinité de solutions.

Unicité des solutions

Dans un système rectangulaire, avec $m < n$ (plus de colonnes que de lignes, donc plus d'inconnues que d'équations), la solution, si elle existe, ne peut pas être unique. Rappelez-vous que chaque ligne de la matrice augmentée se traduit en une équation. Considérez la matrice échelonnée

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

La $2^{\text{ème}}$ ligne se traduit par $x_3 = 3$ et en substituant, la $1^{\text{ère}}$ ligne devient $x_1 + 3x_2 + 5 \times 3 = 7$, soit $x_1 + 3x_2 = -8$ et $x_1 = -8 - 3x_2$, donc une inconnue s'exprime en fonction d'une autre : elle est non principale.

Exercice 28 Si la dernière colonne de la matrice augmentée (celle qui correspond à b) est une colonne pivot, le système est incompatible puisque la matrice échelonnée serait par exemple de forme

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{array}\right]$$

donc la dernière ligne est de type $0x = \blacksquare$, qui désigne un pivot donc un nombre non nul. Ensuite, s'il y a moins de colonnes pivots que de variables, la solution ne peut pas être unique. Il faut donc qu'il y ait exactement n colonnes pivots, hormis la dernière.

§1.4. L'équation matricielle $Ax = b$

Exercice 4

a)

$$Ax = 1\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

b)

$$Ax = \begin{bmatrix} 8 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Exercice 6 L'exercice donne la relation matricielle. Voici la relation vectorielle :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ 12 \\ -4 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Exercice 8 L'exercice donne la relation vectorielle. Voici la relation matricielle :

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & -5 & 3 \\ -2 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Exercice 10 Équation vectorielle :

$$x_1 \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Équation matricielle :

$$\begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 5 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Exercice 11

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ -2 & -4 & -3 & 9 \end{array}\right] \overset{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right]$$

$$\overset{L_3 \leftarrow \frac{1}{5} L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 5L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

L'unique solution à ce système linéaire est donc le vecteur $\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

§2.1. Opérations matricielles

Exercice 2

— Le produit $2B$ (scalaire $\times$ matrice) est bien défini et ne change pas les dimensions de la matrice. Les matrices A et $2B$ sont de taille commune 2×3. L'addition est donc définie et

$$A + 2B = \begin{bmatrix} 9 & -5 & 0 \\ 5 & -9 & -1 \end{bmatrix}.$$

— $3C$ est de taille 2×2 alors que E est de taille 2×1. La soustraction n'est donc pas définie.

Multiplication de matrices

Pour que le produit AB existe, il faut que la matrice A ait autant de colonnes que B a de lignes. Astuce visuelle : vous pouvez écrire les tailles des matrices côte-à-côte. Il faut que les nombres juxtaposés coïncident. Ils "disparaissent" pour donner la dimension de la matrice produit.
Exemple : si A est de taille 4×5 et B est de taille 5×2, on écrit

$$4 \times \mathbf{5} \quad \mathbf{5} \times 2.$$

Le produit est bien défini, les 5 disparaissent et AB est de taille 4×2.

Ici en appliquant cette règle, on a :

$$2 \times \mathbf{2} \quad \mathbf{2} \times 3.$$

Le produit est bien défini et sera de taille 2×3.

$$CB = \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-5) + 2 \cdot (-4) & 1 \cdot 1 + 2 \times (-3) \\ -2 \cdot 7 + 1 \cdot 1 & -2 \cdot (-5) + 1 \cdot (-4) & -2 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -13 & -5 \\ -13 & 6 & -5 \end{bmatrix}.$$

— On écrit

$$2 \times \mathbf{1} \quad \mathbf{2} \times 3.$$

Les dimensions au centre ne correspondent pas : le produit n'est pas défini.

Exercice 4

$$A - 5I_3 = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -8 & 2 & -6 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Pour la seconde, pas besoin d'écrire le produit entier. Remarquer que $(5I_3)A = 5(I_3A) = 5A$.

Exercice 6

a)

$$Ab_1 = A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 13 \end{bmatrix}, \quad Ab_2 = A \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

D'où $AB = [Ab_1, Ab_2] = \begin{bmatrix} 0 & 14 \\ -3 & -9 \\ 13 & 4 \end{bmatrix}$.

b) Je suppose que la règle ligne-colonne est maîtrisée (illustrée à l'exercice précédent), vous devriez trouver le même résultat.

Exercice 8 3.

Exercice 9 On calcule les produits AB et BA en conservant l'inconnue k :

$$AB = \begin{bmatrix} 23 & -10+5k \\ -9 & 15+k \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 23 & 15 \\ 6-3k & 15+k \end{bmatrix}.$$

Pour avoir égalité entre ces matrices, il faut donc que :

$$\begin{cases} -10+5k = 15 \\ 6-3k = -9 \\ 15+k = 15+k \end{cases}.$$

La dernière égalité est trivialement vérifiée pour tout k. Les 2 autres sont vérifiées uniquement pour $k = 5$. D'où $AB = BA$ si et seulement si $k = 5$.

Exercice 10 Calculer simplement les 2 produits. Remarquez bien la différence dans ce que vous auriez pu conclure si c'étaient des nombres et non des matrices ! Pour des nombres a, b et c, $ab = ac$ permet de dire que soit $b = c$, soit $a = 0$. Ici, on a bien $AB = AC$ alors que $A \neq 0$ et $B \neq C$.

Exercice 11 Revoir les points de vue 2 et 3 de la multiplication matricielle. En adoptant le 2$^{\text{ème}}$ point de vue (vous comprendrez pourquoi celui-ci en lisant), on va calculer $AD = \begin{bmatrix} Ad_1 & Ad_2 & Ad_3 \end{bmatrix}$. En calculant, on se rend compte que :

$$Ad_1 = 2a_1, \quad Ad_2 = 3a_2 \quad \text{et} \quad Ad_3 = 5a_3$$

c'est-à-dire que les colonnes de A sont simplement multipliées par les coefficients diagonaux de D. Si vous réitérez ce calcul avec le 3$^{\text{ème}}$ point de vue, vous vous rendrez compte qu'il ne fait pas apparaître cette information. En revanche, il est utile pour calculer $DA = \begin{bmatrix} d_1^\top A & d_2^\top A & d_3^\top A \end{bmatrix}$. Cette fois, en notant $\underline{a}_i$ la i$^{\text{ème}}$ ligne de A, on a :

$$d_1^\top A = 2\underline{a}_1^\top, \quad d_2^\top A = 3\underline{a}_2^\top \quad \text{et} \quad d_3^\top A = 5\underline{a}_3^\top,$$

(toutes les transposées sont juste là pour s'assurer que les produits sont bien définis), c'est-à-dire que ce sont les lignes de A qui sont multipliées par les coefficients diagonaux de D ici. Ce point de vue est moins habituel donc moins évident à visualiser, mais il se justifie en reprenant la règle ligne-colonne classique :

$$DA = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

qui montre que les coefficients de chaque ligne sont multipliés par le coefficient diagonal de D de la couleur correspondante.

En prenant pour B une matrice diagonale ayant la même valeur pour tous les termes diagonaux (i.e. $B = kI_3, k \in \mathbb{R}$), on a $AB = BA$.

Exercice 24 Il s'agit juste d'un exercice d'observation. $AD = I_m$ donc pour tout $b \in \mathbb{R}^m$, on a :

$$A \underbrace{Db}_{\in \mathbb{R}^m} = I_m b = b.$$

Donc $Db \in \mathbb{R}^m$ est une solution de $Ax = b$.

Exercice 27 Prendre le temps de poser les dimensions des vecteurs pour ne pas se tromper sur la forme du résultat.

— $u^\top v = v^\top u$ est un scalaire ;

— $u^\top v$ et $v^\top u$ sont des matrices (différentes !).

Les résultats numériques sont dans le livre.