MTH1008 - Algèbre linéaire appliquée

Nombres complexes - exercice récapitulatif

Nathan Allaire - Théo Denorme

Polytechnique Montréal

February 16, 2025

Exercice 1 - Vrai ou Faux Nombres Complexes

Répondez par vrai ou faux, justifiez bien vos réponses.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$, si $z = \mathrm{Re}(z)$ alors $z \in \mathbb{R}$.

2. Le module d'un nombre complexe z est toujours un nombre réel positif ou nul.

3. Soit n un entier positif, alors l'ensemble des solutions (dans $\mathbb{C}$) de $z^n = 1$ est inclus dans celui de $z^{2n} = 1$.

4. L'argument d'un nombre complexe est unique.

5. Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

Exercice 1 - Vrai ou Faux Nombres Complexes (suite)

6. Tout nombre complexe non nul a deux racines carrées distinctes.

7. Si z est un nombre complexe, alors e^z est toujours un nombre réel.

8. Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, alors $B = \frac{1}{2}(A^\top + A)$ est hermitienne.

9. Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, alors $B = \frac{1}{2}(A^* + A)$ est hermitienne.

10. Pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a toujours $\mathrm{Re}(z_1 z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Re}(z_2)$.

Exercice 2 - De Sacha Benarroch-Lelong

Soient $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$

1. Donnez les formes exponentielles de z_1 et z_2.

2. Donnez $z_1 z_2$ sous forme exponentielle puis sous forme polaire.

Exercice 3 - De Sacha Benarroch-Lelong

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que sa partie imaginaire est égale à sa partie réelle.

1. Montrez que $\dfrac{z}{\bar{z}} = i$.

2. Supposons en plus que $\mathrm{Re}(z) > 0$, écrivez z sous forme exponentielle en fonction de $\mathrm{Re}(z)$.

Exercice 4

Soit $z_1 \in \mathbb{C}$ défini par $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i$.

1. Exprimer z_1 sous sa forme exponentielle.
2. Calculer z_1^3 en utilisant la formule de De Moivre.
3. Déterminer les racines cubiques de z_1.

Exercice 5

Soit $z \in \mathbb{C}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{P}_3$ tel que $p(z) = a + bz + cz^2 + dz^3 = 0$.

1. Montrez que $P(\bar{z}) = 0$.
2. Soit $z_0 = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $\bar{z}_0 = z_0$. Montrez que $z_0 \in \mathbb{R}$.
3. On rappelle que p a exactement 3 racines complexes, on a pu constater que deux d'entre elles sont z et $\bar{z}$. Soit $r \in \mathbb{C}$ sa dernière racine ($r \neq z$ et $r \neq \bar{z}$). Montrez que $r \in \mathbb{R}$ (par exemple en montrant que $\bar{r} = r$).

Exercice 6

Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

1. Montrez que $B = A^*A$ est hermitienne.
2. Montrez que $\overline{B} = B^\top$.
3. On peut facilement généraliser le résultat de la question 2 de l'exercice 5 en : Pour toute matrices $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$, si $\overline{M} = M$ alors $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Montrez que $B^\top + B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.