MTH1008 (Algèbre linéaire appliquée) Groupe 10
Polytechnique Montréal
Hiver 2026

TD#2 – Solutions

Section 2.1

13. $\begin{bmatrix} Q\mathbf{r}_1 & Q\mathbf{r}_2 & \dots & Q\mathbf{r}_p \end{bmatrix} = QR$ où $R = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2 & \dots & \mathbf{r}_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ ($2^{\text{ème}}$ point de vue du produit matriciel).

16. a. Vrai. C'est le $3^{\text{ème}}$ point de vue.
    b. Faux. Dans un tel cas, $A\mathbf{b}_1 + A\mathbf{b}_2 + A\mathbf{b}_3 \in \mathbb{R}^3$ alors que $AB \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
    c. Traité en classe.
    d. Vrai.

$$\begin{aligned}(ABC)^\top &= C^\top (AB)^\top \\ &= C^\top B^\top A^\top.\end{aligned}$$

    e. Vrai. Soient

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

On a :

$$\begin{aligned}(A+B)^\top &= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}^\top \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{m1}+b_{m1} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{m2}+b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}+b_{1n} & a_{2n}+b_{2n} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= A^\top + B^\top.\end{aligned}$$

De manière plus concise, on peut dire que le coefficient (i, j) de la matrice $(A+B)^\top$ est $a_{ji} + b_{ji}$, qui correspond à la somme des coefficients (j, i) de A et B, et donc des coefficients (i, j) de $A^\top$ et $B^\top$.

Section 2.2

9. a. Vrai, mais l'une implique l'autre si A est carrée. Il s'agit de deux points du théorème de caractérisation des matrices inversibles.

   b. Faux. Soient
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
   On a :
   $$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$
   Donc
   $$A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$
   Pourtant,
   $$(AB)(A^{-1}B^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq I_2.$$
   D'où $AB^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$.

   c. Faux.
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$
   vérifie cette relation, pourtant elle n'est pas inversible.

   d. Vrai. Une solution est donnée par $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Il est même possible de montrer que cette solution est unique.

   e. Traité en classe.

Section 2.3

12. a. Vrai. Cette équivalence fait partie du théorème de caractérisation des matrices inversibles.

    b. Traité en classe.

    c. Vrai. Cette équivalence fait partie du théorème de caractérisation des matrices inversibles.

    d. Hors programme pour l'instant.

    e. Hors programme pour l'instant.

19. D est une matrice carrée dont les colonnes sont linéairement indépendantes donc d'après le théorème de caractérisation des matrices inversibles, A est inversible. D'après ce même théorème, l'équation $D\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est compatible et admet une solution unique, quel que soit $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^7$.