

# Calcul matriciel (1/2)

Cours #2

---



MT1008 – Hiver 2026

Nathan Allaire, Théo Denorme, Sacha Benarroch-Lelong

Après le cours précédent, vous êtes capables :

- de comprendre un système linéaire sous plusieurs de ses formes, algébriques et géométriques, et de le transformer ;
- d'appliquer l'algorithme du pivot de Gauss sur des matrices quelconques, et de nommer les types de matrices qu'il peut fournir (matrices échelonnées et échelonnées réduites) ;
- d'exprimer l'ensemble des solutions d'un système linéaire sous forme paramétrique ;
- de manipuler des combinaisons linéaires de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  ;
- de déterminer si famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  est liée ou libre.

À l'issue de ce cours, vous serez capables :

- de reconnaître certains types particuliers de matrices ;
- de manipuler les opérations matricielles de base (addition, multiplication, transposée) ;
- de définir et manipuler l'inverse d'une matrice carrée ;
- de justifier qu'une matrice carrée est inversible ou non ;
- de calculer l'inverse d'une matrice.

- 1 Opérations matricielles
- 2 Inverse d'une matrice
- 3 Matrices élémentaires, algorithme de Gauss-Jordan
- 4 Caractérisation des matrices inversibles

**1** Opérations matricielles

2 Inverse d'une matrice

3 Matrices élémentaires, algorithme de Gauss-Jordan

4 Caractérisation des matrices inversibles

## Définition

Soient  $m, n \in \mathbb{N}^*$ . On appelle **matrice** (de taille (ou de type))  $m \times n$  un tableau à  $m$  lignes et  $n$  colonnes constitué d'éléments du même ensemble. On la note

$$A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

L'élément  $a_{ij}$  est appelé le **coefficient** de  $A$  situé en position  $(i, j)$  pour  $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ .

## Définition

L'ensemble des matrices  $m \times n$  à coefficients réels est noté  $\mathbb{R}^{m \times n}$ . L'ensemble des matrices  $m \times n$  à coefficients complexes est noté  $\mathbb{C}^{m \times n}$ .

- Matrice nulle de taille  $m \times n$  : matrice dont tous les coefficients sont nuls, notée  $O_{m,n}$ .
- Matrice ligne : matrice de taille  $1 \times n$ .
- Matrice colonne : matrice de taille  $n \times 1$ .

## Attention !

Toutes les définitions ci-dessous ne concernent que les matrices carrées.

- Matrice carrée d'ordre/de taille  $n$  : matrice de taille  $n \times n$ .
- Diagonale principale : vecteur constitué des coefficients  $a_{ii}$  d'une matrice carrée ( $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ).
- Matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) : matrice carrée dont tous les coefficients situés en-dessous (resp. au-dessus) de la diagonale principale sont nuls. Autrement dit,  $i > j \implies a_{ij} = 0$  (resp.  $i < j \implies a_{ij} = 0$ ).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$



## Attention !

Toutes les définitions ci-dessous ne concernent que les matrices carrées.

Matrice diagonale : matrice dont tous les coefficients sont nuls, en dehors de la diagonale principale.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrice identité de taille  $n$  : matrice diagonale de taille  $n$  dont tous les coefficients valent 1, notée  $I_n$  (ou  $I$ , selon le contexte).

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de même taille  $m \times n$ .

■ Somme :

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

■ Égalité :

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij}, \text{ pour tous } i \in \llbracket 1; m \rrbracket \text{ et } j \in \llbracket 1; n \rrbracket.$$

■ Soit  $\alpha$  un scalaire (réel ou complexe).

$$\alpha A = A\alpha = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

## Proposition

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  des matrices **de même taille**. Soient  $\alpha$  et  $\beta$  des scalaires. Les opérations matricielles de base vérifient les propriétés suivantes :

- 1  $A + B = B + A$  *(commutativité de l'addition)*
- 2  $(A + B) + C = A + (B + C)$  *(associativité de l'addition)*
- 3  $A + O_{m \times n} = A$  *(élément neutre pour l'addition)*
- 4  $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = (\beta\alpha)A$
- 5  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$  *(distributivité de la multiplication scalaire sur l'addition)*
- 6  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$  *(distributivité de l'addition scalaire sur la multiplication)*

*Démonstration.* Toutes ces propriétés se prouvent en écrivant explicitement les opérations terme à terme (voir la slide suivante). □

Lorsque vous souhaitez écrire ce genre de preuve, il ne faut **jamais** décider arbitrairement d'une taille pour les matrices que vous utilisez. Hors de question, par exemple, de prouver que  $A + B = B + A$  en prenant  $A$  et  $B$  des matrices  $3 \times 2$  : il faut le prouver quelles que soient les tailles !

Voici une façon "propre" de montrer la commutativité de l'addition :

$$\begin{aligned}
 A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} & \cdots & b_{1n} + a_{1n} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} & \cdots & b_{2n} + a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} + a_{m1} & b_{m2} + a_{m2} & \cdots & b_{mn} + a_{mn} \end{bmatrix} = B + A.
 \end{aligned}$$

## Règle d'or du produit matriciel

Le produit entre  $A$  et  $B$  n'est défini que si le nombre de **colonnes** de  $A$  est égal au nombre de **lignes** de  $B$  :

$$(m \times n) \quad \times \quad (n \times p) \quad = \quad (m \times p).$$

Règle ligne-colonne

$$\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{kp} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk} b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{mk} b_{kp} \end{bmatrix}$$

Soient

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{et} \quad B \in \mathbb{R}^{n \times p}.$$

### Premier point de vue

$$(AB)_{ij} = \langle i^{\text{ème}} \text{ ligne de } A, j^{\text{ème}} \text{ colonne de } B \rangle.$$

Le coefficient  $(i, j)$  de la matrice  $AB$  est le produit scalaire entre la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $A$  et la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $B$ .

→ Règle ligne-colonne.

Si

$$A = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_m \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{c}_p].$$

## Deuxième point de vue

$$AB = [A\mathbf{c}_1 \quad A\mathbf{c}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{c}_p]$$

La  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $AB$  est le produit matrice-vecteur entre  $A$  et la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $B$ .

→ Pratique pour calculer rapidement une **colonne** du produit  $AB$ .

## Troisième point de vue

$$AB = \begin{bmatrix} \ell_1 B \\ \ell_2 B \\ \vdots \\ \ell_m B \end{bmatrix}$$

La  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $AB$  est le produit à gauche entre la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $A$  (vecteur ligne) et  $B$ .

→ Pratique pour calculer rapidement une **ligne** du produit  $AB$ .

## Exemple

Soient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

1

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

2

$$AB = \left[ A \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad A \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

3

$$AB = \left[ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} B \right] = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$



## Proposition

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  des matrices telles que les sommes et les produits ci-dessous aient un sens.

$$1 \quad A(BC) = (AB)C \quad (\text{associativité de la multiplication})$$

$$2 \quad A(B + C) = AB + AC \quad (\text{distributivité à gauche})$$

$$3 \quad (B + C)A = BA + CA \quad (\text{distributivité à droite})$$

$$4 \quad I_m A = A = A I_n \quad (\text{élément neutre pour la multiplication})$$

Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  :

$$5 \quad A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ fois}}$$

$$6 \quad A^0 = I_n$$

$$7 \quad (A^p)(A^q) = A^{p+q}, (A^p)^q = A^{pq}$$

## Pièges !

- Le produit matriciel n'est pas commutatif : dans la plupart des cas,  $AB \neq BA$ .
- De  $AB = AC$ , on **ne peut pas** déduire que  $B = C$ .
- De  $AB = O_{m,p}$ , on **ne peut pas** déduire que  $A = O_{m,n}$  ou  $B = O_{n,p}$ . Vérifier avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

## Définition

Si  $A$  est une matrice  $m \times n$ , on appelle transposée de  $A$  la matrice  $n \times m$ , notée  $A^T$ , dont les colonnes sont formées des lignes de  $A$ .

→ Les lignes deviennent les colonnes, et vice versa

## Exemple

On pose

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Alors

$$A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

## Proposition

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices dont les tailles sont compatibles avec les sommes et les produits écrits ci-dessous. Alors :

1  $(A^T)^T = A$

2  $(A + B)^T = A^T + B^T$

3 Pour tout scalaire  $\alpha$ ,  $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

4  $(AB)^T = B^T A^T$

## Définition

Une matrice **carrée**  $A$  est dite **symétrique** si  $A^T = A$ .

- 1** Soient  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  et  $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ . Calculez  $A + B$  et vérifiez que  $A + B = B + A$ .
- 2** Soit  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  et  $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ . Calculez  $A - B$  et vérifiez que  $A - B \neq B - A$ .
- 3** Soient  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$  et  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Vérifiez que  $A$  et  $B$  respectent la règle d'or, puis calculez  $AB$  et  $BA$ .

- 1** Soit  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ . Calculer  $A^2$ ,  $A^3$ .
- 2** Soit  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ . Calculer  $A^\top$ , puis annoncez les tailles de  $A^\top A$  et  $AA^\top$  (règle d'or) avant de les calculer.
- 3** Soit  $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ . Vérifier que  $BI = IB = B$ .

- 1 Opérations matricielles
- 2 Inverse d'une matrice**
- 3 Matrices élémentaires, algorithme de Gauss-Jordan
- 4 Caractérisation des matrices inversibles

### Définition

Soit  $A$  une matrice **carrée** de taille  $n$ . On dit que  $A$  est **invertible** s'il existe une matrice  $C$  de même taille telle que  $AC = I_n$ . Dans ce cas, on a également  $CA = I_n$ , et  $C$  est appelée **l'inverse** de  $A$ . Si une telle matrice  $C$  n'existe pas,  $A$  est dite **singulière** (ou **non invertible**).

### Exemple

Soit  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ . Vérifier que  $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  est l'inverse de  $A$ .



**Théorème**

Soit  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  une matrice  $2 \times 2$ .

- 1  $A$  est inversible si et seulement si  $ad - bc \neq 0$ . Dans le cas contraire,  $A$  est singulière.
- 2 Si  $A$  est inversible,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

**Exemples**

Dire si les matrices suivantes sont inversibles. Si c'est le cas, donner leurs inverses.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

## Proposition

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Si  $A$  est inversible, alors :

- 1  $A^{-1}$  est inversible et  $(A^{-1})^{-1} = A$ ;
- 2  $A^T$  est inversible et  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

## Théorème

Le produit de deux matrices inversibles est inversible. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices inversibles de taille  $n \times n$ . Alors  $AB$  est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

*Démonstration.*



Exercice : que vaut  $((AB)^T)^{-1}$  ?

**Proposition**

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Si  $A$  est inversible alors pour tout  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ , le système d'équations linéaires  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  admet une solution unique, donnée par  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ .

*Démonstration.*



- 1 Opérations matricielles
- 2 Inverse d'une matrice
- 3 Matrices élémentaires, algorithme de Gauss-Jordan**
- 4 Caractérisation des matrices inversibles

Soit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . L'application d'une opération élémentaire du pivot de Gauss sur  $A$  peut se réécrire comme une multiplication matricielle :

$$A \sim B \iff B = EA, \quad \text{où } E \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

Définition

On appelle **matrice élémentaire** de taille  $m \times m$  une matrice obtenue en effectuant une seule opération d'élimination sur les lignes de  $I_m$ .

Si  $E$  est une matrice élémentaire obtenue en effectuant une opération sur les lignes de  $I_m$ , le produit  $EA$  est le résultat de la même opération effectuée sur les lignes de  $A$ .

Permutation élémentaire de lignes  
Obtenue en réalisant  $L_i \leftrightarrow L_j$  sur  $I_m$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_1 A = A \text{ après } L_1 \leftrightarrow L_2.$$

Mise à l'échelle élémentaire d'une ligne  
Obtenue en réalisant  $L_i \leftarrow kL_i$  sur  $I_m$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

$$E_2 A = A \text{ après } L_1 \leftarrow \ell L_1.$$

Élimination élémentaire  
Obtenue en réalisant  $L_i \leftarrow L_i - \ell L_j$  sur  $I_m$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\ell & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3 A = A \text{ après } L_2 \leftarrow L_2 - \ell L_1.$$

## Proposition

Toute matrice d'élimination est inversible.

L'inverse d'une matrice d'élimination  $E$  est la matrice d'élimination du même type que  $E$  obtenue par l'opération élémentaire qui transforme  $E$  en  $I$ .

## Théorème

Une matrice carrée  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est inversible si et seulement si elle est équivalente selon les lignes à  $I_n$ .

*Démonstration.*



Conséquence : si  $A$  est inversible, il existe une suite de matrices élémentaires  $E_1, E_2, \dots, E_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telles que :

$$(E_p \dots E_2 E_1)A = I_n$$

d'où :

$$A^{-1} = E_p \dots E_2 E_1.$$



$$A^{-1} = E_p \dots E_2 E_1 = E_p \dots E_2 E_1 I_n.$$

Donc en appliquant sur  $I_n$  la suite d'opérations élémentaires qui transforme  $A$  en  $I_n$ , on obtient  $A^{-1}$ .

## Algorithme d'inversion de Gauss-Jordan

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

- 1** Construire la matrice augmentée  $[A|I_n]$ .
- 2** Appliquer sur  $[A|I_n]$  les opérations d'échelonnage-réduction nécessaires à transformer  $A$  en  $I_n$ .
  - Si  $A$  ne peut être réduite à  $I_n$ , échec :  $A$  n'est pas inversible.
  - Si  $A$  peut être réduite à  $I_n$ , l'algorithme se termine en fournissant l'inverse de  $A$  :

$$[A|I_n] \sim [I_n|A^{-1}].$$

- 1 Opérations matricielles
- 2 Inverse d'une matrice
- 3 Matrices élémentaires, algorithme de Gauss-Jordan
- 4 Caractérisation des matrices inversibles**

Ce théorème est à connaître **par cœur** !

## Théorème (de caractérisation des matrices inversibles)

Soit  $A$  une matrice **carrée** de taille  $n$ . Tous les énoncés suivants sont équivalents.

- 1  $A$  est inversible.
- 2 Il existe  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que  $CA = I_n$ .
- 3 Il existe  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que  $AD = I_n$ .
- 4  $A$  est équivalente selon les lignes à  $I_n$ .
- 5  $A$  admet  $n$  positions de pivot.
- 6 Les colonnes de  $A$  sont linéairement indépendantes.
- 7 L'équation homogène  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  admet la solution triviale  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  pour seule solution.
- 8 Les colonnes de  $A$  engendrent  $\mathbb{R}^n$ .
- 9 Pour tout  $\mathbf{b}$ , l'équation  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  admet une solution unique.
- 10  $A^\top$  est inversible.

# Exercice récapitulatif

**Partie 1 : Étude de la matrice**  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

- a) La matrice  $A$  est-elle **inversible** ?
- b) Calculez  $AA^T$ . La matrice est-elle inversible ? Si oui, calculez son **inverse**.
- c) Calculez  $A^T A$ . La matrice est-elle inversible ? Si oui, calculez son **inverse**.
- d) Que vaut  $(A^T A)^T$  ?

**Partie 2 :****a)**

Soit  $A = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ . Donnez l'**inverse** de  $A$ .

**b)**

Montrez que :

$$(A - I_3)(A + I_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**c)**

De manière générale, soit  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice carrée vérifiant :

$$(B + I_n)(B - I_n) = \mathbf{0}_n$$

Montrez que  $B$  est **inversible** et que son **inverse** est  $B^{-1} = B$ .