MTH1008 - Algèbre linéaire appliquée

Diagonalisation, Vecteurs propres et AL, Valeurs propres complexes

Nathan Allaire - Théo Denorme

Polytechnique Montréal

March 9, 2025

Solution slide 9

Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
, A étant triangulaire ses valeurs propres sont ses termes diagonnaux, donc $1, -2, 2$ et 0.
Comme $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ et a 4 valeurs propres distinctes, alors elle est diagonnalisable.

Solution slide 17

Avec

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = PDP^{-1}$$

avec $P = P_{\mathcal{E}_2 \leftarrow \mathcal{B}}$
et

$$\mathbf{x} = (1, 1)$$

On a que $[x]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}_2} x = P^{-1} x = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ Aussi
$[T(x)]_{\mathcal{B}} = D[x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -6 \end{bmatrix}$

Solution exercice récapitulatif - Exercice 1

1. Faux : $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est diagonnalisable (car diagonnale) et non inversible.
2. Vrai : Si $A = PDP^{-1}$ avec D digonnale et P inversible, alors $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$. Comme D^2 est diagonnale, A^2 est diagonnalisable (et dailleurs dans la même base de vecteurs propres que A !).
3. Vrai : Si $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ est diagonnalisable et ne possède que 7 en valeur propre, alors $A = P \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} P^{-1} = 7PIP^{-1} = 7PP^{-1} = 7I$.

Solution exercice récapitulatif - Exercice 1

4. Faux : Avec $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, A est diagonnale donc diagonnalisable et B aussi car elle possède deux valeurs propres distinctes (0 et 1), pourtant $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonnalisable car sa seule valeur propre est 0 et $\dim(\ker(A + B)) = 1 \neq 2$.

5. Faux : avec l'exemple de la question précédente $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6. Vrai : Avec l'exemple de la question 4, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ est diagonnalisable et non symétrique.

7. Vrai : Si $A = PDP^{-1}$ et inversible alors :

$$A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$$

Or comme D^{-1} reste une matrice diagonnale A^{-1} est diagonnalisable (et d'ailleurs dans la même base de vecteurs propres).

8. Faux : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ n'a que 0 en valeur propre et n'est pourtant pas digonnalisable.

9. Vrai : Si $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ alors $Ae_1 = ae_1$,$Ae_2 = be_2$,$Ae_3 = ce_3$.

Solution exercice récapitulatif - Exercice 1

10. Faux : Il n'est pas stable par somme (voir le contre exemple avec $n = 2$ à la question 4).

11. Faux : Avec $A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, on a $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$, donc A n'a que des valeurs propres réelles.

12. Vrai : Soit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ non inversible, alors A possède 0 comme valeur propre, si l'autre valeur propre de A était $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ alors $\bar{z}$ serait aussi une valeur propre et $\bar{z} \neq z$ (sinon on aurait $z = \bar{z} = 0$). Ainsi A possèderait 3 valeurs propres distinctes ce qui est impossible.

Solution exercice récapitulatif - Exercice 2

1) Les valeurs propres sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$
\begin{aligned}
&\det(A - \lambda I) = 0 \\
\Leftrightarrow &\det\left(\begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow &(4-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) = 0
\end{aligned}
$$

Les valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 1.$

Solution exercice récapitulatif - Exercice 2

2) A possède trois valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 1$. A est donc diagonalisable.

Solution exercice récapitulatif - Exercice 2

3)

$$x \in \ker(A - 4I) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = \frac{3}{2}x_3 \end{cases}$$

$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ convient.

Solution exercice récapitulatif - Exercice 2

$$
\begin{aligned}
x \in \ker(A - 3I) &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_1 = x_3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ convient.

Solution exercice récapitulatif - Exercice 2

$$x \in \ker(A-I) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ 2x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ convient. Donc $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ fonctionne.

Solution exercice récapitulatif - Exercice 3

1)

$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$. Comme $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, son inverse est :

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{bmatrix} \text{ } (\lambda_1 \neq 0 \text{ et } \lambda_2 \neq 0 \text{ car } A \text{ est inversible}) \text{ .}$$

Donc A^{-1} est diagonalisable avec P et D^{-1} .

2)

$$\begin{aligned} A^{-1} - A &= PD^{-1}P^{-1} - PDP^{-1} \\ &= P(D^{-1} - D)P^{-1}. \end{aligned}$$

Comme $D^{-1} - D = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} - \lambda_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} - \lambda_2 \end{bmatrix}$, la matrice $A^{-1} - A$ est diagonalisable avec P et la matrice diagonale associée est :

$$D' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} - \lambda_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} - \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Solution exercice récapitulatif - Exercice 3

3)

$$A^{-1} - A = 0 \Rightarrow P(D^{-1} - D)P^{-1} = 0$$
$$\Rightarrow D^{-1} + D = 0.$$

Cela donne l'équation :

$$\frac{1}{\lambda_1} - \lambda_1 = 0, \quad \frac{1}{\lambda_2} - \lambda_2 = 0.$$

Soit, pour λ_1 :

$$\lambda_1^2 - 1 = 0.$$

Solution exercice récapitulatif - Exercice 3

4)
On sait que $\lambda_2 = -1$.
Pour λ_1, on a $\lambda_1^2 - 1 = 0$, donc :

$$\lambda_1^2 = 1.$$

Ainsi $\lambda_1 = 1$ ou $\lambda_1 = -1$ mais si $\lambda_1 = -1$ on aurait:

$$A = P \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} P^{-1} = P(-I)P^{-1} = -PP^{-1} = -I$$

Ce qui est impossible d'après l'énoncé. Donc $\lambda_1 = 1$.

Solution exercice récapitulatif - Exercice 4

Déterminons les valeurs propres de A :

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(1-\lambda)+1 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 2.\end{aligned}$$

Les solutions de $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ sont :

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

A est diagonalisable car elle possède deux valeurs propres distinctes.

Solution exercice récapitulatif - Exercice 4

Cherchons un vecteur propre pour $\lambda_1 = 1 + i$:

$$(A - (1+i)I)x = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Le système donne $x_1 = ix_2$. Prenons $x_2 = 1$, alors on peut choisir :

$$v_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Par conjugaison, un vecteur propre pour $\lambda_2 = 1 - i$ est :

$$v_2 = \bar{v_1} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Solution exercice récapitulatif - Exercice 4

La matrice de passage est :

$$P = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice diagonale est :

$$D = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix}.$$

On a bien $A = PDP^{-1}$.

Solution exercice récapitulatif - Exercice 5

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\left((4-\lambda)(1-\lambda)+2\right) \\
&= (2-\lambda)(4-4\lambda-\lambda+\lambda^2+2) \\
&= (2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6) \\
&= (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-3).
\end{aligned}$$

$\lambda_1 = 2$ (multiplicité algébrique 2), $\lambda_2 = 3$ (multiplicité algébrique 1).

Solution exercice récapitulatif - Exercice 5

$$x \in \ker(A - 2I) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}.$$

Une base du sous-espace propre peut être : $\left(v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right).$

Solution exercice récapitulatif - Exercice 5

$$x \in \ker(A - 3I) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases} .$$

Une base du sous-espace propre peut être : $\left(v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. Ainsi les multiplicités algébriques et géométriques des deux valeurs propres sont égale, ainsi A est diagonnalisable.

Solution exercice récapitulatif - Exercice 5

Avec :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

On a : $A = PDP^{-1}$

Solution exercice récapitulatif - Exercice 6 - Question 1

Soit B une matrice diagonalisable dans la même base que A, donc $B = P\tilde{D}P^{-1}$. Montrons que A et B commutent :

$$\begin{aligned} A = PDP^{-1}, \quad & B = P\tilde{D}P^{-1} \\ AB = PDP^{-1}P\tilde{D}P^{-1} &= PD\tilde{D}P^{-1} \\ BA = P\tilde{D}P^{-1}PDP^{-1} &= P\tilde{D}DP^{-1} \\ \Rightarrow AB = BA. & \end{aligned}$$

Ainsi, toute matrice diagonalisable dans la même base de vecteurs propres que A commute avec A.

Solution exercice récapitulatif - Exercice 6 - Question 2

Supposons que $\lambda_1 = \lambda_2$, alors $D = \lambda_1 I$. Montrons que A et B sont diagonalisables dans la même base.

$$\begin{aligned} A = \tilde{P} D \tilde{P}^{-1}, \quad & D = \lambda_1 I \\ \Rightarrow A = \lambda_1 I &= \tilde{P} D \tilde{P}^{-1} \\ \Rightarrow A = \tilde{P} D \tilde{P}^{-1}&. \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $\lambda_1 = \lambda_2$, A et B sont simultanément diagonalisables dans n'importe quelle base.

Solution exercice récapitulatif - Exercice 6 - Question 3

Supposons maintenant que $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$$\dim(\ker(A - \lambda_1 I)) = 1,$$
$$\dim(\ker(A - \lambda_2 I)) = 1.$$

En effet, comme A est diagonalisable, la somme des dimensions des sous-espaces propres est égaleau nombre de colonnes de la matrice. On conclut que $\ker(A - \lambda_1 I)$ et $\ker(A - \lambda_2 I)$ sont de dimensions maximales et donc de 1.

Solution exercice récapitulatif - Exercice 6 - Question 4

Par définition, x est un vecteur propre de B associé à la valeur propre 0.

Solution exercice récapitulatif - Exercice 6 - Question 5

Supposons maintenant que $Bx \neq 0$. Montrons que Bx est un vecteur propre de A et que x est un vecteur propre de B.

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda_1 x, \\ ABx &= BAx = B(\lambda_1 x) \\ &= \lambda_1 Bx. \end{aligned}$$

Ainsi, Bx est un vecteur propre de A associé à λ_1.
Comme $x, Bx \in \ker(A - \lambda_1 I)$ et $\dim(\ker(A - \lambda_1 I)) = 1$, ils sont colinéaires donc qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$Bx = \mu x.$$

Cela implique que x est un vecteur propre de B, ce qui conclut la démonstration.
Bingo l'ensemble des matrices diagonnalisables de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ qui commutent avec A est exactement l'ensemble des matrices qui sont diagonnalisables dans la même base de vecteurs propres de A. En réalité ce résultat se généralise pour les matrices de tailles quelconques.