Nombres complexes

Cours #6

MTH1008 – Hiver 2026

Sacha Benarroch-Lelong, Théo Denorme (librement inspiré du travail de Sébastien Le Digabel)

Bilan du cours précédent

À l'issue du cours précédent, vous êtes capables :

- de montrer qu'une application entre deux espaces vectoriels est linéaire ;
- de calculer la matrice associée à une application linéaire $T : V \to W$ dans les bases canoniques de V et W ;
- d'exprimer l'application linéaire associée à une matrice ;
- d'interpréter l'existence et l'unicité de solutions à un système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en termes d'injectivité et de surjectivité de l'application linéaire $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.

Objectifs

À l'issue de ce cours, vous serez capables :

- d'effectuer des opérations sur des nombres complexes sous formes algébrique, polaire et exponentielle ;
- de transformer un nombre complexe d'une de ces trois formes à une autre ;
- de calculer le module et un argument d'un nombre complexe et de les interpréter géométriquement ;
- de résoudre une équation polynômiale de degré 2 dans $\mathbb{C}$;
- de manipuler des vecteurs et matrices à coefficients complexes.

Plan de cours

Qu’est-ce que l’algèbre ?

Fig. : Al-Khwârizmî (≈ 780–850).

الكتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة'

FIG. : Al-Khwârizmî (≈ 780–850).

'الكتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة

Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb ***al-jabr*** *wa-l-muqābala*

Qu'est-ce que l'algèbre ?

FIG. : Al-Khwârizmî (≈ 780–850).

'الكتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة

Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb ***al-jabr*** *wa-l-muqābala*

Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison

Exemple (inspiré des notes de Jean-Philippe Preaux lisibles ici)

Résoudre l'équation

$$x^3 - 15x - 4 = 0. \tag{1}$$

Exemple (inspiré des notes de Jean-Philippe Preaux lisibles ici)

Résoudre l'équation

$$x^3 - 15x - 4 = 0. \tag{1}$$

Méthode de Cardan (1501–1576) : si t_1 et t_2 sont les deux racines de $t^2 - 4t + 125$, alors $\sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2}$ est une solution de (1).

Exemple (inspiré des notes de Jean-Philippe Preaux lisibles ici)

Résoudre l'équation

$$x^3 - 15x - 4 = 0. \tag{1}$$

Méthode de Cardan (1501–1576) : si t_1 et t_2 sont les deux racines de $t^2 - 4t + 125$, alors $\sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2}$ est une solution de (1).

$$\Delta = -484$$

Exemple (inspiré des notes de Jean-Philippe Preaux lisibles ici)

Résoudre l'équation

$$x^3 - 15x - 4 = 0. \qquad (1)$$

Méthode de Cardan (1501–1576) : si t_1 et t_2 sont les deux racines de $t^2 - 4t + 125$, alors $\sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2}$ est une solution de (1).

$$\Delta = -484$$

Exemple (inspiré des notes de Jean-Philippe Preaux lisibles ici)

Résoudre l'équation

$$x^3 - 15x - 4 = 0. \tag{1}$$

Méthode de Cardan (1501–1576) : si t_1 et t_2 sont les deux racines de $t^2 - 4t + 125$, alors $\sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2}$ est une solution de (1).

$$\Delta = -484$$

FIG. : Rafael Bombelli (ca. 1572)

$$t_1 = \frac{4+\sqrt{-484}}{2} = \frac{2+22\sqrt{-1}}{2} = 1+11\sqrt{-1} = (2+\sqrt{-1})^3.$$

$$t_2 = \frac{4-\sqrt{-484}}{2} = \frac{2-22\sqrt{-1}}{2} = 1-11\sqrt{-1} = (2-\sqrt{-1})^3.$$

$$t_1 = \frac{4+\sqrt{-484}}{2} = \frac{2+22\sqrt{-1}}{2} = 1+11\sqrt{-1} = (2+\sqrt{-1})^3.$$

$$t_2 = \frac{4-\sqrt{-484}}{2} = \frac{2-22\sqrt{-1}}{2} = 1-11\sqrt{-1} = (2-\sqrt{-1})^3.$$

$$\sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2} = 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1} = 4.$$

$$t_1 = \frac{4+\sqrt{-484}}{2} = \frac{2+22\sqrt{-1}}{2} = 1+11\sqrt{-1} = (2+\sqrt{-1})^3.$$
$$t_2 = \frac{4-\sqrt{-484}}{2} = \frac{2-22\sqrt{-1}}{2} = 1-11\sqrt{-1} = (2-\sqrt{-1})^3.$$

$$\sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2} = 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1} = 4.$$

... et 4 est bien une solution de (1).

Morale : on peut définir de nouveaux objets contre-intuitifs, du moment que les **opérations** autorisées sur ces objets sont également bien définies.

Unité imaginaire

Définition

On appelle *unité imaginaire*, et on note i, l'objet vérifiant

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

Définition

On appelle *unité imaginaire*, et on note i, l'objet vérifiant

$$\mathrm{i}^2 = -1.$$

Rigueur...

Il est incorrect d'écrire que

$$\mathrm{i} = \sqrt{-1}.$$

Définition

On appelle ensemble des **nombres complexes** l'ensemble suivant :

$$\mathbb{C} = \{z = a + \mathrm{i}b : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Si $z \in \mathbb{C}$, alors $z = a + \mathrm{i}b$ est appelé la **forme algébrique** de z. Dans cette forme :

- $a = \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$ est appelé la **partie réelle** de z.
- $b = \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$ est appelé la **partie imaginaire** de z.

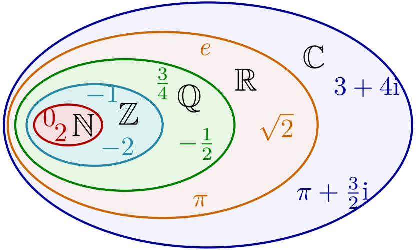
Définition

On appelle ensemble des **nombres complexes** l'ensemble suivant :

$$\mathbb{C} = \{z = a + \mathrm{i}b : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Si $z \in \mathbb{C}$, alors $z = a + \mathrm{i}b$ est appelé la **forme algébrique** de z. Dans cette forme :

- $a = \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$ est appelé la **partie réelle** de z.
- $b = \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$ est appelé la **partie imaginaire** de z.



- Égalité : deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles **et** imaginaires coïncident :

$$a_1 + b_1\mathrm{i} = a_2 + b_2\mathrm{i} \iff a_1 = a_2 \text{ et } a_2 = b_2.$$

- Addition, soustraction, multiplication : se comportent comme dans $\mathbb{R}$, en n'oubliant pas de remplacer i^2 par -1.

- La division est parfois plus subtile...

Exemple (à connaître !)

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1}{1+\mathrm{i}}, \quad z_2 = \frac{1-2\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}$$

Conjugué

Définition

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On appelle **conjugué** de z le nombre complexe :

$$\overline{z} = a - ib.$$

Conjugué

Définition

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On appelle **conjugué** de z le nombre complexe :

$$\overline{z} = a - ib.$$

$\rightarrow$ la méthode pour calculer $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique consiste donc à multiplier le numérateur et le dénominateur par $\overline{z_2}$.

Définition

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On appelle **conjugué** de z le nombre complexe :

$$\overline{z} = a - ib.$$

$\rightarrow$ la méthode pour calculer $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique consiste donc à multiplier le numérateur et le dénominateur par $\overline{z_2}$.

Proposition

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ et $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.
- $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Proposition

$\mathbb{C}$ est un espace vectoriel réel de dimension 2.

Démonstration. $\square$

Proposition

$\mathbb{C}$ est un espace vectoriel réel de dimension 2.

Démonstration. $\square$

Proposition

$\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$, de dimension 1.

Démonstration. $\square$

Proposition

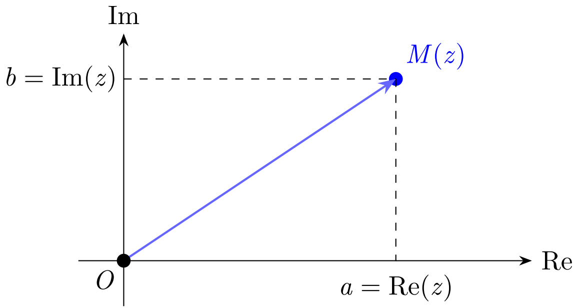
L'application linéaire

$$T: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}^2 \\ a + ib & \mapsto & (a, b) \end{array}$$

est bijective.

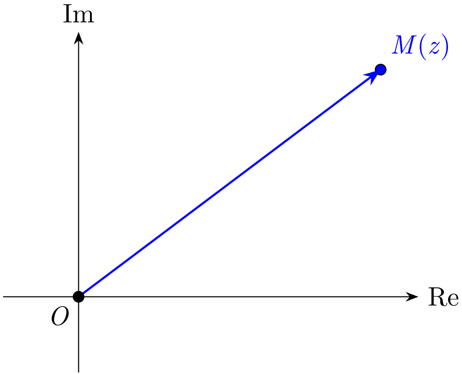
Autrement dit, il existe une correspondance parfaite entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$: on dit que ces deux ensembles sont *isomorphes* (ce terme n'est pas à retenir.)

Cette similitude permet de représenter tout nombre complexe dans le plan.

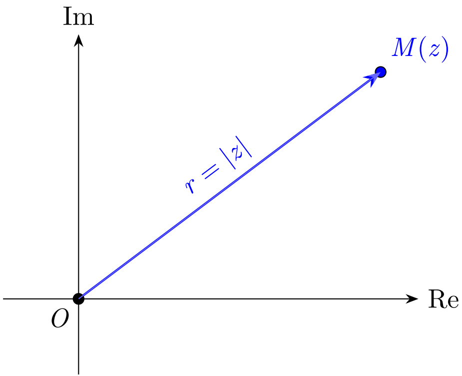


$z = a + ib$ est appelé l'**affixe** du point $M(z)$.

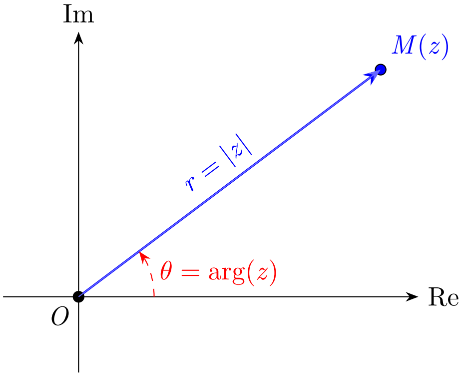
Introduction du module et de l'argument

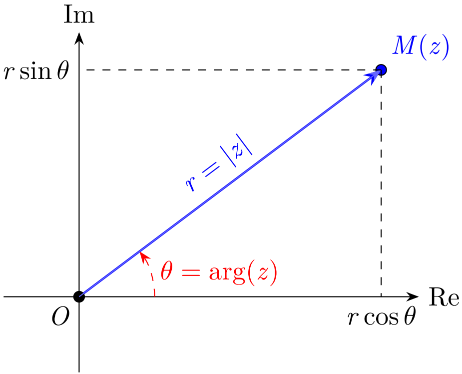


Introduction du module et de l'argument



Introduction du module et de l'argument



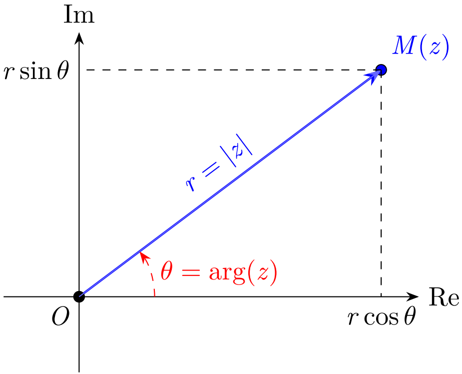


Définition

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On appelle **module** de z la quantité

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si $M(z)$ est le point d'affixe z, alors $|z|$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$.



Définition

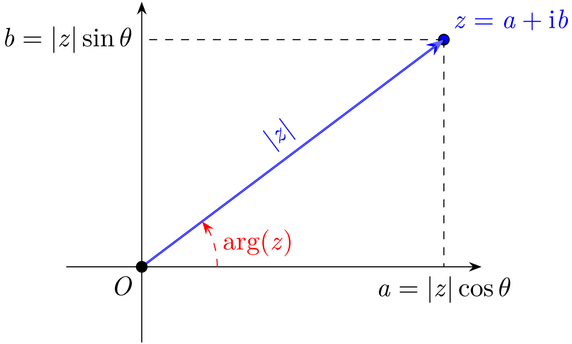
Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On appelle **module** de z la quantité

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

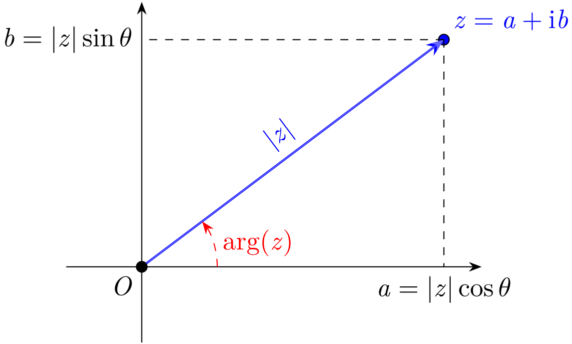
Si $M(z)$ est le point d'affixe z, alors $|z|$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$.

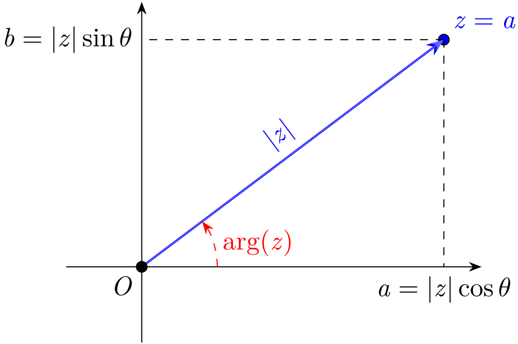
Définition

Soient $z = a + ib \in \mathbb{C}$ et $M(z)$ le point d'affixe z. On appelle **argument** de z une mesure en radians de l'angle orienté entre l'axe des abscisses et le vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$.


$z = a + \mathrm{i}b$
$b = |z| \sin\theta$
$|z|$
$\arg(z)$
O
$a = |z| \cos\theta$

$$\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}.$$





$$\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{r} \\ \sin\theta = \frac{b}{r} \end{cases}.$$

Méthode

Pour calculer un argument de $z = a + ib \neq 0$, il faut calculer $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ puis identifier un angle θ tel que

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{b}{|z|} \end{cases}.$$

Si $a \neq 0$, on peut en obtenir un par $\theta = \arctan(b/a)$.

Exemple

Soit $z = 1 + \mathrm{i}$. Déterminer $|z|$ ainsi qu'un argument de z en mesure principale (i.e. $\arg(z) \in]-\pi, \pi]$).

Proposition

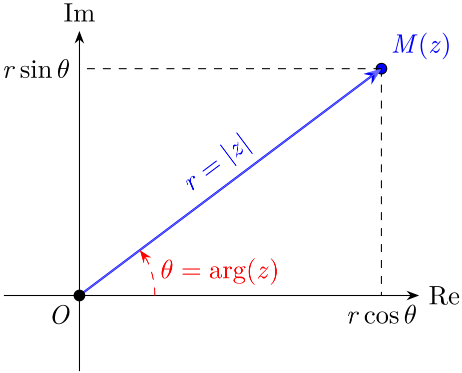
- $|\overline{z}| = |z|$.
- $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$.
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.
- $z\overline{z} = |z|^2$.
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *(inégalité triangulaire)*

Proposition

- $|\overline{z}| = |z|$.
- $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$.
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.
- $z\overline{z} = |z|^2$.
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *(inégalité triangulaire)*

Proposition

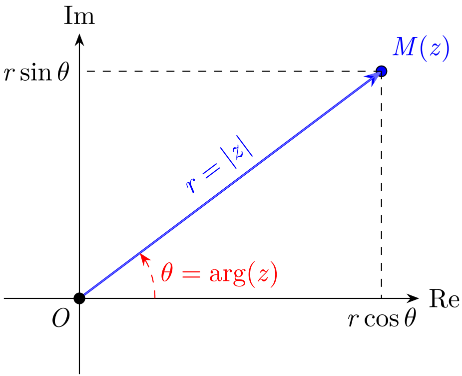
- $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.
- Si $z_2 \neq 0$, $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$.
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$.
- $\arg(z^n) = n\arg(z)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.



Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de module $|z| = r$ et d'argument $\arg(z) = \theta$. On appelle **forme polaire** de z l'écriture suivante :

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$



Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de module $|z| = r$ et d'argument $\arg(z) = \theta$. On appelle **forme polaire** de z l'écriture suivante :

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

$\rightarrow$ tout nombre complexe "existe" à la fois sous forme algébrique et sous forme polaire. Il s'agit simplement de deux manières différentes de désigner **un même nombre**.

Exemple

Soit $z = 1 + \mathrm{i}$.

1. Exprimer z sous forme polaire.
2. En utilisant les propriétés du module et de l'argument, exprimer sous forme polaire :

$$\frac{1}{z}, \quad z^2, \quad \frac{z}{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}.$$

Formule d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.$$

Démonstration. □

Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de module $|z| = r$ et d'argument $\arg(z) = \theta$. On appelle **forme exponentielle** de z l'écriture suivante :
$$z = re^{\mathrm{i}\theta}.$$

1. Calculer $e^{\mathrm{i}\pi} + 1$.
   Ce que vous obtenez est appelé l'"identité d'Euler", considérée par certain.e.s comme l'un des plus beaux résultats des mathématiques : elle réunit les quatre constantes fondamentales 0, 1, i *et* π*.*

2. Soit $z = re^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C}$, avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$. En utilisant les propriétés du module et de l'argument, exprimer $\overline{z}$ sous forme exponentielle.

3. Exprimer $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ sous forme algébrique.

4. Exprimer sous forme exponentielle :

$$z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}, \quad z_2 = -3, \quad z_3 = \frac{(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^3}{(1-\mathrm{i})^5}.$$

La formule d'Euler a pour conséquences les deux (magnifiques) résultats suivants :

Linéarisation des fonctions trigonométriques

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\cos\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{-\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}.$$

Démonstration. □

Formule de De Moivre

Soient $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $z = re^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$z^n = \left(re^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = r^n e^{\mathrm{i}n\theta} = r^n(\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)).$$

Exemple

Résoudre

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Exemple

Résoudre
$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Théorème (fondamental de l'algèbre)

Tout polynôme de degré n possède exactement n racines (réelles ou complexes), en tenant compte de leurs multiplicités.

Méthode

Un polynôme de degré 2 de forme $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ et de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ admet deux racines complexes conjuguées :

$$x_1 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Définition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle **racine** $n^{\text{ème}}$ du nombre complexe $a + ib$ tout nombre $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$z^n = a + ib.$$

En particulier, on appelle **racine** $n^{\text{ème}}$ **de l'unité** tout nombre $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$z^n = 1.$$

Exemple

Donner les racines deuxièmes de l'unité.

Méthode

Les racines $n^{\text{èmes}}$ de $a+\mathrm{i}b$ sont les n nombres complexes obtenus comme :

$$z_k = |a+\mathrm{i}b|^{\frac{1}{n}}\, e^{\frac{\mathrm{i}(\theta+2k\pi)}{n}}, \quad \text{pour } k \in \{0,1,\ldots,n-1\}.$$

Justification de cette méthode :

Méthode

Les racines $n^{\text{èmes}}$ de $a + \mathrm{i}b$ sont les n nombres complexes obtenus comme :

$$z_k = |a + \mathrm{i}b|^{\frac{1}{n}} \, e^{\frac{\mathrm{i}(\theta + 2k\pi)}{n}}, \quad \text{pour } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Justification de cette méthode :

Exemple

Donner les racines quatrièmes de 1.

Plan de cours

Vecteurs complexes, transconjugué et norme

De la même façon que l'on note $\mathbb{R}^n$, on note $\mathbb{C}^n$ l'ensemble des vecteurs de taille n à coefficients complexes.

De la même façon que l'on note $\mathbb{R}^n$, on note $\mathbb{C}^n$ l'ensemble des vecteurs de taille n à coefficients complexes.

Définition

Soit $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. On appelle **transconjugué** de $\mathbf{z}$ le vecteur

$$\mathbf{z}^* = (\overline{\mathbf{z}})^\top = \begin{bmatrix} \overline{z_1} & \overline{z_2} & \cdots & \overline{z_n} \end{bmatrix}.$$

De la même façon que l'on note $\mathbb{R}^n$, on note $\mathbb{C}^n$ l'ensemble des vecteurs de taille n à coefficients complexes.

Définition

Soit $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. On appelle **transconjugué** de $\mathbf{z}$ le vecteur

$$\mathbf{z}^* = (\overline{\mathbf{z}})^\top = \begin{bmatrix} \overline{z_1} & \overline{z_2} & \cdots & \overline{z_n} \end{bmatrix}.$$

Définition

Soit $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$. La norme de $\mathbf{z}$ est donnée par

$$\|\mathbf{z}\| = \sqrt{\mathbf{z}^*\mathbf{z}}.$$

De la même façon que l'on note $\mathbb{R}^n$, on note $\mathbb{C}^n$ l'ensemble des vecteurs de taille n à coefficients complexes.

Définition

Soit $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. On appelle **transconjugué** de $\mathbf{z}$ le vecteur

$$\mathbf{z}^* = (\overline{\mathbf{z}})^\top = \begin{bmatrix} \overline{z_1} & \overline{z_2} & \cdots & \overline{z_n} \end{bmatrix}.$$

Définition

Soit $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$. La norme de $\mathbf{z}$ est donnée par

$$\|\mathbf{z}\| = \sqrt{\mathbf{z}^*\mathbf{z}}.$$

Exemple

Soit $\mathbf{z} = (1, \mathrm{i}) \in \mathbb{C}^2$. Comparer les expressions $\mathbf{z}^\top\mathbf{z}$ et $\mathbf{z}^*\mathbf{z}$, et en déduire pourquoi la conjugaison est essentielle dans le calcul de la norme.

De la même façon que l'on note $\mathbb{R}^{m\times n}$, on note $\mathbb{C}^{m\times n}$ l'ensemble des matrices de taille $m \times n$ à coefficients complexes.

De la même façon que l'on note $\mathbb{R}^{m\times n}$, on note $\mathbb{C}^{m\times n}$ l'ensemble des matrices de taille $m \times n$ à coefficients complexes.

Définition

Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. On appelle **transconjuguée** de A la matrice $A^* = (\overline{A})^\top$.

La transposition-conjugaison vérifie une propriété similaire à la transposition de matrices réelles : $(AB)^* = B^*A^*$.

De la même façon que l'on note $\mathbb{R}^{m\times n}$, on note $\mathbb{C}^{m\times n}$ l'ensemble des matrices de taille $m \times n$ à coefficients complexes.

Définition

Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. On appelle **transconjuguée** de A la matrice $A^* = (\overline{A})^\top$.

La transposition-conjugaison vérifie une propriété similaire à la transposition de matrices réelles : $(AB)^* = B^* A^*$.

Définition

Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. On dit que A est une matrice **hermitienne** ou **auto-adjointe** si $A^* = A$.

De la même façon que l'on note $\mathbb{R}^{m\times n}$, on note $\mathbb{C}^{m\times n}$ l'ensemble des matrices de taille $m \times n$ à coefficients complexes.

Définition

Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. On appelle **transconjuguée** de A la matrice $A^* = (\overline{A})^\top$.

La transposition-conjugaison vérifie une propriété similaire à la transposition de matrices réelles : $(AB)^* = B^* A^*$.

Définition

Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. On dit que A est une matrice **hermitienne** ou **auto-adjointe** si $A^* = A$.

Question : Quel concept, déjà défini pour $\mathbb{R}^{n\times n}$, le concept de matrice hermitienne généralise-t-il à $\mathbb{C}^{n\times n}$?

Exercices récapitulatifs

Dire des énoncés suivants s'ils sont vrais ou faux, et justifier.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = \mathrm{Re}(z)$, alors $z \in \mathbb{R}$.
2. Le module d'un nombre complexe z est toujours un nombre réel, positif ou nul.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des solutions (dans $\mathbb{C}$) de l'équation $z^n = 1$ est inclus dans celui de l'équation $z^{2n} = 1$.
4. L'argument d'un nombre complexe est défini de manière unique.
5. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, alors $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.
6. Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées distinctes.
7. Si $z \in \mathbb{C}$, alors $e^z \in \mathbb{R}$.
8. Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, alors la matrice $B = \frac{1}{2}(A^\top + A)$ est hermitienne.
9. Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, alors la matrice $B = \frac{1}{2}(A^* + A)$ est hermitienne.
10. Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a toujours $\mathrm{Re}(z_1 z_2) = \mathrm{Re}(z_1)\,\mathrm{Re}(z_2)$.

Exercice récapiulatif 2

Soient $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ et $z_2 = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

1. Exprimer z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
2. Exprimer $z_1 z_2$ sous formes exponentielle puis polaire.

Exercice récapitulatif 3

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$.

1. Montrer que $\frac{z}{\bar{z}} = \mathrm{i}$.
2. Supposons de plus que $\mathrm{Re}(z) > 0$. Écrire z sous forme exponentielle en fonction de $\mathrm{Re}(z)$.

Soit $z = 2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i} \in \mathbb{C}$.

1. Exprimer z sous forme exponentielle.
2. Calculer z^3 en utilisant la formule de De Moivre.
3. Déterminer les racines cubiques de z_1.

Exercice récapitulatif 5

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et le polynôme à variable complexe $p \in \mathbb{P}_3$ défini par

$$p(z) = a + bz + cz + dz^3, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ vérifiant $p(z_0) = 0$.

1. Montrer que $p(\overline{z_0}) = 0$.
2. Soit $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$. Montrer que si $\overline{z} = z$, alors $z \in \mathbb{R}$.
3. Justifier que p admet trois racines complexes (en comptant les multiplicités).
4. On a constaté que deux des racines de p étaient z_0 et $\overline{z_0}$. Supposons que la dernière racine de p soit $w \in \mathbb{C}$ tel que $w \neq z_0$ et $w \neq \overline{z_0}$. Montrer que $w \in \mathbb{R}$. [*Indication :* Ceci peut se faire en utilisant ce qui a été démontré à la question 2.]

Exercice récapitulatif 6

Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

1. Soit $B = A^* A$. Montrer que B est hermitienne.
2. Montrer que $\overline{B} = B^\top$.
3. Le résultat de la question 2 de l'exercice récapitulatif 5 peut se généraliser aux matrices sous la forme suivante :

$$\forall M \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \overline{M} = M \implies M \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

   En déduire que $B^\top + B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.