MTH1008 - Algèbre linéaire appliquée

Diagonalisation, Vecteurs propres et AL, Valeurs propres complexes

Nathan Allaire - Théo Denorme

Polytechnique Montréal

March 14, 2025

Plan détaillé

1. Diagonalisation

2. Diagonalisation et Applications linéaires

3. Valeurs propres complexes

Rappels du cours précédent

- Soit A une matrice de taille $n \times n$. On appelle **vecteur propre** de A associé à la **valeur propre** $\lambda \in \mathbb{R}$ tout vecteur $\boldsymbol{x}$ non-nul tel que $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$,

Rappels du cours précédent

- Soit A une matrice de taille $n \times n$. On appelle **vecteur propre** de A associé à la **valeur propre** $\lambda \in \mathbb{R}$ tout vecteur $\boldsymbol{x}$ non-nul tel que $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$,
- Pour un λ, les vecteurs propres de A associés à λ sont les vecteurs de $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n)$ (sans le vecteur nul),

Rappels du cours précédent

- Soit A une matrice de taille $n \times n$. On appelle **vecteur propre** de A associé à la **valeur propre** $\lambda \in \mathbb{R}$ tout vecteur $\boldsymbol{x}$ non-nul tel que $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$,
- Pour un λ, les vecteurs propres de A associés à λ sont les vecteurs de $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$ (sans le vecteur nul),
- On détermine les valeurs propres de A en cherchant les racines du polynôme caractéristique de A : $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$,

Rappels du cours précédent

- Soit A une matrice de taille $n \times n$. On appelle **vecteur propre** de A associé à la **valeur propre** $\lambda \in \mathbb{R}$ tout vecteur $\boldsymbol{x}$ non-nul tel que $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$,
- Pour un λ, les vecteurs propres de A associés à λ sont les vecteurs de $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n)$ (sans le vecteur nul),
- On détermine les valeurs propres de A en cherchant les racines du polynôme caractéristique de A : $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$,
- Deux matrices A et B sont semblables s'il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$. Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

Plan

Diagonalisation

Diagonalisation

Soit A une matrice $n \times n$. On dit que A est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est à dire qu'il existe D diagonale, et P inversible telles que :

$$A = PDP^{-1}.$$

Diagonalisation

Soit A une matrice $n \times n$. On dit que A est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est à dire qu'il existe D diagonale, et P inversible telles que :

$$A = PDP^{-1}.$$

Si A est diagonalisable, il est aisé de calculer des puissances de A :
$A = PDP^{-1} \implies A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1} \implies \cdots \implies A^k = PD^kP^{-1}$

Et $D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & d_n^k \end{bmatrix}$.

Théorème de caracrérisation de la diagonalisation

Théorème 1

Soit A une matrice $n \times n$. A est diagonalisable **si et seulement si** elle admet n vecteurs propres indépendants.

Théorème de caracrérisation de la diagonalisation

Théorème 1

Soit A une matrice $n \times n$. A est diagonalisable **si et seulement si** elle admet n vecteurs propres indépendants.

Plus précisément, $A = PDP^{-1}$ si et seulement si les colonnes de P sont n vecteurs propres linéairement indépendants de A. Auquel cas, les coefficients de D sont les valeurs propres de A associées respectivement aux colonnes de P.

Autrement dit, A est diagonalisable si et seulement si **elle admet suffisament de vecteurs propres pour former une base de** $\mathbb{R}^n$. Une telle base est appelée *base de vecteurs propres de* $\mathbb{R}^n$.

Démonstration

Soit A de taille $n \times n$, P une matrice quelconque de colonnes $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n$, D une matrice diagonale $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.

Démonstration

Soit A de taille $n \times n$, P une matrice quelconque de colonnes $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n$, D une matrice diagonale $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.

$AP = A[\boldsymbol{v}_1 ... \boldsymbol{v}_n] = [A\boldsymbol{v}_1 ... A\boldsymbol{v}_n]$ et $PD = [\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 ... \lambda_n \boldsymbol{v}_n]$
$\rightarrow$ Vrai pour toute matrice A, P, D : diagonale. Pas besoin pour A d'être diagonalisable et P inversible.

Démonstration

Soit A de taille $n \times n$, P une matrice quelconque de colonnes $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n$, D une matrice diagonale $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.

$AP = A[\boldsymbol{v}_1 ... \boldsymbol{v}_n] = [A\boldsymbol{v}_1 ... A\boldsymbol{v}_n]$ et $PD = [\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 ... \lambda_n \boldsymbol{v}_n]$
$\rightarrow$ Vrai pour toute matrice A, P, D : diagonale. Pas besoin pour A d'être diagonalisable et P inversible.

Supposons maintenant que A soit diagonalisable et P inversible, avec $A = PDP^{-1}$. Alors $AP = PD$. En identifiant colonne par colonne, on a que $A\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1, \cdots A\boldsymbol{v}_n = \lambda_n \boldsymbol{v}_n$

Démonstration

Soit A de taille $n \times n$, P une matrice quelconque de colonnes $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n$, D une matrice diagonale $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$.

$AP = A[\boldsymbol{v}_1 ... \boldsymbol{v}_n] = [A\boldsymbol{v}_1 ... A\boldsymbol{v}_n]$ et $PD = [\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 ... \lambda_n \boldsymbol{v}_n]$
$\rightarrow$ Vrai pour toute matrice A, P, D : diagonale. Pas besoin pour A d'être diagonalisable et P inversible.

Supposons maintenant que A soit diagonalisable et P inversible, avec $A = PDP^{-1}$. Alors $AP = PD$. En identifiant colonne par colonne, on a que $A\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1, \cdots A\boldsymbol{v}_n = \lambda_n \boldsymbol{v}_n$

Comme P est inversible, ses colonnes sont non-nulles. Cela montre que les colonnes de P sont des vecteurs propres de A, associés aux valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

Exercices précieux

Diagonaliser si possible les matrices :

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

- $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Exercices précieux

Diagonaliser si possible les matrices :

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

- $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

- $p_A(\lambda) = (1-\lambda)(2+\lambda)^2$
  $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
  $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$
  $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

- $p_B(\lambda) = (1-\lambda)(2+\lambda)^2$
  B n'est pas diagonalisable car
  $\dim(E^B_{-2}) = 1 \neq 2$

Condition suffisante de diagonalisation

Théorème

Si A possède n valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable.

Condition suffisante de diagonalisation

Théorème

Si A possède n valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable.

En effet, les vecteurs propres $\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n$ associés aux valeurs propres **distinctes** $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont linéairement indépendants (Cours 6 : des vecteurs propres d'espaces propres distincts sont linéairement indépendants).

Exemple : La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Et si A possède moins de n valeurs propres ?

Théorème

Soit A une matrice $n \times n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes.

Et si A possède moins de n valeurs propres ?

Théorème

Soit A une matrice $n \times n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes.

a. Pour $1 \leq k \leq p$, la dimension du sous-espace propre associé à λ_k est inférieure ou égale à la multiplicité de la valeur propre λ_k.

Et si A possède moins de n valeurs propres ?

Théorème

Soit A une matrice $n \times n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes.

a. Pour $1 \leq k \leq p$, la dimension du sous-espace propre associé à λ_k est inférieure ou égale à la multiplicité de la valeur propre λ_k.

b. La matrice A est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n. Ceci équivaut à dire que pour chaque λ_k, la dimension du sous-espace propre associé est égale à la multiplicité de λ_k dans le polynôme caractéristique.

Et si A possède moins de n valeurs propres ?

Théorème

Soit A une matrice $n \times n$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes.

a. Pour $1 \leq k \leq p$, la dimension du sous-espace propre associé à λ_k est inférieure ou égale à la multiplicité de la valeur propre λ_k.

b. La matrice A est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n. Ceci équivaut à dire que pour chaque λ_k, la dimension du sous-espace propre associé est égale à la multiplicité de λ_k dans le polynôme caractéristique.

c. Si A est diagonalisable et si pour chaque k, B_k est une base du sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k, alors la famille obtenue en réunissant les vecteurs des bases $B_1, \ldots, B_p$ est une base de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A.

En le disant plus simplement :

Théorème

Soit A une matrice carrée et λ une valeur propre de A.
On appelle Multiplicité Algébrique (MA) de λ l'ordre de multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique de A : $p_A(\lambda)$.
On appelle Multiplicité Géométrique (MG) de λ la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre λ.

En le disant plus simplement :

Théorème

Soit A une matrice carrée et λ une valeur propre de A.
On appelle Multiplicité Algébrique (MA) de λ l'ordre de multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique de A : $p_A(\lambda)$.
On appelle Multiplicité Géométrique (MG) de λ la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre λ.

On a toujours $MG \leq MA$

En le disant plus simplement :

Théorème

Soit A une matrice carrée et λ une valeur propre de A.
On appelle Multiplicité Algébrique (MA) de λ l'ordre de multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique de A : $p_A(\lambda)$.
On appelle Multiplicité Géométrique (MG) de λ la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre λ.

On a toujours $MG \leq MA$

A est diagonalisable si et seulement si MG $=$ MA pour toutes les valeurs propres de A.

En le disant plus simplement :

Théorème

Soit A une matrice carrée et λ une valeur propre de A.
On appelle Multiplicité Algébrique (MA) de λ l'ordre de multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique de A : $p_A(\lambda)$.
On appelle Multiplicité Géométrique (MG) de λ la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre λ.

On a toujours $MG \leq MA$

A est diagonalisable si et seulement si MG = MA pour toutes les valeurs propres de A.

A n'est **pas** diagonalisable s'il existe une valeur propre telle que MG < MA.

Exercice

Diagonaliser, si possible, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Exercice

Diagonaliser, si possible, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

C'est possible car $MG = MA$ pour les 2 valeurs propres de A, et $P = \begin{bmatrix} -8 & -16 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Cheatcodes

NE PAS UTILISER COMME ARGUMENT DANS UN EXAMEN, MAIS COMME MOYEN DE VERIFICATION.

Trace, déterminant et lien avec les valeurs propres

Soit A une matrice carrée.

$$\mathrm{trace}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{1}$$

$$\det(\mathrm{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{2}$$

Plan

Endomorphismes de $\mathbb{R}^n$

- On considère T un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$:

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

  (application d'un espace vers lui-même)

- T est considérée linéaire avec $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ et on considère aussi que A est diagonalisable :

$$A = PDP^{-1}$$

- Les colonnes de P forment une base de $\mathbb{R}^n$, qu'on note $\mathcal{B}$

Matrice de T dans $\mathcal{B}$

- La matrice de T dans la base $\mathcal{B}$ est notée $[T]_\mathcal{B}$ et est telle que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, on a

$$[T(\mathbf{x})]_\mathcal{B} = [T]_\mathcal{B}[\mathbf{x}]_\mathcal{B}$$

- Et on a

$$D = [T]_\mathcal{B}$$

- Les applications $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ et $\mathbf{u} \mapsto D\mathbf{u}$ décrivent le même endomorphisme dans deux bases différentes

Matrice de T dans $\mathcal{B}$

- La matrice de T dans la base $\mathcal{B}$ est notée $[T]_{\mathcal{B}}$ et est telle que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, on a

$$[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

- Et on a

$$D = [T]_{\mathcal{B}}$$

- Les applications $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ et $\mathbf{u} \mapsto D\mathbf{u}$ décrivent le même endomorphisme dans deux bases différentes

Cela pour dire que si $\mathcal{B}$ est la base de $\mathbb{R}^n$ composée des colonnes de P, alors D est la matrice de l'application linéaire T dans la base $\mathcal{B}$.
P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique. Dans la base $\mathcal{B}$, la matrice A est diagonale.

Les applications $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{u} \mapsto D\boldsymbol{u}$ sont les mêmes, exprimées dans des bases différentes.

Exercice à faire à la maison

Illuster ce concept avec :

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{x} = (1, 1)$$

en vérifiant que

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = (3, -2) \quad \text{et} \quad [T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = (15, -6)$$

Plan

Rappels :

- Le polynôme caractéristique d'une matrice A est : $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$,
- Il possède exactement n racines, en comptant les multiplicités et les racines complexes.

Rappels :

- Le polynôme caractéristique d'une matrice A est : $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$,
- Il possède exactement n racines, en comptant les multiplicités et les racines complexes.

Exemple : On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

- Quelle est l'action géométrique de A sur un vecteur $x \in \mathbb{R}^2$?
- Les valeurs propres de A peuvent-elles être réelles ?
- Quelles sont les valeurs propres de A ?
- Quels sont les vecteurs propres de A associés aux valeurs propres de A ? (explications plus loin)

Rappels :

- Le polynôme caractéristique d'une matrice A est : $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$,
- Il possède exactement n racines, en comptant les multiplicités et les racines complexes.

Exemple : On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

- Quelle est l'action géométrique de A sur un vecteur $x \in \mathbb{R}^2$?
- Les valeurs propres de A peuvent-elles être réelles ?
- Quelles sont les valeurs propres de A ?
- Quels sont les vecteurs propres de A associés aux valeurs propres de A ? (explications plus loin)

$\lambda \in \{-i, i\}$, les vecteurs propres associés sont respectivement $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

Rappels :

- Le polynôme caractéristique d'une matrice A est : $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$,
- Il possède exactement n racines, en comptant les multiplicités et les racines complexes.

Exemple : On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

- Quelle est l'action géométrique de A sur un vecteur $x \in \mathbb{R}^2$?
- Les valeurs propres de A peuvent-elles être réelles ?
- Quelles sont les valeurs propres de A ?
- Quels sont les vecteurs propres de A associés aux valeurs propres de A ? (explications plus loin)

$\lambda \in \{-i, i\}$, les vecteurs propres associés sont respectivement $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

On remarque quelque-chose d'étrange sur v_1 et v_2 ... Ils sont conjugués !

Déterminer les vecteurs propres complexes

$(A - \lambda_1 I) = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}$: pas inversible (normal, on cherche les λ tels que $(A - \lambda I)\boldsymbol{x}$ possède une solution non-triviale $\iff$ $(A - \lambda I)$ ne soit pas inversible).

Donc :

- les lignes (et les colonnes) de A sont linéairement dépendantes
- $(A - \lambda_1 I)\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \implies ix_1 - x_2 = 0$ et $x_1 + ix_2 = 0$ décrivent en fait **la même solution**.
- on peut choisir l'une ou l'autre pour trouver un vecteur propre.

Valeurs propres et vecteurs propres complexes d'une matrice réelle

Théorème

Soit A une matrice réelle et λ une valeur propre **complexe** de A, associée au vecteur propre **complexe** x.
Alors $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A, associée au vecteur propre $\bar{x}$.

Valeurs propres et vecteurs propres complexes d'une matrice réelle

Théorème

Soit A une matrice réelle et λ une valeur propre **complexe** de A, associée au vecteur propre **complexe** x.
Alors $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A, associée au vecteur propre $\bar{\boldsymbol{x}}$.

Démo : $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \implies \overline{A\boldsymbol{x}} = A\bar{\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda\boldsymbol{x}} = \bar{\lambda}.\bar{\boldsymbol{x}}.$

Valeurs propres et vecteurs propres complexes d'une matrice réelle

Théorème

Soit A une matrice réelle et λ une valeur propre **complexe** de A, associée au vecteur propre **complexe** $\boldsymbol{x}$.
Alors $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A, associée au vecteur propre $\bar{\boldsymbol{x}}$.

Démo : $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \implies \overline{A\boldsymbol{x}} = A\bar{\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda\boldsymbol{x}} = \bar{\lambda}.\bar{\boldsymbol{x}}.$

Q : Une matrice réelle 3×3 peut-elle avoir 3 valeurs propres complexes ?

Valeurs propres et vecteurs propres complexes d'une matrice réelle

Théorème

Soit A une matrice réelle et λ une valeur propre **complexe** de A, associée au vecteur propre **complexe** $\boldsymbol{x}$.
Alors $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A, associée au vecteur propre $\bar{\boldsymbol{x}}$.

Démo : $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \implies \overline{A\boldsymbol{x}} = A\bar{\boldsymbol{x}} = \overline{\lambda\boldsymbol{x}} = \bar{\lambda}.\bar{\boldsymbol{x}}$.

Q : Une matrice réelle 3×3 peut-elle avoir 3 valeurs propres complexes ?
Non. Elle a soit 3 valeurs propres réelles, soit 2 complexes et une réelle car les complexes sont conjuguées 2 à 2.

Propriété des matrices 2×2

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ admettant la valeur propre $\lambda = a - ib$ $(b \neq 0)$ et soit $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^2$ un vecteur propre associé à λ. Alors

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}$$

avec

$$\mathbf{P} = [Re(\mathbf{v}) \quad Im(\mathbf{v})]$$

et

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Exercice récapitulatif - Exercice 1 Vrai ou Faux

Répondez par vrai ou faux et justifiez vos réponses.

1. Toute matrice diagonalisable est inversible.

2. Si une matrice A est diagonalisable, alors A^2 l'est aussi.

3. Soit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonnalisable mais dont l'unique valeur propre est 7, alors $A = 7I_3$.

4. Si A et B sont deux matrices diagonalisables de même taille, alors $A + B$ est aussi diagonalisable.

5. Toute matrice triangulaire est diagonalisable.
6. Une matrice diagonalisable peut ne pas être symétrique.

Exercice récapitulatif - Exercice 1 Vrai ou Faux

7. Si une matrice est diagonalisable et inversible, alors son inverse l'est aussi.

8. Une matrice ayant une seule valeur propre est nécessairement diagonalisable.

9. Les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont des vecteurs propres de toute matrices diagonnale de $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

10. L'ensemble des matrices diagonnalisable de taille $n \times n$ est un SEV de $\mathbb{R}^{n\times n}$.
11. Soit $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mais ne possèdant pas que des coefficients réels, alors ses valeurs propres ne peuvent pas être réeles.
12. Une matrice de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ non inversible ne peut pas avoir de valeur propre dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Exercice récapitulatif - Exercice 2

Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Déterminez les valeurs propres de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifiez.
3. Si A est diagonalisable, trouvez une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice récapitulatif - Exercice 3

Soit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ une matrice inversible diagonalisable telle que

$$A = PDP^{-1}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

On suppose aussi que $A \neq I$ et $A \neq -I$.

1. Déduire la diagonalisation de A^{-1} dans cette même base.
2. La matrice $A^{-1} + A$ est-elle diagonalisable ? Si oui, donner la matrice diagonale associée en fonction de D.
3. Supposons que $A^{-1} - A = 0$. En diagonalisant cette équation, déduire une équation que doit vérifier λ_1.
4. Si $\lambda_2 = -1$, en déduire la seule valeur possible pour λ_1.

Exercice récapitulatif - Exercice 4

Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Si A est diagonalisable, trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice récapitulatif - Exercice 5

Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier en déterminant ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.
2. Si A est diagonalisable, trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice récapitulatif - Exercice 6

Soit $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ une matrice diagonalisable telle que

$$A = PDP^{-1}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

avec P inversible. On s'intéresse à l'ensemble des matrices diagonalisables dans la même base de vecteurs propres que A.
Cet exercice a pour but de montrer que :

$$A, B \in \mathbb{R}^2 \text{ diagonalisables dans la même base} \Leftrightarrow AB = BA$$

1. Soit B tel que $B = P\tilde{D}P^{-1}$. Montrer que $AB = BA$.

Soit maintenant une autre matrice B diagonalisable telle que $AB = BA$ et $B = \tilde{P}\tilde{D}\tilde{P}^{-1}$. Soit x un vecteur propre de A pour la valeur propre λ_1.

Exercice récapitulatif - Exercice 6

2. Traitons le cas où $\lambda_1 = \lambda_2$. Montrer que dans ce cas, $A = \tilde{P} D \tilde{P}^{-1}$.

Supposons maintenant que $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

3. Que valent $\dim(\ker(A - \lambda_1 I))$ et $\dim(\ker(A - \lambda_2 I))$?
4. Montrer que si $x \in \ker(B)$, alors x est un vecteur propre de B.

Exercice récapitulatif - Exercice 6

Supposons maintenant que $Bx \neq 0$.

5. Montrer que Bx est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ_1. En remarquant que x et Bx appartiennent à $\ker(A - \lambda_1 I)$, montrer que x est un vecteur propre de B.