**TD2 | Noyau, rang, factorisation $LU$ et déterminants**
**MTH1008, Hiver 2025, Groupe 2**

Sacha Benarroch-Lelong, Polytechnique Montréal

## §1.5. Ensembles des solutions de systèmes linéaires

**Exercice 5** Évidemment, "l'ensemble des solutions d'un système homogène" correspond au noyau d'une matrice. Une "forme paramétrique vectorielle" correspond à l'écriture sur laquelle nous avons travaillé en TD. Détaillons 2 méthodes :

Méthode classique : Résoudre par le pivot de Gauss. La forme échelonnée de la matrice associée à ce système est :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On peut faire la remontée triangulaire classique, ou détailler les équations. Je détaille la deuxième solution :

— la $3^{\text{ème}}$ ligne donne simplement $0 = 0$, elle indique que $x_3$ sera la variable libre.

— ligne 2 : $3x_1 + 6x_3 = 0$. $x_3$ est une variable libre donc on la fait passer dans l'autre sens : $x_2 = -2x_3$.

— ligne 1 : $x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$. On remplace $x_2$ par ce que l'on a trouvé au-dessus, on obtient : $x_1 - 6x_3 + x_3 = 0$, soit $x_1 = 5x_3$.

Finalement, le noyau s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(A) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 5x_3, x_2 = -2x_3 \right\} \\ &= \{(5x_3, -2x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_3(5, -2, 1) : x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Les 2 dernières lignes sont 2 réponses les plus acceptables.

Méthode par blocs : On a besoin de la forme échelonnée réduite de la matrice, il s'agit de :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On reconnaît que le rang de la matrice vaut $r = 2$, donc le bloc $F$ est de taille $2 \times 1$, c'est la dernière colonne de $R$. En complétant avec la matrice identité de taille $3 - 2 = 1$ (i.e. simplement un 1) ; on obtient la matrice noyau :

$$N = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et le noyau s'exprime par $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Vect}\left\{\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

**Exercice 6** Ici, on constate en utilisant la descente de l'élimination de Gauss qu'il n'y a pas d'inconnue non principale dans le système. Il y a un pivot par colonne, donc la matrice est de plein rang et $\operatorname{Ker}(A) = \{0\}$.

**Exercice 14** Cet exercice vise à vous donner une compréhension géométrique de l'écriture paramétrique d'un ensemble de solutions. On remarque que seule l'inconnue $x_4$ intervient dans l'expression des solutions, c'est donc la seule inconnue non principale. L'ensemble des solutions s'écrit donc comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{(3x_4, 8 + x_4, 2 - 5x_4, x_4) : x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0, 8, 2, 0) + x_4(3, 1, -5, 0) : x_4 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Analysons cette dernière expression. Qu'est-ce qu'une droite dans $\mathbb{R}^2$ ? Regardez la figure 1. Une droite est un point de départ, et une direction de déplacementdont on peut suivre n'importe quel multiple (on l'appelle *vecteur directeur* de la droite). C'est exactement ce qu'est l'expression entre accolades mais... dans $\mathbb{R}^4$ ! Il faut la regarder comme suit :

$$\underbrace{(0, 8, 2, 0)}_{\text{un point de départ}} + x_4 \underbrace{(3, 1, -5, 0)}_{\text{une direction de déplacement}}$$

C'est donc bien une droite, mais dans $\mathbb{R}^4$.

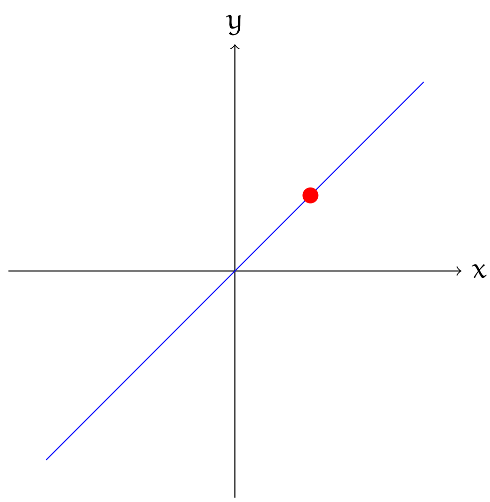


Figure 1 – Une droite dans $\mathbb{R}^2$

**Exercice 38** Non : voir les points g1 et g2 du théorème de caractérisation des matrices inversibles.

## §4.6. Rang

**Exercice 25** La matrice des coefficients du système serait de taille $10 \times 12$. On a 3 inconnues non principales donc le rang de la matrice est $r = 12 - 3 = 9$. La matrice n'est donc pas de plein rang ligne (elle a 10 lignes), donc en se référant à la dernière slide du chapitre 3, on voit bien qu'il peut ne pas y avoir de solution à un système, selon la valeur du membre de droite.

**Exercice 30** Le rang d'une matrice indique le nombre de ses colonnes linéairement indépendantes. Si $r(A) < r([A|b])$, cela signifie que $[A|b]$ possède une colonne linéairement indépendante de celles de $A$ ! C'est très gênant pour résoudre $Ax = b$, puisque cela signifie que $b \notin \text{Vect}\{a_1, ..., a_n\}$ où $a_1, ..., a_n$ sont les colonnes de $A$. À partir du chapitre 4, on appelle cet ensemble l'image de $A$, et on a $Ax = b$ possède une solution $\Leftrightarrow b \in \text{Im}(A)$. Donc, pour que le système soit compatible, il faut que $r(A) = r([A|b])$.

## §2.5. Factorisations matricielles

**Exercice 21** Ici, une suite d'opérations sur les lignes de $B$ correspond en fait à inverser $B$. $B^{-1}$ peut se comprendre comme le produit $E_p...E_1$ des $p$ matrices élémentaires correspondant à ces opérations sur les lignes.

**Exercice 24** Remarquons que $Q^\top Q = I_n$, ce qui signifie en particulier que $Q$ est inversible. On a $A = QR$, donc $A$ est le produit de 2 matrices inversibles, donc inversible. Par le TCMI, on sait que tout système admet une unique solution. Pour l'obtenir, on a :

$$\begin{aligned}
&Ax = b \\
\Rightarrow &QRx = b \\
\Rightarrow &Rx = Q^\top b \\
\Rightarrow &x = R^{-1} Q^\top b.
\end{aligned}$$

On reviendra en fin de session sur la factorisation $QR$, très utile en pratique.

## §3.1. Introduction aux déterminants

**Exemple 5 du cours** Vérifiez que vous connaissez les propriétés énoncées dans la slide 20. Ici, on développera selon la première colonne :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (-1)^{1+1} \cdot 3 \begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Ici, on a plutôt intérêt à développer selon la dernière ligne puisqu'il y a plus de 0. Le seul élément non nul est en position $(3, 2)$, il faut donc faire bien attention au $(-1)^{i+j}$ devant. D'où :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= 6 \cdot (-1)^{2+3} \cdot (-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 12 \cdot (-1) = -12.
\end{aligned}$$

**Exercice 4** On peut ici développer selon la ligne/colonne qui nous arrange. En suivant la méthode, on obtient $\det(A) = -30$.

**Exercice 24** Vérifiez ici que vous connaissez les propriétés des slides 22 et 23. En permutant les lignes d'une matrice comme ici, on change le signe du déterminant.

**Exercice 26** C'est une matrice de permutation ($L_1 \leftrightarrow L_3$), donc $\det(A) = -1$.

**Exercice 31** Une matrice élémentaire est toujours triangulaire. Son déterminant est donc le produit de ses éléments diagonaux (slide 22). Or une matrice élémentaire est obtenue en modifiant des éléments non diagonaux de la matrice identité. Les éléments diagonaux valent donc toujours 1, et $\det(E) = 1$.

**Déterminant et combinaison de lignes**

Cette dernière propriété est très importante : en réalisant des combinaisons linéaires de lignes, on ne change pas le déterminant d'une matrice. Encore mieux : c'est aussi vrai pour des combinaisons linéaires de colonnes ! Retenez bien cette propriété, elle nous sera utile la semaine prochaine pour simplifier les calculs de déterminants.