Calcul matriciel (1/2)

Cours #2

MT1008 – Hiver 2026

Nathan Allaire, Théo Denorme, Sacha Benarroch-Lelong

Bilan du cours précédent

Après le cours précédent, vous êtes capables :

- de comprendre un système linéaire sous plusieurs de ses formes, algébriques et géométriques, et de le transformer ;
- d'appliquer l'algorithme du pivot de Gauss sur des matrices quelconques, et de nommer les types de matrices qu'il peut fournir (matrices échelonnées et échelonnées réduites) ;
- d'exprimer l'ensemble des solutions d'un système linéaire sous forme paramétrique ;
- de manipuler des combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathbb{R}^n$;
- de déterminer si une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est liée ou libre.

Objectifs

À l'issue de ce cours, vous serez capables :

- de reconnaître certains types particuliers de matrices ;
- de manipuler les opérations matricielles de base (addition, multiplication, transposée) ;
- de définir et manipuler l'inverse d'une matrice carrée ;
- de justifier qu'une matrice carrée est inversible ou non ;
- de calculer l'inverse d'une matrice.

Plan de cours

Plan de cours

Définition

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **matrice** (de taille (ou de type)) $m \times n$ un tableau à m lignes et n colonnes constitué d'éléments du même ensemble. On la note

$$A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

L'élément a_{ij} est appelé le **coefficient** de A situé en position (i, j) pour $i \in [\![1; m]\!]$ et $j \in [\![1; n]\!]$.

Définition

L'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients réels est noté $\mathbb{R}^{m \times n}$. L'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients complexes est noté $\mathbb{C}^{m \times n}$.

Quelques définitions

- Matrice nulle de taille $m \times n$: matrice dont tous les coefficients sont nuls, notée $\mathrm{O}_{m,n}$.
- Matrice ligne : matrice de taille $1 \times n$.
- Matrice colonne : matrice de taille $n \times 1$.

Attention !

Toutes les définitions ci-dessous ne concernent que les matrices carrées.

- Matrice carrée d'ordre/de taille n : matrice de taille $n \times n$.
- Diagonale principale : vecteur constitué des coefficients a_{ii} d'une matrice carrée ($i \in [\![1; n]\!]$).
- Matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) : matrice carrée dont tous les coefficients situés en-dessous (resp. au-dessus) de la diagonale principale sont nuls. Autrement dit, $i > j \implies a_{ij} = 0$ (resp. $i < j \implies a_{ij} = 0$).

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

Attention !

Toutes les définitions ci-dessous ne concernent que les matrices carrées.

Matrice diagonale : matrice dont tous les coefficients sont nuls, en dehors de la diagonale principale.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

Matrice identité de taille n : matrice diagonale de taille n dont tous les coefficients valent 1, notée I_n (ou I, selon le contexte).

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Soient A et B deux matrices de même taille $m \times n$.

- Somme :

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

- Égalité :

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij}, \text{ pour tous } i \in [\![1; m]\!] \text{ et } j \in [\![1; n]\!].$$

- Soit α un scalaire (réel ou complexe).

$$\alpha A = A\alpha = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Proposition

Soient A, B et C des matrices **de même taille**. Soient α et β des scalaires. Les opérations matricielles de base vérifient les propriétés suivantes :

1. $A + B = B + A$ *(commutativité de l'addition)*
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(associativité de l'addition)*
3. $A + \mathrm{O}_{m,n} = A$ *(élément neutre pour l'addition)*
4. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = (\beta\alpha)A$
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ *(distributivité de la multiplication scalaire sur l'addition)*
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ *(distributivité de l'addition scalaire sur la multiplication)*

Démonstration. Toutes ces propriétés se prouvent en écrivant explicitement les opérations terme à terme, et en utilisant l'associativité et la distributivité des opérations dans $\mathbb{R}$ (voir la slide suivante). $\square$

Lorsque vous souhaitez écrire ce genre de preuve, il ne faut **jamais** décider arbitrairement d'une taille pour les matrices que vous utilisez. Hors de question, par exemple, de prouver que $A+B=B+A$ en prenant A et B des matrices 3×2 : il faut le prouver quelles que soient les tailles !

Voici une façon "propre" de montrer la commutativité de l'addition :

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & \cdots & b_{1n}+a_{1n} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & \cdots & b_{2n}+a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}+a_{m1} & b_{m2}+a_{m2} & \cdots & b_{mn}+a_{mn} \end{bmatrix} = B+A. \end{aligned}$$

Règle d'or du produit matriciel

Le produit entre A et B n'est défini que si le nombre de **colonnes** de A est égal au nombre de **lignes** de B :

$$(m \times n) \quad \times \quad (n \times p) \quad = \quad (m \times p).$$

Règle ligne-colonne

$$\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{kp} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk} b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk} b_{kp} \end{bmatrix}$$

Soient

$$A \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad \text{et} \quad B \in \mathbb{R}^{n\times p}.$$

Premier point de vue

$$(AB)_{ij} = \left\langle i^{\text{ème}} \text{ ligne de } A, j^{\text{ème}} \text{ colonne de } B \right\rangle .$$

Le coefficient (i,j) de la matrice AB est le produit scalaire entre la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.

$\rightarrow$ Règle ligne-colonne.

Si

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\ell}_1^\top \\ \boldsymbol{\ell}_2^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{\ell}_m^\top \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_p \end{bmatrix}.$$

Deuxième point de vue

$$AB = \begin{bmatrix} A\mathbf{c}_1 & A\mathbf{c}_2 & \cdots & A\mathbf{c}_p \end{bmatrix}$$

La $j^{\text{ème}}$ colonne de AB est le produit matrice-vecteur entre A et la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.

$\rightarrow$ Pratique pour calculer rapidement une **colonne** du produit AB.

Troisième point de vue

$$AB = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\ell}_1^\top B \\ \boldsymbol{\ell}_2^\top B \\ \vdots \\ \boldsymbol{\ell}_m^\top B \end{bmatrix}$$

La $i^{\text{ème}}$ ligne de AB est le produit à gauche entre la $i^{\text{ème}}$ ligne de A (vecteur ligne) et B.

$\rightarrow$ Pratique pour calculer rapidement une **ligne** du produit AB.

Exemple

Soient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

1.
$$AB = \begin{bmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 7 & 1 \times 6 + 2 \times 8 \\ 3 \times 5 + 4 \times 7 & 3 \times 6 + 4 \times 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

2.
$$AB = \begin{bmatrix} A \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} & A \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

3.
$$AB = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} B \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

Proposition

Soient A, B et C des matrices telles que les sommes et les produits ci-dessous aient un sens.

1. $A(BC) = (AB)C$ *(associativité de la multiplication)*
2. $A(B + C) = AB + AC$ *(distributivité à gauche)*
3. $(B + C)A = BA + CA$ *(distributivité à droite)*
4. $I_m A = A = AI_n$ *(élément neutre pour la multiplication)*

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

5. $A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ fois}}$
6. $A^0 = I_n$
7. $(A^p)(A^q) = A^{p+q}, (A^p)^q = A^{pq}$

Pièges !

- Le produit matriciel n'est pas commutatif : dans la plupart des cas, $AB \neq BA$.
- De $AB = AC$, on **ne peut pas** déduire que $B = C$.
- De $AB = \mathrm{O}_{m,p}$, on **ne peut pas** déduire que $A = \mathrm{O}_{m,n}$ ou $B = \mathrm{O}_{n,p}$. Vérifier avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Transposée d'une matrice

Définition

Si A est une matrice $m \times n$, on appelle transposée de A la matrice $n \times m$, notée $A^\top$, dont les colonnes sont formées des lignes de A.
$\rightarrow$ *Les lignes deviennent les colonnes, et vice versa*

Exemple

On pose

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Alors

$$A^\top = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \quad B^\top = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C^\top = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Proposition

Soient A et B deux matrices dont les tailles sont compatibles avec les sommes et les produits écrits ci-dessous. Alors :

1. $(A^\top)^\top = A$
2. $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$
3. Pour tout scalaire α, $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top$
4. $(AB)^\top = B^\top A^\top$

Défintion

Une matrice **carrée** A est dite **symétrique** si $A^\top = A$.

1. Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$. Calculez $A + B$ et vérifiez que $A + B = B + A$.
2. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. Calculez $A - B$ et vérifiez que $A - B \neq B - A$.
3. Soient $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Vérifiez que A et B respectent la règle d'or, puis calculez AB et BA.

1. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Calculer A^2, A^3.
2. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer $A^\top$, puis annoncez les tailles de $A^\top A$ et $AA^\top$ (règle d'or) avant de les calculer.
3. Soit $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$. Vérifier que $BI = IB = B$.

Plan de cours

Définition

Soit A une matrice **carrée** de raille n. On dit que A est **inversible** s'il existe une matrice C de même taille telle que $AC = I_n$. Dans ce cas, on a également $CA = I_n$, et C est appelée **l'inverse** de A. Si une telle matrice C n'existe pas, A est dite **singulière** (ou **non inversible**).

Exemple

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Vérifier que $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ est l'inverse de A.

Théorème

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice 2×2.

1. A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans le cas contraire, A est singulière.
2. Si A est inversible,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Exemples

Dire si les matrices suivantes sont inversibles. Si c'est le cas, donner leurs inverses.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Proposition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si A est inversible, alors :

1. A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;
2. $A^{\top}$ est inversible et $\left(A^{\top}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\top}$.

Théorème

Le produit de deux matrices inversibles est inversible. Soient A et B deux matrices inversibles de taille $n \times n$. Alors AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Démonstration. □

Exercice : que vaut $\left((AB)^{\top}\right)^{-1}$?

Proposition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Si A est inversible alors pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, le système d'équations linéaires $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet une solution unique, donnée par $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Démonstration. $\square$

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. L'application d'une opération élémentaire du pivot de Gauss sur A peut se réécrire comme une multiplication matricielle :

$$A \sim B \quad \Longleftrightarrow \quad B = EA, \quad \text{où } E \in \mathbb{R}^{m\times m}.$$

Définition

On appelle **matrice élémentaire** de taille $m \times m$ une matrice obtenue en effectuant une seule opération d'élimination sur les lignes de I_m.

Si E est une matrice élémentaire obtenue en effectuant une opération sur les lignes de I_m, le produit EA est le résultat de la même opération effectuée sur les lignes de A.

Permutation $L_i \leftrightarrow L_j$	Obtenue en réalisant $L_i \leftrightarrow L_j$ sur I_m	$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $E_1 A = A$ après $L_1 \leftrightarrow L_2$.
Mise à l'échelle $L_i \leftarrow kL_i$	Obtenue en réalisant $L_i \leftarrow kL_i$ sur I_m	$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$ $E_2 A = A$ après $L_1 \leftarrow kL_1$.
Élimination $L_i \leftarrow L_i + \ell L_j$	Obtenue en réalisant $L_i \leftarrow L_i + \ell L_j$ sur I_m	$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $E_3 A = A$ après $L_2 \leftarrow L_2 + \ell L_1$.

Proposition

Toute matrice d'élimination est inversible.

L'inverse d'une matrice d'élimination E est la matrice d'élimination du même type que E obtenue par l'opération élémentaire qui transforme E en I.

Théorème

Une matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est inversible si et seulement si elle est équivalente selon les lignes à I_n.

Conséquence : si A est inversible, il existe une suite de matrices élémentaires $E_1, E_2, \ldots, E_p \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telles que :

$$(E_p \ldots E_2 E_1)A = I_n$$

d'où :

$$A^{-1} = E_p \ldots E_2 E_1.$$

$$A^{-1} = E_p \dots E_2 E_1 = E_p \dots E_2 E_1 I_n.$$

Donc en appliquant sur I_n la suite d'opérations élémentaires qui transforme A en I_n, on obtient A^{-1}.

Algorithme d'inversion de Gauss-Jordan

Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

1. Construire la matrice augmentée $[A|I_n]$.
2. Appliquer sur $[A|I_n]$ les opérations d'échelonnage-réduction nécessaires à transformer A en I_n.
    - Si A ne peut être réduite à I_n, échec : A n'est pas inversible.
    - Si A peut être réduite à I_n, l'algorithme se termine en fournissant l'inverse de A :

$$[A|I_n] \sim [I_n|A^{-1}].$$

Ce théorème est à connaître **par cœur** !

Théorème (de caractérisation des matrices inversibles)

Soit A une matrice **carrée** de taille n. Tous les énoncés suivants sont équivalents.

1. A est inversible.
2. Il existe $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $CA = I_n$.
3. Il existe $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $AD = I_n$.
4. A est équivalente selon les lignes à I_n.
5. A admet n positions de pivot.
6. Les colonnes de A sont linéairement indépendantes.
7. L'équation homogène $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet la solution triviale $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pour seule solution.
8. Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$.
9. Pour tout $\mathbf{b}$, l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet une solution unique.
10. $A^\top$ est inversible.

Exercice récapitulatif

Partie 1 : Étude de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

a) La matrice A est-elle **inversible** ?

b) Calculez AA^T. La matrice est-elle inversible ? Si oui, calculez son **inverse**.

c) Calculez A^TA. La matrice est-elle inversible ? Si oui, calculez son **inverse**.

d) Que vaut $(A^TA)^T$?

Partie 2 :

a)

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$. Donnez l'**inverse** de A.

b)

Montrez que :

$$(A - I_3)(A + I_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

De manière générale, soit $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice carrée vérifiant :

$$(B + I_n)(B - I_n) = \mathbf{0}_n$$

Montrez que B est **inversible** et que son **inverse** est $B^{-1} = B$.