

TD#3 : Calcul matriciel (blocs, factorisation LU , déterminants)

Programme

1 Matrices par blocs	1
2 Factorisation LU	1
3 Déterminants	2
4 Bilan	2

1 Matrices par blocs

Exercice 1

☞ Section 2.4, exercice 10.

Exercice 2

☞ Section 2.4, exercice 22.

2 Factorisation LU

Exercice 3 (Résolution d'un système à l'aide d'une factorisation LU)

☞ Section 2.5, exercice 6.

► Pour pratiquer encore cette méthode, une capsule de correction de l'exercice 4 est disponible sous ce lien.

Exercice 4 (Calcul d'une factorisation LU)

☞ Section 2.5, exercice 16.

► Pour pratiquer encore cette méthode, une capsule de correction de l'exercice 14 est disponible sous ce lien.

3 Déterminants

Exercice 5

■ Section 3.2, exercice 18.

Exercice 6

■ Section 3.2, exercice 26.

4 Bilan

Exercice 7 (Exercice récapitulatif 1)

Soient les matrices suivantes définies par blocs :

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ D & I \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D & I \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} I & D \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

1. A est-elle triangulaire ? Quel est son déterminant ?
2. Calculez le produit AB .
3. Donnez l'inverse de A .
4. Calculez AC .

Exercice 8 (Factorisation LU et déterminant)

Soient les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 13 & 2 \\ -3 & 18 & 42 & -5 \\ 4 & 14 & -21 & -11 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -7 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad U = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Vérifier que $A = LU$.
2. En déduire le déterminant de A .
3. Calculer le déterminant de $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & -13 & 2 \\ -6 & 18 & -42 & -5 \\ 8 & 14 & 21 & -11 \end{bmatrix}$.

Exercice 9 (Vrai ou faux?)

Dire des énoncés suivants s'ils sont vrais ou faux, et justifier.

1. Si A, B, C et D sont des matrices carrées et que

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

alors $\det(M) = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$.

2. Si A_1, A_2, B_1 et B_2 sont des matrices $n \times n$, que

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix},$$

alors le produit BA est défini, mais pas le produit AB .