Calcul matriciel (2/2): factorisation LU, blocs et déterminants

Cours #3

MTH1008 – Hiver 2026

Nathan Allaire, Théo Denorme, Sacha Benarroch-Lelong

Bilan du cours précédent

Après le cours précédent, vous êtes capables :

- de reconnaître certains types particuliers de matrices ;
- de manipuler les opérations matricielles de base (addition, multiplication, transposée) ;
- de définir et manipuler l'inverse d'une matrice carrée ;
- de justifier qu'une matrice carrée est inversible ou non ;
- de calculer l'inverse d'une matrice.

Objectifs

À l'issue de ce cours, vous serez capables :

- d'effectuer des calculs sur des matrices décomposées en blocs ;
- de calculer une factorisation LU d'une matrice quelconque à partir de l'algorithme d'élimination de Gauss ;
- d'utiliser une factorisation $A = LU$ pour résoudre un système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$;
- de calculer le déterminant d'une matrice ;
- d'interpréter le déterminant d'une matrice.

Plan de cours

1. Matrices par blocs
2. Factorisation LU
3. Déterminants

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Introduction

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Décomposer A en "sous-matrices" (blocs) peut permettre de l'étudier, d'effectuer des calculs ou de l'inverser plus facilement. Deux décompositions possibles seraient :

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Décomposer A en "sous-matrices" (blocs) peut permettre de l'étudier, d'effectuer des calculs ou de l'inverser plus facilement. Deux décompositions possibles seraient :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

avec :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Décomposer A en "sous-matrices" (blocs) peut permettre de l'étudier, d'effectuer des calculs ou de l'inverser plus facilement. Deux décompositions possibles seraient :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

avec :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix}$$

avec :

$$A'_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A'_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A'_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A'_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Soient $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Addition	Les tailles des blocs de A et B doivent correspondre **exactement**.	$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$

Soient $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Addition	Les tailles des blocs de A et B doivent correspondre **exactement**.	$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$
Multiplication par un scalaire	Aucune exigence	$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \cdots \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$

Soient $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Addition	Les tailles des blocs de A et B doivent correspondre **exactement**.	$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$
Multiplication par un scalaire	Aucune exigence	$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \cdots \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$
Transposition	Aucune exigence	$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \implies A^\top = \begin{bmatrix} A_{11}^\top & A_{21}^\top \\ A_{12}^\top & A_{22}^\top \end{bmatrix}$

Si **le partage des colonnes de A correspond exactement à celui des lignes de B**, le produit AB peut être calculé en utilisant la règle ligne-colonne, comme si les blocs étaient des scalaires.

Si **le partage des colonnes de A correspond exactement à celui des lignes de B**, le produit AB peut être calculé en utilisant la règle ligne-colonne, comme si les blocs étaient des scalaires.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} & A_{11}B_{13} + A_{12}B_{23} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} & A_{21}B_{13} + A_{22}B_{23} \end{bmatrix}$$

Si **le partage des colonnes de A correspond exactement à celui des lignes de B**, le produit AB peut être calculé en utilisant la règle ligne-colonne, comme si les blocs étaient des scalaires.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} & A_{11}B_{13} + A_{12}B_{23} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} & A_{21}B_{13} + A_{22}B_{23} \end{bmatrix}$$

Exemple

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Quel découpage proposé à la slide 4 permet de calculer A^2 par blocs ?

Remarque

En écrivant

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

on suppose que :

- A_{11} a autant de lignes que A_{12} ;
- A_{21} a autant de lignes que A_{22} ;
- A_{11} a autant de colonnes que A_{21} ;
- A_{12} a autant de colonnes que A_{22}.

Soient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Décomposer A et B en blocs de taille 2×2.
2. À partir de la décomposition précédente, calculer $A^\top$.
3. Déterminer $A^\top B$ en utilisant le produit matriciel par blocs.

Matrices triangulaires par blocs

Définition

On appelle matrice triangulaire supérieure par blocs une matrice carrée de forme

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathrm{O} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Question : si $A_{11} \in \mathbb{R}^{p\times k}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{p\times \ell}$ et $A_{22} \in \mathbb{R}^{q\times \ell}$, quelle est la taille du bloc O dans cette définition ?

Exemple (fondamental !)

Soient $A_{11} \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{p\times q}$ et $A_{22} \in \mathbb{R}^{q\times q}$. Soit

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathrm{O}_{q,p} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Supposons que A est inversible. Déterminer son inverse.

Exemple

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Justifier que A est inversible. À l'aide d'une décomposition par blocs appropriée, déterminer A^{-1}.

Un quatrième point de vue du produit matriciel

Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ avec

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\ell}_1^\top \\ \boldsymbol{\ell}_2^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{\ell}_n^\top \end{bmatrix}$$

Un quatrième point de vue du produit matriciel

Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ avec

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\ell}_1^\top \\ \boldsymbol{\ell}_2^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{\ell}_n^\top \end{bmatrix}$$

alors :

$$AB = \underbrace{\mathbf{c}_1\boldsymbol{\ell}_1^\top}_{m\times p} + \underbrace{\mathbf{c}_2\boldsymbol{\ell}_2^\top}_{m\times p} + \dots + \underbrace{\mathbf{c}_n\boldsymbol{\ell}_n^\top}_{m\times p}.$$

Un quatrième point de vue du produit matriciel

Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ avec

$$A = \begin{bmatrix}\mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{c}_n\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\ell}_1^\top \\ \boldsymbol{\ell}_2^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{\ell}_n^\top\end{bmatrix}$$

alors :

$$AB = \underbrace{\mathbf{c}_1\boldsymbol{\ell}_1^\top}_{m\times p} + \underbrace{\mathbf{c}_2\boldsymbol{\ell}_2^\top}_{m\times p} + \dots + \underbrace{\mathbf{c}_n\boldsymbol{\ell}_n^\top}_{m\times p}.$$

Suite de l'exemple du cours #2 (slide 15)

4

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 & 6\\15 & 18\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}14 & 16\\28 & 32\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}19 & 22\\43 & 50\end{bmatrix}$$

Plan de cours

1 Matrices par blocs

2 Factorisation LU

3 Déterminants

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. La phase de descente de l'algorithme d'élimination de Gauss fournit une matrice $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sous forme échelonnée, équivalente à A :

$$A \sim U.$$

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. La phase de descente de l'algorithme d'élimination de Gauss fournit une matrice $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sous forme échelonnée, équivalente à A :

$$A \sim U.$$

Il existe donc des matrices élémentaires $E_1, E_2, \ldots, E_p \in \mathbb{R}^{m\times m}$ telles que :

$$U = E_p \ldots E_2 E_1 A \quad \Longrightarrow \quad A = (E_p \ldots E_2 E_1)^{-1} U.$$

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. La phase de descente de l'algorithme d'élimination de Gauss fournit une matrice $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sous forme échelonnée, équivalente à A :

$$A \sim U.$$

Il existe donc des matrices élémentaires $E_1, E_2, \ldots, E_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$ telles que :

$$U = E_p \ldots E_2 E_1 A \quad \Longrightarrow \quad A = (E_p \ldots E_2 E_1)^{-1} U.$$

- U est une forme échelonnée équivalente à A ;
- le produit $E_p \ldots E_2 E_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (ou son inverse) décrit les opérations élémentaires nécessaires pour passer de A à U.

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. On appelle **factorisation** LU de A une décomposition de A sous forme du produit

$$A = LU$$

où :

- $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est triangulaire inférieure et ne possède que des 1 sur sa diagonale ;
- $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une forme échelonnée équivalente à A.

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. On appelle **factorisation** LU de A une décomposition de A sous forme du produit

$$A = LU$$

où :

- $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est triangulaire inférieure et ne possède que des 1 sur sa diagonale ;
- $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une forme échelonnée équivalente à A.

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U}$$

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. On appelle **factorisation** LU de A une décomposition de A sous forme du produit

$$A = LU$$

où :

- $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$ est triangulaire inférieure et ne possède que des 1 sur sa diagonale ;
- $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est une forme échelonnée équivalente à A.

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U}$$

Question : Dans une telle décomposition, L est toujours inversible. Pourquoi ?

Exemple

Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2 \\ -4x_1 - 5x_2 + 7x_3 = -4 \\ 8x_1 + 6x_2 - 8x_3 = 6 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -13 \\ -4x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 23 \\ 8x_1 + 6x_2 - 8x_3 = -20 \end{cases}$$

1. Directement.

Exemple

Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2 \\ -4x_1 - 5x_2 + 7x_3 = -4 \\ 8x_1 + 6x_2 - 8x_3 = 6 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -13 \\ -4x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 23 \\ 8x_1 + 6x_2 - 8x_3 = -20 \end{cases}$$

1. Directement.
2. En utilisant

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & -5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{U}.$$

Mais... pourquoi ?

Exemple

Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2 \\ -4x_1 - 5x_2 + 7x_3 = -4 \\ 8x_1 + 6x_2 - 8x_3 = 6 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -13 \\ -4x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 23 \\ 8x_1 + 6x_2 - 8x_3 = -20 \end{cases}$$

1. Directement.
2. En utilisant

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & -5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{U}.$$

Laquelle de ces méthodes a nécessité le moins d'opérations ?

Mais... pourquoi ?

Utilités de la factorisation LU :

- ne résoudre que des systèmes triangulaires (plus simples) ;
- conserver en mémoire les opérations d'élimination sur A pour résoudre $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ avec des $\mathbf{b}$ différents.

Méthode

Pour résoudre $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ avec une factorisation $A = LU$:

1. Poser $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$ et résoudre le système triangulaire inférieur $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$.
2. Résoudre $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ avec la solution $\mathbf{y}$ trouvée en (1).

Coût de la factorisation LU

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, combien d'opérations numériques $(+, -, \times, /)$ sont nécessaires pour résoudre $A\mathbf{x} = \mathbf{b}\dots$

- directement (par échelonnage-réduction de $[A|\mathbf{b}]$) ?

Coût de la factorisation LU

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, combien d'opérations numériques $(+, -, \times, /)$ sont nécessaires pour résoudre $A\mathbf{x} = \mathbf{b}\dots$

- directement (par échelonnage-réduction de $[A|\mathbf{b}]$) ?

  Réponse : $\approx \dfrac{2}{3}n^3$ opérations.

Coût de la factorisation LU

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, combien d'opérations numériques $(+, -, \times, /)$ sont nécessaires pour résoudre $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$...

- directement (par échelonnage-réduction de $[A|\mathbf{b}]$) ?

  Réponse : $\approx \dfrac{2}{3}n^3$ opérations.

- grâce à une factorisation $A = LU$?

Coût de la factorisation LU

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, combien d'opérations numériques $(+, -, \times, /)$ sont nécessaires pour résoudre $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$...

- directement (par échelonnage-réduction de $[A|\mathbf{b}]$) ?

  Réponse : $\approx \dfrac{2}{3}n^3$ opérations.

- grâce à une factorisation $A = LU$?

  Réponse : $\approx 2n^2$ opérations.

Coût de la factorisation LU

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, combien d'opérations numériques $(+, -, \times, /)$ sont nécessaires pour résoudre $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$...

- directement (par échelonnage-réduction de $[A|\mathbf{b}]$) ?

$$\text{Réponse :} \quad \approx \frac{2}{3}n^3 \text{ opérations.}$$

- grâce à une factorisation $A = LU$?

$$\text{Réponse :} \quad \approx 2n^2 \text{ opérations.}$$

Mais le calcul de la factorisation LU coûte $\approx \frac{2}{3}n^3$ opérations supplémentaires. Donc :

- la factorisation LU est coûteuse mais une fois réalisée, elle permet de résoudre efficacement $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pour des $\mathbf{b}$ différents.
- Elle est particulièrement utilisée à cette fin dans de nombreuses applications industrielles.

Algorithme de factorisation LU

Deux opérations interdites

- Pas d'**échange de ligne**.
- Pas de **division de ligne**.

Deux opérations interdites

- Pas d'**échange de ligne**.
- Pas de **division de ligne**.

Méthode

1. Échelonner A sans échanger ni diviser aucune ligne.
   - Si c'est impossible, échec : A n'admet pas de factorisation LU.
   - Sinon, U est la forme échelonnée obtenue.
2. L'échelonnage a été réalisé grâce à des matrices d'élimination $E_1, E_2, \ldots, E_p$. Calculer L par :

$$L = (E_p \ldots E_2 E_1)^{-1}.$$

Deux opérations interdites

- Pas d'**échange de ligne**.
- Pas de **division de ligne**.

Méthode

1. Échelonner A sans échanger ni diviser aucune ligne.
   - Si c'est impossible, échec : A n'admet pas de factorisation LU.
   - Sinon, U est la forme échelonnée obtenue.
2. L'échelonnage a été réalisé grâce à des matrices d'élimination $E_1, E_2, \ldots, E_p$. Calculer L par :

$$L = (E_p \ldots E_2 E_1)^{-1}.$$

En pratique : partir de I_m et à chaque opération $L_i \leftarrow L_i - \ell L_j$, remplacer le 0 en position (i,j) par ℓ. Le résultat donne la matrice L.

Exemple

Donner une factorisation LU de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

1. En utilisant la factorisation LU, résoudre le système

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 10 \end{cases}.$$

2. Donner une factorisation LU de la matrice

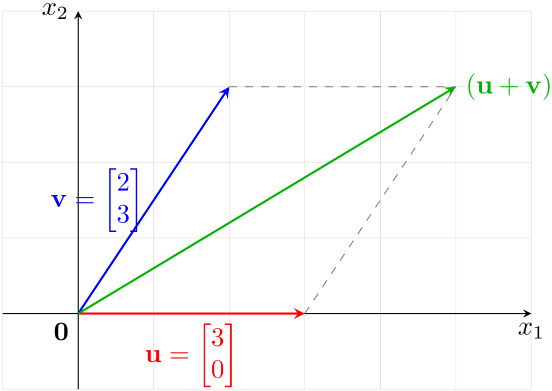
$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Plan de cours

1 Matrices par blocs

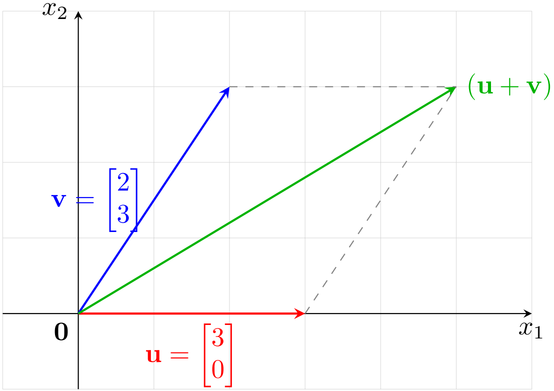
2 Factorisation LU

3 Déterminants



- Comparer l'aire du parallélogramme $(\mathbf{0}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v})$ et la valeur de

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right)$$



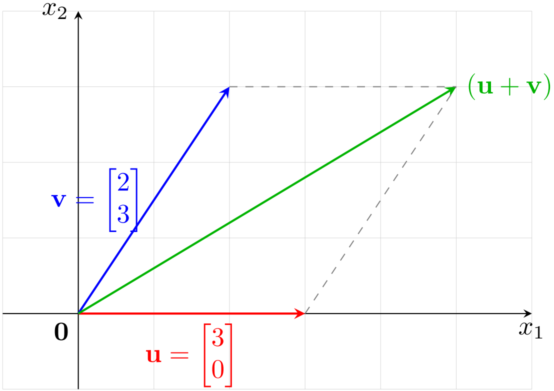
- Comparer l'aire du parallélogramme $(\mathbf{0}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v})$ et la valeur de

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

- Si $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ est une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, le nombre

$$\det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}\right)$$

est l'*hypervolume* du domaine formé par les points $(\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.



- Comparer l'aire du parallélogramme $(\mathbf{0}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v})$ et la valeur de

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

- Si $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ est une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, le nombre

$$\det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \ldots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix}\right)$$

  est l'*hypervolume* du domaine formé par les points $(\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$.
- Donner une interprétation géométrique du cas où $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont colinéaires $(\mathbf{u} = k\mathbf{v}, k \in \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^2$.

Définition

Soit

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

On a :

$$\det(A) = ad - bc.$$

Définition

Soit

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

On a :

$$\det(A) = ad - bc.$$

Proposition

Une matrice $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Définition

Soit A une matrice carrée de taille n. Soit $i \in [\![1; n]\!]$. Le déterminant de A, noté $\det(A)$ ou $|A|$, est le nombre défini par :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \quad (1)$$

où $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ est la matrice obtenue en supprimant les $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

Le calcul de déterminant est donc une opération *récursive*. Si $n > 2$, combien de déterminants 2×2 doivent être calculés pour obtenir le déterminant d'une matrice $n \times n$?

Définition

Soit A une matrice carrée de taille n. Soit $i \in [\![1;n]\!]$. Le déterminant de A, noté $\det(A)$ ou $|A|$, est le nombre défini par :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \tag{1}$$

où $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ est la matrice obtenue en supprimant les $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

Le calcul de déterminant est donc une opération *récursive*. Si $n > 2$, combien de déterminants 2×2 doivent être calculés pour obtenir le déterminant d'une matrice $n \times n$?

Réponse : $\dfrac{n!}{2}$.

Définition

Soit A une matrice carrée de taille n. Soit $i \in [\![1; n]\!]$. Le déterminant de A, noté $\det(A)$ ou $|A|$, est le nombre défini par :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \tag{1}$$

où $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ est la matrice obtenue en supprimant les $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

Le calcul de déterminant est donc une opération *récursive*. Si $n > 2$, combien de déterminants 2×2 doivent être calculés pour obtenir le déterminant d'une matrice $n \times n$?

$$\text{Réponse : } \frac{n!}{2}.$$

Par exemple, calculer le déterminant d'une matrice de taille 10×10 nécessite de calculer...

Formule générale

Définition

Soit A une matrice carrée de taille n. Soit $i \in [\![1; n]\!]$. Le déterminant de A, noté $\det(A)$ ou $|A|$, est le nombre défini par :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \tag{1}$$

où $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ est la matrice obtenue en supprimant les $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

Le calcul de déterminant est donc une opération *récursive*. Si $n > 2$, combien de déterminants 2×2 doivent être calculés pour obtenir le déterminant d'une matrice $n \times n$?

$$\text{Réponse : } \frac{n!}{2}.$$

Par exemple, calculer le déterminant d'une matrice de taille 10×10 nécessite de calculer... 1.814×10^6 déterminants de matrices 2×2.

Proposition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

1. Si A est triangulaire (inférieure ou supérieure), son déterminant est le produit de ses éléments diagonaux :
$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$
2. $\det(A^\top) = \det(A)$.

Démonstration. Ces propriétés découlent directement de la définition du déterminant par développement selon une ligne. $\square$

Proposition

Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

1. Si A est triangulaire (inférieure ou supérieure), son déterminant est le produit de ses éléments diagonaux :
$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$
2. $\det(A^\top) = \det(A)$.

Démonstration. Ces propriétés découlent directement de la définition du déterminant par développement selon une ligne. $\square$

Développement selon une colonne

Le point (2) de ce qui précède justifie que le déterminant d'une matrice peut aussi être calculé par développement selon une **colonne**.

Théorème

Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ deux matrices **carrées**, de **même taille**.

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Démonstration. Cette preuve n'est pas évidente, et elle est hors programme. $\square$

Théorème

Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ deux matrices **carrées**, de **même taille**.

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Démonstration. Cette preuve n'est pas évidente, et elle est hors programme. □

Corollaire

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est inversible, alors

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Démonstration. □

Le retour du TCMI

Théorème (de caractérisation des matrices inversibles)

Soit A une matrice **carrée** de taille n. Tous les énoncés suivants sont équivalents.

1. A est inversible.
2. Il existe $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $CA = I_n$.
3. Il existe $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $AD = I_n$.
4. A est équivalente selon les lignes à I_n.
5. A admet n positions de pivot.
6. Les colonnes de A sont linéairement indépendantes.
7. L'équation homogène $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet la solution triviale $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pour seule solution.
8. Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$.
9. Pour tout $\mathbf{b}$, l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet une solution unique.
10. $A^\top$ est inversible.
11. $\det(A) \neq 0$.

Déterminants des matrices élémentaires

Proposition

Les matrices élémentaires vérifient les propriétés suivantes :

- Matrice de permutation de deux lignes : $\det(E) = -1$.
- Matrice de mise à l'échelle par un facteur $m \in \mathbb{R}$: $\det(E) = m$.
- Matrice d'élimination $(L_i \leftarrow L_i + \ell L_j)$: $\det(E) = 1$.

Proposition

Les matrices élémentaires vérifient les propriétés suivantes :

- Matrice de permutation de deux lignes : $\det(E) = -1$.
- Matrice de mise à l'échelle par un facteur $m \in \mathbb{R}$: $\det(E) = m$.
- Matrice d'élimination $(L_i \leftarrow L_i + \ell L_j)$: $\det(E) = 1$.

Conséquence

Il est possible de faciliter le calcul d'un déterminant en appliquant judicieusement des combinaisons linéaires de lignes. Ces combinaisons sont associées à des matrices d'élimination E vérifiant :

$$\det(EA) = \det(E)\det(A) = 1 \times \det(A) = \det(A)$$

Proposition

Les matrices élémentaires vérifient les propriétés suivantes :

- Matrice de permutation de deux lignes : $\det(E) = -1$.
- Matrice de mise à l'échelle par un facteur $m \in \mathbb{R}$: $\det(E) = m$.
- Matrice d'élimination $(L_i \leftarrow L_i + \ell L_j)$: $\det(E) = 1$.

Conséquence

Il est possible de faciliter le calcul d'un déterminant en appliquant judicieusement des combinaisons linéaires de lignes. Ces combinaisons sont associées à des matrices d'élimination E vérifiant :

$$\det(EA) = \det(E)\det(A) = 1 \times \det(A) = \det(A)$$

Ce raisonnement est aussi permis avec **les colonnes** de A.

Exemple

1. Montrer que la matrice suivante n'est pas inversible :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & 4. \end{bmatrix}$$

2. Calculer le déterminant de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 32$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

Exercices récapitulatifs

Soient les matrices par blocs :

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ D & I \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D & I \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} I & D \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

a) A est-elle triangulaire ? Quel est son déterminant ?

b) Calculez le produit AB.

c) Donnez l'inverse de A.

d) Calculez AC.

Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 13 & 2 \\ -3 & 18 & 42 & -5 \\ 4 & 14 & -21 & -11 \end{bmatrix}$$

a) Effectuez la décomposition LU de A.

b) Déduisez-en le déterminant de A.

Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Calculez $\det(A)$.

b) Quel est le déterminant de $(A^T A)^{-1}$?