MTH1008 (Algèbre linéaire appliquée) Groupe 10
Polytechnique Montréal
Hiver 2026

TD#1 : Équations linéaires, dépendance linéaire

Programme

1 Systèmes d'équations linéaires

1.1 Résolution directe

Exercice 1

Section 1.1, exercice 25.

1.2 Pivot de Gauss et formes échelonnées

Exercice 2

Section 1.2, exercice 8.

1.3 Solution complète

Exercice 3

Section 1.5, exercice 16.

2 Produits matrice-vecteur

Exercice 4 (Combinaisons linéaires et systèmes d'équations linéaires)

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, et soient $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

1. Vérifier que $A\mathbf{b} = \mathbf{c}$.
2. Écrire $\mathbf{c}$ comme une combinaison linéaire des colonnes de A.
3. Sachant que $4\mathbf{b} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, trouver une solution du système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

3 Espaces engendrés et dépendance linéaire

Exercice 5 (Visualisation d'espaces engendrés)

Dans chacun des cas suivants, décrire géométriquement l'espace engendré par les vecteurs donnés, et en donner une représentation paramétrique :

1. $\mathbf{u}_1 = (1,1)$;
2. $\mathbf{u}_1 = (1,1), \mathbf{u}_2 = (-1,1)$;
3. $\mathbf{u}_1 = (1,1), \mathbf{u}_2 = (-1,-1)$;
4. $\mathbf{u}_1 = (1,0), \mathbf{u}_2 = (0,1), \mathbf{u}_3 = (1,1)$
5. $\mathbf{u}_1 = (1,0,1), \mathbf{u}_2 = (1,0,-1)$;
6. $\mathbf{u}_1 = (1,1,1), \mathbf{u}_2 = (-1,1,0), \mathbf{u}_3 = (0,2,1)$;
7. $\mathbf{u}_1 = (1,0,1), \mathbf{u}_2 = (-1,0,-1), \mathbf{u}_3 = (2,0,2)$.

Quel point (de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$) appartient à chacun de ces ensembles engendrés ?

Exercice 6 (Natures des espaces engendrés dans $\mathbb{R}^3$)

Soient $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Donner des conditions sur ces vecteurs pour que $\mathrm{Vect}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ soit :

1. $\mathbb{R}^3$.
2. Un plan de $\mathbb{R}^3$.
3. Une droite de $\mathbb{R}^3$.
4. $\{\mathbf{0}\}$.

Exercice 7 (Déterminer si une famille est liée)

📕 Section 1.7, exercice 9.

4 Vrai ou faux ?

Exercice 8 (Vrai ou faux ?)

Cet exercice est un mélange de questions du manuel issues de différentes sections.
Dire des énoncés suivants s'ils sont vrais ou faux, et justifier.

1. Si A est une matrice $m \times n$ dont les colonnes n'engendrent pas $\mathbb{R}^m$, alors l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est irréalisable pour certains vecteurs $\mathbf{b}$ dans $\mathbb{R}^m$.
2. Les colonnes de la matrice A sont linéairement indépendantes si le vecteur nul est solution de l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. Les colonnes de toute matrice 4×5 sont linéairement dépendantes.
4. Si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont linéairement indépendants, et si $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$ sont linéairement dépendants, alors $\mathbf{z} \in \text{Vect}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$.
5. Si l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ a au moins une solution pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, alors la solution est unique pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.