

Espaces vectoriels (1/2): définitions, noyau, image, bases

Cours #4



MTH1008 – Hiver 2026

Nathan Allaire, Théo Denorme, Sacha Benarroch-Lelong

Ce cours ouvre une nouvelle partie plus "abstraite". À l'issue des 3 cours précédents, vous êtes capables :

- de résoudre des systèmes d'équations linéaires à l'aide de la méthode d'élimination de Gauss ;
- de manipuler l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n ;
- de faire le lien entre le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ et une combinaison linéaire des colonnes de A ;
- de définir et montrer la dépendance linéaire d'un ensemble de vecteurs de \mathbb{R}^n ;
- de caractériser l'inversibilité d'une matrice carrée.

À l'issue de ce cours, vous serez capables :

- de montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel ;
- de montrer qu'un sous-ensemble d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel ;
- de comprendre le noyau d'une matrice $m \times n$ comme un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n ;
- de comprendre l'image d'une matrice $m \times n$ comme un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^m ;
- de construire une base d'un espace vectoriel.

- 1 Introduction
- 2 Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels
- 3 Noyau et image d'une matrice
- 4 Bases d'un espace vectoriel

1 Introduction

2 Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

3 Noyau et image d'une matrice

4 Bases d'un espace vectoriel



(a) Hermann Grassmann (1809 – 1877)



(b) Giuseppe Peano (1858 – 1932)

À travers les âges, les mathématicien.ne.s ont compris que les **opérations** effectuées sur des objets de natures différentes présentaient des propriétés similaires. Ces deux mathématiciens ont participé à formaliser cette observation à travers le concept d'*espace vectoriel*.

Par exemple, l'opération d'addition est définie entre des objets de natures diverses...

Ensemble	Opération d'addition	Élément neutre de l'addition
\mathbb{R}	$a + b \in \mathbb{R}$	$0 \in \mathbb{R}$
\mathbb{R}^n	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) \in \mathbb{R}^n$	$\mathbf{0}_n = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^{m \times n}$	$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$	$O_{m,n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
Fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}	Fonction nulle : $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

- 1 Introduction
- 2 Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels**
- 3 Noyau et image d'une matrice
- 4 Bases d'un espace vectoriel

Définition

Soit V un ensemble non vide sur lequel deux opérations sont définies :

- 1 l'addition : pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, elle est notée $\mathbf{u} + \mathbf{v}$;
- 2 la multiplication par scalaire : pour tout $\mathbf{u} \in V$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, elle est notée $\alpha \mathbf{u}$.

Si de plus, ces deux opérations vérifient les propriétés 1 à 10, V est appelé un **espace vectoriel** (réel). Dans ce cas, les éléments de V sont appelés des **vecteurs**.

Ces propriétés sont parfois appelées les **axiomes** définissant un espace vectoriel, et se regroupent en trois catégories.

Groupe 1 : propriétés de l'addition

- 1 **L'addition de deux éléments de V produit un élément de V :** $(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V), \mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$.
- 2 $(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V), \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ *(commutativité de l'addition)*
- 3 $(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V), (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ *(associativité de l'addition)*
- 4 Il existe un élément de V appelé *vecteur nul* et noté $\mathbf{0}_V$, tel que $(\forall \mathbf{u} \in V), \mathbf{u} + \mathbf{0}_V = \mathbf{u}$.
- 5 Tout élément $\mathbf{u} \in V$ admet un opposé pour l'addition, noté $-\mathbf{u}$ et vérifiant $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}_V$.

Groupe 2 : propriétés de la multiplication scalaire

- 6 **La multiplication d'un élément de V par un scalaire produit un élément de V :** $(\forall \mathbf{u} \in V), (\forall \alpha \in \mathbb{R}), \alpha \mathbf{u} \in V$.
- 9 $(\forall \mathbf{u} \in V), (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}), \alpha(\beta \mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$
- 10 $(\forall \mathbf{u} \in V), 1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Groupe 3 : propriétés des opérations combinées

7 $(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V), (\forall \alpha \in \mathbb{R}), \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}.$ *(distributivité de \times sur $+$)*

8 $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}), (\forall \mathbf{u} \in V), (\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$ *(distributivité de $+$ entre scalaires sur \times)*

Exemple

\mathbb{R}^2 est un espace vectoriel.

- 1 L'addition entre deux vecteurs est définie par : $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
- 2 La multiplication scalaire est définie par : $\alpha \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Exemple

L'ensemble \mathbb{P}_2 des polynômes de degré ≤ 2 est un espace vectoriel.

- 1 Si $p_1(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$ et $p_2(t) = b_2t^2 + b_1t + b_0$, alors :

$$(p_1 + p_2)(t) = (a_2 + b_2)t^2 + (a_1 + b_1)t + (a_0 + b_0) \in \mathbb{P}_2.$$

- 2 Si $p(t) = a_2t^2 + a_1t + a_0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :

$$(\alpha p)(t) = (\alpha a_2)t^2 + (\alpha a_1)t + (\alpha a_0) \in \mathbb{P}_2.$$

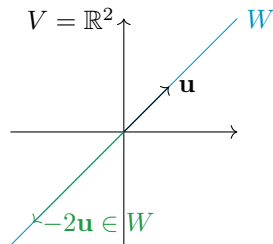
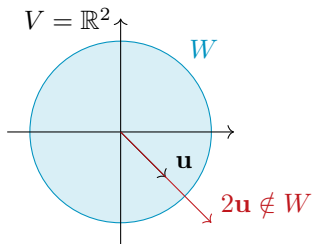
Les ensembles suivants ont tous une structure d'espace vectoriel :

- \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}^*$);
- \mathbb{C}^n ($n \in \mathbb{N}^*$);
- $\mathbb{R}^{m \times n}$;
- l'ensemble \mathbb{P}_n des polynômes de degré $\leq n$ ($n \in \mathbb{N}^*$);
- $\mathcal{C}^0(I; \mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions continues d'une variable définies d'un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} ;
- et tant d'autres...

Définition

Soient V un espace vectoriel et W un sous-ensemble de V . W est appelé un **sous-espace vectoriel de V** si :

- 1 $0_V \in W$;
- 2 pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$; *(stabilité par addition)*
- 3 pour tout $\mathbf{u} \in W$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \mathbf{u} \in W$. *(stabilité par multiplication scalaire)*

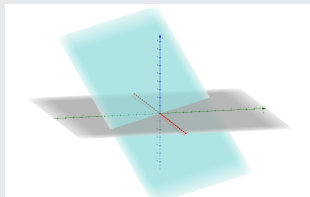


Exemple

$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

est un plan passant par l'origine dans \mathbb{R}^3 .

→ sous-espace vectoriel de... \mathbb{R}^3 .

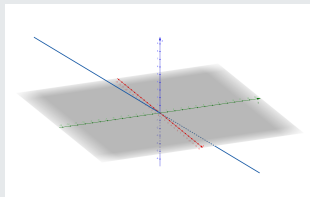


Exemple

$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0\}$$

est une droite passant par l'origine dans \mathbb{R}^3 .

→ sous-espace vectoriel de... \mathbb{R}^3 .



Vocabulaire

On ne dit jamais qu'un ensemble "est un sous-espace vectoriel" sans plus de précision. Il faut toujours préciser **dans quel espace vectoriel** il est inclus.

Soient V un espace vectoriel et $W \subseteq V$. Pour montrer que W est un s.e.v. de V , on suit le schéma de démonstration suivant :

- 1 Montrons que $0_V \in W$.
 - Insérer ici la preuve nécessaire,
- 2 Soient $u, v \in W$. Montrons que $u + v \in W$.
 - Traduire "mathématiquement" l'énoncé " $u, v \in W$ ".
 - Calculer $u + v$.
 - En déduire que $u + v \in W$.

Donc W est stable par addition.

- 3 Soient $u \in W$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrons que $\alpha u \in W$.

- Traduire "mathématiquement" l'énoncé " $u \in W$ ".
- Calculer αu .
- En déduire que $\alpha u \in W$.

Donc W est stable par multiplication scalaire.

Finalement, W est un sous-espace vectoriel de V .

Rappel : si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble engendré par les combinaisons linéaires de ces vecteurs est :

$$\text{Vect} \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p \} = \{ x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + \dots + x_p \mathbf{v}_p \text{ où } x_1, x_2, \dots, x_p \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Théorème

Soient V un espace vectoriel et $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p \in V$. L'ensemble $\text{Vect} \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p \}$ est un sous-espace vectoriel de V .

Démonstration. Exercice du TD#4.



Exemple

Justifions ce qui a été affirmé à la slide 14 : montrer que les ensembles

$$W_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

et

$$W_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace dans lequel ils sont contenus ?

1 $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 3z = 2\}$

2 $W_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - 5z = 0\} \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$

3 $W_3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$

4 $W_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : ad - bc = 1 \right\}$

Pour vérifier votre compréhension :

1 \mathbb{R}^2 est-il un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 ?

2 L'ensemble des matrices carrées inversibles de taille n peut-il être un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel ? Si oui, citer un de ces espaces.

- 1 Introduction
- 2 Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels
- 3 Noyau et image d'une matrice**
- 4 Bases d'un espace vectoriel

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Le **noyau** de A est l'ensemble des solutions du système d'équations homogène $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Cet ensemble est noté $\text{Ker}(A)$, ou $N(A)$.

$$\text{Ker}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Dans la littérature anglophone, on trouvera souvent $\text{Nul}(A)$ pour "nullspace".

Exemple

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donner $\text{Ker}(A)$.

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. On appelle **image** (ou *espace des colonnes*) de A l'ensemble engendré par les colonnes de A , noté $\text{Im}(A)$ ou $C(A)$. Si $A = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n]$, alors :

$$\begin{aligned}\text{Im}(A) &= \text{Vect} \{ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \} \\ &= \{ x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n \text{ où } x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ A\mathbf{x} \text{ où } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \} \\ &= \{ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m : \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \}\end{aligned}$$

Exemple

Donner les images des matrices suivantes :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Plusieurs résultats connus se reformulent avec ces deux nouveaux outils.

Proposition

Soient $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ est compatible} \iff \mathbf{b} \in \text{Im}(A).$$

Ainsi,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ est compatible pour tout } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \iff \text{Im}(A) = \mathbb{R}^m.$$

Proposition

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

$$\text{Les colonnes de } A \text{ sont linéairement indépendantes} \iff \text{Ker}(A) = \{\mathbf{0}_n\}.$$

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Proposition

$\text{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Démonstration.



Proposition

$\text{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^m .

Démonstration.



Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

$\text{Ker}(A)$

- Sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
- Pour en trouver des vecteurs, résoudre $[A|\mathbf{0}] \rightarrow$ coûteux.
- Pour vérifier si $\mathbf{x} \in \text{Ker}(A)$, vérifier si $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \rightarrow$ rapide.
- Indique la dépendance linéaire entre les colonnes de A .
- Indique si les solutions à $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sont uniques, lorsqu'elles existent.

$\text{Im}(A)$

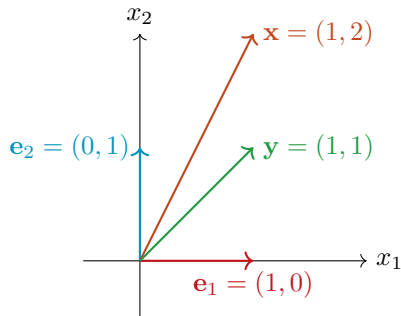
- Sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^m .
- Pour en trouver des vecteurs, regarder les colonnes \rightarrow rapide.
- Pour vérifier si $\mathbf{y} \in \text{Im}(A)$, vérifier si $[A|\mathbf{y}]$ est compatible \rightarrow coûteux.
- Indique les vecteurs constructibles par combinaisons linéaires des colonnes de A .
- Indique pour quels $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est compatible.

- 1 Introduction
- 2 Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels
- 3 Noyau et image d'une matrice
- 4 Bases d'un espace vectoriel**

$$\mathbf{x} = 1 \times \mathbf{e}_1 + 2 \times \mathbf{e}_2.$$

Lorsque l'on prend pour *déplacements unitaires* \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 , les coordonnées de \mathbf{x} s'écrivent

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{combien de fois } \mathbf{e}_1? \\ \text{combien de fois } \mathbf{e}_2? \end{array}$$



On a aussi :

$$\mathbf{x} = 1 \times \mathbf{y} + 1 \times \mathbf{e}_2 \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \mathbf{y} + \frac{1}{2} \mathbf{e}_1 + \frac{3}{2} \mathbf{e}_2. \quad (2)$$

- Pourrait-on générer \mathbf{x} à partir de \mathbf{e}_1 seulement ?
- La décomposition (2) est-elle utile ?

L'ensemble

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : A^\top = A\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Si $A \in \mathcal{S}$, alors A peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \text{ où } a, b, d \in \mathbb{R}. \\ &= a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Autrement dit, toute matrice symétrique peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donc :

$$\mathcal{S} = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Soient V un espace vectoriel et $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ une famille de vecteurs de V .

- Si $\text{Vect} \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\} = V$, il est possible que *les directions de ces vecteurs soient redondantes*. C'est le cas de la décomposition (2) à la slide 26.
- Si $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ est une famille *sans redondance*, il est possible qu'elle *ne contienne pas assez de directions pour engendrer V* .

En fait, vecteurs redondants = famille liée et famille sans redondance = famille libre. Une **base** de V est le parfait équilibre entre ces deux constats :

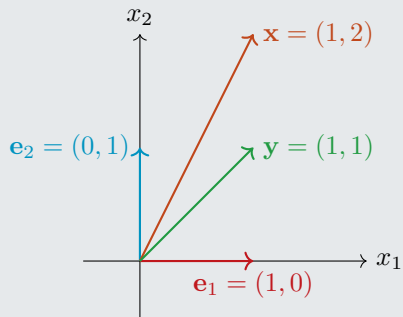
Définition

Soient V un espace vectoriel et $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ une famille de vecteurs de V . Cette famille est une **base** de V si :

- 1 Elle est libre (les vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ sont linéairement indépendants) ;
- 2 $\text{Vect} \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\} = V$.

Remarque : Si $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ est une base d'un espace vectoriel V , alors tout $\mathbf{x} \in V$ a **une décomposition unique** comme combinaison linéaire de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$.

Exemple



Dire de chacune des familles suivantes si elle engendre \mathbb{R}^2 , si elle est libre ou liée, et si c'est une base de \mathbb{R}^2 :

- 1 (e_1)
- 2 (e_1, e_2)
- 3 (e_1, y)
- 4 (e_1, e_2, y)

Les constats dressés dans l'exemple précédent se traduisent en les deux théorèmes suivants :

Théorème (de la base incomplète)

Soient V un espace vectoriel et $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ une famille de vecteurs de V . Si cette famille est libre, il est possible de la compléter par d'autres vecteurs de V afin de former une base de V .

→ pas assez d'information.

Théorème (de la base extraite)

Soient V un espace vectoriel et $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ une famille de vecteurs de V . Si $\text{Vect} \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \} = V$ mais que cette famille est liée, il est possible d'en extraire une autre famille qui constitue une base de V .

→ trop d'information.

Exemple

Soient

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

On pose $V = \text{Vect} \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \}$ (V est donc un s.e.v. de \mathbb{R}^3).

Observation : $\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{u}_1$ donc la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ est liée \rightarrow ce n'est pas une base de V .

Application du théorème de la base extraite :

- Si on retire \mathbf{u}_2 , l'ensemble engendré reste le même :
 $\text{Vect} \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 \} = \text{Vect} \{ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \} = V$.
- Mais maintenant, on a formé une famille libre : $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3)$.

Puisque cette famille engendre V et qu'elle est libre, **c'est une base de V** .

Proposition

- n vecteurs linéairement indépendants dans \mathbb{R}^n engendrent \mathbb{R}^n .
- n vecteurs qui engendrent \mathbb{R}^n sont nécessairement linéairement indépendants.

Attention !

Bien lire ces propositions. Par exemple, on peut en déduire :

- une famille libre de 3 vecteurs dans \mathbb{R}^3 engendre \mathbb{R}^3 ;
- si on identifie $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ dans \mathbb{R}^4 tels que $\text{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\} = \mathbb{R}^4$, alors ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Théorème (de caractérisation des matrices inversibles)

Soit A une matrice **carrée** de taille n . Tous les énoncés suivants sont équivalents.

- 1 A est inversible.
- 2 Il existe $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $CA = I_n$.
- 3 Il existe $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $AD = I_n$.
- 4 A est équivalente selon les lignes à I_n .
- 5 A admet n positions de pivot.
- 6 Pour tout \mathbf{b} , l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet une solution unique.
- 7 A^\top est inversible.
- 8 L'équation homogène $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet la solution triviale $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pour seule solution.
- 9 Les colonnes de A sont linéairement indépendantes.
- 10 $\text{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}$.
- 11 Les colonnes de A engendrent \mathbb{R}^n .
- 12 $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^n$.
- 13 **Les colonnes de A forment une base de \mathbb{R}^n .**
- 14 $\det(A) \neq 0$.

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Méthode : base de $\text{Im}(A)$

Les colonnes pivot de A forment une base de $\text{Im}(A)$.

Méthode : base de $\text{Ker}(A)$

Si A n'est pas inversible : cela signifie que l'équation $Ax = 0$ contient des inconnues non principales. Dans ce cas,

- Supposons que l'on ait p inconnues non principales.
- Pour $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$:
 - Fixer la $i^{\text{ème}}$ inconnue non principale à 1 et les autres à 0.
 - Obtenir de cette façon une solution non triviale à $Ax = 0$.

Les p solutions obtenues par cette méthode forment une base de $\text{Ker}(A)$.

Exercices récapitulatifs

Répondez par vrai ou faux, justifiez vos réponses :

- 1 Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Si $B\mathbf{x} \in \text{Ker}(A)$ alors $\mathbf{x} \in \text{Ker}(AB)$.
- 2 L'ensemble des vecteurs de \mathbb{R}^2 dont la première composante est strictement négative est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .
- 3 L'ensemble vide est un espace vectoriel.
- 4 Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tel que
 - $\mathbf{0}_n \in E$
 - $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{u} + \alpha \mathbf{v} \in E$alors E est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^n .
- 5 Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, une base de $\text{Ker}(A)$ est une base de $\text{Im}(A)$.

Soient les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & -7 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Définissons les ensembles suivants :

- $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = Bx\},$
- $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 = x_2\}.$

Questions :

1. Donnez un espace vectoriel dans lequel E_1 et E_2 sont inclus.
2. E_1 est-il un sous-espace vectoriel ? Justifiez.
3. E_2 est-il un sous-espace vectoriel ? Justifiez.
4. Calculez l'image de $A - B$, puis donnez une base de $\text{Im}(A - B)$.

5. Trouvez le noyau de $A - B$, puis donnez une base de $\text{Ker}(A - B)$.
6. Trouvez le noyau de B , puis donnez une base de $\text{Ker}(B)$.
7. La famille suivante est-elle une base de \mathbb{R}^3 ?

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

8. Soit $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$. Les colonnes de C forment-elles une base de \mathbb{R}^3 ?
9. **Bonus** : Quel est le noyau de la matrice nulle de taille 3×3 ?