Solution exercice récapitulatif - Q1

$E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^3$, donc un espace vectoriel contenant E_1 et E_2 est $\mathbb{R}^3$.

Solution exercice récapitulatif - Q2 (Méthode 1)

Il y a deux méthodes, voici la première (la méthode astucieuse) :

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = Bx\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax - Bx = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (A-B)x = 0\} = \ker(A-B) \end{aligned}$$

donc E_1 est un EV inclus dans $\mathbb{R}^3$, c'est donc un SEV de $\mathbb{R}^3$.

Solution exercice récapitulatif - Q2 (Méthode 2)

La méthode 2 est plus conventionelle, pour prouver que $E_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ est un SEV, montrons les 3 propriétés :

- $0 \in E_1$: $A0 = B0 \implies 0 \in E_1$.
- $x, y \in E_1 \implies x + y \in E_1$:

  Soit $x, y \in E_1$, alors $A(x+y) = Ax + Ay = Bx + By = B(x+y)$ donc $x + y \in E_1$.

- $\lambda \in \mathbb{R}, x \in E_1 \implies \lambda x \in E_1$:

  Soit $x \in E_1, \lambda \in \mathbb{R}$, alors $A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda(Bx) = B(\lambda x)$. donc $\lambda x \in E_1$

E_1 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Solution exercice récapitulatif - Q3

Pour prouver que E_2 n'est pas un SEV :

- Prenons $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in E_2$ car $1^2 = 1$.
- Considérons $2x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$:

$$(2)^2 = 4 \neq 2 \quad \Longrightarrow \quad 2x \notin E_2.$$

Donc E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Solution exercice récapitulatif - Q4

$$A - B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & -4 & -8 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} \boxed{-1} & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -8 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_1 \leftarrow -L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -8 \end{bmatrix}.$$

$$\underset{\sim}{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & -10 & -8 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} \end{bmatrix}.$$

Colonnes pivots : $\boxed{\text{1ère}}$, $\boxed{\text{2ème}}$, et $\boxed{\text{3ème colonnes}}$ Attention à bien prendre les colonnes de la matrices initiale.

$$\mathrm{Im}(A - B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} \right) = \mathbb{R}^3.$$

Solution exercice récapitulatif - Q5

Reprenons le pivot de Gauss de la matrice $A - B$:

$$A - B \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow \frac{L_2}{2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow \frac{L_3}{-3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi $x \in \ker(A - B) \Leftrightarrow (A - B)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0, \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$

$\ker(A - B) = \{0\}$ (Singleton nul).

Solution exercice récapitulatif - Q6

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$Bx = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = x_3. \end{cases} \Leftrightarrow x = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Donc une base de $\ker(B) = Vect \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ et une base est $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Solution exercice récapitulatif - Q7

On remarque que :

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, $v_1 = v_2$, donc la famille n'est pas libre.

Conclusion : La famille ne forme pas une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution exercice récapitulatif - Q8

Nous vous proposons deux méthodes, voici la première (la plus astucieuse) :

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

Développement selon la 3ème colonne :

$$\det(C) = 0 \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 7 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\det(C) = 0 - 2 \cdot (3 - 0) + 7 \cdot (0 + 1) = -6 + 7 = 1.$$

$\det(C) \neq 0 \implies$ les colonnes de C forment une base de $\mathbb{R}^3$ car C est inversible.

Solution exercice récapitulatif - Q8

Nous vous proposons une deuxième méthode, basée sur le pivot de Gauss :

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3} L_1} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \underset{\sim}{L_3 \leftarrow L_3 - 3 L_2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Les pivots sont présents dans chaque ligne, et il y a 3 pivots. Ainsi, les colonnes de C sont linéairement indépendantes.

Dans $\mathbb{R}^3$, une famille de 3 vecteurs linéairement indépendants forme une base.

Conclusion : Les colonnes de C forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution exercice récapitulatif - Bonus

$$\ker(\mathbf{0}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. = \{x \in \mathbb{R}^3\} = \mathbb{R}^3.$$