Espaces vectoriels (1/2): définitions, noyau, image, bases

Cours #4

POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

MTH1008 – Hiver 2026

Nathan Allaire, Théo Denorme, Sacha Benarroch-Lelong

Bilan des cours précédents

Ce cours ouvre une nouvelle partie plus "abstraite". À l'issue des 3 cours précédents, vous êtes capables :

- de résoudre des systèmes d'équations linéaires à l'aide de la méthode d'élimination de Gauss ;
- de manipuler l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$;
- de faire le lien entre le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ et une combinaison linéaire des colonnes de A ;
- de définir et montrer la dépendance linéaire d'un ensemble de vecteurs de $\mathbb{R}^n$;
- de caractériser l'inversibilité d'une matrice carrée.

Objectifs

À l'issue de ce cours, vous serez capables :

- de montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel ;
- de montrer qu'un sous-ensemble d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel ;
- de comprendre le noyau d'une matrice $m \times n$ comme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$;
- de comprendre l'image d'une matrice $m \times n$ comme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$;
- de construire une base d'un espace vectoriel.

Plan de cours

Plan de cours

L'importance des opérations

(a) Hermann Grassmann (1809 – 1877)

(b) Giuseppe Peano (1858 – 1932)

À travers les âges, les mathématicien.ne.s ont compris que les **opérations** effectuées sur des objets de natures différentes présentaient des propriétés similaires. Ces deux mathématiciens ont participé à formaliser cette observation à travers le concept d'*espace vectoriel*.

Ensembles et opérations

Par exemple, l'opération d'addition est définie entre des objets de natures diverses. . .

Ensemble	Opération d'addition	Élément neutre de l'addition
$\mathbb{R}$	$a+b \in \mathbb{R}$	$0 \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^n$	$\mathbf{u}+\mathbf{v} = (u_1+v_1, \ldots, u_n+v_n) \in \mathbb{R}^n$	$\mathbf{0}_n = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^{m\times n}$	$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$	$\mathrm{O}_{m,n} \in \mathbb{R}^{m\times n}$
Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$	$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$	Fonction nulle : $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Plan de cours

Définition d'un espace vectoriel

Définition

Soit V un ensemble non vide sur lequel deux opérations sont définies :

1. l'addition : pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, elle est notée $\mathbf{u} + \mathbf{v}$;
2. la multiplication par scalaire : pour tout $\mathbf{u} \in V$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, elle est notée $\alpha\mathbf{u}$.

Si de plus, ces deux opérations vérifient les propriétés 1 à 10, V est appelé un **espace vectoriel** (réel). Dans ce cas, les éléments de V sont appelés des **vecteurs**.

Ces propriétés sont parfois appelées les **axiomes** définissant un espace vectoriel, et se regroupent en trois catégories.

Groupe 1 : propriétés de l'addition

1. **L'addition de deux éléments de V produit un élément de V :** $(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V)$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$.
2. $(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V)$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ *(commutativité de l'addition)*
3. $(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V)$, $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ *(associativité de l'addition)*
4. Il existe un élément de V appelé *vecteur nul* et noté $\mathbf{0}_V$, tel que $(\forall \mathbf{u} \in V)$, $\mathbf{u} + \mathbf{0}_V = \mathbf{u}$.
5. Tout élément $\mathbf{u} \in V$ admet un opposé pour l'addition, noté $-\mathbf{u}$ et vérifiant $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}_V$.

Groupe 2 : propriétés de la multiplication scalaire

6. **La multiplication d'un élément de V par un scalaire produit un élément de V :** $(\forall \mathbf{u} \in V), (\forall \alpha \in \mathbb{R})$, $\alpha \mathbf{u} \in V$.

9. $(\forall \mathbf{u} \in V), (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$, $\alpha(\beta \mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$

10. $(\forall \mathbf{u} \in V)$, $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Groupe 3 : propriétés des opérations combinées

7. $(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V), (\forall \alpha \in \mathbb{R}),\ \alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}.$ *(distributivité de $\times$ sur $+$)*
8. $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}), (\forall \mathbf{u} \in V),\ (\alpha+\beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$ *(distributivité de $+$ entre scalaires sur $\times$)*

Exemples d'espaces vectoriels

Exemple

$\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel.

1. L'addition entre deux vecteurs est définie par : $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.
2. La multiplication scalaire est définie par : $\alpha \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Exemple

L'ensemble $\mathbb{P}_2$ des polynômes de degré ≤ 2 est un espace vectoriel.

1. Si $p_1(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ et $p_2(t) = b_2 t^2 + b_1 t + b_0$, alors :
$$(p_1 + p_2)(t) = (a_2 + b_2)t^2 + (a_1 + b_1)t + (a_0 + b_0) \in \mathbb{P}_2.$$
2. Si $p(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :
$$(\alpha p)(t) = (\alpha a_2)t^2 + (\alpha a_1)t + (\alpha a_0) \in \mathbb{P}_2.$$

Exemples d'espaces vectoriels

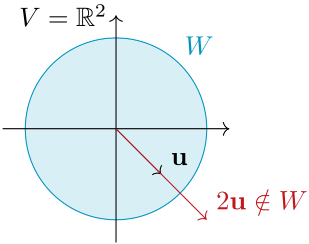
Les ensembles suivants ont tous une structure d'espace vectoriel :

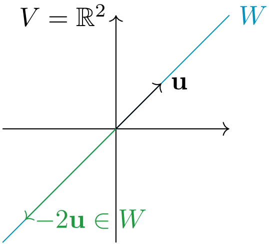
- $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$;
- $\mathbb{C}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$;
- $\mathbb{R}^{m\times n}$;
- l'ensemble $\mathbb{P}_n$ des polynômes de degré $\leq n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$;
- $\mathscr{C}^0(I;\mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions continues d'une variable définies d'un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
- et tant d'autres. . .

Définition

Soient V un espace vectoriel et W un sous-ensemble de V. W est appelé un **sous-espace vectoriel de V** si :

1. $\mathbf{0}_V \in W$;
2. pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$; *(stabilité par addition)*
3. pour tout $\mathbf{u} \in W$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\mathbf{u} \in W$. *(stabilité par multiplication scalaire)*



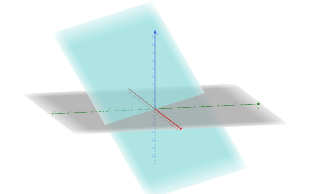


Exemple

$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

est un plan passant par l'origine dans $\mathbb{R}^3$.

$\to$ sous-espace vectoriel de... $\mathbb{R}^3$.

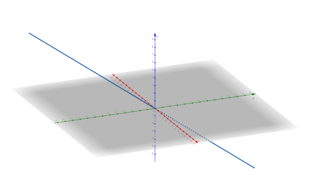


Exemple

$$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1+x_2+x_3 = 0 \text{ et } 2x_1-x_2-2x_3 = 0\}$$

est une droite passant par l'origine dans $\mathbb{R}^3$.

$\to$ sous-espace vectoriel de... $\mathbb{R}^3$.



Vocabulaire

On ne dit jamais qu'un ensemble "est un sous-espace vectoriel" sans plus de précision. Il faut toujours préciser **dans quel espace vectoriel** il est inclus.

Soient V un espace vectoriel et $W \subseteq V$. Pour montrer que W est un s.e.v. de V, on suit le schéma de démonstration suivant :

1. Montrons que $\mathbf{0}_V \in W$.
   - Insérer ici la preuve nécessaire,
2. Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$. Montrons que $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$.
   - Traduire "mathématiquement" l'énoncé "$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$".
   - Calculer $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.
   - En déduire que $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$.

   Donc W est stable par addition.
3. Soient $\mathbf{u} \in W$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrons que $\alpha\mathbf{u} \in W$.
   - Traduire "mathématiquement" l'énoncé "$\mathbf{u} \in W$".
   - Calculer $\alpha\mathbf{u}$.
   - En déduire que $\alpha\mathbf{u} \in W$.

   Donc W est stable par multiplication scalaire.

Finalement, W est un sous-espace vectoriel de V.

Rappel : si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble engendré par les combinaisons linéaires de ces vecteurs est :

$$\mathrm{Vect}\left\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\right\} = \left\{x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_p\mathbf{v}_p \text{ où } x_1, x_2, \ldots, x_p \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Théorème

Soient V un espace vectoriel et $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p \in V$. L'ensemble $\mathrm{Vect}\left\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\right\}$ est un sous-espace vectoriel de V.

Démonstration. Exercice du TD#4. □

Exemple

Justifions ce qui a été affirmé à la slide 14 : montrer que les ensembles

$$W_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

et

$$W_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0\}$$

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de l'espace dans lequel ils sont contenus ?

1. $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 3z = 2\}$
2. $W_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y - 5z = 0\} \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$
3. $W_3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$
4. $W_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : ad - bc = 1 \right\}$

Pour vérifier votre compréhension :

1. $\mathbb{R}^2$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
2. L'ensemble des matrices carrées inversibles de taille n peut-il être un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel ? Si oui, citer un de ces espaces.

Plan de cours

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Le **noyau** de A est l'ensemble des solutions du système d'équations homogène $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Cet ensemble est noté $\mathrm{Ker}(A)$, ou $N(A)$.

$$\mathrm{Ker}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Dans la littérature anglophone, on trouvera souvent $\mathrm{Nul}(A)$ *pour "nullspace".*

Exemple

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donner $\mathrm{Ker}(A)$.

Définition

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. On appelle **image** (ou *espace des colonnes*) de A l'ensemble engendré par les colonnes de A, noté $\mathrm{Im}(A)$ ou $C(A)$. Si $A = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix}$, alors :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(A) &= \mathrm{Vect}\,\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\} \\ &= \{x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n \text{ où } x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\} \\ &= \{A\mathbf{x} \text{ où } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m : \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}\end{aligned}$$

Exemple

Donner les images des matrices suivantes :

$$I = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 2 & 4\end{bmatrix}.$$

Reformulons...

Plusieurs résultats connus se reformulent avec ces deux nouveaux outils.

Proposition

Soient $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ est compatible} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{b} \in \mathrm{Im}(A).$$

Ainsi,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ est compatible pour tout } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^m.$$

Proposition

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

$$\text{Les colonnes de } A \text{ sont linéairement indépendantes} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(A) = \{\mathbf{0}_n\}.$$

Noyau et image sont des espaces vectoriels

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Proposition

$\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. $\square$

Proposition

$\mathrm{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.

Démonstration. $\square$

Noyau et image : résumé

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

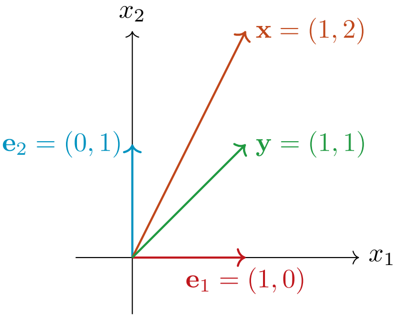
$\boxed{\mathrm{Ker}(A)}$

- Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
- Pour en trouver des vecteurs, résoudre $[A|\mathbf{0}]$ $\rightarrow$ coûteux.
- Pour vérifier si $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(A)$, vérifier si $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\rightarrow$ rapide.
- Indique la dépendance linéaire entre les colonnes de A.
- Indique si les solutions à $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sont uniques, lorsqu'elles existent.

$\boxed{\mathrm{Im}(A)}$

- Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.
- Pour en trouver des vecteurs, regarder les colonnes $\rightarrow$ rapide.
- Pour vérifier si $\mathbf{y} \in \mathrm{Im}(A)$, vérifier si $[A|\mathbf{y}]$ est compatible $\rightarrow$ coûteux.
- Indique les vecteurs constructibles par combinaisons linéaires des colonnes de A.
- Indique pour quels $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est compatible.

Plan de cours



$$\mathbf{x} = 1 \times \mathbf{e}_1 + 2 \times \mathbf{e}_2.$$

Lorsque l'on prend pour *déplacements unitaires* $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$, les coordonnées de $\mathbf{x}$ s'écrivent

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{ combien de fois } \mathbf{e}_1\,? \\ \leftarrow \text{ combien de fois } \mathbf{e}_2\,? \end{array}$$

On a aussi :

$$\mathbf{x} = 1 \times \mathbf{y} + 1 \times \mathbf{e}_2 \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{y} + \frac{1}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{3}{2}\mathbf{e}_2. \quad (2)$$

- Pourrait-on générer $\mathbf{x}$ à partir de $\mathbf{e}_1$ seulement ?
- La décomposition (2) est-elle utile ?

L'ensemble

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A^\top = A\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Si $A \in \mathcal{S}$, alors A peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \text{ où } a, b, d \in \mathbb{R}. \\ &= a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Autrement dit, toute matrice symétrique peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donc :

$$\mathcal{S} = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Soient V un espace vectoriel et $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ une famille de vecteurs de V.

- Si $\mathrm{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\} = V$, il est possible que *les directions de ces vecteurs soient redondantes*. C'est le cas de la décomposition (2) à la slide 26.
- Si $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ est une famille *sans redondance*, il est possible qu'elle *ne contienne pas assez de directions pour engendrer V*.

En fait, vecteurs redondants = famille liée et famille sans redondance = famille libre. Une **base** de V est le parfait équilibre entre ces deux constats :

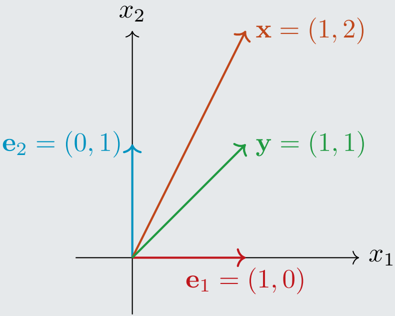
Définition

Soient V un espace vectoriel et $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ une famille de vecteurs de V. Cette famille est une **base** de V si :

1. Elle est libre (les vecteurs $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ sont linéairement indépendants) ;
2. $\mathrm{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\} = V$.

Remarque : Si $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ est une base d'un espace vectoriel V, alors tout $\mathbf{x} \in V$ a **une décomposition unique** comme combinaison linéaire de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$.

Exemple



Dire de chacune des familles suivantes si elle engendre $\mathbb{R}^2$, si elle est libre ou liée, et si c'est une base de $\mathbb{R}^2$:

1. $(\mathbf{e}_1)$
2. $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$
3. $(\mathbf{e}_1, \mathbf{y})$
4. $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{y})$

Trop ou pas assez d'information ?

Les constats dressés dans l'exemple précédent se traduisent en les deux théorèmes suivants :

Théorème (de la base incomplète)

Soient V un espace vectoriel et $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ une famille de vecteurs de V. Si cette famille est libre, il est possible de la compléter par d'autres vecteurs de V afin de former une base de V.

$\rightarrow$ pas assez d'information.

Théorème (de la base extraite)

Soient V un espace vectoriel et $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ une famille de vecteurs de V. Si $\mathrm{Vect}\,\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\} = V$ mais que cette famille est liée, il est possible d'en extraire une autre famille qui constitue une base de V.

$\rightarrow$ trop d'information.

Exemple

Soient

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

On pose $V = \operatorname{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ (V est donc un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$).

Observation : $\mathbf{u}_2 = 2\mathbf{u}_1$ donc la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ est liée → ce n'est pas une base de V.

Application du théorème de la base extraite :

- Si on retire $\mathbf{u}_2$, l'ensemble engendré reste le même : $\operatorname{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \operatorname{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = V$.
- Mais maintenant, on a formé une famille libre : $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3)$.

Puisque cette famille engendre V et qu'elle est libre, **c'est une base de V**.

Proposition

- n vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$ engendrent $\mathbb{R}^n$.
- n vecteurs qui engendrent $\mathbb{R}^n$ sont nécessairement linéairement indépendants.

Attention !

Bien lire ces propositions. Par exemple, on peut en déduire :

- une famille libre de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ engendre $\mathbb{R}^3$;
- si on identifie $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ dans $\mathbb{R}^4$ tels que $\mathrm{Vect}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\} = \mathbb{R}^4$, alors ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Théorème (de caractérisation des matrices inversibles)

Soit A une matrice **carrée** de taille n. Tous les énoncés suivants sont équivalents.

1. A est inversible.
2. Il existe $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $CA = I_n$.
3. Il existe $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $AD = I_n$.
4. A est équivalente selon les lignes à I_n.
5. A admet n positions de pivot.
6. Pour tout $\mathbf{b}$, l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admet une solution unique.
7. $A^\top$ est inversible.
8. L'équation homogène $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admet la solution triviale $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pour seule solution.
9. Les colonnes de A sont linéairement indépendantes.
10. $\mathrm{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}$.
11. Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$.
12. $\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^n$.
13. **Les colonnes de A forment une base de $\mathbb{R}^n$.**
14. $\det(A) \neq 0$.

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Méthode : base de $\mathrm{Im}(A)$

Les colonnes pivot de A forment une base de $\mathrm{Im}(A)$.

Méthode : base de $\mathrm{Ker}(A)$

Si A n'est pas inversible : cela signifie que l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ contient des inconnues non principales. Dans ce cas,

- Supposons que l'on ait p inconnues non principales.
- Pour $i \in [\![1; p]\!]$:
  - Fixer la $i^{\text{ème}}$ inconnue non principale à 1 et les autres à 0.
  - Obtenir de cette façon une solution non triviale à $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Les p solutions obtenues par cette méthode forment une base de $\mathrm{Ker}(A)$.

Exercices récapitulatifs

Exercice récapitulatif 1

Répondez par vrai ou faux, justifiez vos réponses :

1. Soit $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Si $Bx \in \mathrm{Ker}(A)$ alors $x \in \mathrm{Ker}(AB)$.
2. L'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ dont la première composante est strictement négative est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
3. L'ensemble vide est un espace vectoriel.
4. Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tel que
   - $0_n \in E$
   - $\forall u, v \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, u + \alpha v \in E$

   alors E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
5. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, une base de $\mathrm{Ker}(A)$ est une base de $\mathrm{Im}(A)$.

Soient les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & -7 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Définissons les ensembles suivants :

- $E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = Bx\}$,
- $E_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 = x_2\}$.

Questions :

1. Donnez un espace vectoriel dans lequel E_1 et E_2 sont inclus.
2. E_1 est-il un sous-espace vectoriel ? Justifiez.
3. E_2 est-il un sous-espace vectoriel ? Justifiez.
4. Calculez l'image de $A - B$, puis donnez une base de $\mathrm{Im}(A - B)$.

5. Trouvez le noyau de $A - B$, puis donnez une base de $\mathrm{Ker}(A - B)$.
6. Trouvez le noyau de B, puis donnez une base de $\mathrm{Ker}(B)$.
7. La famille suivante est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

8. Soit $C = \begin{bmatrix}3 & -1 & 0\\1 & 0 & 2\\0 & 1 & 7\end{bmatrix}$. Les colonnes de C forment-elles une base de $\mathbb{R}^3$?
9. **Bonus :** Quel est le noyau de la matrice nulle de taille 3×3 ?