MTH1008 (Algèbre linéaire appliquée) Groupe 10
Polytechnique Montréal
Hiver 2026

TD#4 : Espaces vectoriels (définitions, noyau, image, bases)

Programme

1 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Exercice 1

Section 4.2, exercice 8.

Exercice 2

Section 4.1, exercice 15.

Exercice 3

Section 4.1, exercice 16.

Exercice 4 (Démonstration du théorème du cours 4, slide 16)

Soient V un espace vectoriel et $W \subseteq V$ [1]. Montrer que s'il existe une famille $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p) \subset V$ telle que $\operatorname{Vect}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\} = W$, alors W est un sous-espace vectoriel de V.

Exercice 5 (Sous-espaces de $\mathbb{R}^{n\times n}$)

Dire de chacun des ensembles suivants s'il est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

1. Remarquer que cette écriture signifie que W est un *sous-ensemble* de V, à bien distinguer d'un *sous-espace vectoriel* de V.

1. L'ensemble des matrices singulières.
2. Le singleton $\{\mathrm{O}_{n,n}\}$.
3. L'ensemble des matrices carrées admettant une décomposition LU sous la forme étudiée dans le cours #3.
4. L'ensemble des matrices A vérifiant $A^\top = -A$ (appelées matrices *anti-symétriques*).

Exercice 6

Soient E un espace vectoriel ; F et G des sous-espaces vectoriels de F. Montrer que :

1. $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E ;
2. $F \cup G$ peut ne pas être un sous-espace vectoriel de E.

1.1 Sous-espaces engendrés

2 Noyau et image d'une matrice

Exercice 7

Section 4.2, exercice 16.

Exercice 8

Soit

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$$

dont les colonnes vérifient $\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$. Donner un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(A)$.

3 Bases d'un espace vectoriel

Exercice 9

Section 4.3, exercice 14.

4 Bilan

Exercice 10 (Vrai ou faux ?)

Dire des énoncés suivants s'ils sont vrais ou faux, et justifier.

1. Si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $\mathrm{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}$, alors le système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possède une unique solution, quel que soit $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

2. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Si $B\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(A)$, alors $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(AB)$.