

# Calcul matriciel (2/2): factorisation *LU*, blocs et déterminants

Cours #3

---



MTH1008 – Hiver 2026

Nathan Allaire, Théo Denorme, Sacha Benarroch-Lelong

Après le cours précédent, vous êtes capables :

- de reconnaître certains types particuliers de matrices ;
- de manipuler les opérations matricielles de base (addition, multiplication, transposée) ;
- de définir et manipuler l'inverse d'une matrice carrée ;
- de justifier qu'une matrice carrée est inversible ou non ;
- de calculer l'inverse d'une matrice.

À l'issue de ce cours, vous serez capables :

- d'effectuer des calculs sur des matrices décomposées en blocs ;
- de calculer une factorisation  $LU$  d'une matrice quelconque à partir de l'algorithme d'élimination de Gauss ;
- d'utiliser une factorisation  $A = LU$  pour résoudre un système  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  ;
- de calculer le déterminant d'une matrice ;
- d'interpréter le déterminant d'une matrice.

1 Matrices par blocs

2 Factorisation  $LU$

3 Déterminants

# Introduction

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}.$$

Décomposer  $A$  en "sous-matrices" (blocs) peut permettre de l'étudier, d'effectuer des calculs ou de l'inverser plus facilement. Deux décompositions possibles sont :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{bmatrix}$$

avec :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

avec :

$$A'_{11} = [2 \quad 3] \quad A'_{12} = [0 \quad 0]$$

$$A'_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A'_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Soient  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

Addition

Les tailles des blocs de  $A$  et  $B$  doivent correspondre **exactement**.

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Multiplication par un scalaire

Aucune exigence

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \cdots \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Transposition

Aucune exigence

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \implies A^\top = \begin{bmatrix} A_{11}^\top & A_{12}^\top \\ A_{21}^\top & A_{22}^\top \end{bmatrix}$$

Si le partage des colonnes de  $A$  correspond exactement à celui des lignes de  $B$ , le produit  $AB$  peut être calculé en utilisant la règle ligne-colonne, comme si les blocs étaient des scalaires.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} & A_{11}B_{13} + A_{12}B_{23} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} & A_{21}B_{13} + A_{22}B_{23} \end{bmatrix}$$

### Exemple

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Quel découpage proposé à la slide 4 permet de calculer  $A^2$  par blocs ?

**Remarque**

En écrivant

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

on suppose que :

- $A_{11}$  a autant de lignes que  $A_{12}$  ;
- $A_{21}$  a autant de lignes que  $A_{22}$  ;
- $A_{11}$  a autant de colonnes que  $A_{21}$  ;
- $A_{12}$  a autant de colonnes que  $A_{22}$ .

Soient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 1 Décomposer  $A$  et  $B$  en blocs de taille  $2 \times 2$ .
- 2 À partir de la décomposition précédente, calculer  $A^\top$ .
- 3 Déterminer  $A^\top B$  en utilisant le produit matriciel par blocs.

## Définition

On appelle matrice triangulaire supérieure par blocs une matrice carrée de forme

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Question : si  $A_{11} \in \mathbb{R}^{p \times k}$ ,  $A_{12} \in \mathbb{R}^{p \times \ell}$  et  $A_{22} \in \mathbb{R}^{q \times \ell}$ , quelle est la taille du bloc  $O$  dans cette définition ?

## Exemple (fondamental !)

Soient  $A_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $A_{12} \in \mathbb{R}^{p \times q}$  et  $A_{22} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ . Soit

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0_{q,p} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Supposons que  $A$  est inversible. Déterminer son inverse.

## Exemple

Soit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Justifier que  $A$  est inversible. À l'aide d'une décomposition par blocs appropriée, déterminer  $A^{-1}$ .

## Un quatrième point de vue du produit matriciel

Si  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$  avec

$$A = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \dots \quad \mathbf{c}_n] \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} \ell_1^\top \\ \ell_2^\top \\ \vdots \\ \ell_n^\top \end{bmatrix}$$

alors :

$$AB = \underbrace{\mathbf{c}_1 \ell_1^\top}_{m \times p} + \underbrace{\mathbf{c}_2 \ell_2^\top}_{m \times p} + \dots + \underbrace{\mathbf{c}_n \ell_n^\top}_{m \times p}.$$

### Exemple

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [3 \quad 2] + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} [1 \quad 0] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

1 Matrices par blocs

2 Factorisation  $LU$

3 Déterminants

Soit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . La phase de descente de l'algorithme d'élimination de Gauss fournit une matrice  $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$  sous forme échelonnée, équivalente à  $A$  :

$$A \sim U.$$

Il existe donc des matrices élémentaires  $E_1, E_2, \dots, E_p \in \mathbb{R}^{m \times m}$  telles que :

$$U = E_p \dots E_2 E_1 A \implies A = (E_p \dots E_2 E_1)^{-1} U.$$

- $U$  est une forme échelonnée équivalente à  $A$  ;
- le produit  $E_p \dots E_2 E_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  (ou son inverse) décrit les opérations élémentaires nécessaires pour passer de  $A$  à  $U$ .

## Définition

Soit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . On appelle **factorisation LU** de  $A$  une décomposition de  $A$  sous forme du produit

$$A = LU$$

où :

- $L \in \mathbb{R}^{m \times m}$  est triangulaire inférieure et ne possède que des 1 sur sa diagonale ;
- $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est une forme échelonnée équivalente à  $A$ .

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix}}_L \underbrace{\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_U$$

Question : Dans une telle décomposition,  $L$  est toujours inversible. Pourquoi ?

## Exemple

Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2 \\ -4x_1 - 5x_2 + 7x_3 = -4 \\ 8x_1 + 6x_2 - 8x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -13 \\ -4x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 23 \\ 8x_1 + 6x_2 - 8x_3 = -20 \end{cases}$$

- 1 Directement.
- 2 En utilisant

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & -5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{bmatrix}}_A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_L \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_U.$$

Laquelle de ces méthodes a nécessité le moins d'opérations ?

## Utilités de la factorisation $LU$ :

- ne résoudre que des systèmes triangulaires (plus simples) ;
- conserver en mémoire les opérations d'élimination sur  $A$  pour résoudre  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  avec des  $\mathbf{b}$  différents.

## Méthode

Pour résoudre  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  avec une factorisation  $A = LU$  :

- 1 Poser  $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$  et résoudre le système triangulaire inférieur  $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ .
- 2 Résoudre  $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$  avec la solution  $\mathbf{y}$  trouvée en (1).

## Coût de la factorisation $LU$

Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ , combien d'opérations numériques ( $+, -, \times, /$ ) sont nécessaires pour résoudre  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ...

- directement (par échelonnage-réduction de  $[A|\mathbf{b}]$ ) ?

Réponse :  $\approx \frac{2}{3}n^3$  opérations.

- grâce à une factorisation  $A = LU$  ?

Réponse :  $\approx 2n^2$  opérations.

**Mais** le calcul de la factorisation  $LU$  coûte  $\approx \frac{2}{3}n^3$  opérations supplémentaires. Donc :

- la factorisation  $LU$  est coûteuse mais une fois réalisée, elle permet de résoudre efficacement  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  pour des  $\mathbf{b}$  différents.
- Elle est particulièrement utilisée à cette fin dans de nombreuses applications industrielles.

## Deux opérations interdites

- Pas d'**échange de ligne**.
- Pas de **division de ligne**.

## Méthode

- 1 Échelonner  $A$  sans échanger ni diviser aucune ligne.
  - Si c'est impossible, échec :  $A$  n'admet pas de factorisation  $LU$ .
  - Sinon,  $U$  est la forme échelonnée obtenue.
- 2 L'échelonnage a été réalisé grâce à des matrices d'élimination  $E_1, E_2, \dots, E_p$ . Calculer  $L$  par :

$$L = (E_p \dots E_2 E_1)^{-1}.$$

En pratique : partir de  $I_m$  et à chaque opération  $L_i \leftarrow L_i - \ell L_j$ , remplacer le 0 en position  $(i, j)$  par  $\ell$ . Le résultat donne la matrice  $L$ .

## Exemple

Donner une factorisation  $LU$  de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

1 En utilisant la factorisation  $LU$ , résoudre le système

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 10 \end{cases}.$$

2 Donner une factorisation  $LU$  de la matrice

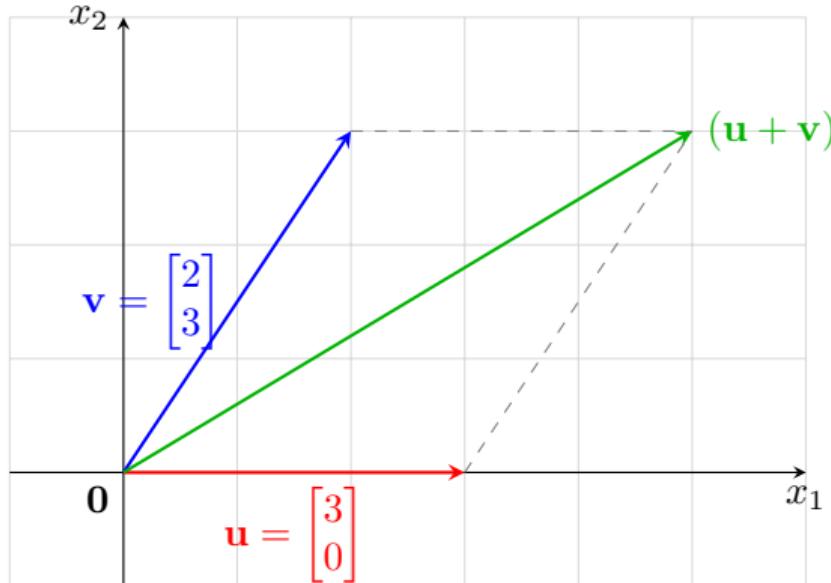
$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -4 & 5 & -7 \\ 3 & 5 & -1 \\ -6 & 4 & -8 \\ 8 & -3 & 9 \end{bmatrix}.$$

1 Matrices par blocs

2 Factorisation  $LU$

3 Déterminants

# Interprétation géométrique



- Comparer l'aire du parallélogramme  $(\mathbf{0}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v})$  et la valeur de

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$  est une famille de  $n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , le nombre

$$\det ([\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n])$$

est l'**hypervolume** (longueur, volume, aire...) du domaine formé par les points  $(\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ .

- Donner une interprétation géométrique du cas où  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont colinéaires ( $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ ) dans  $\mathbb{R}^2$ .

## Définition

Soit

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

On a :

$$\det(A) = ad - bc.$$

## Proposition

Une matrice  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  est inversible si et seulement si  $\det(A) \neq 0$ . Dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

## Définition

Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n$ . Soit  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . Le déterminant de  $A$ , noté  $\det(A)$  ou  $|A|$ , est le nombre défini par :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) \quad (1)$$

où  $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  est la matrice obtenue en supprimant les  $i^{\text{ème}}$  ligne et  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $A$ .

Le calcul de déterminant est donc une opération *réursive*. Si  $n > 2$ , combien de déterminants  $2 \times 2$  doivent être calculés pour obtenir le déterminant d'une matrice  $n \times n$  ?

Réponse :  $\frac{n!}{2}$ .

Par exemple, calculer le déterminant d'une matrice de taille  $10 \times 10$  nécessite de calculer...  $3.6288 \times 10^6$  déterminants de matrices  $2 \times 2$ .

## Proposition

Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

- 1 Si  $A$  est triangulaire (inférieure ou supérieure), son déterminant est le produit de ses éléments diagonaux :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

- 2  $\det(A^\top) = \det(A)$ .

*Démonstration.* Ces propriétés découlent directement de la définition du déterminant par développement selon une ligne. □

## Développement selon une colonne

Le point (2) de ce qui précède justifie que le déterminant d'une matrice peut aussi être calculé par développement selon une **colonne**.

## Théorème

Soient  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  deux matrices **carrées**, de **même taille**.

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

*Démonstration.* Cette preuve n'est pas évidente, et elle est hors programme. □

## Corollaire

Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est inversible, alors

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

*Démonstration.* □

## Théorème (de caractérisation des matrices inversibles)

Soit  $A$  une matrice **carrée** de taille  $n$ . Tous les énoncés suivants sont équivalents.

- 1  $A$  est inversible.
- 2 Il existe  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que  $CA = I_n$ .
- 3 Il existe  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que  $AD = I_n$ .
- 4  $A$  est équivalente selon les lignes à  $I_n$ .
- 5  $A$  admet  $n$  positions de pivot.
- 6 Les colonnes de  $A$  sont linéairement indépendantes.
- 7 L'équation homogène  $Ax = \mathbf{0}$  admet la solution triviale  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  pour seule solution.
- 8 Les colonnes de  $A$  engendrent  $\mathbb{R}^n$ .
- 9 Pour tout  $\mathbf{b}$ , l'équation  $Ax = \mathbf{b}$  admet une solution unique.
- 10  $A^\top$  est inversible.
- 11  $\det(A) \neq 0$ .

## Proposition

Les matrices élémentaires vérifient les propriétés suivantes :

- Matrice de permutation de deux lignes :  $\det(E) = -1$ .
- Matrice de mise à l'échelle par un facteur  $m \in \mathbb{R}$  :  $\det(E) = m$ .
- Matrice d'élimination ( $L_i \leftarrow L_i + \ell L_j$ ) :  $\det(E) = 1$ .

## Conséquence

Il est possible de faciliter le calcul d'un déterminant en appliquant judicieusement des combinaisons linéaires de lignes. Ces combinaisons sont associées à des matrices d'élimination  $E$  vérifiant :

$$\det(EA) = \det(E) \det(A) = 1 \times \det(A) = \det(A)!$$

Ce raisonnement est aussi permis avec **les colonnes** de  $A$ .

## Exemple

1 Montrer que la matrice suivante n'est pas inversible :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

2 Calculer le déterminant de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 32$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

# Exercices récapitulatifs



Soient les matrices par blocs :

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ D & I \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -D & I \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} I & D \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

- a)**  $A$  est-elle triangulaire ? Quel est son déterminant ?
- b)** Calculez le produit  $AB$ .
- c)** Donnez l'inverse de  $A$ .
- d)** Calculez  $AC$ .

Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 13 & 2 \\ -3 & 18 & 42 & -5 \\ 4 & 14 & -21 & -11 \end{bmatrix}$$

- a) Effectuez la décomposition  $LU$  de  $A$ .
- b) Déduisez-en le déterminant de  $A$ .

Soit la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

- a)** Calculez  $\det(A)$ .
- b)** Quel est le déterminant de  $(A^T A)^{-1}$  ?