

Nombres complexes

Cours #7



MTH1008 – Hiver 2026

Sacha Benarroch-Lelong, Théo Denorme (librement inspiré du travail de Sébastien Le Digabel)

À l'issue du cours précédent, vous êtes capables :

- de montrer qu'une application entre deux espaces vectoriels est linéaire ;
- de calculer la matrice associée à une application linéaire $T : V \rightarrow W$ dans les bases canoniques de V et W ;
- d'exprimer l'application linéaire associée à une matrice ;
- d'interpréter l'existence et l'unicité de solutions à un système linéaire $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en termes d'injectivité et de surjectivité de l'application linéaire $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.

À l'issue de ce cours, vous serez capables :

- d'effectuer des opérations sur des nombres complexes sous formes algébrique, polaire et exponentielle ;
- de transformer un nombre complexe d'une de ces trois formes à une autre ;
- de calculer le module et un argument d'un nombre complexe et de les interpréter géométriquement ;
- de résoudre une équation polynômiale de degré 2 dans \mathbb{C} ;
- de calculer les racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe ;
- de manipuler des vecteurs et matrices à coefficients complexes.

- 1 L'ensemble des nombres complexes
- 2 Représentation géométrique des nombres complexes, module et arguments
- 3 Formes polaire et exponentielle
- 4 Résolution d'équations dans \mathbb{C}
- 5 Algèbre linéaire dans \mathbb{C}

- 1** L'ensemble des nombres complexes
- 2 Représentation géométrique des nombres complexes, module et arguments
- 3 Formes polaire et exponentielle
- 4 Résolution d'équations dans \mathbb{C}
- 5 Algèbre linéaire dans \mathbb{C}



FIG. : Al-Khwârizmî (≈ 780–850).



'الكتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة'

*Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb **al-jabr** wa-l-muqābala*

Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison

Exemple (inspiré des notes de Jean-Philippe Preaux lisibles ici)

Résoudre l'équation

$$x^3 - 15x - 4 = 0. \quad (1)$$

Méthode de Cardan (1501–1576) : si t_1 et t_2 sont les deux racines de $t^2 - 4t + 125$, alors $\sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2}$ est une solution de (1).

$$\Delta = -484$$



FIG. : Rafael Bombelli (ca. 1572)

$$t_1 = \frac{4 + \sqrt{-484}}{2} = \frac{4 + 22\sqrt{-1}}{2} = 2 + 11\sqrt{-1} = (2 + \sqrt{-1})^3.$$

$$t_2 = \frac{4 - \sqrt{-484}}{2} = \frac{4 - 22\sqrt{-1}}{2} = 2 - 11\sqrt{-1} = (2 - \sqrt{-1})^3.$$

$$\sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

... et 4 est bien une solution de (1).

Morale : on peut définir de nouveaux objets contre-intuitifs, du moment que les **opérations** autorisées sur ces objets sont également bien définies.

Définition

On appelle *unité imaginaire*, et on note i , l'objet vérifiant

$$i^2 = -1.$$

Rigueur...

Il est incorrect d'écrire que

$$i = \sqrt{-1}.$$

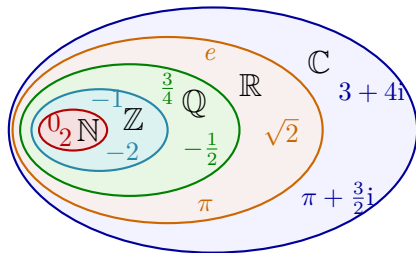
Définition

On appelle ensemble des **nombre complexes** l'ensemble suivant :

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Si $z \in \mathbb{C}$, alors $z = a + ib$ est appelé la **forme algébrique** de z . Dans cette forme :

- $a = \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$ est appelé la **partie réelle** de z .
- $b = \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}$ est appelé la **partie imaginaire** de z .



- Égalité : deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles **et** imaginaires coïncident :

$$a_1 + b_1i = a_2 + b_2i \iff a_1 = a_2 \text{ et } b_1 = b_2.$$

- Addition, soustraction, multiplication : se comportent comme dans \mathbb{R} , en n'oubliant pas de remplacer i^2 par -1 .
- La division est parfois plus subtile...

Exemple (à connaître !)

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1}{1+i}, \quad z_2 = \frac{1-2i}{3+i}$$

Définition

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On appelle **conjugué** de z le nombre complexe :

$$\bar{z} = a - ib.$$

→ la méthode pour calculer $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique consiste donc à multiplier le numérateur et le dénominateur par \bar{z}_2 .

Proposition

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ et $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$.
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.
- $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.
- $\overline{z^n} = \bar{z}^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Proposition

\mathbb{C} est un espace vectoriel réel de dimension 2.

Démonstration.



Proposition

\mathbb{R} est un sous-espace vectoriel de \mathbb{C} , de dimension 1.

Démonstration.



- 1 L'ensemble des nombres complexes
- 2 Représentation géométrique des nombres complexes, module et arguments**
- 3 Formes polaire et exponentielle
- 4 Résolution d'équations dans \mathbb{C}
- 5 Algèbre linéaire dans \mathbb{C}

Proposition

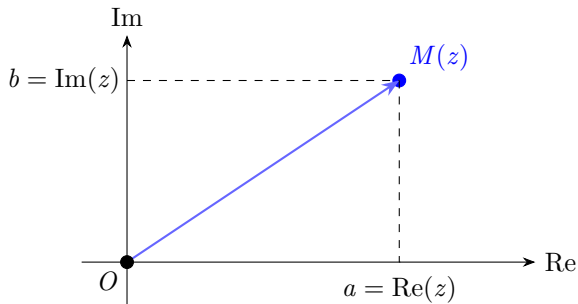
L'application linéaire

$$\begin{aligned} T : \quad \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ a + ib &\mapsto (a, b) \end{aligned}$$

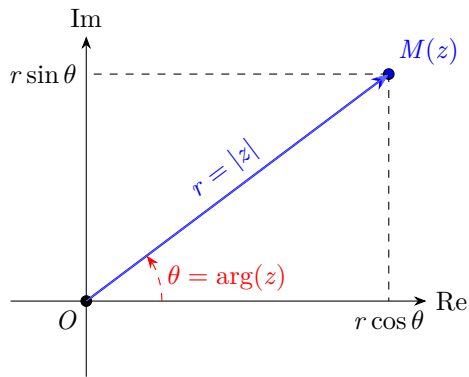
est bijective.

Autrement dit, il existe une correspondance parfaite entre \mathbb{C} et \mathbb{R}^2 : on dit que ces deux ensembles sont *isomorphes* (ce terme n'est pas à retenir.)

Cette similitude permet de représenter tout nombre complexe dans le plan.



$z = a + ib$ est appelé l'**affixe** du point $M(z)$.



Définition

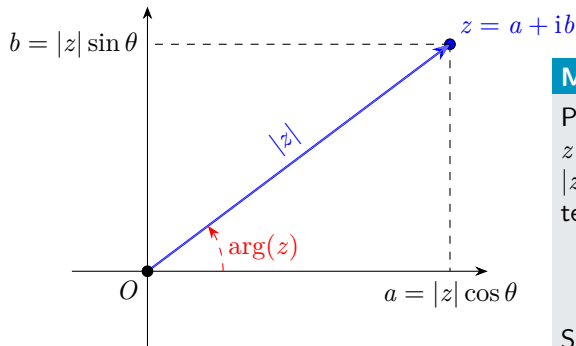
Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On appelle **module** de z la quantité

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si $M(z)$ est le point d'affixe z , alors $|z|$ est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$.

Définition

Soient $z = a + ib \in \mathbb{C}$ et $M(z)$ le point d'affixe z . On appelle **argument** de z une mesure en radians de l'angle orienté entre l'axe des abscisses et le vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$.



$$\begin{cases} a = r \cos \theta \\ b = r \sin \theta \end{cases} \iff \begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{r} \\ \sin \theta = \frac{b}{r} \end{cases} .$$

Méthode

Pour calculer un argument de $z = a + ib \neq 0$, il faut calculer $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ puis identifier un angle θ tel que

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{b}{|z|} \end{cases} .$$

Si $a \neq 0$, on peut en obtenir un par $\theta = \arctan(b/a)$.

Exemple

Soit $z = 1 + i$. Déterminer $|z|$ ainsi qu'un argument de z en mesure principale (i.e. $\arg(z) \in]-\pi, \pi]$).

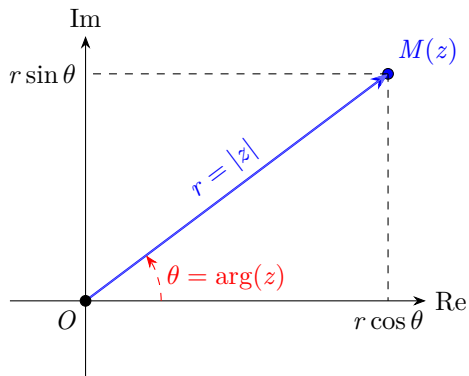
Proposition

- $|\bar{z}| = |z|.$
- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|.$
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}.$
- $z\bar{z} = |z|^2.$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *(inégalité triangulaire)*

Proposition

- $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$
- Si $z_2 \neq 0$, $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2).$
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z).$
- $\arg(z^n) = n \arg(z),$ pour tout $n \in \mathbb{Z}.$

- 1 L'ensemble des nombres complexes
- 2 Représentation géométrique des nombres complexes, module et arguments
- 3 Formes polaire et exponentielle**
- 4 Résolution d'équations dans \mathbb{C}
- 5 Algèbre linéaire dans \mathbb{C}



Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de module $|z| = r$ et d'argument $\arg(z) = \theta$. On appelle **forme polaire** de z l'écriture suivante :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

→ tout nombre complexe "existe" à la fois sous forme algébrique et sous forme polaire. Il s'agit simplement de deux manières différentes de désigner **un même nombre**.

Exemple

Soit $z = 1 + i$.

- 1 Exprimer z sous forme polaire.
- 2 En utilisant les propriétés du module et de l'argument, exprimer sous forme polaire :

$$\frac{1}{z}, \quad z^2, \quad \frac{z}{-1 - \sqrt{3}i}.$$

Formule d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Démonstration.



Définition

Soit $z \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de module $|z| = r$ et d'argument $\arg(z) = \theta$. On appelle **forme exponentielle** de z l'écriture suivante :

$$z = re^{i\theta}.$$

1 Calculer $e^{i\pi} + 1$.

Ce que vous obtenez est appelé l'"identité d'Euler", considérée par certains comme l'un des plus beaux résultats des mathématiques : elle réunit les quatre constantes fondamentales 0, 1, i et π .

2 Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$, avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$. En utilisant les propriétés du module et de l'argument, exprimer \bar{z} sous forme exponentielle.

3 Exprimer $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ sous forme algébrique.

4 Exprimer sous forme exponentielle :

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = -3, \quad z_3 = \frac{(1 + i\sqrt{3})^3}{(1 - i)^5}.$$

La formule d'Euler a pour conséquences les deux (magnifiques) résultats suivants :

Linéarisation des fonctions trigonométriques

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Démonstration.



Formule de De Moivre

Soient $r \in \mathbb{R}_+$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)).$$

- 1 L'ensemble des nombres complexes
- 2 Représentation géométrique des nombres complexes, module et arguments
- 3 Formes polaire et exponentielle
- 4 Résolution d'équations dans \mathbb{C}**
- 5 Algèbre linéaire dans \mathbb{C}

Exemple

Résoudre

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Théorème (fondamental de l'algèbre)

Tout polynôme de degré n possède exactement n racines (réelles ou complexes), en tenant compte de leurs multiplicités.

Méthode

Un polynôme de degré 2 de forme $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) et de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ admet deux racines complexes conjuguées :

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Définition

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle **racine** $n^{\text{ème}}$ du nombre complexe $a + ib$ tout nombre $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$z^n = a + ib.$$

En particulier, on appelle **racine** $n^{\text{ème}}$ **de l'unité** tout nombre $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$z^n = 1.$$

Exemple

Donner les racines deuxièmes de l'unité.

Méthode

Soit $w \in \mathbb{C}$ tel que $|w| = r$ et $\arg(w) = \theta$. Les racines $n^{\text{èmes}}$ de w sont les n nombres complexes obtenus comme :

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i(\theta + 2k\pi)}{n}}, \quad \text{pour } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Justification de cette méthode :

Exemple

Donner les racines quatrièmes de 1.

- 1 L'ensemble des nombres complexes
- 2 Représentation géométrique des nombres complexes, module et arguments
- 3 Formes polaire et exponentielle
- 4 Résolution d'équations dans \mathbb{C}
- 5 Algèbre linéaire dans \mathbb{C}**

De la même façon que l'on note \mathbb{R}^n , on note \mathbb{C}^n l'ensemble des vecteurs de taille n à coefficients complexes.

Définition

Soit $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. On appelle **transconjugué** de \mathbf{z} le vecteur

$$\mathbf{z}^* = (\bar{\mathbf{z}})^\top = [\bar{z}_1 \quad \bar{z}_2 \quad \cdots \quad \bar{z}_n].$$

Définition

Soit $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$. La norme de \mathbf{z} est donnée par

$$\|\mathbf{z}\| = \sqrt{\mathbf{z}^* \mathbf{z}}.$$

Exemple

Soit $\mathbf{z} = (1, i) \in \mathbb{C}^2$. Comparer les expressions $\mathbf{z}^\top \mathbf{z}$ et $\mathbf{z}^* \mathbf{z}$, et en déduire pourquoi la conjugaison est essentielle dans le calcul de la norme.

De la même façon que l'on note $\mathbb{R}^{m \times n}$, on note $\mathbb{C}^{m \times n}$ l'ensemble des matrices de taille $m \times n$ à coefficients complexes.

Définition

Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. On appelle **transconjuguée** de A la matrice $A^* = (\overline{A})^\top$.

La transposition-conjugaison vérifie une propriété similaire à la transposition de matrices réelles : $(AB)^* = B^*A^*$.

Définition

Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. On dit que A est une matrice **hermitienne** ou **auto-adjointe** si $A^* = A$.

Question : Quel concept, déjà défini pour $\mathbb{R}^{n \times n}$, le concept de matrice hermitienne généralise-t-il à $\mathbb{C}^{n \times n}$?

Exercices récapitulatifs

Dire des énoncés suivants s'ils sont vrais ou faux, et justifier.

- 1** Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z = \operatorname{Re}(z)$, alors $z \in \mathbb{R}$.
- 2** Le module d'un nombre complexe z est toujours un nombre réel, positif ou nul.
- 3** Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des solutions (dans \mathbb{C}) de l'équation $z^n = 1$ est inclus dans celui de l'équation $z^{2n} = 1$.
- 4** L'argument d'un nombre complexe est défini de manière unique.
- 5** Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, alors $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.
- 6** Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées distinctes.
- 7** Si $z \in \mathbb{C}$, alors $e^z \in \mathbb{R}$.
- 8** Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, alors la matrice $B = \frac{1}{2}(A^\top + A)$ est hermitienne.
- 9** Si $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, alors la matrice $B = \frac{1}{2}(A^* + A)$ est hermitienne.
- 10** Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a toujours $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Re}(z_2)$.

Soient $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

- 1 Exprimer z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
- 2 Exprimer $z_1 z_2$ sous formes exponentielle puis polaire.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$.

1 Montrer que $\frac{z}{\bar{z}} = i$.

2 Supposons de plus que $\operatorname{Re}(z) > 0$. Écrire z sous forme exponentielle en fonction de $\operatorname{Re}(z)$.

Soit $z = 2 + 2\sqrt{3}i \in \mathbb{C}$.

- 1 Exprimer z sous forme exponentielle.
- 2 Calculer z^3 en utilisant la formule de De Moivre.
- 3 Déterminer les racines cubiques de z_1 .

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et le polynôme à variable complexe $p \in \mathbb{P}_3$ défini par

$$p(z) = a + bz + cz + dz^3, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ vérifiant $p(z_0) = 0$.

- 1 Montrer que $p(\overline{z_0}) = 0$.
- 2 Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Montrer que si $\bar{z} = z$, alors $z \in \mathbb{R}$.
- 3 Justifier que p admet trois racines complexes (en comptant les multiplicités).
- 4 On a constaté que deux des racines de p étaient z_0 et $\overline{z_0}$. Supposons que la dernière racine de p soit $w \in \mathbb{C}$ tel que $w \neq z_0$ et $w \neq \overline{z_0}$. Montrer que $w \in \mathbb{R}$. [*Indication* : Ceci peut se faire en utilisant ce qui a été démontré à la question 2.]

Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

- 1** Soit $B = A^* A$. Montrer que B est hermitienne.
- 2** Montrer que $\overline{B} = B^\top$.
- 3** Le résultat de la question 2 de l'exercice récapitulatif 5 peut se généraliser aux matrices sous la forme suivante :

$$\forall M \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \overline{M} = M \implies M \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

En déduire que $B^\top + B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.