

TD#2 – Solutions

Section 2.1

13. $[Q\mathbf{r}_1 \quad Q\mathbf{r}_2 \quad \dots \quad Q\mathbf{r}_p] = QR$ où $R = [\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \dots \quad \mathbf{r}_p] \in \mathbb{R}^{n \times p}$ (2^{ème} point de vue du produit matriciel).
16. a. Vrai. C'est le 3^{ème} point de vue.
b. Faux. Dans un tel cas, $A\mathbf{b}_1 + A\mathbf{b}_2 + A\mathbf{b}_3 \in \mathbb{R}^3$ alors que $AB \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.
c. Traité en classe.
d. Vrai.

$$\begin{aligned}(ABC)^\top &= C^\top(AB)^\top \\ &= C^\top B^\top A^\top.\end{aligned}$$

e. Vrai. Soient

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

On a :

$$\begin{aligned}(A+B)^\top &= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}^\top \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} & \cdots & a_{m1}+b_{m1} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{m2}+b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}+b_{1n} & a_{2n}+b_{2n} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= A^\top + B^\top.\end{aligned}$$

De manière plus concise, on peut dire que le coefficient (i, j) de la matrice $(A + B)^\top$ est $a_{ji} + b_{ji}$, qui correspond à la somme des coefficients (j, i) de A et B , et donc des coefficients (i, j) de A^\top et B^\top .

Section 2.2

9. a. Vrai, mais l'une implique l'autre si A est carrée. Il s'agit de deux points du théorème de caractérisation des matrices inversibles.
b. Faux. Soient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On a :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Donc

$$A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Pourtant,

$$(AB)(A^{-1}B^{-1}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq I_2.$$

D'où $AB^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$.

- c. Faux.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

vérifie cette relation, pourtant elle n'est pas inversible.

- d. Vrai. Une solution est donnée par $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Il est même possible de montrer que cette solution est unique.
e. Traité en classe.
32. On tente d'appliquer l'algorithme de Gauss-Jordan sur cette matrice. Dès la phase de descente, on trouve :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -2 & 1 \end{array} \right].$$

Puisque la matrice à gauche possède une colonne sans pivot, elle ne peut être réduite à la matrice identité. Cette matrice n'est donc pas inversible, et l'algorithme peut s'arrêter.

Section 2.3

12.
 - a. Vrai. Cette équivalence fait partie du théorème de caractérisation des matrices inversibles.
 - b. Traité en classe.
 - c. Vrai. Cette équivalence fait partie du théorème de caractérisation des matrices inversibles.
 - d. Hors programme pour l'instant.
 - e. Hors programme pour l'instant.
19. D est une matrice carrée dont les colonnes sont linéairement indépendantes donc d'après le théorème de caractérisation des matrices inversibles, A est inversible. D'après ce même théorème, l'équation $D\mathbf{x} = \mathbf{b}$ est compatible et admet une solution unique, quel que soit $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^7$.