

# Nombres complexes

Cours #6

---



MTH1008 – Hiver 2026

Sacha Benarroch-Lelong, Théo Denorme (librement inspiré du travail de Sébastien Le Digabel)

À l'issue du cours précédent, vous êtes capables :

- de montrer qu'une application entre deux espaces vectoriels est linéaire ;
- de calculer la matrice associée à une application linéaire  $T : V \rightarrow W$  dans les bases canoniques de  $V$  et  $W$  ;
- d'exprimer l'application linéaire associée à une matrice ;
- d'interpréter l'existence et l'unicité de solutions à un système linéaire  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  en termes d'injectivité et de surjectivité de l'application linéaire  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ .

À l'issue de ce cours, vous serez capables :

- d'effectuer des opérations sur des nombres complexes sous formes algébrique, polaire et exponentielle ;
- de transformer un nombre complexe d'une de ces trois formes à une autre ;
- de calculer le module et un argument d'un nombre complexe et de les interpréter géométriquement ;
- de résoudre une équation polynomiale de degré 2 dans  $\mathbb{C}$  ;
- de manipuler des vecteurs et matrices à coefficients complexes.

# Plan de cours

- 1 L'ensemble des nombres complexes**
- 2 Représentation géométrique des nombres complexes, module et arguments**
- 3 Formes polaire et exponentielle**
- 4 Résolution d'équations dans  $\mathbb{C}$**
- 5 Algèbre linéaire dans  $\mathbb{C}$**

- 1 L'ensemble des nombres complexes
- 2 Représentation géométrique des nombres complexes, module et arguments
- 3 Formes polaire et exponentielle
- 4 Résolution d'équations dans  $\mathbb{C}$
- 5 Algèbre linéaire dans  $\mathbb{C}$

# Qu'est-ce que l'algèbre ?



FIG. : Al-Khwārizmî (≈ 780–850).



الكتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة

*Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala*

*Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison*

## Exemple (inspiré des notes de Jean-Philippe Preaux lisibles ici)

Résoudre l'équation

$$x^3 - 15x - 4 = 0. \quad (1)$$

Méthode de Cardan (1501–1576) : si  $t_1$  et  $t_2$  sont les deux racines de  $t^2 - 4t + 125$ , alors  $\sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2}$  est une solution de (1).

$$\Delta = -484$$



FIG. : Rafael Bombelli (ca. 1572)

$$t_1 = \frac{4 + \sqrt{-484}}{2} = \frac{2 + 22\sqrt{-1}}{2} = 1 + 11\sqrt{-1} = (2 + \sqrt{-1})^3.$$

$$t_2 = \frac{4 - \sqrt{-484}}{2} = \frac{2 - 22\sqrt{-1}}{2} = 1 - 11\sqrt{-1} = (2 - \sqrt{-1})^3.$$

$$\sqrt[3]{t_1} + \sqrt[3]{t_2} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

... et 4 est bien une solution de (1).

Morale : on peut définir de nouveaux objets contre-intuitifs, du moment que les **opérations** autorisées sur ces objets sont également bien définies.

## Définition

On appelle *unité imaginaire*, et on note  $i$ , l'objet vérifiant

$$i^2 = -1.$$

## Rigueur...

Il est incorrect d'écrire que

$$i = \sqrt{-1}.$$

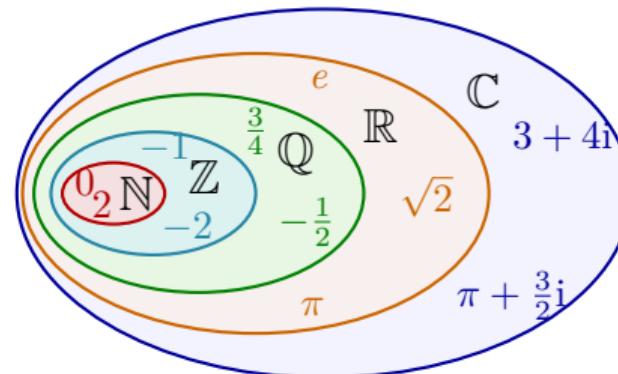
**Définition**

On appelle ensemble des  **nombres complexes** l'ensemble suivant :

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Si  $z \in \mathbb{C}$ , alors  $z = a + ib$  est appelé la  **forme algébrique** de  $z$ . Dans cette forme :

- $a = \text{Re}(z) \in \mathbb{R}$  est appelé la **partie réelle** de  $z$ .
- $b = \text{Im}(z) \in \mathbb{R}$  est appelé la **partie imaginaire** de  $z$ .



# Opérations de base

- Égalité : deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles **et** imaginaires coïncident :

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \iff a_1 = a_2 \text{ et } b_1 = b_2.$$

- Addition, soustraction, multiplication : se comportent comme dans  $\mathbb{R}$ , en n'oubliant pas de remplacer  $i^2$  par  $-1$ .
- La division est parfois plus subtile...

## Exemple (à connaître !)

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1}{1+i}, \quad z_2 = \frac{1-2i}{3+i}$$

## Définition

Soit  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . On appelle **conjugué** de  $z$  le nombre complexe :

$$\bar{z} = a - ib.$$

→ la méthode pour calculer  $\frac{z_1}{z_2}$  sous forme algébrique consiste donc à multiplier le numérateur et le dénominateur par  $\overline{z_2}$ .

## Proposition

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$  et  $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$ .
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$ .
- $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ .
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

## Proposition

$\mathbb{C}$  est un espace vectoriel réel de dimension 2.

*Démonstration.*



## Proposition

$\mathbb{R}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}$ , de dimension 1.

*Démonstration.*



# Plan de cours

- 1 L'ensemble des nombres complexes
- 2 Représentation géométrique des nombres complexes, module et arguments
- 3 Formes polaire et exponentielle
- 4 Résolution d'équations dans  $\mathbb{C}$
- 5 Algèbre linéaire dans  $\mathbb{C}$

## Proposition

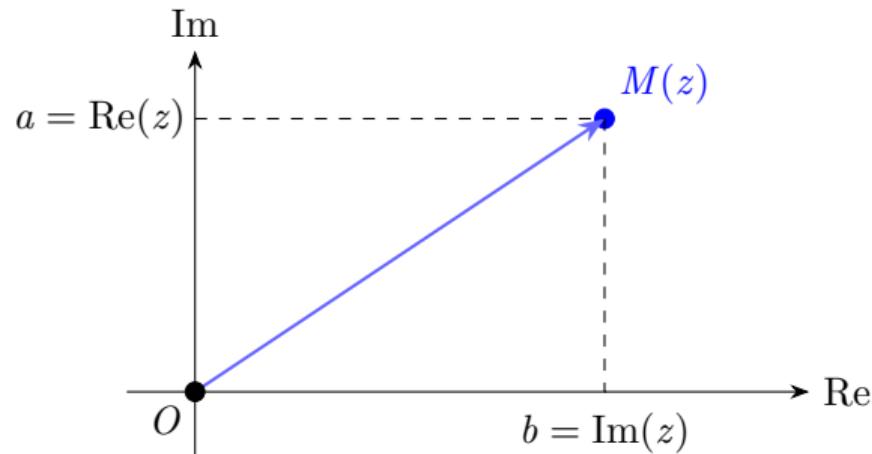
L'application linéaire

$$\begin{aligned} T : \quad \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ a + ib &\mapsto (a, b) \end{aligned}$$

est bijective.

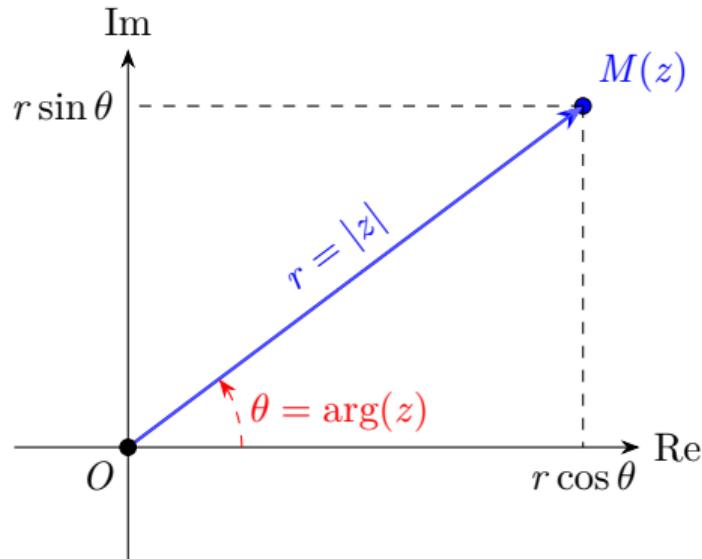
Autrement dit, il existe une correspondance parfaite entre  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{R}^2$  : on dit que ces deux ensembles sont *isomorphes* (ce terme n'est pas à retenir.)

Cette similitude permet de représenter tout nombre complexe dans le plan.



$z = a + ib$  est appelé l'**affixe** du point  $M(z)$ .

# Introduction du module et de l'argument



## Définition

Soit  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . On appelle **module** de  $z$  la quantité

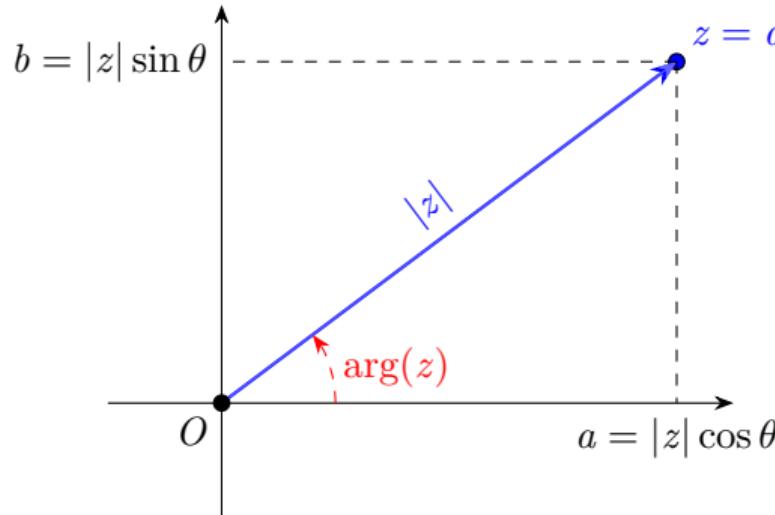
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Si  $M(z)$  est le point d'affixe  $z$ , alors  $|z|$  est la norme du vecteur  $\overrightarrow{OM(z)}$ .

## Définition

Soient  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  et  $M(z)$  le point d'affixe  $z$ . On appelle **argument** de  $z$  une mesure en radians de l'angle orienté entre l'axe des abscisses et le vecteur  $\overrightarrow{OM(z)}$ .

# Calcul d'un argument



$$\begin{cases} a = r \cos \theta \\ b = r \sin \theta \end{cases} \iff \begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{r} \\ \sin \theta = \frac{b}{r} \end{cases} .$$

## Méthode

Pour calculer un argument de  $z = a + ib \neq 0$ , il faut calculer  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  puis identifier un angle  $\theta$  tel que

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{b}{|z|} \end{cases} .$$

De façon équivalente, on a  $\theta = \arctan(b/a)$ .

## Exemple

Soit  $z = 1 + i$ . Déterminer  $|z|$  ainsi qu'un argument de  $z$  en mesure principale (i.e.  $\arg(z) \in ]-\pi, \pi]$ ).

## Proposition

- $|\bar{z}| = |z|$ .
- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ .
- $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$ .
- $z\bar{z} = |z|^2$ .
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  *(inégalité triangulaire)*

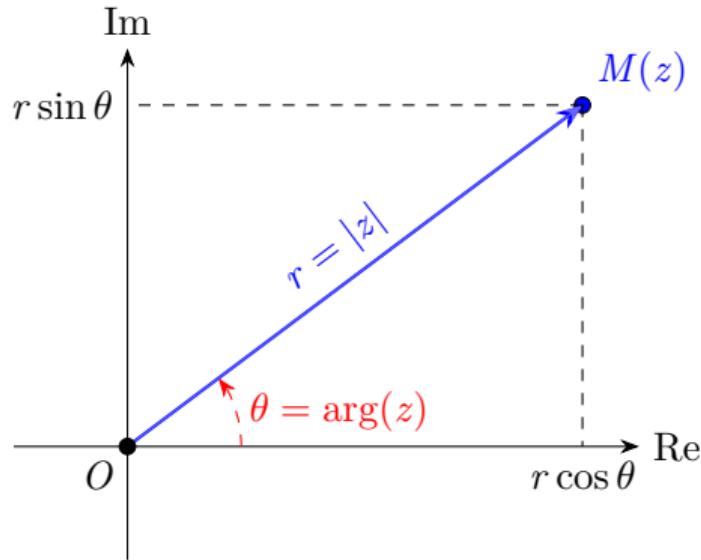
## Proposition

- $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ .
- Si  $z_2 \neq 0$ ,  $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ .
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$ .
- $\arg(z^n) = n \arg(z)$ , pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

# Plan de cours

- 1 L'ensemble des nombres complexes
- 2 Représentation géométrique des nombres complexes, module et arguments
- 3 Formes polaire et exponentielle
- 4 Résolution d'équations dans  $\mathbb{C}$
- 5 Algèbre linéaire dans  $\mathbb{C}$

# Forme polaire



## Définition

Soit  $z \in \mathbb{C}$  un nombre complexe de module  $|z| = r$  et d'argument  $\arg(z) = \theta$ . On appelle **forme polaire** de  $z$  l'écriture suivante :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

→ tout nombre complexe "existe" à la fois sous forme algébrique et sous forme polaire. Il s'agit simplement de deux manières différentes de désigner **un même nombre**.

## Exemple

Soit  $z = 1 + i$ .

- 1 Exprimer  $z$  sous forme polaire.
- 2 En utilisant les propriétés du module et de l'argument, exprimer sous forme polaire :

$$\frac{1}{z}, \quad z^2, \quad \frac{z}{-1 - \sqrt{3}i}.$$

## Formule d'Euler

Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

*Démonstration.*



## Définition

Soit  $z \in \mathbb{C}$  un nombre complexe de module  $|z| = r$  et d'argument  $\arg(z) = \theta$ . On appelle **forme exponentielle** de  $z$  l'écriture suivante :

$$z = re^{i\theta}.$$

1 Calculer  $e^{i\pi} + 1$ .

Ce que vous obtenez est appelé l'"identité d'Euler", considérée par certain.e.s comme l'un des plus beaux résultats des mathématiques : elle réunit les quatre constantes fondamentales 0, 1, i et  $\pi$ .

2 Soit  $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ , avec  $r \in \mathbb{R}_+$  et  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ . En utilisant les propriétés du module et de l'argument, exprimer  $\bar{z}$  sous forme exponentielle.

3 Exprimer  $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$  sous forme algébrique.

4 Exprimer sous forme exponentielle :

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = -3, \quad z_3 = \frac{(1 + i\sqrt{3})^3}{(1 - i)^5}.$$

# Formules d'Euler et de De Moivre

La formule d'Euler a pour conséquences les deux (magnifiques) résultats suivants :

## Linéarisation des fonctions trigonométriques

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . On a :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{-i\theta} - e^{i\theta}}{2i}.$$

*Démonstration.*

□

## Formule de De Moivre

Soient  $r \in \mathbb{R}_+$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)).$$

# Plan de cours

- 1 L'ensemble des nombres complexes
- 2 Représentation géométrique des nombres complexes, module et arguments
- 3 Formes polaire et exponentielle
- 4 Résolution d'équations dans  $\mathbb{C}$
- 5 Algèbre linéaire dans  $\mathbb{C}$

## Exemple

Résoudre

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

## Théorème (fondamental de l'algèbre)

Tout polynôme de degré  $n$  possède exactement  $n$  racines (réelles ou complexes), en tenant compte de leurs multiplicités.

## Méthode

Un polynôme de degré 2 de forme  $ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) et de discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  admet deux racines complexes conjuguées :

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

## Définition

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on appelle **racine  $n^{\text{ème}}$**  du nombre complexe  $a + ib$  tout nombre  $z \in \mathbb{C}$  tel que

$$z^n = a + ib.$$

En particulier, on appelle **racine  $n^{\text{ème}}$  de l'unité** tout nombre  $z \in \mathbb{C}$  tel que

$$z^n = 1.$$

## Exemple

Donner les racines deuxièmes de 1.

## Méthode

Les racines  $n^{\text{èmes}}$  de  $a + ib$  sont les  $n$  nombres complexes obtenus comme :

$$z_k = |a + ib|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}}, \quad \text{pour } k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}.$$

Justification de cette méthode :

## Exemple

Donner les racines quatrièmes de 1.

# Plan de cours

- 1 L'ensemble des nombres complexes
- 2 Représentation géométrique des nombres complexes, module et arguments
- 3 Formes polaire et exponentielle
- 4 Résolution d'équations dans  $\mathbb{C}$
- 5 Algèbre linéaire dans  $\mathbb{C}$

# Vecteurs complexes, transconjugué et norme

De la même façon que l'on note  $\mathbb{R}^n$ , on note  $\mathbb{C}^n$  l'ensemble des vecteurs de taille  $n$  à coefficients complexes.

## Définition

Soit  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ . On appelle **transconjugué** de  $\mathbf{z}$  le vecteur

$$\mathbf{z}^* = (\bar{\mathbf{z}})^\top = [\overline{z_1} \quad \overline{z_2} \quad \cdots \quad \overline{z_n}] .$$

## Définition

Soit  $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ . La norme de  $\mathbf{z}$  est donnée par

$$\|\mathbf{z}\| = \sqrt{\mathbf{z}^* \mathbf{z}}.$$

## Exemple

Soit  $\mathbf{z} = (1, i) \in \mathbb{C}^2$ . Comparer les expressions  $\mathbf{z}^\top \mathbf{z}$  et  $\mathbf{z}^* \mathbf{z}$ , et en déduire pourquoi la conjugaison est essentielle dans le calcul de la norme.

De la même façon que l'on note  $\mathbb{R}^{m \times n}$ , on note  $\mathbb{C}^{m \times n}$  l'ensemble des matrices de taille  $m \times n$  à coefficients complexes.

## Définition

Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . On appelle **transconjuguée** de  $A$  la matrice  $A^* = (\overline{A})^\top$ .

La transposition-conjugaison vérifie une propriété similaire à la transposition de matrices réelles :  $(AB)^* = B^* A^*$ .

## Définition

Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . On dit que  $A$  est une matrice **hermitienne** ou **auto-adjointe** si  $A^* = A$ .

Question : Quel concept, déjà défini pour  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , le concept de matrice hermitienne généralise-t-il à  $\mathbb{C}^{n \times n}$  ?

# Exercices récapitulatifs



Dire des énoncés suivants s'ils sont vrais ou faux, et justifier.

- 1 Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Si  $z = \operatorname{Re}(z)$ , alors  $z \in \mathbb{R}$ .
- 2 Le module d'un nombre complexe  $z$  est toujours un nombre réel, positif ou nul.
- 3 Soit  $n \in \mathbb{N}$ . L'ensemble des solutions (dans  $\mathbb{C}$ ) de l'équation  $z^n = 1$  est inclus dans celui de l'équation  $z^{2n} = 1$ .
- 4 L'argument d'un nombre complexe est défini de manière unique.
- 5 Si  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , alors  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ .
- 6 Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées distinctes.
- 7 Si  $z \in \mathbb{C}$ , alors  $e^z \in \mathbb{R}$ .
- 8 Si  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , alors la matrice  $B = \frac{1}{2}(A^\top + A)$  est hermitienne.
- 9 Si  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , alors la matrice  $B = \frac{1}{2}(A^* + A)$  est hermitienne.
- 10 Pour tous  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , on a toujours  $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1) \operatorname{Re}(z_2)$ .



## Exercice récapitulatif 2

Soient  $z_1 = 1 + i$  et  $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ .

- 1** Exprimer  $z_1$  et  $z_2$  sous forme exponentielle.
- 2** Exprimer  $z_1 z_2$  sous formes exponentielle puis polaire.



## Exercice récapitulatif 3

Soit  $z \in \mathbb{C}^*$  tel que  $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$ .

- 1** Montrer que  $\frac{z}{\bar{z}} = i$ .
- 2** Supposons de plus que  $\operatorname{Re}(z) > 0$ . Écrire  $z$  sous forme exponentielle en fonction de  $\operatorname{Re}(z)$ .



## Exercice récapitulatif 4

Soit  $z = 2 + 2\sqrt{3}i \in \mathbb{C}$ .

- 1** Exprimer  $z$  sous forme exponentielle.
- 2** Calculer  $z^3$  en utilisant la formule de De Moivre.
- 3** Déterminer les racines cubiques de  $z_1$ .



## Exercice récapitulatif 5

Soient  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  et le polynôme à variable complexe  $p \in \mathbb{P}_3$  défini par

$$p(z) = a + bz + cz + dz^3, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$  vérifiant  $p(z_0) = 0$ .

- 1** Montrer que  $p(\overline{z_0}) = 0$ .
- 2** Soit  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . Montrer que si  $\overline{z} = z$ , alors  $z \in \mathbb{R}$ .
- 3** Justifier que  $p$  admet trois racines complexes (en comptant les multiplicités).
- 4** On a constaté que deux des racines de  $p$  étaient  $z_0$  et  $\overline{z_0}$ . Supposons que la dernière racine de  $p$  soit  $w \in \mathbb{C}$  tel que  $w \neq z_0$  et  $w \neq \overline{z_0}$ . Montrer que  $w \in \mathbb{R}$ . [*Indication* : Ceci peut se faire en utilisant ce qui a été démontré à la question 2.]



## Exercice récapitulatif 6

Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .

- 1** Soit  $B = A^*A$ . Montrer que  $B$  est hermitienne.
- 2** Montrer que  $\overline{B} = B^\top$ .
- 3** Le résultat de la question 2 de l'exercice récapitulatif 5 peut se généraliser aux matrices sous la forme suivante :

$$\forall M \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \overline{M} = M \implies M \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

En déduire que  $B^\top + B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

