

# Applications linéaires

Cours #6

---



MTH1008 – Hiver 2026

Nathan Allaire, Théo Denorme, Sacha Benarroch-Lelong

À l'issue du cours précédent, vous êtes capables :

- de calculer la dimension d'un espace vectoriel ;
- de caractériser une matrice par son rang ;
- d'utiliser le rang d'une matrice pour justifier l'existence et/ou l'unicité de solutions à des systèmes d'équations linéaires ;
- d'exprimer des vecteurs d'un espace vectoriels dans plusieurs de ses bases.

À l'issue de ce cours, vous serez capables :

- de montrer qu'une application entre deux espaces vectoriels est linéaire ;
- de calculer la matrice associée à une application linéaire  $T : V \rightarrow W$  dans les bases canoniques de  $V$  et  $W$  ;
- d'exprimer l'application linéaire associée à une matrice ;
- d'interpréter l'existence et l'unicité de solutions à un système linéaire  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  en termes d'injectivité et de surjectivité de l'application linéaire  $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ .

- 1 Notion d'application linéaire
- 2 Matrice d'une application linéaire
- 3 Transformations géométriques par applications linéaires
- 4 Injectivité et surjectivité d'une application linéaire

**1** Notion d'application linéaire

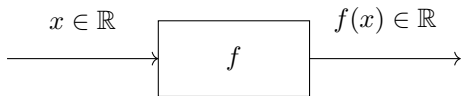
2 Matrice d'une application linéaire

3 Transformations géométriques par applications linéaires

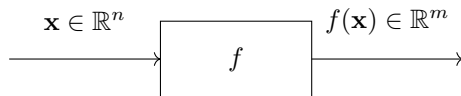
4 Injectivité et surjectivité d'une application linéaire

# Qu'est-ce qu'une fonction ?

Ce que vous connaissez jusqu'ici...



... fonctionnerait aussi avec des vecteurs !



Application  $\approx$  fonction.

## Définition

Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels. On appelle **application** de  $V$  dans  $W$  toute "règle de calcul" qui transforme un vecteur de  $V$  en un vecteur de  $W$ . Une telle application  $T$  est notée :

$$\begin{aligned} T : V &\rightarrow W \\ \mathbf{x} \in V &\mapsto T(\mathbf{x}) \in W. \end{aligned}$$

Dans ce cas,

- $V$  est appelé l'**espace de départ** de  $T$  ;
- $W$  est appelé l'**espace d'arrivée** de  $T$ .
- $T(\mathbf{x}) \in W$  est appelé l'**image** de  $\mathbf{x} \in V$  par  $T$ .

## Exemples

1

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x. \end{aligned}$$

est une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

2

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{x} &\mapsto \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_3 - x_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

est une application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$ .



## Définition

Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels réels et  $T : V \rightarrow W$ . On dit que  $T$  est une application **linéaire** si :

**1**  $(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V), T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}).$

**2**  $(\forall \mathbf{u} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}), T(\alpha \mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u}).$

- On déduit du point (2) que si  $T$  est linéaire, alors  $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ .
- Comme pour la caractérisation des s.e.v., on peut regrouper les conditions (1) et (2) en un seul point :

$$T \text{ est linéaire} \iff (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}), T(\mathbf{u} + \alpha \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + \alpha T(\mathbf{v}).$$

- On montrera dans la section 2 du cours qu'il y a un moyen un peu plus facile de montrer que  $T$  est linéaire...

**1** Montrer que l'application

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} &\mapsto \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 - x_3 \\ -x_2 - x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

est linéaire.

**2** Si on considère l'application  $T$  dont l'ensemble de départ est  $\mathbb{R}^{m \times n}$  et définie par  $T(A) = A^\top$ , quel est l'espace d'arrivée de  $T$ ?  $T$  est-elle linéaire?

**3** L'application calculant l'inverse d'une matrice inversible  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est-elle linéaire?

**4** L'application

$$\begin{aligned} T : \mathbb{P}_1 &\rightarrow \mathbb{P}_2 \\ p(t) &\mapsto tp(t). \end{aligned}$$

est-elle linéaire?

1 Notion d'application linéaire

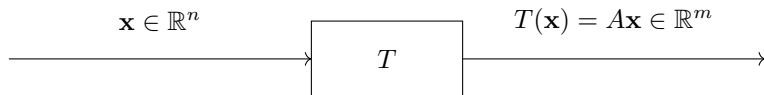
**2** Matrice d'une application linéaire

3 Transformations géométriques par applications linéaires

4 Injectivité et surjectivité d'une application linéaire

# Une matrice est... une application linéaire ?

Soit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Si  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , le produit matrice-vecteur  $A\mathbf{x}$  est une "règle de calcul" qui transforme  $\mathbf{x}$  en un vecteur  $A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ .



## Exemple

Soient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

et l'application  $T$  définie par  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ .

- 1 Quel est l'espace de départ de  $T$  ?
- 2 Quel est l'espace d'arrivée de  $T$  ?
- 3 Donner l'image de  $\mathbf{x} = (1, -2)$  par  $T$ .

# Une matrice est... une application linéaire ?



Une matrice  $m \times n$  est un tableau de nombres



Une matrice  $m \times n$  est un ensemble de coefficients d'un système de  $m$  équations linéaires à  $n$  inconnues



Une matrice  $m \times n$  est une collection de  $n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^m$  organisés en colonnes



Une matrice  $m \times n$  est la représentation d'une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension  $n$  dans un espace vectoriel de dimension  $m$

## Exemple

On a montré que l'application

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} &\mapsto \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 - x_3 \\ -x_2 - x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

est linéaire. Déterminer une matrice  $A$  telle que  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ , pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ .

## Théorème

Soient  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $W$  un espace vectoriel de dimension  $m$ .

**1** Si  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , l'application définie par

$$\begin{aligned} T : V &\rightarrow W \\ \mathbf{x} &\mapsto A\mathbf{x} \end{aligned}$$

est linéaire.

**2** Si on étudie une application linéaire  $T : V \rightarrow W$ , alors il existe nécessairement une unique matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  telle que

$$\forall \mathbf{x} \in V, \quad T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

**1** Montrons d'un seul coup les deux propriétés de linéarité : soient  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned}T(\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}) &= A(\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}) \\&= A\mathbf{u} + A(\alpha\mathbf{v}) \\&= A\mathbf{u} + \alpha(A\mathbf{v}) \\&= T(\mathbf{u}) + \alpha T(\mathbf{v})\end{aligned}$$

**2** Il faut passer par une base de  $V$ . Soit  $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$  une base de  $V$  (rappelons que  $\dim(V) = n$ ). Si  $\mathbf{x} \in V$ , il existe donc des nombres  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  tels que  $\mathbf{x} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \dots + x_n\mathbf{b}_n$ . Donc :

$$\begin{aligned}T(\mathbf{x}) &= T(x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \dots + x_n\mathbf{b}_n) \\&= T(x_1\mathbf{b}_1) + T(x_2\mathbf{b}_2) + \dots + T(x_n\mathbf{b}_n) \\&= x_1T(\mathbf{b}_1) + x_2T(\mathbf{b}_2) + \dots + x_nT(\mathbf{b}_n) \\&= \begin{bmatrix} T(\mathbf{b}_1) & T(\mathbf{b}_2) & \dots & T(\mathbf{b}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = A\mathbf{x}. \quad (\text{unicité : } \text{section 1.9, exercice 33.})\end{aligned}$$



Du théorème précédent, on peut déduire ce qui suit :

## Méthode

Si

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

on calcule la matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  **canoniquement associée** à  $T$  de la façon suivante :

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2) \quad \dots \quad T(\mathbf{e}_n)]$$

où  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  désigne la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

## Astuce !

Pour montrer que  $T : V \rightarrow W$  est linéaire, il suffit de trouver une matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  telle que  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ , pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

On peut aussi parler du noyau et de l'image de  $T$  :

$$\text{Ker}(T) = \text{Ker}(A) \quad \text{et} \quad \text{Im}(T) = \text{Im}(A).$$

## Proposition

Soient  $T_1$  et  $T_2$  des applications linéaires dont les matrices associées sont respectivement  $A$  et  $B$ . La matrice associée à la composition  $T_2 \circ T_1$  est obtenue par le produit matriciel  $BA$ .

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} T_2 \circ T_1(\mathbf{x}) &= B(T_1(x)) \\ &= BA\mathbf{x}. \end{aligned}$$



1 Notion d'application linéaire

2 Matrice d'une application linéaire

**3 Transformations géométriques par applications linéaires**

4 Injectivité et surjectivité d'une application linéaire

# Effet géométrique d'une application linéaire

Soient

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

et  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ . Calculer et dessiner  $T(\mathbf{u})$  et  $T(\mathbf{v})$  sur la figure suivante, puis décrire l'effet géométrique de  $T$  sur ces deux vecteurs.

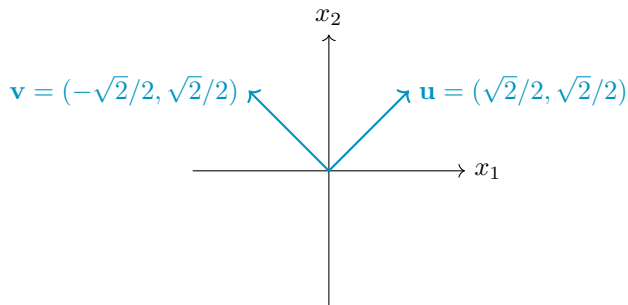
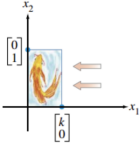
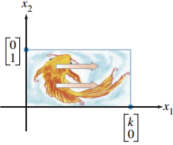
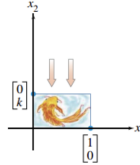
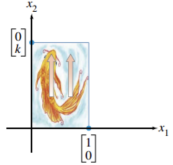


TABLEAU 1 Dilatations

Transformation	Image du carré unité	Matrice associée
Dilatation horizontale	  $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Dilatation verticale	  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$	

Dilate d'un coefficient  $k > 0$  selon l'un des axes. L'effet est différent selon que  $k > 1$  ou  $0 < k < 1$ .

Figure – Tirée du manuel de référence (p.79)

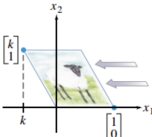
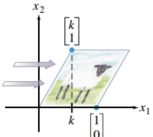
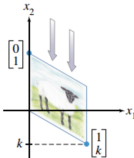
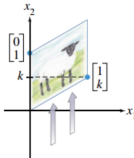
Transformation	Image du carré unité		Matrice associée
Transvection horizontale			$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
	$k < 0$	$k > 0$	
Transvection verticale			$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$
	$k < 0$	$k > 0$	

Figure – Tirée du manuel de référence (p.81)

**TABEAU 4** Projections

Transformation	Image du carré unité	Matrice associée
Projection sur l'axe des $x_1$		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Projection sur l'axe des $x_2$		$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Figure – Tirée du manuel de référence (p.81)

Soit  $\theta \in [0, 2\pi[$ . La matrice effectuant la rotation des vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  centrée en l'origine est donnée par

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

- 1 Calculer le déterminant de cette matrice. Dépend-t-il de  $\theta$  ?
- 2 Déterminer la matrice de rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  centrée en l'origine.
- 3 Montrer que la composée d'une rotation d'angle  $\theta_1$  puis d'une rotation d'angle  $\theta_2$  est de nouveau une rotation. Donner l'angle de cette nouvelle rotation.

*Aide : on rappelle que*

$$\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 = \sin(\theta_1 + \theta_2).$$



- 1 Notion d'application linéaire
- 2 Matrice d'une application linéaire
- 3 Transformations géométriques par applications linéaires
- 4 Injectivité et surjectivité d'une application linéaire**

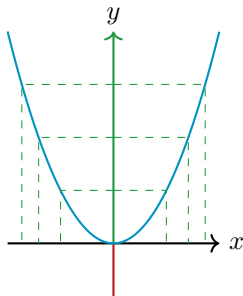
# Introduction

Considérons la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x^2$ . On peut se poser deux questions...

Si  $y \in \mathbb{R}$ , peut-on trouver  $x \in \mathbb{R}$  tel que

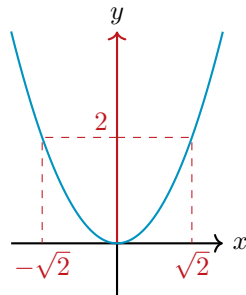
$$y = f(x)?$$

Pas toujours...



Si  $y \in \mathbb{R}$  admet un antécédent par la fonction  $f$ , cet antécédent est-il unique?

Impossible...



## Définition

Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels. Une application  $T : V \rightarrow W$  est dite **injective** si tout vecteur de  $W$  est l'image d'**au plus** un vecteur de  $V$  par  $T$ . Ceci peut aussi s'écrire :

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{v}' \implies T(\mathbf{v}) \neq T(\mathbf{v}').$$

## Proposition

Soient  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  définie par  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ , pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Alors :

$$\begin{aligned} T \text{ est injective} &\iff \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \text{ il existe au plus un seul } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } T(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \\ &\iff \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \text{ le SÉL } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ admet au plus une solution (0 ou 1)} \\ &\iff \text{les colonnes de } A \text{ sont linéairement indépendantes} \\ &\iff A \text{ est de plein rang colonne} \\ &\iff \text{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}. \end{aligned}$$

## Définition

Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels. Une application  $T : V \rightarrow W$  est dite **surjective** si tout vecteur de  $W$  est l'image d'**au moins** un vecteur de  $V$  par  $T$ . Ceci peut aussi s'écrire :

$$\forall \mathbf{w} \in W, \quad \exists \mathbf{v} \in V \text{ tel que } \mathbf{w} = T(\mathbf{v}).$$

## Proposition

Soient  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  définie par  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ , pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Alors :

$$\begin{aligned} T \text{ est surjective} &\iff \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } T(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \\ &\iff \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \text{ le SÉL } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ est compatible (1 ou } \infty \text{ de sol.)} \\ &\iff \text{les colonnes de } A \text{ engendrent } \mathbb{R}^m \\ &\iff \text{Im}(A) = \mathbb{R}^m \\ &\iff A \text{ est de plein rang ligne.} \end{aligned}$$

**Théorème (de caractérisation des matrices inversibles)**

Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n$ . Tous les énoncés suivants sont équivalents.

- 1  $A$  est inversible.
- 2 Il existe  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que  $CA = I_n$ .
- 3 Il existe  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telle que  $AD = I_n$ .
- 4  $A$  est équivalente selon les lignes à  $I_n$ .
- 5  $A$  admet  $n$  positions de pivot.
- 6  $A$  est de plein rang colonne.
- 7  $A$  est de plein rang ligne.
- 8 Pour tout  $b$ , l'équation  $Ax = b$  admet une solution unique.
- 9  $A^T$  est inversible.
- 10 L'équation homogène  $Ax = 0$  admet la solution triviale  $x = 0$  pour seule solution.
- 11 Les colonnes de  $A$  sont linéairement indépendantes.
- 12  $\text{Ker}(A) = \{0\}$ .
- 13  $\dim(\text{Ker}(A)) = 0$ .
- 14 Les colonnes de  $A$  engendrent  $\mathbb{R}^n$ .
- 15  $\text{rang}(A) = n$ .
- 16 Les colonnes de  $A$  forment une base de  $\mathbb{R}^n$ .
- 17  $\det(A) \neq 0$ .

L'injectivité est une question d'**unicité**.

Chaque vecteur  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  admet **au maximum** un antécédent par  $T$ .

→ le SÉL  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  admet 0 ou 1 solution, quel que soit  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ .

La surjectivité est une question d'**existence**.

Chaque vecteur  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  admet **au minimum** un antécédent par  $T$ .

→ le SÉL  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  admet 1 ou  $\infty$  solution(s), quel que soit  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ .

## Attention !

- 1 Même si injectivité et surjectivité se lisent sur la matrice  $A$  associée à une application linéaire  $T$ , on ne dira **jamais** que " $A$  est injective/surjective". Ces qualificatifs sont réservés à  $T$ .
- 2 Subtilité concernant la surjectivité : si  $T$  est surjective et que  $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$  admet une solution unique pour un seul  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ , alors c'est vrai pour tout  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . De même pour les systèmes admettant une infinité de solutions.

- 1 On dit qu'une application  $T$  est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective. Montrer que dans le cas d'une application linéaire définie par  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ , on a :

$$T \text{ est bijective} \iff A \text{ est inversible.}$$

(ce qui fait un dix-neuvième point à rajouter au TCM ! 🙌)

- 2 Soit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  avec  $m > n$ . L'application linéaire définie par  $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  peut-elle être injective ? Surjective ? Bijective ?
- 3 Même question qu'au (2) avec  $m < n$ .
- 4 Montrer que l'application

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{x} &\mapsto \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

est linéaire et bijective.

# Exercices récapitulatifs



**Q1)** Soit  $\mathcal{E}_3 = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $f$  une application linéaire telle que :

$$f(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f(e_2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad f(e_3) = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Donnez la matrice  $A$  associée à  $f$ .

**Q2)**  $f$  est-elle surjective ? Est-elle injective ? Est-elle bijective ?

**Q3)** Soit  $f$  définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{x} &\longmapsto \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Est-ce une application linéaire ?

**Q4)** Soit  $n \geq 1$ . Soit  $f$  définie par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}_n &\longrightarrow \mathbb{P}_{n^2} \\ p(t) &\longmapsto p(p(t)) \end{aligned}$$

$f$  est-elle une application linéaire ?

**Q4 Bis)** Soit  $n = 0$ . Soit  $f$  définie (comme juste avant) par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}_n &\longrightarrow \mathbb{P}_{n^2} \\ p(t) &\longmapsto p(p(t)) \end{aligned}$$

$f$  est-elle une application linéaire ?

**Q5)** Soit  $B$  une base d'un EV nommé  $V$ , soit  $\mathcal{E}$  la base canonique de  $V$ . Soit l'application

linéaire  $T$  ( $T$  comme traduction) définie par : 
$$\begin{aligned} T : V &\longrightarrow V \\ x &\longmapsto [x]_B \end{aligned}$$
  $T$  est-elle linéaire ? Quelle

est sa matrice associée ?  $T$  est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? (Rappelez vous que  $[x]_B = P_{B \leftarrow \mathcal{E}} x$ )

**Q6)** La fonction cosinus est-elle injective ? Surjective sur  $\mathbb{R}$  ?

**Q7)** Soit  $T$  une application linéaire telle que :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \text{Ker}(T) \quad \text{et} \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 14 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Donnez la matrice  $A$  associée à  $T$ .

**Q8) (bonus)** *(Cet exercice n'est à faire que si vous souhaitez vous challenger, il est particulièrement technique)*

Soit  $T$  définie par :

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[ &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ (r, \theta) &\longmapsto \begin{bmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Montrez que  $T$  est bijective. Montrez aussi que  $T$  n'est pas linéaire. ( $\mathbb{R}_+$  est l'ensemble des réels positifs ou nuls)