

# DIMENSIUNEA COIREDUCTIBILĂ A INELELOR ȘI MODULELOR

Coordonator științific: Prof. Dr. Tiberiu Dumitrescu

Student: Sorin Bogde

Universitatea București, Facultatea de Matematică

1999



# Cuprins

<b>0</b>	<b>Generalități</b>	<b>1</b>
0.1	Module semisimple . . . . .	1
0.2	Module noetheriene (artinene) și inele noetheriene (artinene) . . . .	2
0.3	Module de lungime finită . . . . .	3
0.4	Radicalul Jacobson . . . . .	5
0.5	Inele semisimple . . . . .	6
<b>1</b>	<b>Submodule esențiale</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Module injective</b>	<b>13</b>
2.1	Module injective . . . . .	13
2.2	Anvelope injective . . . . .	20



# Capitolul 0

## Generalități

### 0.1 Module semisimple

**Definiție 0.1.1.** Un  $R$ -modul nenul  $S$  se numește *simplu* dacă singurele sale submodule sunt  $0$  și  $S$ .

**Propoziție 0.1.2.** Fie  $S$  un  $R$ -modul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1.  $S$  este modul simplu.
2. Pentru orice element nenul  $x \in S$  avem  $S = xR$ .
3.  $S \simeq R/I$ , unde  $I$  este un ideal drept maximal.

**Lemă 0.1.3** (Schur). Fie  $S$  și  $S'$  două  $R$ -module simple și  $f: S \rightarrow S'$  un morfism de  $R$ -module. Atunci  $f = 0$  sau  $f$  este izomorfism. În particular  $\text{End}_R(S)$  este corp.

**Definiție 0.1.4.** Fie  $M$  un  $R$ -modul și  $(S_i)_{i \in I}$  mulțimea submodulelor simple ale lui  $M$ . Dacă  $M = \sum_{i \in I} S_i$ , atunci  $M$  se numește *semisimplu*.

**Propoziție 0.1.5.** Fie  $M$  un  $R$ -modul semisimplu și  $N$  un submodule al său. Atunci există o submulțime  $J \subseteq I$  astfel încât:

1. familia  $(S_j)_{j \in J}$  este independentă;
2.  $M = N \oplus (\bigoplus_{j \in J} S_j)$ .

**Corolar 0.1.6.** Cu notațiile de mai sus, pentru modulul semisimplu  $M$  există  $J \subseteq I$  astfel încât familia  $(S_j)_{j \in J}$  este independentă și

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i.$$

**Corolar 0.1.7.** Dacă  $M$  este un  $R$ -modul semisimplu și  $N$  un submodule al său, atunci  $N$  și  $M/N$  sunt semisimple.

**Corolar 0.1.8.** O sumă directă de module semisimple este modul semisimplu.

**Teoremă 0.1.9.** Fie  $M$  un  $R$ -modul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1.  $M$  este semisimplu;
2.  $M$  este izomorf cu o sumă directă de module simple;
3. orice submodule al său este sumand direct în  $M$ ;
4. orice șir exact

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

este scindabil.

**Definiție 0.1.10.** Suma submodulelor simple ale lui  $M$  se numește *soclul* lui  $M$  și se notează  $\text{soc}(M)$ . Dacă  $M$  nu conține nici un submodule simplu atunci punem  $\text{soc}(M) = 0$ .

**Propoziție 0.1.11.** Fie  $M$  și  $N$  două  $R$ -module și  $f: M \rightarrow N$  un morfism. Atunci  $f(\text{soc}(M)) \subseteq \text{soc}(N)$ .

**Propoziție 0.1.12.** Fie  $M$  un  $R$ -modul și  $N$  un submodule al său. Atunci

$$\text{soc}(N) = \text{soc}(M) \cap N.$$

**Propoziție 0.1.13.** Dacă  $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ , atunci

$$\text{soc}(M) = \bigoplus_{i \in I} \text{soc}(M_i).$$

**Propoziție 0.1.14.** Fie  $R$  un inel. Atunci  $\text{soc}(R_R)$  este un ideal bilateral al lui  $R$ .

## 0.2 Module noetheriene (artinene) și inele noetheriene (artinene)

**Definiție 0.2.1.** Fie  $R$  un inel și  $M$  un  $R$ -modul drept. Spunem că  $M$  satisface *condiția maximală* (resp. *minimală*) dacă orice mulțime nevidă de submodule ale lui  $M$ , ordonată prin incluziune, admite un element maximal (resp. minimal).

Spunem că  $M$  satisface *condiția lanțurilor ascendente* (resp. *descendente*) dacă orice șir (lanț) ascendent de submodule ale lui  $M$

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_i \subseteq \cdots$$

(resp. orice șir descendent

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_i \supseteq \cdots$$

) este staționar, adică există  $n \geq 1$  astfel încât  $M_n = M_{n+1} = \cdots$ .

**Propoziție 0.2.2.** Fie  $M$  un  $R$ -modul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1.  $M$  satisface condiția maximală (minimală);
2.  $M$  satisface condiția lanțurilor ascendente (descendente).

**Definiție 0.2.3.** Un  $R$ -modul  $M$  se numește *noetherian* (resp. *artinian*) dacă satisface condiția maximală (resp. minimală). Inelul  $R$  se numește noetherian (resp. artinian) la dreapta dacă  $R_R$  este noetherian (resp. artinian).

**Exemplu 0.2.4.**

1.  $\mathbb{Z}$  este inel noetherian dar nu este artinian.
2. Orice grup finit este  $\mathbb{Z}$ -modul noetherian și artinian.
3. Orice inel finit este noetherian și artinian.
4.  $\mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots, X_n, \dots]$  nu este nici noetherian, nici artinian:

$$(X_1) \subsetneq (X_1, X_2) \subsetneq \dots \subsetneq (X_1, \dots, X_n) \subsetneq \dots$$

$$(X_1) \supsetneq (X_1^2) \supsetneq \dots \supsetneq (X_1^k) \supsetneq \dots$$

5.  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$  este  $\mathbb{Z}$ -modul artinian dar nu este noetherian.

**Propoziție 0.2.5.** Fie  $N, P$  două submodule ale lui  $M$  astfel încât  $M = N + P$ . Atunci  $M$  este noetherian (artinian) dacă și numai dacă  $N$  și  $P$  sunt noetheriene (artiniane).

**Propoziție 0.2.6.** Pentru un  $R$ -modul  $M$  următoarele afirmații sunt echivalente:

1.  $M$  este noetherian;
2. orice submodule al lui  $M$  este finit generat.

**Propoziție 0.2.7.** Pentru un  $R$ -modul  $M$  următoarele afirmații sunt echivalente:

1.  $M$  este artinian;
2. oricare ar fi familia  $(X_i)_{i \in I}$  de submodule ale lui  $M$ , există  $J \subseteq I$ ,  $J$  finită, astfel încât

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap_{j \in J} X_j.$$

## 0.3 Module de lungime finită

**Definiție 0.3.1.** Fie  $M$  un  $R$ -modul drept nenul. Se numește *șir de compoziție* sau *șir Jordan–Hölder* al lui  $M$  un lanț finit strict ascendent de submodule

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n = M$$

astfel încât  $X_{i+1}/X_i$  este modul simplu pentru  $0 \leq i \leq n-1$ . Numărul  $n$  se numește *lungimea șirului*, iar modulele  $X_{i+1}/X_i$  se numesc *factorii șirului*.

**Propoziție 0.3.2.** Fie  $M$  un  $R$ -modul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1.  $M$  are un șir de compoziție;

2.  $M$  este noetherian și artinian.

**Propoziție 0.3.3.** *Fie*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

*un șir exact de  $R$ -module drepte. Atunci  $M$  admite un șir de compoziție dacă și numai dacă  $M'$  și  $M''$  admit un șir de compoziție.*

Dacă

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M, \quad 0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_p = M$$

sunt două șiruri de compoziție ale lui  $M$ , vom spune că ele sunt *echivalente* dacă  $n = p$  și există o bijecție  $\sigma : \{0, \dots, n-1\} \rightarrow \{0, \dots, n-1\}$  astfel încât

$$M_{i+1}/M_i \cong M_{\sigma(i)+1}/M_{\sigma(i)} \quad (0 \leq i \leq n-1).$$

**Teoremă 0.3.4** (Jordan–Hölder). *Dacă un  $R$ -modul  $M$  are două șiruri de compoziție*

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M, \quad 0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_p = M,$$

*atunci aceste două șiruri sunt echivalente.*

**Definiție 0.3.5.** Un  $R$ -modul  $M$  care admite un șir de compoziție se numește *modul de lungime finită*. Lungimea șirurilor de compoziție se numește *lungimea* lui  $M$  și se notează  $l(M)$ . Dacă  $M$  nu admite nici un șir de compoziție, atunci spunem că  $M$  este *de lungime infinită* și scriem  $l(M) = \infty$ .

**Propoziție 0.3.6.** *Fie*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

*un șir exact de  $R$ -module de lungime finită. Atunci*

$$l(M) = l(M') + l(M'').$$

**Corolar 0.3.7.** *Fie  $M$  un  $R$ -modul de lungime finită și  $N, L$  două submodule ale sale. Atunci:*

1.  $l(M) = l(N) + l(M/N)$ ;
2.  $l(N + L) + l(N \cap L) = l(N) + l(L)$ .

**Corolar 0.3.8.** *Fie  $M$  un  $R$ -modul de lungime finită și  $M_1, M_2, \dots, M_n$  submodule ale sale astfel încât*

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n.$$

*Atunci*

$$l(M) = \sum_{i=1}^n l(M_i).$$



## 0.4 Radicalul Jacobson

### Radicalul Jacobson al unui modul

**Definiție 0.4.1.** Fie  $M$  un  $R$ -modul. Intersecția tuturor submodulelor maximale ale lui  $M$  se numește *radicalul Jacobson* al modulului  $M$  și se notează  $\text{Rad}(M)$ . Dacă  $M$  nu are nici un submodule maximal, atunci prin convenție punem  $\text{Rad}(M) = M$ .

*Observație 0.4.2.* Dacă  $M$  este un  $R$ -modul finit generat, atunci  $\text{Rad}(M) \neq M$ .

**Propoziție 0.4.3.** Fie  $M$  un  $R$ -modul. Atunci

$$\text{Rad}(M) = \bigcap_{\substack{f:M \rightarrow S \\ S \text{ simplu}}} \ker(f) = \bigcap_{\substack{f:M \rightarrow X \\ X \text{ semisimplu}}} \ker(f).$$

**Propoziție 0.4.4.** Fie  $f : M \rightarrow N$  un morfism de  $R$ -module. Atunci  $f(\text{Rad}(M)) \subseteq \text{Rad}(N)$ . Dacă, în plus,  $f$  este epimorfism și  $\ker(f) \subseteq \text{Rad}(M)$ , atunci  $f(\text{Rad}(M)) = \text{Rad}(N)$ .

**Corolar 0.4.5.** Pentru orice  $R$ -modul  $M$  are loc egalitatea  $\text{Rad}(M/\text{Rad}(M)) = 0$ .

**Corolar 0.4.6.** Dacă  $M$  este un  $R$ -modul semisimplu, atunci  $\text{Rad}(M) = 0$ .

**Corolar 0.4.7.** Dacă  $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ , atunci

$$\text{Rad}(M) = \bigoplus_{i \in I} \text{Rad}(M_i).$$

**Propoziție 0.4.8.** Fie  $M$  un  $R$ -modul astfel încât  $\text{Rad}(M) \neq M$ . Atunci

$$\text{Rad}(M) = \bigcap \{ L \leq M \mid L \text{ este submodule superfluu} \}.$$

**Propoziție 0.4.9** (Lema lui Nakayama). Fie  $M$  un  $R$ -modul finit generat și  $N$  un submodule al său. Dacă  $N + \text{Rad}(M) = M$ , atunci  $N = M$ . (Adică  $\text{Rad}(M)$  este cel mai mare submodule superfluu al lui  $M$ .)

### Radicalul Jacobson al unui inel

Fie  $R$  un inel. Considerăm idealul stâng  $\text{Rad}({}_R R)$  ca intersecție a idealelor stângi maximale ale lui  $R$  și  $\text{Rad}(R_R)$  ca intersecție a idealelor drepte maximale ale lui  $R$ .

**Propoziție 0.4.10.**

1.  $\text{Rad}(R_R)$  este un ideal bilateral.
2.  $\text{Rad}(R_R) = \{ r \in R \mid 1 - ar \in U(R) \text{ pentru orice } a \in R \}$ .
3.  $\text{Rad}(R_R) = \text{Rad}({}_R R)$ .

**Definiție 0.4.11.** Idealul bilateral  $\text{Rad}(R_R) = \text{Rad}({}_R R)$  se numește *radicalul Jacobson* al inelului  $R$  și se notează  $\text{Rad}(R)$ .

**Propoziție 0.4.12.**

1. Dacă  $J$  este un ideal stâng (resp. drept sau bilateral) cu proprietatea că  $1 - x$  este inversabil pentru orice  $x \in J$ , atunci  $J \subseteq \text{Rad}(R)$ .
2. Dacă  $J$  este un nilideal stâng (resp. drept sau bilateral), atunci  $J \subseteq \text{Rad}(R)$ .

**Propoziție 0.4.13.** Fie  $\varphi : R \rightarrow S$  un morfism surjectiv de inele. Atunci  $\varphi(\text{Rad}(R)) \subseteq \text{Rad}(S)$ . Dacă  $\ker(\varphi) \subseteq \text{Rad}(R)$ , atunci  $\varphi(\text{Rad}(R)) = \text{Rad}(S)$ .

**Propoziție 0.4.14.** Dacă  $(R_i)_{i \in I}$  este o familie de inele, atunci

$$\text{Rad}\left(\prod_{i \in I} R_i\right) = \prod_{i \in I} \text{Rad}(R_i).$$

**Propoziție 0.4.15.** Fie  $M$  un  $R$ -modul. Atunci  $M \text{ Rad}(R) \subseteq \text{Rad}(M)$ .

**Teoremă 0.4.16.** Dacă  $R$  este un inel artinian, atunci  $\text{Rad}(R)$  este nilpotent.

## 0.5 Inele semisimple

**Teoremă 0.5.1.** Pentru un inel  $R$  următoarele afirmații sunt echivalente:

1. orice  $R$ -modul drept nenul este semisimplu;
2.  $R$  este  $R$ -modul drept semisimplu;
3.  $R$  este artinian și  $\text{Rad}(R) = 0$ .

**Definiție 0.5.2.** Un inel  $R$  care satisface una din condițiile de mai sus se numește inel semisimplu.

**Propoziție 0.5.3.** Fie  $R$  un inel semisimplu și  $M$  un  $R$ -modul nenul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1.  $M$  este de lungime finită;
2.  $M$  este noetherian;
3.  $M$  este artinian.

**Teoremă 0.5.4.** Fie  $R$  un inel artinian la dreapta și  $M$  un  $R$ -modul nenul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1.  $M$  este de lungime finită;
2.  $M$  este noetherian;
3.  $M$  este artinian.

**Corolar 0.5.5** (Hopkins). Un inel artinian la dreapta (respectiv la stânga) este noetherian la dreapta (respectiv la stânga).

# Capitolul 1

## Submodule esențiale

**Definiție 1.0.1.** Fie  $M$  un  $R$ -modul drept. Un submodule  $N$  al lui  $M$  se numește *esențial* (sau spunem că  $M$  este o extensie esențială a lui  $N$ ) dacă  $N \cap N' \neq 0$  pentru orice submodule nenul  $N'$  al lui  $M$ . În acest caz vom folosi notația  $N \trianglelefteq M_R$ .

Un monomorfism de  $R$ -module la dreapta  $f : M \rightarrow N$  se numește *esențial* dacă  $\text{Im } f$  este submodule esențial în  $N$  (adică  $\text{Im } f \trianglelefteq N_R$ ).

**Exemplu.**

1.  $n\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$  pentru orice  $n \geq 1$ .
2. Orice submodule al lui  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$  este esențial.

*Observație 1.0.2.* Fie  $M$  un  $R$ -modul drept și  $N$  un submodule al lui  $M$ . Atunci  $N \trianglelefteq M_R$  dacă și numai dacă pentru orice  $x \in M$ ,  $x \neq 0$ , există  $r \in R$  astfel încât  $xr \in N \setminus \{0\}$ .

*Demonstrație.* „ $\Rightarrow$ ” Fie  $x \in M \setminus \{0\}$ . Cum  $0 \neq xR \subseteq M_R$  și  $N \trianglelefteq M_R$ , rezultă că  $xR \cap N \neq 0$ , deci există  $xr \in xR \cap N \setminus \{0\}$ .

„ $\Leftarrow$ ” Fie  $N' \leq M_R$ ,  $N' \neq 0$ . Pentru  $x \in N' \setminus \{0\}$  există  $r \in R$  astfel încât  $xr \in N \setminus \{0\}$ , deci  $N \cap N' \neq 0$ .  $\square$

**Definiție 1.0.3.** Un monomorfism de  $R$ -module la dreapta  $f : N_R \rightarrow M_R$  se numește *esențial* dacă  $\text{Im } f \trianglelefteq M_R$ . Se observă imediat că dacă  $N$  este un submodule al lui  $M$  atunci incluziunea canonică  $i_N : N \rightarrow M$  este monomorfism esențial dacă și numai dacă  $N \trianglelefteq M_R$ .

**Propoziție 1.0.4.** Un monomorfism  $f : N_R \rightarrow M_R$  este esențial dacă și numai dacă pentru orice  $R$ -modul drept  $M'$  și orice  $g \in \text{Hom}(M, M')$ , faptul că  $g \circ f$  este monomorfism implică  $g$  monomorfism.

*Demonstrație.*

„ $\Rightarrow$ ” Fie  $g$  ca în enunț astfel încât  $g \circ f$  este monomorfism. Presupunem  $g \neq 0$ . Fie  $x \in \text{Ker } g \cap \text{Im } f \setminus \{0\}$ . Există  $x' \in N$  astfel încât  $x = f(x')$  și  $g(x) = 0$ , de unde  $g(f(x')) = 0$ . Cum  $g \circ f$  este monomorfism, rezultă  $x' = 0$  și deci  $x = 0$ , contradicție.

„ $\Leftarrow$ ” Dacă  $f$  nu este monomorfism esențial atunci există  $N' \leq M_R$ ,  $N' \neq 0$ , astfel încât  $N' \cap \text{Im } f = 0$ . Considerăm proiecția canonică  $\pi_{N'} : M \rightarrow M/N'$ . Dacă

$x \in \text{Ker}(\pi_{N'} \circ f)$ , atunci  $f(x) \in N'$ , deci  $f(x) = 0$ , adică  $x = 0$ . Obținem astfel că  $\pi_{N'} \circ f$  este injectiv, de unde rezultă că  $\pi_{N'}$  este injectiv, ceea ce implică  $N' = 0$ , contradicție.  $\square$

**Corolar 1.0.5.** *Fie  $M$  un  $R$ -modul la dreapta și  $N \leq M_R$ . Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

1.  $N \trianglelefteq M_R$ ;
2. incluziunea  $i_N : N \rightarrow M$  este monomorfism esențial;
3. pentru orice  $f \in \text{Hom}(M, M')$  cu  $M'$   $R$ -modul arbitrar, faptul că  $f \circ i_N$  este monomorfism implică  $f$  monomorfism.

**Propoziție 1.0.6.** *Fie  $f : N_R \rightarrow M_R$  și  $g : M_R \rightarrow P_R$  două monomorfisme. Atunci  $g \circ f$  este esențial dacă și numai dacă  $g$  și  $f$  sunt esențiale.*

*Demonstrație.*

„ $\Leftarrow$ ” Fie  $z \in P \setminus \{0\}$ . Cum  $g$  este esențial, există  $r \in R$  astfel încât  $zr \in \text{Im } g \setminus \{0\}$ . Există  $y \in M \setminus \{0\}$  astfel încât  $zr = g(y)$ .

Cum  $f$  este esențial, există  $r' \in R$  astfel încât  $yr' \in \text{Im } f \setminus \{0\}$ . De aici există  $x \in N \setminus \{0\}$  astfel încât  $yr' = f(x)$ . Dar  $zr' = g(y)r' = g(yr') = g(f(x))$ . Dacă  $zr' = 0$ , atunci  $g(f(x)) = 0$  și deci  $x = 0$ , contradicție. Obținem astfel că  $zr' \in \text{Im}(g \circ f)$  și că  $zr' \neq 0$ , ceea ce ne arată că  $g \circ f$  este esențial.

„ $\Rightarrow$ ” Fie  $y \in M \setminus \{0\}$ . Cum  $g$  este monomorfism,  $g(y) \neq 0$ . Deci există  $r \in R$  astfel încât  $g(yr) \in \text{Im } g \setminus \{0\}$  și  $g(yr) \neq 0$ . Rezultă că există  $x \in N \setminus \{0\}$  astfel încât  $g(yr) = g(f(x))$  de unde  $yr = f(x) \in \text{Im } f$ , ceea ce ne arată că  $f$  este monomorfism esențial.

Dacă  $z \in P \setminus \{0\}$  există  $r \in R$  astfel încât  $zr \in \text{Im}(g \circ f)$  și  $zr \neq 0$ . Cum  $\text{Im}(g \circ f) \subseteq \text{Im } g$ , rezultă că  $zr \in \text{Im } g$ , și deci  $g$  este monomorfism esențial.  $\square$

**Propoziție 1.0.7.** *Fie  $M$  un  $R$ -modul la dreapta și  $L_1, L_2, \dots, L_n$  submodule ale lui  $M$ . Atunci:*

- 1)  $\bigcap_{i=1}^n L_i$  este esențial în  $M$  dacă și numai dacă  $L_i$  este esențial în  $M$  pentru orice  $i = 1, \dots, n$ .

2) Dacă  $L_1 \subseteq L_2$  și  $L_1$  este esențial în  $M$ , atunci  $L_2$  este esențial în  $M$ .

*Demonstrația este evidentă.*

**Propoziție 1.0.8.** *Fie  $K$  și  $L$  două submodule ale lui  $M$ . 1) Dacă  $K \subseteq L \subseteq M$ , atunci  $K \trianglelefteq M$  dacă și numai dacă  $K \trianglelefteq L$  și  $L \trianglelefteq M$ .*

2) Dacă  $h : K_R \rightarrow M_R$  este morfism de module și  $L \trianglelefteq M$ , atunci  $h^{-1}(L) \trianglelefteq K$ .

3) Dacă  $L_1, L_2 \leq M_R$  și  $K_1 \trianglelefteq L_1$ ,  $K_2 \trianglelefteq L_2$ , atunci  $K_1 \cap K_2 \trianglelefteq L_1 \cap L_2$ .

*Demonstrație.*

1) Se aplică 1.5 și 1.6.

2) Fie  $U$  submodule nenul al lui  $K$ . (i) Dacă  $h(U) = 0$ , atunci  $U \subseteq \ker h \subseteq h^{-1}(L)$ , ceea ce implică  $U \cap h^{-1}(L) \neq 0$ . (ii) Dacă  $h(U) \neq 0$ , atunci  $h(U) \cap L \neq 0$  și deci

există  $u \in U$  astfel încât  $h(u) \in L$ ,  $h(u) \neq 0$ , de unde  $u \in U \cap h^{-1}(L)$  și  $u \neq 0$ . Din (i) și (ii) rezultă că  $h^{-1}(L) \leq K$ .

3) Dacă  $0 \neq X \leq L_1 \cap L_2$  atunci  $X \subseteq L_1$  ceea ce implică  $0 \neq X \cap K_1 \leq L_1$ . Dar cum  $X \subseteq L_2$ , rezultă  $0 \neq (X \cap K_1) \cap L_2 = X \cap (K_1 \cap K_2)$ , și deci  $K_1 \cap K_2 \leq L_1 \cap L_2$ .  $\square$

**Propoziție 1.0.9.** *Fie  $(K_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ,  $(L_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  două familii de submodule ale lui  $M$ . Dacă  $(K_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  este familie independentă în  $M$  și  $K_\lambda \leq L_\lambda$  pentru orice  $\lambda \in \Lambda$ , atunci  $(L_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  este familie independentă în  $M$  și  $(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda) \leq (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda)$ .*

*Demonstrație.*

Fie  $K_1 \leq L_1$ ,  $K_2 \leq L_2$  astfel încât  $K_1 \cap K_2 = 0$ . Din 1.8(3) rezultă că  $0 \leq L_1 \cap L_2$ , adică  $L_1 \cap L_2 = 0$ .

Fie proiecțiile canonice  $\pi_1 : L_1 \oplus L_2 \rightarrow L_1$ ,  $\pi_2 : L_1 \oplus L_2 \rightarrow L_2$ . Cum  $K_1 \leq L_1$ ,  $K_2 \leq L_2$  rezultă că

$$\pi_1^{-1}(K_1) = K_1 \oplus 0 \leq L_1 \oplus L_2,$$

și

$$\pi_2^{-1}(K_2) = 0 \oplus K_2 \leq L_1 \oplus L_2.$$

Deci

$$K_1 \oplus K_2 = (\pi_1^{-1}(K_1)) \cap (\pi_2^{-1}(K_2)) \leq L_1 \oplus L_2.$$

Prin inducție se obține afirmația pentru mulțimi finite. În cazul general, fie  $0 \neq m \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$ . Atunci există o mulțime finită  $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$  cu  $m \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} L_\lambda$ . Cum  $(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} K_\lambda) \leq (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} L_\lambda)$ , există  $r \in R$  astfel încât  $rm \in (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} K_\lambda) \setminus \{0\} \subseteq (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda) \setminus \{0\}$ . Rezultă că  $(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda) \leq (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda)$ .  $\square$

**Propoziție 1.0.10.** *Fie  $N$  un submodule al lui  $M$ . Atunci există un submodule  $Q$ ,  $N \subseteq Q \subseteq M$ , astfel încât  $Q$  este o extensie esențială maximală a lui  $N$  conținută în  $M$ .*

*Demonstrație.*

Fie  $\mathfrak{S} = \{L \leq M; N \subseteq L \subseteq M, N \cap L = 0\}$ ,  $\mathfrak{S}$  cu relația de ordine incluziunea.  $\mathfrak{S} \neq \emptyset$  deoarece  $N \in \mathfrak{S}$ . Fie  $(L_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  o familie total ordonată de elemente din  $\mathfrak{S}$  și

$$L := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda.$$

Evident  $L \leq M_R$ .

Fie  $x \in L \setminus \{0\}$ . Atunci există  $\lambda_0 \in \Lambda$  cu  $x \in L_{\lambda_0}$ . Cum  $N$  este esențial în  $L_{\lambda_0}$ , rezultă că există  $r \in R$  astfel încât  $xr \in N$  și  $xr \neq 0$ , de unde obținem că  $L$  este extensie esențială a lui  $N$ . Deci  $\mathfrak{S}$  este inductivă și, conform lemei lui Zorn,  $\mathfrak{S}$  admite un element maximal  $Q$  care satisface condițiile cerute.  $\square$

**Definiție 1.0.11.** Fie  $M$  un  $R$ -modul la dreapta și  $N \leq M_R$ . Un submodule  $K \leq M_R$  se numește *complement* al lui  $N$  în  $M$  dacă  $K$  este un submodule maximal al lui  $M$  cu proprietatea că  $K \cap N = 0$ . Un submodule  $K \leq M_R$  se numește *submodul complement al lui  $M$*  dacă există  $N \leq M_R$  astfel încât  $K$  este complement al lui  $N$  în  $M$ .

*Observație 1.0.12.* Mulțimea

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \{ L \leq M_R \mid N \cap L = 0 \}$$

este inductivă și, aplicând lema lui Zorn, rezultă că există un complement al lui  $N$  în  $M$ . În particular,  $0$  și  $M$  sunt submodule complement ale lui  $M$ .

**Propoziție 1.0.13.** *Fie  $M_R$ ,  $N \leq M_R$  și  $K \leq M_R$ ,  $K$  un complement al lui  $N$  în  $M$ . Există un complement  $Q$  al lui  $K$  în  $M$  astfel încât  $N \subseteq Q$ . Mai mult,  $Q$  este o extensie esențială maximală a lui  $N$  în  $M$ .*

*Demonstrație.* Se observă ușor că mulțimea

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \{ L \leq M_R \mid K \cap L = 0, N \subseteq L \}$$

este inductivă și lema lui Zorn asigură existența lui  $Q$ .

Fie  $L$  un submodule nenul al lui  $Q$  astfel încât  $L \cap N = 0$ . Fie  $K_1 = L + K$ . Este clar că  $K \subseteq K_1$ . Dacă  $x \in N \cap (L + K)$ , atunci  $x = y + z$  cu  $y \in L$ ,  $z \in K$ . Dar  $z = x - y \in Q$ . Cum  $Q \cap K = 0$ , rezultă  $z = 0$  și deci  $x = y$ . Din egalitatea  $L \cap N = 0$  deducem  $x = y = 0$  și deci  $N \cap (L + K) = 0$ , ceea ce contrazice faptul că  $K$  este un complement al lui  $N$  în  $M$ . Obținem  $L \cap N \neq 0$  pentru orice  $0 \neq L \leq Q$ , de unde  $Q$  este extensie esențială a lui  $N$ .

Presupunem că există  $Q' \leq M_R$  cu  $N \leq Q'$  și  $Q \subsetneq Q'$ . Cum  $Q'$  este complement al lui  $K$ , rezultă  $Q' \cap K \neq 0$ . Dar  $N \cap (Q' \cap K) = 0$  și  $0 \neq Q' \cap K \leq Q'$ , contradicție cu  $N \leq Q'$ . Rezultă că  $Q$  este extensie esențială maximală a lui  $N$  în  $M$ .  $\square$

**Definiție 1.0.14.** Un submodule  $N$  al lui  $M_R$  se numește *închis* dacă  $N$  nu are nicio extensie esențială în  $M$  proprie (diferită de  $N$ ).

**Corolar 1.0.15.** *Fie  $M_R$  un  $R$ -modul. Submodulele complement ale lui  $M$  coincid cu submodulele închise ale lui  $M$ .*

*Demonstrație.* Din 1.13 rezultă imediat că orice submodule închis al lui  $M$  este un submodule complement al lui  $M$ .

Invers, fie  $K$  un submodule complement al lui  $M_R$ . Rezultă că există  $N \leq M_R$  astfel încât  $K$  este un complement al lui  $N$  în  $M$ . Presupunem că  $K$  are o extensie esențială în  $M$  proprie, adică există  $K' \leq M_R$  cu  $K \leq K'$  și  $K \subsetneq K'$ . Atunci  $K' \cap N \neq 0$ , din maximalitatea lui  $K$ , iar cum  $K \leq K'$ , rezultă că

$$K \cap K' \cap N \neq 0,$$

contradicție.  $\square$

**Corolar 1.0.16.** *Fie  $N$  un submodule al lui  $M_R$ . Dacă  $K$  este un complement al lui  $N$  în  $M$ , atunci:*

1.  $(N + K) \leq M_R$ .
2. Morfismul canonic  $\pi_K \circ i_N : N \rightarrow M/K$  este monomorfism esențial.

*Demonstrație.* (1) Fie  $x \in M \setminus \{0\}$ . Dacă  $x \notin K$ , atunci  $K + Rx \neq K$  și deci  $N \cap (K + Rx) \neq 0$ . Fie  $y \in N \cap (K + Rx)$ ,  $y \neq 0$ . Există  $z \in K$ ,  $r \in R$  cu  $y = z + rx$ . Dacă  $rx = 0$ , atunci  $y = z$  și cum  $N \cap K = 0$  rezultă  $y = 0$ , contradicție. Deci  $rx \neq 0$  și, cum  $rx = y - z$ , obținem  $rx \in N + K$ , ceea ce ne arată că  $(N + K) \leq M_R$ .

(2)  $\text{Im}(\pi_K \circ i_N) = (N + K)/K$ . Fie  $L/K$  un submodul nenul al lui  $M/K$ . Atunci

$$\frac{N + K}{K} \cap \frac{L}{K} = \frac{(N + K) \cap L}{K} = \frac{N \cap L + K}{K}.$$

Cum  $K$  este un complement al lui  $N$ , rezultă că  $N \cap L \neq 0$  și deci

$$\frac{N \cap L + K}{K} \neq 0,$$

ceea ce ne arată că  $\pi_K \circ i_N$  este monomorfism esențial. □





# Capitolul 2

## Module injective

### 2.1 Module injective

Fie  $Q$  și  $M$  două  $R$ -module drepte.  $Q$  se numește  *$M$ -injectiv* dacă pentru orice monomorfism  $u : M' \rightarrow M$  și orice morfism  $f : M' \rightarrow Q$ , există  $g : M \rightarrow Q$  astfel încât  $g \circ u = f$ , adică diagrama

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{u} & M \\ & & \downarrow f & \swarrow g & \\ & & Q & & \end{array}$$

este comutativă.

Această proprietate este echivalentă cu condiția ca aplicația

$$\text{Hom}(u, Q) : \text{Hom}(M, Q) \longrightarrow \text{Hom}(M', Q)$$

să fie surjectivă pentru orice monomorfism  $u : M' \rightarrow M$ . Cum functorul  $\text{Hom}(-, Q)$  este exact la stânga, rezultă că  $Q$  este  *$M$ -injectiv* dacă și numai dacă  $\text{Hom}(-, Q)$  este exact în raport cu orice șir exact de forma

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

$R$ -modulul  $Q$  se numește *quasi-injectiv* (sau *self-injectiv*) dacă este  $Q$ -injectiv. Dacă  $Q$  este  $M$ -injectiv pentru orice  $R$ -modul  $M$ , atunci  $Q$  se numește *injectiv*.

#### 2.1.1 Propoziție

**Propoziție 2.1.1.** *Fie  $Q$  și  $M$  două  $R$ -module. Următoarele afirmații sunt echivalente:*

1.  *$Q$  este  $M$ -injectiv.*
2. *Pentru orice submodul  $N$  al lui  $M$  și orice morfism  $f : N \rightarrow Q$ , există  $g : M \rightarrow Q$  astfel încât  $g|_N = f$ .*
3. *Pentru orice submodul esențial  $N$  al lui  $M$  și orice morfism  $f : N \rightarrow Q$ , există  $g : M \rightarrow Q$  astfel încât  $g|_N = f$ .*

*Demonstrație.* Implicațiile (1)  $\Rightarrow$  (2) și (2)  $\Rightarrow$  (3) sunt evidente.

(2)  $\Rightarrow$  (1). Fie  $M'_R$ ,  $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M$  și  $f : M' \rightarrow Q$ . Atunci  $u(M') \leq M$ . Considerăm  $i : u(M') \rightarrow M$  injecția canonică și  $\bar{u} : M' \rightarrow u(M')$  izomorfismul indus de  $u$ . Există  $g : M \rightarrow Q$  astfel încât  $g \circ i = f \circ \bar{u}^{-1}$ . Atunci

$$g \circ i \circ \bar{u} = f \quad \text{și deci} \quad g \circ u = f.$$

Diagrama corespunzătoare este

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\bar{u}} & u(M') & \xhookrightarrow{i} & M \\ & & \downarrow f & & & \swarrow g & \\ & & Q & & & & \end{array}$$

(3)  $\Rightarrow$  (2). Fie  $N$  un submodule al lui  $M$  și  $K$  un complement al lui  $N$  în  $M$ . Atunci  $(N \oplus K) \leq M$ . Fie  $h : N \oplus K \rightarrow Q$ , definit prin  $h(n+k) = f(n)$  pentru orice  $n \in N$ ,  $k \in K$ . Cum  $N \cap K = 0$ , aplicația  $h$  este bine definită. Există  $g : M \rightarrow Q$  astfel încât  $g|_{N \oplus K} = h$  și deci  $g|_N = f$ .

Aceasta se poate reprezenta prin diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \hookrightarrow & N \oplus K & \hookrightarrow & M \\ & & \downarrow f & & \swarrow h & \searrow g & \\ & & Q & & & & \end{array}$$

□

**Propoziție 2.1.2.** Fie  $(M_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  o familie de  $R$ -module și  $M$  un  $R$ -modul. Atunci  $\prod_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$  este  $M$ -injectiv dacă și numai dacă  $M_\alpha$  este  $M$ -injectiv pentru orice  $\alpha \in \Lambda$ .

*Demonstrație.* Fie  $N$  un submodule al lui  $M$ . Notăm  $P = \prod_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$  și  $\pi_\alpha : P \rightarrow M_\alpha$  proiecțiile canonice, pentru orice  $\alpha \in \Lambda$ .

"  $\Leftarrow$  " Considerând un morfism  $f : N \rightarrow P$ , avem că morfismele  $\pi_\alpha \circ f : N \rightarrow M_\alpha$  pot fi extinse la  $g_\alpha : M \rightarrow M_\alpha$ . Există  $g : M \rightarrow P$  astfel încât  $g|_N = f$ .

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & N & \hookrightarrow & M \\ & & \downarrow f & & \swarrow g \\ & & P & & \\ & & \downarrow \pi_\alpha & & \swarrow g_\alpha \\ & & M_\alpha & & \end{array}$$

"  $\Rightarrow$  " Fie  $\forall \alpha \in \Lambda$  și  $f : N \rightarrow M_\alpha$ . Considerând incluziunea canonică  $\varepsilon_\alpha : M_\alpha \rightarrow P$ , cum  $P$  este  $M$ -injectiv, există  $g : M \rightarrow P$  care îl extinde pe  $\varepsilon_\alpha \circ f : N \rightarrow P$ . Atunci  $\varepsilon_\alpha : M_\alpha \rightarrow P$  îl extinde pe  $f$  și deci  $M_\alpha$  este  $M$ -injectiv.

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & N & \hookrightarrow & M \\
& & \downarrow f & & \nearrow g \\
& & M_\alpha & & \\
& & \downarrow \varepsilon_\alpha & & \nearrow \pi_\alpha g \\
& & P & & \\
& & \downarrow \pi_\alpha & & \\
& & M_\alpha & & 
\end{array}$$

□

**Corolar 2.1.3.**

1. Fie  $(Q_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  o familie de  $R$ -module. Atunci  $\prod_{\alpha \in \Lambda} Q_\alpha$  este injectiv dacă și numai dacă  $Q_\alpha$  este injectiv pentru orice  $\alpha \in \Lambda$ .
2.  $Q_1 \oplus Q_2$  este  $R$ -modul injectiv dacă și numai dacă  $Q_i$  este injectiv pentru  $i = 1, 2$ . În particular, un sumand direct al unui modul injectiv este injectiv.

**Propoziție 2.1.4.** Fie  $Q$  un  $R$ -modul.

1. Dacă  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$  este un șir exact de  $R$ -module și  $Q$  este  $M$ -injectiv, atunci  $Q$  este  $M'$ -injectiv și  $M''$ -injectiv.
2. Dacă  $(M_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  este o familie de submodule ale lui  $M$  astfel încât  $M = \sum_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$  și  $Q$  este  $M_\alpha$ -injectiv pentru orice  $\alpha$ , atunci  $Q$  este  $M$ -injectiv.
3. Fie  $(N_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  o familie de  $R$ -module. Atunci  $Q$  este  $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} N_\alpha$ -injectiv dacă și numai dacă  $Q$  este  $N_\alpha$ -injectiv pentru orice  $\alpha \in \Lambda$ .

*Demonstrație.* Pentru a arăta că  $Q$  este  $M'$ -injectiv, considerăm  $N$  un submodule al lui  $M'$  și  $\varphi : N \rightarrow Q$  un morfism de  $R$ -module. Cum  $Q$  este  $M$ -injectiv, există  $\psi : M \rightarrow Q$  astfel încât  $\psi|_N = \varphi$  și deci  $\psi \circ f : M' \rightarrow Q$  este un morfism care îl extinde pe  $\varphi$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M \\
& & \downarrow \varphi & & \nearrow \psi & & \nearrow \\
& & Q & & & & 
\end{array}$$

Fie  $h : L \rightarrow M''$  un monomorfism. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că  $M' \leq M$  și  $M'' = M/M'$ . Cum  $L \cong h(L) \leq M''$ , există  $P \leq M$ ,  $M' \subseteq P$  astfel încât  $h(L) = P/M'$  și deci  $L \cong P/M'$ . Obținem diagrama comutativă:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & P & \longrightarrow & L \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow & & \downarrow h \\
0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0
\end{array}$$

Cum  $Q$  este  $M$ -injectiv, aplicând functorul  $\text{Hom}(-, Q)$  obținem diagrama comutativă:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(M'', Q) & \longrightarrow & \text{Hom}(M, Q) & \longrightarrow & \text{Hom}(M', Q) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow h^* & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(L, Q) & \longrightarrow & \text{Hom}(P, Q) & \longrightarrow & \text{Hom}(M', Q) \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 
 \end{array}$$

Obținem că  $h^* = \text{Hom}(h, Q)$  este epimorfism, ceea ce arată că  $Q$  este  $M''$ -injectiv.

2) Fie  $N$  un submodul al lui  $M$  și  $f : N \rightarrow Q$  un morfism de  $R$ -module. Considerăm mulțimea

$$\mathfrak{S} = \{(L, h) \mid N \leq L \leq M, h : L \rightarrow Q, h|_N = f\}.$$

Cum  $(N, f) \in \mathfrak{S}$ , avem  $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ . Definim pe  $\mathfrak{S}$  relația de ordine  $(L_1, h_1) \preceq (L_2, h_2)$  dacă și numai dacă  $L_1 \leq L_2$  și  $h_2|_{L_1} = h_1$ . Se observă că  $\mathfrak{S}$  este inductivă și, din lema lui Zorn, rezultă că există  $(L_0, g_0)$  element maximal al lui  $\mathfrak{S}$ . Pentru a arăta că  $L_0 = M$  este suficient să arătăm că  $M_\alpha \leq L_0$  pentru orice  $\alpha \in \Lambda$ .

Considerând diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & L_0 \cap M_\alpha & \xrightarrow{i_\alpha} & M_\alpha \\
 & & \downarrow i_0 & & \searrow h_\alpha \\
 & & L_0 & & \\
 & & \downarrow g_0 & & \\
 & & Q & & 
 \end{array}$$

rezultă că există  $h_\alpha : M_\alpha \rightarrow Q$  astfel încât  $h_\alpha \circ i_\alpha = g_0 \circ i_\alpha$ . Definim  $h^* : L_0 + M_\alpha \rightarrow Q$ ,  $h^*(l + m_\alpha) = g_0(l) + h_\alpha(m_\alpha)$ , pentru orice  $l \in L_0$ ,  $m_\alpha \in M_\alpha$ . Dacă  $l + m_\alpha = 0$ , atunci  $l = -m_\alpha \in L_0 \cap M_\alpha$  și deci  $h^*(l + m_\alpha) = g_0(l) + h_\alpha(l)$ , ceea ce arată că  $h^*$  este bine definită. Atunci  $(L_0 + M_\alpha, h^*) \in \mathfrak{S}$  și, cum  $(L_0, g_0) \preceq (L_0 + M_\alpha, h^*)$ , din maximalitatea lui  $(L_0, g_0)$  rezultă că  $L_0 = L_0 + M_\alpha$ , adică  $M_\alpha \leq L_0$  pentru orice  $\alpha \in \Lambda$ .

3) „ $\Rightarrow$ ” Cum  $N_\alpha \leq N$  și  $Q$  este  $N$ -injectiv, avem că  $Q$  este  $N_\alpha$ -injectiv pentru orice  $\alpha \in \Lambda$ .

„ $\Leftarrow$ ” Fie  $N'_\alpha = i_\alpha(N_\alpha)$ . Cum  $Q$  este  $N_\alpha$ -injectiv și  $N'_\alpha \cong N_\alpha$ , rezultă că  $Q$  este  $N'_\alpha$ -injectiv. Apoi aplicăm (2).  $\square$

### Corolar 2.1.5.

1.  $Q_1 \oplus Q_2$  este  $R$ -modul quasi-injectiv dacă și numai dacă  $Q_i$  este  $Q_j$ -injectiv pentru orice  $i, j = 1, 2$ . În particular, un sumand direct al unui modul quasi-injectiv este quasi-injectiv.
2.  $Q^n$  este  $R$ -modul quasi-injectiv dacă și numai dacă  $Q$  este quasi-injectiv.

**Corolar 2.1.6.** Fie  $Q$  și  $M$  două  $R$ -module. Atunci  $Q$  este  $M$ -injectiv dacă și numai dacă  $Q$  este  $mR$ -injectiv pentru orice  $m \in M$ .

*Demonstrație.* „ $\Rightarrow$ ” este evident.

„ $\Leftarrow$ ” Cum  $M = \sum_{m \in M} mR$ , din 2.1.4(2) rezultă că  $Q$  este  $M$ -injectiv.  $\square$

**Teoremă 2.1.7** (Criteriul lui Baer). Pentru un  $R$ -modul  $Q$  următoarele afirmații sunt echivalente:

1.  $Q$  este injectiv.
2.  $Q$  este  $R$ -injectiv.
3. Pentru orice ideal drept  $I$  al lui  $R$  și orice morfism  $f : I \rightarrow Q$  există  $x \in Q$  astfel încât  $f(a) = xa$  pentru orice  $a \in I$ .

*Demonstrație.* Implicația (1)  $\Rightarrow$  (2) este evidentă.

(2)  $\Rightarrow$  (1). Fie  $M$  un  $R$ -modul și  $x \in M$ . Cum  $\varphi_x : R \rightarrow xR$ ,  $\varphi_x(a) = xa$  pentru orice  $a \in R$ , este morfism surjectiv de  $R$ -module, rezultă că  $R/\text{Ker } \varphi_x \cong xR$ . Cum  $Q$  este  $R$ -injectiv, din 2.1.4(1) rezultă că  $Q$  este  $R/\text{Ker } \varphi_x$ -injectiv și deci  $Q$  este  $xR$ -injectiv pentru orice  $x \in M$ . Atunci, din 2.1.6 obținem că  $Q$  este  $M$ -injectiv.

(2)  $\Rightarrow$  (3). Fie  $I$  un ideal drept al lui  $R$  și  $f : I \rightarrow Q$ . Există  $g : R \rightarrow Q$  astfel încât  $g|_I = f$ . Fie  $x = g(1) \in Q$ . Atunci  $f(a) = g(a) = ag(1) = xa$  pentru orice  $a \in I$ .

(3)  $\Rightarrow$  (2). Dacă pentru un morfism  $f : I \rightarrow Q$  există  $x \in Q$  cu  $f(a) = xa$  pentru orice  $a \in I$ , atunci, definind  $g : R \rightarrow Q$  prin  $g(r) = xr$  pentru orice  $r \in R$ , rezultă că  $g|_I = f$ .  $\square$

**Definiție 2.1.8.**

1. Un  $R$ -modul  $Q$  se numește *divizibil* dacă pentru orice  $y \in Q$  și orice  $a \in R$  nenulivizor al lui zero, există  $x \in Q$  astfel încât  $ax = y$ . Se verifică ușor că orice modul factor al unui modul divizibil este divizibil.
2. Un domeniu de integritate comutativ se numește *PID-inel* dacă orice ideal al său este principal.

**Propoziție 2.1.9.**

1. Orice modul injectiv este divizibil.
2. Fie  $R$  un PID-inel.
  - (i) Dacă  $Q$  este un  $R$ -modul, atunci  $Q$  este injectiv dacă și numai dacă este divizibil.
  - (ii) Dacă  $I$  este un ideal nenul al lui  $R$ , atunci  $R/I$  este  $R$ -modul quasi-injectiv. În particular,  $\mathbb{Z}_n$  este  $\mathbb{Z}$ -modul quasi-injectiv,  $\forall n \geq 1$ .

*Demonstrație.* 1) Fie  $Q$  un  $R$ -modul divizibil,  $y \in Q$  și  $a \in R$  nendivizor al lui zero. Definim  $f : aR \rightarrow Q$  prin  $f(ax) = yx$  pentru orice  $x \in R$ . Cum  $a$  este nendivizor al lui zero,  $f$  este bine definită. Folosind criteriul lui Baer rezultă că există  $x \in Q$  astfel încât  $f(\lambda) = x\lambda$ , pentru orice  $\lambda \in I$ . Deci  $y = f(a) = f(a \cdot 1) = xa$ .

2) (i) Implicația „ $\Rightarrow$ ” este evidentă din (1).

„ $\Leftarrow$ ” Fie  $Q$  un  $R$ -modul divizibil și  $I$  un ideal drept al lui  $R$ . Atunci există  $a \in R$  astfel încât  $I = aR$ . Considerăm  $f : I \rightarrow Q$  un morfism de  $R$ -module. Există  $x \in Q$  astfel încât  $f(a) = xa$ . Atunci  $f(ar) = xar$  pentru orice  $r \in R$  și deci, conform criteriului lui Baer,  $Q$  este injectiv.

(ii) Fie  $I = aR$  și  $J = bR$  ideale nenule ale lui  $R$  astfel încât  $I \subseteq J$  și  $f : J/I \rightarrow R/I$  un morfism de  $R$ -module. Există  $c \in R$  astfel încât  $a = bc$ . Dacă  $f(\bar{b}) = \hat{x} \in R/I$ , atunci  $x \in I$  și deci există  $a_1 \in R$  astfel încât  $x = aa_1$ . Rezultă că  $x = ba_1$ . Definim  $g : R/I \rightarrow R/I$ ,  $g(\bar{r}) = \widehat{ar_1}$  pentru orice  $r \in R$ . Atunci  $g$  este morfism de  $R$ -module și  $g(\bar{b}) = \hat{x}$ , deci  $g|_{J/I} = f$ , ceea ce arată că  $R/I$  este quasi-injectiv.  $\square$

**Corolar 2.1.10.** *Un grup abelian  $G$  este  $\mathbb{Z}$ -modul injectiv dacă și numai dacă  $G$  este divizibil.*

**Corolar 2.1.11.**

1.  $\mathbb{Q}$  și  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$  sunt  $\mathbb{Z}$ -module injective.
2. Orice sumă directă de  $\mathbb{Z}$ -module injective este  $\mathbb{Z}$ -modul injectiv.
3. Orice grup factor al unui  $\mathbb{Z}$ -modul injectiv este injectiv.

**Lemă 2.1.12.** *Fie inelele  $A, S, T$  și bimodulele  ${}_S M_A, {}_A N_T$ . Atunci  $\text{Hom}_A(M, N)$  are o structură de bimodul  $S$ -stâng și  $T$ -drept prin operațiile:*

$$(s \cdot f)(x) = f(xs), \quad (f \cdot t)(x) = f(x)t,$$

unde  $s \in S$ ,  $t \in T$ ,  $x \in M$ ,  $f \in \text{Hom}_A(M, N)$ .

*Demonstrație.* Fie  $a, b \in A$  și  $x, y \in M$ . Atunci:

$$(s \cdot f)(ax + by) = f((ax + by)s) = f(a(xs)) + f(b(ys)) = af(xs) + bf(ys) = a(s \cdot f)(x) + b(s \cdot f)(y),$$

și deci  $s \cdot f \in \text{Hom}_A(M, N)$ . Analog  $f \cdot t \in \text{Hom}_A(M, N)$ .

Pentru  $s, s' \in S$  și  $f, g \in \text{Hom}_A(M, N)$ :

$$(s \cdot (f + g))(x) = (f + g)(xs) = f(xs) + g(xs) = (s \cdot f)(x) + (s \cdot g)(x). \quad (1)$$

$$((s + s') \cdot f)(x) = f(x(s + s')) = f(xs + xs') = f(xs) + f(xs') = (s \cdot f)(x) + (s' \cdot f)(x). \quad (2)$$

$$((ss') \cdot f)(x) = f(x(ss')) = f((xs)s') = (s' \cdot f)(xs) = (s \cdot (s' \cdot f))(x). \quad (3)$$

$$(1_S \cdot f)(x) = f(x1_S) = f(x). \quad (4)$$

Din (1)–(4) avem că  $\text{Hom}_A(M, N)$  este  $S$ -modul stâng. La fel se arată că este și  $T$ -modul drept. Prin urmare  $\text{Hom}_A(M, N)$  este un bimodul  $S$ -stâng și  $T$ -drept.  $\square$

**Propoziție 2.1.13** (Eckmann–Schopf). *Fie  $Q$  un grup abelian divizibil. Atunci  $R$ -modulul stâng  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$  este injectiv.*

*Demonstrație.* Conform lemei precedente,  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$  are o structură de  $R$ -modul stâng dată de operația

$$(r \cdot f)(a) = f(ar), \quad \forall a, r \in R, f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q).$$

Fie  $I$  un ideal stâng al lui  $R$  și  $h : I \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$  un morfism de  $R$ -module stângi. Atunci aplicația

$$\gamma : \mathbb{Z}I \longrightarrow \mathbb{Z}Q, \quad \gamma(a) = h(a)(1)$$

definește un morfism de  $\mathbb{Z}$ -module. Cum  $Q$  este  $\mathbb{Z}$ -injectiv, există  $\tilde{\gamma} : \mathbb{Z}R \rightarrow \mathbb{Z}Q$  astfel încât  $\tilde{\gamma}|_I = \gamma$ . Pentru  $a \in I$  și  $r \in R$  avem

$$(a \cdot \tilde{\gamma})(r) = \tilde{\gamma}(ra) = h(ra)(1) = (r \cdot h(a))(1) = h(a)(r),$$

deci  $h(a) = a \cdot \tilde{\gamma}$  pentru orice  $a \in I$ . Conform criteriului lui Baer,  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$  este  $R$ -modul stâng injectiv.  $\square$

**Propoziție 2.1.14.** *Orice  $R$ -modul stâng  $M$  poate fi scufundat într-un  $R$ -modul stâng injectiv.*

*Demonstrație.* Există un  $\mathbb{Z}$ -modul liber de forma  $\mathbb{Z}^{(A)}$  și un  $\mathbb{Z}$ -morfism surjectiv  $f : \mathbb{Z}^{(A)} \rightarrow M$ . Atunci

$$\mathbb{Z}M \cong \mathbb{Z}^{(A)} / \ker f \subseteq \mathbb{Q}^{(A)} / \ker f,$$

și deci există un grup abelian divizibil  $G$  astfel încât  $\mathbb{Z}M \subseteq \mathbb{Z}G$ . Aplicând functorul  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, -)$  obținem un monomorfism

$${}_R M \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G).$$

Cum  $G$  este divizibil, din Propoziția 2.1.13 rezultă că  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$  este  $R$ -modul stâng injectiv. Prin urmare  $M$  se scufundă într-un  $R$ -modul stâng injectiv.  $\square$

**Propoziție 2.1.15.** *Fie  $Q$  un  $R$ -modul. Atunci  $Q$  este injectiv dacă și numai dacă orice șir exact de forma*

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M' \longrightarrow 0$$

*este scindat.*

*Demonstrație.* „ $\Rightarrow$ ” Presupunem că  $Q$  este injectiv. Din exactitatea șirului avem că  $f$  este monomorfism. Prin injectivitatea lui  $Q$  există  $h : M \rightarrow Q$  astfel încât  $hf = \text{id}_Q$ , ceea ce arată că șirul este scindat.

„ $\Leftarrow$ ” Folosind Propoziția 2.1.14, există un  $R$ -modul injectiv  $Q'$  și un monomorfism  $i : Q \rightarrow Q'$ . Avem un șir exact

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{i} Q' \longrightarrow Q'/i(Q) \longrightarrow 0.$$

Prin ipoteză acest șir este scindat, deci  $Q$  este sumand direct în  $Q'$ . Un sumand direct al unui modul injectiv este injectiv, așadar  $Q$  este injectiv.  $\square$

## 2.2 Anvelope injective

**Definiție 2.2.1.** Fie  $M$  un  $R$ -modul. O pereche  $(E, i)$  se numește *anvelopă injectivă* a lui  $M$  dacă  $E$  este modul injectiv și  $i : M \rightarrow E$  este un monomorfism esențial.

**Propoziție 2.2.2.** Fie  $Q$  un  $R$ -modul injectiv. Atunci orice submodule complement al lui  $Q$  este sumand direct în  $Q$ .

*Demonstrație.* Fie  $K$  un submodule al lui  $Q$  și  $N$  un complement al lui  $K$  în  $Q$ , adică  $K \cap N = 0$  și  $K + N$  este submodule esențial în  $Q$ . Atunci  $(K + N)/N \cong Q/N$ . Definim  $g : (K + N)/N \rightarrow Q$  prin

$$g((x + y) + N) = x, \quad x \in K, y \in N.$$

Cum  $K \cap N = 0$ , aplicația  $g$  este bine definită și este monomorfism. Injectivitatea lui  $Q$  asigură existența unui morfism  $h : Q/N \rightarrow Q$  astfel încât  $h|_{(K+N)/N} = g$ . Deoarece  $(K + N)/N \cong Q/N$  și  $g$  este monomorfism, și  $h$  este monomorfism. Avem  $K = \text{Im } g = h((K + N)/N) \subseteq h(Q/N)$ . Cum  $K$  este submodule închis, rezultă  $K = h(Q/N)$ . Din  $h$  monomorfism obținem  $(K + N)/N = Q/N$ , deci  $K + N = Q$ . Prin urmare  $K$  este un sumand direct în  $Q$ .  $\square$

**Teoremă 2.2.3** (Eckmann–Schopf). *Orice  $R$ -modul  $M$  are o anvelopă injectivă unică până la un izomorfism.*

*Demonstrație.* Din Propoziția 2.1.14 există un  $R$ -modul injectiv  $Q$  astfel încât  $M \leq Q$ . Fie  $E$  o extensie esențială maximală a lui  $M$  în  $Q$ . Atunci  $E$  este un submodule complement în  $Q$ , iar din propoziția precedentă rezultă că  $E$  este injectiv. Astfel  $(E, i)$ , cu  $i : M \hookrightarrow E$  incluziunea, este o anvelopă injectivă a lui  $M$ .

Pentru unicitate, fie  $(E_1, i_1)$  și  $(E_2, i_2)$  două anvelope injective ale lui  $M$ . Cum  $E_2$  este injectiv, există  $f : E_1 \rightarrow E_2$  astfel încât  $f i_1 = i_2$ . Morfismul  $i_2$  este monomorfism, iar  $i_1$  este monomorfism esențial, deci (folosind 1.4) rezultă că  $f$  este monomorfism. Avem  $E_1 \cong f(E_1)$  și  $E_2 = f(E_1) \oplus E_3$  pentru un anumit submodule  $E_3$ . Dar  $i_2(M) \subseteq f(E_1)$ , deci  $i_2(M) \cap E_3 = 0$ . Cum  $i_2$  este monomorfism esențial, rezultă  $E_3 = 0$ , deci  $E_2 = f(E_1)$  și  $f$  este izomorfism.  $\square$

În practică vom considera un reprezentant al acestei clase pe care îl vom nota  $E(M)$  astfel încât  $M \leq E(M)$ .

**Propoziție 2.2.4.** Fie  $M$  un  $R$ -modul și  $i : M \rightarrow Q$  un monomorfism cu  $Q_R$  injectiv. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1.  $(Q, i)$  este o anvelopă injectivă a lui  $M$ ;
2. pentru orice monomorfism  $f : M \rightarrow Q'$  cu  $Q'$  injectiv, există un monomorfism  $g : Q \rightarrow Q'$  astfel încât  $gi = f$ .

*Demonstrație.* (1)  $\Rightarrow$  (2). Fie  $f : M \rightarrow Q'$  un monomorfism cu  $Q'$  injectiv. Prin injectivitatea lui  $Q'$  există  $u : Q \rightarrow Q'$  astfel încât  $ui = f$ . Cum  $i$  este monomorfism esențial și  $Q'$  este injectiv, imaginea  $u(Q)$  este un complement al lui  $f(M)$ , iar din definiția anvelopei injective rezultă că  $u$  este monomorfism; punem  $g = u$ .



(2)  $\Rightarrow$  (1). Fie  $(E(M), j)$  o anvelopă injectivă a lui  $M$ . Aplicând (2) la  $f = j$  obținem un monomorfism  $g : Q \rightarrow E(M)$  cu  $gi = j$ . Cum  $j$  este monomorfism esențial, rezultă că și  $i$  este monomorfism esențial, deci  $(Q, i)$  este o anvelopă injectivă a lui  $M$ .  $\square$

**Propoziție 2.2.5.** *Oricare ar fi  $R$ -modulele drepte  $M_1, M_2, \dots, M_n$  avem*

$$E\left(\bigoplus_{i=1}^n M_i\right) \cong \bigoplus_{i=1}^n E(M_i).$$

*Demonstrație.* Din 1.9,  $\bigoplus_{i=1}^n E(M_i)$  este o extensie esențială a lui  $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ . Cum

$$\bigoplus_{i=1}^n E(M_i) \cong \prod_{i=1}^n E(M_i),$$

din 2.1.3 rezultă că  $\bigoplus_{i=1}^n E(M_i)$  este injectiv. Prin unicitatea anvelopei injective obținem

$$E\left(\bigoplus_{i=1}^n M_i\right) \cong \bigoplus_{i=1}^n E(M_i).$$

$\square$

**Teoremă 2.2.6.** *Fie  $Q$  și  $M$  două  $R$ -module. Atunci  $Q$  este  $M$ -injectiv dacă și numai dacă  $f(M) \leq Q$ , oricare ar fi  $f \in \text{Hom}(E(M), E(Q))$ .*

*Demonstrație.* „ $\Rightarrow$ ” Fie  $f \in \text{Hom}(E(M), E(Q))$  și notăm

$$K := \{m \in M \mid f(m) \in Q\}.$$

Cum  $Q$  este  $M$ -injectiv, există un morfism  $\bar{f} : M \rightarrow Q$  astfel încât  $\bar{f}|_K = f|_K$ . Arătăm că

$$Q \cap (\bar{f} - f)(M) = 0.$$

Fie  $x \in Q$  și  $m \in M$  cu  $x = (\bar{f} - f)(m)$ . Atunci

$$f(m) = \bar{f}(m) - x \in Q,$$

deci  $m \in K$ . Urmează că

$$x = \bar{f}(m) - f(m) = f(m) - f(m) = 0.$$

Prin urmare  $Q \cap (\bar{f} - f)(M) = 0$  și, cum  $Q \leq E(Q)$ , rezultă că  $(\bar{f} - f)(M) = 0$ . Așadar  $f(M) = \bar{f}(M) \leq Q$ .

„ $\Leftarrow$ ” Întrucât  $E(Q)$  este injectiv, este suficient să considerăm  $f \in \text{Hom}(M, E(Q))$ . Fie  $N$  un submodul al lui  $M$  și  $g : N \rightarrow Q$  un morfism de  $R$ -module. Cum  $E(Q)$  este injectiv, există un morfism  $\tilde{g} : M \rightarrow E(Q)$  astfel încât  $\tilde{g}|_N = i \circ g$ , unde  $i : Q \rightarrow E(Q)$  este injecția canonică. Prin ipoteză avem  $\tilde{g}(M) \leq Q$ , astfel încât, identificând  $\tilde{g}$  cu corestricția sa la  $Q$ , obținem un morfism  $h : M \rightarrow Q$  cu  $h|_N = g$ . Prin urmare  $Q$  este  $M$ -injectiv.  $\square$

**Corolar 2.2.7.** *Un  $R$ -modul  $Q$  este quasi-injectiv dacă și numai dacă  $f(Q) \leq Q$  pentru orice  $f \in \text{End}(E(Q))$ .*

**Teoremă 2.2.8** (Matlis–Bass). *Fie  $R$  un inel. Atunci  $R$  este noetherian la dreapta dacă și numai dacă, pentru orice  $R$ -modul simplu  $S_i$  ( $i \geq 1$ ),*

$$Q := \bigoplus_{i=1}^{\infty} E(S_i)$$

*este un  $R$ -modul injectiv.*

*Demonstrație.* „ $\Rightarrow$ ” Fie  $L$  un ideal drept al lui  $R$ ,

$$Q = \bigoplus_{i=1}^{\infty} E(S_i)$$

și  $f : L \rightarrow Q$  un morfism de  $R$ -module. Există elemente  $a_1, \dots, a_n \in L$  astfel încât

$$L = a_1 R + a_2 R + \dots + a_n R.$$

În mod evident există  $m \geq 1$  astfel încât  $f(a_k) \in \bigoplus_{j=1}^m E(S_j)$  pentru orice  $k = 1, \dots, n$ , deci

$$\Im f \subseteq \bigoplus_{j=1}^m E(S_j).$$

Cum  $\bigoplus_{j=1}^m E(S_j)$  este injectiv, există  $g : R \rightarrow \bigoplus_{j=1}^m E(S_j)$  astfel încât  $g|_L = f$ . Notăm  $\bar{f} = i \circ g$ , unde  $i : \bigoplus_{j=1}^m E(S_j) \rightarrow Q$  este injecția canonică. Atunci  $\bar{f}|_L = f$ , deci  $Q$  este injectiv.

„ $\Leftarrow$ ” Presupunem că  $R$  nu este noetherian la dreapta. Atunci există un șir strict ascendent de ideale la dreapta, finit generate:

$$L_1 \subsetneq L_2 \subsetneq \dots \subsetneq L_n \subsetneq \dots$$

Din lema lui Krull rezultă că, pentru orice  $n \geq 1$ , există un submodul maximal  $M_n \subsetneq L_n$  astfel încât

$$L_{n-1} \subseteq M_n \quad \text{pentru orice } n \geq 2.$$

Fie

$$L := \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k, \quad \pi_k : L_k \longrightarrow L_k/M_k$$

proiecțiile canonice și

$$E_k := E(L_k/M_k) \quad \text{pentru orice } k \geq 1.$$

Atunci

$$E := \bigoplus_{k=1}^{\infty} E_k$$

este injectiv și

$$f : L \longrightarrow E, \quad f(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k(a)$$

este bine definit. Există un element  $x \in E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$  astfel încât  $f(a) = xa$  pentru orice  $a \in L$ . Rezultă că  $\pi_k(a) = 0$  pentru orice  $k \geq n+1$ , adică  $a \in M_k$  pentru orice  $k \geq n+1$ . Prin urmare

$$L \subseteq M_{n+1} \subsetneq L_{n+1} \subseteq M_{n+2} \subsetneq L_{n+2} \subseteq \cdots \subseteq L,$$

contradicție. Obținem că  $R$  este noetherian la dreapta. □

