

# DIMENSIUNEA COIREDUCTIBILĂ A INELELOR ȘI MODULELOR

Coordonator științific: dr. Tiberiu Dumitrescu

Student: Sorin Bogde

Universitatea București, Facultatea de Matematică

1999



# Cuprins

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>0</b> | <b>Generalități</b>   | <b>1</b>  |
| 0.1      | Module semisimple . . . . .   | 1         |
| 0.2      | Module noetheriene (artiniene) și inele noetheriene (artiniene) . . . . | 2         |
| 0.3      | Module de lungime finită . . . . .                                      | 3         |
| 0.4      | Radicalul Jacobson . . . . .  | 5         |
| 0.5      | Inele semisimple . . . . .  | 6         |
| <b>1</b> | <b>Submodule esențiale</b>  | <b>7</b>  |
| <b>2</b> | <b>Module injective</b>   | <b>13</b> |
| 2.1      | Module injective . . . . .  | 13        |
| 2.2      | Anvelope injective . . . . .  | 20        |
| <b>3</b> | <b>Sume directe de module coireductibile</b>                            | <b>25</b> |
| <b>4</b> | <b>Domenii Ore și inele Goldie</b>                                      | <b>33</b> |
| <b>5</b> | <b>Teorema Osofsky–Smith</b>  | <b>39</b> |
| <b>6</b> | <b>Inele PCQI</b>   | <b>45</b> |
|          | <b>Bibliografie</b>   | <b>49</b> |



# Capitolul 0

## Generalități

### 0.1 Module semisimple

**Definiție 0.1.1.** Un  $R$ -modul nenul  $S$  se numește *simplu* dacă singurele sale submodule sunt  $0$  și  $S$ .

**Propoziție 0.1.2.** Fie  $S$  un  $R$ -modul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1.  $S$  este modul simplu.
2. Pentru orice element nenul  $x \in S$  avem  $S = xR$ .
3.  $S \simeq R/I$ , unde  $I$  este un ideal drept maximal.

**Lemă 0.1.3** (Schur). Fie  $S$  și  $S'$  două  $R$ -module simple și  $f: S \rightarrow S'$  un morfism de  $R$ -module. Atunci  $f = 0$  sau  $f$  este izomorfism. În particular  $\text{End}_R(S)$  este corp.

**Definiție 0.1.4.** Fie  $M$  un  $R$ -modul și  $(S_i)_{i \in I}$  mulțimea submodulelor simple ale lui  $M$ . Dacă  $M = \sum_{i \in I} S_i$ , atunci  $M$  se numește *semisimplu*.

**Propoziție 0.1.5.** Fie  $M$  un  $R$ -modul semisimplu și  $N$  un submodule al său. Atunci există o submulțime  $J \subseteq I$  astfel încât:

1. familia  $(S_j)_{j \in J}$  este independentă;
2.  $M = N \oplus (\bigoplus_{j \in J} S_j)$ .

**Corolar 0.1.6.** Cu notațiile de mai sus, pentru modulul semisimplu  $M$  există  $J \subseteq I$  astfel încât familia  $(S_j)_{j \in J}$  este independentă și

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i.$$

**Corolar 0.1.7.** Dacă  $M$  este un  $R$ -modul semisimplu și  $N$  un submodule al său, atunci  $N$  și  $M/N$  sunt semisimple.

**Corolar 0.1.8.** O sumă directă de module semisimple este modul semisimplu.

**Teoremă 0.1.9.** Fie  $M$  un  $R$ -modul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1.  $M$  este semisimplu;
2.  $M$  este izomorf cu o sumă directă de module simple;
3. orice submodule al său este sumand direct în  $M$ ;
4. orice șir exact

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

este scindabil.

**Definiție 0.1.10.** Suma submodulelor simple ale lui  $M$  se numește *soclul* lui  $M$  și se notează  $\text{soc}(M)$ . Dacă  $M$  nu conține nici un submodule simplu atunci punem  $\text{soc}(M) = 0$ .

**Propoziție 0.1.11.** Fie  $M$  și  $N$  două  $R$ -module și  $f: M \rightarrow N$  un morfism. Atunci  $f(\text{soc}(M)) \subseteq \text{soc}(N)$ .

**Propoziție 0.1.12.** Fie  $M$  un  $R$ -modul și  $N$  un submodule al său. Atunci

$$\text{soc}(N) = \text{soc}(M) \cap N.$$

**Propoziție 0.1.13.** Dacă  $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ , atunci

$$\text{soc}(M) = \bigoplus_{i \in I} \text{soc}(M_i).$$

**Propoziție 0.1.14.** Fie  $R$  un inel. Atunci  $\text{soc}(R_R)$  este un ideal bilateral al lui  $R$ .

## 0.2 Module noetheriene (artinene) și inele noetheriene (artinene)

**Definiție 0.2.1.** Fie  $R$  un inel și  $M$  un  $R$ -modul drept. Spunem că  $M$  satisface *condiția maximală* (resp. *minimală*) dacă orice mulțime nevidă de submodule ale lui  $M$ , ordonată prin incluziune, admite un element maximal (resp. minimal).

Spunem că  $M$  satisface *condiția lanțurilor ascendente* (resp. *descendente*) dacă orice șir (lanț) ascendent de submodule ale lui  $M$

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_i \subseteq \cdots$$

(resp. orice șir descendent

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_i \supseteq \cdots$$

) este staționar, adică există  $n \geq 1$  astfel încât  $M_n = M_{n+1} = \cdots$ .

**Propoziție 0.2.2.** Fie  $M$  un  $R$ -modul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1.  $M$  satisface condiția maximală (minimală);
2.  $M$  satisface condiția lanțurilor ascendente (descendente).

**Definiție 0.2.3.** Un  $R$ -modul  $M$  se numește *noetherian* (resp. *artinian*) dacă satisface condiția maximală (resp. minimală). Inelul  $R$  se numește noetherian (resp. artinian) la dreapta dacă  $R_R$  este noetherian (resp. artinian).

**Exemplu 0.2.4.**

1.  $\mathbb{Z}$  este inel noetherian dar nu este artinian.
2. Orice grup finit este  $\mathbb{Z}$ -modul noetherian și artinian.
3. Orice inel finit este noetherian și artinian.
4.  $\mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots, X_n, \dots]$  nu este nici noetherian, nici artinian:

$$(X_1) \subsetneq (X_1, X_2) \subsetneq \dots \subsetneq (X_1, \dots, X_n) \subsetneq \dots$$

$$(X_1) \supsetneq (X_1^2) \supsetneq \dots \supsetneq (X_1^k) \supsetneq \dots$$

5.  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$  este  $\mathbb{Z}$ -modul artinian dar nu este noetherian.

**Propoziție 0.2.5.** Fie  $N, P$  două submodule ale lui  $M$  astfel încât  $M = N + P$ . Atunci  $M$  este noetherian (artinian) dacă și numai dacă  $N$  și  $P$  sunt noetheriene (artiniane).

**Propoziție 0.2.6.** Pentru un  $R$ -modul  $M$  următoarele afirmații sunt echivalente:

1.  $M$  este noetherian;
2. orice submodule al lui  $M$  este finit generat.

**Propoziție 0.2.7.** Pentru un  $R$ -modul  $M$  următoarele afirmații sunt echivalente:

1.  $M$  este artinian;
2. oricare ar fi familia  $(X_i)_{i \in I}$  de submodule ale lui  $M$ , există  $J \subseteq I$ ,  $J$  finită, astfel încât

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap_{j \in J} X_j.$$

## 0.3 Module de lungime finită

**Definiție 0.3.1.** Fie  $M$  un  $R$ -modul drept nenul. Se numește *șir de compoziție* sau *șir Jordan–Hölder* al lui  $M$  un lanț finit strict ascendent de submodule

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n = M$$

astfel încât  $X_{i+1}/X_i$  este modul simplu pentru  $0 \leq i \leq n-1$ . Numărul  $n$  se numește *lungimea șirului*, iar modulele  $X_{i+1}/X_i$  se numesc *factorii șirului*.

**Propoziție 0.3.2.** Fie  $M$  un  $R$ -modul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1.  $M$  are un șir de compoziție;

2.  $M$  este noetherian și artinian.

**Propoziție 0.3.3.** *Fie*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

*un șir exact de  $R$ -module drepte. Atunci  $M$  admite un șir de compoziție dacă și numai dacă  $M'$  și  $M''$  admit un șir de compoziție.*

Dacă

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M, \quad 0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_p = M$$

sunt două șiruri de compoziție ale lui  $M$ , vom spune că ele sunt *echivalente* dacă  $n = p$  și există o bijecție  $\sigma : \{0, \dots, n-1\} \rightarrow \{0, \dots, n-1\}$  astfel încât

$$M_{i+1}/M_i \cong M_{\sigma(i)+1}/M_{\sigma(i)} \quad (0 \leq i \leq n-1).$$

**Teoremă 0.3.4** (Jordan–Hölder). *Dacă un  $R$ -modul  $M$  are două șiruri de compoziție*

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M, \quad 0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_p = M,$$

*atunci aceste două șiruri sunt echivalente.*

**Definiție 0.3.5.** Un  $R$ -modul  $M$  care admite un șir de compoziție se numește *modul de lungime finită*. Lungimea șirurilor de compoziție se numește *lungimea* lui  $M$  și se notează  $l(M)$ . Dacă  $M$  nu admite nici un șir de compoziție, atunci spunem că  $M$  este *de lungime infinită* și scriem  $l(M) = \infty$ .

**Propoziție 0.3.6.** *Fie*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

*un șir exact de  $R$ -module de lungime finită. Atunci*

$$l(M) = l(M') + l(M'').$$

**Corolar 0.3.7.** *Fie  $M$  un  $R$ -modul de lungime finită și  $N, L$  două submodule ale sale. Atunci:*

1.  $l(M) = l(N) + l(M/N)$ ;
2.  $l(N + L) + l(N \cap L) = l(N) + l(L)$ .

**Corolar 0.3.8.** *Fie  $M$  un  $R$ -modul de lungime finită și  $M_1, M_2, \dots, M_n$  submodule ale sale astfel încât*

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n.$$

*Atunci*

$$l(M) = \sum_{i=1}^n l(M_i).$$



## 0.4 Radicalul Jacobson

### Radicalul Jacobson al unui modul

**Definiție 0.4.1.** Fie  $M$  un  $R$ -modul. Intersecția tuturor submodulelor maximale ale lui  $M$  se numește *radicalul Jacobson* al modulului  $M$  și se notează  $\text{Rad}(M)$ . Dacă  $M$  nu are nici un submodule maximal, atunci prin convenție punem  $\text{Rad}(M) = M$ .

*Observație 0.4.2.* Dacă  $M$  este un  $R$ -modul finit generat, atunci  $\text{Rad}(M) \neq M$ .

**Propoziție 0.4.3.** Fie  $M$  un  $R$ -modul. Atunci

$$\text{Rad}(M) = \bigcap_{\substack{f: M \rightarrow S \\ S \text{ simplu}}} \ker(f) = \bigcap_{\substack{f: M \rightarrow X \\ X \text{ semisimplu}}} \ker(f).$$

**Propoziție 0.4.4.** Fie  $f : M \rightarrow N$  un morfism de  $R$ -module. Atunci  $f(\text{Rad}(M)) \subseteq \text{Rad}(N)$ . Dacă, în plus,  $f$  este epimorfism și  $\ker(f) \subseteq \text{Rad}(M)$ , atunci  $f(\text{Rad}(M)) = \text{Rad}(N)$ .

**Corolar 0.4.5.** Pentru orice  $R$ -modul  $M$  are loc egalitatea  $\text{Rad}(M/\text{Rad}(M)) = 0$ .

**Corolar 0.4.6.** Dacă  $M$  este un  $R$ -modul semisimplu, atunci  $\text{Rad}(M) = 0$ .

**Corolar 0.4.7.** Dacă  $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ , atunci

$$\text{Rad}(M) = \bigoplus_{i \in I} \text{Rad}(M_i).$$

**Propoziție 0.4.8.** Fie  $M$  un  $R$ -modul astfel încât  $\text{Rad}(M) \neq M$ . Atunci

$$\text{Rad}(M) = \bigcap \{ L \leq M \mid L \text{ este submodule superfluu} \}.$$

**Propoziție 0.4.9** (Lema lui Nakayama). Fie  $M$  un  $R$ -modul finit generat și  $N$  un submodule al său. Dacă  $N + \text{Rad}(M) = M$ , atunci  $N = M$ . (Adică  $\text{Rad}(M)$  este cel mai mare submodule superfluu al lui  $M$ .)

### Radicalul Jacobson al unui inel

Fie  $R$  un inel. Considerăm idealul stâng  $\text{Rad}({}_R R)$  ca intersecție a idealelor stângi maximale ale lui  $R$  și  $\text{Rad}(R_R)$  ca intersecție a idealelor drepte maximale ale lui  $R$ .

**Propoziție 0.4.10.**

1.  $\text{Rad}(R_R)$  este un ideal bilateral.
2.  $\text{Rad}(R_R) = \{ r \in R \mid 1 - ar \in U(R) \text{ pentru orice } a \in R \}$ .
3.  $\text{Rad}(R_R) = \text{Rad}({}_R R)$ .

**Definiție 0.4.11.** Idealul bilateral  $\text{Rad}(R_R) = \text{Rad}({}_R R)$  se numește *radicalul Jacobson* al inelului  $R$  și se notează  $\text{Rad}(R)$ .

**Propoziție 0.4.12.**

1. Dacă  $J$  este un ideal stâng (resp. drept sau bilateral) cu proprietatea că  $1 - x$  este inversabil pentru orice  $x \in J$ , atunci  $J \subseteq \text{Rad}(R)$ .
2. Dacă  $J$  este un nilideal stâng (resp. drept sau bilateral), atunci  $J \subseteq \text{Rad}(R)$ .

**Propoziție 0.4.13.** Fie  $\varphi : R \rightarrow S$  un morfism surjectiv de inele. Atunci  $\varphi(\text{Rad}(R)) \subseteq \text{Rad}(S)$ . Dacă  $\ker(\varphi) \subseteq \text{Rad}(R)$ , atunci  $\varphi(\text{Rad}(R)) = \text{Rad}(S)$ .

**Propoziție 0.4.14.** Dacă  $(R_i)_{i \in I}$  este o familie de inele, atunci

$$\text{Rad}\left(\prod_{i \in I} R_i\right) = \prod_{i \in I} \text{Rad}(R_i).$$

**Propoziție 0.4.15.** Fie  $M$  un  $R$ -modul. Atunci  $M \text{ Rad}(R) \subseteq \text{Rad}(M)$ .

**Teoremă 0.4.16.** Dacă  $R$  este un inel artinian, atunci  $\text{Rad}(R)$  este nilpotent.

## 0.5 Inele semisimple

**Teoremă 0.5.1.** Pentru un inel  $R$  următoarele afirmații sunt echivalente:

1. orice  $R$ -modul drept nenul este semisimplu;
2.  $R$  este  $R$ -modul drept semisimplu;
3.  $R$  este artinian și  $\text{Rad}(R) = 0$ .

**Definiție 0.5.2.** Un inel  $R$  care satisface una din condițiile de mai sus se numește inel semisimplu.

**Propoziție 0.5.3.** Fie  $R$  un inel semisimplu și  $M$  un  $R$ -modul nenul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1.  $M$  este de lungime finită;
2.  $M$  este noetherian;
3.  $M$  este artinian.

**Teoremă 0.5.4.** Fie  $R$  un inel artinian la dreapta și  $M$  un  $R$ -modul nenul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1.  $M$  este de lungime finită;
2.  $M$  este noetherian;
3.  $M$  este artinian.

**Corolar 0.5.5** (Hopkins). Un inel artinian la dreapta (respectiv la stânga) este noetherian la dreapta (respectiv la stânga).

# Capitolul 1

## Submodule esențiale

**Definiție 1.1.** Fie  $M$  un  $R$ -modul drept. Un submodule  $N$  al lui  $M$  se numește *esențial* (sau spunem că  $M$  este o extensie esențială a lui  $N$ ) dacă  $N \cap N' \neq 0$  pentru orice submodule nenul  $N'$  al lui  $M$ . În acest caz vom folosi notația  $N \trianglelefteq M_R$ .

Un monomorfism de  $R$ -module la dreapta  $f : M \rightarrow N$  se numește *esențial* dacă  $\text{Im } f$  este submodule esențial în  $N$  (adică  $\text{Im } f \trianglelefteq N_R$ ).

**Exemplu.**

1.  $n\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$  pentru orice  $n \geq 1$ .
2. Orice submodule al lui  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$  este esențial.

*Observație 1.2.* Fie  $M$  un  $R$ -modul drept și  $N$  un submodule al lui  $M$ . Atunci  $N \trianglelefteq M_R$  dacă și numai dacă pentru orice  $x \in M$ ,  $x \neq 0$ , există  $r \in R$  astfel încât  $xr \in N \setminus \{0\}$ .

*Demonstrație.* „ $\Rightarrow$ ” Fie  $x \in M \setminus \{0\}$ . Cum  $0 \neq xR \subseteq M_R$  și  $N \trianglelefteq M_R$ , rezultă că  $xR \cap N \neq 0$ , deci există  $xr \in xR \cap N \setminus \{0\}$ .

„ $\Leftarrow$ ” Fie  $N' \leq M_R$ ,  $N' \neq 0$ . Pentru  $x \in N' \setminus \{0\}$  există  $r \in R$  astfel încât  $xr \in N \setminus \{0\}$ , deci  $N \cap N' \neq 0$ .  $\square$

**Definiție 1.3.** Un monomorfism de  $R$ -module la dreapta  $f : N_R \rightarrow M_R$  se numește *esențial* dacă  $\text{Im } f \trianglelefteq M_R$ . Se observă imediat că dacă  $N$  este un submodule al lui  $M$  atunci incluziunea canonică  $i_N : N \rightarrow M$  este monomorfism esențial dacă și numai dacă  $N \trianglelefteq M_R$ .

**Propoziție 1.4.** Un monomorfism  $f : N_R \rightarrow M_R$  este esențial dacă și numai dacă pentru orice  $R$ -modul drept  $M'$  și orice  $g \in \text{Hom}(M, M')$ , faptul că  $g \circ f$  este monomorfism implică  $g$  monomorfism.

*Demonstrație.*

„ $\Rightarrow$ ” Fie  $g$  ca în enunț astfel încât  $g \circ f$  este monomorfism. Presupunem  $g \neq 0$ . Fie  $x \in \text{Ker } g \cap \text{Im } f \setminus \{0\}$ . Există  $x' \in N$  astfel încât  $x = f(x')$  și  $g(x) = 0$ , de unde  $g(f(x')) = 0$ . Cum  $g \circ f$  este monomorfism, rezultă  $x' = 0$  și deci  $x = 0$ , contradicție.

„ $\Leftarrow$ ” Dacă  $f$  nu este monomorfism esențial atunci există  $N' \leq M_R$ ,  $N' \neq 0$ , astfel încât  $N' \cap \text{Im } f = 0$ . Considerăm proiecția canonică  $\pi_{N'} : M \rightarrow M/N'$ . Dacă

$x \in \text{Ker}(\pi_{N'} \circ f)$ , atunci  $f(x) \in N'$ , deci  $f(x) = 0$ , adică  $x = 0$ . Obținem astfel că  $\pi_{N'} \circ f$  este injectiv, de unde rezultă că  $\pi_{N'}$  este injectiv, ceea ce implică  $N' = 0$ , contradicție.  $\square$

**Corolar 1.5.** *Fie  $M$  un  $R$ -modul la dreapta și  $N \leq M_R$ . Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

1.  $N \trianglelefteq M_R$ ;
2. incluziunea  $i_N : N \rightarrow M$  este monomorfism esențial;
3. pentru orice  $f \in \text{Hom}(M, M')$  cu  $M'$   $R$ -modul arbitrar, faptul că  $f \circ i_N$  este monomorfism implică  $f$  monomorfism.

**Propoziție 1.6.** *Fie  $f : N_R \rightarrow M_R$  și  $g : M_R \rightarrow P_R$  două monomorfisme. Atunci  $g \circ f$  este esențial dacă și numai dacă  $g$  și  $f$  sunt esențiale.*

*Demonstrație.*

„ $\Leftarrow$ ” Fie  $z \in P \setminus \{0\}$ . Cum  $g$  este esențial, există  $r \in R$  astfel încât  $zr \in \text{Im } g \setminus \{0\}$ . Există  $y \in M \setminus \{0\}$  astfel încât  $zr = g(y)$ .

Cum  $f$  este esențial, există  $r' \in R$  astfel încât  $yr' \in \text{Im } f \setminus \{0\}$ . De aici există  $x \in N \setminus \{0\}$  astfel încât  $yr' = f(x)$ . Dar  $zr' = g(y)r' = g(yr') = g(f(x))$ . Dacă  $zr' = 0$ , atunci  $g(f(x)) = 0$  și deci  $x = 0$ , contradicție. Obținem astfel că  $zr' \in \text{Im}(g \circ f)$  și că  $zr' \neq 0$ , ceea ce ne arată că  $g \circ f$  este esențial.

„ $\Rightarrow$ ” Fie  $y \in M \setminus \{0\}$ . Cum  $g$  este monomorfism,  $g(y) \neq 0$ . Deci există  $r \in R$  astfel încât  $g(yr) \in \text{Im } g \setminus \{0\}$  și  $g(yr) \neq 0$ . Rezultă că există  $x \in N \setminus \{0\}$  astfel încât  $g(yr) = g(f(x))$  de unde  $yr = f(x) \in \text{Im } f$ , ceea ce ne arată că  $f$  este monomorfism esențial.

Dacă  $z \in P \setminus \{0\}$  există  $r \in R$  astfel încât  $zr \in \text{Im}(g \circ f)$  și  $zr \neq 0$ . Cum  $\text{Im}(g \circ f) \subseteq \text{Im } g$ , rezultă că  $zr \in \text{Im } g$ , și deci  $g$  este monomorfism esențial.  $\square$

**Propoziție 1.7.** *Fie  $M$  un  $R$ -modul la dreapta și  $L_1, L_2, \dots, L_n$  submodule ale lui  $M$ . Atunci:*

1)  $\bigcap_{i=1}^n L_i$  este esențial în  $M$  dacă și numai dacă  $L_i$  este esențial în  $M$  pentru orice  $i = 1, \dots, n$ .

2) Dacă  $L_1 \subseteq L_2$  și  $L_1$  este esențial în  $M$ , atunci  $L_2$  este esențial în  $M$ .

*Demonstrația este evidentă.*

**Propoziție 1.8.** *Fie  $K$  și  $L$  două submodule ale lui  $M$ . 1) Dacă  $K \subseteq L \subseteq M$ , atunci  $K \trianglelefteq M$  dacă și numai dacă  $K \trianglelefteq L$  și  $L \trianglelefteq M$ .*

2) Dacă  $h : K_R \rightarrow M_R$  este morfism de module și  $L \trianglelefteq M$ , atunci  $h^{-1}(L) \trianglelefteq K$ .

3) Dacă  $L_1, L_2 \leq M_R$  și  $K_1 \trianglelefteq L_1$ ,  $K_2 \trianglelefteq L_2$ , atunci  $K_1 \cap K_2 \trianglelefteq L_1 \cap L_2$ .

*Demonstrație.*

1) Se aplică 1.5 și 1.6.

2) Fie  $U$  submodule nenul al lui  $K$ . (i) Dacă  $h(U) = 0$ , atunci  $U \subseteq \ker h \subseteq h^{-1}(L)$ , ceea ce implică  $U \cap h^{-1}(L) \neq 0$ . (ii) Dacă  $h(U) \neq 0$ , atunci  $h(U) \cap L \neq 0$  și deci

există  $u \in U$  astfel încât  $h(u) \in L$ ,  $h(u) \neq 0$ , de unde  $u \in U \cap h^{-1}(L)$  și  $u \neq 0$ . Din (i) și (ii) rezultă că  $h^{-1}(L) \leq K$ .

3) Dacă  $0 \neq X \leq L_1 \cap L_2$  atunci  $X \subseteq L_1$  ceea ce implică  $0 \neq X \cap K_1 \leq L_1$ . Dar cum  $X \subseteq L_2$ , rezultă  $0 \neq (X \cap K_1) \cap L_2 = X \cap (K_1 \cap K_2)$ , și deci  $K_1 \cap K_2 \leq L_1 \cap L_2$ .  $\square$

**Propoziție 1.9.** *Fie  $(K_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ,  $(L_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  două familii de submodule ale lui  $M$ . Dacă  $(K_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  este familie independentă în  $M$  și  $K_\lambda \leq L_\lambda$  pentru orice  $\lambda \in \Lambda$ , atunci  $(L_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  este familie independentă în  $M$  și  $(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda) \leq (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda)$ .*

*Demonstrație.*

Fie  $K_1 \leq L_1$ ,  $K_2 \leq L_2$  astfel încât  $K_1 \cap K_2 = 0$ . Din 1.8(3) rezultă că  $0 \leq L_1 \cap L_2$ , adică  $L_1 \cap L_2 = 0$ .

Fie proiecțiile canonice  $\pi_1 : L_1 \oplus L_2 \rightarrow L_1$ ,  $\pi_2 : L_1 \oplus L_2 \rightarrow L_2$ . Cum  $K_1 \leq L_1$ ,  $K_2 \leq L_2$  rezultă că

$$\pi_1^{-1}(K_1) = K_1 \oplus 0 \leq L_1 \oplus L_2,$$

și

$$\pi_2^{-1}(K_2) = 0 \oplus K_2 \leq L_1 \oplus L_2.$$

Deci

$$K_1 \oplus K_2 = (\pi_1^{-1}(K_1)) \cap (\pi_2^{-1}(K_2)) \leq L_1 \oplus L_2.$$

Prin inducție se obține afirmația pentru mulțimi finite. În cazul general, fie  $0 \neq m \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$ . Atunci există o mulțime finită  $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$  cu  $m \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} L_\lambda$ . Cum  $(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} K_\lambda) \leq (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} L_\lambda)$ , există  $r \in R$  astfel încât  $rm \in (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} K_\lambda) \setminus \{0\} \subseteq (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda) \setminus \{0\}$ . Rezultă că  $(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda) \leq (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda)$ .  $\square$

**Propoziție 1.10.** *Fie  $N$  un submodule al lui  $M$ . Atunci există un submodule  $Q$ ,  $N \subseteq Q \subseteq M$ , astfel încât  $Q$  este o extensie esențială maximală a lui  $N$  conținută în  $M$ .*

*Demonstrație.*

Fie  $\mathfrak{S} = \{L \leq M; N \subseteq L \subseteq M, N \cap L = 0\}$ ,  $\mathfrak{S}$  cu relația de ordine incluziunea.  $\mathfrak{S} \neq \emptyset$  deoarece  $N \in \mathfrak{S}$ . Fie  $(L_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  o familie total ordonată de elemente din  $\mathfrak{S}$  și

$$L := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda.$$

Evident  $L \leq M_R$ .

Fie  $x \in L \setminus \{0\}$ . Atunci există  $\lambda_0 \in \Lambda$  cu  $x \in L_{\lambda_0}$ . Cum  $N$  este esențial în  $L_{\lambda_0}$ , rezultă că există  $r \in R$  astfel încât  $xr \in N$  și  $xr \neq 0$ , de unde obținem că  $L$  este extensie esențială a lui  $N$ . Deci  $\mathfrak{S}$  este inductivă și, conform lemei lui Zorn,  $\mathfrak{S}$  admite un element maximal  $Q$  care satisface condițiile cerute.  $\square$

**Definiție 1.11.** Fie  $M$  un  $R$ -modul la dreapta și  $N \leq M_R$ . Un submodule  $K \leq M_R$  se numește *complement* al lui  $N$  în  $M$  dacă  $K$  este un submodule maximal al lui  $M$  cu proprietatea că  $K \cap N = 0$ . Un submodule  $K \leq M_R$  se numește *submodul complement al lui  $M$*  dacă există  $N \leq M_R$  astfel încât  $K$  este complement al lui  $N$  în  $M$ .

*Observație 1.12.* Mulțimea

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \{ L \leq M_R \mid N \cap L = 0 \}$$

este inductivă și, aplicând lema lui Zorn, rezultă că există un complement al lui  $N$  în  $M$ . În particular,  $0$  și  $M$  sunt submodule complement ale lui  $M$ .

**Propoziție 1.13.** *Fie  $M_R$ ,  $N \leq M_R$  și  $K \leq M_R$ ,  $K$  un complement al lui  $N$  în  $M$ . Există un complement  $Q$  al lui  $K$  în  $M$  astfel încât  $N \subseteq Q$ . Mai mult,  $Q$  este o extensie esențială maximală a lui  $N$  în  $M$ .*

*Demonstrație.* Se observă ușor că mulțimea

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \{ L \leq M_R \mid K \cap L = 0, N \subseteq L \}$$

este inductivă și lema lui Zorn asigură existența lui  $Q$ .

Fie  $L$  un submodule nenul al lui  $Q$  astfel încât  $L \cap N = 0$ . Fie  $K_1 = L + K$ . Este clar că  $K \subseteq K_1$ . Dacă  $x \in N \cap (L + K)$ , atunci  $x = y + z$  cu  $y \in L$ ,  $z \in K$ . Dar  $z = x - y \in Q$ . Cum  $Q \cap K = 0$ , rezultă  $z = 0$  și deci  $x = y$ . Din egalitatea  $L \cap N = 0$  deducem  $x = y = 0$  și deci  $N \cap (L + K) = 0$ , ceea ce contrazice faptul că  $K$  este un complement al lui  $N$  în  $M$ . Obținem  $L \cap N \neq 0$  pentru orice  $0 \neq L \leq Q$ , de unde  $Q$  este extensie esențială a lui  $N$ .

Presupunem că există  $Q' \leq M_R$  cu  $N \leq Q'$  și  $Q \subsetneq Q'$ . Cum  $Q'$  este complement al lui  $K$ , rezultă  $Q' \cap K \neq 0$ . Dar  $N \cap (Q' \cap K) = 0$  și  $0 \neq Q' \cap K \leq Q'$ , contradicție cu  $N \leq Q'$ . Rezultă că  $Q$  este extensie esențială maximală a lui  $N$  în  $M$ .  $\square$

**Definiție 1.14.** Un submodule  $N$  al lui  $M_R$  se numește *închis* dacă  $N$  nu are nicio extensie esențială în  $M$  proprie (diferită de  $N$ ).

**Corolar 1.15.** *Fie  $M_R$  un  $R$ -modul. Submodulele complement ale lui  $M$  coincid cu submodulele închise ale lui  $M$ .*

*Demonstrație.* Din 1.13 rezultă imediat că orice submodule închis al lui  $M$  este un submodule complement al lui  $M$ .

Invers, fie  $K$  un submodule complement al lui  $M_R$ . Rezultă că există  $N \leq M_R$  astfel încât  $K$  este un complement al lui  $N$  în  $M$ . Presupunem că  $K$  are o extensie esențială în  $M$  proprie, adică există  $K' \leq M_R$  cu  $K \leq K'$  și  $K \subsetneq K'$ . Atunci  $K' \cap N \neq 0$ , din maximalitatea lui  $K$ , iar cum  $K \leq K'$ , rezultă că

$$K \cap K' \cap N \neq 0,$$

contradicție.  $\square$

**Corolar 1.16.** *Fie  $N$  un submodule al lui  $M_R$ . Dacă  $K$  este un complement al lui  $N$  în  $M$ , atunci:*

1.  $(N + K) \leq M_R$ .
2. Morfismul canonic  $\pi_K \circ i_N : N \rightarrow M/K$  este monomorfism esențial.

*Demonstrație.* (1) Fie  $x \in M \setminus \{0\}$ . Dacă  $x \notin K$ , atunci  $K + Rx \neq K$  și deci  $N \cap (K + Rx) \neq 0$ . Fie  $y \in N \cap (K + Rx)$ ,  $y \neq 0$ . Există  $z \in K$ ,  $r \in R$  cu  $y = z + rx$ . Dacă  $rx = 0$ , atunci  $y = z$  și cum  $N \cap K = 0$  rezultă  $y = 0$ , contradicție. Deci  $rx \neq 0$  și, cum  $rx = y - z$ , obținem  $rx \in N + K$ , ceea ce ne arată că  $(N + K) \leq M_R$ .

(2)  $\text{Im}(\pi_K \circ i_N) = (N + K)/K$ . Fie  $L/K$  un submodul nenul al lui  $M/K$ . Atunci

$$\frac{N + K}{K} \cap \frac{L}{K} = \frac{(N + K) \cap L}{K} = \frac{N \cap L + K}{K}.$$

Cum  $K$  este un complement al lui  $N$ , rezultă că  $N \cap L \neq 0$  și deci

$$\frac{N \cap L + K}{K} \neq 0,$$

ceea ce ne arată că  $\pi_K \circ i_N$  este monomorfism esențial. □





# Capitolul 2

## Module injective

### 2.1 Module injective

Fie  $Q$  și  $M$  două  $R$ -module drepte.  $Q$  se numește  *$M$ -injectiv* dacă pentru orice monomorfism  $u : M' \rightarrow M$  și orice morfism  $f : M' \rightarrow Q$ , există  $g : M \rightarrow Q$  astfel încât  $g \circ u = f$ , adică diagrama

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{u} & M \\ & & \downarrow f & \swarrow g & \\ & & Q & & \end{array}$$

este comutativă.

Această proprietate este echivalentă cu condiția ca aplicația

$$\text{Hom}(u, Q) : \text{Hom}(M, Q) \longrightarrow \text{Hom}(M', Q)$$

să fie surjectivă pentru orice monomorfism  $u : M' \rightarrow M$ . Cum functorul  $\text{Hom}(-, Q)$  este exact la stânga, rezultă că  $Q$  este  *$M$ -injectiv* dacă și numai dacă  $\text{Hom}(-, Q)$  este exact în raport cu orice șir exact de forma

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

$R$ -modulul  $Q$  se numește *quasi-injectiv* (sau *self-injectiv*) dacă este  $Q$ -injectiv. Dacă  $Q$  este  $M$ -injectiv pentru orice  $R$ -modul  $M$ , atunci  $Q$  se numește *injectiv*.

#### 2.1.1 Propoziție

**Propoziție 2.1.1.** *Fie  $Q$  și  $M$  două  $R$ -module. Următoarele afirmații sunt echivalente:*

1.  *$Q$  este  $M$ -injectiv.*
2. *Pentru orice submodule  $N$  al lui  $M$  și orice morfism  $f : N \rightarrow Q$ , există  $g : M \rightarrow Q$  astfel încât  $g|_N = f$ .*
3. *Pentru orice submodule esențial  $N$  al lui  $M$  și orice morfism  $f : N \rightarrow Q$ , există  $g : M \rightarrow Q$  astfel încât  $g|_N = f$ .*

*Demonstrație.* Implicațiile (1)  $\Rightarrow$  (2) și (2)  $\Rightarrow$  (3) sunt evidente.

(2)  $\Rightarrow$  (1). Fie  $M'_R$ ,  $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M$  și  $f : M' \rightarrow Q$ . Atunci  $u(M') \leq M$ . Considerăm  $i : u(M') \rightarrow M$  injecția canonică și  $\bar{u} : M' \rightarrow u(M')$  izomorfismul indus de  $u$ . Există  $g : M \rightarrow Q$  astfel încât  $g \circ i = f \circ \bar{u}^{-1}$ . Atunci

$$g \circ i \circ \bar{u} = f \quad \text{și deci} \quad g \circ u = f.$$

Diagrama corespunzătoare este

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\bar{u}} & u(M') & \xhookrightarrow{i} & M \\ & & \downarrow f & & & \nearrow g & \\ & & Q & & & & \end{array}$$

(3)  $\Rightarrow$  (2). Fie  $N$  un submodule al lui  $M$  și  $K$  un complement al lui  $N$  în  $M$ . Atunci  $(N \oplus K) \leq M$ . Fie  $h : N \oplus K \rightarrow Q$ , definit prin  $h(n+k) = f(n)$  pentru orice  $n \in N$ ,  $k \in K$ . Cum  $N \cap K = 0$ , aplicația  $h$  este bine definită. Există  $g : M \rightarrow Q$  astfel încât  $g|_{N \oplus K} = h$  și deci  $g|_N = f$ .

Aceasta se poate reprezenta prin diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \hookrightarrow & N \oplus K & \hookrightarrow & M \\ & & \downarrow f & & \nearrow h & \nearrow g & \\ & & Q & & & & \end{array}$$

□

**Propoziție 2.1.2.** Fie  $(M_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  o familie de  $R$ -module și  $M$  un  $R$ -modul. Atunci  $\prod_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$  este  $M$ -injectiv dacă și numai dacă  $M_\alpha$  este  $M$ -injectiv pentru orice  $\alpha \in \Lambda$ .

*Demonstrație.* Fie  $N$  un submodule al lui  $M$ . Notăm  $P = \prod_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$  și  $\pi_\alpha : P \rightarrow M_\alpha$  proiecțiile canonice, pentru orice  $\alpha \in \Lambda$ .

"  $\Leftarrow$  " Considerând un morfism  $f : N \rightarrow P$ , avem că morfismele  $\pi_\alpha \circ f : N \rightarrow M_\alpha$  pot fi extinse la  $g_\alpha : M \rightarrow M_\alpha$ . Există  $g : M \rightarrow P$  astfel încât  $g|_N = f$ .

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & N & \hookrightarrow & M \\ & & \downarrow f & & \nearrow g \\ & & P & & \\ & & \downarrow \pi_\alpha & & \nearrow g_\alpha \\ & & M_\alpha & & \end{array}$$

"  $\Rightarrow$  " Fie  $\forall \alpha \in \Lambda$  și  $f : N \rightarrow M_\alpha$ . Considerând incluziunea canonică  $\varepsilon_\alpha : M_\alpha \rightarrow P$ , cum  $P$  este  $M$ -injectiv, există  $g : M \rightarrow P$  care îl extinde pe  $\varepsilon_\alpha \circ f : N \rightarrow P$ . Atunci  $\varepsilon_\alpha : M_\alpha \rightarrow P$  îl extinde pe  $f$  și deci  $M_\alpha$  este  $M$ -injectiv.

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & N & \hookrightarrow & M \\
& & \downarrow f & & \nearrow g \\
& & M_\alpha & & \\
& & \downarrow \varepsilon_\alpha & & \nearrow \pi_\alpha g \\
& & P & & \\
& & \downarrow \pi_\alpha & & \\
& & M_\alpha & & 
\end{array}$$

□

**Corolar 2.1.3.**

1. Fie  $(Q_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  o familie de  $R$ -module. Atunci  $\prod_{\alpha \in \Lambda} Q_\alpha$  este injectiv dacă și numai dacă  $Q_\alpha$  este injectiv pentru orice  $\alpha \in \Lambda$ .
2.  $Q_1 \oplus Q_2$  este  $R$ -modul injectiv dacă și numai dacă  $Q_i$  este injectiv pentru  $i = 1, 2$ . În particular, un sumand direct al unui modul injectiv este injectiv.

**Propoziție 2.1.4.** Fie  $Q$  un  $R$ -modul.

1. Dacă  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$  este un șir exact de  $R$ -module și  $Q$  este  $M$ -injectiv, atunci  $Q$  este  $M'$ -injectiv și  $M''$ -injectiv.
2. Dacă  $(M_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  este o familie de submodule ale lui  $M$  astfel încât  $M = \sum_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$  și  $Q$  este  $M_\alpha$ -injectiv pentru orice  $\alpha$ , atunci  $Q$  este  $M$ -injectiv.
3. Fie  $(N_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  o familie de  $R$ -module. Atunci  $Q$  este  $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} N_\alpha$ -injectiv dacă și numai dacă  $Q$  este  $N_\alpha$ -injectiv pentru orice  $\alpha \in \Lambda$ .

*Demonstrație.* Pentru a arăta că  $Q$  este  $M'$ -injectiv, considerăm  $N$  un submodule al lui  $M'$  și  $\varphi : N \rightarrow Q$  un morfism de  $R$ -module. Cum  $Q$  este  $M$ -injectiv, există  $\psi : M \rightarrow Q$  astfel încât  $\psi|_N = \varphi$  și deci  $\psi \circ f : M' \rightarrow Q$  este un morfism care îl extinde pe  $\varphi$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M \\
& & \downarrow \varphi & & \nearrow \psi & & \nearrow \\
& & Q & & & & 
\end{array}$$

Fie  $h : L \rightarrow M''$  un monomorfism. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că  $M' \leq M$  și  $M'' = M/M'$ . Cum  $L \cong h(L) \leq M''$ , există  $P \leq M$ ,  $M' \subseteq P$  astfel încât  $h(L) = P/M'$  și deci  $L \cong P/M'$ . Obținem diagrama comutativă:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & P & \longrightarrow & L \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow & & \downarrow h \\
0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0
\end{array}$$

Cum  $Q$  este  $M$ -injectiv, aplicând functorul  $\text{Hom}(-, Q)$  obținem diagrama comutativă:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(M'', Q) & \longrightarrow & \text{Hom}(M, Q) & \longrightarrow & \text{Hom}(M', Q) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow h^* & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(L, Q) & \longrightarrow & \text{Hom}(P, Q) & \longrightarrow & \text{Hom}(M', Q) \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 
 \end{array}$$

Obținem că  $h^* = \text{Hom}(h, Q)$  este epimorfism, ceea ce arată că  $Q$  este  $M''$ -injectiv.

2) Fie  $N$  un submodul al lui  $M$  și  $f : N \rightarrow Q$  un morfism de  $R$ -module. Considerăm mulțimea

$$\mathfrak{S} = \{(L, h) \mid N \leq L \leq M, h : L \rightarrow Q, h|_N = f\}.$$

Cum  $(N, f) \in \mathfrak{S}$ , avem  $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ . Definim pe  $\mathfrak{S}$  relația de ordine  $(L_1, h_1) \preceq (L_2, h_2)$  dacă și numai dacă  $L_1 \leq L_2$  și  $h_2|_{L_1} = h_1$ . Se observă că  $\mathfrak{S}$  este inductivă și, din lema lui Zorn, rezultă că există  $(L_0, g_0)$  element maximal al lui  $\mathfrak{S}$ . Pentru a arăta că  $L_0 = M$  este suficient să arătăm că  $M_\alpha \leq L_0$  pentru orice  $\alpha \in \Lambda$ .

Considerând diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & L_0 \cap M_\alpha & \xrightarrow{i_\alpha} & M_\alpha \\
 & & \downarrow i_0 & & \searrow h_\alpha \\
 & & L_0 & & \\
 & & \downarrow g_0 & & \\
 & & Q & & 
 \end{array}$$

rezultă că există  $h_\alpha : M_\alpha \rightarrow Q$  astfel încât  $h_\alpha \circ i_\alpha = g_0 \circ i_\alpha$ . Definim  $h^* : L_0 + M_\alpha \rightarrow Q$ ,  $h^*(l + m_\alpha) = g_0(l) + h_\alpha(m_\alpha)$ , pentru orice  $l \in L_0$ ,  $m_\alpha \in M_\alpha$ . Dacă  $l + m_\alpha = 0$ , atunci  $l = -m_\alpha \in L_0 \cap M_\alpha$  și deci  $h^*(l + m_\alpha) = g_0(l) + h_\alpha(l)$ , ceea ce arată că  $h^*$  este bine definită. Atunci  $(L_0 + M_\alpha, h^*) \in \mathfrak{S}$  și, cum  $(L_0, g_0) \preceq (L_0 + M_\alpha, h^*)$ , din maximalitatea lui  $(L_0, g_0)$  rezultă că  $L_0 = L_0 + M_\alpha$ , adică  $M_\alpha \leq L_0$  pentru orice  $\alpha \in \Lambda$ .

3) „ $\Rightarrow$ ” Cum  $N_\alpha \leq N$  și  $Q$  este  $N$ -injectiv, avem că  $Q$  este  $N_\alpha$ -injectiv pentru orice  $\alpha \in \Lambda$ .

„ $\Leftarrow$ ” Fie  $N'_\alpha = i_\alpha(N_\alpha)$ . Cum  $Q$  este  $N_\alpha$ -injectiv și  $N'_\alpha \cong N_\alpha$ , rezultă că  $Q$  este  $N'_\alpha$ -injectiv. Apoi aplicăm (2).  $\square$

### Corolar 2.1.5.

1.  $Q_1 \oplus Q_2$  este  $R$ -modul quasi-injectiv dacă și numai dacă  $Q_i$  este  $Q_j$ -injectiv pentru orice  $i, j = 1, 2$ . În particular, un sumand direct al unui modul quasi-injectiv este quasi-injectiv.
2.  $Q^n$  este  $R$ -modul quasi-injectiv dacă și numai dacă  $Q$  este quasi-injectiv.

**Corolar 2.1.6.** Fie  $Q$  și  $M$  două  $R$ -module. Atunci  $Q$  este  $M$ -injectiv dacă și numai dacă  $Q$  este  $mR$ -injectiv pentru orice  $m \in M$ .

*Demonstrație.* „ $\Rightarrow$ ” este evident.

„ $\Leftarrow$ ” Cum  $M = \sum_{m \in M} mR$ , din 2.1.4(2) rezultă că  $Q$  este  $M$ -injectiv.  $\square$

**Teoremă 2.1.7** (Criteriul lui Baer). Pentru un  $R$ -modul  $Q$  următoarele afirmații sunt echivalente:

1.  $Q$  este injectiv.
2.  $Q$  este  $R$ -injectiv.
3. Pentru orice ideal drept  $I$  al lui  $R$  și orice morfism  $f : I \rightarrow Q$  există  $x \in Q$  astfel încât  $f(a) = xa$  pentru orice  $a \in I$ .

*Demonstrație.* Implicația  $(1) \Rightarrow (2)$  este evidentă.

$(2) \Rightarrow (1)$ . Fie  $M$  un  $R$ -modul și  $x \in M$ . Cum  $\varphi_x : R \rightarrow xR$ ,  $\varphi_x(a) = xa$  pentru orice  $a \in R$ , este morfism surjectiv de  $R$ -module, rezultă că  $R/\text{Ker } \varphi_x \cong xR$ . Cum  $Q$  este  $R$ -injectiv, din 2.1.4(1) rezultă că  $Q$  este  $R/\text{Ker } \varphi_x$ -injectiv și deci  $Q$  este  $xR$ -injectiv pentru orice  $x \in M$ . Atunci, din 2.1.6 obținem că  $Q$  este  $M$ -injectiv.

$(2) \Rightarrow (3)$ . Fie  $I$  un ideal drept al lui  $R$  și  $f : I \rightarrow Q$ . Există  $g : R \rightarrow Q$  astfel încât  $g|_I = f$ . Fie  $x = g(1) \in Q$ . Atunci  $f(a) = g(a) = ag(1) = xa$  pentru orice  $a \in I$ .

$(3) \Rightarrow (2)$ . Dacă pentru un morfism  $f : I \rightarrow Q$  există  $x \in Q$  cu  $f(a) = xa$  pentru orice  $a \in I$ , atunci, definind  $g : R \rightarrow Q$  prin  $g(r) = xr$  pentru orice  $r \in R$ , rezultă că  $g|_I = f$ .  $\square$

**Definiție 2.1.8.**

1. Un  $R$ -modul  $Q$  se numește *divizibil* dacă pentru orice  $y \in Q$  și orice  $a \in R$  nenulivizor al lui zero, există  $x \in Q$  astfel încât  $ax = y$ . Se verifică ușor că orice modul factor al unui modul divizibil este divizibil.
2. Un domeniu de integritate comutativ se numește *PID-inel* dacă orice ideal al său este principal.

**Propoziție 2.1.9.**

1. Orice modul injectiv este divizibil.
2. Fie  $R$  un PID-inel.
  - (i) Dacă  $Q$  este un  $R$ -modul, atunci  $Q$  este injectiv dacă și numai dacă este divizibil.
  - (ii) Dacă  $I$  este un ideal nenul al lui  $R$ , atunci  $R/I$  este  $R$ -modul quasi-injectiv. În particular,  $\mathbb{Z}_n$  este  $\mathbb{Z}$ -modul quasi-injectiv,  $\forall n \geq 1$ .

*Demonstrație.* 1) Fie  $Q$  un  $R$ -modul divizibil,  $y \in Q$  și  $a \in R$  nendivizor al lui zero. Definim  $f : aR \rightarrow Q$  prin  $f(ax) = yx$  pentru orice  $x \in R$ . Cum  $a$  este nendivizor al lui zero,  $f$  este bine definită. Folosind criteriul lui Baer rezultă că există  $x \in Q$  astfel încât  $f(\lambda) = x\lambda$ , pentru orice  $\lambda \in I$ . Deci  $y = f(a) = f(a \cdot 1) = xa$ .

2) (i) Implicația „ $\Rightarrow$ ” este evidentă din (1).

„ $\Leftarrow$ ” Fie  $Q$  un  $R$ -modul divizibil și  $I$  un ideal drept al lui  $R$ . Atunci există  $a \in R$  astfel încât  $I = aR$ . Considerăm  $f : I \rightarrow Q$  un morfism de  $R$ -module. Există  $x \in Q$  astfel încât  $f(a) = xa$ . Atunci  $f(ar) = xar$  pentru orice  $r \in R$  și deci, conform criteriului lui Baer,  $Q$  este injectiv.

(ii) Fie  $I = aR$  și  $J = bR$  ideale nenule ale lui  $R$  astfel încât  $I \subseteq J$  și  $f : J/I \rightarrow R/I$  un morfism de  $R$ -module. Există  $c \in R$  astfel încât  $a = bc$ . Dacă  $f(\bar{b}) = \hat{x} \in R/I$ , atunci  $x \in I$  și deci există  $a_1 \in R$  astfel încât  $x = aa_1$ . Rezultă că  $x = ba_1$ . Definim  $g : R/I \rightarrow R/I$ ,  $g(\bar{r}) = \widehat{ar_1}$  pentru orice  $r \in R$ . Atunci  $g$  este morfism de  $R$ -module și  $g(\bar{b}) = \hat{x}$ , deci  $g|_{J/I} = f$ , ceea ce arată că  $R/I$  este quasi-injectiv.  $\square$

**Corolar 2.1.10.** *Un grup abelian  $G$  este  $\mathbb{Z}$ -modul injectiv dacă și numai dacă  $G$  este divizibil.*

**Corolar 2.1.11.**

1.  $\mathbb{Q}$  și  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$  sunt  $\mathbb{Z}$ -module injective.
2. Orice sumă directă de  $\mathbb{Z}$ -module injective este  $\mathbb{Z}$ -modul injectiv.
3. Orice grup factor al unui  $\mathbb{Z}$ -modul injectiv este injectiv.

**Lemă 2.1.12.** *Fie inelele  $A, S, T$  și bimodulele  ${}_S M_A, {}_A N_T$ . Atunci  $\text{Hom}_A(M, N)$  are o structură de bimodul  $S$ -stâng și  $T$ -drept prin operațiile:*

$$(s \cdot f)(x) = f(xs), \quad (f \cdot t)(x) = f(x)t,$$

unde  $s \in S$ ,  $t \in T$ ,  $x \in M$ ,  $f \in \text{Hom}_A(M, N)$ .

*Demonstrație.* Fie  $a, b \in A$  și  $x, y \in M$ . Atunci:

$$(s \cdot f)(ax + by) = f((ax + by)s) = f(a(xs)) + f(b(ys)) = af(xs) + bf(ys) = a(s \cdot f)(x) + b(s \cdot f)(y),$$

și deci  $s \cdot f \in \text{Hom}_A(M, N)$ . Analog  $f \cdot t \in \text{Hom}_A(M, N)$ .

Pentru  $s, s' \in S$  și  $f, g \in \text{Hom}_A(M, N)$ :

$$(s \cdot (f + g))(x) = (f + g)(xs) = f(xs) + g(xs) = (s \cdot f)(x) + (s \cdot g)(x). \quad (1)$$

$$((s + s') \cdot f)(x) = f(x(s + s')) = f(xs + xs') = f(xs) + f(xs') = (s \cdot f)(x) + (s' \cdot f)(x). \quad (2)$$

$$((ss') \cdot f)(x) = f(x(ss')) = f((xs)s') = (s' \cdot f)(xs) = (s \cdot (s' \cdot f))(x). \quad (3)$$

$$(1_S \cdot f)(x) = f(x1_S) = f(x). \quad (4)$$

Din (1)–(4) avem că  $\text{Hom}_A(M, N)$  este  $S$ -modul stâng. La fel se arată că este și  $T$ -modul drept. Prin urmare  $\text{Hom}_A(M, N)$  este un bimodul  $S$ -stâng și  $T$ -drept.  $\square$

**Propoziție 2.1.13** (Eckmann–Schopf). *Fie  $Q$  un grup abelian divizibil. Atunci  $R$ -modulul stâng  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$  este injectiv.*

*Demonstrație.* Conform lemei precedente,  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$  are o structură de  $R$ -modul stâng dată de operația

$$(r \cdot f)(a) = f(ar), \quad \forall a, r \in R, f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q).$$

Fie  $I$  un ideal stâng al lui  $R$  și  $h : I \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$  un morfism de  $R$ -module stângi. Atunci aplicația

$$\gamma : \mathbb{Z}I \longrightarrow \mathbb{Z}Q, \quad \gamma(a) = h(a)(1)$$

definește un morfism de  $\mathbb{Z}$ -module. Cum  $Q$  este  $\mathbb{Z}$ -injectiv, există  $\tilde{\gamma} : \mathbb{Z}R \rightarrow \mathbb{Z}Q$  astfel încât  $\tilde{\gamma}|_I = \gamma$ . Pentru  $a \in I$  și  $r \in R$  avem

$$(a \cdot \tilde{\gamma})(r) = \tilde{\gamma}(ra) = h(ra)(1) = (r \cdot h(a))(1) = h(a)(r),$$

deci  $h(a) = a \cdot \tilde{\gamma}$  pentru orice  $a \in I$ . Conform criteriului lui Baer,  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$  este  $R$ -modul stâng injectiv.  $\square$

**Propoziție 2.1.14.** *Orice  $R$ -modul stâng  $M$  poate fi scufundat într-un  $R$ -modul stâng injectiv.*

*Demonstrație.* Există un  $\mathbb{Z}$ -modul liber de forma  $\mathbb{Z}^{(A)}$  și un  $\mathbb{Z}$ -morfism surjectiv  $f : \mathbb{Z}^{(A)} \rightarrow M$ . Atunci

$$\mathbb{Z}M \cong \mathbb{Z}^{(A)} / \ker f \subseteq \mathbb{Q}^{(A)} / \ker f,$$

și deci există un grup abelian divizibil  $G$  astfel încât  $\mathbb{Z}M \subseteq \mathbb{Z}G$ . Aplicând functorul  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, -)$  obținem un monomorfism

$${}_R M \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G).$$

Cum  $G$  este divizibil, din Propoziția 2.1.13 rezultă că  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$  este  $R$ -modul stâng injectiv. Prin urmare  $M$  se scufundă într-un  $R$ -modul stâng injectiv.  $\square$

**Propoziție 2.1.15.** *Fie  $Q$  un  $R$ -modul. Atunci  $Q$  este injectiv dacă și numai dacă orice șir exact de forma*

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M' \longrightarrow 0$$

*este scindat.*

*Demonstrație.* „ $\Rightarrow$ ” Presupunem că  $Q$  este injectiv. Din exactitatea șirului avem că  $f$  este monomorfism. Prin injectivitatea lui  $Q$  există  $h : M \rightarrow Q$  astfel încât  $hf = \text{id}_Q$ , ceea ce arată că șirul este scindat.

„ $\Leftarrow$ ” Folosind Propoziția 2.1.14, există un  $R$ -modul injectiv  $Q'$  și un monomorfism  $i : Q \rightarrow Q'$ . Avem un șir exact

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{i} Q' \longrightarrow Q'/i(Q) \longrightarrow 0.$$

Prin ipoteză acest șir este scindat, deci  $Q$  este sumand direct în  $Q'$ . Un sumand direct al unui modul injectiv este injectiv, așadar  $Q$  este injectiv.  $\square$

## 2.2 Anvelope injective

**Definiție 2.2.1.** Fie  $M$  un  $R$ -modul. O pereche  $(E, i)$  se numește *anvelopă injectivă* a lui  $M$  dacă  $E$  este modul injectiv și  $i : M \rightarrow E$  este un monomorfism esențial.

**Propoziție 2.2.2.** Fie  $Q$  un  $R$ -modul injectiv. Atunci orice submodule complement al lui  $Q$  este sumand direct în  $Q$ .

*Demonstrație.* Fie  $K$  un submodule al lui  $Q$  și  $N$  un complement al lui  $K$  în  $Q$ , adică  $K \cap N = 0$  și  $K + N$  este submodule esențial în  $Q$ . Atunci  $(K + N)/N \cong Q/N$ . Definim  $g : (K + N)/N \rightarrow Q$  prin

$$g((x + y) + N) = x, \quad x \in K, y \in N.$$

Cum  $K \cap N = 0$ , aplicația  $g$  este bine definită și este monomorfism. Injectivitatea lui  $Q$  asigură existența unui morfism  $h : Q/N \rightarrow Q$  astfel încât  $h|_{(K+N)/N} = g$ . Deoarece  $(K + N)/N \cong Q/N$  și  $g$  este monomorfism, și  $h$  este monomorfism. Avem  $K = \text{Im } g = h((K + N)/N) \subseteq h(Q/N)$ . Cum  $K$  este submodule închis, rezultă  $K = h(Q/N)$ . Din  $h$  monomorfism obținem  $(K + N)/N = Q/N$ , deci  $K + N = Q$ . Prin urmare  $K$  este un sumand direct în  $Q$ .  $\square$

**Teoremă 2.2.3** (Eckmann–Schopf). *Orice  $R$ -modul  $M$  are o anvelopă injectivă unică până la un izomorfism.*

*Demonstrație.* Din Propoziția 2.1.14 există un  $R$ -modul injectiv  $Q$  astfel încât  $M \leq Q$ . Fie  $E$  o extensie esențială maximală a lui  $M$  în  $Q$ . Atunci  $E$  este un submodule complement în  $Q$ , iar din propoziția precedentă rezultă că  $E$  este injectiv. Astfel  $(E, i)$ , cu  $i : M \hookrightarrow E$  incluziunea, este o anvelopă injectivă a lui  $M$ .

Pentru unicitate, fie  $(E_1, i_1)$  și  $(E_2, i_2)$  două anvelope injective ale lui  $M$ . Cum  $E_2$  este injectiv, există  $f : E_1 \rightarrow E_2$  astfel încât  $f i_1 = i_2$ . Morfismul  $i_2$  este monomorfism, iar  $i_1$  este monomorfism esențial, deci (folosind 1.4) rezultă că  $f$  este monomorfism. Avem  $E_1 \cong f(E_1)$  și  $E_2 = f(E_1) \oplus E_3$  pentru un anumit submodule  $E_3$ . Dar  $i_2(M) \subseteq f(E_1)$ , deci  $i_2(M) \cap E_3 = 0$ . Cum  $i_2$  este monomorfism esențial, rezultă  $E_3 = 0$ , deci  $E_2 = f(E_1)$  și  $f$  este izomorfism.  $\square$

În practică vom considera un reprezentant al acestei clase pe care îl vom nota  $E(M)$  astfel încât  $M \leq E(M)$ .

**Propoziție 2.2.4.** Fie  $M$  un  $R$ -modul și  $i : M \rightarrow Q$  un monomorfism cu  $Q_R$  injectiv. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1.  $(Q, i)$  este o anvelopă injectivă a lui  $M$ ;
2. pentru orice monomorfism  $f : M \rightarrow Q'$  cu  $Q'$  injectiv, există un monomorfism  $g : Q \rightarrow Q'$  astfel încât  $gi = f$ .

*Demonstrație.* (1)  $\Rightarrow$  (2). Fie  $f : M \rightarrow Q'$  un monomorfism cu  $Q'$  injectiv. Prin injectivitatea lui  $Q'$  există  $u : Q \rightarrow Q'$  astfel încât  $ui = f$ . Cum  $i$  este monomorfism esențial și  $Q'$  este injectiv, imaginea  $u(Q)$  este un complement al lui  $f(M)$ , iar din definiția anvelopei injective rezultă că  $u$  este monomorfism; punem  $g = u$ .



(2)  $\Rightarrow$  (1). Fie  $(E(M), j)$  o anvelopă injectivă a lui  $M$ . Aplicând (2) la  $f = j$  obținem un monomorfism  $g : Q \rightarrow E(M)$  cu  $gi = j$ . Cum  $j$  este monomorfism esențial, rezultă că și  $i$  este monomorfism esențial, deci  $(Q, i)$  este o anvelopă injectivă a lui  $M$ .  $\square$

**Propoziție 2.2.5.** *Oricare ar fi  $R$ -modulele drepte  $M_1, M_2, \dots, M_n$  avem*

$$E\left(\bigoplus_{i=1}^n M_i\right) \cong \bigoplus_{i=1}^n E(M_i).$$

*Demonstrație.* Din 1.9,  $\bigoplus_{i=1}^n E(M_i)$  este o extensie esențială a lui  $\bigoplus_{i=1}^n M_i$ . Cum

$$\bigoplus_{i=1}^n E(M_i) \cong \prod_{i=1}^n E(M_i),$$

din 2.1.3 rezultă că  $\bigoplus_{i=1}^n E(M_i)$  este injectiv. Prin unicitatea anvelopei injective obținem

$$E\left(\bigoplus_{i=1}^n M_i\right) \cong \bigoplus_{i=1}^n E(M_i).$$

$\square$

**Teoremă 2.2.6.** *Fie  $Q$  și  $M$  două  $R$ -module. Atunci  $Q$  este  $M$ -injectiv dacă și numai dacă  $f(M) \leq Q$ , oricare ar fi  $f \in \text{Hom}(E(M), E(Q))$ .*

*Demonstrație.* „ $\Rightarrow$ ” Fie  $f \in \text{Hom}(E(M), E(Q))$  și notăm

$$K := \{m \in M \mid f(m) \in Q\}.$$

Cum  $Q$  este  $M$ -injectiv, există un morfism  $\bar{f} : M \rightarrow Q$  astfel încât  $\bar{f}|_K = f|_K$ . Arătăm că

$$Q \cap (\bar{f} - f)(M) = 0.$$

Fie  $x \in Q$  și  $m \in M$  cu  $x = (\bar{f} - f)(m)$ . Atunci

$$f(m) = \bar{f}(m) - x \in Q,$$

deci  $m \in K$ . Urmează că

$$x = \bar{f}(m) - f(m) = f(m) - f(m) = 0.$$

Prin urmare  $Q \cap (\bar{f} - f)(M) = 0$  și, cum  $Q \leq E(Q)$ , rezultă că  $(\bar{f} - f)(M) = 0$ . Așadar  $f(M) = \bar{f}(M) \leq Q$ .

„ $\Leftarrow$ ” Întrucât  $E(Q)$  este injectiv, este suficient să considerăm  $f \in \text{Hom}(M, E(Q))$ . Fie  $N$  un submodul al lui  $M$  și  $g : N \rightarrow Q$  un morfism de  $R$ -module. Cum  $E(Q)$  este injectiv, există un morfism  $\tilde{g} : M \rightarrow E(Q)$  astfel încât  $\tilde{g}|_N = i \circ g$ , unde  $i : Q \rightarrow E(Q)$  este injecția canonică. Prin ipoteză avem  $\tilde{g}(M) \leq Q$ , astfel încât, identificând  $\tilde{g}$  cu corestricția sa la  $Q$ , obținem un morfism  $h : M \rightarrow Q$  cu  $h|_N = g$ . Prin urmare  $Q$  este  $M$ -injectiv.  $\square$

**Corolar 2.2.7.** *Un  $R$ -modul  $Q$  este quasi-injectiv dacă și numai dacă  $f(Q) \leq Q$  pentru orice  $f \in \text{End}(E(Q))$ .*

**Teoremă 2.2.8** (Matlis–Bass). *Fie  $R$  un inel. Atunci  $R$  este noetherian la dreapta dacă și numai dacă, pentru orice  $R$ -modul simplu  $S_i$  ( $i \geq 1$ ),*

$$Q := \bigoplus_{i=1}^{\infty} E(S_i)$$

*este un  $R$ -modul injectiv.*

*Demonstrație.* „ $\Rightarrow$ ” Fie  $L$  un ideal drept al lui  $R$ ,

$$Q = \bigoplus_{i=1}^{\infty} E(S_i)$$

și  $f : L \rightarrow Q$  un morfism de  $R$ -module. Există elemente  $a_1, \dots, a_n \in L$  astfel încât

$$L = a_1 R + a_2 R + \dots + a_n R.$$

În mod evident există  $m \geq 1$  astfel încât  $f(a_k) \in \bigoplus_{j=1}^m E(S_j)$  pentru orice  $k = 1, \dots, n$ , deci

$$\Im f \subseteq \bigoplus_{j=1}^m E(S_j).$$

Cum  $\bigoplus_{j=1}^m E(S_j)$  este injectiv, există  $g : R \rightarrow \bigoplus_{j=1}^m E(S_j)$  astfel încât  $g|_L = f$ . Notăm  $\bar{f} = i \circ g$ , unde  $i : \bigoplus_{j=1}^m E(S_j) \rightarrow Q$  este injecția canonică. Atunci  $\bar{f}|_L = f$ , deci  $Q$  este injectiv.

„ $\Leftarrow$ ” Presupunem că  $R$  nu este noetherian la dreapta. Atunci există un șir strict ascendent de ideale la dreapta, finit generate:

$$L_1 \subsetneq L_2 \subsetneq \dots \subsetneq L_n \subsetneq \dots$$

Din lema lui Krull rezultă că, pentru orice  $n \geq 1$ , există un submodul maximal  $M_n \subsetneq L_n$  astfel încât

$$L_{n-1} \subseteq M_n \quad \text{pentru orice } n \geq 2.$$

Fie

$$L := \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k, \quad \pi_k : L_k \longrightarrow L_k/M_k$$

proiecțiile canonice și

$$E_k := E(L_k/M_k) \quad \text{pentru orice } k \geq 1.$$

Atunci

$$E := \bigoplus_{k=1}^{\infty} E_k$$

este injectiv și

$$f : L \longrightarrow E, \quad f(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k(a)$$

este bine definit. Există un element  $x \in E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$  astfel încât  $f(a) = xa$  pentru orice  $a \in L$ . Rezultă că  $\pi_k(a) = 0$  pentru orice  $k \geq n+1$ , adică  $a \in M_k$  pentru orice  $k \geq n+1$ . Prin urmare

$$L \subseteq M_{n+1} \subsetneq L_{n+1} \subseteq M_{n+2} \subsetneq L_{n+2} \subseteq \cdots \subseteq L,$$

contradicție. Obținem că  $R$  este noetherian la dreapta. □



## Capitolul 3

### Sume directe de module coireductibile

**Propoziție 3.1.** Fie  $M$  un  $R$ -modul și  $E(M)$  anvelopa sa injectivă. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1.  $E(M)$  este indecompozabil.
2. Dacă  $L$  și  $K$  sunt submodule nenule ale lui  $M$ , atunci  $L \cap K \neq 0$ .
3. Dacă  $x, y \in M \setminus \{0\}$ , atunci există  $a, b \in R$  astfel încât  $0 \neq xa = yb$ .
4.  $M$  este o extensie esențială a oricărui submodule nenul al său.

*Demonstrație.* (2)  $\Rightarrow$  (1). Presupunem că  $E(M) = L' \oplus K'$  cu  $L'$  și  $K'$  submodule nenule ale lui  $E(M)$ . Cum  $M \leq E(M)$ , avem că  $L = L' \cap M \neq 0$  și  $K = K' \cap M \neq 0$ , deci

$$L \cap K = (L' \cap K') \cap M = 0,$$

ceea ce contrazice ipoteza (2).

(1)  $\Rightarrow$  (2). Presupunem că există  $L, K$  submodule nenule ale lui  $M$  astfel încât  $L \cap K = 0$ . Atunci  $E(L) \leq E(M)$  și  $K \cap E(L) = 0$  (altfel, cum  $L \subseteq E(L)$ , am avea  $L \cap K \neq 0$ ). Dar șirul exact scurt

$$0 \longrightarrow E(L) \longrightarrow E(M) \longrightarrow E(M)/E(L) \longrightarrow 0$$

este scindat deoarece  $E(L)$  este injectiv și deci  $E(M) \cong E(L) \oplus E(M)/E(L)$ . Obținem astfel

$$0 = K \cap E(L) = K \cap E(M) = K,$$

contradicție.

Echivalențele (2)  $\Leftrightarrow$  (3) și (2)  $\Leftrightarrow$  (4) sunt evidente. □

**Definiție 3.2.** Un modul  $M$  care satisface una din condițiile echivalente de mai sus se numește *coireductibil* (sau *uniform*). Fie  $M$  un  $R$ -modul și  $N$  un submodule propriu al său. Dacă  $M/N$  este coireductibil, atunci spunem că  $N$  este *ireductibil* în  $M$ . Este clar că  $N$  este ireductibil în  $M$  dacă și numai dacă din egalitatea  $N = P \cap Q$ , unde  $P, Q \leq M$ , rezultă  $N = P$  sau  $N = Q$ .

**Exemplu.**

1. Este clar că orice modul simplu este coireductibil.
2.  $\mathbb{Z}$  este  $\mathbb{Z}$ -modul coireductibil.
3. Din Propoziția 3.1 rezultă că un modul injectiv este indecompozabil dacă și numai dacă este coireductibil. În particular, dacă  $M$  este un  $R$ -modul coireductibil, atunci  $E(M)$  este coireductibil. Rezultă că  $\mathbb{Q}$  și  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$  sunt  $\mathbb{Z}$ -module coireductibile.
4.  $\mathbb{Z}_n$  este  $\mathbb{Z}$ -modul coireductibil dacă și numai dacă  $n$  este puterea unui număr prim. Dacă  $n = p^k$  cu  $p \geq 2$  și  $k \geq 1$ , atunci  $\langle p^m \rangle \subseteq \langle p^i \rangle \cap \langle p^j \rangle$  pentru orice  $i, j \in \{1, \dots, k-1\}$ , unde  $m = \min(i, j)$ , și deci  $\mathbb{Z}_{p^k}$  este coireductibil. Reciproc, presupunem că  $\mathbb{Z}_n$  este coireductibil și  $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$  este descompunerea lui  $n$  în factori primi. Dacă  $s \geq 2$ , atunci avem

$$\langle p_1^{\alpha_1} \cdots p_{s-1}^{\alpha_{s-1}} \rangle + \mathbb{Z} \quad \text{și} \quad \langle p_s^{\alpha_s} \rangle + \mathbb{Z}$$

submodule nenule a căror intersecție este zero, contradicție. Obținem că  $s = 1$ , deci  $n$  este o putere a unui număr prim.

**Propoziție 3.3.** *Fie  $M$  un  $R$ -modul și  $N$  un submodule propriu al lui  $M$ . Dacă  $x \in M \setminus N$ , atunci există un submodule ireductibil  $P$  al lui  $M$  astfel încât  $N \subseteq P$  și  $x \notin P$ .*

*Demonstrație.* Fie

$$\mathfrak{S} = \{ N' \leq M \mid N \subseteq N' \text{ și } x \notin N' \}.$$

Mulțimea  $\mathfrak{S}$ , ordonată prin incluziune, este inductivă, deci, prin lema lui Zorn, admite un element maximal  $P$ . Arătăm că  $P$  este ireductibil în  $M$ . Presupunem că  $P = U \cap V$  cu  $U, V \leq M$  și  $P \subsetneq U$ ,  $P \subsetneq V$ . Cum  $x \notin P$ , avem  $x \notin U$  sau  $x \notin V$ ; să spunem  $x \notin U$ . Atunci  $U \in \mathfrak{S}$  și  $P \subsetneq U$ , ceea ce contrazice maximalitatea lui  $P$ . Rezultă că  $P$  este ireductibil.  $\square$

**Corolar 3.4.** *Fie  $M$  un  $R$ -modul și  $N$  un submodule propriu al lui  $M$ . Atunci  $N$  este intersecție de submodule ireductibile în  $M$ .*

*Demonstrație.* Rezultă imediat din propoziția anterioară.  $\square$

**Corolar 3.5.** *Let  $M$  be an  $R$ -module and  $N$  a proper submodule of  $M$ . Then  $N$  is the intersection of irreducible submodules of  $M$ .*

*Demonstrație.* This follows immediately from Proposition 3.3, applied to each  $x \in M \setminus N$ .  $\square$

*Demonstrație.* 1) Rezultă imediat din 3.1.

2) Fie  $M \trianglelefteq E$  o extensie esențială a lui  $M$ . Dacă  $E_1, E_2$  sunt submodule nenule ale lui  $E$ , atunci  $M \cap E_1 \neq 0$  și  $M \cap E_2 \neq 0$ , de unde rezultă că

$$(M \cap E_1) \cap (M \cap E_2) \neq 0$$

și deci  $E_1 \cap E_2 \neq 0$ , adică  $E$  este coireductibil.  $\square$

**Lemă 3.6.** Fie  $M$  un  $R$ -modul și  $(M_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$  o familie de submodule independente. Dacă  $N$  este un submodule al lui  $M$  astfel încât

$$N \cap \left( \sum_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha \right) \neq 0,$$

există un submodule nenul într-un  $M_\alpha$  izomorf cu un submodule din  $N$ .

*Demonstrație.* Dacă  $\text{Card } \Lambda = 1$ , afirmația este evidentă.

Dacă  $\text{Card } \Lambda = 2$ , punem  $P = N \cap (M_1 + M_2)$ . Dacă  $N \cap M_1 = 0$ , atunci  $P \cong (P + M_1)/M_1$  și

$$(P + M_1)/M_1 \leq (M_1 + M_2)/M_1 \cong M_2.$$

Deci  $P$  este izomorf cu un submodule din  $M_2$ . Dacă  $\Lambda$  este mulțime finită, procedând prin inducție, demonstrația se reduce la cazul precedent.

Dacă  $\Lambda$  este infinită, considerăm  $x \in N \cap (\sum_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha)$ ,  $x \neq 0$ . Atunci există  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Lambda$  astfel încât

$$xR \cap (M_{\alpha_1} + M_{\alpha_2} + \dots + M_{\alpha_n}) \neq 0$$

și ne reducem la cazul în care  $\Lambda$  este finită. □

*Observație 3.7.* Fie  $M$  un  $R$ -modul drept și  $\Omega$  mulțimea de submodule coireductibile din  $M$ . Este posibil ca  $\Omega = \emptyset$ . Fie

$$\mathcal{S} = \{ \Omega' \subseteq \Omega \mid \sum_{N \in \Omega'} N \text{ este directă} \}.$$

Perechea  $(\mathcal{S}, \subseteq)$  este inductivă și, din lema lui Zorn,  $\mathcal{S}$  are un element maximal  $\Omega_0$ . Punem  $S = \bigoplus_{N \in \Omega_0} N$ . Spunem că  $S$  este o sumă directă maximală de submodule coireductibile din  $M$ .

**Propoziție 3.8.** Fie  $M$  un  $R$ -modul și  $S$  o sumă directă maximală de submodule coireductibile din  $M$ . Dacă  $N$  este un submodule nenul al lui  $M$ , atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1.  $S \cap N \neq 0$ ;
2.  $N$  conține un submodule coireductibil.

*Demonstrație.* Implicația  $(1) \Rightarrow (2)$  rezultă din lema 3.6.

Implicația  $(2) \Rightarrow (1)$  rezultă din maximalitatea lui  $S$ . □

**Teoremă 3.9.** Fie  $M$  un  $R$ -modul și  $S$  o sumă directă maximală de submodule coireductibile din  $M$ . Există un submodule  $K$  maximal printre submodulele lui  $M$  care nu conțin nici un coireductibil, cu proprietățile:

1.  $S + K$  este directă;
2.  $(S \oplus K) \leq M$ .

*Demonstrație.* 1. Fie

$$\mathcal{S} = \{ L \leq M \mid \forall L' \leq L, L' \text{ nu este coireductibil} \}.$$

Avem  $\mathcal{S} \neq \emptyset$  deoarece  $0 \in \mathcal{S}$  și  $\mathcal{S}$  este inductivă. Din lema lui Zorn,  $\mathcal{S}$  are un element maximal  $K$ . Din Propoziția 3.8 rezultă că  $S \cap K = 0$ .

2. Presupunem că  $N \cap (S \oplus K) = 0$ , unde  $N$  este un submodul nenul al lui  $M$ . Atunci  $(N + K) \cap S = 0$  și din Propoziția 3.8 rezultă că  $N + K$  nu conține nici un submodul coireductibil, ceea ce contrazice maximalitatea lui  $K$ . Obținem că  $(S \oplus K) \trianglelefteq M$ .

□

**Definiție 3.10.** Fie  $M$  un  $R$ -modul. O intersecție finită de submodule

$$\bigcap_{i \in I} N_i \quad (I \text{ finit})$$

se numește *redușă* dacă, oricare ar fi  $i \in I$ , avem

$$\bigcap_{i \in I} N_i \neq \bigcap_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} N_j.$$

Este clar că, dacă avem o intersecție finită  $N = \bigcap_{i \in I} N_i$  de submodule ireductibile, ea poate fi adusă întotdeauna la o intersecție redusă de submodule ireductibile.

**Teoremă 3.11** (Teorema (Kuros-Ore)). *Fie  $M$  un  $R$ -modul și  $N$  un submodul al lui  $M$ . Presupunem că avem intersecțiile finite reduse pentru  $N$ :*

$$N = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_m = L_1 \cap L_2 \cap \cdots \cap L_n,$$

unde  $N_i$  și  $L_j$  sunt submodule ireductibile din  $M$ . Atunci  $m = n$ .

*Demonstrație.* Notăm  $N'_i = N_1 \cap \cdots \cap N_{i-1} \cap N_{i+1} \cap \cdots \cap N_m$ . Avem că  $N \subseteq N'_i$  și  $N = N_i \cap N'_i$ . Fie  $P_j = N_i \cap L_j$ ,  $\forall j = 1, \dots, n$ . Atunci  $N \subseteq P_j \subseteq N'_i$  și  $P_j \subseteq L_j$ , de unde rezultă că

$$N \subseteq \bigcap_{j=1}^n P_j \subseteq \bigcap_{j=1}^n L_j = N,$$

și deci  $\bigcap_{j=1}^n P_j = N$ .

Cum  $N_i$  este ireductibil în  $M$ , rezultă că  $N_i$  este ireductibil în  $N_i + N'_i$ , și deci

$$\frac{N'_i}{N'_i \cap N_i} \cong \frac{N_i + N'_i}{N_i}$$

este coirreductibil, ceea ce arată că  $N$  este ireductibil în  $N'_i$ .

Atunci, din egalitatea  $N = \bigcap_{j=1}^n P_j$ , există un  $j$  astfel încât  $N = P_j$ . Deci  $N = N_i \cap L_j$ , adică

$$N = N_i \cap \cdots \cap N_{i-1} \cap L_j \cap N_{i+1} \cap \cdots \cap N_m.$$



Notăm  $I = \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $J = \{1, 2, \dots, n\}$  și fie  $i_1 \in I$ . Există  $j_1 \in J$  astfel încât

$$N = L_{j_1} \cap \left( \bigcap_{i \neq i_1} N_i \right).$$

Deoarece intersecția este finită, putem să o reducem: din reducerea succesivă și prin faptul că nu dispare niciun  $L_{j_k}$ , obținem un șir strict descrescător

$$J \supseteq J_1 \supseteq J_2 \supseteq \dots \supseteq J_r,$$

cu cel mult  $r \leq m$  elemente, astfel încât pentru un anumit set final  $J' \subseteq J$ ,

$$N = \bigcap_{j \in J'} L_j.$$

Este clar că  $r \leq m$ . Cum intersecția  $N = L_1 \cap \dots \cap L_n$  este redusă, avem  $J' = J$ . Pe de altă parte,  $J'$  are cel mult  $r$  elemente, deci  $n \leq r \leq m$ , iar simetric  $m \leq n$ .  $\square$

**Teoremă 3.12.** Fie  $M$  un  $R$ -modul și  $(N_i)_{i=1}^m$  și  $(L_j)_{j=1}^n$  două familii independente de submodule coirreductibile astfel încât

$$\bigoplus_{i=1}^m N_i \subseteq M \quad \text{și} \quad \bigoplus_{j=1}^n L_j \subseteq M$$

sunt esențiale în  $M$ . Atunci  $m = n$ .

*Demonstrație.* Notăm  $N'_k = \bigoplus_{i \neq k} N_i$ , pentru fiecare  $k = 1, \dots, m$ . Atunci  $N_k \cap N'_k = 0$ .

Se verifică ușor că mulțimea

$$\mathfrak{S}_k = \{P \leq M \mid N_k \cap P = 0 \text{ și } N_k \subseteq P\}$$

este inductivă. Din lema lui Zorn, are un element maximal  $P_k$ . Dacă  $Q, Q' \leq M$  sunt astfel încât  $P_k \subseteq Q \subseteq Q'$ , atunci  $N_k \cap Q \neq 0$  și  $N_k \cap Q' \neq 0$ , iar ireductibilitatea lui  $N_k$  arată că  $P_k = Q = Q'$ . Deci  $P_k$  este coirreductibil pentru fiecare  $k$ .

Fie  $k \in \{1, \dots, m\}$ . Atunci

$$N = \bigoplus_{k=1}^m N_k = N_k \oplus N'_k.$$

Aplicând legea distributivității module, obținem

$$N \cap P_k = (N_k \oplus N'_k) \cap P_k = N_k + (N'_k \cap P_k),$$

deci  $N \cap P_k = N_k$ . Rezultă că

$$N \cap \bigcap_{k=1}^m P_k = \bigcap_{k=1}^m (N \cap P_k) = \bigcap_{k=1}^m N_k = 0.$$

Dar  $N \cap M = 0$ , deci  $\bigcap_{k=1}^m P_k = 0$ .

Cum  $N_i = \bigcap_{k \neq i} P_k$ , avem că fiecare intersecție este redusă.

Analog, pentru familia  $(L_j)$ , obținem submodule ireductibile  $(Q_j)$  astfel încât  $\bigcap_{j=1}^n Q_j = 0$ , reducând intersecția.

Din teorema Kuros–Ore, rezultă  $m = n$ .  $\square$

**Definiție 3.13.** Spunem că un  $R$ -modul  $M$  are *dimensiune coireductibilă finită* dacă există o familie finită independentă  $(N_i)_{i=1}^n$  de submodule coireductibile din  $M$  astfel încât

$$\bigoplus_{i=1}^n N_i \leq M.$$

În acest caz numărul  $n$  se numește *dimensiunea coireductibilă* a lui  $M$  și scriem  $\dim M = n$ .

**Teoremă 3.14.** Fie  $M$  un  $R$ -modul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1.  $M$  are dimensiune coireductibilă finită.
2.  $M$  satisface condiția lanțurilor ascendente pentru sume directe.

*Demonstrație.* (2)  $\Rightarrow$  (1). Fie  $\mathcal{S}'$  și  $\mathcal{S}$  două familii finite de submodule independente din  $M$ . Spunem că  $\mathcal{S}'$  este o *rafinare* a lui  $\mathcal{S}$  dacă oricare submodul din  $\mathcal{S}'$  este conținut într-un submodul din  $\mathcal{S}$ . Se verifică ușor că relația de rafinare este o relație de ordine pe mulțimea familiilor de submodule ale lui  $M$ . Cum  $M$  satisface (2), există o familie  $\mathcal{S}_0$  de submodule independente ale lui  $M$ , maximală în raport cu relația de rafinare.

Fie  $N \in \mathcal{S}_0$ . Dacă  $N$  nu este coireductibil, există două submodule nenule  $P, Q \leq N$  astfel încât  $P \cap Q = 0$ . Este clar că din  $\mathcal{S}_0$  se obține o rafinare proprie a lui  $\mathcal{S}_0$ , contradicție. Rezultă că orice submodul din  $\mathcal{S}_0$  este coireductibil, deci  $M$  conține un submodul coireductibil. Dacă  $L$  este un submodul nenul al lui  $M$ , atunci și  $L$  satisface condiția (2) și, prin același raționament,  $L$  conține un submodul coireductibil.

Fie acum

$$S = \bigoplus_{i \in I} N_i$$

o sumă directă maximală de submodule coireductibile din  $M$  și  $N$  un submodul nenul al lui  $M$ . Cum  $M$  satisface condiția lanțurilor ascendente pentru sume directe, rezultă că mulțimea  $I$  este finită. Din Propoziția 3.8 rezultă că  $S \cap N \neq 0$ , ceea ce arată că  $S \leq M$ . Prin definiție,  $M$  are dimensiune coireductibilă finită.

(1)  $\Rightarrow$  (2). Fie

$$S = \bigoplus_{i=1}^n N_i$$

o sumă directă de submodule coireductibile astfel încât  $S \leq M$ . Dacă  $N$  este un submodul nenul al lui  $M$ , atunci  $S \cap N \neq 0$ , iar din Lema 3.6 rezultă că  $N$  conține un submodul coireductibil.

Fie  $(L_j)_{j=1}^m$  o familie independentă de submodule ale lui  $M$ . Din paragraful precedent rezultă că fiecare  $L_j$  conține un submodul coireductibil  $P_j$ . Evident, familia  $(P_j)_{j=1}^m$  este independentă. Din Teorema 3.12 obținem că  $m \leq n$ . Aceasta arată că orice familie independentă de submodule poate fi extinsă numai până la o familie finită, ceea ce este echivalent cu condiția lanțurilor ascendente pentru sume directe.  $\square$

*Observație 3.15.* Fie  $M$  un  $R$ -modul. Atunci:

1. Dacă  $N \leq M$ , atunci  $M$  are dimensiune coireductibilă finită dacă și numai dacă  $N$  are dimensiune coireductibilă finită și, în acest caz,  $\dim M = \dim N$ .
2. Dacă  $M = \bigoplus_{i=1}^n N_i$ , atunci  $M$  are dimensiune coireductibilă finită dacă și numai dacă fiecare  $N_i$  are dimensiune coireductibilă finită pentru orice  $i = 1, \dots, n$ .  
În plus avem

$$\dim M = \sum_{i=1}^n \dim N_i.$$



# Capitolul 4

## Domenii Ore și inele Goldie

**Definiție 4.1.** Un domeniu de integritate  $D$  se numește *domeniu Ore la dreapta* (respectiv la stânga) dacă  $aD \cap bD \neq 0$  (respectiv  $Da \cap Db \neq 0$ ) oricare ar fi  $a, b \in D \setminus \{0\}$ .

**Propoziție 4.2.** Fie  $D$  un domeniu de integritate. Atunci  $D$  este un domeniu Ore la dreapta dacă și numai dacă  $D$  conține un ideal drept coireductibil. În particular, această condiție este verificată când  $D$  satisface condiția lanțurilor ascendente pentru sume directe de ideale drepte.

*Demonstrație.* „ $\Rightarrow$ ” Dacă  $D$  este un domeniu Ore la dreapta atunci  $D_D$  este coireductibil.

„ $\Leftarrow$ ” Fie  $X$  un ideal drept coireductibil al lui  $D$  și  $x \in X \setminus \{0\}$ . Aplicația

$$\varphi_x : D_D \longrightarrow X, \quad \varphi_x(a) = xa$$

este un morfism injectiv de  $D$ -module drepte. Atunci  $D_D$  este coireductibil și deci  $D$  este domeniu Ore la dreapta.  $\square$

**Exemplu 4.3.** Fie  $K$  un corp comutativ și  $y$  o nedeterminată. Considerăm  $K(y)$  corpul de fracții al inelului de polinoame  $K[y]$ . Dacă  $x$  este o altă nedeterminată, considerăm  $K(y)[x]$  mulțimea polinoamelor cu coeficienți în  $K(y)$  și în nedeterminata  $x$ . Pe această mulțime definim două operații: operația de adunare fiind adunarea obișnuită a polinoamelor, iar operația de înmulțire în  $K(y)[x]$  o definim prin relația de comutare

$$xf(y) = f(y^2)x, \quad f \in K(y).$$

Se verifică imediat că mulțimea  $K(y)[x]$ , cu cele două operații, este un inel unitar. Notăm  $A = K(y)[x]$ .  $A$  este un domeniu de integritate necomutativ.

Orice element din  $A$  poate fi pus sub formă unică:

$$P(x) = f_n(y)x^n + f_{n-1}(y)x^{n-1} + \cdots + f_1(y)x + f_0(y),$$

unde  $n$  este un număr natural și  $f_0(y), f_1(y), \dots, f_n(y) \in K(y)$ ,  $f_n(y) \neq 0$ . Vom nota  $\deg P(x) = n$ .

Observăm că, dacă  $P(x), Q(x) \in A$  cu  $Q(x) \neq 0$ , există două elemente  $S(x), R(x) \in A$  astfel încât

$$P(x) = S(x)Q(x) + R(x) \tag{*}$$

cu  $R(x) = 0$  sau  $\deg R(x) < \deg Q(x)$ . Din relațiile (\*) rezultă că  $A$  este inel principal la stânga. Rezultă că  $A$  satisface condiția lanțurilor ascendente pentru sume directe de ideale la stânga și deci  $A$  este domeniu Ore la stânga.

Să arătăm egalitatea  $xA \cap yA = 0$ . Fie  $\alpha \in xA \cap yA$ . Atunci

$$\alpha = x(f_n(y)x^n + \cdots + f_0(y)) = yx(g_m(y)x^m + \cdots + g_0(y)),$$

de unde

$$f_n(y^2)x^{n+1} + \cdots + f_0(y^2)x = y(g_m(y^2)x^{m+1} + \cdots + g_0(y^2)x)$$

și deci  $m = n$ . Rezultă

$$f_n(y^2) = yg_m(y^2), \dots, f_0(y^2) = yg_0(y^2),$$

ceea ce are loc dacă și numai dacă  $f_n(y) = \cdots = f_1(y) = f_0(y) = 0$  și deci  $\alpha = 0$ . Rezultă că  $A$  nu este domeniu Ore la dreapta.

### INELE GOLDIE

**Definiție 4.4.** Un ideal drept (respectiv stâng)  $I$  se numește *ideal anulador la dreapta* (respectiv la stânga) dacă există o submulțime nevidă  $X$  a lui  $R$  astfel încât  $I = \text{ann}_r(X)$  (respectiv  $I = \text{ann}_l(X)$ ).

Un inel  $R$  se numește *inel Goldie la dreapta* dacă  $R$  satisface condiția lanțurilor ascendente pentru ideale anulatori la dreapta și nu există în  $R$  o sumă directă infinită de ideale drepte nenule.

#### Exemplu 4.5.

1. Dacă  $R$  este inel noetherian la dreapta, atunci  $R$  este inel Goldie la dreapta. În particular,  $\mathbb{Z}$  este inel Goldie.
2. Dacă  $R$  este un domeniu de integritate, atunci  $R$  este inel Goldie la dreapta dacă și numai dacă  $R$  este domeniu Ore la dreapta.
3. Din exemplul 4.3 rezultă că există inele Goldie la stânga care nu sunt Goldie la dreapta.

**Propoziție 4.6.** Fie  $R$  un inel. Atunci  $R$  verifică condiția lanțurilor ascendente pentru ideale anulatori la dreapta (respectiv la stânga) dacă și numai dacă  $R$  verifică condiția lanțurilor descendente pentru ideale anulatori la stânga (respectiv la dreapta).

*Demonstrație.* “ $\Rightarrow$ ” Fie  $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$  un șir descendent de ideale anulatori la stânga. Pentru orice  $j \geq 1$  există o mulțime nevidă  $X_j \subseteq R$  astfel încât  $I_j = \text{ann}_l(X_j)$ .

Atunci obținem șirul ascendent de ideale anulatori la dreapta

$$\text{ann}_r(I_1) \subseteq \text{ann}_r(I_2) \subseteq \cdots \subseteq \text{ann}_r(I_n) \subseteq \cdots$$

și deci există  $m \geq 1$  astfel încât  $\text{ann}_r(I_m) = \text{ann}_r(I_{m+k})$  pentru orice  $k \geq 1$ . Rezultă că

$$\text{ann}_l(\text{ann}_r(I_m)) = \text{ann}_l(\text{ann}_r(I_{m+k})) \quad \text{pentru orice } k \geq 1,$$

adică  $I_m = I_{m+k}$  pentru orice  $k \geq 1$ .

Folosind relațiile  $\text{ann}_l(\text{ann}_r(\text{ann}_l(X))) = \text{ann}_l(X)$  și  $\text{ann}_r(Y) \subseteq \text{ann}_r(X)$  dacă  $X \subseteq Y$ , implicația “ $\Leftarrow$ ” se demonstrează analog.  $\square$

**Propoziție 4.7.** *Fie  $R$  un inel semiprim care satisface condiția lanțurilor ascendente pentru ideale anulatori la dreapta. Dacă  $I$  și  $J$  sunt ideale drepte astfel încât  $I \subseteq J$ , atunci există un element  $b \in R$  astfel încât  $bJ \neq 0$  și  $bJ \cap I = 0$ .*

*Demonstrație.* Din lema precedentă există un element minimal  $a$  în mulțimea idealelor anulatori la stânga astfel încât  $\text{ann}_\ell(J) \subseteq \text{ann}_\ell(I)$ . Atunci  $aJ \neq 0$ , iar cum  $R$  este inel semiprim, obținem  $aJ \cdot aJ \neq 0$  și deci există  $b = xa$  cu  $x \in J$ ,  $a \in aJ$  astfel încât  $xaJ \neq 0$ . Evident,  $bJ \neq 0$ .

Rămâne să arătăm că  $bJ \cap I = 0$ . Fie  $\lambda \in bJ \cap I$ , deci  $\lambda = b\mu = xa\mu \in I$  pentru un  $\mu \in J$ . Cum  $\text{ann}_\ell(J) \subseteq \text{ann}_\ell(\lambda)$ , obținem

$$\text{ann}_\ell(J) \subseteq \text{ann}_\ell(\lambda) \subseteq \text{ann}_\ell(\mu).$$

Deoarece  $a \in aJ \subseteq aR$ , avem

$$xa \in a \quad \text{și deci} \quad xaJ \subseteq aJ. \quad (4.1)$$

Pe de altă parte,  $xaJ \subseteq I$ , iar  $\lambda \in I$  și  $a \subseteq \text{ann}_r(I)$ , astfel încât

$$a \subseteq \text{ann}_\ell(\mu). \quad (4.2)$$

Dar cum  $xaJ \neq 0$ , avem

$$a \not\subseteq \text{ann}_\ell(J). \quad (4.3)$$

Din (4.1), (4.2) și (4.3) obținem că  $\text{ann}_\ell(J) \subseteq \text{ann}_\ell(\mu) \cap a$ . Dacă  $\lambda \neq 0$ , atunci  $xa\mu \notin \text{ann}_\ell(\mu)$  și, cum  $xa \in a$ , rezultă că  $xa\mu \neq 0$ , ceea ce contrazice alegerea lui  $a$ . Deci  $\lambda = 0$ , și atunci  $bJ \cap I = 0$ .  $\square$

**Corolar 4.8.** *Dacă  $R$  este un inel Goldie la dreapta semiprim, atunci  $R$  satisface condiția lanțurilor descendente pentru ideale anulatori la dreapta.*

*Demonstrație.* Presupunem că există un șir strict descrescător de ideale anulatori la dreapta

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$$

Atunci pentru orice  $n \geq 1$  avem  $\text{ann}_\ell(I_n) \neq \text{ann}_\ell(I_{n+1})$ . Din Propoziția 4.7 rezultă că pentru orice  $n \geq 1$  există un ideal drept  $K_n$  astfel încât  $K_n \subseteq I_n$  și  $K_n \cap I_{n+1} \neq 0$ . Atunci suma directă  $\sum_{n \geq 1} K_n$  este o sumă directă infinită de ideale drepte nenule, în contradicție cu faptul că  $R$  este Goldie la dreapta.  $\square$

**Propoziție 4.9.** *Fie  $R$  un inel semiprim care satisface condiția lanțurilor ascendente pentru ideale anulatori la dreapta. Dacă  $x, y \in R$  sunt astfel încât  $xR$  și  $yR$  sunt esențiale în  $R_R$ , atunci  $xyR$  este esențial.*

*Demonstrație.* Fie  $I \leq R_R$  cu  $I \neq 0$ . Notăm

$$J = \{I : x\} = \{a \in R \mid xa \in I\}.$$

Atunci  $J$  este un ideal drept al lui  $R$ , iar  $xJ = xR \cap I \neq 0$  deoarece  $xR \leq R_R$ . Cum  $\text{ann}_r(x) \subseteq J$  și  $xJ \neq 0$  iar  $\text{ann}_\ell(x) = 0$ , obținem

$$\text{ann}_\ell(J) \subseteq \text{ann}_\ell(\text{ann}_r(x)).$$

Din Propoziția 4.7 rezultă că există un ideal drept  $K \neq 0$  astfel încât  $K \subseteq J$  și  $K \cap \text{ann}_r(x) = 0$ .

Notăm apoi

$$L = \{K : y\} = \{a \in R \mid ya \in K\}.$$

Deoarece  $yR \trianglelefteq R_R$ , avem  $yL = yR \cap K \neq 0$ . Dacă  $xyL = 0$ , atunci  $yL \subseteq \text{ann}_r(x)$  și deci  $yL \subseteq \text{ann}_r(x) \cap K = 0$ , contradicție. Prin urmare  $xyL \neq 0$ .

Cum  $xyL \subseteq xK \subseteq xJ \subseteq xR \cap I$ , rezultă că  $0 \neq xyL \subseteq xyR \cap I$ , ceea ce arată că  $xyR \trianglelefteq R_R$ .  $\square$

**Propoziție 4.10.** *Fie  $R$  un inel care verifică condiția lanțurilor ascendente pentru ideale anulatori drepte. Atunci, pentru orice  $a \in R$  există un număr  $k \geq 0$  astfel încât*

$$\text{ann}_r(a^n) = \text{ann}_r(a^m) \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{ și } m \geq k.$$

*Demonstrație.* Avem lanțul ascendent de ideale anulatori la dreapta:

$$\text{ann}_r(a) \subseteq \text{ann}_r(a^2) \subseteq \cdots \subseteq \text{ann}_r(a^n) \subseteq \cdots$$

Fie  $k \geq 0$  astfel încât  $\text{ann}_r(a^k) = \text{ann}_r(a^m)$  pentru orice  $m \geq k$ . Dacă  $\lambda \in \text{ann}_r(a^n) \cap a^m R$ , atunci  $a^n \lambda = 0$  și  $\lambda = a^m \mu$ , de unde  $a^{m+n} \mu = 0$ . Cum  $m + n \geq k$ , obținem că  $\mu \in \text{ann}_r(a^k)$  și deci  $a^k \mu = 0$ . Cum  $m \geq k$ , putem scrie  $\lambda = a^{m-k} a^k \mu = 0$  și deci

$$\text{ann}_r(a^n) \cap a^m R = 0.$$

$\square$

**Corolar 4.11.** *Suntem în condițiile propoziției 4.10. Dacă  $xR \trianglelefteq R_R$ , atunci  $x$  este element regulat în  $R$ .*

*Demonstrație.* Dacă  $\text{ann}_r(x) \neq 0$ , atunci  $0 = \text{ann}_r(R) \neq \text{ann}_r(xR)$  și deci există un ideal drept  $I \neq 0$  astfel încât  $I \cap xR = 0$ , contradicție. Deci  $\text{ann}_r(x) = 0$ .

Din Propoziția 4.9 rezultă că  $x^n R \trianglelefteq R_R$  pentru orice  $n \geq 1$ . Aplicând Propoziția 4.10, găsim  $k \geq 0$  astfel încât  $\text{ann}_r(x^n) \cap x^m R = 0$  pentru orice  $m \geq k$ . În special  $\text{ann}_r(x) = 0$ , deci  $x$  este element regulat în  $R$ .  $\square$

**Corolar 4.12.** *Fie  $R$  un inel Goldie la dreapta și semiprime. Dacă  $\text{ann}_r(x) = 0$ , unde  $x \in R$ , atunci  $xR \trianglelefteq R_R$  și  $x$  este regulat.*

*Demonstrație.* Fie  $I$  un ideal drept nenul al lui  $R$ . Presupunem că  $I \cap xR = 0$ . Atunci suma

$$\sum_{n \geq 1} x^n I$$

este directă. Într-adevăr,  $x^p I \cap \sum_{n \neq p} x^n I$  este egală cu  $xI \cap x^p I$ , dacă  $p = 1$ . Dacă  $y \in xI \cap x^p I$ , atunci  $y = x\lambda = x^2\mu$ , unde  $\lambda, \mu \in I$ . Dar atunci  $\lambda - x\mu \in \text{ann}_r(x)$  și deci  $\lambda = x\mu$ , de unde obținem că  $\lambda \in I \cap xR = 0$ . Rezultă că  $\lambda = 0$  și atunci  $y = 0$ . Așadar  $xI \cap x^2 I = 0$  și cu atât mai mult  $xI \cap x^p I = 0$  dacă  $p \neq 1$ . Deci  $x^p I \cap \sum_{n \neq p} x^n I = 0$  și prin urmare suma  $\sum_{n \geq 1} x^n I$  este directă, contradicție.

Rezultă că  $xR \trianglelefteq R_R$ . Din Corolarul 4.11 deducem că  $x$  este element regulat în  $R$ .  $\square$



**Propoziție 4.13.** *Fie  $R$  un inel Goldie la dreapta și semiprime. Atunci:*

- (a) *Orice ideal bilateral al lui  $R$  anulator la dreapta conține un ideal bilateral anulator la dreapta minimal.*
- (b) *Există o sumă directă finită de ideale bilaterale nenule anulatoare la dreapta minimale ale lui  $R$ , care este esențială în  $R$ .*

*Demonstrație.* (a) Rezultă din Corolarul 4.8.

(b) Fie  $I = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n$  o sumă directă maximală, unde  $I_1, \dots, I_n$  sunt ideale nenule bilaterale anulatoare la dreapta minimale ale lui  $R$ . Fie  $K \leq R_R$ ,  $K \neq 0$  astfel încât  $I \cap K = 0$ . Cum  $KI \subseteq I \cap K = 0$ , rezultă că  $K \subseteq \text{ann}_r(I)$ . Cum  $R$  este semiprime, avem  $I \cap \text{ann}_r(I) = 0$ , de unde  $I \text{ann}_r(I) = 0$ , deci  $\text{ann}_l(I) \subseteq \text{ann}_r(I)$  și în special  $\text{ann}_r(I) \neq 0$ . Cum  $R$  este semiprim, rezultă și că  $I \cap \text{ann}_l(I) = 0$ , unde  $\text{ann}_l(I)$  este un ideal bilateral. Din (a) există un ideal bilateral nenul  $J$  anulator la dreapta și minimal astfel încât  $J \subseteq \text{ann}_r(I)$  și  $J \cap I = 0$ , ceea ce contrazice alegerea lui  $I$  ca sumă directă maximală. Prin urmare  $I \trianglelefteq R$ .  $\square$

**Propoziție 4.14.** *Fie  $R$  un inel Goldie la dreapta și prim. Dacă  $I$  este un ideal drept esențial în  $R$ , atunci  $I$  conține un element regulat al lui  $R$ .*

*Demonstrație.* Fie  $a \in I$  astfel încât  $\text{ann}_r(a)$  este minimal în mulțimea  $\{\text{ann}_r(x) \mid x \in I\}$ . Fie  $J \leq R_R$ ,  $J \neq 0$  pentru care  $aR \cap J = 0$ . Cum  $I \trianglelefteq R_R$ , avem  $I \cap J \neq 0$ ; putem presupune că  $J$  este un ideal drept nenul al lui  $R$  inclus în  $I$  și pentru care  $aR \cap J = 0$ .

Fie  $x \in J$ . Dacă  $\lambda \in \text{ann}_r(a+x)$ , atunci  $a\lambda + x\lambda = 0$  și deci  $x\lambda = -a\lambda \in aR \cap J$ , de unde  $x\lambda = 0$  și apoi  $a\lambda = 0$ . Așadar  $\lambda \in \text{ann}_r(a) \cap \text{ann}_r(x)$ . Cum incluziunea

$$\text{ann}_r(a) \cap \text{ann}_r(x) \subseteq \text{ann}_r(a+x)$$

este evidentă, obținem  $\text{ann}_r(a+x) = \text{ann}_r(a) \cap \text{ann}_r(x)$ . Cum  $\text{ann}_r(a)$  este minimal, rezultă că  $\text{ann}_r(a) \subseteq \text{ann}_r(x)$  și deci  $x \text{ann}_r(a) = 0$ , de unde  $J \text{ann}_r(a) = 0$ . Cum  $R$  este prim, avem  $\text{ann}_r(a) = 0$ .

Din Corolarul 4.12 rezultă că  $J = 0$ , contradicție. Deci trebuie ca  $aR \trianglelefteq R_R$ , iar din Corolarul 4.11 obținem că  $a$  este regulat în  $R$ .  $\square$



# Capitolul 5

## Teorema Osofsky–Smith

**Definiție 5.1.** Un  $R$ -modul  $M$  se numește *CS-modul* dacă orice submodul complement al lui  $M$  este sumand direct în  $M$ . Modulul  $M$  se numește *complet CS* dacă  $M/N$  este CS-modul, pentru orice  $N \leq M$ .

*Observație 5.2.* Din 2.2.2 rezultă că orice modul injectiv este CS-modul.

**Propoziție 5.3.** Pentru un  $R$ -modul  $M$  următoarele afirmații sunt echivalente:

1.  $M$  este CS-modul.
2. Orice extensie esențială maximală a unui submodul al lui  $M$  este sumand direct în  $M$ .
3. Orice submodul al lui  $M$  este esențial într-un sumand direct al lui  $M$ .

*Demonstrație.* (1)  $\Rightarrow$  (2) Fie  $N$  un submodul al lui  $M$  și  $Q$  o extensie esențială maximală a lui  $N$  în  $M$  (propoziția 1.13). Atunci  $Q$  este submodul închis și din 1.15 rezultă că  $Q$  este sumand direct în  $M$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3) este evidentă din propoziția 1.13.

(3)  $\Rightarrow$  (1) Fie  $K$  un submodul complement al lui  $M$ . Există un sumand direct  $Q$  în  $M$  astfel încât  $K \leq Q$ . Cum  $K$  este submodul închis, rezultă  $K = Q$  și deci  $K$  este sumand direct în  $M$ .  $\square$

**Propoziție 5.4.** Orice modul quasi-injectiv este CS-modul.

*Demonstrație.* Fie  $M$  un  $R$ -modul quasi-injectiv și  $N$  un submodul al său. Atunci există  $E_2 \leq E(M)$  astfel încât  $E(M) = E_1 \oplus E_2$ , unde  $E_1 = E(N)$ . Fie  $\pi_i : E(M) \rightarrow E_i$ ,  $i = 1, 2$ , proiecțiile canonice. Cum  $\pi_i(M) \leq M$ , pentru orice  $i = 1, 2$  (corolarul 2.2.7), rezultă că

$$M = (M \cap E_1) \oplus (M \cap E_2).$$

Evident,  $N \leq (M \cap E_1)$  și deci  $N$  este esențial într-un sumand direct al lui  $M$ . Din propoziția de mai sus rezultă că  $M$  este CS-modul.  $\square$

**Lemă 5.5.** Fie  $X$  un CS-modul ciclic cu proprietatea că  $S = \text{soc}(X) \leq X_R$ ,  $S$  nu este finit generat, dar orice submodul finit generat al lui  $S$  este sumand direct al lui  $X$ . Dacă orice submodul ciclic al lui  $X$  este CS-modul, atunci  $X/S$  nu este CS-modul.

*Demonstrație.* Presupunem că  $X/S$  este CS-modul. Cum  $S$  nu este finit generat, putem scrie

$$S = \bigoplus_{i \geq 1} S_i,$$

cu  $S_i \leq X$  și  $S_i$  ne-finit generat pentru orice  $i \geq 1$ .

Pentru orice  $i \geq 1$  există un submodul complement  $D_i$  al lui  $X$  astfel încât  $S_i \trianglelefteq D_i$ . Atunci  $D_i$  este sumand direct în  $X$  și deci  $D_i$  este ciclic pentru orice  $i \geq 1$ ; de unde  $S_i \subsetneq D_i$ .

Cum  $X/S$  este CS-modul, există  $\overline{E}$  un sumand direct în  $X$  astfel încât

$$\sum_{i \geq 1} \frac{D_i + S}{S} = \frac{D}{S} \trianglelefteq \overline{E},$$

unde  $D := \bigoplus_{i \geq 1} D_i$ . Fie  $E$  un submodul ciclic al lui  $X$  astfel încât  $\overline{E} = (E + S)/S$ . Obținem că

$$\frac{D}{S} \trianglelefteq \frac{E + S}{S}.$$

Cum  $E \cap S \leq S$  și  $S$  este semisimplu, există  $T \leq S$  astfel încât

$$S = (E \cap S) \oplus T$$

și deci

$$E + S = (E \cap S) \oplus T.$$

Presupunem că există  $i \geq 1$  astfel încât  $D_i \cap E = 0$ . Considerând proiecția canonică  $\pi : E \oplus T \rightarrow T$  avem că  $D_i \cap \ker \pi = 0$ , ceea ce arată că  $\pi|_{D_i}$  este monomorfism și deci  $D_i$  este semisimplu. Dar  $S_i \trianglelefteq D_i$ , ceea ce implică  $S_i = D_i$ , contradicție. Rezultă că  $D_i \cap E \neq 0$  pentru orice  $i \geq 1$  și deci  $S_i \cap E \neq 0$  pentru orice  $i \geq 1$ .

Cum  $S \trianglelefteq X_R$ , există  $V_i$  simplu astfel încât  $V_i \leq S_i \cap E$  pentru orice  $i \geq 1$ . Fie  $V := \bigoplus_{i \geq 1} V_i$ . Modulul  $E$  este CS-modul deoarece  $E$  este ciclic. Există un sumand direct  $L$  al lui  $X$  astfel încât  $V \trianglelefteq L$ . Observăm că  $L$  este ciclic și deci  $V \subsetneq L$ . Fie  $n \geq 1$  și notăm

$$P_n := \left( \bigoplus_{i=1}^n D_i \right) \cap L.$$

Avem

$$P_n \cap S = L \cap \left( \bigoplus_{i=1}^n S_i \right) = V \cap \left( \bigoplus_{i=1}^n S_i \right) = \bigoplus_{i=1}^n V_i,$$

și deci  $P_n \cap S$  este submodul finit generat al lui  $S$ .

Rezultă că  $P_n \cap S$  este sumand direct al lui  $X$ . Dar  $S \trianglelefteq X_R$  și deci

$$P_n := \left( \bigoplus_{i=1}^n D_i \right) \cap L \leq S \quad \text{pentru orice } n \geq 1,$$

ceea ce arată că  $D \cap L \leq S$ .

Atunci, folosind legea distributivității modulare, avem

$$\frac{D}{S} \cap \frac{L+S}{S} = \frac{D \cap (L+S)}{S} = \frac{S + D \cap L}{S} = 0.$$

Cum  $\frac{D}{S} \leq \frac{E+S}{S}$ , rezultă că  $L+S = S$ , adică  $L \leq S$ . Obținem că  $L$  este semisimplu și, cum  $V \leq L$ , rezultă  $V = L$ , contradicție. Deci  $X/S$  nu este CS-modul.  $\square$

**Teoremă 5.6** (Teorema Osofsky–Smith). *Fie  $R$  un inel și  $M$  un  $R$ -modul ciclic astfel încât  $mR$  este complet CS pentru orice  $m \in M$ . Atunci  $M$  este o sumă directă finită de module coireductibile.*

*Demonstratie.* Orice CS-modul indecompozabil este coireductibil și deci este suficient să arătăm că  $M$  este o sumă directă finită de module indecompozabile.

Presupunem că  $M$  nu admite o astfel de scriere. Atunci există

$$M = A_1 \oplus B_1, \quad 0 \neq A_1, B_1 \leq M,$$

unde  $B_1$  nu este o sumă directă de module indecompozabile. Rezultă că putem scrie

$$B_1 = A_2 \oplus B_2, \quad 0 \neq A_2, B_2 \leq B_1,$$

unde  $B_2$  nu este sumă directă de module indecompozabile.

Repetând procedeul, obținem

$$0 \neq A_i, B_i \leq M \quad (i \geq 1)$$

cu

$$M = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n \oplus B_n \quad (n \geq 1)$$

și

$$A_{n+1} \oplus A_{n+2} \oplus \cdots \leq B_n \quad (n \geq 1).$$

Cum fiecare  $A_i$  este ciclic, alegem pentru fiecare  $i \geq 1$  un submodul maximal  $C_i \leq A_i$ . Notăm

$$C := \bigoplus_{i \geq 1} C_i, \quad P := M/C, \quad S := \bigoplus_{i \geq 1} \frac{A_i}{C_i}.$$

Atunci  $S$  este un submodul semisimplu, numărabil generat, al lui  $P$ .

Pentru orice  $n \geq 1$ , aplicând legea distributivității modulare, avem

$$(A_1 \oplus \cdots \oplus A_n \oplus C) \cap (B_n + C) = C + (A_1 \oplus \cdots \oplus A_n) \cap B_n = C + \bigoplus_{k \geq n+1} C_k = C.$$

Prin urmare

$$P = \frac{M}{C} = \frac{A_1 \oplus \cdots \oplus A_n \oplus C}{C} \oplus \frac{B_n + C}{C} \quad \text{pentru orice } n \geq 1.$$

Dacă  $T \leq S$  este un submodul finit generat, există un  $n \geq 1$  astfel încât

$$T = \frac{A_1 \oplus \cdots \oplus A_n + C}{C},$$

de unde rezultă că orice submodul finit generat al lui  $S$  este sumand direct al lui  $P$ .

Fie acum  $X$  un submodul al lui  $P$  astfel încât  $S \trianglelefteq X \leq P$ ,  $X$  este CS-modul și orice submodul finit generat al lui  $S$  este sumand direct în  $X$ . Dacă  $\text{soc}(X)$  este soclul lui  $X$ , atunci  $S \trianglelefteq \text{soc}(X)$  și, cum  $S \trianglelefteq X$ , obținem  $S = \text{soc}(X)$ .

Rezultă că sunt satisfăcute ipotezele lemei precedente și deci  $X/S$  nu este CS-modul, contradicție.  $\square$

**Corolar 5.7.** *Fie  $R$  un inel astfel încât orice  $R$ -modul ciclic este CS-modul. Atunci orice  $R$ -modul ciclic este o sumă directă finită de module coireductibile.*

*Demonstrație.* Fie  $M_R$  un modul ciclic,  $m \in M$  și  $N \leq mR$ . Atunci factorul  $mR/N$  este un modul ciclic și, prin ipoteză, un CS-modul. Aplicând Teorema Osofsky-Smith obținem că  $mR$  (și deci  $M$ ) este o sumă directă finită de module coireductibile.  $\square$

**Corolar 5.8.** *Dacă  $N$  este un  $R$ -modul astfel încât orice modul factor al oricărui submodul ciclic al lui  $N$  este injectiv, atunci  $N$  este semisimplu.*

*Demonstrație.* Fie  $0 \neq x \in N$  și  $C = xR \leq N$ . Prin ipoteză, orice modul factor al unui submodul ciclic al lui  $C$  este injectiv, deci orice submodul ciclic al lui  $C$  este complet CS. Din Teorema Osofsky-Smith rezultă că

$$C = xR = \bigoplus_{i=1}^n U_i$$

pentru anumite submodule coireductibile  $U_i$ .

Cum

$$U_i \cong C / \bigoplus_{j \neq i} U_j,$$

rezultă că fiecare  $U_i$  este injectiv și, prin urmare,  $U_i$  este indecompozabil pentru orice  $i = 1, \dots, n$  (vezi propoziția 3.1).

Fie  $y \in U_i$ . Atunci  $yR \cong yR/0$  este injectiv, adică șirul exact

$$0 \longrightarrow yR \longrightarrow U_i \longrightarrow U_i/yR \longrightarrow 0$$

este scindabil. Din 2.1.15 rezultă că  $yR$  este sumand direct în  $U_i$ , și deci  $yR = U_i$  sau  $yR = 0$  pentru orice  $y \in U_i$ . Obținem că  $U_i$  este simplu și deci  $C = xR$  este semisimplu pentru orice  $x \in N$ , de unde rezultă că  $N$  este semisimplu.  $\square$

**Corolar 5.9** (Osofsky). *Dacă  $R$  este un inel astfel încât orice  $R$ -modul ciclic este injectiv, atunci  $R$  este semisimplu artinian.*

*Demonstrație.* Observând că putem aplica corolarul de mai sus pentru  $N = R$ , rezultă că  $R$  este semisimplu.  $\square$

**Corolar 5.10.** *Fie  $R$  un inel astfel încât orice  $R$ -modul ciclic singular este injectiv. Atunci orice  $R$ -modul singular este semisimplu.*

*Demonstrație.* Fie  $M$  un  $R$ -modul singular. Submodulele și modulele factor ale unui modul singular sunt singulare. În particular, dacă  $x \in M \setminus \{0\}$ , orice modul factor al oricărui submodul ciclic al lui  $xR$  este injectiv. Din Corolarul 5.8 rezultă că  $xR$  este semisimplu pentru orice  $x \in M \setminus \{0\}$ , ceea ce arată că  $M$  este semisimplu.  $\square$

**Lemă 5.11.** *Fie  $S$  un  $R$ -modul simplu. Atunci  $S$  este singular dacă și numai dacă  $S \cdot \text{soc}(R) = 0$ .*

*Demonstrație.* Fie  $M$  un ideal maximal drept al lui  $R$ . Arătăm că  $M \trianglelefteq R_R$  dacă și numai dacă  $\text{soc}(R) \subseteq M$ .

Necesitatea este evidentă dacă ținem cont că

$$\text{soc}(R) = \bigcap_{L \trianglelefteq R} L,$$

unde intersecția este luată peste toate idealele maximale drepte  $L$  ale lui  $R_R$ .

Invers, dacă  $M$  nu este esențial în  $R$ , există  $0 \neq a \in R$  astfel încât  $aR \cap M = 0$ . Folosind maximalitatea lui  $M$ ,  $aR \oplus M = R$ , adică  $aR \cong R/M$ , ceea ce arată că  $aR$  este simplu și deci  $aR \subseteq \text{soc}(R)$ , de unde  $aR \subseteq M$ , contradicție.

Cum  $S$  este un  $R$ -modul simplu singular, pentru orice  $x \in S$ ,  $\text{ann}_R(x)$  este un ideal maximal esențial al lui  $R$  și din observația de mai sus rezultă că  $\text{soc}(R) \subseteq \text{ann}_R(x)$  pentru orice  $x \in S$ , ceea ce este echivalent cu relația  $S \cdot \text{soc}(R) = 0$ .  $\square$

**Corolar 5.12.** *Următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. *Orice  $R$ -modul ciclic singular este injectiv.*
2. *Orice  $R$ -modul singular este injectiv.*

*Demonstrație.* (1)  $\Rightarrow$  (2). Presupunem că  $Z(R_R) \neq 0$  și fie  $a \in Z(R_R) \setminus \{0\}$ . Atunci  $aR$  este un  $R$ -modul ciclic singular, deci injectiv. Rezultă că  $aR$  este sumand direct al lui  $R$ , de unde avem că există  $e = e^2 \in R \setminus \{0\}$  astfel încât  $aR = eR$  și deci  $e \in Z(R_R)$ , contradicție deoarece  $\text{ann}_r(e) \cap eR = 0$ . Obținem că  $R$  este nesar singular și învelișul injectiv al unui modul singular este singular (cf. A. W. Goldie, *Torsion free modules and rings*, J. Algebra (1964), 268–287).

Fie  $M$  un  $R$ -modul singular. Cum  $E(M)$  este  $R$ -modul singular, din Corolarul 5.10 avem că  $E(M)$  este semisimplu. Obținem că  $M$  este sumand direct al lui  $E(M)$  și deci  $M = E(M)$ , adică  $M$  este injectiv.

(2)  $\Rightarrow$  (1). Implicația este evidentă.  $\square$

**Corolar 5.13** (Goodearl). *Dacă orice  $R$ -modul ciclic singular este injectiv, atunci:*

1. *orice  $R/\text{soc}(R)$ -modul simplu este injectiv;*
2.  *$R/\text{soc}(R)$  este noetherian.*

*Demonstrație.* (1) Fie  $S$  un  $R/\text{soc}(R)$ -modul simplu. Cum  $S \cdot \text{soc}(R) = 0$ , din Lemma 5.11 avem că  $S$  este  $R$ -modul simplu singular și deci  $S$  este  $R$ -modul simplu injectiv, de unde rezultă că  $S$  este  $R/\text{soc}(R)$ -modul simplu injectiv.

(2) Fie  $E = \bigoplus_{i=1}^{\infty} S_i$  în  $\text{Mod-}R/\text{soc}(R)$ , unde  $S_i$  este  $R/\text{soc}(R)$ -modul simplu pentru orice  $i \geq 1$ . Atunci  $E = \bigoplus_{i=1}^{\infty} S_i$  în  $\text{Mod-}R$ , cu  $S_i$   $R$ -module simple singulare. Rezultă că  $E$  este  $R$ -modul singular. Din Corolarul 5.12 rezultă că  $E$  este  $R$ -modul injectiv și deci  $E$  este  $R/\text{soc}(R)$ -modul injectiv. Aplicând teorema Matlis–Bass, avem că  $R/\text{soc}(R)$  este noetherian.  $\square$

**Definiție 5.14.** Un inel  $R$  se numește *PCI-inel la dreapta* dacă orice  $R$ -modul drept care nu este izomorf cu  $R_R$  este injectiv.

**Corolar 5.15** (Damiano). *Dacă  $R$  este PCI-inel la dreapta, atunci  $R$  este noetherian la dreapta.*

*Demonstrație.* Din Corolarul 5.13 avem că  $R/\text{soc}(R)$  este noetherian. Presupunem  $\text{soc}(R) \neq 0$ . Fie  $C$  un  $R/\text{soc}(R)$ -modul ciclic. Atunci  $C$  este  $R$ -modul propriu ciclic, deoarece  $C \cdot \text{soc}(R) = 0$ , dar  $R \cdot \text{soc}(R) = \text{soc}(R) \neq 0$ . Rezultă că  $C$  este  $R$ -modul injectiv și deci  $R/\text{soc}(R)$ -modul injectiv. Din teorema lui Osofsky (Corolarul 5.9) rezultă că  $R/\text{soc}(R)$  este un inel semisimplu.

Presupunem că  $\text{soc}(R) \neq R$ . Există  $n \geq 1$  și submodule simple  $W_i \leq R/\text{soc}(R)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , astfel încât

$$R/\text{soc}(R) = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n.$$

Fie  $\hat{y} \in W_n$ . Atunci

$$W_n \cong \hat{y}R/\text{soc}(R) = \frac{yR + \text{soc}(R)}{\text{soc}(R)} \cong \frac{yR}{yR \cap \text{soc}(R)},$$

și deci  $yR/(yR \cap \text{soc}(R))$  este simplu.

Arătăm că  $\text{soc}(yR)$  este de lungime finită. În caz contrar am putea scrie

$$\text{soc}(yR) = S \oplus T \oplus U$$

cu  $S, T, U$  de lungime infinită. Evident,  $yR/S$  este  $R$ -modul ciclic. Cum  $S$  nu este sumand direct al lui  $yR$ , avem  $yR/S \not\cong R$ . Rezultă că  $yR/S$  este injectiv.

Cum  $T \oplus U \cong \text{soc}(yR)/S \leq yR/S$ , există un morfism injectiv

$$0 \longrightarrow T \oplus U \longrightarrow yR/S,$$

și deci putem presupune că  $E(T) \oplus E(U)$  este un submodule al lui  $yR/S$ . Există  $K \leq yR/S$  astfel încât

$$yR/S = E(T) \oplus E(U) \oplus K.$$

Atunci

$$\frac{yR}{\text{soc}(yR)} \cong \frac{yR/S}{(S \oplus T \oplus U)/S} \cong \frac{E(T)}{T} \oplus \frac{E(U)}{U} \oplus K,$$

contradicție cu faptul că  $yR/\text{soc}(yR)$  este simplu.

Obținem astfel că  $\text{soc}(yR)$  este de lungime finită. Cum orice  $R$ -modul simplu este injectiv,  $\text{soc}(yR)$  este  $R$ -modul injectiv și deci sumand direct al lui  $yR$ . Rezultă că există un modul simplu  $U$  astfel încât

$$yR = \text{soc}(yR) \oplus U,$$

și deci  $y \in \text{soc}(R)$ , ceea ce arată că  $R = \text{soc}(R)$ , adică  $R$  este semisimplu.  $\square$



# Capitolul 6

## Inele PCQI

**Definiție 6.1.** Fie  $M$  un  $R$ -modul drept. Spunem că  $M$  este *propriu* dacă  $M \not\cong R_R$ .

Un inel  $R$  se numește *PCQI la dreapta* dacă orice  $R$ -modul drept propriu ciclic este quasi-injectiv.

**Lemă 6.2.** Fie  $R$  un inel PCQI la dreapta. Atunci orice  $R$ -modul drept ciclic are dimensiune coireductibilă finită.

*Demonstrație.* Fie  $X$  un  $R$ -modul drept ciclic.

**Pasul 1.** Arătăm că  $X/E$  are dimensiune coireductibilă finită pentru orice  $E \trianglelefteq X$ .

Fie  $E \trianglelefteq X$ . Demonstrăm că  $X/E$  satisface condițiile teoremei Osofsky–Smith. Pentru aceasta considerăm  $Y/E$  un submodule ciclic al lui  $X/E$  și  $Z/E \leq Y/E$ . Atunci

$$(Y/E)/(Z/E) \cong Y/Z.$$

Cum  $Z \trianglelefteq Y$  (propoziția 1.8), rezultă că  $Y/Z \neq R_R$  (în caz contrar  $Y/Z$  ar fi proiectiv și deci  $Z$  ar fi sumand direct în  $Y$ , contradicție). Dar  $R$  este inel PCQI la dreapta, de unde  $Y/Z$  este quasi-injectiv și deci, din propoziția 5.4,  $Y/Z$  este CS-modul.

Obținem că orice submodule ciclic al lui  $X/E$  este complet CS. Din teorema Osofsky–Smith rezultă că  $X/E$  are dimensiune coireductibilă finită.

**Pasul 2.**  $X/S$  are dimensiune coireductibilă finită, unde  $S = \text{soc}(X)$ .

Fie  $T \leq X$  astfel încât, prin propoziția 1.16,  $(S \oplus T) \trianglelefteq X$ . Din pasul 1 al demonstrației rezultă că  $X/(S \oplus T)$  are dimensiune coireductibilă finită. Notăm

$$\overline{T} = (S \oplus T)/S.$$

Atunci  $(X/S)/\overline{T}$  are dimensiune coireductibilă finită. Cum  $T \cong \overline{T}$ , rămâne de arătat că  $T$  are dimensiune coireductibilă finită.

Presupunem că  $T$  nu are dimensiune coireductibilă finită. Atunci  $T$  conține un submodule esențial

$$V = \bigoplus_{i \geq 1} V_i,$$

cu  $V_i \neq 0$  pentru orice  $i \geq 1$ . Avem  $\text{soc}(T) = S \cap T = 0$  și deci  $\text{soc}(V) = 0$ . Rezultă că pentru orice  $i \geq 1$  există un submodule propriu nenul  $W_i \trianglelefteq V_i$ ,  $W_i \neq V_i$  (altfel, dacă există un  $i \geq 1$  astfel încât  $V_i$  nu are submodule esențiale proprii, am avea  $\text{soc}(V_i) = V_i$ , în contradicție cu  $\text{soc}(V) = 0$ ).

Notând

$$W = \bigoplus_{i \geq 1} W_i,$$

obținem din propoziția 1.9 că  $W \leq V$  și deci  $(S + W) \leq (S + V)$ . Cum  $V \leq T$ , avem  $(S + W) \leq (S + T) \leq X$  și prin urmare  $(S + W) \leq X$ . Aplicând pasul 1 al demonstrației obținem că  $X/(S \oplus W)$  are dimensiune coireductibilă finită.

Pe de altă parte,

$$\bigoplus_{i \geq 1} V_i/W_i = V/W \leq (S \oplus V)/(S \oplus W) \leq X/(S \oplus W),$$

ceea ce contrazice faptul că  $X/(S \oplus W)$  are dimensiune coireductibilă finită. Prin urmare,  $T$  are dimensiune coireductibilă finită.

**Pasul 3.**  $S = \text{soc}(X)$  este finit generat.

Presupunem că  $S$  nu este finit generat. Atunci putem scrie  $S = H \oplus K$ , unde  $H$  și  $K$  nu sunt finit generate. Cum  $H$  nu poate fi sumand direct al lui  $X$ , avem  $X/H \neq R_R$  (dacă  $X = H \oplus H'$ , atunci  $H \cong X/H'$ , iar cum  $X/H'$  este ciclic, obținem o contradicție) și deci  $X/H$  este quasi-injectiv. Fie  $\overline{K} = (K \oplus H)/H$ . Atunci

$$X/S \cong (X/H)/\overline{K},$$

iar din pasul 2 rezultă că  $(X/H)/\overline{K}$  are dimensiune coireductibilă finită. Cum  $\overline{K} \cong K$ , iar  $K$  este o sumă directă infinită de module simple, rezultă că  $(X/H)/\overline{K}$  nu are dimensiune coireductibilă finită (vezi lema 1 din [?]), contradicție.

Obținem că  $S = \text{soc}(X)$  este finit generat și deci  $S$  are dimensiune coireductibilă finită.

Din pasul 2 și pasul 3 rezultă că  $X$  are dimensiune coireductibilă finită. □

**Teoremă 6.3.** *Fie  $R$  un inel prim, PCQI la dreapta. Atunci  $R$  este artinian la dreapta sau domeniu Ore la dreapta.*

*Demonstrație.* Arătăm mai întâi că  $R$  este nesingular la dreapta. Presupunem că  $Z(R_R) \neq 0$ . Din lema precedentă  $R$  are dimensiune coireductibilă finită și deci există un submodul coireductibil  $U \leq R_R$ . Atunci

$$V := U \cap Z(R_R) \neq 0$$

și  $V^2 \neq 0$ , deoarece  $R$  este inel prim. Fie  $a \in V$  astfel încât  $aV \neq 0$ . Cum  $V$  este coireductibil, există  $x \in V \cap \text{ann}_r(a) \setminus \{0\}$ . Dar  $xR \neq R_R$  și deci  $xR$  este quasi-injectiv. Fie  $E(V)$  envelopa injectivă a lui  $V$ . Atunci  $E(V) = E(xR)$ , deoarece  $xR \leq V$  și astfel  $xR$  este submodul deplin invariant al lui  $E(V)$ . În particular,  $V(xR) \subseteq xR$ . Rezultă că

$$(aV)(xR) = a(VxR) \subseteq axR = 0.$$

Dar  $aV \neq 0$  și  $xR \neq 0$ , în contradicție cu faptul că  $R$  este prim.

Obținem că  $Z(R_R) = 0$ . Din lema precedentă  $R$  are dimensiune coireductibilă finită. Cum  $R$  este nesingular, rezultă că  $R$  este inel Goldie la dreapta. Dacă  $R_R$

este coireductibil, atunci  $R$  este fie inel cu diviziune, fie domeniu Ore la dreapta, și teorema este demonstrată în acest caz.

Presupunem în continuare că  $R_R$  nu este coireductibil și considerăm

$$U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_m = U \quad (m \geq 2)$$

o sumă directă de submodule coireductibile astfel încât  $U \leq R_R$ . Fie  $a_1 \in U_1 \setminus \{0\}$ . Evident  $a_1 R \neq R_R$  și deci  $a_1 R$  este quasi-injectiv. Cum  $R$  este inel prim, Goldie la dreapta, pentru orice  $i = 2, \dots, m$  există  $a_i \in U_i$  astfel încât  $a_i R \cong a_1 R$ . Atunci

$$A = a_1 R \oplus a_2 R \oplus \cdots \oplus a_m R$$

este quasi-injectiv. Observăm că  $A \leq U$  și deci  $A \leq R_R$ . Din Propoziția 4.14,  $A$  conține un element regulat  $c \in R$ . Deoarece  $cR \leq A$ , rezultă că  $A$  este  $cR$ -injectiv și, cum  $cR \cong R_R$ , obținem că  $A$  este injectiv.

Astfel șirul exact

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow R \longrightarrow R/A \longrightarrow 0$$

este scindat, iar din  $A \leq R_R$  rezultă că  $A = R$ . Prin urmare  $R$  este self-injectiv la dreapta. Un inel prim, Goldie la dreapta și self-injectiv la dreapta este simplu artinian; deci  $R$  este artinian la dreapta.

În concluzie,  $R$  este fie domeniu Ore la dreapta, fie inel simplu artinian, deci în orice caz artinian la dreapta sau domeniu Ore la dreapta.  $\square$



# Bibliografie

- Anderson, F.W., Fuller, K., *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, 1973.
- Dung, N.V., Huynh, D.V., Wisbauer, R., “Quasi-injective modules with acc and dcc on essential submodules”, *Arch. Math.*, **53** (1989), 252–255.
- Năstăsescu, C., *Inele, module, categorii*, Ed. Academiei, 1976.
- Năstăsescu, C., *Teoria dimensiunii în algebra necomutativă*, Ed. Academiei, 1983.
- Osofsky, B.L., Smith, P.F., “Cyclic modules whose quotients have all complement submodules direct summands”, *J. Algebra*, **139** (1991), 342–354.
- Goldie, A.W., “Torsion-free modules and rings”, *J. Algebra*, **1** (1964), 268–287.

