

DIMENSIUNEA COIREDUCTIBILĂ A INELELOR ȘI MODULELOR

Coordonator științific: Prof. Dr. Tiberiu Dumitrescu

Student: Sorin Bogde

Universitatea București, Facultatea de Matematică

1999

Cuprins

0	Generalități	1
0.1	Module semisimple	1
0.2	Module noetheriene (artinene) și inele noetheriene (artinene)	2
0.3	Module de lungime finită	3
0.4	Radicalul Jacobson	5
0.5	Inele semisimple	6
1	Submodule esențiale	7
2	Module injective	13
2.1	Module injective	13
2.2	Anvelope injective	20
3	Sume directe de module coireductibile	25
4	Domenii Ore și inele Goldie	33
5	Teorema Osofsky–Smith	39

Capitolul 0

Generalități

0.1 Module semisimple

Definiție 0.1.1. Un R -modul nenul S se numește *simplu* dacă singurele sale submodule sunt 0 și S .

Propoziție 0.1.2. Fie S un R -modul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. S este modul simplu.
2. Pentru orice element nenul $x \in S$ avem $S = xR$.
3. $S \simeq R/I$, unde I este un ideal drept maximal.

Lemă 0.1.3 (Schur). Fie S și S' două R -module simple și $f: S \rightarrow S'$ un morfism de R -module. Atunci $f = 0$ sau f este izomorfism. În particular $\text{End}_R(S)$ este corp.

Definiție 0.1.4. Fie M un R -modul și $(S_i)_{i \in I}$ mulțimea submodulelor simple ale lui M . Dacă $M = \sum_{i \in I} S_i$, atunci M se numește *semisimplu*.

Propoziție 0.1.5. Fie M un R -modul semisimplu și N un submodule al său. Atunci există o submulțime $J \subseteq I$ astfel încât:

1. familia $(S_j)_{j \in J}$ este independentă;
2. $M = N \oplus (\bigoplus_{j \in J} S_j)$.

Corolar 0.1.6. Cu notațiile de mai sus, pentru modulul semisimplu M există $J \subseteq I$ astfel încât familia $(S_j)_{j \in J}$ este independentă și

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i.$$

Corolar 0.1.7. Dacă M este un R -modul semisimplu și N un submodule al său, atunci N și M/N sunt semisimple.

Corolar 0.1.8. O sumă directă de module semisimple este modul semisimplu.

Teoremă 0.1.9. Fie M un R -modul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. M este semisimplu;
2. M este izomorf cu o sumă directă de module simple;
3. orice submodule al său este sumand direct în M ;
4. orice șir exact

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

este scindabil.

Definiție 0.1.10. Suma submodulelor simple ale lui M se numește *soclul* lui M și se notează $\text{soc}(M)$. Dacă M nu conține nici un submodule simplu atunci punem $\text{soc}(M) = 0$.

Propoziție 0.1.11. Fie M și N două R -module și $f: M \rightarrow N$ un morfism. Atunci $f(\text{soc}(M)) \subseteq \text{soc}(N)$.

Propoziție 0.1.12. Fie M un R -modul și N un submodule al său. Atunci

$$\text{soc}(N) = \text{soc}(M) \cap N.$$

Propoziție 0.1.13. Dacă $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, atunci

$$\text{soc}(M) = \bigoplus_{i \in I} \text{soc}(M_i).$$

Propoziție 0.1.14. Fie R un inel. Atunci $\text{soc}(R_R)$ este un ideal bilateral al lui R .

0.2 Module noetheriene (artinene) și inele noetheriene (artinene)

Definiție 0.2.1. Fie R un inel și M un R -modul drept. Spunem că M satisface *condiția maximală* (resp. *minimală*) dacă orice mulțime nevidă de submodule ale lui M , ordonată prin incluziune, admite un element maximal (resp. minimal).

Spunem că M satisface *condiția lanțurilor ascendente* (resp. *descendente*) dacă orice șir (lanț) ascendent de submodule ale lui M

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_i \subseteq \cdots$$

(resp. orice șir descendent

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_i \supseteq \cdots$$

) este staționar, adică există $n \geq 1$ astfel încât $M_n = M_{n+1} = \cdots$.

Propoziție 0.2.2. Fie M un R -modul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. M satisface condiția maximală (minimală);
2. M satisface condiția lanțurilor ascendente (descendente).

Definiție 0.2.3. Un R -modul M se numește *noetherian* (resp. *artinian*) dacă satisface condiția maximală (resp. minimală). Inelul R se numește noetherian (resp. artinian) la dreapta dacă R_R este noetherian (resp. artinian).

Exemplu 0.2.4.

1. \mathbb{Z} este inel noetherian dar nu este artinian.
2. Orice grup finit este \mathbb{Z} -modul noetherian și artinian.
3. Orice inel finit este noetherian și artinian.
4. $\mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots, X_n, \dots]$ nu este nici noetherian, nici artinian:

$$(X_1) \subsetneq (X_1, X_2) \subsetneq \dots \subsetneq (X_1, \dots, X_n) \subsetneq \dots$$

$$(X_1) \supsetneq (X_1^2) \supsetneq \dots \supsetneq (X_1^k) \supsetneq \dots$$

5. \mathbb{Z}_{p^∞} este \mathbb{Z} -modul artinian dar nu este noetherian.

Propoziție 0.2.5. Fie N, P două submodule ale lui M astfel încât $M = N + P$. Atunci M este noetherian (artinian) dacă și numai dacă N și P sunt noetheriene (artiniane).

Propoziție 0.2.6. Pentru un R -modul M următoarele afirmații sunt echivalente:

1. M este noetherian;
2. orice submodule al lui M este finit generat.

Propoziție 0.2.7. Pentru un R -modul M următoarele afirmații sunt echivalente:

1. M este artinian;
2. oricare ar fi familia $(X_i)_{i \in I}$ de submodule ale lui M , există $J \subseteq I$, J finită, astfel încât

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap_{j \in J} X_j.$$

0.3 Module de lungime finită

Definiție 0.3.1. Fie M un R -modul drept nenul. Se numește *șir de compoziție* sau *șir Jordan–Hölder* al lui M un lanț finit strict ascendent de submodule

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n = M$$

astfel încât X_{i+1}/X_i este modul simplu pentru $0 \leq i \leq n-1$. Numărul n se numește *lungimea șirului*, iar modulele X_{i+1}/X_i se numesc *factorii șirului*.

Propoziție 0.3.2. Fie M un R -modul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. M are un șir de compoziție;

2. M este noetherian și artinian.

Propoziție 0.3.3. *Fie*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

un șir exact de R -module drepte. Atunci M admite un șir de compoziție dacă și numai dacă M' și M'' admit un șir de compoziție.

Dacă

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M, \quad 0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_p = M$$

sunt două șiruri de compoziție ale lui M , vom spune că ele sunt *echivalente* dacă $n = p$ și există o bijecție $\sigma : \{0, \dots, n-1\} \rightarrow \{0, \dots, n-1\}$ astfel încât

$$M_{i+1}/M_i \cong M_{\sigma(i)+1}/M_{\sigma(i)} \quad (0 \leq i \leq n-1).$$

Teoremă 0.3.4 (Jordan–Hölder). *Dacă un R -modul M are două șiruri de compoziție*

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M, \quad 0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_p = M,$$

atunci aceste două șiruri sunt echivalente.

Definiție 0.3.5. Un R -modul M care admite un șir de compoziție se numește *modul de lungime finită*. Lungimea șirurilor de compoziție se numește *lungimea* lui M și se notează $l(M)$. Dacă M nu admite nici un șir de compoziție, atunci spunem că M este *de lungime infinită* și scriem $l(M) = \infty$.

Propoziție 0.3.6. *Fie*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

un șir exact de R -module de lungime finită. Atunci

$$l(M) = l(M') + l(M'').$$

Corolar 0.3.7. *Fie M un R -modul de lungime finită și N, L două submodule ale sale. Atunci:*

1. $l(M) = l(N) + l(M/N)$;
2. $l(N + L) + l(N \cap L) = l(N) + l(L)$.

Corolar 0.3.8. *Fie M un R -modul de lungime finită și M_1, M_2, \dots, M_n submodule ale sale astfel încât*

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n.$$

Atunci

$$l(M) = \sum_{i=1}^n l(M_i).$$

0.4 Radicalul Jacobson

Radicalul Jacobson al unui modul

Definiție 0.4.1. Fie M un R -modul. Intersecția tuturor submodulelor maximale ale lui M se numește *radicalul Jacobson* al modulului M și se notează $\text{Rad}(M)$. Dacă M nu are nici un submodule maximal, atunci prin convenție punem $\text{Rad}(M) = M$.

Observație 0.4.2. Dacă M este un R -modul finit generat, atunci $\text{Rad}(M) \neq M$.

Propoziție 0.4.3. Fie M un R -modul. Atunci

$$\text{Rad}(M) = \bigcap_{\substack{f:M \rightarrow S \\ S \text{ simplu}}} \ker(f) = \bigcap_{\substack{f:M \rightarrow X \\ X \text{ semisimplu}}} \ker(f).$$

Propoziție 0.4.4. Fie $f : M \rightarrow N$ un morfism de R -module. Atunci $f(\text{Rad}(M)) \subseteq \text{Rad}(N)$. Dacă, în plus, f este epimorfism și $\ker(f) \subseteq \text{Rad}(M)$, atunci $f(\text{Rad}(M)) = \text{Rad}(N)$.

Corolar 0.4.5. Pentru orice R -modul M are loc egalitatea $\text{Rad}(M/\text{Rad}(M)) = 0$.

Corolar 0.4.6. Dacă M este un R -modul semisimplu, atunci $\text{Rad}(M) = 0$.

Corolar 0.4.7. Dacă $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, atunci

$$\text{Rad}(M) = \bigoplus_{i \in I} \text{Rad}(M_i).$$

Propoziție 0.4.8. Fie M un R -modul astfel încât $\text{Rad}(M) \neq M$. Atunci

$$\text{Rad}(M) = \bigcap \{ L \leq M \mid L \text{ este submodule superfluu} \}.$$

Propoziție 0.4.9 (Lema lui Nakayama). Fie M un R -modul finit generat și N un submodule al său. Dacă $N + \text{Rad}(M) = M$, atunci $N = M$. (Adică $\text{Rad}(M)$ este cel mai mare submodule superfluu al lui M .)

Radicalul Jacobson al unui inel

Fie R un inel. Considerăm idealul stâng $\text{Rad}({}_R R)$ ca intersecție a idealelor stângi maximale ale lui R și $\text{Rad}(R_R)$ ca intersecție a idealelor drepte maximale ale lui R .

Propoziție 0.4.10.

1. $\text{Rad}(R_R)$ este un ideal bilateral.
2. $\text{Rad}(R_R) = \{ r \in R \mid 1 - ar \in U(R) \text{ pentru orice } a \in R \}$.
3. $\text{Rad}(R_R) = \text{Rad}({}_R R)$.

Definiție 0.4.11. Idealul bilateral $\text{Rad}(R_R) = \text{Rad}({}_R R)$ se numește *radicalul Jacobson* al inelului R și se notează $\text{Rad}(R)$.

Propoziție 0.4.12.

1. Dacă J este un ideal stâng (resp. drept sau bilateral) cu proprietatea că $1 - x$ este inversabil pentru orice $x \in J$, atunci $J \subseteq \text{Rad}(R)$.
2. Dacă J este un nilideal stâng (resp. drept sau bilateral), atunci $J \subseteq \text{Rad}(R)$.

Propoziție 0.4.13. Fie $\varphi : R \rightarrow S$ un morfism surjectiv de inele. Atunci $\varphi(\text{Rad}(R)) \subseteq \text{Rad}(S)$. Dacă $\ker(\varphi) \subseteq \text{Rad}(R)$, atunci $\varphi(\text{Rad}(R)) = \text{Rad}(S)$.

Propoziție 0.4.14. Dacă $(R_i)_{i \in I}$ este o familie de inele, atunci

$$\text{Rad}\left(\prod_{i \in I} R_i\right) = \prod_{i \in I} \text{Rad}(R_i).$$

Propoziție 0.4.15. Fie M un R -modul. Atunci $M \text{ Rad}(R) \subseteq \text{Rad}(M)$.

Teoremă 0.4.16. Dacă R este un inel artinian, atunci $\text{Rad}(R)$ este nilpotent.

0.5 Inele semisimple

Teoremă 0.5.1. Pentru un inel R următoarele afirmații sunt echivalente:

1. orice R -modul drept nenul este semisimplu;
2. R este R -modul drept semisimplu;
3. R este artinian și $\text{Rad}(R) = 0$.

Definiție 0.5.2. Un inel R care satisface una din condițiile de mai sus se numește inel semisimplu.

Propoziție 0.5.3. Fie R un inel semisimplu și M un R -modul nenul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. M este de lungime finită;
2. M este noetherian;
3. M este artinian.

Teoremă 0.5.4. Fie R un inel artinian la dreapta și M un R -modul nenul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. M este de lungime finită;
2. M este noetherian;
3. M este artinian.

Corolar 0.5.5 (Hopkins). Un inel artinian la dreapta (respectiv la stânga) este noetherian la dreapta (respectiv la stânga).

Capitolul 1

Submodule esențiale

Definiție 1.1. Fie M un R -modul drept. Un submodule N al lui M se numește *esențial* (sau spunem că M este o extensie esențială a lui N) dacă $N \cap N' \neq 0$ pentru orice submodule nenul N' al lui M . În acest caz vom folosi notația $N \trianglelefteq M_R$.

Un monomorfism de R -module la dreapta $f : M \rightarrow N$ se numește *esențial* dacă $\text{Im } f$ este submodule esențial în N (adică $\text{Im } f \trianglelefteq N_R$).

Exemplu.

1. $n\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ pentru orice $n \geq 1$.
2. Orice submodule al lui \mathbb{Z}_{p^∞} este esențial.

Observație 1.2. Fie M un R -modul drept și N un submodule al lui M . Atunci $N \trianglelefteq M_R$ dacă și numai dacă pentru orice $x \in M$, $x \neq 0$, există $r \in R$ astfel încât $xr \in N \setminus \{0\}$.

Demonstrație. „ \Rightarrow ” Fie $x \in M \setminus \{0\}$. Cum $0 \neq xR \subseteq M_R$ și $N \trianglelefteq M_R$, rezultă că $xR \cap N \neq 0$, deci există $xr \in xR \cap N \setminus \{0\}$.

„ \Leftarrow ” Fie $N' \leq M_R$, $N' \neq 0$. Pentru $x \in N' \setminus \{0\}$ există $r \in R$ astfel încât $xr \in N \setminus \{0\}$, deci $N \cap N' \neq 0$. \square

Definiție 1.3. Un monomorfism de R -module la dreapta $f : N_R \rightarrow M_R$ se numește esențial dacă $\text{Im } f \trianglelefteq M_R$. Se observă imediat că dacă N este un submodule al lui M atunci incluziunea canonică $i_N : N \rightarrow M$ este monomorfism esențial dacă și numai dacă $N \trianglelefteq M_R$.

Propoziție 1.4. Un monomorfism $f : N_R \rightarrow M_R$ este esențial dacă și numai dacă pentru orice R -modul drept M' și orice $g \in \text{Hom}(M, M')$, faptul că $g \circ f$ este monomorfism implică g monomorfism.

Demonstrație.

„ \Rightarrow ” Fie g ca în enunț astfel încât $g \circ f$ este monomorfism. Presupunem $g \neq 0$. Fie $x \in \text{Ker } g \cap \text{Im } f \setminus \{0\}$. Există $x' \in N$ astfel încât $x = f(x')$ și $g(x) = 0$, de unde $g(f(x')) = 0$. Cum $g \circ f$ este monomorfism, rezultă $x' = 0$ și deci $x = 0$, contradicție.

„ \Leftarrow ” Dacă f nu este monomorfism esențial atunci există $N' \leq M_R$, $N' \neq 0$, astfel încât $N' \cap \text{Im } f = 0$. Considerăm proiecția canonică $\pi_{N'} : M \rightarrow M/N'$. Dacă

$x \in \text{Ker}(\pi_{N'} \circ f)$, atunci $f(x) \in N'$, deci $f(x) = 0$, adică $x = 0$. Obținem astfel că $\pi_{N'} \circ f$ este injectiv, de unde rezultă că $\pi_{N'}$ este injectiv, ceea ce implică $N' = 0$, contradicție. \square

Corolar 1.5. *Fie M un R -modul la dreapta și $N \leq M_R$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. $N \trianglelefteq M_R$;
2. incluziunea $i_N : N \rightarrow M$ este monomorfism esențial;
3. pentru orice $f \in \text{Hom}(M, M')$ cu M' R -modul arbitrar, faptul că $f \circ i_N$ este monomorfism implică f monomorfism.

Propoziție 1.6. *Fie $f : N_R \rightarrow M_R$ și $g : M_R \rightarrow P_R$ două monomorfisme. Atunci $g \circ f$ este esențial dacă și numai dacă g și f sunt esențiale.*

Demonstrație.

„ \Leftarrow ” Fie $z \in P \setminus \{0\}$. Cum g este esențial, există $r \in R$ astfel încât $zr \in \text{Im } g \setminus \{0\}$. Există $y \in M \setminus \{0\}$ astfel încât $zr = g(y)$.

Cum f este esențial, există $r' \in R$ astfel încât $yr' \in \text{Im } f \setminus \{0\}$. De aici există $x \in N \setminus \{0\}$ astfel încât $yr' = f(x)$. Dar $zr' = g(y)r' = g(yr') = g(f(x))$. Dacă $zr' = 0$, atunci $g(f(x)) = 0$ și deci $x = 0$, contradicție. Obținem astfel că $zr' \in \text{Im}(g \circ f)$ și că $zr' \neq 0$, ceea ce ne arată că $g \circ f$ este esențial.

„ \Rightarrow ” Fie $y \in M \setminus \{0\}$. Cum g este monomorfism, $g(y) \neq 0$. Deci există $r \in R$ astfel încât $g(yr) \in \text{Im } g \setminus \{0\}$ și $g(yr) \neq 0$. Rezultă că există $x \in N \setminus \{0\}$ astfel încât $g(yr) = g(f(x))$ de unde $yr = f(x) \in \text{Im } f$, ceea ce ne arată că f este monomorfism esențial.

Dacă $z \in P \setminus \{0\}$ există $r \in R$ astfel încât $zr \in \text{Im}(g \circ f)$ și $zr \neq 0$. Cum $\text{Im}(g \circ f) \subseteq \text{Im } g$, rezultă că $zr \in \text{Im } g$, și deci g este monomorfism esențial. \square

Propoziție 1.7. *Fie M un R -modul la dreapta și L_1, L_2, \dots, L_n submodule ale lui M . Atunci:*

1) $\bigcap_{i=1}^n L_i$ este esențial în M dacă și numai dacă L_i este esențial în M pentru orice $i = 1, \dots, n$.

2) Dacă $L_1 \subseteq L_2$ și L_1 este esențial în M , atunci L_2 este esențial în M .

Demonstrația este evidentă.

Propoziție 1.8. *Fie K și L două submodule ale lui M . 1) Dacă $K \subseteq L \subseteq M$, atunci $K \trianglelefteq M$ dacă și numai dacă $K \trianglelefteq L$ și $L \trianglelefteq M$.*

2) Dacă $h : K_R \rightarrow M_R$ este morfism de module și $L \trianglelefteq M$, atunci $h^{-1}(L) \trianglelefteq K$.

3) Dacă $L_1, L_2 \leq M_R$ și $K_1 \trianglelefteq L_1$, $K_2 \trianglelefteq L_2$, atunci $K_1 \cap K_2 \trianglelefteq L_1 \cap L_2$.

Demonstrație.

1) Se aplică 1.5 și 1.6.

2) Fie U submodule nenul al lui K . (i) Dacă $h(U) = 0$, atunci $U \subseteq \ker h \subseteq h^{-1}(L)$, ceea ce implică $U \cap h^{-1}(L) \neq 0$. (ii) Dacă $h(U) \neq 0$, atunci $h(U) \cap L \neq 0$ și deci

există $u \in U$ astfel încât $h(u) \in L$, $h(u) \neq 0$, de unde $u \in U \cap h^{-1}(L)$ și $u \neq 0$. Din (i) și (ii) rezultă că $h^{-1}(L) \leq K$.

3) Dacă $0 \neq X \leq L_1 \cap L_2$ atunci $X \subseteq L_1$ ceea ce implică $0 \neq X \cap K_1 \leq L_1$. Dar cum $X \subseteq L_2$, rezultă $0 \neq (X \cap K_1) \cap L_2 = X \cap (K_1 \cap K_2)$, și deci $K_1 \cap K_2 \leq L_1 \cap L_2$. \square

Propoziție 1.9. *Fie $(K_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $(L_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ două familii de submodule ale lui M . Dacă $(K_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ este familie independentă în M și $K_\lambda \leq L_\lambda$ pentru orice $\lambda \in \Lambda$, atunci $(L_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ este familie independentă în M și $(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda) \leq (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda)$.*

Demonstrație.

Fie $K_1 \leq L_1$, $K_2 \leq L_2$ astfel încât $K_1 \cap K_2 = 0$. Din 1.8(3) rezultă că $0 \leq L_1 \cap L_2$, adică $L_1 \cap L_2 = 0$.

Fie proiecțiile canonice $\pi_1 : L_1 \oplus L_2 \rightarrow L_1$, $\pi_2 : L_1 \oplus L_2 \rightarrow L_2$. Cum $K_1 \leq L_1$, $K_2 \leq L_2$ rezultă că

$$\pi_1^{-1}(K_1) = K_1 \oplus 0 \leq L_1 \oplus L_2,$$

și

$$\pi_2^{-1}(K_2) = 0 \oplus K_2 \leq L_1 \oplus L_2.$$

Deci

$$K_1 \oplus K_2 = (\pi_1^{-1}(K_1)) \cap (\pi_2^{-1}(K_2)) \leq L_1 \oplus L_2.$$

Prin inducție se obține afirmația pentru mulțimi finite. În cazul general, fie $0 \neq m \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$. Atunci există o mulțime finită $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ cu $m \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} L_\lambda$. Cum $(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} K_\lambda) \leq (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} L_\lambda)$, există $r \in R$ astfel încât $rm \in (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} K_\lambda) \setminus \{0\} \subseteq (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda) \setminus \{0\}$. Rezultă că $(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda) \leq (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda)$. \square

Propoziție 1.10. *Fie N un submodule al lui M . Atunci există un submodule Q , $N \subseteq Q \subseteq M$, astfel încât Q este o extensie esențială maximală a lui N conținută în M .*

Demonstrație.

Fie $\mathfrak{S} = \{L \leq M; N \subseteq L \subseteq M, N \cap L = 0\}$, \mathfrak{S} cu relația de ordine incluziunea. $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ deoarece $N \in \mathfrak{S}$. Fie $(L_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ o familie total ordonată de elemente din \mathfrak{S} și

$$L := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda.$$

Evident $L \leq M_R$.

Fie $x \in L \setminus \{0\}$. Atunci există $\lambda_0 \in \Lambda$ cu $x \in L_{\lambda_0}$. Cum N este esențial în L_{λ_0} , rezultă că există $r \in R$ astfel încât $xr \in N$ și $xr \neq 0$, de unde obținem că L este extensie esențială a lui N . Deci \mathfrak{S} este inductivă și, conform lemei lui Zorn, \mathfrak{S} admite un element maximal Q care satisface condițiile cerute. \square

Definiție 1.11. Fie M un R -modul la dreapta și $N \leq M_R$. Un submodule $K \leq M_R$ se numește *complement* al lui N în M dacă K este un submodule maximal al lui M cu proprietatea că $K \cap N = 0$. Un submodule $K \leq M_R$ se numește *submodul complement al lui M* dacă există $N \leq M_R$ astfel încât K este complement al lui N în M .

Observație 1.12. Mulțimea

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \{ L \leq M_R \mid N \cap L = 0 \}$$

este inductivă și, aplicând lema lui Zorn, rezultă că există un complement al lui N în M . În particular, 0 și M sunt submodule complement ale lui M .

Propoziție 1.13. *Fie M_R , $N \leq M_R$ și $K \leq M_R$, K un complement al lui N în M . Există un complement Q al lui K în M astfel încât $N \subseteq Q$. Mai mult, Q este o extensie esențială maximală a lui N în M .*

Demonstrație. Se observă ușor că mulțimea

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \{ L \leq M_R \mid K \cap L = 0, N \subseteq L \}$$

este inductivă și lema lui Zorn asigură existența lui Q .

Fie L un submodule nenul al lui Q astfel încât $L \cap N = 0$. Fie $K_1 = L + K$. Este clar că $K \subseteq K_1$. Dacă $x \in N \cap (L + K)$, atunci $x = y + z$ cu $y \in L$, $z \in K$. Dar $z = x - y \in Q$. Cum $Q \cap K = 0$, rezultă $z = 0$ și deci $x = y$. Din egalitatea $L \cap N = 0$ deducem $x = y = 0$ și deci $N \cap (L + K) = 0$, ceea ce contrazice faptul că K este un complement al lui N în M . Obținem $L \cap N \neq 0$ pentru orice $0 \neq L \leq Q$, de unde Q este extensie esențială a lui N .

Presupunem că există $Q' \leq M_R$ cu $N \leq Q'$ și $Q \subsetneq Q'$. Cum Q' este complement al lui K , rezultă $Q' \cap K \neq 0$. Dar $N \cap (Q' \cap K) = 0$ și $0 \neq Q' \cap K \leq Q'$, contradicție cu $N \leq Q'$. Rezultă că Q este extensie esențială maximală a lui N în M . \square

Definiție 1.14. Un submodule N al lui M_R se numește *închis* dacă N nu are nicio extensie esențială în M proprie (diferită de N).

Corolar 1.15. *Fie M_R un R -modul. Submodulele complement ale lui M coincid cu submodulele închise ale lui M .*

Demonstrație. Din 1.13 rezultă imediat că orice submodule închis al lui M este un submodule complement al lui M .

Invers, fie K un submodule complement al lui M_R . Rezultă că există $N \leq M_R$ astfel încât K este un complement al lui N în M . Presupunem că K are o extensie esențială în M proprie, adică există $K' \leq M_R$ cu $K \leq K'$ și $K \subsetneq K'$. Atunci $K' \cap N \neq 0$, din maximalitatea lui K , iar cum $K \leq K'$, rezultă că

$$K \cap K' \cap N \neq 0,$$

contradicție. \square

Corolar 1.16. *Fie N un submodule al lui M_R . Dacă K este un complement al lui N în M , atunci:*

1. $(N + K) \leq M_R$.
2. Morfismul canonic $\pi_K \circ i_N : N \rightarrow M/K$ este monomorfism esențial.

Demonstrație. (1) Fie $x \in M \setminus \{0\}$. Dacă $x \notin K$, atunci $K + Rx \neq K$ și deci $N \cap (K + Rx) \neq 0$. Fie $y \in N \cap (K + Rx)$, $y \neq 0$. Există $z \in K$, $r \in R$ cu $y = z + rx$. Dacă $rx = 0$, atunci $y = z$ și cum $N \cap K = 0$ rezultă $y = 0$, contradicție. Deci $rx \neq 0$ și, cum $rx = y - z$, obținem $rx \in N + K$, ceea ce ne arată că $(N + K) \leq M_R$.

(2) $\text{Im}(\pi_K \circ i_N) = (N + K)/K$. Fie L/K un submodul nenul al lui M/K . Atunci

$$\frac{N + K}{K} \cap \frac{L}{K} = \frac{(N + K) \cap L}{K} = \frac{N \cap L + K}{K}.$$

Cum K este un complement al lui N , rezultă că $N \cap L \neq 0$ și deci

$$\frac{N \cap L + K}{K} \neq 0,$$

ceea ce ne arată că $\pi_K \circ i_N$ este monomorfism esențial. □

Capitolul 2

Module injective

2.1 Module injective

Fie Q și M două R -module drepte. Q se numește *M -injectiv* dacă pentru orice monomorfism $u : M' \rightarrow M$ și orice morfism $f : M' \rightarrow Q$, există $g : M \rightarrow Q$ astfel încât $g \circ u = f$, adică diagrama

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{u} & M \\ & & \downarrow f & \swarrow g & \\ & & Q & & \end{array}$$

este comutativă.

Această proprietate este echivalentă cu condiția ca aplicația

$$\text{Hom}(u, Q) : \text{Hom}(M, Q) \longrightarrow \text{Hom}(M', Q)$$

să fie surjectivă pentru orice monomorfism $u : M' \rightarrow M$. Cum functorul $\text{Hom}(-, Q)$ este exact la stânga, rezultă că Q este *M -injectiv* dacă și numai dacă $\text{Hom}(-, Q)$ este exact în raport cu orice șir exact de forma

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

R -modulul Q se numește *quasi-injectiv* (sau *self-injectiv*) dacă este Q -injectiv. Dacă Q este M -injectiv pentru orice R -modul M , atunci Q se numește *injectiv*.

2.1.1 Propoziție

Propoziție 2.1.1. *Fie Q și M două R -module. Următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. *Q este M -injectiv.*
2. *Pentru orice submodul N al lui M și orice morfism $f : N \rightarrow Q$, există $g : M \rightarrow Q$ astfel încât $g|_N = f$.*
3. *Pentru orice submodul esențial N al lui M și orice morfism $f : N \rightarrow Q$, există $g : M \rightarrow Q$ astfel încât $g|_N = f$.*

Demonstrație. Implicațiile (1) \Rightarrow (2) și (2) \Rightarrow (3) sunt evidente.

(2) \Rightarrow (1). Fie M'_R , $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M$ și $f : M' \rightarrow Q$. Atunci $u(M') \leq M$. Considerăm $i : u(M') \rightarrow M$ injecția canonică și $\bar{u} : M' \rightarrow u(M')$ izomorfismul indus de u . Există $g : M \rightarrow Q$ astfel încât $g \circ i = f \circ \bar{u}^{-1}$. Atunci

$$g \circ i \circ \bar{u} = f \quad \text{și deci} \quad g \circ u = f.$$

Diagrama corespunzătoare este

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\bar{u}} & u(M') & \xhookrightarrow{i} & M \\ & & \downarrow f & & & \nearrow g & \\ & & Q & & & & \end{array}$$

(3) \Rightarrow (2). Fie N un submodule al lui M și K un complement al lui N în M . Atunci $(N \oplus K) \leq M$. Fie $h : N \oplus K \rightarrow Q$, definit prin $h(n+k) = f(n)$ pentru orice $n \in N$, $k \in K$. Cum $N \cap K = 0$, aplicația h este bine definită. Există $g : M \rightarrow Q$ astfel încât $g|_{N \oplus K} = h$ și deci $g|_N = f$.

Aceasta se poate reprezenta prin diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \hookrightarrow & N \oplus K & \hookrightarrow & M \\ & & \downarrow f & & \nearrow h & \nearrow g & \\ & & Q & & & & \end{array}$$

□

Propoziție 2.1.2. Fie $(M_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ o familie de R -module și M un R -modul. Atunci $\prod_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ este M -injectiv dacă și numai dacă M_α este M -injectiv pentru orice $\alpha \in \Lambda$.

Demonstrație. Fie N un submodule al lui M . Notăm $P = \prod_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ și $\pi_\alpha : P \rightarrow M_\alpha$ proiecțiile canonice, pentru orice $\alpha \in \Lambda$.

" \Leftarrow " Considerând un morfism $f : N \rightarrow P$, avem că morfismele $\pi_\alpha \circ f : N \rightarrow M_\alpha$ pot fi extinse la $g_\alpha : M \rightarrow M_\alpha$. Există $g : M \rightarrow P$ astfel încât $g|_N = f$.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & N & \hookrightarrow & M \\ & & \downarrow f & & \nearrow g \\ & & P & & \\ & & \downarrow \pi_\alpha & & \nearrow g_\alpha \\ & & M_\alpha & & \end{array}$$

" \Rightarrow " Fie $\forall \alpha \in \Lambda$ și $f : N \rightarrow M_\alpha$. Considerând incluziunea canonică $\varepsilon_\alpha : M_\alpha \rightarrow P$, cum P este M -injectiv, există $g : M \rightarrow P$ care îl extinde pe $\varepsilon_\alpha \circ f : N \rightarrow P$. Atunci $\varepsilon_\alpha : M_\alpha \rightarrow P$ îl extinde pe f și deci M_α este M -injectiv.

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & N & \hookrightarrow & M \\
& & \downarrow f & & \nearrow g \\
& & M_\alpha & & \\
& & \downarrow \varepsilon_\alpha & & \nearrow \pi_\alpha g \\
& & P & & \\
& & \downarrow \pi_\alpha & & \\
& & M_\alpha & &
\end{array}$$

□

Corolar 2.1.3.

1. Fie $(Q_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ o familie de R -module. Atunci $\prod_{\alpha \in \Lambda} Q_\alpha$ este injectiv dacă și numai dacă Q_α este injectiv pentru orice $\alpha \in \Lambda$.
2. $Q_1 \oplus Q_2$ este R -modul injectiv dacă și numai dacă Q_i este injectiv pentru $i = 1, 2$. În particular, un sumand direct al unui modul injectiv este injectiv.

Propoziție 2.1.4. Fie Q un R -modul.

1. Dacă $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ este un șir exact de R -module și Q este M -injectiv, atunci Q este M' -injectiv și M'' -injectiv.
2. Dacă $(M_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ este o familie de submodule ale lui M astfel încât $M = \sum_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ și Q este M_α -injectiv pentru orice α , atunci Q este M -injectiv.
3. Fie $(N_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ o familie de R -module. Atunci Q este $\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} N_\alpha$ -injectiv dacă și numai dacă Q este N_α -injectiv pentru orice $\alpha \in \Lambda$.

Demonstrație. Pentru a arăta că Q este M' -injectiv, considerăm N un submodule al lui M' și $\varphi : N \rightarrow Q$ un morfism de R -module. Cum Q este M -injectiv, există $\psi : M \rightarrow Q$ astfel încât $\psi|_N = \varphi$ și deci $\psi \circ f : M' \rightarrow Q$ este un morfism care îl extinde pe φ .

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{f} & M \\
& & \downarrow \varphi & & \nearrow \psi & & \nearrow \\
& & Q & & & &
\end{array}$$

Fie $h : L \rightarrow M''$ un monomorfism. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $M' \leq M$ și $M'' = M/M'$. Cum $L \cong h(L) \leq M''$, există $P \leq M$, $M' \subseteq P$ astfel încât $h(L) = P/M'$ și deci $L \cong P/M'$. Obținem diagrama comutativă:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & P & \longrightarrow & L \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow & & \downarrow h \\
0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0
\end{array}$$

Cum Q este M -injectiv, aplicând functorul $\text{Hom}(-, Q)$ obținem diagrama comutativă:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(M'', Q) & \longrightarrow & \text{Hom}(M, Q) & \longrightarrow & \text{Hom}(M', Q) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow h^* & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(L, Q) & \longrightarrow & \text{Hom}(P, Q) & \longrightarrow & \text{Hom}(M', Q) \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & &
 \end{array}$$

Obținem că $h^* = \text{Hom}(h, Q)$ este epimorfism, ceea ce arată că Q este M'' -injectiv.

2) Fie N un submodul al lui M și $f : N \rightarrow Q$ un morfism de R -module. Considerăm mulțimea

$$\mathfrak{S} = \{(L, h) \mid N \leq L \leq M, h : L \rightarrow Q, h|_N = f\}.$$

Cum $(N, f) \in \mathfrak{S}$, avem $\mathfrak{S} \neq \emptyset$. Definim pe \mathfrak{S} relația de ordine $(L_1, h_1) \preceq (L_2, h_2)$ dacă și numai dacă $L_1 \leq L_2$ și $h_2|_{L_1} = h_1$. Se observă că \mathfrak{S} este inductivă și, din lema lui Zorn, rezultă că există (L_0, g_0) element maximal al lui \mathfrak{S} . Pentru a arăta că $L_0 = M$ este suficient să arătăm că $M_\alpha \leq L_0$ pentru orice $\alpha \in \Lambda$.

Considerând diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & L_0 \cap M_\alpha & \xrightarrow{i_\alpha} & M_\alpha \\
 & & \downarrow i_0 & & \searrow h_\alpha \\
 & & L_0 & & \\
 & & \downarrow g_0 & & \\
 & & Q & &
 \end{array}$$

rezultă că există $h_\alpha : M_\alpha \rightarrow Q$ astfel încât $h_\alpha \circ i_\alpha = g_0 \circ i_\alpha$. Definim $h^* : L_0 + M_\alpha \rightarrow Q$, $h^*(l + m_\alpha) = g_0(l) + h_\alpha(m_\alpha)$, pentru orice $l \in L_0$, $m_\alpha \in M_\alpha$. Dacă $l + m_\alpha = 0$, atunci $l = -m_\alpha \in L_0 \cap M_\alpha$ și deci $h^*(l + m_\alpha) = g_0(l) + h_\alpha(l)$, ceea ce arată că h^* este bine definită. Atunci $(L_0 + M_\alpha, h^*) \in \mathfrak{S}$ și, cum $(L_0, g_0) \preceq (L_0 + M_\alpha, h^*)$, din maximalitatea lui (L_0, g_0) rezultă că $L_0 = L_0 + M_\alpha$, adică $M_\alpha \leq L_0$ pentru orice $\alpha \in \Lambda$.

3) „ \Rightarrow ” Cum $N_\alpha \leq N$ și Q este N -injectiv, avem că Q este N_α -injectiv pentru orice $\alpha \in \Lambda$.

„ \Leftarrow ” Fie $N'_\alpha = i_\alpha(N_\alpha)$. Cum Q este N_α -injectiv și $N'_\alpha \cong N_\alpha$, rezultă că Q este N'_α -injectiv. Apoi aplicăm (2). \square

Corolar 2.1.5.

1. $Q_1 \oplus Q_2$ este R -modul quasi-injectiv dacă și numai dacă Q_i este Q_j -injectiv pentru orice $i, j = 1, 2$. În particular, un sumand direct al unui modul quasi-injectiv este quasi-injectiv.
2. Q^n este R -modul quasi-injectiv dacă și numai dacă Q este quasi-injectiv.

Corolar 2.1.6. Fie Q și M două R -module. Atunci Q este M -injectiv dacă și numai dacă Q este mR -injectiv pentru orice $m \in M$.

Demonstrație. „ \Rightarrow ” este evident.

„ \Leftarrow ” Cum $M = \sum_{m \in M} mR$, din 2.1.4(2) rezultă că Q este M -injectiv. \square

Teoremă 2.1.7 (Criteriul lui Baer). Pentru un R -modul Q următoarele afirmații sunt echivalente:

1. Q este injectiv.
2. Q este R -injectiv.
3. Pentru orice ideal drept I al lui R și orice morfism $f : I \rightarrow Q$ există $x \in Q$ astfel încât $f(a) = xa$ pentru orice $a \in I$.

Demonstrație. Implicația $(1) \Rightarrow (2)$ este evidentă.

$(2) \Rightarrow (1)$. Fie M un R -modul și $x \in M$. Cum $\varphi_x : R \rightarrow xR$, $\varphi_x(a) = xa$ pentru orice $a \in R$, este morfism surjectiv de R -module, rezultă că $R/\text{Ker } \varphi_x \cong xR$. Cum Q este R -injectiv, din 2.1.4(1) rezultă că Q este $R/\text{Ker } \varphi_x$ -injectiv și deci Q este xR -injectiv pentru orice $x \in M$. Atunci, din 2.1.6 obținem că Q este M -injectiv.

$(2) \Rightarrow (3)$. Fie I un ideal drept al lui R și $f : I \rightarrow Q$. Există $g : R \rightarrow Q$ astfel încât $g|_I = f$. Fie $x = g(1) \in Q$. Atunci $f(a) = g(a) = ag(1) = xa$ pentru orice $a \in I$.

$(3) \Rightarrow (2)$. Dacă pentru un morfism $f : I \rightarrow Q$ există $x \in Q$ cu $f(a) = xa$ pentru orice $a \in I$, atunci, definind $g : R \rightarrow Q$ prin $g(r) = xr$ pentru orice $r \in R$, rezultă că $g|_I = f$. \square

Definiție 2.1.8.

1. Un R -modul Q se numește *divizibil* dacă pentru orice $y \in Q$ și orice $a \in R$ nenulivizor al lui zero, există $x \in Q$ astfel încât $ax = y$. Se verifică ușor că orice modul factor al unui modul divizibil este divizibil.
2. Un domeniu de integritate comutativ se numește *PID-inel* dacă orice ideal al său este principal.

Propoziție 2.1.9.

1. Orice modul injectiv este divizibil.
2. Fie R un PID-inel.
 - (i) Dacă Q este un R -modul, atunci Q este injectiv dacă și numai dacă este divizibil.
 - (ii) Dacă I este un ideal nenul al lui R , atunci R/I este R -modul quasi-injectiv. În particular, \mathbb{Z}_n este \mathbb{Z} -modul quasi-injectiv, $\forall n \geq 1$.

Demonstrație. 1) Fie Q un R -modul divizibil, $y \in Q$ și $a \in R$ nendivizor al lui zero. Definim $f : aR \rightarrow Q$ prin $f(ax) = yx$ pentru orice $x \in R$. Cum a este nendivizor al lui zero, f este bine definită. Folosind criteriul lui Baer rezultă că există $x \in Q$ astfel încât $f(\lambda) = x\lambda$, pentru orice $\lambda \in I$. Deci $y = f(a) = f(a \cdot 1) = xa$.

2) (i) Implicația „ \Rightarrow ” este evidentă din (1).

„ \Leftarrow ” Fie Q un R -modul divizibil și I un ideal drept al lui R . Atunci există $a \in R$ astfel încât $I = aR$. Considerăm $f : I \rightarrow Q$ un morfism de R -module. Există $x \in Q$ astfel încât $f(a) = xa$. Atunci $f(ar) = xar$ pentru orice $r \in R$ și deci, conform criteriului lui Baer, Q este injectiv.

(ii) Fie $I = aR$ și $J = bR$ ideale nenule ale lui R astfel încât $I \subseteq J$ și $f : J/I \rightarrow R/I$ un morfism de R -module. Există $c \in R$ astfel încât $a = bc$. Dacă $f(\bar{b}) = \hat{x} \in R/I$, atunci $x \in I$ și deci există $a_1 \in R$ astfel încât $x = aa_1$. Rezultă că $x = ba_1$. Definim $g : R/I \rightarrow R/I$, $g(\bar{r}) = \widehat{ar_1}$ pentru orice $r \in R$. Atunci g este morfism de R -module și $g(\bar{b}) = \hat{x}$, deci $g|_{J/I} = f$, ceea ce arată că R/I este quasi-injectiv. \square

Corolar 2.1.10. *Un grup abelian G este \mathbb{Z} -modul injectiv dacă și numai dacă G este divizibil.*

Corolar 2.1.11.

1. \mathbb{Q} și \mathbb{Z}_{p^∞} sunt \mathbb{Z} -module injective.
2. Orice sumă directă de \mathbb{Z} -module injective este \mathbb{Z} -modul injectiv.
3. Orice grup factor al unui \mathbb{Z} -modul injectiv este injectiv.

Lemă 2.1.12. *Fie inelele A, S, T și bimodulele ${}_S M_A, {}_A N_T$. Atunci $\text{Hom}_A(M, N)$ are o structură de bimodul S -stâng și T -drept prin operațiile:*

$$(s \cdot f)(x) = f(xs), \quad (f \cdot t)(x) = f(x)t,$$

unde $s \in S$, $t \in T$, $x \in M$, $f \in \text{Hom}_A(M, N)$.

Demonstrație. Fie $a, b \in A$ și $x, y \in M$. Atunci:

$$(s \cdot f)(ax + by) = f((ax + by)s) = f(a(xs)) + f(b(ys)) = af(xs) + bf(ys) = a(s \cdot f)(x) + b(s \cdot f)(y),$$

și deci $s \cdot f \in \text{Hom}_A(M, N)$. Analog $f \cdot t \in \text{Hom}_A(M, N)$.

Pentru $s, s' \in S$ și $f, g \in \text{Hom}_A(M, N)$:

$$(s \cdot (f + g))(x) = (f + g)(xs) = f(xs) + g(xs) = (s \cdot f)(x) + (s \cdot g)(x). \quad (1)$$

$$((s + s') \cdot f)(x) = f(x(s + s')) = f(xs + xs') = f(xs) + f(xs') = (s \cdot f)(x) + (s' \cdot f)(x). \quad (2)$$

$$((ss') \cdot f)(x) = f(x(ss')) = f((xs)s') = (s' \cdot f)(xs) = (s \cdot (s' \cdot f))(x). \quad (3)$$

$$(1_S \cdot f)(x) = f(x1_S) = f(x). \quad (4)$$

Din (1)–(4) avem că $\text{Hom}_A(M, N)$ este S -modul stâng. La fel se arată că este și T -modul drept. Prin urmare $\text{Hom}_A(M, N)$ este un bimodul S -stâng și T -drept. \square

Propoziție 2.1.13 (Eckmann–Schopf). *Fie Q un grup abelian divizibil. Atunci R -modulul stâng $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ este injectiv.*

Demonstrație. Conform lemei precedente, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ are o structură de R -modul stâng dată de operația

$$(r \cdot f)(a) = f(ar), \quad \forall a, r \in R, f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q).$$

Fie I un ideal stâng al lui R și $h : I \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ un morfism de R -module stângi. Atunci aplicația

$$\gamma : \mathbb{Z}I \longrightarrow \mathbb{Z}Q, \quad \gamma(a) = h(a)(1)$$

definește un morfism de \mathbb{Z} -module. Cum Q este \mathbb{Z} -injectiv, există $\tilde{\gamma} : \mathbb{Z}R \rightarrow \mathbb{Z}Q$ astfel încât $\tilde{\gamma}|_I = \gamma$. Pentru $a \in I$ și $r \in R$ avem

$$(a \cdot \tilde{\gamma})(r) = \tilde{\gamma}(ra) = h(ra)(1) = (r \cdot h(a))(1) = h(a)(r),$$

deci $h(a) = a \cdot \tilde{\gamma}$ pentru orice $a \in I$. Conform criteriului lui Baer, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, Q)$ este R -modul stâng injectiv. \square

Propoziție 2.1.14. *Orice R -modul stâng M poate fi scufundat într-un R -modul stâng injectiv.*

Demonstrație. Există un \mathbb{Z} -modul liber de forma $\mathbb{Z}^{(A)}$ și un \mathbb{Z} -morfism surjectiv $f : \mathbb{Z}^{(A)} \rightarrow M$. Atunci

$$\mathbb{Z}M \cong \mathbb{Z}^{(A)} / \ker f \subseteq \mathbb{Q}^{(A)} / \ker f,$$

și deci există un grup abelian divizibil G astfel încât $\mathbb{Z}M \subseteq \mathbb{Z}G$. Aplicând functorul $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, -)$ obținem un monomorfism

$${}_R M \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, M) \hookrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G).$$

Cum G este divizibil, din Propoziția 2.1.13 rezultă că $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, G)$ este R -modul stâng injectiv. Prin urmare M se scufundă într-un R -modul stâng injectiv. \square

Propoziție 2.1.15. *Fie Q un R -modul. Atunci Q este injectiv dacă și numai dacă orice șir exact de forma*

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M' \longrightarrow 0$$

este scindat.

Demonstrație. „ \Rightarrow ” Presupunem că Q este injectiv. Din exactitatea șirului avem că f este monomorfism. Prin injectivitatea lui Q există $h : M \rightarrow Q$ astfel încât $hf = \text{id}_Q$, ceea ce arată că șirul este scindat.

„ \Leftarrow ” Folosind Propoziția 2.1.14, există un R -modul injectiv Q' și un monomorfism $i : Q \rightarrow Q'$. Avem un șir exact

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{i} Q' \longrightarrow Q'/i(Q) \longrightarrow 0.$$

Prin ipoteză acest șir este scindat, deci Q este sumand direct în Q' . Un sumand direct al unui modul injectiv este injectiv, așadar Q este injectiv. \square

2.2 Anvelope injective

Definiție 2.2.1. Fie M un R -modul. O pereche (E, i) se numește *anvelopă injectivă* a lui M dacă E este modul injectiv și $i : M \rightarrow E$ este un monomorfism esențial.

Propoziție 2.2.2. Fie Q un R -modul injectiv. Atunci orice submodule complement al lui Q este sumand direct în Q .

Demonstrație. Fie K un submodule al lui Q și N un complement al lui K în Q , adică $K \cap N = 0$ și $K + N$ este submodule esențial în Q . Atunci $(K + N)/N \cong Q/N$. Definim $g : (K + N)/N \rightarrow Q$ prin

$$g((x + y) + N) = x, \quad x \in K, y \in N.$$

Cum $K \cap N = 0$, aplicația g este bine definită și este monomorfism. Injectivitatea lui Q asigură existența unui morfism $h : Q/N \rightarrow Q$ astfel încât $h|_{(K+N)/N} = g$. Deoarece $(K + N)/N \cong Q/N$ și g este monomorfism, și h este monomorfism. Avem $K = \text{Im } g = h((K + N)/N) \subseteq h(Q/N)$. Cum K este submodule închis, rezultă $K = h(Q/N)$. Din h monomorfism obținem $(K + N)/N = Q/N$, deci $K + N = Q$. Prin urmare K este un sumand direct în Q . \square

Teoremă 2.2.3 (Eckmann–Schopf). *Orice R -modul M are o anvelopă injectivă unică până la un izomorfism.*

Demonstrație. Din Propoziția 2.1.14 există un R -modul injectiv Q astfel încât $M \leq Q$. Fie E o extensie esențială maximală a lui M în Q . Atunci E este un submodule complement în Q , iar din propoziția precedentă rezultă că E este injectiv. Astfel (E, i) , cu $i : M \hookrightarrow E$ incluziunea, este o anvelopă injectivă a lui M .

Pentru unicitate, fie (E_1, i_1) și (E_2, i_2) două anvelope injective ale lui M . Cum E_2 este injectiv, există $f : E_1 \rightarrow E_2$ astfel încât $f i_1 = i_2$. Morfismul i_2 este monomorfism, iar i_1 este monomorfism esențial, deci (folosind 1.4) rezultă că f este monomorfism. Avem $E_1 \cong f(E_1)$ și $E_2 = f(E_1) \oplus E_3$ pentru un anumit submodule E_3 . Dar $i_2(M) \subseteq f(E_1)$, deci $i_2(M) \cap E_3 = 0$. Cum i_2 este monomorfism esențial, rezultă $E_3 = 0$, deci $E_2 = f(E_1)$ și f este izomorfism. \square

În practică vom considera un reprezentant al acestei clase pe care îl vom nota $E(M)$ astfel încât $M \leq E(M)$.

Propoziție 2.2.4. Fie M un R -modul și $i : M \rightarrow Q$ un monomorfism cu Q_R injectiv. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. (Q, i) este o anvelopă injectivă a lui M ;
2. pentru orice monomorfism $f : M \rightarrow Q'$ cu Q' injectiv, există un monomorfism $g : Q \rightarrow Q'$ astfel încât $gi = f$.

Demonstrație. (1) \Rightarrow (2). Fie $f : M \rightarrow Q'$ un monomorfism cu Q' injectiv. Prin injectivitatea lui Q' există $u : Q \rightarrow Q'$ astfel încât $ui = f$. Cum i este monomorfism esențial și Q' este injectiv, imaginea $u(Q)$ este un complement al lui $f(M)$, iar din definiția anvelopei injective rezultă că u este monomorfism; punem $g = u$.

(2) \Rightarrow (1). Fie $(E(M), j)$ o anvelopă injectivă a lui M . Aplicând (2) la $f = j$ obținem un monomorfism $g : Q \rightarrow E(M)$ cu $gi = j$. Cum j este monomorfism esențial, rezultă că și i este monomorfism esențial, deci (Q, i) este o anvelopă injectivă a lui M . \square

Propoziție 2.2.5. *Oricare ar fi R -modulele drepte M_1, M_2, \dots, M_n avem*

$$E\left(\bigoplus_{i=1}^n M_i\right) \cong \bigoplus_{i=1}^n E(M_i).$$

Demonstrație. Din 1.9, $\bigoplus_{i=1}^n E(M_i)$ este o extensie esențială a lui $\bigoplus_{i=1}^n M_i$. Cum

$$\bigoplus_{i=1}^n E(M_i) \cong \prod_{i=1}^n E(M_i),$$

din 2.1.3 rezultă că $\bigoplus_{i=1}^n E(M_i)$ este injectiv. Prin unicitatea anvelopei injective obținem

$$E\left(\bigoplus_{i=1}^n M_i\right) \cong \bigoplus_{i=1}^n E(M_i).$$

\square

Teoremă 2.2.6. *Fie Q și M două R -module. Atunci Q este M -injectiv dacă și numai dacă $f(M) \leq Q$, oricare ar fi $f \in \text{Hom}(E(M), E(Q))$.*

Demonstrație. „ \Rightarrow ” Fie $f \in \text{Hom}(E(M), E(Q))$ și notăm

$$K := \{m \in M \mid f(m) \in Q\}.$$

Cum Q este M -injectiv, există un morfism $\bar{f} : M \rightarrow Q$ astfel încât $\bar{f}|_K = f|_K$. Arătăm că

$$Q \cap (\bar{f} - f)(M) = 0.$$

Fie $x \in Q$ și $m \in M$ cu $x = (\bar{f} - f)(m)$. Atunci

$$f(m) = \bar{f}(m) - x \in Q,$$

deci $m \in K$. Urmează că

$$x = \bar{f}(m) - f(m) = f(m) - f(m) = 0.$$

Prin urmare $Q \cap (\bar{f} - f)(M) = 0$ și, cum $Q \leq E(Q)$, rezultă că $(\bar{f} - f)(M) = 0$. Așadar $f(M) = \bar{f}(M) \leq Q$.

„ \Leftarrow ” Întrucât $E(Q)$ este injectiv, este suficient să considerăm $f \in \text{Hom}(M, E(Q))$. Fie N un submodul al lui M și $g : N \rightarrow Q$ un morfism de R -module. Cum $E(Q)$ este injectiv, există un morfism $\tilde{g} : M \rightarrow E(Q)$ astfel încât $\tilde{g}|_N = i \circ g$, unde $i : Q \rightarrow E(Q)$ este injecția canonică. Prin ipoteză avem $\tilde{g}(M) \leq Q$, astfel încât, identificând \tilde{g} cu corestricția sa la Q , obținem un morfism $h : M \rightarrow Q$ cu $h|_N = g$. Prin urmare Q este M -injectiv. \square

Corolar 2.2.7. *Un R -modul Q este quasi-injectiv dacă și numai dacă $f(Q) \leq Q$ pentru orice $f \in \text{End}(E(Q))$.*

Teoremă 2.2.8 (Matlis–Bass). *Fie R un inel. Atunci R este noetherian la dreapta dacă și numai dacă, pentru orice R -modul simplu S_i ($i \geq 1$),*

$$Q := \bigoplus_{i=1}^{\infty} E(S_i)$$

este un R -modul injectiv.

Demonstrație. „ \Rightarrow ” Fie L un ideal drept al lui R ,

$$Q = \bigoplus_{i=1}^{\infty} E(S_i)$$

și $f : L \rightarrow Q$ un morfism de R -module. Există elemente $a_1, \dots, a_n \in L$ astfel încât

$$L = a_1 R + a_2 R + \dots + a_n R.$$

În mod evident există $m \geq 1$ astfel încât $f(a_k) \in \bigoplus_{j=1}^m E(S_j)$ pentru orice $k = 1, \dots, n$, deci

$$\Im f \subseteq \bigoplus_{j=1}^m E(S_j).$$

Cum $\bigoplus_{j=1}^m E(S_j)$ este injectiv, există $g : R \rightarrow \bigoplus_{j=1}^m E(S_j)$ astfel încât $g|_L = f$. Notăm $\bar{f} = i \circ g$, unde $i : \bigoplus_{j=1}^m E(S_j) \rightarrow Q$ este injecția canonică. Atunci $\bar{f}|_L = f$, deci Q este injectiv.

„ \Leftarrow ” Presupunem că R nu este noetherian la dreapta. Atunci există un șir strict ascendent de ideale la dreapta, finit generate:

$$L_1 \subsetneq L_2 \subsetneq \dots \subsetneq L_n \subsetneq \dots$$

Din lema lui Krull rezultă că, pentru orice $n \geq 1$, există un submodul maximal $M_n \subsetneq L_n$ astfel încât

$$L_{n-1} \subseteq M_n \quad \text{pentru orice } n \geq 2.$$

Fie

$$L := \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k, \quad \pi_k : L_k \longrightarrow L_k/M_k$$

proiecțiile canonice și

$$E_k := E(L_k/M_k) \quad \text{pentru orice } k \geq 1.$$

Atunci

$$E := \bigoplus_{k=1}^{\infty} E_k$$

este injectiv și

$$f : L \longrightarrow E, \quad f(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k(a)$$

este bine definit. Există un element $x \in E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ astfel încât $f(a) = xa$ pentru orice $a \in L$. Rezultă că $\pi_k(a) = 0$ pentru orice $k \geq n+1$, adică $a \in M_k$ pentru orice $k \geq n+1$. Prin urmare

$$L \subseteq M_{n+1} \subsetneq L_{n+1} \subseteq M_{n+2} \subsetneq L_{n+2} \subseteq \cdots \subseteq L,$$

contradicție. Obținem că R este noetherian la dreapta. □

Capitolul 3

Sume directe de module coireductibile

Propoziție 3.1. Fie M un R -modul și $E(M)$ anvelopa sa injectivă. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $E(M)$ este indecompozabil.
2. Dacă L și K sunt submodule nenule ale lui M , atunci $L \cap K \neq 0$.
3. Dacă $x, y \in M \setminus \{0\}$, atunci există $a, b \in R$ astfel încât $0 \neq xa = yb$.
4. M este o extensie esențială a oricărui submodule nenul al său.

Demonstrație. (2) \Rightarrow (1). Presupunem că $E(M) = L' \oplus K'$ cu L' și K' submodule nenule ale lui $E(M)$. Cum $M \leq E(M)$, avem că $L = L' \cap M \neq 0$ și $K = K' \cap M \neq 0$, deci

$$L \cap K = (L' \cap K') \cap M = 0,$$

ceea ce contrazice ipoteza (2).

(1) \Rightarrow (2). Presupunem că există L, K submodule nenule ale lui M astfel încât $L \cap K = 0$. Atunci $E(L) \leq E(M)$ și $K \cap E(L) = 0$ (altfel, cum $L \subseteq E(L)$, am avea $L \cap K \neq 0$). Dar șirul exact scurt

$$0 \longrightarrow E(L) \longrightarrow E(M) \longrightarrow E(M)/E(L) \longrightarrow 0$$

este scindat deoarece $E(L)$ este injectiv și deci $E(M) \cong E(L) \oplus E(M)/E(L)$. Obținem astfel

$$0 = K \cap E(L) = K \cap E(M) = K,$$

contradicție.

Echivalențele (2) \Leftrightarrow (3) și (2) \Leftrightarrow (4) sunt evidente. □

Definiție 3.2. Un modul M care satisface una din condițiile echivalente de mai sus se numește *coireductibil* (sau *uniform*). Fie M un R -modul și N un submodule propriu al său. Dacă M/N este coireductibil, atunci spunem că N este *ireductibil* în M . Este clar că N este ireductibil în M dacă și numai dacă din egalitatea $N = P \cap Q$, unde $P, Q \leq M$, rezultă $N = P$ sau $N = Q$.

Exemplu.

1. Este clar că orice modul simplu este coireductibil.
2. \mathbb{Z} este \mathbb{Z} -modul coireductibil.
3. Din Propoziția 3.1 rezultă că un modul injectiv este indecompozabil dacă și numai dacă este coireductibil. În particular, dacă M este un R -modul coireductibil, atunci $E(M)$ este coireductibil. Rezultă că \mathbb{Q} și \mathbb{Z}_{p^∞} sunt \mathbb{Z} -module coireductibile.
4. \mathbb{Z}_n este \mathbb{Z} -modul coireductibil dacă și numai dacă n este puterea unui număr prim. Dacă $n = p^k$ cu $p \geq 2$ și $k \geq 1$, atunci $\langle p^m \rangle \subseteq \langle p^i \rangle \cap \langle p^j \rangle$ pentru orice $i, j \in \{1, \dots, k-1\}$, unde $m = \min(i, j)$, și deci \mathbb{Z}_{p^k} este coireductibil. Reciproc, presupunem că \mathbb{Z}_n este coireductibil și $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ este descompunerea lui n în factori primi. Dacă $s \geq 2$, atunci avem

$$\langle p_1^{\alpha_1} \cdots p_{s-1}^{\alpha_{s-1}} \rangle + \mathbb{Z} \quad \text{și} \quad \langle p_s^{\alpha_s} \rangle + \mathbb{Z}$$

submodule nenule a căror intersecție este zero, contradicție. Obținem că $s = 1$, deci n este o putere a unui număr prim.

Propoziție 3.3. *Fie M un R -modul și N un submodule propriu al lui M . Dacă $x \in M \setminus N$, atunci există un submodule ireductibil P al lui M astfel încât $N \subseteq P$ și $x \notin P$.*

Demonstrație. Fie

$$\mathfrak{S} = \{ N' \leq M \mid N \subseteq N' \text{ și } x \notin N' \}.$$

Mulțimea \mathfrak{S} , ordonată prin incluziune, este inductivă, deci, prin lema lui Zorn, admite un element maximal P . Arătăm că P este ireductibil în M . Presupunem că $P = U \cap V$ cu $U, V \leq M$ și $P \subsetneq U$, $P \subsetneq V$. Cum $x \notin P$, avem $x \notin U$ sau $x \notin V$; să spunem $x \notin U$. Atunci $U \in \mathfrak{S}$ și $P \subsetneq U$, ceea ce contrazice maximalitatea lui P . Rezultă că P este ireductibil. \square

Corolar 3.4. *Fie M un R -modul și N un submodule propriu al lui M . Atunci N este intersecție de submodule ireductibile în M .*

Demonstrație. Rezultă imediat din propoziția anterioară. \square

Corolar 3.5. *Let M be an R -module and N a proper submodule of M . Then N is the intersection of irreducible submodules of M .*

Demonstrație. This follows immediately from Proposition 3.3, applied to each $x \in M \setminus N$. \square

Demonstrație. 1) Rezultă imediat din 3.1.

2) Fie $M \trianglelefteq E$ o extensie esențială a lui M . Dacă E_1, E_2 sunt submodule nenule ale lui E , atunci $M \cap E_1 \neq 0$ și $M \cap E_2 \neq 0$, de unde rezultă că

$$(M \cap E_1) \cap (M \cap E_2) \neq 0$$

și deci $E_1 \cap E_2 \neq 0$, adică E este coireductibil. \square

Lemă 3.6. Fie M un R -modul și $(M_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ o familie de submodule independente. Dacă N este un submodule al lui M astfel încât

$$N \cap \left(\sum_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha \right) \neq 0,$$

există un submodule nenul într-un M_α izomorf cu un submodule din N .

Demonstrație. Dacă $\text{Card } \Lambda = 1$, afirmația este evidentă.

Dacă $\text{Card } \Lambda = 2$, punem $P = N \cap (M_1 + M_2)$. Dacă $N \cap M_1 = 0$, atunci $P \cong (P + M_1)/M_1$ și

$$(P + M_1)/M_1 \leq (M_1 + M_2)/M_1 \cong M_2.$$

Deci P este izomorf cu un submodule din M_2 . Dacă Λ este mulțime finită, procedând prin inducție, demonstrația se reduce la cazul precedent.

Dacă Λ este infinită, considerăm $x \in N \cap \left(\sum_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha \right)$, $x \neq 0$. Atunci există $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Lambda$ astfel încât

$$xR \cap (M_{\alpha_1} + M_{\alpha_2} + \dots + M_{\alpha_n}) \neq 0$$

și ne reducem la cazul în care Λ este finită. □

Observație 3.7. Fie M un R -modul drept și Ω mulțimea de submodule coireductibile din M . Este posibil ca $\Omega = \emptyset$. Fie

$$\mathcal{S} = \left\{ \Omega' \subseteq \Omega \mid \sum_{N \in \Omega'} N \text{ este directă} \right\}.$$

Perechea (\mathcal{S}, \subseteq) este inductivă și, din lema lui Zorn, \mathcal{S} are un element maximal Ω_0 . Punem $S = \bigoplus_{N \in \Omega_0} N$. Spunem că S este o sumă directă maximală de submodule coireductibile din M .

Propoziție 3.8. Fie M un R -modul și S o sumă directă maximală de submodule coireductibile din M . Dacă N este un submodule nenul al lui M , atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $S \cap N \neq 0$;
2. N conține un submodule coireductibil.

Demonstrație. Implicația $(1) \Rightarrow (2)$ rezultă din lema 3.6.

Implicația $(2) \Rightarrow (1)$ rezultă din maximalitatea lui S . □

Teoremă 3.9. Fie M un R -modul și S o sumă directă maximală de submodule coireductibile din M . Există un submodule K maximal printre submodulele lui M care nu conțin nici un coireductibil, cu proprietățile:

1. $S + K$ este directă;
2. $(S \oplus K) \leq M$.

Demonstrație. 1. Fie

$$\mathcal{S} = \{ L \leq M \mid \forall L' \leq L, L' \text{ nu este coireductibil} \}.$$

Avem $\mathcal{S} \neq \emptyset$ deoarece $0 \in \mathcal{S}$ și \mathcal{S} este inductivă. Din lema lui Zorn, \mathcal{S} are un element maximal K . Din Propoziția 3.8 rezultă că $S \cap K = 0$.

2. Presupunem că $N \cap (S \oplus K) = 0$, unde N este un submodul nenul al lui M . Atunci $(N + K) \cap S = 0$ și din Propoziția 3.8 rezultă că $N + K$ nu conține nici un submodul coireductibil, ceea ce contrazice maximalitatea lui K . Obținem că $(S \oplus K) \trianglelefteq M$.

□

Definiție 3.10. Fie M un R -modul. O intersecție finită de submodule

$$\bigcap_{i \in I} N_i \quad (I \text{ finit})$$

se numește *redușă* dacă, oricare ar fi $i \in I$, avem

$$\bigcap_{i \in I} N_i \neq \bigcap_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} N_j.$$

Este clar că, dacă avem o intersecție finită $N = \bigcap_{i \in I} N_i$ de submodule ireductibile, ea poate fi adusă întotdeauna la o intersecție redusă de submodule ireductibile.

Teoremă 3.11 (Teorema (Kuros-Ore)). *Fie M un R -modul și N un submodul al lui M . Presupunem că avem intersecțiile finite reduse pentru N :*

$$N = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_m = L_1 \cap L_2 \cap \cdots \cap L_n,$$

unde N_i și L_j sunt submodule ireductibile din M . Atunci $m = n$.

Demonstrație. Notăm $N'_i = N_1 \cap \cdots \cap N_{i-1} \cap N_{i+1} \cap \cdots \cap N_m$. Avem că $N \subseteq N'_i$ și $N = N_i \cap N'_i$. Fie $P_j = N_i \cap L_j$, $\forall j = 1, \dots, n$. Atunci $N \subseteq P_j \subseteq N'_i$ și $P_j \subseteq L_j$, de unde rezultă că

$$N \subseteq \bigcap_{j=1}^n P_j \subseteq \bigcap_{j=1}^n L_j = N,$$

și deci $\bigcap_{j=1}^n P_j = N$.

Cum N_i este ireductibil în M , rezultă că N_i este ireductibil în $N_i + N'_i$, și deci

$$\frac{N'_i}{N'_i \cap N_i} \cong \frac{N_i + N'_i}{N_i}$$

este coirreductibil, ceea ce arată că N este ireductibil în N'_i .

Atunci, din egalitatea $N = \bigcap_{j=1}^n P_j$, există un j astfel încât $N = P_j$. Deci $N = N_i \cap L_j$, adică

$$N = N_i \cap \cdots \cap N_{i-1} \cap L_j \cap N_{i+1} \cap \cdots \cap N_m.$$

Notăm $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $J = \{1, 2, \dots, n\}$ și fie $i_1 \in I$. Există $j_1 \in J$ astfel încât

$$N = L_{j_1} \cap \left(\bigcap_{i \neq i_1} N_i \right).$$

Deoarece intersecția este finită, putem să o reducem: din reducerea succesivă și prin faptul că nu dispare niciun L_{j_k} , obținem un șir strict descrescător

$$J \supseteq J_1 \supseteq J_2 \supseteq \dots \supseteq J_r,$$

cu cel mult $r \leq m$ elemente, astfel încât pentru un anumit set final $J' \subseteq J$,

$$N = \bigcap_{j \in J'} L_j.$$

Este clar că $r \leq m$. Cum intersecția $N = L_1 \cap \dots \cap L_n$ este redusă, avem $J' = J$. Pe de altă parte, J' are cel mult r elemente, deci $n \leq r \leq m$, iar simetric $m \leq n$. \square

Teoremă 3.12. Fie M un R -modul și $(N_i)_{i=1}^m$ și $(L_j)_{j=1}^n$ două familii independente de submodule coirreductibile astfel încât

$$\bigoplus_{i=1}^m N_i \subseteq M \quad \text{și} \quad \bigoplus_{j=1}^n L_j \subseteq M$$

sunt esențiale în M . Atunci $m = n$.

Demonstrație. Notăm $N'_k = \bigoplus_{i \neq k} N_i$, pentru fiecare $k = 1, \dots, m$. Atunci $N_k \cap N'_k = 0$.

Se verifică ușor că mulțimea

$$\mathfrak{S}_k = \{P \leq M \mid N_k \cap P = 0 \text{ și } N_k \subseteq P\}$$

este inductivă. Din lema lui Zorn, are un element maximal P_k . Dacă $Q, Q' \leq M$ sunt astfel încât $P_k \subseteq Q \subseteq Q'$, atunci $N_k \cap Q \neq 0$ și $N_k \cap Q' \neq 0$, iar ireductibilitatea lui N_k arată că $P_k = Q = Q'$. Deci P_k este coirreductibil pentru fiecare k .

Fie $k \in \{1, \dots, m\}$. Atunci

$$N = \bigoplus_{k=1}^m N_k = N_k \oplus N'_k.$$

Aplicând legea distributivității module, obținem

$$N \cap P_k = (N_k \oplus N'_k) \cap P_k = N_k + (N'_k \cap P_k),$$

deci $N \cap P_k = N_k$. Rezultă că

$$N \cap \bigcap_{k=1}^m P_k = \bigcap_{k=1}^m (N \cap P_k) = \bigcap_{k=1}^m N_k = 0.$$

Dar $N \cap V M$, deci $\bigcap_{k=1}^m P_k = 0$.

Cum $N_i = \bigcap_{k \neq i} P_k$, avem că fiecare intersecție este redusă.

Analog, pentru familia (L_j) , obținem submodule ireductibile (Q_j) astfel încât $\bigcap_{j=1}^n Q_j = 0$, reducând intersecția.

Din teorema Kuros–Ore, rezultă $m = n$. \square

Definiție 3.13. Spunem că un R -modul M are *dimensiune coireductibilă finită* dacă există o familie finită independentă $(N_i)_{i=1}^n$ de submodule coireductibile din M astfel încât

$$\bigoplus_{i=1}^n N_i \leq M.$$

În acest caz numărul n se numește *dimensiunea coireductibilă* a lui M și scriem $\dim M = n$.

Teoremă 3.14. Fie M un R -modul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. M are dimensiune coireductibilă finită.
2. M satisface condiția lanțurilor ascendente pentru sume directe.

Demonstrație. (2) \Rightarrow (1). Fie \mathcal{S}' și \mathcal{S} două familii finite de submodule independente din M . Spunem că \mathcal{S}' este o *rafinare* a lui \mathcal{S} dacă oricare submodul din \mathcal{S}' este conținut într-un submodul din \mathcal{S} . Se verifică ușor că relația de rafinare este o relație de ordine pe mulțimea familiilor de submodule ale lui M . Cum M satisface (2), există o familie \mathcal{S}_0 de submodule independente ale lui M , maximală în raport cu relația de rafinare.

Fie $N \in \mathcal{S}_0$. Dacă N nu este coireductibil, există două submodule nenule $P, Q \leq N$ astfel încât $P \cap Q = 0$. Este clar că din \mathcal{S}_0 se obține o rafinare proprie a lui \mathcal{S}_0 , contradicție. Rezultă că orice submodul din \mathcal{S}_0 este coireductibil, deci M conține un submodul coireductibil. Dacă L este un submodul nenul al lui M , atunci și L satisface condiția (2) și, prin același raționament, L conține un submodul coireductibil.

Fie acum

$$S = \bigoplus_{i \in I} N_i$$

o sumă directă maximală de submodule coireductibile din M și N un submodul nenul al lui M . Cum M satisface condiția lanțurilor ascendente pentru sume directe, rezultă că mulțimea I este finită. Din Propoziția 3.8 rezultă că $S \cap N \neq 0$, ceea ce arată că $S \leq M$. Prin definiție, M are dimensiune coireductibilă finită.

(1) \Rightarrow (2). Fie

$$S = \bigoplus_{i=1}^n N_i$$

o sumă directă de submodule coireductibile astfel încât $S \leq M$. Dacă N este un submodul nenul al lui M , atunci $S \cap N \neq 0$, iar din Lema 3.6 rezultă că N conține un submodul coireductibil.

Fie $(L_j)_{j=1}^m$ o familie independentă de submodule ale lui M . Din paragraful precedent rezultă că fiecare L_j conține un submodul coireductibil P_j . Evident, familia $(P_j)_{j=1}^m$ este independentă. Din Teorema 3.12 obținem că $m \leq n$. Aceasta arată că orice familie independentă de submodule poate fi extinsă numai până la o familie finită, ceea ce este echivalent cu condiția lanțurilor ascendente pentru sume directe. \square

Observație 3.15. Fie M un R -modul. Atunci:

1. Dacă $N \leq M$, atunci M are dimensiune coireductibilă finită dacă și numai dacă N are dimensiune coireductibilă finită și, în acest caz, $\dim M = \dim N$.
2. Dacă $M = \bigoplus_{i=1}^n N_i$, atunci M are dimensiune coireductibilă finită dacă și numai dacă fiecare N_i are dimensiune coireductibilă finită pentru orice $i = 1, \dots, n$.
În plus avem

$$\dim M = \sum_{i=1}^n \dim N_i.$$

Capitolul 4

Domenii Ore și inele Goldie

Definiție 4.1. Un domeniu de integritate D se numește *domeniu Ore la dreapta* (respectiv la stânga) dacă $aD \cap bD \neq 0$ (respectiv $Da \cap Db \neq 0$) oricare ar fi $a, b \in D \setminus \{0\}$.

Propoziție 4.2. Fie D un domeniu de integritate. Atunci D este un domeniu Ore la dreapta dacă și numai dacă D conține un ideal drept coireductibil. În particular, această condiție este verificată când D satisface condiția lanțurilor ascendente pentru sume directe de ideale drepte.

Demonstrație. „ \Rightarrow ” Dacă D este un domeniu Ore la dreapta atunci D_D este coireductibil.

„ \Leftarrow ” Fie X un ideal drept coireductibil al lui D și $x \in X \setminus \{0\}$. Aplicația

$$\varphi_x : D_D \longrightarrow X, \quad \varphi_x(a) = xa$$

este un morfism injectiv de D -module drepte. Atunci D_D este coireductibil și deci D este domeniu Ore la dreapta. \square

Exemplu 4.3. Fie K un corp comutativ și y o nedeterminată. Considerăm $K(y)$ corpul de fracții al inelului de polinoame $K[y]$. Dacă x este o altă nedeterminată, considerăm $K(y)[x]$ mulțimea polinoamelor cu coeficienți în $K(y)$ și în nedeterminata x . Pe această mulțime definim două operații: operația de adunare fiind adunarea obișnuită a polinoamelor, iar operația de înmulțire în $K(y)[x]$ o definim prin relația de comutare

$$xf(y) = f(y^2)x, \quad f \in K(y).$$

Se verifică imediat că mulțimea $K(y)[x]$, cu cele două operații, este un inel unitar. Notăm $A = K(y)[x]$. A este un domeniu de integritate necomutativ.

Orice element din A poate fi pus sub formă unică:

$$P(x) = f_n(y)x^n + f_{n-1}(y)x^{n-1} + \cdots + f_1(y)x + f_0(y),$$

unde n este un număr natural și $f_0(y), f_1(y), \dots, f_n(y) \in K(y)$, $f_n(y) \neq 0$. Vom nota $\deg P(x) = n$.

Observăm că, dacă $P(x), Q(x) \in A$ cu $Q(x) \neq 0$, există două elemente $S(x), R(x) \in A$ astfel încât

$$P(x) = S(x)Q(x) + R(x) \tag{*}$$

cu $R(x) = 0$ sau $\deg R(x) < \deg Q(x)$. Din relațiile (*) rezultă că A este inel principal la stânga. Rezultă că A satisface condiția lanțurilor ascendente pentru sume directe de ideale la stânga și deci A este domeniu Ore la stânga.

Să arătăm egalitatea $xA \cap yA = 0$. Fie $\alpha \in xA \cap yA$. Atunci

$$\alpha = x(f_n(y)x^n + \cdots + f_0(y)) = yx(g_m(y)x^m + \cdots + g_0(y)),$$

de unde

$$f_n(y^2)x^{n+1} + \cdots + f_0(y^2)x = y(g_m(y^2)x^{m+1} + \cdots + g_0(y^2)x)$$

și deci $m = n$. Rezultă

$$f_n(y^2) = yg_m(y^2), \dots, f_0(y^2) = yg_0(y^2),$$

ceea ce are loc dacă și numai dacă $f_n(y) = \cdots = f_1(y) = f_0(y) = 0$ și deci $\alpha = 0$. Rezultă că A nu este domeniu Ore la dreapta.

INELE GOLDIE

Definiție 4.4. Un ideal drept (respectiv stâng) I se numește *ideal anulador la dreapta* (respectiv la stânga) dacă există o submulțime nevidă X a lui R astfel încât $I = \text{ann}_r(X)$ (respectiv $I = \text{ann}_l(X)$).

Un inel R se numește *inel Goldie la dreapta* dacă R satisface condiția lanțurilor ascendente pentru ideale anulatori la dreapta și nu există în R o sumă directă infinită de ideale drepte nenule.

Exemplu 4.5.

1. Dacă R este inel noetherian la dreapta, atunci R este inel Goldie la dreapta. În particular, \mathbb{Z} este inel Goldie.
2. Dacă R este un domeniu de integritate, atunci R este inel Goldie la dreapta dacă și numai dacă R este domeniu Ore la dreapta.
3. Din exemplul 4.3 rezultă că există inele Goldie la stânga care nu sunt Goldie la dreapta.

Propoziție 4.6. Fie R un inel. Atunci R verifică condiția lanțurilor ascendente pentru ideale anulatori la dreapta (respectiv la stânga) dacă și numai dacă R verifică condiția lanțurilor descendente pentru ideale anulatori la stânga (respectiv la dreapta).

Demonstrație. “ \Rightarrow ” Fie $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$ un șir descendent de ideale anulatori la stânga. Pentru orice $j \geq 1$ există o mulțime nevidă $X_j \subseteq R$ astfel încât $I_j = \text{ann}_l(X_j)$.

Atunci obținem șirul ascendent de ideale anulatori la dreapta

$$\text{ann}_r(I_1) \subseteq \text{ann}_r(I_2) \subseteq \cdots \subseteq \text{ann}_r(I_n) \subseteq \cdots$$

și deci există $m \geq 1$ astfel încât $\text{ann}_r(I_m) = \text{ann}_r(I_{m+k})$ pentru orice $k \geq 1$. Rezultă că

$$\text{ann}_l(\text{ann}_r(I_m)) = \text{ann}_l(\text{ann}_r(I_{m+k})) \quad \text{pentru orice } k \geq 1,$$

adică $I_m = I_{m+k}$ pentru orice $k \geq 1$.

Folosind relațiile $\text{ann}_l(\text{ann}_r(\text{ann}_l(X))) = \text{ann}_l(X)$ și $\text{ann}_r(Y) \subseteq \text{ann}_r(X)$ dacă $X \subseteq Y$, implicația “ \Leftarrow ” se demonstrează analog. \square

Propoziție 4.7. *Fie R un inel semiprim care satisface condiția lanțurilor ascendente pentru ideale anulatori la dreapta. Dacă I și J sunt ideale drepte astfel încât $I \subseteq J$, atunci există un element $b \in R$ astfel încât $bJ \neq 0$ și $bJ \cap I = 0$.*

Demonstrație. Din lema precedentă există un element minimal a în mulțimea idealelor anulatori la stânga astfel încât $\text{ann}_\ell(J) \subseteq \text{ann}_\ell(I)$. Atunci $aJ \neq 0$, iar cum R este inel semiprim, obținem $aJ \cdot aJ \neq 0$ și deci există $b = xa$ cu $x \in J$, $a \in aJ$ astfel încât $xaJ \neq 0$. Evident, $bJ \neq 0$.

Rămâne să arătăm că $bJ \cap I = 0$. Fie $\lambda \in bJ \cap I$, deci $\lambda = b\mu = xa\mu \in I$ pentru un $\mu \in J$. Cum $\text{ann}_\ell(J) \subseteq \text{ann}_\ell(\lambda)$, obținem

$$\text{ann}_\ell(J) \subseteq \text{ann}_\ell(\lambda) \subseteq \text{ann}_\ell(\mu).$$

Deoarece $a \in aJ \subseteq aR$, avem

$$xa \in a \quad \text{și deci} \quad xaJ \subseteq aJ. \quad (4.1)$$

Pe de altă parte, $xaJ \subseteq I$, iar $\lambda \in I$ și $a \subseteq \text{ann}_r(I)$, astfel încât

$$a \subseteq \text{ann}_\ell(\mu). \quad (4.2)$$

Dar cum $xaJ \neq 0$, avem

$$a \not\subseteq \text{ann}_\ell(J). \quad (4.3)$$

Din (4.1), (4.2) și (4.3) obținem că $\text{ann}_\ell(J) \subseteq \text{ann}_\ell(\mu) \cap a$. Dacă $\lambda \neq 0$, atunci $xa\mu \notin \text{ann}_\ell(\mu)$ și, cum $xa \in a$, rezultă că $xa\mu \neq 0$, ceea ce contrazice alegerea lui a . Deci $\lambda = 0$, și atunci $bJ \cap I = 0$. \square

Corolar 4.8. *Dacă R este un inel Goldie la dreapta semiprim, atunci R satisface condiția lanțurilor descendente pentru ideale anulatori la dreapta.*

Demonstrație. Presupunem că există un șir strict descrescător de ideale anulatori la dreapta

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$$

Atunci pentru orice $n \geq 1$ avem $\text{ann}_\ell(I_n) \neq \text{ann}_\ell(I_{n+1})$. Din Propoziția 4.7 rezultă că pentru orice $n \geq 1$ există un ideal drept K_n astfel încât $K_n \subseteq I_n$ și $K_n \cap I_{n+1} \neq 0$. Atunci suma directă $\sum_{n \geq 1} K_n$ este o sumă directă infinită de ideale drepte nenule, în contradicție cu faptul că R este Goldie la dreapta. \square

Propoziție 4.9. *Fie R un inel semiprim care satisface condiția lanțurilor ascendente pentru ideale anulatori la dreapta. Dacă $x, y \in R$ sunt astfel încât xR și yR sunt esențiale în R_R , atunci xyR este esențial.*

Demonstrație. Fie $I \leq R_R$ cu $I \neq 0$. Notăm

$$J = \{I : x\} = \{a \in R \mid xa \in I\}.$$

Atunci J este un ideal drept al lui R , iar $xJ = xR \cap I \neq 0$ deoarece $xR \leq R_R$. Cum $\text{ann}_r(x) \subseteq J$ și $xJ \neq 0$ iar $\text{ann}_\ell(x) = 0$, obținem

$$\text{ann}_\ell(J) \subseteq \text{ann}_\ell(\text{ann}_r(x)).$$

Din Propoziția 4.7 rezultă că există un ideal drept $K \neq 0$ astfel încât $K \subseteq J$ și $K \cap \text{ann}_r(x) = 0$.

Notăm apoi

$$L = \{K : y\} = \{a \in R \mid ya \in K\}.$$

Deoarece $yR \trianglelefteq R_R$, avem $yL = yR \cap K \neq 0$. Dacă $xyL = 0$, atunci $yL \subseteq \text{ann}_r(x)$ și deci $yL \subseteq \text{ann}_r(x) \cap K = 0$, contradicție. Prin urmare $xyL \neq 0$.

Cum $xyL \subseteq xK \subseteq xJ \subseteq xR \cap I$, rezultă că $0 \neq xyL \subseteq xyR \cap I$, ceea ce arată că $xyR \trianglelefteq R_R$. \square

Propoziție 4.10. *Fie R un inel care verifică condiția lanțurilor ascendente pentru ideale anulatori drepte. Atunci, pentru orice $a \in R$ există un număr $k \geq 0$ astfel încât*

$$\text{ann}_r(a^n) = \text{ann}_r(a^m) \quad \text{pentru orice } n \geq 0 \text{ și } m \geq k.$$

Demonstrație. Avem lanțul ascendent de ideale anulatori la dreapta:

$$\text{ann}_r(a) \subseteq \text{ann}_r(a^2) \subseteq \cdots \subseteq \text{ann}_r(a^n) \subseteq \cdots.$$

Fie $k \geq 0$ astfel încât $\text{ann}_r(a^k) = \text{ann}_r(a^m)$ pentru orice $m \geq k$. Dacă $\lambda \in \text{ann}_r(a^n) \cap a^m R$, atunci $a^n \lambda = 0$ și $\lambda = a^m \mu$, de unde $a^{m+n} \mu = 0$. Cum $m + n \geq k$, obținem că $\mu \in \text{ann}_r(a^k)$ și deci $a^k \mu = 0$. Cum $m \geq k$, putem scrie $\lambda = a^{m-k} a^k \mu = 0$ și deci

$$\text{ann}_r(a^n) \cap a^m R = 0.$$

\square

Corolar 4.11. *Suntem în condițiile propoziției 4.10. Dacă $xR \trianglelefteq R_R$, atunci x este element regulat în R .*

Demonstrație. Dacă $\text{ann}_r(x) \neq 0$, atunci $0 = \text{ann}_r(R) \neq \text{ann}_r(xR)$ și deci există un ideal drept $I \neq 0$ astfel încât $I \cap xR = 0$, contradicție. Deci $\text{ann}_r(x) = 0$.

Din Propoziția 4.9 rezultă că $x^n R \trianglelefteq R_R$ pentru orice $n \geq 1$. Aplicând Propoziția 4.10, găsim $k \geq 0$ astfel încât $\text{ann}_r(x^n) \cap x^m R = 0$ pentru orice $m \geq k$. În special $\text{ann}_r(x) = 0$, deci x este element regulat în R . \square

Corolar 4.12. *Fie R un inel Goldie la dreapta și semiprime. Dacă $\text{ann}_r(x) = 0$, unde $x \in R$, atunci $xR \trianglelefteq R_R$ și x este regulat.*

Demonstrație. Fie I un ideal drept nenul al lui R . Presupunem că $I \cap xR = 0$. Atunci suma

$$\sum_{n \geq 1} x^n I$$

este directă. Într-adevăr, $x^p I \cap \sum_{n \neq p} x^n I$ este egală cu $xI \cap x^p I$, dacă $p = 1$. Dacă $y \in xI \cap x^p I$, atunci $y = x\lambda = x^2\mu$, unde $\lambda, \mu \in I$. Dar atunci $\lambda - x\mu \in \text{ann}_r(x)$ și deci $\lambda = x\mu$, de unde obținem că $\lambda \in I \cap xR = 0$. Rezultă că $\lambda = 0$ și atunci $y = 0$. Așadar $xI \cap x^2 I = 0$ și cu atât mai mult $xI \cap x^p I = 0$ dacă $p \neq 1$. Deci $x^p I \cap \sum_{n \neq p} x^n I = 0$ și prin urmare suma $\sum_{n \geq 1} x^n I$ este directă, contradicție.

Rezultă că $xR \trianglelefteq R_R$. Din Corolarul 4.11 deducem că x este element regulat în R . \square

Propoziție 4.13. *Fie R un inel Goldie la dreapta și semiprime. Atunci:*

- (a) *Orice ideal bilateral al lui R anulador la dreapta conține un ideal bilateral anulador la dreapta minimal.*
- (b) *Există o sumă directă finită de ideale bilaterale nenule anulatori la dreapta minimale ale lui R , care este esențială în R .*

Demonstrație. (a) Rezultă din Corolarul 4.8.

(b) Fie $I = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n$ o sumă directă maximală, unde I_1, \dots, I_n sunt ideale nenule bilaterale anulatori la dreapta minimale ale lui R . Fie $K \leq R_R$, $K \neq 0$ astfel încât $I \cap K = 0$. Cum $KI \subseteq I \cap K = 0$, rezultă că $K \subseteq \text{ann}_r(I)$. Cum R este semiprime, avem $I \cap \text{ann}_r(I) = 0$, de unde $I \text{ann}_r(I) = 0$, deci $\text{ann}_l(I) \subseteq \text{ann}_r(I)$ și în special $\text{ann}_r(I) \neq 0$. Cum R este semiprim, rezultă și că $I \cap \text{ann}_l(I) = 0$, unde $\text{ann}_l(I)$ este un ideal bilateral. Din (a) există un ideal bilateral nenul J anulador la dreapta și minimal astfel încât $J \subseteq \text{ann}_r(I)$ și $J \cap I = 0$, ceea ce contrazice alegerea lui I ca sumă directă maximală. Prin urmare $I \trianglelefteq R$. \square

Propoziție 4.14. *Fie R un inel Goldie la dreapta și prim. Dacă I este un ideal drept esențial în R , atunci I conține un element regulat al lui R .*

Demonstrație. Fie $a \in I$ astfel încât $\text{ann}_r(a)$ este minimal în mulțimea $\{\text{ann}_r(x) \mid x \in I\}$. Fie $J \leq R_R$, $J \neq 0$ pentru care $aR \cap J = 0$. Cum $I \trianglelefteq R_R$, avem $I \cap J \neq 0$; putem presupune că J este un ideal drept nenul al lui R inclus în I și pentru care $aR \cap J = 0$.

Fie $x \in J$. Dacă $\lambda \in \text{ann}_r(a+x)$, atunci $a\lambda + x\lambda = 0$ și deci $x\lambda = -a\lambda \in aR \cap J$, de unde $x\lambda = 0$ și apoi $a\lambda = 0$. Așadar $\lambda \in \text{ann}_r(a) \cap \text{ann}_r(x)$. Cum incluziunea

$$\text{ann}_r(a) \cap \text{ann}_r(x) \subseteq \text{ann}_r(a+x)$$

este evidentă, obținem $\text{ann}_r(a+x) = \text{ann}_r(a) \cap \text{ann}_r(x)$. Cum $\text{ann}_r(a)$ este minimal, rezultă că $\text{ann}_r(a) \subseteq \text{ann}_r(x)$ și deci $x \text{ann}_r(a) = 0$, de unde $J \text{ann}_r(a) = 0$. Cum R este prim, avem $\text{ann}_r(a) = 0$.

Din Corolarul 4.12 rezultă că $J = 0$, contradicție. Deci trebuie ca $aR \trianglelefteq R_R$, iar din Corolarul 4.11 obținem că a este regulat în R . \square

Capitolul 5

Teorema Osofsky–Smith

Definiție 5.1. Un R -modul M se numește *CS-modul* dacă orice submodul complement al lui M este sumand direct în M . Modulul M se numește *complet CS* dacă M/N este CS-modul, pentru orice $N \leq M$.

Observație 5.2. Din 2.2.2 rezultă că orice modul injectiv este CS-modul.

Propoziție 5.3. Pentru un R -modul M următoarele afirmații sunt echivalente:

1. M este CS-modul.
2. Orice extensie esențială maximală a unui submodul al lui M este sumand direct în M .
3. Orice submodul al lui M este esențial într-un sumand direct al lui M .

Demonstrație. (1) \Rightarrow (2) Fie N un submodul al lui M și Q o extensie esențială maximală a lui N în M (propoziția 1.13). Atunci Q este submodul închis și din 1.15 rezultă că Q este sumand direct în M .

(2) \Rightarrow (3) este evidentă din propoziția 1.13.

(3) \Rightarrow (1) Fie K un submodul complement al lui M . Există un sumand direct Q în M astfel încât $K \leq Q$. Cum K este submodul închis, rezultă $K = Q$ și deci K este sumand direct în M . \square

Propoziție 5.4. Orice modul quasi-injectiv este CS-modul.

Demonstrație. Fie M un R -modul quasi-injectiv și N un submodul al său. Atunci există $E_2 \leq E(M)$ astfel încât $E(M) = E_1 \oplus E_2$, unde $E_1 = E(N)$. Fie $\pi_i : E(M) \rightarrow E_i$, $i = 1, 2$, proiecțiile canonice. Cum $\pi_i(M) \leq M$, pentru orice $i = 1, 2$ (corolarul 2.2.7), rezultă că

$$M = (M \cap E_1) \oplus (M \cap E_2).$$

Evident, $N \leq (M \cap E_1)$ și deci N este esențial într-un sumand direct al lui M . Din propoziția de mai sus rezultă că M este CS-modul. \square

Lemă 5.5. Fie X un CS-modul ciclic cu proprietatea că $S = \text{soc}(X) \leq X_R$, S nu este finit generat, dar orice submodul finit generat al lui S este sumand direct al lui X . Dacă orice submodul ciclic al lui X este CS-modul, atunci X/S nu este CS-modul.

Demonstrație. Presupunem că X/S este CS-modul. Cum S nu este finit generat, putem scrie

$$S = \bigoplus_{i \geq 1} S_i,$$

cu $S_i \leq X$ și S_i ne-finit generat pentru orice $i \geq 1$.

Pentru orice $i \geq 1$ există un submodul complement D_i al lui X astfel încât $S_i \trianglelefteq D_i$. Atunci D_i este sumand direct în X și deci D_i este ciclic pentru orice $i \geq 1$; de unde $S_i \subsetneq D_i$.

Cum X/S este CS-modul, există \overline{E} un sumand direct în X astfel încât

$$\sum_{i \geq 1} \frac{D_i + S}{S} = \frac{D}{S} \trianglelefteq \overline{E},$$

unde $D := \bigoplus_{i \geq 1} D_i$. Fie E un submodul ciclic al lui X astfel încât $\overline{E} = (E + S)/S$. Obținem că

$$\frac{D}{S} \trianglelefteq \frac{E + S}{S}.$$

Cum $E \cap S \leq S$ și S este semisimplu, există $T \leq S$ astfel încât

$$S = (E \cap S) \oplus T$$

și deci

$$E + S = (E \cap S) \oplus T.$$

Presupunem că există $i \geq 1$ astfel încât $D_i \cap E = 0$. Considerând proiecția canonică $\pi : E \oplus T \rightarrow T$ avem că $D_i \cap \ker \pi = 0$, ceea ce arată că $\pi|_{D_i}$ este monomorfism și deci D_i este semisimplu. Dar $S_i \trianglelefteq D_i$, ceea ce implică $S_i = D_i$, contradicție. Rezultă că $D_i \cap E \neq 0$ pentru orice $i \geq 1$ și deci $S_i \cap E \neq 0$ pentru orice $i \geq 1$.

Cum $S \trianglelefteq X_R$, există V_i simplu astfel încât $V_i \leq S_i \cap E$ pentru orice $i \geq 1$. Fie $V := \bigoplus_{i \geq 1} V_i$. Modulul E este CS-modul deoarece E este ciclic. Există un sumand direct L al lui X astfel încât $V \trianglelefteq L$. Observăm că L este ciclic și deci $V \subsetneq L$. Fie $n \geq 1$ și notăm

$$P_n := \left(\bigoplus_{i=1}^n D_i \right) \cap L.$$

Avem

$$P_n \cap S = L \cap \left(\bigoplus_{i=1}^n S_i \right) = V \cap \left(\bigoplus_{i=1}^n S_i \right) = \bigoplus_{i=1}^n V_i,$$

și deci $P_n \cap S$ este submodul finit generat al lui S .

Rezultă că $P_n \cap S$ este sumand direct al lui X . Dar $S \trianglelefteq X_R$ și deci

$$P_n := \left(\bigoplus_{i=1}^n D_i \right) \cap L \leq S \quad \text{pentru orice } n \geq 1,$$

ceea ce arată că $D \cap L \leq S$.

Atunci, folosind legea distributivității modulare, avem

$$\frac{D}{S} \cap \frac{L+S}{S} = \frac{D \cap (L+S)}{S} = \frac{S + D \cap L}{S} = 0.$$

Cum $\frac{D}{S} \leq \frac{E+S}{S}$, rezultă că $L+S = S$, adică $L \leq S$. Obținem că L este semisimplu și, cum $V \leq L$, rezultă $V = L$, contradicție. Deci X/S nu este CS-modul. \square

Teoremă 5.6 (Teorema Osofsky–Smith). *Fie R un inel și M un R -modul ciclic astfel încât mR este complet CS pentru orice $m \in M$. Atunci M este o sumă directă finită de module coireductibile.*

Demonstratie. Orice CS-modul indecompozabil este coireductibil și deci este suficient să arătăm că M este o sumă directă finită de module indecompozabile.

Presupunem că M nu admite o astfel de scriere. Atunci există

$$M = A_1 \oplus B_1, \quad 0 \neq A_1, B_1 \leq M,$$

unde B_1 nu este o sumă directă de module indecompozabile. Rezultă că putem scrie

$$B_1 = A_2 \oplus B_2, \quad 0 \neq A_2, B_2 \leq B_1,$$

unde B_2 nu este sumă directă de module indecompozabile.

Repetând procedeul, obținem

$$0 \neq A_i, B_i \leq M \quad (i \geq 1)$$

cu

$$M = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n \oplus B_n \quad (n \geq 1)$$

și

$$A_{n+1} \oplus A_{n+2} \oplus \cdots \leq B_n \quad (n \geq 1).$$

Cum fiecare A_i este ciclic, alegem pentru fiecare $i \geq 1$ un submodul maximal $C_i \leq A_i$. Notăm

$$C := \bigoplus_{i \geq 1} C_i, \quad P := M/C, \quad S := \bigoplus_{i \geq 1} \frac{A_i}{C_i}.$$

Atunci S este un submodul semisimplu, numărabil generat, al lui P .

Pentru orice $n \geq 1$, aplicând legea distributivității modulare, avem

$$(A_1 \oplus \cdots \oplus A_n \oplus C) \cap (B_n + C) = C + (A_1 \oplus \cdots \oplus A_n) \cap B_n = C + \bigoplus_{k \geq n+1} C_k = C.$$

Prin urmare

$$P = \frac{M}{C} = \frac{A_1 \oplus \cdots \oplus A_n \oplus C}{C} \oplus \frac{B_n + C}{C} \quad \text{pentru orice } n \geq 1.$$

Dacă $T \leq S$ este un submodul finit generat, există un $n \geq 1$ astfel încât

$$T = \frac{A_1 \oplus \cdots \oplus A_n + C}{C},$$

de unde rezultă că orice submodul finit generat al lui S este sumand direct al lui P .

Fie acum X un submodul al lui P astfel încât $S \trianglelefteq X \leq P$, X este CS-modul și orice submodul finit generat al lui S este sumand direct în X . Dacă $\text{soc}(X)$ este soclul lui X , atunci $S \trianglelefteq \text{soc}(X)$ și, cum $S \trianglelefteq X$, obținem $S = \text{soc}(X)$.

Rezultă că sunt satisfăcute ipotezele lemei precedente și deci X/S nu este CS-modul, contradicție. \square

Corolar 5.7. *Fie R un inel astfel încât orice R -modul ciclic este CS-modul. Atunci orice R -modul ciclic este o sumă directă finită de module coireductibile.*

Demonstrație. Fie M_R un modul ciclic, $m \in M$ și $N \leq mR$. Atunci factorul mR/N este un modul ciclic și, prin ipoteză, un CS-modul. Aplicând Teorema Osofsky-Smith obținem că mR (și deci M) este o sumă directă finită de module coireductibile. \square

Corolar 5.8. *Dacă N este un R -modul astfel încât orice modul factor al oricărui submodul ciclic al lui N este injectiv, atunci N este semisimplu.*

Demonstrație. Fie $0 \neq x \in N$ și $C = xR \leq N$. Prin ipoteză, orice modul factor al unui submodul ciclic al lui C este injectiv, deci orice submodul ciclic al lui C este complet CS. Din Teorema Osofsky-Smith rezultă că

$$C = xR = \bigoplus_{i=1}^n U_i$$

pentru anumite submodule coireductibile U_i .

Cum

$$U_i \cong C / \bigoplus_{j \neq i} U_j,$$

rezultă că fiecare U_i este injectiv și, prin urmare, U_i este indecompozabil pentru orice $i = 1, \dots, n$ (vezi propoziția 3.1).

Fie $y \in U_i$. Atunci $yR \cong yR/0$ este injectiv, adică șirul exact

$$0 \longrightarrow yR \longrightarrow U_i \longrightarrow U_i/yR \longrightarrow 0$$

este scindabil. Din 2.1.15 rezultă că yR este sumand direct în U_i , și deci $yR = U_i$ sau $yR = 0$ pentru orice $y \in U_i$. Obținem că U_i este simplu și deci $C = xR$ este semisimplu pentru orice $x \in N$, de unde rezultă că N este semisimplu. \square

Corolar 5.9 (Osofsky). *Dacă R este un inel astfel încât orice R -modul ciclic este injectiv, atunci R este semisimplu artinian.*

Demonstrație. Observând că putem aplica corolarul de mai sus pentru $N = R$, rezultă că R este semisimplu. \square

Corolar 5.10. *Fie R un inel astfel încât orice R -modul ciclic singular este injectiv. Atunci orice R -modul singular este semisimplu.*

Demonstrație. Fie M un R -modul singular. Submodulele și modulele factor ale unui modul singular sunt singulare. În particular, dacă $x \in M \setminus \{0\}$, orice modul factor al oricărui submodul ciclic al lui xR este injectiv. Din Corolarul 5.8 rezultă că xR este semisimplu pentru orice $x \in M \setminus \{0\}$, ceea ce arată că M este semisimplu. \square

Lemă 5.11. *Fie S un R -modul simplu. Atunci S este singular dacă și numai dacă $S \cdot \text{soc}(R) = 0$.*

Demonstrație. Fie M un ideal maximal drept al lui R . Arătăm că $M \trianglelefteq R_R$ dacă și numai dacă $\text{soc}(R) \subseteq M$.

Necesitatea este evidentă dacă ținem cont că

$$\text{soc}(R) = \bigcap_{L \trianglelefteq R} L,$$

unde intersecția este luată peste toate idealele maximale drepte L ale lui R_R .

Invers, dacă M nu este esențial în R , există $0 \neq a \in R$ astfel încât $aR \cap M = 0$. Folosind maximalitatea lui M , $aR \oplus M = R$, adică $aR \cong R/M$, ceea ce arată că aR este simplu și deci $aR \subseteq \text{soc}(R)$, de unde $aR \subseteq M$, contradicție.

Cum S este un R -modul simplu singular, pentru orice $x \in S$, $\text{ann}_R(x)$ este un ideal maximal esențial al lui R și din observația de mai sus rezultă că $\text{soc}(R) \subseteq \text{ann}_R(x)$ pentru orice $x \in S$, ceea ce este echivalent cu relația $S \cdot \text{soc}(R) = 0$. \square

Corolar 5.12. *Următoarele afirmații sunt echivalente:*

1. *Orice R -modul ciclic singular este injectiv.*
2. *Orice R -modul singular este injectiv.*

Demonstrație. (1) \Rightarrow (2). Presupunem că $Z(R_R) \neq 0$ și fie $a \in Z(R_R) \setminus \{0\}$. Atunci aR este un R -modul ciclic singular, deci injectiv. Rezultă că aR este sumand direct al lui R , de unde avem că există $e = e^2 \in R \setminus \{0\}$ astfel încât $aR = eR$ și deci $e \in Z(R_R)$, contradicție deoarece $\text{ann}_r(e) \cap eR = 0$. Obținem că R este nesar singular și învelișul injectiv al unui modul singular este singular (cf. A. W. Goldie, *Torsion free modules and rings*, J. Algebra (1964), 268–287).

Fie M un R -modul singular. Cum $E(M)$ este R -modul singular, din Corolarul 5.10 avem că $E(M)$ este semisimplu. Obținem că M este sumand direct al lui $E(M)$ și deci $M = E(M)$, adică M este injectiv.

(2) \Rightarrow (1). Implicația este evidentă. \square

Corolar 5.13 (Goodearl). *Dacă orice R -modul ciclic singular este injectiv, atunci:*

1. *orice $R/\text{soc}(R)$ -modul simplu este injectiv;*
2. *$R/\text{soc}(R)$ este noetherian.*

Demonstrație. (1) Fie S un $R/\text{soc}(R)$ -modul simplu. Cum $S \cdot \text{soc}(R) = 0$, din Lemma 5.11 avem că S este R -modul simplu singular și deci S este R -modul simplu injectiv, de unde rezultă că S este $R/\text{soc}(R)$ -modul simplu injectiv.

(2) Fie $E = \bigoplus_{i=1}^{\infty} S_i$ în $\text{Mod-}R/\text{soc}(R)$, unde S_i este $R/\text{soc}(R)$ -modul simplu pentru orice $i \geq 1$. Atunci $E = \bigoplus_{i=1}^{\infty} S_i$ în $\text{Mod-}R$, cu S_i R -module simple singulare. Rezultă că E este R -modul singular. Din Corolarul 5.12 rezultă că E este R -modul injectiv și deci E este $R/\text{soc}(R)$ -modul injectiv. Aplicând teorema Matlis–Bass, avem că $R/\text{soc}(R)$ este noetherian. \square

Definiție 5.14. Un inel R se numește *PCI-inel la dreapta* dacă orice R -modul drept care nu este izomorf cu R_R este injectiv.

Corolar 5.15 (Damiano). *Dacă R este PCI-inel la dreapta, atunci R este noetherian la dreapta.*

Demonstrație. Din Corolarul 5.13 avem că $R/\text{soc}(R)$ este noetherian. Presupunem $\text{soc}(R) \neq 0$. Fie C un $R/\text{soc}(R)$ -modul ciclic. Atunci C este R -modul propriu ciclic, deoarece $C \cdot \text{soc}(R) = 0$, dar $R \cdot \text{soc}(R) = \text{soc}(R) \neq 0$. Rezultă că C este R -modul injectiv și deci $R/\text{soc}(R)$ -modul injectiv. Din teorema lui Osofsky (Corolarul 5.9) rezultă că $R/\text{soc}(R)$ este un inel semisimplu.

Presupunem că $\text{soc}(R) \neq R$. Există $n \geq 1$ și submodule simple $W_i \leq R/\text{soc}(R)$, $i = 1, \dots, n$, astfel încât

$$R/\text{soc}(R) = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n.$$

Fie $\hat{y} \in W_n$. Atunci

$$W_n \cong \hat{y}R/\text{soc}(R) = \frac{yR + \text{soc}(R)}{\text{soc}(R)} \cong \frac{yR}{yR \cap \text{soc}(R)},$$

și deci $yR/(yR \cap \text{soc}(R))$ este simplu.

Arătăm că $\text{soc}(yR)$ este de lungime finită. În caz contrar am putea scrie

$$\text{soc}(yR) = S \oplus T \oplus U$$

cu S, T, U de lungime infinită. Evident, yR/S este R -modul ciclic. Cum S nu este sumand direct al lui yR , avem $yR/S \not\cong R$. Rezultă că yR/S este injectiv.

Cum $T \oplus U \cong \text{soc}(yR)/S \leq yR/S$, există un morfism injectiv

$$0 \longrightarrow T \oplus U \longrightarrow yR/S,$$

și deci putem presupune că $E(T) \oplus E(U)$ este un submodule al lui yR/S . Există $K \leq yR/S$ astfel încât

$$yR/S = E(T) \oplus E(U) \oplus K.$$

Atunci

$$\frac{yR}{\text{soc}(yR)} \cong \frac{yR/S}{(S \oplus T \oplus U)/S} \cong \frac{E(T)}{T} \oplus \frac{E(U)}{U} \oplus K,$$

contradicție cu faptul că $yR/\text{soc}(yR)$ este simplu.

Obținem astfel că $\text{soc}(yR)$ este de lungime finită. Cum orice R -modul simplu este injectiv, $\text{soc}(yR)$ este R -modul injectiv și deci sumand direct al lui yR . Rezultă că există un modul simplu U astfel încât

$$yR = \text{soc}(yR) \oplus U,$$

și deci $y \in \text{soc}(R)$, ceea ce arată că $R = \text{soc}(R)$, adică R este semisimplu. \square