DIMENSIUNEA COIREDUCTIBILĂ A INELELOR ŞI MODULELOR

Coordonator ştiinţific: Prof. Dr. Tiberiu Dumitrescu

Student: Sorin Bogde

Universitatea Bucureşti, Facultatea de Matematică

1999

Cuprins

Capitolul 0

Generalităţi

0.1 Module semisimple

Definiţie 0.1.1. Un R-modul nenul S se numeşte *simplu* dacă singurele sale submodule sunt 0 şi S.

Propoziţie 0.1.2. *Fie S un R-modul. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *S este modul simplu.*

2. *Pentru orice element nenul $x \in S$ avem $S = xR$.*

3. *$S \simeq R/I$, unde I este un ideal drept maximal.*

Lemă 0.1.3 (Schur)**.** *Fie S şi S' două R-module simple şi $f\colon S \to S'$ un morfism de R-module. Atunci $f = 0$ sau f este izomorfism. În particular $\operatorname{End}_R(S)$ este corp.*

Definiţie 0.1.4. Fie M un R-modul şi $(S_i)_{i\in I}$ mulţimea submodulelor simple ale lui M. Dacă $M = \sum_{i\in I} S_i$, atunci M se numeşte *semisimplu.*

Propoziţie 0.1.5. *Fie M un R-modul semisimplu şi N un submodul al său. Atunci există o submulţime $J \subseteq I$ astfel încât:*

1. *familia $(S_j)_{j\in J}$ este independentă;*

2. *$M = N \oplus \left(\bigoplus_{j\in J} S_j\right)$.*

Corolar 0.1.6. *Cu notaţiile de mai sus, pentru modulul semisimplu M există $J \subseteq I$ astfel încât familia $(S_j)_{j\in J}$ este independentă şi*

$$M = \bigoplus_{i\in I} M_i.$$

Corolar 0.1.7. *Dacă M este un R-modul semisimplu şi N un submodul al său, atunci N şi M/N sunt semisimple.*

Corolar 0.1.8. *O sumă directă de module semisimple este modul semisimplu.*

Teoremă 0.1.9. *Fie M un R-modul. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *M este semisimplu;*

2. *M este izomorf cu o sumă directă de module simple;*

3. *orice submodul al său este sumand direct în M;*

4. *orice şir exact*
$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$
este scindabil.

Definiţie 0.1.10. Suma submodulelor simple ale lui M se numeşte *soclul* lui M şi se notează $\mathrm{soc}(M)$. Dacă M nu conţine nici un submodul simplu atunci punem $\mathrm{soc}(M) = 0$.

Propoziţie 0.1.11. *Fie M şi N două R-module şi $f\colon M \to N$ un morfism. Atunci $f(\mathrm{soc}(M)) \subseteq \mathrm{soc}(N)$.*

Propoziţie 0.1.12. *Fie M un R-modul şi N un submodul al său. Atunci*
$$\mathrm{soc}(N) = \mathrm{soc}(M) \cap N.$$

Propoziţie 0.1.13. *Dacă $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$, atunci*
$$\mathrm{soc}(M) = \bigoplus_{i\in I} \mathrm{soc}(M_i).$$

Propoziţie 0.1.14. *Fie R un inel. Atunci $\mathrm{soc}(R_R)$ este un ideal bilateral al lui R.*

0.2 Module noetheriene (artiniene) şi inele noetheriene (artiniene)

Definiţie 0.2.1. Fie R un inel şi M un R-modul drept. Spunem că M satisface *condiţia maximală* (resp. *minimală*) dacă orice mulţime nevidă de submodule ale lui M, ordonată prin incluziune, admite un element maximal (resp. minimal).

Spunem că M satisface *condiţia lanţurilor ascendente* (resp. *descendente*) dacă orice şir (lanţ) ascendent de submodule ale lui M
$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_i \subseteq \cdots$$
(resp. orice şir descendent
$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_i \supseteq \cdots$$
) este staţionar, adică există $n \geq 1$ astfel încât $M_n = M_{n+1} = \cdots$.

Propoziţie 0.2.2. *Fie M un R-modul. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *M satisface condiţia maximală (minimală);*

2. *M satisface condiţia lanţurilor ascendente (descendente).*

Definiţie 0.2.3. Un R-modul M se numeşte *noetherian* (resp. *artinian*) dacă satisface condiţia maximală (resp. minimală). Inelul R se numeşte noetherian (resp. artinian) la dreapta dacă R_R este noetherian (resp. artinian).

Exemplu 0.2.4.

1. $\mathbb{Z}$ este inel noetherian dar nu este artinian.

2. Orice grup finit este $\mathbb{Z}$-modul noetherian şi artinian.

3. Orice inel finit este noetherian şi artinian.

4. $\mathbb{Z}[X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots]$ nu este nici noetherian, nici artinian:

$$(X_1) \subsetneq (X_1, X_2) \subsetneq \cdots \subsetneq (X_1, \ldots, X_n) \subsetneq \cdots$$

$$(X_1) \supsetneq (X_1^2) \supsetneq \cdots \supsetneq (X_1^k) \supsetneq \cdots$$

5. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ este $\mathbb{Z}$-modul artinian dar nu este noetherian.

Propoziţie 0.2.5. *Fie N, P două submodule ale lui M astfel încât $M = N + P$. Atunci M este noetherian (artinian) dacă şi numai dacă N şi P sunt noetheriene (artiniene).*

Propoziţie 0.2.6. *Pentru un R-modul M următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *M este noetherian;*

2. *orice submodul al lui M este finit generat.*

Propoziţie 0.2.7. *Pentru un R-modul M următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *M este artinian;*

2. *oricare ar fi familia $(X_i)_{i \in I}$ de submodule ale lui M, există $J \subseteq I$, J finită, astfel încât*
$$\bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap_{j \in J} X_j.$$

0.3 Module de lungime finită

Definiţie 0.3.1. Fie M un R-modul drept nenul. Se numeşte *şir de compoziţie* sau *şir Jordan–Hölder* al lui M un lanţ finit strict ascendent de submodule

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n = M$$

astfel încât X_{i+1}/X_i este modul simplu pentru $0 \leq i \leq n-1$. Numărul n se numeşte *lungimea şirului*, iar modulele X_{i+1}/X_i se numesc *factorii şirului*.

Propoziţie 0.3.2. *Fie M un R-modul. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *M are un şir de compoziţie;*

2. *M este noetherian şi artinian.*

Propoziţie 0.3.3. *Fie*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

un şir exact de R-module drepte. Atunci M admite un şir de compoziţie dacă şi numai dacă M' şi M'' admit un şir de compoziţie.

Dacă

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M, \qquad 0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_p = M$$

sunt două şiruri de compoziţie ale lui M, vom spune că ele sunt *echivalente* dacă $n = p$ şi există o bijecţie $\sigma : \{0, \dots, n-1\} \to \{0, \dots, n-1\}$ astfel încât

$$M_{i+1}/M_i \cong M_{\sigma(i)+1}/M_{\sigma(i)} \quad (0 \le i \le n-1).$$

Teoremă 0.3.4 (Jordan–Hölder). *Dacă un R-modul M are două şiruri de compoziţie*

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M, \qquad 0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_p = M,$$

atunci aceste două şiruri sunt echivalente.

Definiţie 0.3.5. Un R-modul M care admite un şir de compoziţie se numeşte *modul de lungime finită*. Lungimea şirurilor de compoziţie se numeşte *lungimea* lui M şi se notează $l(M)$. Dacă M nu admite nici un şir de compoziţie, atunci spunem că M este *de lungime infinită* şi scriem $l(M) = \infty$.

Propoziţie 0.3.6. *Fie*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

un şir exact de R-module de lungime finită. Atunci

$$l(M) = l(M') + l(M'').$$

Corolar 0.3.7. *Fie M un R-modul de lungime finită şi N, L două submodule ale sale. Atunci:*

1. *$l(M) = l(N) + l(M/N)$;*

2. *$l(N + L) + l(N \cap L) = l(N) + l(L)$.*

Corolar 0.3.8. *Fie M un R-modul de lungime finită şi $M_1, M_2, \dots, M_n$ submodule ale sale astfel încât*

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n.$$

Atunci

$$l(M) = \sum_{i=1}^{n} l(M_i).$$

0.4 Radicalul Jacobson

Radicalul Jacobson al unui modul

Definiţie 0.4.1. Fie M un R-modul. Intersecţia tuturor submodulelor maximale ale lui M se numeşte *radicalul Jacobson* al modulului M şi se notează $\operatorname{Rad}(M)$. Dacă M nu are nici un submodul maximal, atunci prin convenţie punem $\operatorname{Rad}(M) = M$.

Observaţie 0.4.2. Dacă M este un R-modul finit generat, atunci $\operatorname{Rad}(M) \neq M$.

Propoziţie 0.4.3. *Fie M un R-modul. Atunci*

$$\operatorname{Rad}(M) = \bigcap_{\substack{f:M\to S\\ S \text{ simplu}}} \ker(f) = \bigcap_{\substack{f:M\to X\\ X \text{ semisimplu}}} \ker(f).$$

Propoziţie 0.4.4. *Fie $f : M \to N$ un morfism de R-module. Atunci* $f(\operatorname{Rad}(M)) \subseteq \operatorname{Rad}(N)$. *Dacă, în plus, f este epimorfism şi* $\ker(f) \subseteq \operatorname{Rad}(M)$, *atunci* $f(\operatorname{Rad}(M)) = \operatorname{Rad}(N)$.

Corolar 0.4.5. *Pentru orice R-modul M are loc egalitatea* $\operatorname{Rad}(M/\operatorname{Rad}(M)) = 0$.

Corolar 0.4.6. *Dacă M este un R-modul semisimplu, atunci* $\operatorname{Rad}(M) = 0$.

Corolar 0.4.7. *Dacă $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$, atunci*

$$\operatorname{Rad}(M) = \bigoplus_{i\in I} \operatorname{Rad}(M_i).$$

Propoziţie 0.4.8. *Fie M un R-modul astfel încât* $\operatorname{Rad}(M) \neq M$. *Atunci*

$$\operatorname{Rad}(M) = \bigcap \{\, L \leq M \mid L \text{ este submodul superfluu} \,\}.$$

Propoziţie 0.4.9 (Lema lui Nakayama)**.** *Fie M un R-modul finit generat şi N un submodul al său. Dacă* $N + \operatorname{Rad}(M) = M$, *atunci $N = M$. (Adică* $\operatorname{Rad}(M)$ *este cel mai mare submodul superfluu al lui M.)*

Radicalul Jacobson al unui inel

Fie R un inel. Considerăm idealul stâng $\operatorname{Rad}({}_RR)$ ca intersecţie a idealelor stângi maximale ale lui R şi $\operatorname{Rad}(R_R)$ ca intersecţie a idealelor drepte maximale ale lui R.

Propoziţie 0.4.10.

1. $\operatorname{Rad}(R_R)$ *este un ideal bilateral.*

2. $\operatorname{Rad}(R_R) = \{\, r \in R \mid 1 - ar \in U(R) \text{ pentru orice } a \in R \,\}$.

3. $\operatorname{Rad}(R_R) = \operatorname{Rad}({}_RR)$.

Definiţie 0.4.11. Idealul bilateral $\operatorname{Rad}(R_R) = \operatorname{Rad}({}_RR)$ se numeşte *radicalul Jacobson* al inelului R şi se notează $\operatorname{Rad}(R)$.

Propoziţie 0.4.12.

1. *Dacă J este un ideal stâng (resp. drept sau bilateral) cu proprietatea că $1-x$ este inversabil pentru orice $x \in J$, atunci $J \subseteq \mathrm{Rad}(R)$.*

2. *Dacă J este un nilideal stâng (resp. drept sau bilateral), atunci $J \subseteq \mathrm{Rad}(R)$.*

Propoziţie 0.4.13. *Fie $\varphi : R \to S$ un morfism surjectiv de inele. Atunci $\varphi(\mathrm{Rad}(R)) \subseteq \mathrm{Rad}(S)$. Dacă $\ker(\varphi) \subseteq \mathrm{Rad}(R)$, atunci $\varphi(\mathrm{Rad}(R)) = \mathrm{Rad}(S)$.*

Propoziţie 0.4.14. *Dacă $(R_i)_{i\in I}$ este o familie de inele, atunci*

$$\mathrm{Rad}\Big(\prod_{i\in I} R_i\Big) = \prod_{i\in I} \mathrm{Rad}(R_i).$$

Propoziţie 0.4.15. *Fie M un R-modul. Atunci $M\ \mathrm{Rad}(R) \subseteq \mathrm{Rad}(M)$.*

Teoremă 0.4.16. *Dacă R este un inel artinian, atunci $\mathrm{Rad}(R)$ este nilpotent.*

0.5 Inele semisimple

Teoremă 0.5.1. *Pentru un inel R următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *orice R-modul drept nenul este semisimplu;*

2. *R este R-modul drept semisimplu;*

3. *R este artinian şi $\mathrm{Rad}(R) = 0$.*

Definiţie 0.5.2. Un inel R care satisface una din condiţiile de mai sus se numeşte *inel semisimplu.*

Propoziţie 0.5.3. *Fie R un inel semisimplu şi M un R-modul nenul. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *M este de lungime finită;*

2. *M este noetherian;*

3. *M este artinian.*

Teoremă 0.5.4. *Fie R un inel artinian la dreapta şi M un R-modul nenul. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *M este de lungime finită;*

2. *M este noetherian;*

3. *M este artinian.*

Corolar 0.5.5 (Hopkins)**.** *Un inel artinian la dreapta (respectiv la stânga) este noetherian la dreapta (respectiv la stânga).*

Capitolul 1

Submodule esenţiale

Definiţie 1.1. Fie M un R-modul drept. Un submodul N al lui M se numeşte *esenţial* (sau spunem că M este o extensie esenţială a lui N) dacă $N \cap N' \neq 0$ pentru orice submodul nenul N' al lui M. În acest caz vom folosi notaţia $N \trianglelefteq M_R$.

Un monomorfism de R-module la dreapta $f : M \to N$ se numeşte *esenţial* dacă $\operatorname{Im} f$ este submodul esenţial în N (adică $\operatorname{Im} f \trianglelefteq N_R$).

Exemplu.

1. $n\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}_\mathbb{Z}$ pentru orice $n \geq 1$.

2. Orice submodul al lui $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ este esenţial.

Observaţie 1.2. Fie M un R-modul drept şi N un submodul al lui M. Atunci $N \trianglelefteq M_R$ dacă şi numai dacă pentru orice $x \in M$, $x \neq 0$, există $r \in R$ astfel încât $xr \in N \setminus \{0\}$.

Demonstraţie. „$\Rightarrow$" Fie $x \in M \setminus \{0\}$. Cum $0 \neq xR \subseteq M_R$ şi $N \trianglelefteq M_R$, rezultă că $xR \cap N \neq 0$, deci există $xr \in xR \cap N \setminus \{0\}$.

„$\Leftarrow$" Fie $N' \leq M_R$, $N' \neq 0$. Pentru $x \in N' \setminus \{0\}$ există $r \in R$ astfel încât $xr \in N \setminus \{0\}$, deci $N \cap N' \neq 0$. $\square$

Definiţie 1.3. Un monomorfism de R-module la dreapta $f : N_R \to M_R$ se numeşte esenţial dacă $\operatorname{Im} f \trianglelefteq M_R$. Se observă imediat că dacă N este un submodul al lui M atunci incluziunea canonică $i_N : N \to M$ este monomorfism esenţial dacă şi numai dacă $N \trianglelefteq M_R$.

Propoziţie 1.4. *Un monomorfism $f : N_R \to M_R$ este esenţial dacă şi numai dacă pentru orice R-modul drept M' şi orice $g \in \operatorname{Hom}(M, M')$, faptul că $g \circ f$ este monomorfism implică g monomorfism.*

Demonstraţie.

„$\Rightarrow$" Fie g ca în enunţ astfel încât $g \circ f$ este monomorfism. Presupunem $g \neq 0$. Fie $x \in \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f \setminus \{0\}$. Există $x' \in N$ astfel încât $x = f(x')$ şi $g(x) = 0$, de unde $g(f(x')) = 0$. Cum $g \circ f$ este monomorfism, rezultă $x' = 0$ şi deci $x = 0$, contradicţie.

„$\Leftarrow$" Dacă f nu este monomorfism esenţial atunci există $N' \leq M_R$, $N' \neq 0$, astfel încât $N' \cap \operatorname{Im} f = 0$. Considerăm proiecţia canonică $\pi_{N'} : M \to M/N'$. Dacă

$x \in \mathrm{Ker}(\pi_{N'} \circ f)$, atunci $f(x) \in N'$, deci $f(x) = 0$, adică $x = 0$. Obţinem astfel că $\pi_{N'} \circ f$ este injectiv, de unde rezultă că $\pi_{N'}$ este injectiv, ceea ce implică $N' = 0$, contradicţie. □

Corolar 1.5. *Fie M un R-modul la dreapta şi $N \leq M_R$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *$N \trianglelefteq M_R$;*
2. *incluziunea $i_N : N \to M$ este monomorfism esenţial;*
3. *pentru orice $f \in \mathrm{Hom}(M, M')$ cu M' R-modul arbitrar, faptul că $f \circ i_N$ este monomorfism implică f monomorfism.*

Propoziţie 1.6. *Fie $f : N_R \to M_R$ şi $g : M_R \to P_R$ două monomorfisme. Atunci $g \circ f$ este esenţial dacă şi numai dacă g şi f sunt esenţiale.*

Demonstraţie.
„$\Leftarrow$" Fie $z \in P \setminus \{0\}$. Cum g este esenţial, există $r \in R$ astfel încât $zr \in \mathrm{Im}\, g \setminus \{0\}$. Există $y \in M \setminus \{0\}$ astfel încât $zr = g(y)$.

Cum f este esenţial, există $r' \in R$ astfel încât $yr' \in \mathrm{Im}\, f \setminus \{0\}$. De aici există $x \in N \setminus \{0\}$ astfel încât $yr' = f(x)$. Dar $zr' = g(y)r' = g(yr') = g(f(x))$. Dacă $zr' = 0$, atunci $g(f(x)) = 0$ şi deci $x = 0$, contradicţie. Obţinem astfel că $zr' \in \mathrm{Im}(g \circ f)$ şi că $zr' \neq 0$, ceea ce ne arată că $g \circ f$ este esenţial.

„$\Rightarrow$" Fie $y \in M \setminus \{0\}$. Cum g este monomorfism, $g(y) \neq 0$. Deci există $r \in R$ astfel încât $g(yr) \in \mathrm{Im}\, g \setminus \{0\}$ şi $g(yr) \neq 0$. Rezultă că există $x \in N \setminus \{0\}$ astfel încât $g(yr) = g(f(x))$ de unde $yr = f(x) \in \mathrm{Im}\, f$, ceea ce ne arată că f este monomorfism esenţial.

Dacă $z \in P \setminus \{0\}$ există $r \in R$ astfel încât $zr \in \mathrm{Im}(g \circ f)$ şi $zr \neq 0$. Cum $\mathrm{Im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Im} g$, rezultă că $zr \in \mathrm{Im} g$, şi deci g este monomorfism esenţial.

□

Propoziţie 1.7. *Fie M un R-modul la dreapta şi $L_1, L_2, \ldots, L_n$ submodule ale lui M. Atunci:*

1) $\bigcap_{i=1}^{n} L_i$ este esenţial în M dacă şi numai dacă L_i este esenţial în M pentru orice $i = 1, \ldots, n$.

2) Dacă $L_1 \subseteq L_2$ şi L_1 este esenţial în M, atunci L_2 este esenţial în M.

Demonstraţia este evidentă.

Propoziţie 1.8. *Fie K şi L două submodule ale lui M. 1) Dacă $K \subseteq L \subseteq M$, atunci $K \trianglelefteq M$ dacă şi numai dacă $K \trianglelefteq L$ şi $L \trianglelefteq M$.*

2) Dacă $h : K_R \to M_R$ este morfism de module şi $L \trianglelefteq M$, atunci $h^{-1}(L) \trianglelefteq K$.

3) Dacă $L_1, L_2 \leq M_R$ şi $K_1 \trianglelefteq L_1$, $K_2 \trianglelefteq L_2$, atunci $K_1 \cap K_2 \trianglelefteq L_1 \cap L_2$.

Demonstraţie.
1) Se aplică 1.5 şi 1.6.

2) Fie U submodul nenul al lui K. (i) Dacă $h(U) = 0$, atunci $U \subseteq \ker h \subseteq h^{-1}(L)$, ceea ce implică $U \cap h^{-1}(L) \neq 0$. (ii) Dacă $h(U) \neq 0$, atunci $h(U) \cap L \neq 0$ şi deci

există $u \in U$ astfel încât $h(u) \in L$, $h(u) \neq 0$, de unde $u \in U \cap h^{-1}(L)$ şi $u \neq 0$. Din (i) şi (ii) rezultă că $h^{-1}(L) \trianglelefteq K$.

3) Dacă $0 \neq X \leq L_1 \cap L_2$ atunci $X \subseteq L_1$ ceea ce implică $0 \neq X \cap K_1 \leq L_1$. Dar cum $X \subseteq L_2$, rezultă $0 \neq (X \cap K_1) \cap L_2 = X \cap (K_1 \cap K_2)$, şi deci $K_1 \cap K_2 \trianglelefteq L_1 \cap L_2$. □

Propoziţie 1.9. *Fie $(K_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $(L_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ două familii de submodule ale lui M. Dacă $(K_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ este familie independentă în M şi $K_\lambda \trianglelefteq L_\lambda$ pentru orice $\lambda \in \Lambda$, atunci $(L_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ este familie independentă în M şi $(\oplus_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda) \trianglelefteq (\oplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda)$.*

Demonstraţie.

Fie $K_1 \trianglelefteq L_1$, $K_2 \trianglelefteq L_2$ astfel încât $K_1 \cap K_2 = 0$. Din 1.8(3) rezultă că $0 \trianglelefteq L_1 \cap L_2$, adică $L_1 \cap L_2 = 0$.

Fie proiecţiile canonice $\pi_1 : L_1 \oplus L_2 \to L_1$, $\pi_2 : L_1 \oplus L_2 \to L_2$. Cum $K_1 \trianglelefteq L_1$, $K_2 \trianglelefteq L_2$ rezultă că

$$\pi_1^{-1}(K_1) = K_1 \oplus 0 \trianglelefteq L_1 \oplus L_2,$$

şi

$$\pi_2^{-1}(K_2) = 0 \oplus K_2 \trianglelefteq L_1 \oplus L_2.$$

Deci

$$K_1 \oplus K_2 = (\pi_1^{-1}(K_1)) \cap (\pi_2^{-1}(K_2)) \trianglelefteq L_1 \oplus L_2.$$

Prin inducţie se obţine afirmaţia pentru mulţimi finite. În cazul general, fie $0 \neq m \in \oplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$. Atunci există o mulţime finită $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ cu $m \in \oplus_{\lambda \in \Lambda_0} L_\lambda$. Cum $(\oplus_{\lambda \in \Lambda_0} K_\lambda) \trianglelefteq (\oplus_{\lambda \in \Lambda_0} L_\lambda)$, există $r \in R$ astfel încât $rm \in (\oplus_{\lambda \in \Lambda_0} K_\lambda) \setminus \{0\} \subseteq (\oplus_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda) \setminus \{0\}$. Rezultă că $(\oplus_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda) \trianglelefteq (\oplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda)$. □

Propoziţie 1.10. *Fie N un submodul al lui M. Atunci există un submodul Q, $N \subseteq Q \subseteq M$, astfel încât Q este o extensie esenţială maximală a lui N conţinută în M.*

Demonstraţie.

Fie $\mathfrak{S} = \{L \leq M;\ N \subseteq L \subseteq M,\ N \ulcorner L\}$, $\mathfrak{S}$ cu relaţia de ordine incluziunea. $\mathfrak{S} \neq \varnothing$ deoarece $N \in \mathfrak{S}$. Fie $(L_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ o familie total ordonată de elemente din $\mathfrak{S}$ şi

$$L := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda.$$

Evident $L \leq M_R$.

Fie $x \in L \setminus \{0\}$. Atunci există $\lambda_0 \in \Lambda$ cu $x \in L_{\lambda_0}$. Cum N este esenţial în L_{λ_0}, rezultă că există $r \in R$ astfel încât $xr \in N$ şi $xr \neq 0$, de unde obţinem că L este extensie esenţială a lui N. Deci $\mathfrak{S}$ este inductivă şi, conform lemei lui Zorn, $\mathfrak{S}$ admite un element maximal Q care satisface condiţiile cerute. □

Definiţie 1.11. Fie M un R-modul la dreapta şi $N \leq M_R$. Un submodul $K \leq M_R$ se numeşte *complement* al lui N în M dacă K este un submodul maximal al lui M cu proprietatea că $K \cap N = 0$. Un submodul $K \leq M_R$ se numeşte *submodul complement al lui* M dacă există $N \leq M_R$ astfel încât K este complement al lui N în M.

Observaţie 1.12. Mulţimea

$$\widetilde{\mathfrak{S}} = \{\, L \leq M_R \mid N \cap L = 0 \,\}$$

este inductivă şi, aplicând lema lui Zorn, rezultă că există un complement al lui N în M. În particular, 0 şi M sunt submodule complement ale lui M.

Propoziţie 1.13. *Fie M_R, $N \leq M_R$ şi $K \leq M_R$, K un complement al lui N în M. Există un complement Q al lui K în M astfel încât $N \subseteq Q$. Mai mult, Q este o extensie esenţială maximală a lui N în M.*

Demonstraţie. Se observă uşor că mulţimea

$$\widetilde{\mathfrak{S}} = \{\, L \leq M_R \mid K \cap L = 0,\ N \subseteq L \,\}$$

este inductivă şi lema lui Zorn asigură existenţa lui Q.

Fie L un submodul nenul al lui Q astfel încât $L \cap N = 0$. Fie $K_1 = L + K$. Este clar că $K \subseteq K_1$. Dacă $x \in N \cap (L + K)$, atunci $x = y + z$ cu $y \in L$, $z \in K$. Dar $z = x - y \in Q$. Cum $Q \cap K = 0$, rezultă $z = 0$ şi deci $x = y$. Din egalitatea $L \cap N = 0$ deducem $x = y = 0$ şi deci $N \cap (L + K) = 0$, ceea ce contrazice faptul că K este un complement al lui N în M. Obţinem $L \cap N \neq 0$ pentru orice $0 \neq L \leq Q$, de unde Q este extensie esenţială a lui N.

Presupunem că există $Q' \leq M_R$ cu $N \trianglelefteq Q'$ şi $Q \subsetneq Q'$. Cum Q' este complement al lui K, rezultă $Q' \cap K \neq 0$. Dar $N \cap (Q' \cap K) = 0$ şi $0 \neq Q' \cap K \leq Q'$, contradicţie cu $N \trianglelefteq Q'$. Rezultă că Q este extensie esenţială maximală a lui N în M. □

Definiţie 1.14. Un submodul N al lui M_R se numeşte *închis* dacă N nu are nicio extensie esenţială în M proprie (diferită de N).

Corolar 1.15. *Fie M_R un R-modul. Submodulele complement ale lui M coincid cu submodulele închise ale lui M.*

Demonstraţie. Din 1.13 rezultă imediat că orice submodul închis al lui M este un submodul complement al lui M.

Invers, fie K un submodul complement al lui M_R. Rezultă că există $N \leq M_R$ astfel încât K este un complement al lui N în M. Presupunem că K are o extensie esenţială în M proprie, adică există $K' \leq M_R$ cu $K \trianglelefteq K'$ şi $K \subsetneq K'$. Atunci $K' \cap N \neq 0$, din maximalitatea lui K, iar cum $K \trianglelefteq K'$, rezultă că

$$K \cap K' \cap N \neq 0,$$

contradicţie. □

Corolar 1.16. *Fie N un submodul al lui M_R. Dacă K este un complement al lui N în M, atunci:*

1. $(N + K) \trianglelefteq M_R$.

2. *Morfismul canonic $\pi_K \circ i_N : N \to M/K$ este monomorfism esenţial.*

Demonstraţie. (1) Fie $x \in M \setminus \{0\}$. Dacă $x \notin K$, atunci $K + Rx \neq K$ şi deci $N \cap (K + Rx) \neq 0$. Fie $y \in N \cap (K + Rx)$, $y \neq 0$. Există $z \in K$, $r \in R$ cu $y = z + rx$. Dacă $rx = 0$, atunci $y = z$ şi cum $N \cap K = 0$ rezultă $y = 0$, contradicţie. Deci $rx \neq 0$ şi, cum $rx = y - z$, obţinem $rx \in N + K$, ceea ce ne arată că $(N + K) \trianglelefteq M_R$.

(2) $\mathrm{Im}(\pi_K \circ i_N) = (N + K)/K$. Fie L/K un submodul nenul al lui M/K. Atunci

$$\frac{N + K}{K} \cap \frac{L}{K} = \frac{(N + K) \cap L}{K} = \frac{N \cap L + K}{K}.$$

Cum K este un complement al lui N, rezultă că $N \cap L \neq 0$ şi deci

$$\frac{N \cap L + K}{K} \neq 0,$$

ceea ce ne arată că $\pi_K \circ i_N$ este monomorfism esenţial. $\square$

Capitolul 2

Module injective

2.1 Module injective

Fie Q şi M două R-module drepte. Q se numeşte *M-injectiv* dacă pentru orice monomorfism $u : M' \to M$ şi orice morfism $f : M' \to Q$, există $g : M \to Q$ astfel încât $g \circ u = f$, adică diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

este comutativă.

Această proprietate este echivalentă cu condiţia ca aplicaţia

$$\mathrm{Hom}(u, Q) : \mathrm{Hom}(M, Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M', Q)$$

să fie surjectivă pentru orice monomorfism $u : M' \to M$. Cum functorul $\mathrm{Hom}(-, Q)$ este exact la stânga, rezultă că Q este M-injectiv dacă şi numai dacă $\mathrm{Hom}(-, Q)$ este exact în raport cu orice şir exact de forma

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

R-modulul Q se numeşte *quasi-injectiv* (sau *self-injectiv*) dacă este Q-injectiv. Dacă Q este M-injectiv pentru orice R-modul M, atunci Q se numeşte *injectiv.*

2.1.1 Propoziţie

Propoziţie 2.1.1. *Fie Q şi M două R-module. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *Q este M-injectiv.*

2. *Pentru orice submodul N al lui M şi orice morfism $f : N \to Q$, există $g : M \to Q$ astfel încât $g_{|N} = f$.*

3. *Pentru orice submodul esenţial N al lui M şi orice morfism $f : N \to Q$, există $g : M \to Q$ astfel încât $g_{|N} = f$.*

Demonstraţie. Implicaţiile (1) $\Rightarrow$ (2) şi (2) $\Rightarrow$ (3) sunt evidente.

(2) $\Rightarrow$ (1). Fie M'_R, $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M$ şi $f : M' \to Q$. Atunci $u(M') \leq M$. Considerăm $i : u(M') \to M$ injecţia canonică şi $\bar{u} : M' \to u(M')$ izomorfismul indus de u. Există $g : M \to Q$ astfel încât $g \circ i = f \circ \bar{u}^{-1}$. Atunci

$$g \circ i \circ \bar{u} = f \quad \text{şi deci} \quad g \circ u = f.$$

Diagrama corespunzătoare este

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\bar{u}"] \arrow[d, "f"'] & u(M') \arrow[r, hook, "i"] & M \arrow[dll, dashed, "g"] \\
 & Q & &
\end{tikzcd}$$

(3) $\Rightarrow$ (2). Fie N un submodul al lui M şi K un complement al lui N în M. Atunci $(N \oplus K) \trianglelefteq M$. Fie $h : N \oplus K \to Q$, definit prin $h(n+k) = f(n)$ pentru orice $n \in N$, $k \in K$. Cum $N \cap K = 0$, aplicaţia h este bine definită. Există $g : M \to Q$ astfel încât $g_{|N \oplus K} = h$ şi deci $g_{|N} = h_{|N} = f$.

Aceasta se poate reprezenta prin diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & N \oplus K \arrow[r, hook] \arrow[dl, "h"] & M \arrow[dll, dashed, bend left, "g"] \\
 & Q & &
\end{tikzcd}$$

$\square$

Propoziţie 2.1.2. *Fie $(M_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ o familie de R-module şi M un R-modul. Atunci $\prod\limits_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ este M-injectiv dacă şi numai dacă M_α este M-injectiv pentru orice $\alpha \in \Lambda$.*

Demonstraţie. Fie N un submodul al lui M. Notăm $P = \prod\limits_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ şi $\pi_\alpha : P \to M_\alpha$ proiecţiile canonice, pentru orice $\alpha \in \Lambda$.

" $\Leftarrow$ " Considerând un morfism $f : N \to P$, avem că morfismele $\pi_\alpha \circ f : N \to M_\alpha$ pot fi extinse la $g_\alpha : M \to M_\alpha$. Există $g : M \to P$ astfel încât $g_{|N} = f$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, "g"'] \arrow[ddl, "g_\alpha"] \\
 & P \arrow[d, "\pi_\alpha"'] & \\
 & M_\alpha &
\end{tikzcd}$$

" $\Rightarrow$ " Fie $\forall \alpha \in \Lambda$ şi $f : N \to M_\alpha$. Considerând incluziunea canonică $\varepsilon_\alpha : M_\alpha \to P$, cum P este M-injectiv, există $g : M \to P$ care îl extinde pe $\varepsilon_\alpha \circ f : N \to P$. Atunci $\varepsilon_\alpha : M_\alpha \to P$ îl extinde pe f şi deci M_α este M-injectiv.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[ddl, "g"'] \arrow[dddl, bend left, "\pi_\alpha g"] \\
& M_\alpha \arrow[d, "\varepsilon_\alpha"'] & \\
& P \arrow[d, "\pi_\alpha"'] & \\
& M_\alpha &
\end{tikzcd}$$

□

Corolar 2.1.3.

1. *Fie $(Q_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ o familie de R-module. Atunci $\prod_{\alpha\in\Lambda} Q_\alpha$ este injectiv dacă şi numai dacă Q_α este injectiv pentru orice $\alpha \in \Lambda$.*

2. *$Q_1 \oplus Q_2$ este R-modul injectiv dacă şi numai dacă Q_i este injectiv pentru $i = 1, 2$. În particular, un sumand direct al unui modul injectiv este injectiv.*

Propoziţie 2.1.4. *Fie Q un R-modul.*

1. *Dacă $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ este un şir exact de R-module şi Q este M-injectiv, atunci Q este M'-injectiv şi M''-injectiv.*

2. *Dacă $(M_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ este o familie de submodule ale lui M astfel încât $M = \sum_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ şi Q este M_α-injectiv pentru orice α, atunci Q este M-injectiv.*

3. *Fie $(N_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ o familie de R-module. Atunci Q este $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha$-injectiv dacă şi numai dacă Q este N_α-injectiv pentru orice $\alpha \in \Lambda$.*

Demonstraţie. Pentru a arăta că Q este M'-injectiv, considerăm N un submodul al lui M' și $\varphi : N \to Q$ un morfism de R-module. Cum Q este M-injectiv, există $\phi : M \to Q$ astfel încât $g \circ f\,|_N = \varphi$ și deci $\psi \circ f : M' \to Q$ este un morfism care îl extinde pe φ.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & M' \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "\psi"] & M \arrow[dll] \\
& Q & &
\end{tikzcd}$$

Fie $h : L \to M''$ un monomorfism. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $M' \leq M$ și $M'' = M/M'$. Cum $L \cong h(L) \leq M''$, există $P \leq M$, $M' \subseteq P$ astfel încât $h(L) = P/M'$ și deci $L \cong P/M'$. Obținem diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd}
& & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, equal] & P \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Cum Q este M-injectiv, aplicând functorul $\mathrm{Hom}(-,Q)$ obținem diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(M'',Q) \arrow[r] \arrow[d, "h^*"'] & \mathrm{Hom}(M,Q) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(M',Q) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(L,Q) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(P,Q) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(M',Q) & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Obținem că $h^* = \mathrm{Hom}(h,Q)$ este epimorfism, ceea ce arată că Q este M''-injectiv.

2) Fie N un submodul al lui M şi $f : N \to Q$ un morfism de R-module. Considerăm mulţimea

$$\mathfrak{S} = \{(L,h) \mid N \le L \le M,\ h : L \to Q,\ h|_N = f\}.$$

Cum $(N,f) \in \mathfrak{S}$, avem $\mathfrak{S} \neq \varnothing$. Definim pe $\mathfrak{S}$ relaţia de ordine $(L_1,h_1) \preccurlyeq (L_2,h_2)$ dacă şi numai dacă $L_1 \le L_2$ şi $h_2|_{L_1} = h_1$. Se observă că $\mathfrak{S}$ este inductivă şi, din lema lui Zorn, rezultă că există (L_0,g_0) element maximal al lui $\mathfrak{S}$. Pentru a arăta că $L_0 = M$ este suficient să arătăm că $M_\alpha \le L_0$ pentru orice $\alpha \in \Lambda$.

Considerând diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L_0 \cap M_\alpha \arrow[r, "i_\alpha"] \arrow[d, "i_0"'] & M_\alpha \arrow[ddl, "h_\alpha"] \\
 & L_0 \arrow[d, "g_0"'] & \\
 & Q &
\end{tikzcd}$$

rezultă că există $h_\alpha : M_\alpha \to Q$ astfel încât $h_\alpha \circ i_\alpha = g_0 \circ i_\alpha$. Definim $h^* : L_0 + M_\alpha \to Q$, $h^*(l + m_\alpha) = g_0(l) + h_\alpha(m_\alpha)$, pentru orice $l \in L_0$, $m_\alpha \in M_\alpha$. Dacă $l + m_\alpha = 0$, atunci $l = -m_\alpha \in L_0 \cap M_\alpha$ şi deci $h^*(l + m_\alpha) = g_0(l) + h_\alpha(l)$, ceea ce arată că h^* este bine definită. Atunci $(L_0 + M_\alpha, h^*) \in \mathfrak{S}$ şi, cum $(L_0,g_0) \preccurlyeq (L_0 + M_\alpha, h^*)$, din maximalitatea lui (L_0,g_0) rezultă că $L_0 = L_0 + M_\alpha$, adică $M_\alpha \le L_0$ pentru orice $\alpha \in \Lambda$.

3) „$\Rightarrow$” Cum $N_\alpha \le N$ şi Q este N-injectiv, avem că Q este N_α-injectiv pentru orice $\alpha \in \Lambda$.

„$\Leftarrow$” Fie $N'_\alpha = i_\alpha(N_\alpha)$. Cum Q este N_α-injectiv şi $N'_\alpha \cong N_\alpha$, rezultă că Q este N'_α-injectiv. Apoi aplicăm (2). □

Corolar 2.1.5.

1. *$Q_1 \oplus Q_2$ este R-modul quasi-injectiv dacă şi numai dacă Q_i este Q_j-injectiv pentru orice $i,j = 1,2$. În particular, un sumand direct al unui modul quasi-injectiv este quasi-injectiv.*

2. *Q^n este R-modul quasi-injectiv dacă şi numai dacă Q este quasi-injectiv.*

Corolar 2.1.6. *Fie Q şi M două R-module. Atunci Q este M-injectiv dacă şi numai dacă Q este mR-injectiv pentru orice $m \in M$.*

Demonstraţie. „$\Rightarrow$" este evident.

„$\Leftarrow$" Cum $M = \sum_{m \in M} mR$, din 2.1.4(2) rezultă că Q este M-injectiv. □

Teoremă 2.1.7 (Criteriul lui Baer)**.** *Pentru un R-modul Q următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *Q este injectiv.*

2. *Q este R-injectiv.*

3. *Pentru orice ideal drept I al lui R şi orice morfism $f : I \to Q$ există $x \in Q$ astfel încât $f(a) = xa$ pentru orice $a \in I$.*

Demonstraţie. Implicaţia (1) $\Rightarrow$ (2) este evidentă.

(2) $\Rightarrow$ (1). Fie M un R-modul şi $x \in M$. Cum $\varphi_x : R \to xR$, $\varphi_x(a) = xa$ pentru orice $a \in R$, este morfism surjectiv de R-module, rezultă că $R/\operatorname{Ker}\varphi_x \cong xR$. Cum Q este R-injectiv, din 2.1.4(1) rezultă că Q este $R/\operatorname{Ker}\varphi_x$-injectiv şi deci Q este xR-injectiv pentru orice $x \in M$. Atunci, din 2.1.6 obţinem că Q este M-injectiv.

(2) $\Rightarrow$ (3). Fie I un ideal drept al lui R şi $f : I \to Q$. Există $g : R \to Q$ astfel încât $g\,|_I = f$. Fie $x = g(1) \in Q$. Atunci $f(a) = g(a) = ag(1) = xa$ pentru orice $a \in I$.

(3) $\Rightarrow$ (2). Dacă pentru un morfism $f : I \to Q$ există $x \in Q$ cu $f(a) = xa$ pentru orice $a \in I$, atunci, definind $g : R \to Q$ prin $g(r) = xr$ pentru orice $r \in R$, rezultă că $g\,|_I = f$. □

Definiţie 2.1.8.

1. Un R-modul Q se numeşte *divizibil* dacă pentru orice $y \in Q$ şi orice $a \in R$ nendivizor al lui zero, există $x \in Q$ astfel încât $ax = y$. Se verifică uşor că orice modul factor al unui modul divizibil este divizibil.

2. Un domeniu de integritate comutativ se numeşte *PID-inel* dacă orice ideal al său este principal.

Propoziţie 2.1.9.

1. *Orice modul injectiv este divizibil.*

2. *Fie R un PID-inel.*

   (i) Dacă Q este un R-modul, atunci Q este injectiv dacă şi numai dacă este divizibil.

   (ii) Dacă I este un ideal nenul al lui R, atunci R/I este R-modul quasi-injectiv. În particular, $\mathbb{Z}_n$ este $\mathbb{Z}$-modul quasi-injectiv, $\forall n \geq 1$.

Demonstraţie. 1) Fie Q un R-modul divizibil, $y \in Q$ şi $a \in R$ nendivizor al lui zero. Definim $f : aR \to Q$ prin $f(ax) = yx$ pentru orice $x \in R$. Cum a este nendivizor al lui zero, f este bine definită. Folosind criteriul lui Baer rezultă că există $x \in Q$ astfel încât $f(\lambda) = x\lambda$, pentru orice $\lambda \in I$. Deci $y = f(a) = f(a \cdot 1) = xa$.

2) (i) Implicaţia „$\Rightarrow$" este evidentă din (1).

„$\Leftarrow$" Fie Q un R-modul divizibil şi I un ideal drept al lui R. Atunci există $a \in R$ astfel încât $I = aR$. Considerăm $f : I \to Q$ un morfism de R-module. Există $x \in Q$ astfel încât $f(a) = xa$. Atunci $f(ar) = xar$ pentru orice $r \in R$ şi deci, conform criteriului lui Baer, Q este injectiv.

(ii) Fie $I = aR$ şi $J = bR$ ideale nenule ale lui R astfel încât $I \subseteq J$ şi $f : J/I \to R/I$ un morfism de R-module. Există $c \in R$ astfel încât $a = bc$. Dacă $f(\bar{b}) = \hat{x} \in R/I$, atunci $x \in I$ şi deci există $a_1 \in R$ astfel încât $x = aa_1$. Rezultă că $x = ba_1$. Definim $g : R/I \to R/I$, $g(\bar{r}) = \widehat{ar_1}$ pentru orice $r \in R$. Atunci g este morfism de R-module şi $g(\bar{b}) = \hat{x}$, deci $g\,|_{J/I} = f$, ceea ce arată că R/I este quasi-injectiv. □

Corolar 2.1.10. *Un grup abelian G este $\mathbb{Z}$-modul injectiv dacă şi numai dacă G este divizibil.*

Corolar 2.1.11.

1. *$\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ sunt $\mathbb{Z}$-module injective.*
2. *Orice sumă directă de $\mathbb{Z}$-module injective este $\mathbb{Z}$-modul injectiv.*
3. *Orice grup factor al unui $\mathbb{Z}$-modul injectiv este injectiv.*

Lemă 2.1.12. *Fie inelele A, S, T şi bimodulele ${}_SM_A$, ${}_AN_T$. Atunci* $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ *are o structură de bimodul S-stâng şi T-drept prin operaţiile:*

$$(s \cdot f)(x) = f(xs), \qquad (f \cdot t)(x) = f(x)t,$$

unde $s \in S$, $t \in T$, $x \in M$, $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$.

Demonstraţie. Fie $a, b \in A$ şi $x, y \in M$. Atunci:

$$(s\cdot f)(ax+by) = f((ax+by)s) = f(a(xs))+f(b(ys)) = af(xs)+bf(ys) = a(s\cdot f)(x)+b(s\cdot f)(y),$$

şi deci $s \cdot f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$. Analog $f \cdot t \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$.

Pentru $s, s' \in S$ şi $f, g \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$:

$$(s \cdot (f + g))(x) = (f + g)(xs) = f(xs) + g(xs) = (s \cdot f)(x) + (s \cdot g)(x). \tag{1}$$

$$((s+s')\cdot f)(x) = f(x(s+s')) = f(xs+xs') = f(xs)+f(xs') = (s\cdot f)(x)+(s'\cdot f)(x). \tag{2}$$

$$((ss') \cdot f)(x) = f(x(ss')) = f((xs)s') = (s' \cdot f)(xs) = (s \cdot (s' \cdot f))(x). \tag{3}$$

$$(1_S \cdot f)(x) = f(x1_S) = f(x). \tag{4}$$

Din (1)–(4) avem că $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ este S-modul stâng. La fel se arată că este şi T-modul drept. Prin urmare $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ este un bimodul S-stâng şi T-drept. □

Propoziţie 2.1.13 (Eckmann–Schopf)**.** *Fie Q un grup abelian divizibil. Atunci R-modulul stâng $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,Q)$ este injectiv.*

Demonstraţie. Conform lemei precedente, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,Q)$ are o structură de R-modul stâng dată de operaţia

$$(r\cdot f)(a)=f(ar), \qquad \forall a,r\in R,\ f\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,Q).$$

Fie I un ideal stâng al lui R şi $h:I\to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,Q)$ un morfism de R-module stângi. Atunci aplicaţia

$$\gamma: {}_{\mathbb{Z}}I\longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}Q, \qquad \gamma(a)=h(a)(1)$$

defineşte un morfism de $\mathbb{Z}$–module. Cum Q este $\mathbb{Z}$–injectiv, există $\widetilde{\gamma}: {}_{\mathbb{Z}}R\to {}_{\mathbb{Z}}Q$ astfel încât $\widetilde{\gamma}_{|I}=\gamma$. Pentru $a\in I$ şi $r\in R$ avem

$$(a\cdot\widetilde{\gamma})(r)=\widetilde{\gamma}(ra)=h(ra)(1)=(r\cdot h(a))(1)=h(a)(r),$$

deci $h(a)=a\cdot\widetilde{\gamma}$ pentru orice $a\in I$. Conform criteriului lui Baer, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,Q)$ este R–modul stâng injectiv. □

Propoziţie 2.1.14. *Orice R-modul stâng M poate fi scufundat într-un R-modul stâng injectiv.*

Demonstraţie. Există un $\mathbb{Z}$-modul liber de forma $\mathbb{Z}^{(A)}$ şi un $\mathbb{Z}$-morfism surjectiv $f:\mathbb{Z}^{(A)}\to M$. Atunci

$${}_{\mathbb{Z}}M\cong \mathbb{Z}^{(A)}/\ker f\subseteq \mathbb{Q}^{(A)}/\ker f,$$

şi deci există un grup abelian divizibil G astfel încât ${}_{\mathbb{Z}}M\subseteq {}_{\mathbb{Z}}G$. Aplicând functorul $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,-)$ obţinem un monomorfism

$${}_RM\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,M)\hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,G).$$

Cum G este divizibil, din Propoziţia 2.1.13 rezultă că $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,G)$ este R-modul stâng injectiv. Prin urmare M se scufundă într-un R-modul stâng injectiv. □

Propoziţie 2.1.15. *Fie Q un R-modul. Atunci Q este injectiv dacă şi numai dacă orice şir exact de forma*

$$0\longrightarrow Q\xrightarrow{f} M\xrightarrow{g} M'\longrightarrow 0$$

este scindat.

Demonstraţie. „⇒” Presupunem că Q este injectiv. Din exactitatea şirului avem că f este monomorfism. Prin injectivitatea lui Q există $h:M\to Q$ astfel încât $hf=\mathrm{id}_Q$, ceea ce arată că şirul este scindat.

„⇐” Folosind Propoziţia 2.1.14, există un R-modul injectiv Q' şi un monomorfism $i:Q\to Q'$. Avem un şir exact

$$0\longrightarrow Q\xrightarrow{i} Q'\longrightarrow Q'/i(Q)\longrightarrow 0.$$

Prin ipoteză acest şir este scindat, deci Q este sumand direct în Q'. Un sumand direct al unui modul injectiv este injectiv, aşadar Q este injectiv. □

2.2 Anvelope injective

Definiţie 2.2.1. Fie M un R-modul. O pereche (E, i) se numeşte *anvelopă injectivă* a lui M dacă E este modul injectiv şi $i : M \to E$ este un monomorfism esenţial.

Propoziţie 2.2.2. *Fie Q un R-modul injectiv. Atunci orice submodul complement al lui Q este sumand direct în Q.*

Demonstraţie. Fie K un submodul al lui Q şi N un complement al lui K în Q, adică $K \cap N = 0$ şi $K + N$ este submodul esenţial în Q. Atunci $(K + N)/N \cong Q/N$. Definim $g : (K + N)/N \to Q$ prin

$$g((x + y) + N) = x, \qquad x \in K,\ y \in N.$$

Cum $K \cap N = 0$, aplicaţia g este bine definită şi este monomorfism. Injectivitatea lui Q asigură existenţa unui morfism $h : Q/N \to Q$ astfel încât $h_{|(K+N)/N} = g$. Deoarece $(K + N)/N \cong Q/N$ şi g este monomorfism, şi h este monomorfism. Avem $K = \operatorname{Im} g = h((K + N)/N) \subseteq h(Q/N)$. Cum K este submodul închis, rezultă $K = h(Q/N)$. Din h monomorfism obţinem $(K + N)/N = Q/N$, deci $K + N = Q$. Prin urmare K este un sumand direct în Q. □

Teoremă 2.2.3 (Eckmann–Schopf)**.** *Orice R-modul M are o anvelopă injectivă unică până la un izomorfism.*

Demonstraţie. Din Propoziţia 2.1.14 există un R-modul injectiv Q astfel încât $M \leq Q$. Fie E o extensie esenţială maximală a lui M în Q. Atunci E este un submodul complement în Q, iar din propoziţia precedentă rezultă că E este injectiv. Astfel (E, i), cu $i : M \hookrightarrow E$ incluziunea, este o anvelopă injectivă a lui M.

Pentru unicitate, fie (E_1, i_1) şi (E_2, i_2) două anvelope injective ale lui M. Cum E_2 este injectiv, există $f : E_1 \to E_2$ astfel încât $fi_1 = i_2$. Morfismul i_2 este monomorfism, iar i_1 este monomorfism esenţial, deci (folosind 1.4) rezultă că f este monomorfism. Avem $E_1 \cong f(E_1)$ şi $E_2 = f(E_1) \oplus E_3$ pentru un anumit submodul E_3. Dar $i_2(M) \subseteq f(E_1)$, deci $i_2(M) \cap E_3 = 0$. Cum i_2 este monomorfism esenţial, rezultă $E_3 = 0$, deci $E_2 = f(E_1)$ şi f este izomorfism. □

În practică vom considera un reprezentant al acestei clase pe care îl vom nota $E(M)$ astfel încât $M \trianglelefteq E(M)$.

Propoziţie 2.2.4. *Fie M un R-modul şi $i : M \to Q$ un monomorfism cu Q_R injectiv. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *(Q, i) este o anvelopă injectivă a lui M;*

2. *pentru orice monomorfism $f : M \to Q'$ cu Q' injectiv, există un monomorfism $g : Q \to Q'$ astfel încât $gi = f$.*

Demonstraţie. (1) $\Rightarrow$ (2). Fie $f : M \to Q'$ un monomorfism cu Q' injectiv. Prin injectivitatea lui Q' există $u : Q \to Q'$ astfel încât $ui = f$. Cum i este monomorfism esenţial şi Q' este injectiv, imaginea $u(Q)$ este un complement al lui $f(M)$, iar din definiţia anvelopei injective rezultă că u este monomorfism; punem $g = u$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Fie $(E(M), j)$ o anvelopă injectivă a lui M. Aplicând (2) la $f = j$ obţinem un monomorfism $g : Q \to E(M)$ cu $gi = j$. Cum j este monomorfism esenţial, rezultă că şi i este monomorfism esenţial, deci (Q, i) este o anvelopă injectivă a lui M. $\square$

Propoziţie 2.2.5. *Oricare ar fi R-modulele drepte $M_1, M_2, \ldots, M_n$ avem*

$$E\left(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i\right) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} E(M_i).$$

Demonstraţie. Din 1.9, $\bigoplus_{i=1}^{n} E(M_i)$ este o extensie esenţială a lui $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$. Cum

$$\bigoplus_{i=1}^{n} E(M_i) \cong \prod_{i=1}^{n} E(M_i),$$

din 2.1.3 rezultă că $\bigoplus_{i=1}^{n} E(M_i)$ este injectiv. Prin unicitatea anvelopei injective obţinem

$$E\left(\bigoplus_{i=1}^{n} M_i\right) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} E(M_i).$$

$\square$

Teoremă 2.2.6. *Fie Q şi M două R-module. Atunci Q este M-injectiv dacă şi numai dacă $f(M) \leq Q$, oricare ar fi $f \in \mathrm{Hom}(E(M), E(Q))$.*

Demonstraţie. „$\Rightarrow$" Fie $f \in \mathrm{Hom}(E(M), E(Q))$ şi notăm

$$K := \{\, m \in M \mid f(m) \in Q \,\}.$$

Cum Q este M-injectiv, există un morfism $\bar{f} : M \to Q$ astfel încât $\bar{f}\,|_K = f\,|_K$. Arătăm că

$$Q \cap (\bar{f} - f)(M) = 0.$$

Fie $x \in Q$ şi $m \in M$ cu $x = (\bar{f} - f)(m)$. Atunci

$$f(m) = \bar{f}(m) - x \in Q,$$

deci $m \in K$. Urmează că

$$x = \bar{f}(m) - f(m) = f(m) - f(m) = 0.$$

Prin urmare $Q \cap (\bar{f} - f)(M) = 0$ şi, cum $Q \trianglelefteq E(Q)$, rezultă că $(\bar{f} - f)(M) = 0$. Aşadar $f(M) = \bar{f}(M) \leq Q$.

„$\Leftarrow$" Întrucât $E(Q)$ este injectiv, este suficient să considerăm $f \in \mathrm{Hom}(M, E(Q))$. Fie N un submodul al lui M şi $g : N \to Q$ un morfism de R-module. Cum $E(Q)$ este injectiv, există un morfism $\tilde{g} : M \to E(Q)$ astfel încât $\tilde{g}\,|_N = i \circ g$, unde $i : Q \to E(Q)$ este injecţia canonică. Prin ipoteză avem $\tilde{g}(M) \leq Q$, astfel încât, identificând $\tilde{g}$ cu corestricţia sa la Q, obţinem un morfism $h : M \to Q$ cu $h|_N = g$. Prin urmare Q este M-injectiv. $\square$

Corolar 2.2.7. *Un R-modul Q este quasi-injectiv dacă şi numai dacă $f(Q) \leq Q$ pentru orice $f \in \mathrm{End}(E(Q))$.*

Teoremă 2.2.8 (Matlis–Bass)**.** *Fie R un inel. Atunci R este noetherian la dreapta dacă şi numai dacă, pentru orice R-modul simplu S_i $(i \geq 1)$,*

$$Q := \bigoplus_{i=1}^{\infty} E(S_i)$$

este un R-modul injectiv.

Demonstraţie. „$\Rightarrow$" Fie L un ideal drept al lui R,

$$Q = \bigoplus_{i=1}^{\infty} E(S_i)$$

şi $f : L \to Q$ un morfism de R-module. Există elemente $a_1, \ldots, a_n \in L$ astfel încât

$$L = a_1 R + a_2 R + \cdots + a_n R.$$

În mod evident există $m \geq 1$ astfel încât $f(a_k) \in \bigoplus_{j=1}^{m} E(S_j)$ pentru orice $k = 1, \ldots, n$, deci

$$\Im f \subseteq \bigoplus_{j=1}^{m} E(S_j).$$

Cum $\bigoplus_{j=1}^{m} E(S_j)$ este injectiv, există $g : R \to \bigoplus_{j=1}^{m} E(S_j)$ astfel încât $g\,|_L = f$. Notăm $\bar{f} = i \circ g$, unde $i : \bigoplus_{j=1}^{m} E(S_j) \to Q$ este injecţia canonică. Atunci $\bar{f}\,|_L = f$, deci Q este injectiv.

„$\Leftarrow$" Presupunem că R nu este noetherian la dreapta. Atunci există un şir strict ascendent de ideale la dreapta, finit generate:

$$L_1 \subsetneq L_2 \subsetneq \cdots \subsetneq L_n \subsetneq \cdots .$$

Din lema lui Krull rezultă că, pentru orice $n \geq 1$, există un submodul maximal $M_n \subsetneq L_n$ astfel încât

$$L_{n-1} \subseteq M_n \quad \text{pentru orice } n \geq 2.$$

Fie

$$L := \bigcup_{k=1}^{\infty} L_k, \qquad \pi_k : L_k \longrightarrow L_k/M_k$$

proiecţiile canonice şi

$$E_k := E(L_k/M_k) \quad \text{pentru orice } k \geq 1.$$

Atunci

$$E := \bigoplus_{k=1}^{\infty} E_k$$

este injectiv şi

$$f : L \longrightarrow E, \qquad f(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k(a)$$

este bine definit. Există un element $x \in E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ astfel încât $f(a) = xa$ pentru orice $a \in L$. Rezultă că $\pi_k(a) = 0$ pentru orice $k \geq n+1$, adică $a \in M_k$ pentru orice $k \geq n+1$. Prin urmare

$$L \subseteq M_{n+1} \subsetneq L_{n+1} \subseteq M_{n+2} \subsetneq L_{n+2} \subseteq \cdots \subseteq L,$$

contradicţie. Obţinem că R este noetherian la dreapta. $\square$

Capitolul 3

Sume directe de module coireductibile

Propoziţie 3.1. *Fie M un R-modul şi $E(M)$ anvelopa sa injectivă. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *$E(M)$ este indecompozabil.*
2. *Dacă L şi K sunt submodule nenule ale lui M, atunci $L \cap K \neq 0$.*
3. *Dacă $x, y \in M \setminus \{0\}$, atunci există $a, b \in R$ astfel încât $0 \neq xa = yb$.*
4. *M este o extensie esenţială a oricărui submodul nenul al său.*

Demonstraţie. (2) $\Rightarrow$ (1). Presupunem că $E(M) = L' \oplus K'$ cu L' şi K' submodule nenule ale lui $E(M)$. Cum $M \trianglelefteq E(M)$, avem că $L = L' \cap M \neq 0$ şi $K = K' \cap M \neq 0$, deci

$$L \cap K = (L' \cap K') \cap M = 0,$$

ceea ce contrazice ipoteza (2).

(1) $\Rightarrow$ (2). Presupunem că există L, K submodule nenule ale lui M astfel încât $L \cap K = 0$. Atunci $E(L) \leq E(M)$ şi $K \cap E(L) = 0$ (altfel, cum $L \subseteq E(L)$, am avea $L \cap K \neq 0$). Dar şirul exact scurt

$$0 \longrightarrow E(L) \longrightarrow E(M) \longrightarrow E(M)/E(L) \longrightarrow 0$$

este scindat deoarece $E(L)$ este injectiv şi deci $E(M) \cong E(L) \oplus E(M)/E(L)$. Obţinem astfel

$$0 = K \cap E(L) = K \cap E(M) = K,$$

contradicţie.

Echivalenţele (2) $\Leftrightarrow$ (3) şi (2) $\Leftrightarrow$ (4) sunt evidente. $\square$

Definiţie 3.2. Un modul M care satisface una din condiţiile echivalente de mai sus se numeşte *coireductibil* (sau *uniform*). Fie M un R-modul şi N un submodul propriu al său. Dacă M/N este coireductibil, atunci spunem că N este *ireductibil* în M. Este clar că N este ireductibil în M dacă şi numai dacă din egalitatea $N = P \cap Q$, unde $P, Q \leq M$, rezultă $N = P$ sau $N = Q$.

Exemplu.

1. Este clar că orice modul simplu este coireductibil.

2. $\mathbb{Z}$ este $\mathbb{Z}$-modul coireductibil.

3. Din Propoziţia 3.1 rezultă că un modul injectiv este indecompozabil dacă şi numai dacă este coireductibil. În particular, dacă M este un R-modul coireductibil, atunci $E(M)$ este coireductibil. Rezultă că $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ sunt $\mathbb{Z}$-module coireductibile.

4. $\mathbb{Z}_n$ este $\mathbb{Z}$-modul coireductibil dacă şi numai dacă n este puterea unui număr prim. Dacă $n = p^k$ cu $p \geq 2$ şi $k \geq 1$, atunci $\langle p^m \rangle \subseteq \langle p^i \rangle \cap \langle p^j \rangle$ pentru orice $i, j \in \{1, \ldots, k-1\}$, unde $m = \min(i, j)$, şi deci $\mathbb{Z}_{p^k}$ este coireductibil. Reciproc, presupunem că $\mathbb{Z}_n$ este coireductibil şi $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ este descompunerea lui n în factori primi. Dacă $s \geq 2$, atunci avem
$$\langle p_1^{\alpha_1} \cdots p_{s-1}^{\alpha_{s-1}} \rangle + \mathbb{Z} \quad \text{şi} \quad \langle p_s^{\alpha_s} \rangle + \mathbb{Z}$$
submodule nenule a căror intersecţie este zero, contradicţie. Obţinem că $s = 1$, deci n este o putere a unui număr prim.

Propoziţie 3.3. *Fie M un R-modul şi N un submodul propriu al lui M. Dacă $x \in M \setminus N$, atunci există un submodul ireductibil P al lui M astfel încât $N \subseteq P$ şi $x \notin P$.*

Demonstraţie. Fie
$$\mathfrak{S} = \{ N' \leq M \mid N \subseteq N' \text{ şi } x \notin N' \}.$$
Mulţimea $\mathfrak{S}$, ordonată prin incluziune, este inductivă, deci, prin lema lui Zorn, admite un element maximal P. Arătăm că P este ireductibil în M. Presupunem că $P = U \cap V$ cu $U, V \leq M$ şi $P \subsetneq U$, $P \subsetneq V$. Cum $x \notin P$, avem $x \notin U$ sau $x \notin V$; să spunem $x \notin U$. Atunci $U \in \mathfrak{S}$ şi $P \subsetneq U$, ceea ce contrazice maximalitatea lui P. Rezultă că P este ireductibil. □

Corolar 3.4. *Fie M un R-modul şi N un submodul propriu al lui M. Atunci N este intersecţie de submodule ireductibile în M.*

Demonstraţie. Rezultă imediat din propoziţia anterioară. □

Corolar 3.5. *Let M be an R-module and N a proper submodule of M. Then N is the intersection of irreducible submodules of M.*

Demonstraţie. This follows immediately from Proposition 3.3, applied to each $x \in M \setminus N$. □

Demonstraţie. 1) Rezultă imediat din 3.1.

2) Fie $M \trianglelefteq E$ o extensie esenţială a lui M. Dacă E_1, E_2 sunt submodule nenule ale lui E, atunci $M \cap E_1 \neq 0$ şi $M \cap E_2 \neq 0$, de unde rezultă că
$$(M \cap E_1) \cap (M \cap E_2) \neq 0$$
şi deci $E_1 \cap E_2 \neq 0$, adică E este coireductibil. □

Lemă 3.6. *Fie M un R-modul şi $(M_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ o familie de submodule independente. Dacă N este un submodul al lui M astfel încât*

$$N \cap \Big(\sum_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha\Big) \neq 0,$$

există un submodul nenul într-un M_α izomorf cu un submodul din N.

Demonstraţie. Dacă $\operatorname{Card}\Lambda = 1$, afirmaţia este evidentă.

Dacă $\operatorname{Card}\Lambda = 2$, punem $P = N \cap (M_1 + M_2)$. Dacă $N \cap M_1 = 0$, atunci $P \cong (P + M_1)/M_1$ şi

$$(P + M_1)/M_1 \leq (M_1 + M_2)/M_1 \cong M_2.$$

Deci P este izomorf cu un submodul din M_2. Dacă Λ este mulţime finită, procedând prin inducţie, demonstraţia se reduce la cazul precedent.

Dacă Λ este infinită, considerăm $x \in N \cap \big(\sum_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha\big)$, $x \neq 0$. Atunci există $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Lambda$ astfel încât

$$xR \cap (M_{\alpha_1} + M_{\alpha_2} + \cdots + M_{\alpha_n}) \neq 0$$

şi ne reducem la cazul în care Λ este finită. □

Observaţie 3.7. Fie M un R-modul drept şi Ω mulţimea de submodule coireductibile din M. Este posibil ca $\Omega = \emptyset$. Fie

$$\mathcal{S} = \Big\{\Omega' \subseteq \Omega \;\Big|\; \sum_{N\in\Omega'} N \text{ este directă}\Big\}.$$

Perechea $(\mathcal{S}, \subseteq)$ este inductivă şi, din lema lui Zorn, $\mathcal{S}$ are un element maximal Ω_0. Punem $S = \bigoplus_{N\in\Omega_0} N$. Spunem că S este o sumă directă maximală de submodule coireductibile din M.

Propoziţie 3.8. *Fie M un R-modul şi S o sumă directă maximală de submodule coireductibile din M. Dacă N este un submodul nenul al lui M, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *$S \cap N \neq 0$;*

2. *N conţine un submodul coireductibil.*

Demonstraţie. Implicaţia (1) ⇒ (2) rezultă din lema 3.6.

Implicaţia (2) ⇒ (1) rezultă din maximalitatea lui S. □

Teoremă 3.9. *Fie M un R-modul şi S o sumă directă maximală de submodule coireductibile din M. Există un submodul K maximal printre submodulele lui M care nu conţin nici un coireductibil, cu proprietăţile:*

1. *$S + K$ este directă;*

2. *$(S \oplus K) \trianglelefteq M$.*

Demonstraţie. 1. Fie

$$\mathcal{S} = \{\, L \leq M \mid \forall L' \leq L,\ L' \text{ nu este coireductibil} \,\}.$$

Avem $\mathcal{S} \neq \emptyset$ deoarece $0 \in \mathcal{S}$ şi $\mathcal{S}$ este inductivă. Din lema lui Zorn, $\mathcal{S}$ are un element maximal K. Din Propoziţia 3.8 rezultă că $S \cap K = 0$.

2. Presupunem că $N \cap (S \oplus K) = 0$, unde N este un submodul nenul al lui M. Atunci $(N + K) \cap S = 0$ şi din Propoziţia 3.8 rezultă că $N + K$ nu conţine nici un submodul coireductibil, ceea ce contrazice maximalitatea lui K. Obţinem că $(S \oplus K) \trianglelefteq M$.

□

Definiţie 3.10. Fie M un R-modul. O intersecţie finită de submodule

$$\bigcap_{i \in I} N_i \qquad (I \text{ finit})$$

se numeşte *redusă* dacă, oricare ar fi $i \in I$, avem

$$\bigcap_{i \in I} N_i \neq \bigcap_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} N_j.$$

Este clar că, dacă avem o intersecţie finită $N = \bigcap_{i \in I} N_i$ de submodule ireductibile, ea poate fi adusă întotdeauna la o intersecţie redusă de submodule ireductibile.

Teoremă 3.11 (Teorema (Kuros–Ore))**.** *Fie M un R-modul şi N un submodul al lui M. Presupunem că avem intersecţiile finite reduse pentru N:*

$$N = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_m = L_1 \cap L_2 \cap \cdots \cap L_n,$$

unde N_i şi L_j sunt submodule ireductibile din M. Atunci $m = n$.

Demonstraţie. Notăm $N_i' = N_1 \cap \cdots \cap N_{i-1} \cap N_{i+1} \cap \cdots \cap N_m$. Avem că $N \subseteq N_i'$ şi $N = N_i \cap N_i'$. Fie $P_j = N_i \cap L_j$, $\forall j = 1, \ldots, n$. Atunci $N \subseteq P_j \subseteq N_i'$ şi $P_j \subseteq L_j$, de unde rezultă că

$$N \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} P_j \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} L_j = N,$$

şi deci $\bigcap_{j=1}^{n} P_j = N$.

Cum N_i este ireductibil în M, rezultă că N_i este ireductibil în $N_i + N_i'$, şi deci

$$\frac{N_i'}{N_i' \cap N_i} \cong \frac{N_i + N_i'}{N_i}$$

este coirreductibil, ceea ce arată că N este ireductibil în N_i'.

Atunci, din egalitatea $N = \bigcap_{j=1}^{n} P_j$, există un j astfel încât $N = P_j$. Deci $N = N_i \cap L_j$, adică

$$N = N_i \cap \cdots \cap N_{i-1} \cap L_j \cap N_{i+1} \cap \cdots \cap N_m.$$

Notăm $I = \{1, 2, \ldots, m\}$, $J = \{1, 2, \ldots, n\}$ şi fie $i_1 \in I$. Există $j_1 \in J$ astfel încât

$$N = L_{j_1} \cap \left(\bigcap_{i \neq i_1} N_i \right).$$

Deoarece intersecţia este finită, putem să o reducem: din reducerea succesivă şi prin faptul că nu dispare niciun L_{j_k}, obţinem un şir strict descrescător

$$J \supseteq J_1 \supseteq J_2 \supseteq \cdots \supseteq J_r,$$

cu cel mult $r \leq m$ elemente, astfel încât pentru un anumit set final $J' \subseteq J$,

$$N = \bigcap_{j \in J'} L_j.$$

Este clar că $r \leq m$. Cum intersecţia $N = L_1 \cap \cdots \cap L_n$ este redusă, avem $J' = J$. Pe de altă parte, J' are cel mult r elemente, deci $n \leq r \leq m$, iar simetric $m \leq n$. $\square$

Teoremă 3.12. *Fie M un R-modul şi $(N_i)_{i=1}^m$ şi $(L_j)_{j=1}^n$ două familii independente de submodule coirreductibile astfel încât*

$$\bigoplus_{i=1}^{m} N_i \subseteq M \quad \text{şi} \quad \bigoplus_{j=1}^{n} L_j \subseteq M$$

sunt esenţiale în M. Atunci $m = n$.

Demonstraţie. Notăm $N'_k = \bigoplus_{i \neq k} N_i$, pentru fiecare $k = 1, \ldots, m$. Atunci $N_k \cap N'_k = 0$.

Se verifică uşor că mulţimea

$$\mathfrak{S}_k = \{P \leq M \mid N_k \cap P = 0 \text{ şi } N_k \subseteq P\}$$

este inductivă. Din lema lui Zorn, are un element maximal P_k. Dacă $Q, Q' \leq M$ sunt astfel încât $P_k \subseteq Q \subseteq Q'$, atunci $N_k \cap Q \neq 0$ şi $N_k \cap Q' \neq 0$, iar ireductibilitatea lui N_k arată că $P_k = Q = Q'$. Deci P_k este coirreductibil pentru fiecare k.

Fie $k \in \{1, \ldots, m\}$. Atunci

$$N = \bigoplus_{k=1}^{m} N_k = N_k \oplus N'_k.$$

Aplicând legea distributivităţii modulare, obţinem

$$N \cap P_k = (N_k \oplus N'_k) \cap P_k = N_k + (N'_k \cap P_k),$$

deci $N \cap P_k = N_k$. Rezultă că

$$N \cap \bigcap_{k=1}^{m} P_k = \bigcap_{k=1}^{m} (N \cap P_k) = \bigcap_{k=1}^{m} N_k = 0.$$

Dar NVM, deci $\bigcap_{k=1}^m P_k = 0$.

Cum $N_i = \bigcap_{k \neq i} P_k$, avem că fiecare intersecţie este redusă.

Analog, pentru familia (L_j), obţinem submodule ireductibile (Q_j) astfel încât $\bigcap_{j=1}^n Q_j = 0$, reducând intersecţia.

Din teorema Kuros–Ore, rezultă $m = n$. $\square$

Definiţie 3.13. Spunem că un R-modul M are *dimensiune coireductibilă finită* dacă există o familie finită independentă $(N_i)_{i=1}^n$ de submodule coireductibile din M astfel încât

$$\bigoplus_{i=1}^{n} N_i \trianglelefteq M.$$

În acest caz numărul n se numeşte *dimensiunea coireductibilă* a lui M şi scriem $\dim M = n$.

Teoremă 3.14. *Fie M un R-modul. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *M are dimensiune coireductibilă finită.*

2. *M satisface condiţia lanţurilor ascendente pentru sume directe.*

Demonstraţie. (2) $\Rightarrow$ (1). Fie $\mathcal{S}'$ şi $\mathcal{S}$ două familii finite de submodule independente din M. Spunem că $\mathcal{S}'$ este o *rafinare* a lui $\mathcal{S}$ dacă oricare submodul din $\mathcal{S}'$ este conţinut într-un submodul din $\mathcal{S}$. Se verifică uşor că relaţia de rafinare este o relaţie de ordine pe mulţimea familiilor de submodule ale lui M. Cum M satisface (2), există o familie $\mathcal{S}_0$ de submodule independente ale lui M, maximală în raport cu relaţia de rafinare.

Fie $N \in \mathcal{S}_0$. Dacă N nu este coireductibil, există două submodule nenule $P, Q \leq N$ astfel încât $P \cap Q = 0$. Este clar că din $\mathcal{S}_0$ se obţine o rafinare proprie a lui $\mathcal{S}_0$, contradicţie. Rezultă că orice submodul din $\mathcal{S}_0$ este coireductibil, deci M conţine un submodul coireductibil. Dacă L este un submodul nenul al lui M, atunci şi L satisface condiţia (2) şi, prin acelaşi raţionament, L conţine un submodul coireductibil.

Fie acum

$$S = \bigoplus_{i\in I} N_i$$

o sumă directă maximală de submodule coireductibile din M şi N un submodul nenul al lui M. Cum M satisface condiţia lanţurilor ascendente pentru sume directe, rezultă că mulţimea I este finită. Din Propoziţia 3.8 rezultă că $S \cap N \neq 0$, ceea ce arată că $S \trianglelefteq M$. Prin definiţie, M are dimensiune coireductibilă finită.

(1) $\Rightarrow$ (2). Fie

$$S = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$$

o sumă directă de submodule coireductibile astfel încât $S \trianglelefteq M$. Dacă N este un submodul nenul al lui M, atunci $S \cap N \neq 0$, iar din Lema 3.6 rezultă că N conţine un submodul coireductibil.

Fie $(L_j)_{j=1}^m$ o familie independentă de submodule ale lui M. Din paragraful precedent rezultă că fiecare L_j conţine un submodul coireductibil P_j. Evident, familia $(P_j)_{j=1}^m$ este independentă. Din Teorema 3.12 obţinem că $m \leq n$. Aceasta arată că orice familie independentă de submodule poate fi extinsă numai până la o familie finită, ceea ce este echivalent cu condiţia lanţurilor ascendente pentru sume directe. $\square$

Observaţie 3.15. Fie M un R-modul. Atunci:

1. Dacă $N \trianglelefteq M$, atunci M are dimensiune coireductibilă finită dacă şi numai dacă N are dimensiune coireductibilă finită şi, în acest caz, $\dim M = \dim N$.

2. Dacă $M = \bigoplus_{i=1}^{n} N_i$, atunci M are dimensiune coireductibilă finită dacă şi numai dacă fiecare N_i are dimensiune coireductibilă finită pentru orice $i = 1, \ldots, n$. În plus avem
$$\dim M = \sum_{i=1}^{n} \dim N_i.$$

Capitolul 4

Domenii Ore şi inele Goldie

Definiţie 4.1. Un domeniu de integritate D se numeşte *domeniu Ore la dreapta* (respectiv la stânga) dacă $aD \cap bD \neq 0$ (respectiv $Da \cap Db \neq 0$) oricare ar fi $a, b \in D \setminus \{0\}$.

Propoziţie 4.2. *Fie D un domeniu de integritate. Atunci D este un domeniu Ore la dreapta dacă şi numai dacă D conţine un ideal drept coireductibil. În particular, această condiţie este verificată când D satisface condiţia lanţurilor ascendente pentru sume directe de ideale drepte.*

Demonstraţie. „$\Rightarrow$" Dacă D este un domeniu Ore la dreapta atunci D_D este coireductibil.

„$\Leftarrow$" Fie X un ideal drept coireductibil al lui D şi $x \in X \setminus \{0\}$. Aplicaţia

$$\varphi_x : D_D \longrightarrow X, \qquad \varphi_x(a) = xa$$

este un morfism injectiv de D-module drepte. Atunci D_D este coireductibil şi deci D este domeniu Ore la dreapta. □

Exemplu 4.3. Fie K un corp comutativ şi y o nedeterminată. Considerăm $K(y)$ corpul de fracţii al inelului de polinoame $K[y]$. Dacă x este o altă nedeterminată, considerăm $K(y)[x]$ mulţimea polinoamelor cu coeficienţi în $K(y)$ şi în nedeterminata x. Pe această mulţime definim două operaţii: operaţia de adunare fiind adunarea obişnuită a polinoamelor, iar operaţia de înmulţire în $K(y)[x]$ o definim prin relaţia de comutare

$$xf(y) = f(y^2)x, \qquad f \in K(y).$$

Se verifică imediat că mulţimea $K(y)[x]$, cu cele două operaţii, este un inel unitar. Notăm $A = K(y)[x]$. A este un domeniu de integritate necomutativ.

Orice element din A poate fi pus sub formă unică:

$$P(x) = f_n(y)x^n + f_{n-1}(y)x^{n-1} + \cdots + f_1(y)x + f_0(y),$$

unde n este un număr natural şi $f_0(y), f_1(y), \ldots, f_n(y) \in K(y)$, $f_n(y) \neq 0$. Vom nota $\deg P(x) = n$.

Observăm că, dacă $P(x), Q(x) \in A$ cu $Q(x) \neq 0$, există două elemente $S(x), R(x) \in A$ astfel încât

$$P(x) = S(x)Q(x) + R(x) \qquad (*)$$

cu $R(x) = 0$ sau $\deg R(x) < \deg Q(x)$. Din relaţiile $(*)$ rezultă că A este inel principal la stânga. Rezultă că A satisface condiţia lanţurilor ascendente pentru sume directe de ideale la stânga şi deci A este domeniu Ore la stânga.

Să arătăm egalitatea $xA \cap yA = 0$. Fie $\alpha \in xA \cap yA$. Atunci

$$\alpha = x\big(f_n(y)x^n + \cdots + f_0(y)\big) = yx\big(g_m(y)x^m + \cdots + g_0(y)\big),$$

de unde

$$f_n(y^2)x^{n+1} + \cdots + f_0(y^2)x = y\big(g_m(y^2)x^{m+1} + \cdots + g_0(y^2)x\big)$$

şi deci $m = n$. Rezultă

$$f_n(y^2) = yg_m(y^2), \dots, f_0(y^2) = yg_0(y^2),$$

ceea ce are loc dacă şi numai dacă $f_n(y) = \cdots = f_1(y) = f_0(y) = 0$ şi deci $\alpha = 0$. Rezultă că A nu este domeniu Ore la dreapta.

INELE GOLDIE

Definiţie 4.4. Un ideal drept (respectiv stâng) I se numeşte *ideal anulator la dreapta* (respectiv la stânga) dacă există o submulţime nevidă X a lui R astfel încât $I = \mathrm{ann}_r(X)$ (respectiv $I = \mathrm{ann}_l(X)$).

Un inel R se numeşte *inel Goldie la dreapta* dacă R satisface condiţia lanţurilor ascendente pentru ideale anulatori la dreapta şi nu există în R o sumă directă infinită de ideale drepte nenule.

Exemplu 4.5.

1. Dacă R este inel noetherian la dreapta, atunci R este inel Goldie la dreapta. În particular, $\mathbb{Z}$ este inel Goldie.
2. Dacă R este un domeniu de integritate, atunci R este inel Goldie la dreapta dacă şi numai dacă R este domeniu Ore la dreapta.
3. Din exemplul 4.3 rezultă că există inele Goldie la stânga care nu sunt Goldie la dreapta.

Propoziţie 4.6. *Fie R un inel. Atunci R verifică condiţia lanţurilor ascendente pentru ideale anulatori la dreapta (respectiv la stânga) dacă şi numai dacă R verifică condiţia lanţurilor descendente pentru ideale anulatori la stânga (respectiv la dreapta).*

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Fie $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \dots$ un şir descendent de ideale anulatori la stânga. Pentru orice $j \geq 1$ există o mulţime nevidă $X_j \subseteq R$ astfel încât $I_j = \mathrm{ann}_\ell(X_j)$.

Atunci obţinem şirul ascendent de ideale anulatori la dreapta

$$\mathrm{ann}_r(I_1) \subseteq \mathrm{ann}_r(I_2) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{ann}_r(I_n) \subseteq \dots$$

şi deci există $m \geq 1$ astfel încât $\mathrm{ann}_r(I_m) = \mathrm{ann}_r(I_{m+k})$ pentru orice $k \geq 1$. Rezultă că

$$\mathrm{ann}_\ell(\mathrm{ann}_r(I_m)) = \mathrm{ann}_\ell(\mathrm{ann}_r(I_{m+k})) \quad \text{pentru orice } k \geq 1,$$

adică $I_m = I_{m+k}$ pentru orice $k \geq 1$.

Folosind relaţiile $\mathrm{ann}_\ell(\mathrm{ann}_r(\mathrm{ann}_\ell(X))) = \mathrm{ann}_\ell(X)$ şi $\mathrm{ann}_r(Y) \subseteq \mathrm{ann}_r(X)$ dacă $X \subseteq Y$, implicaţia "$\Leftarrow$" se demonstrează analog. $\square$

Propoziţie 4.7. *Fie R un inel semiprim care satisface condiţia lanţurilor ascendente pentru ideale anulatori la dreapta. Dacă I şi J sunt ideale drepte astfel încât $I \subseteq J$, atunci există un element $b \in R$ astfel încât $bJ \neq 0$ şi $bJ \cap I = 0$.*

Demonstraţie. Din lema precedentă există un element minimal a în mulţimea idealelor anulatori la stânga astfel încât $\mathrm{ann}_\ell(J) \subseteq \mathrm{ann}_\ell(I)$. Atunci $aJ \neq 0$, iar cum R este inel semiprim, obţinem $aJ \cdot aJ \neq 0$ şi deci există $b = xa$ cu $x \in J$, $a \in aJ$ astfel încât $xaJ \neq 0$. Evident, $bJ \neq 0$.

Rămâne să arătăm că $bJ \cap I = 0$. Fie $\lambda \in bJ \cap I$, deci $\lambda = b\mu = xa\mu \in I$ pentru un $\mu \in J$. Cum $\mathrm{ann}_\ell(J) \subseteq \mathrm{ann}_\ell(\lambda)$, obţinem

$$\mathrm{ann}_\ell(J) \subseteq \mathrm{ann}_\ell(\lambda) \subseteq \mathrm{ann}_\ell(\mu).$$

Deoarece $a \in aJ \subseteq aR$, avem

$$xa \in a \quad \text{şi deci} \quad xaJ \subseteq aJ. \tag{4.1}$$

Pe de altă parte, $xaJ \subseteq I$, iar $\lambda \in I$ şi $a \subseteq \mathrm{ann}_r(I)$, astfel încât

$$a \subseteq \mathrm{ann}_\ell(\mu). \tag{4.2}$$

Dar cum $xaJ \neq 0$, avem

$$a \nsubseteq \mathrm{ann}_\ell(J). \tag{4.3}$$

Din (4.1), (4.2) şi (4.3) obţinem că $\mathrm{ann}_\ell(J) \subseteq \mathrm{ann}_\ell(\mu) \cap a$. Dacă $\lambda \neq 0$, atunci $xa\mu \notin \mathrm{ann}_\ell(\mu)$ şi, cum $xa \in a$, rezultă că $xa\mu \neq 0$, ceea ce contrazice alegerea lui a. Deci $\lambda = 0$, şi atunci $bJ \cap I = 0$. □

Corolar 4.8. *Dacă R este un inel Goldie la dreapta semiprim, atunci R satisface condiţia lanţurilor descendente pentru ideale anulatori la dreapta.*

Demonstraţie. Presupunem că există un şir strict descrescător de ideale anulatori la dreapta

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \ldots.$$

Atunci pentru orice $n \geq 1$ avem $\mathrm{ann}_\ell(I_n) \neq \mathrm{ann}_\ell(I_{n+1})$. Din Propoziţia 4.7 rezultă că pentru orice $n \geq 1$ există un ideal drept K_n astfel încât $K_n \subseteq I_n$ şi $K_n \cap I_{n+1} \neq 0$. Atunci suma directă $\sum_{n\geq 1} K_n$ este o sumă directă infinită de ideale drepte nenule, în contradicţie cu faptul că R este Goldie la dreapta. □

Propoziţie 4.9. *Fie R un inel semiprim care satisface condiţia lanţurilor ascendente pentru ideale anulatori la dreapta. Dacă $x, y \in R$ sunt astfel încât xR şi yR sunt esenţiale în R_R, atunci xyR este esenţial.*

Demonstraţie. Fie $I \leq R_R$ cu $I \neq 0$. Notăm

$$J = \{I : x\} = \{a \in R \mid xa \in I\}.$$

Atunci J este un ideal drept al lui R, iar $xJ = xR \cap I \neq 0$ deoarece $xR \trianglelefteq R_R$. Cum $\mathrm{ann}_r(x) \subseteq J$ şi $xJ \neq 0$ iar $\mathrm{ann}_\ell(x) = 0$, obţinem

$$\mathrm{ann}_\ell(J) \subseteq \mathrm{ann}_\ell(\mathrm{ann}_r(x)).$$

Din Propoziţia 4.7 rezultă că există un ideal drept $K \neq 0$ astfel încât $K \subseteq J$ şi $K \cap \mathrm{ann}_r(x) = 0$.

Notăm apoi
$$L = \{K : y\} = \{a \in R \mid ya \in K\}.$$
Deoarece $yR \trianglelefteq R_R$, avem $yL = yR \cap K \neq 0$. Dacă $xyL = 0$, atunci $yL \subseteq \mathrm{ann}_r(x)$ şi deci $yL \subseteq \mathrm{ann}_r(x) \cap K = 0$, contradicţie. Prin urmare $xyL \neq 0$.

Cum $xyL \subseteq xK \subseteq xJ \subseteq xR \cap I$, rezultă că $0 \neq xyL \subseteq xyR \cap I$, ceea ce arată că $xyR \trianglelefteq R_R$. □

Propoziţie 4.10. *Fie R un inel care verifică condiţia lanţurilor ascendente pentru ideale anulatori drepte. Atunci, pentru orice $a \in R$ există un număr $k \geq 0$ astfel încât*
$$\mathrm{ann}_r(a^n) = \mathrm{ann}_r(a^m) \quad \textit{pentru orice } n \geq 0 \textit{ şi } m \geq k.$$

Demonstraţie. Avem lanţul ascendent de ideale anulatori la dreapta:
$$\mathrm{ann}_r(a) \subseteq \mathrm{ann}_r(a^2) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{ann}_r(a^n) \subseteq \cdots.$$
Fie $k \geq 0$ astfel încât $\mathrm{ann}_r(a^k) = \mathrm{ann}_r(a^m)$ pentru orice $m \geq k$. Dacă $\lambda \in \mathrm{ann}_r(a^n) \cap a^m R$, atunci $a^n\lambda = 0$ şi $\lambda = a^m\mu$, de unde $a^{m+n}\mu = 0$. Cum $m + n \geq k$, obţinem că $\mu \in \mathrm{ann}_r(a^k)$ şi deci $a^k\mu = 0$. Cum $m \geq k$, putem scrie $\lambda = a^{m-k}a^k\mu = 0$ şi deci
$$\mathrm{ann}_r(a^n) \cap a^m R = 0.$$
□

Corolar 4.11. *Suntem în condiţiile propoziţiei 4.10. Dacă $xR \trianglelefteq R_R$, atunci x este element regulat în R.*

Demonstraţie. Dacă $\mathrm{ann}_r(x) \neq 0$, atunci $0 = \mathrm{ann}_r(R) \neq \mathrm{ann}_r(xR)$ şi deci există un ideal drept $I \neq 0$ astfel încât $I \cap xR = 0$, contradicţie. Deci $\mathrm{ann}_r(x) = 0$.

Din Propoziţia 4.9 rezultă că $x^nR \trianglelefteq R_R$ pentru orice $n \geq 1$. Aplicând Propoziţia 4.10, găsim $k \geq 0$ astfel încât $\mathrm{ann}_r(x^n) \cap x^mR = 0$ pentru orice $m \geq k$. În special $\mathrm{ann}_r(x) = 0$, deci x este element regulat în R. □

Corolar 4.12. *Fie R un inel Goldie la dreapta şi semiprime. Dacă $\mathrm{ann}_r(x) = 0$, unde $x \in R$, atunci $xR \trianglelefteq R_R$ şi x este regulat.*

Demonstraţie. Fie I un ideal drept nenul al lui R. Presupunem că $I \cap xR = 0$. Atunci suma
$$\sum_{n\geq 1} x^n I$$
este directă. Într-adevăr, $x^pI \cap \sum_{n\neq p} x^nI$ este egală cu $xI \cap x^pI$, dacă $p = 1$. Dacă $y \in xI \cap x^pI$, atunci $y = x\lambda = x^2\mu$, unde $\lambda, \mu \in I$. Dar atunci $\lambda - x\mu \in \mathrm{ann}_r(x)$ şi deci $\lambda = x\mu$, de unde obţinem că $\lambda \in I \cap xR = 0$. Rezultă că $\lambda = 0$ şi atunci $y = 0$. Aşadar $xI \cap x^2I = 0$ şi cu atât mai mult $xI \cap x^pI = 0$ dacă $p \neq 1$. Deci $x^pI \cap \sum_{n\neq p} x^nI = 0$ şi prin urmare suma $\sum_{n\geq 1} x^nI$ este directă, contradicţie.

Rezultă că $xR \trianglelefteq R_R$. Din Corolarul 4.11 deducem că x este element regulat în R. □

Propoziţie 4.13. *Fie R un inel Goldie la dreapta şi semiprime. Atunci:*

(a) Orice ideal bilateral al lui R anulator la dreapta conţine un ideal bilateral anulator la dreapta minimal.

(b) Există o sumă directă finită de ideale bilaterale nenule anulatori la dreapta minimale ale lui R, care este esenţială în R.

Demonstraţie. (a) Rezultă din Corolarul 4.8.

(b) Fie $I = I_1 \oplus I_2 \oplus \cdots \oplus I_n$ o sumă directă maximală, unde $I_1, \ldots, I_n$ sunt ideale nenule bilaterale anulatori la dreapta minimale ale lui R. Fie $K \leq R_R$, $K \neq 0$ astfel încât $I \cap K = 0$. Cum $KI \subseteq I \cap K = 0$, rezultă că $K \subseteq \operatorname{ann}_r(I)$. Cum R este semiprime, avem $I \cap \operatorname{ann}_r(I) = 0$, de unde $I \operatorname{ann}_r(I) = 0$, deci $\operatorname{ann}_l(I) \subseteq \operatorname{ann}_r(I)$ şi în special $\operatorname{ann}_r(I) \neq 0$. Cum R este semiprim, rezultă şi că $I \cap \operatorname{ann}_l(I) = 0$, unde $\operatorname{ann}_l(I)$ este un ideal bilateral. Din (a) există un ideal bilateral nenul J anulator la dreapta şi minimal astfel încât $J \subseteq \operatorname{ann}_r(I)$ şi $J \cap I = 0$, ceea ce contrazice alegerea lui I ca sumă directă maximală. Prin urmare $I \trianglelefteq R$. □

Propoziţie 4.14. *Fie R un inel Goldie la dreapta şi prim. Dacă I este un ideal drept esenţial în R, atunci I conţine un element regulat al lui R.*

Demonstraţie. Fie $a \in I$ astfel încât $\operatorname{ann}_r(a)$ este minimal în mulţimea $\{\operatorname{ann}_r(x) \mid x \in I\}$. Fie $J \leq R_R$, $J \neq 0$ pentru care $aR \cap J = 0$. Cum $I \trianglelefteq R_R$, avem $I \cap J \neq 0$; putem presupune că J este un ideal drept nenul al lui R inclus în I şi pentru care $aR \cap J = 0$.

Fie $x \in J$. Dacă $\lambda \in \operatorname{ann}_r(a+x)$, atunci $a\lambda + x\lambda = 0$ şi deci $x\lambda = -a\lambda \in aR \cap J$, de unde $x\lambda = 0$ şi apoi $a\lambda = 0$. Aşadar $\lambda \in \operatorname{ann}_r(a) \cap \operatorname{ann}_r(x)$. Cum incluziunea

$$\operatorname{ann}_r(a) \cap \operatorname{ann}_r(x) \subseteq \operatorname{ann}_r(a+x)$$

este evidentă, obţinem $\operatorname{ann}_r(a+x) = \operatorname{ann}_r(a) \cap \operatorname{ann}_r(x)$. Cum $\operatorname{ann}_r(a)$ este minimal, rezultă că $\operatorname{ann}_r(a) \subseteq \operatorname{ann}_r(x)$ şi deci $x \operatorname{ann}_r(a) = 0$, de unde $J \operatorname{ann}_r(a) = 0$. Cum R este prim, avem $\operatorname{ann}_r(a) = 0$.

Din Corolarul 4.12 rezultă că $J = 0$, contradicţie. Deci trebuie ca $aR \trianglelefteq R_R$, iar din Corolarul 4.11 obţinem că a este regulat în R. □