

DIMENSIUNEA COIREDUCTIBILĂ A INELELOR ȘI MODULELOR

Coordonator științific: Prof. Dr. Tiberiu Dumitrescu

Student: Sorin Bogde

Universitatea București, Facultatea de Matematică

1999

Cuprins

0 Generalități	1
0.1 Module semisimple	1
0.2 Module noetheriene (artiniene) și inele noetheriene (artiniene)	2
0.3 Module de lungime finită	3
0.4 Radicalul Jacobson	5
0.5 Inele semisimple	6
1 Submodule esențiale	7

Capitolul 0

Generalități

0.1 Module semisimple

Definiție 0.1. Un R -modul nenul S se numește *simplu* dacă singurele sale submodule sunt 0 și S .

Propoziție 0.2. Fie S un R -modul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. S este modul simplu.
2. Pentru orice element nenul $x \in S$ avem $S = xR$.
3. $S \simeq R/I$, unde I este un ideal drept maximal.

Lemă 0.3 (Schur). Fie S și S' două R -module simple și $f: S \rightarrow S'$ un morfism de R -module. Atunci $f = 0$ sau f este izomorfism. În particular $\text{End}_R(S)$ este corp.

Definiție 0.4. Fie M un R -modul și $(S_i)_{i \in I}$ mulțimea submodulelor simple ale lui M . Dacă $M = \sum_{i \in I} S_i$, atunci M se numește *semisimplu*.

Propoziție 0.5. Fie M un R -modul semisimplu și N un submodul al său. Atunci există o submulțime $J \subseteq I$ astfel încât:

1. familia $(S_j)_{j \in J}$ este independentă;
2. $M = N \oplus (\bigoplus_{j \in J} S_j)$.

Corolar 0.6. Cu notațiile de mai sus, pentru modulul semisimplu M există $J \subseteq I$ astfel încât familia $(S_j)_{j \in J}$ este independentă și

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i.$$

Corolar 0.7. Dacă M este un R -modul semisimplu și N un submodul al său, atunci N și M/N sunt semisimplu.

Corolar 0.8. O sumă directă de module semisimplu este modul semisimplu.

Teoremă 0.9. Fie M un R -modul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. M este semisimplu;
2. M este izomorf cu o sumă directă de module simple;
3. orice submodul al său este sumand direct în M ;
4. orice sir exact

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

este scindabil.

Definiție 0.10. Suma submodulelor simple ale lui M se numește *soclul* lui M și se notează $\text{soc}(M)$. Dacă M nu conține nici un submodul simplu atunci punem $\text{soc}(M) = 0$.

Propoziție 0.11. Fie M și N două R -module și $f: M \rightarrow N$ un morfism. Atunci $f(\text{soc}(M)) \subseteq \text{soc}(N)$.

Propoziție 0.12. Fie M un R -modul și N un submodul al său. Atunci

$$\text{soc}(N) = \text{soc}(M) \cap N.$$

Propoziție 0.13. Dacă $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, atunci

$$\text{soc}(M) = \bigoplus_{i \in I} \text{soc}(M_i).$$

Propoziție 0.14. Fie R un inel. Atunci $\text{soc}(R_R)$ este un ideal bilateral al lui R .

0.2 Module noetheriene (artiniene) și inele noetheriene (artiniene)

Definiție 0.15. Fie R un inel și M un R -modul drept. Spunem că M satisfacă *condiția maximală* (resp. *minimală*) dacă orice mulțime nevidă de submodule ale lui M , ordonată prin inclusiune, admite un element maximal (resp. minimal).

Spunem că M satisfacă *condiția lanțurilor ascendențe* (resp. *descendențe*) dacă orice sir (lanț) ascendent de submodule ale lui M

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_i \subseteq \cdots$$

(resp. orice sir descendente

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_i \supseteq \cdots$$

) este staționar, adică există $n \geq 1$ astfel încât $M_n = M_{n+1} = \cdots$.

Propoziție 0.16. Fie M un R -modul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. M satisfacă condiția maximală (minimală);
2. M satisfacă condiția lanțurilor ascendențe (descendențe).

Definiție 0.17. Un R -modul M se numește *noetherian* (resp. *artinian*) dacă satisfacă condiția maximală (resp. minimală). Inelul R se numește noetherian (resp. artinian) la dreapta dacă R_R este noetherian (resp. artinian).

Exemplu 0.18.

1. \mathbb{Z} este inel noetherian dar nu este artinian.
2. Orice grup finit este \mathbb{Z} -modul noetherian și artinian.
3. Orice inel finit este noetherian și artinian.
4. $\mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots, X_n, \dots]$ nu este nici noetherian, nici artinian:

$$(X_1) \subsetneq (X_1, X_2) \subsetneq \cdots \subsetneq (X_1, \dots, X_n) \subsetneq \cdots$$

$$(X_1) \supsetneq (X_1^2) \supsetneq \cdots \supsetneq (X_1^k) \supsetneq \cdots$$

5. \mathbb{Z}_{p^∞} este \mathbb{Z} -modul artinian dar nu este noetherian.

Propoziție 0.19. Fie N, P două submodule ale lui M astfel încât $M = N + P$. Atunci M este noetherian (artinian) dacă și numai dacă N și P sunt noetheriene (artiniene).

Propoziție 0.20. Pentru un R -modul M următoarele afirmații sunt echivalente:

1. M este noetherian;
2. orice submodul al lui M este finit generat.

Propoziție 0.21. Pentru un R -modul M următoarele afirmații sunt echivalente:

1. M este artinian;
2. oricare ar fi familia $(X_i)_{i \in I}$ de submodule ale lui M , există $J \subseteq I$, J finită, astfel încât

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap_{j \in J} X_j.$$

0.3 Module de lungime finită

Definiție 0.22. Fie M un R -modul drept nenul. Se numește *șir de compozиție* sau *șir Jordan–Hölder* al lui M un lanț finit strict ascendent de submodule

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n = M$$

astfel încât X_{i+1}/X_i este modul simplu pentru $0 \leq i \leq n - 1$. Numărul n se numește *lungimea șirului*, iar modulele X_{i+1}/X_i se numesc *factorii șirului*.

Propoziție 0.23. Fie M un R -modul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. M are un șir de compozиție;

2. M este noetherian și artinian.

Propoziție 0.24. Fie

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

un șir exact de R -module drepte. Atunci M admite un șir de compozиție dacă și numai dacă M' și M'' admit un șir de compozиție.

Dacă

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M, \quad 0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_p = M$$

sunt două șiruri de compozиție ale lui M , vom spune că ele sunt *echivalente* dacă $n = p$ și există o bijecție $\sigma : \{0, \dots, n-1\} \rightarrow \{0, \dots, n-1\}$ astfel încât

$$M_{i+1}/M_i \cong M_{\sigma(i)+1}/M_{\sigma(i)} \quad (0 \leq i \leq n-1).$$

Teoremă 0.25 (Jordan–Hölder). Dacă un R -modul M are două șiruri de compozиție

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M, \quad 0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_p = M,$$

atunci aceste două șiruri sunt echivalente.

Definiție 0.26. Un R -modul M care admite un șir de compozиție se numește *modul de lungime finită*. Lungimea șirurilor de compozиție se numește *lungimea* lui M și se notează $l(M)$. Dacă M nu admite nici un șir de compozиție, atunci spunem că M este *de lungime infinită* și scriem $l(M) = \infty$.

Propoziție 0.27. Fie

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

un șir exact de R -module de lungime finită. Atunci

$$l(M) = l(M') + l(M'').$$

Corolar 0.28. Fie M un R -modul de lungime finită și N, L două submodule ale sale. Atunci:

1. $l(M) = l(N) + l(M/N);$
2. $l(N + L) + l(N \cap L) = l(N) + l(L).$

Corolar 0.29. Fie M un R -modul de lungime finită și M_1, M_2, \dots, M_n submodule ale sale astfel încât

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n.$$

Atunci

$$l(M) = \sum_{i=1}^n l(M_i).$$

0.4 Radicalul Jacobson

Radicalul Jacobson al unui modul

Definiție 0.30. Fie M un R -modul. Intersecția tuturor submodulelor maximale ale lui M se numește *radicalul Jacobson* al modulului M și se notează $\text{Rad}(M)$. Dacă M nu are nici un submodul maximal, atunci prin convenție punem $\text{Rad}(M) = M$.

Observație 0.31. Dacă M este un R -modul finit generat, atunci $\text{Rad}(M) \neq M$.

Propoziție 0.32. *Fie M un R -modul. Atunci*

$$\text{Rad}(M) = \bigcap_{\substack{f:M \rightarrow S \\ S \text{ simplu}}} \ker(f) = \bigcap_{\substack{f:M \rightarrow X \\ X \text{ semisimplu}}} \ker(f).$$

Propoziție 0.33. *Fie $f : M \rightarrow N$ un morfism de R -module. Atunci $f(\text{Rad}(M)) \subseteq \text{Rad}(N)$. Dacă, în plus, f este epimorfism și $\ker(f) \subseteq \text{Rad}(M)$, atunci $f(\text{Rad}(M)) = \text{Rad}(N)$.*

Corolar 0.34. *Pentru orice R -modul M are loc egalitatea $\text{Rad}(M / \text{Rad}(M)) = 0$.*

Corolar 0.35. *Dacă M este un R -modul semisimplu, atunci $\text{Rad}(M) = 0$.*

Corolar 0.36. *Dacă $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, atunci*

$$\text{Rad}(M) = \bigoplus_{i \in I} \text{Rad}(M_i).$$

Propoziție 0.37. *Fie M un R -modul astfel încât $\text{Rad}(M) \neq M$. Atunci*

$$\text{Rad}(M) = \bigcap \{ L \leq M \mid L \text{ este submodul superfluu} \}.$$

Propoziție 0.38 (Lema lui Nakayama). *Fie M un R -modul finit generat și N un submodul al său. Dacă $N + \text{Rad}(M) = M$, atunci $N = M$. (Adică $\text{Rad}(M)$ este cel mai mare submodul superfluu al lui M .)*

Radicalul Jacobson al unui inel

Fie R un inel. Considerăm idealul stâng $\text{Rad}({}_R R)$ ca intersecție a idealelor stângi maximale ale lui R și $\text{Rad}(R_R)$ ca intersecție a idealelor drepte maximale ale lui R .

Propoziție 0.39.

1. $\text{Rad}(R_R)$ este un ideal bilateral.
2. $\text{Rad}(R_R) = \{ r \in R \mid 1 - ar \in U(R) \text{ pentru orice } a \in R \}$.
3. $\text{Rad}(R_R) = \text{Rad}({}_R R)$.

Definiție 0.40. Idealul bilateral $\text{Rad}(R_R) = \text{Rad}({}_R R)$ se numește *radicalul Jacobson* al inelului R și se notează $\text{Rad}(R)$.

Propoziție 0.41.

1. Dacă J este un ideal stâng (resp. drept sau bilateral) cu proprietatea că $1 - x$ este inversabil pentru orice $x \in J$, atunci $J \subseteq \text{Rad}(R)$.
2. Dacă J este un nilideal stâng (resp. drept sau bilateral), atunci $J \subseteq \text{Rad}(R)$.

Propoziție 0.42. Fie $\varphi : R \rightarrow S$ un morfism surjectiv de inele. Atunci $\varphi(\text{Rad}(R)) \subseteq \text{Rad}(S)$. Dacă $\ker(\varphi) \subseteq \text{Rad}(R)$, atunci $\varphi(\text{Rad}(R)) = \text{Rad}(S)$.

Propoziție 0.43. Dacă $(R_i)_{i \in I}$ este o familie de inele, atunci

$$\text{Rad}\left(\prod_{i \in I} R_i\right) = \prod_{i \in I} \text{Rad}(R_i).$$

Propoziție 0.44. Fie M un R -modul. Atunci $M \text{ Rad}(R) \subseteq \text{Rad}(M)$.

Teoremă 0.45. Dacă R este un inel artinian, atunci $\text{Rad}(R)$ este nilpotent.

0.5 Inele semisimple

Teoremă 0.46. Pentru un inel R următoarele afirmații sunt echivalente:

1. orice R -modul drept nenul este semisimplu;
2. R este R -modul drept semisimplu;
3. R este artinian și $\text{Rad}(R) = 0$.

Definiție 0.47. Un inel R care satisfacă una din condițiile de mai sus se numește inel semisimplu.

Propoziție 0.48. Fie R un inel semisimplu și M un R -modul nenul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. M este de lungime finită;
2. M este noetherian;
3. M este artinian.

Teoremă 0.49. Fie R un inel artinian la dreapta și M un R -modul nenul. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. M este de lungime finită;
2. M este noetherian;
3. M este artinian.

Corolar 0.50 (Hopkins). Un inel artinian la dreapta (respectiv la stânga) este noetherian la dreapta (respectiv la stânga).

Capitolul 1

Submodule esențiale

Definiție 1.1. Fie M un R -modul drept. Un submodul N al lui M se numește *esențial* (sau spunem că M este o extensie esențială a lui N) dacă $N \cap N' \neq 0$ pentru orice submodul nenul N' al lui M . În acest caz vom folosi notația $N \trianglelefteq M_R$.

Un monomorfism de R -module la dreapta $f : M \rightarrow N$ se numește *esențial* dacă $\text{Im } f$ este submodul esențial în N (adică $\text{Im } f \trianglelefteq N_R$).

Exemplu.

1. $n\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}_\mathbb{Z}$ pentru orice $n \geq 1$.
2. Orice submodul al lui \mathbb{Z}_{p^∞} este esențial.

Observație 1.2. Fie M un R -modul drept și N un submodul al lui M . Atunci $N \trianglelefteq M_R$ dacă și numai dacă pentru orice $x \in M$, $x \neq 0$, există $r \in R$ astfel încât $xr \in N \setminus \{0\}$.

Demonstrație. „ \Rightarrow ” Fie $x \in M \setminus \{0\}$. Cum $0 \neq xR \subseteq M_R$ și $N \trianglelefteq M_R$, rezultă că $xR \cap N \neq 0$, deci există $xr \in xR \cap N \setminus \{0\}$.

„ \Leftarrow ” Fie $N' \leq M_R$, $N' \neq 0$. Pentru $x \in N' \setminus \{0\}$ există $r \in R$ astfel încât $xr \in N \setminus \{0\}$, deci $N \cap N' \neq 0$. \square

Definiție 1.3. Un monomorfism de R -module la dreapta $f : N_R \rightarrow M_R$ se numește esențial dacă $\text{Im } f \trianglelefteq M_R$. Se observă imediat că dacă N este un submodul al lui M atunci inclusiunea canonică $i_N : N \rightarrow M$ este monomorfism esențial dacă și numai dacă $N \trianglelefteq M_R$.

Propoziție 1.4. *Un monomorfism $f : N_R \rightarrow M_R$ este esențial dacă și numai dacă pentru orice R -modul drept M' și orice $g \in \text{Hom}(M, M')$, faptul că $g \circ f$ este monomorfism implică g monomorfism.*

Demonstrație.

„ \Rightarrow ” Fie g ca în enunț astfel încât $g \circ f$ este monomorfism. Presupunem $g \neq 0$. Fie $x \in \text{Ker } g \cap \text{Im } f \setminus \{0\}$. Există $x' \in N$ astfel încât $x = f(x')$ și $g(x) = 0$, de unde $g(f(x')) = 0$. Cum $g \circ f$ este monomorfism, rezultă $x' = 0$ și deci $x = 0$, contradicție.

„ \Leftarrow ” Dacă f nu este monomorfism esențial atunci există $N' \leq M_R$, $N' \neq 0$, astfel încât $N' \cap \text{Im } f = 0$. Considerăm proiecția canonică $\pi_{N'} : M \rightarrow M/N'$. Dacă

$x \in \text{Ker}(\pi_{N'} \circ f)$, atunci $f(x) \in N'$, deci $f(x) = 0$, adică $x = 0$. Obținem astfel că $\pi_{N'} \circ f$ este injectiv, de unde rezultă că $\pi_{N'}$ este injectiv, ceea ce implică $N' = 0$, contradicție. \square

Corolar 1.5. Fie M un R -modul la dreapta și $N \leq M_R$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. $N \trianglelefteq M_R$;
2. incluziunea $i_N : N \rightarrow M$ este monomorfism esențial;
3. pentru orice $f \in \text{Hom}(M, M')$ cu M' R -modul arbitrar, faptul că $f \circ i_N$ este monomorfism implică f monomorfism.

Propoziție 1.6. Fie $f : N_R \rightarrow M_R$ și $g : M_R \rightarrow P_R$ două monomorfisme. Atunci $g \circ f$ este esențial dacă și numai dacă g și f sunt esențiale.

Demonstrație.

„ \Leftarrow ” Fie $z \in P \setminus \{0\}$. Cum g este esențial, există $r \in R$ astfel încât $zr \in \text{Im } g \setminus \{0\}$. Există $y \in M \setminus \{0\}$ astfel încât $zr = g(y)$.

Cum f este esențial, există $r' \in R$ astfel încât $yr' \in \text{Im } f \setminus \{0\}$. De aici există $x \in N \setminus \{0\}$ astfel încât $yr' = f(x)$. Dar $zr' = g(y)r' = g(yr') = g(f(x))$. Dacă $zr' = 0$, atunci $g(f(x)) = 0$ și deci $x = 0$, contradicție. Obținem astfel că $zr' \in \text{Im}(g \circ f)$ și că $zr' \neq 0$, ceea ce ne arată că $g \circ f$ este esențial.

„ \Rightarrow ” Fie $y \in M \setminus \{0\}$. Cum g este monomorfism, $g(y) \neq 0$. Deci există $r \in R$ astfel încât $g(yr) \in \text{Im } g \setminus \{0\}$ și $g(yr) \neq 0$. Rezultă că există $x \in N \setminus \{0\}$ astfel încât $g(yr) = g(f(x))$ de unde $yr = f(x) \in \text{Im } f$, ceea ce ne arată că f este monomorfism esențial.

Dacă $z \in P \setminus \{0\}$ există $r \in R$ astfel încât $zr \in \text{Im}(g \circ f)$ și $zr \neq 0$. Cum $\text{Im}(g \circ f) \subseteq \text{Img}$, rezultă că $zr \in \text{Img}$, și deci g este monomorfism esențial. \square

Propoziție 1.7. Fie M un R -modul la dreapta și L_1, L_2, \dots, L_n submodule ale lui M . Atunci:

- 1) $\bigcap_{i=1}^n L_i$ este esențial în M dacă și numai dacă L_i este esențial în M pentru orice $i = 1, \dots, n$.
 - 2) Dacă $L_1 \subseteq L_2$ și L_1 este esențial în M , atunci L_2 este esențial în M .
- Demonstrația este evidentă.*

Propoziție 1.8. Fie K și L două submodule ale lui M . 1) Dacă $K \subseteq L \subseteq M$, atunci $K \trianglelefteq M$ dacă și numai dacă $K \trianglelefteq L$ și $L \trianglelefteq M$.

2) Dacă $h : K_R \rightarrow M_R$ este morfism de module și $L \trianglelefteq M$, atunci $h^{-1}(L) \trianglelefteq K$.

3) Dacă $L_1, L_2 \leq M_R$ și $K_1 \trianglelefteq L_1$, $K_2 \trianglelefteq L_2$, atunci $K_1 \cap K_2 \trianglelefteq L_1 \cap L_2$.

Demonstrație.

1) Se aplică 1.5 și 1.6.

2) Fie U submodul nenul al lui K . (i) Dacă $h(U) = 0$, atunci $U \subseteq \ker h \subseteq h^{-1}(L)$, ceea ce implică $U \cap h^{-1}(L) \neq 0$. (ii) Dacă $h(U) \neq 0$, atunci $h(U) \cap L \neq 0$ și deci

există $u \in U$ astfel încât $h(u) \in L$, $h(u) \neq 0$, de unde $u \in U \cap h^{-1}(L)$ și $u \neq 0$. Din (i) și (ii) rezultă că $h^{-1}(L) \trianglelefteq K$.

3) Dacă $0 \neq X \leq L_1 \cap L_2$ atunci $X \subseteq L_1$ ceea ce implică $0 \neq X \cap K_1 \leq L_1$. Dar cum $X \subseteq L_2$, rezultă $0 \neq (X \cap K_1) \cap L_2 = X \cap (K_1 \cap K_2)$, și deci $K_1 \cap K_2 \trianglelefteq L_1 \cap L_2$. \square

Propoziție 1.9. Fie $(K_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $(L_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ două familii de submodule ale lui M . Dacă $(K_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ este familie independentă în M și $K_\lambda \trianglelefteq L_\lambda$ pentru orice $\lambda \in \Lambda$, atunci $(L_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ este familie independentă în M și $(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda) \trianglelefteq (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda)$.

Demonstrație.

Fie $K_1 \trianglelefteq L_1$, $K_2 \trianglelefteq L_2$ astfel încât $K_1 \cap K_2 = 0$. Din 1.8(3) rezultă că $0 \trianglelefteq L_1 \cap L_2$, adică $L_1 \cap L_2 = 0$.

Fie proiecțiile canonice $\pi_1 : L_1 \oplus L_2 \rightarrow L_1$, $\pi_2 : L_1 \oplus L_2 \rightarrow L_2$. Cum $K_1 \trianglelefteq L_1$, $K_2 \trianglelefteq L_2$ rezultă că

$$\pi_1^{-1}(K_1) = K_1 \oplus 0 \trianglelefteq L_1 \oplus L_2,$$

și

$$\pi_2^{-1}(K_2) = 0 \oplus K_2 \trianglelefteq L_1 \oplus L_2.$$

Deci

$$K_1 \oplus K_2 = (\pi_1^{-1}(K_1)) \cap (\pi_2^{-1}(K_2)) \trianglelefteq L_1 \oplus L_2.$$

Prin inducție se obține afirmația pentru mulțimi finite. În cazul general, fie $0 \neq m \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$. Atunci există o mulțime finită $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ cu $m \in \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} L_\lambda$. Cum $(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} K_\lambda) \trianglelefteq (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} L_\lambda)$, există $r \in R$ astfel încât $rm \in (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} K_\lambda) \setminus \{0\} \subseteq (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda) \setminus \{0\}$. Rezultă că $(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda) \trianglelefteq (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda)$. \square

Propoziție 1.10. Fie N un submodul al lui M . Atunci există un submodul Q , $N \subseteq Q \subseteq M$, astfel încât Q este o extensie esențială maximală a lui N conținută în M .

Demonstrație.

Fie $\mathfrak{S} = \{L \leq M; N \subseteq L \subseteq M, N^\Gamma L\}$, \mathfrak{S} cu relația de ordine incluziunea. $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ deoarece $N \in \mathfrak{S}$. Fie $(L_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ o familie total ordonată de elemente din \mathfrak{S} și

$$L := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda.$$

Evident $L \leq M_R$.

Fie $x \in L \setminus \{0\}$. Atunci există $\lambda_0 \in \Lambda$ cu $x \in L_{\lambda_0}$. Cum N este esențial în L_{λ_0} , rezultă că există $r \in R$ astfel încât $xr \in N$ și $xr \neq 0$, de unde obținem că L este extensie esențială a lui N . Deci \mathfrak{S} este inductivă și, conform lemei lui Zorn, \mathfrak{S} admite un element maximal Q care satisfac condițiile cerute. \square

Definiție 1.11. Fie M un R -modul la dreapta și $N \leq M_R$. Un submodul $K \leq M_R$ se numește *complement* al lui N în M dacă K este un submodul maximal al lui M cu proprietatea că $K \cap N = 0$. Un submodul $K \leq M_R$ se numește *submodul complement* al lui M dacă există $N \leq M_R$ astfel încât K este complement al lui N în M .

Observație 1.12. Multimea

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \{ L \leq M_R \mid N \cap L = 0 \}$$

este inductivă și, aplicând lema lui Zorn, rezultă că există un complement al lui N în M . În particular, 0 și M sunt submodule complement ale lui M .

Propoziție 1.13. *Fie M_R , $N \leq M_R$ și $K \leq M_R$, K un complement al lui N în M . Există un complement Q al lui K în M astfel încât $N \subseteq Q$. Mai mult, Q este o extensie esențială maximală a lui N în M .*

Demonstrație. Se observă ușor că multimea

$$\tilde{\mathfrak{S}} = \{ L \leq M_R \mid K \cap L = 0, N \subseteq L \}$$

este inductivă și lema lui Zorn asigură existența lui Q .

Fie L un submodul nenul al lui Q astfel încât $L \cap N = 0$. Fie $K_1 = L + K$. Este clar că $K \subseteq K_1$. Dacă $x \in N \cap (L + K)$, atunci $x = y + z$ cu $y \in L$, $z \in K$. Dar $z = x - y \in Q$. Cum $Q \cap K = 0$, rezultă $z = 0$ și deci $x = y$. Din egalitatea $L \cap N = 0$ deducem $x = y = 0$ și deci $N \cap (L + K) = 0$, ceea ce contrazice faptul că K este un complement al lui N în M . Obținem $L \cap N \neq 0$ pentru orice $0 \neq L \leq Q$, de unde Q este extensie esențială a lui N .

Presupunem că există $Q' \leq M_R$ cu $N \trianglelefteq Q'$ și $Q \subsetneq Q'$. Cum Q' este complement al lui K , rezultă $Q' \cap K \neq 0$. Dar $N \cap (Q' \cap K) = 0$ și $0 \neq Q' \cap K \leq Q'$, contradicție cu $N \trianglelefteq Q'$. Rezultă că Q este extensie esențială maximală a lui N în M . \square

Definiție 1.14. Un submodul N al lui M_R se numește *închis* dacă N nu are nicio extensie esențială în M proprie (diferită de N).

Corolar 1.15. *Fie M_R un R -modul. Submodulele complement ale lui M coincid cu submodulele închise ale lui M .*

Demonstrație. Din 1.13 rezultă imediat că orice submodul închis al lui M este un submodul complement al lui M .

Invers, fie K un submodul complement al lui M_R . Rezultă că există $N \leq M_R$ astfel încât K este un complement al lui N în M . Presupunem că K are o extensie esențială în M proprie, adică există $K' \leq M_R$ cu $K \trianglelefteq K'$ și $K \subsetneq K'$. Atunci $K' \cap N \neq 0$, din maximalitatea lui K , iar cum $K \trianglelefteq K'$, rezultă că

$$K \cap K' \cap N \neq 0,$$

contradicție. \square

Corolar 1.16. *Fie N un submodul al lui M_R . Dacă K este un complement al lui N în M , atunci:*

$$1. (N + K) \trianglelefteq M_R.$$

$$2. Morfismul canonic \pi_K \circ i_N : N \rightarrow M/K este monomorfism esențial.$$

Demonstrație. (1) Fie $x \in M \setminus \{0\}$. Dacă $x \notin K$, atunci $K + Rx \neq K$ și deci $N \cap (K + Rx) \neq 0$. Fie $y \in N \cap (K + Rx)$, $y \neq 0$. Există $z \in K$, $r \in R$ cu $y = z + rx$. Dacă $rx = 0$, atunci $y = z$ și cum $N \cap K = 0$ rezultă $y = 0$, contradicție. Deci $rx \neq 0$ și, cum $rx = y - z$, obținem $rx \in N + K$, ceea ce ne arată că $(N + K) \trianglelefteq M_R$.

(2) $\text{Im}(\pi_K \circ i_N) = (N + K)/K$. Fie L/K un submodul nenul al lui M/K . Atunci

$$\frac{N + K}{K} \cap \frac{L}{K} = \frac{(N + K) \cap L}{K} = \frac{N \cap L + K}{K}.$$

Cum K este un complement al lui N , rezultă că $N \cap L \neq 0$ și deci

$$\frac{N \cap L + K}{K} \neq 0,$$

ceea ce ne arată că $\pi_K \circ i_N$ este monomorfism esențial. \square

