DIMENSIUNEA COIREDUCTIBILĂ A INELELOR ŞI MODULELOR

Coordonator ştiinţific: Prof. Dr. Tiberiu Dumitrescu

Student: Sorin Bogde

Universitatea Bucureşti, Facultatea de Matematică

1999

Cuprins

Capitolul 0

Generalităţi

0.1 Module semisimple

Definiţie 0.1.1. Un R-modul nenul S se numeşte *simplu* dacă singurele sale submodule sunt 0 şi S.

Propoziţie 0.1.2. *Fie S un R-modul. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *S este modul simplu.*
2. *Pentru orice element nenul $x \in S$ avem $S = xR$.*
3. *$S \simeq R/I$, unde I este un ideal drept maximal.*

Lemă 0.1.3 (Schur)**.** *Fie S şi S' două R-module simple şi $f \colon S \to S'$ un morfism de R-module. Atunci $f = 0$ sau f este izomorfism. În particular $\mathrm{End}_R(S)$ este corp.*

Definiţie 0.1.4. Fie M un R-modul şi $(S_i)_{i\in I}$ mulţimea submodulelor simple ale lui M. Dacă $M = \sum_{i\in I} S_i$, atunci M se numeşte *semisimplu.*

Propoziţie 0.1.5. *Fie M un R-modul semisimplu şi N un submodul al său. Atunci există o submulţime $J \subseteq I$ astfel încât:*

1. *familia $(S_j)_{j\in J}$ este independentă;*
2. *$M = N \oplus \left(\bigoplus_{j\in J} S_j\right)$.*

Corolar 0.1.6. *Cu notaţiile de mai sus, pentru modulul semisimplu M există $J \subseteq I$ astfel încât familia $(S_j)_{j\in J}$ este independentă şi*

$$M = \bigoplus_{i\in I} M_i.$$

Corolar 0.1.7. *Dacă M este un R-modul semisimplu şi N un submodul al său, atunci N şi M/N sunt semisimple.*

Corolar 0.1.8. *O sumă directă de module semisimple este modul semisimplu.*

Teoremă 0.1.9. *Fie M un R-modul. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *M este semisimplu;*

2. *M este izomorf cu o sumă directă de module simple;*

3. *orice submodul al său este sumand direct în M;*

4. *orice şir exact*
$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$
este scindabil.

Definiţie 0.1.10. Suma submodulelor simple ale lui M se numeşte *soclul* lui M şi se notează $\operatorname{soc}(M)$. Dacă M nu conţine nici un submodul simplu atunci punem $\operatorname{soc}(M) = 0$.

Propoziţie 0.1.11. *Fie M şi N două R-module şi $f\colon M \to N$ un morfism. Atunci $f(\operatorname{soc}(M)) \subseteq \operatorname{soc}(N)$.*

Propoziţie 0.1.12. *Fie M un R-modul şi N un submodul al său. Atunci*
$$\operatorname{soc}(N) = \operatorname{soc}(M) \cap N.$$

Propoziţie 0.1.13. *Dacă $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$, atunci*
$$\operatorname{soc}(M) = \bigoplus_{i\in I} \operatorname{soc}(M_i).$$

Propoziţie 0.1.14. *Fie R un inel. Atunci $\operatorname{soc}(R_R)$ este un ideal bilateral al lui R.*

0.2 Module noetheriene (artiniene) şi inele noetheriene (artiniene)

Definiţie 0.2.1. Fie R un inel şi M un R-modul drept. Spunem că M satisface *condiţia maximală* (resp. *minimală*) dacă orice mulţime nevidă de submodule ale lui M, ordonată prin incluziune, admite un element maximal (resp. minimal).

Spunem că M satisface *condiţia lanţurilor ascendente* (resp. *descendente*) dacă orice şir (lanţ) ascendent de submodule ale lui M
$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_i \subseteq \cdots$$
(resp. orice şir descendent
$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_i \supseteq \cdots$$
) este staţionar, adică există $n \geq 1$ astfel încât $M_n = M_{n+1} = \cdots$.

Propoziţie 0.2.2. *Fie M un R-modul. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *M satisface condiţia maximală (minimală);*

2. *M satisface condiţia lanţurilor ascendente (descendente).*

Definiţie 0.2.3. Un R-modul M se numeşte *noetherian* (resp. *artinian*) dacă satisface condiţia maximală (resp. minimală). Inelul R se numeşte noetherian (resp. artinian) la dreapta dacă R_R este noetherian (resp. artinian).

Exemplu 0.2.4.

1. $\mathbb{Z}$ este inel noetherian dar nu este artinian.

2. Orice grup finit este $\mathbb{Z}$-modul noetherian şi artinian.

3. Orice inel finit este noetherian şi artinian.

4. $\mathbb{Z}[X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots]$ nu este nici noetherian, nici artinian:

$$(X_1) \subsetneq (X_1, X_2) \subsetneq \cdots \subsetneq (X_1, \ldots, X_n) \subsetneq \cdots$$

$$(X_1) \supsetneq (X_1^2) \supsetneq \cdots \supsetneq (X_1^k) \supsetneq \cdots$$

5. $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ este $\mathbb{Z}$-modul artinian dar nu este noetherian.

Propoziţie 0.2.5. *Fie N, P două submodule ale lui M astfel încât $M = N + P$. Atunci M este noetherian (artinian) dacă şi numai dacă N şi P sunt noetheriene (artiniene).*

Propoziţie 0.2.6. *Pentru un R-modul M următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *M este noetherian;*

2. *orice submodul al lui M este finit generat.*

Propoziţie 0.2.7. *Pentru un R-modul M următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *M este artinian;*

2. *oricare ar fi familia $(X_i)_{i \in I}$ de submodule ale lui M, există $J \subseteq I$, J finită, astfel încât*
$$\bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap_{j \in J} X_j.$$

0.3 Module de lungime finită

Definiţie 0.3.1. Fie M un R-modul drept nenul. Se numeşte *şir de compoziţie* sau *şir Jordan–Hölder* al lui M un lanţ finit strict ascendent de submodule

$$0 = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n = M$$

astfel încât X_{i+1}/X_i este modul simplu pentru $0 \leq i \leq n-1$. Numărul n se numeşte *lungimea şirului*, iar modulele X_{i+1}/X_i se numesc *factorii şirului*.

Propoziţie 0.3.2. *Fie M un R-modul. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *M are un şir de compoziţie;*

2. *M este noetherian şi artinian.*

Propoziţie 0.3.3. *Fie*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

un şir exact de R-module drepte. Atunci M admite un şir de compoziţie dacă şi numai dacă M' şi M'' admit un şir de compoziţie.

Dacă

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M, \qquad 0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_p = M$$

sunt două şiruri de compoziţie ale lui M, vom spune că ele sunt *echivalente* dacă $n = p$ şi există o bijecţie $\sigma : \{0, \ldots, n-1\} \to \{0, \ldots, n-1\}$ astfel încât

$$M_{i+1}/M_i \cong M_{\sigma(i)+1}/M_{\sigma(i)} \quad (0 \leq i \leq n-1).$$

Teoremă 0.3.4 (Jordan–Hölder)**.** *Dacă un R-modul M are două şiruri de compoziţie*

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M, \qquad 0 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_p = M,$$

atunci aceste două şiruri sunt echivalente.

Definiţie 0.3.5. Un R-modul M care admite un şir de compoziţie se numeşte *modul de lungime finită*. Lungimea şirurilor de compoziţie se numeşte *lungimea* lui M şi se notează $l(M)$. Dacă M nu admite nici un şir de compoziţie, atunci spunem că M este *de lungime infinită* şi scriem $l(M) = \infty$.

Propoziţie 0.3.6. *Fie*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

un şir exact de R-module de lungime finită. Atunci

$$l(M) = l(M') + l(M'').$$

Corolar 0.3.7. *Fie M un R-modul de lungime finită şi N, L două submodule ale sale. Atunci:*

1. *$l(M) = l(N) + l(M/N)$;*

2. *$l(N + L) + l(N \cap L) = l(N) + l(L)$.*

Corolar 0.3.8. *Fie M un R-modul de lungime finită şi $M_1, M_2, \ldots, M_n$ submodule ale sale astfel încât*

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n.$$

Atunci

$$l(M) = \sum_{i=1}^{n} l(M_i).$$

0.4 Radicalul Jacobson

Radicalul Jacobson al unui modul

Definiţie 0.4.1. Fie M un R-modul. Intersecţia tuturor submodulelor maximale ale lui M se numeşte *radicalul Jacobson* al modulului M şi se notează $\operatorname{Rad}(M)$. Dacă M nu are nici un submodul maximal, atunci prin convenţie punem $\operatorname{Rad}(M) = M$.

Observaţie 0.4.2. Dacă M este un R-modul finit generat, atunci $\operatorname{Rad}(M) \neq M$.

Propoziţie 0.4.3. *Fie M un R-modul. Atunci*

$$\operatorname{Rad}(M) = \bigcap_{\substack{f:M\to S\\ S \text{ simplu}}} \ker(f) = \bigcap_{\substack{f:M\to X\\ X \text{ semisimplu}}} \ker(f).$$

Propoziţie 0.4.4. *Fie $f : M \to N$ un morfism de R-module. Atunci* $f(\operatorname{Rad}(M)) \subseteq \operatorname{Rad}(N)$. *Dacă, în plus, f este epimorfism şi* $\ker(f) \subseteq \operatorname{Rad}(M)$, *atunci* $f(\operatorname{Rad}(M)) = \operatorname{Rad}(N)$.

Corolar 0.4.5. *Pentru orice R-modul M are loc egalitatea* $\operatorname{Rad}(M/\operatorname{Rad}(M)) = 0$.

Corolar 0.4.6. *Dacă M este un R-modul semisimplu, atunci* $\operatorname{Rad}(M) = 0$.

Corolar 0.4.7. *Dacă $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$, atunci*

$$\operatorname{Rad}(M) = \bigoplus_{i\in I} \operatorname{Rad}(M_i).$$

Propoziţie 0.4.8. *Fie M un R-modul astfel încât* $\operatorname{Rad}(M) \neq M$. *Atunci*

$$\operatorname{Rad}(M) = \bigcap \{\, L \leq M \mid L \textit{ este submodul superfluu} \,\}.$$

Propoziţie 0.4.9 (Lema lui Nakayama)**.** *Fie M un R-modul finit generat şi N un submodul al său. Dacă $N + \operatorname{Rad}(M) = M$, atunci $N = M$. (Adică $\operatorname{Rad}(M)$ este cel mai mare submodul superfluu al lui M.)*

Radicalul Jacobson al unui inel

Fie R un inel. Considerăm idealul stâng $\operatorname{Rad}({}_RR)$ ca intersecţie a idealelor stângi maximale ale lui R şi $\operatorname{Rad}(R_R)$ ca intersecţie a idealelor drepte maximale ale lui R.

Propoziţie 0.4.10.

1. $\operatorname{Rad}(R_R)$ *este un ideal bilateral.*

2. $\operatorname{Rad}(R_R) = \{\, r \in R \mid 1 - ar \in U(R) \textit{ pentru orice } a \in R \,\}$.

3. $\operatorname{Rad}(R_R) = \operatorname{Rad}({}_RR)$.

Definiţie 0.4.11. Idealul bilateral $\operatorname{Rad}(R_R) = \operatorname{Rad}({}_RR)$ se numeşte *radicalul Jacobson* al inelului R şi se notează $\operatorname{Rad}(R)$.

Propoziţie 0.4.12.

1. *Dacă J este un ideal stâng (resp. drept sau bilateral) cu proprietatea că $1-x$ este inversabil pentru orice $x \in J$, atunci $J \subseteq \mathrm{Rad}(R)$.*

2. *Dacă J este un nilideal stâng (resp. drept sau bilateral), atunci $J \subseteq \mathrm{Rad}(R)$.*

Propoziţie 0.4.13. *Fie $\varphi : R \to S$ un morfism surjectiv de inele. Atunci $\varphi(\mathrm{Rad}(R)) \subseteq \mathrm{Rad}(S)$. Dacă $\ker(\varphi) \subseteq \mathrm{Rad}(R)$, atunci $\varphi(\mathrm{Rad}(R)) = \mathrm{Rad}(S)$.*

Propoziţie 0.4.14. *Dacă $(R_i)_{i\in I}$ este o familie de inele, atunci*

$$\mathrm{Rad}\Big(\prod_{i\in I} R_i\Big) = \prod_{i\in I} \mathrm{Rad}(R_i).$$

Propoziţie 0.4.15. *Fie M un R-modul. Atunci $M\ \mathrm{Rad}(R) \subseteq \mathrm{Rad}(M)$.*

Teoremă 0.4.16. *Dacă R este un inel artinian, atunci $\mathrm{Rad}(R)$ este nilpotent.*

0.5 Inele semisimple

Teoremă 0.5.1. *Pentru un inel R următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *orice R-modul drept nenul este semisimplu;*

2. *R este R-modul drept semisimplu;*

3. *R este artinian şi $\mathrm{Rad}(R) = 0$.*

Definiţie 0.5.2. Un inel R care satisface una din condiţiile de mai sus se numeşte *inel semisimplu.*

Propoziţie 0.5.3. *Fie R un inel semisimplu şi M un R-modul nenul. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *M este de lungime finită;*

2. *M este noetherian;*

3. *M este artinian.*

Teoremă 0.5.4. *Fie R un inel artinian la dreapta şi M un R-modul nenul. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *M este de lungime finită;*

2. *M este noetherian;*

3. *M este artinian.*

Corolar 0.5.5 (Hopkins)**.** *Un inel artinian la dreapta (respectiv la stânga) este noetherian la dreapta (respectiv la stânga).*

Capitolul 1

Submodule esenţiale

Definiţie 1.0.1. Fie M un R-modul drept. Un submodul N al lui M se numeşte *esenţial* (sau spunem că M este o extensie esenţială a lui N) dacă $N \cap N' \neq 0$ pentru orice submodul nenul N' al lui M. În acest caz vom folosi notaţia $N \trianglelefteq M_R$.

Un monomorfism de R-module la dreapta $f : M \to N$ se numeşte *esenţial* dacă $\operatorname{Im} f$ este submodul esenţial în N (adică $\operatorname{Im} f \trianglelefteq N_R$).

Exemplu.

1. $n\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ pentru orice $n \geq 1$.

2. Orice submodul al lui $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ este esenţial.

Observaţie 1.0.2. Fie M un R-modul drept şi N un submodul al lui M. Atunci $N \trianglelefteq M_R$ dacă şi numai dacă pentru orice $x \in M$, $x \neq 0$, există $r \in R$ astfel încât $xr \in N \setminus \{0\}$.

Demonstraţie. „$\Rightarrow$" Fie $x \in M \setminus \{0\}$. Cum $0 \neq xR \subseteq M_R$ şi $N \trianglelefteq M_R$, rezultă că $xR \cap N \neq 0$, deci există $xr \in xR \cap N \setminus \{0\}$.

„$\Leftarrow$" Fie $N' \leq M_R$, $N' \neq 0$. Pentru $x \in N' \setminus \{0\}$ există $r \in R$ astfel încât $xr \in N \setminus \{0\}$, deci $N \cap N' \neq 0$. □

Definiţie 1.0.3. Un monomorfism de R-module la dreapta $f : N_R \to M_R$ se numeşte esenţial dacă $\operatorname{Im} f \trianglelefteq M_R$. Se observă imediat că dacă N este un submodul al lui M atunci incluziunea canonică $i_N : N \to M$ este monomorfism esenţial dacă şi numai dacă $N \trianglelefteq M_R$.

Propoziţie 1.0.4. *Un monomorfism $f : N_R \to M_R$ este esenţial dacă şi numai dacă pentru orice R-modul drept M' şi orice $g \in \operatorname{Hom}(M, M')$, faptul că $g \circ f$ este monomorfism implică g monomorfism.*

Demonstraţie.

„$\Rightarrow$" Fie g ca în enunţ astfel încât $g \circ f$ este monomorfism. Presupunem $g \neq 0$. Fie $x \in \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f \setminus \{0\}$. Există $x' \in N$ astfel încât $x = f(x')$ şi $g(x) = 0$, de unde $g(f(x')) = 0$. Cum $g \circ f$ este monomorfism, rezultă $x' = 0$ şi deci $x = 0$, contradicţie.

„$\Leftarrow$" Dacă f nu este monomorfism esenţial atunci există $N' \leq M_R$, $N' \neq 0$, astfel încât $N' \cap \operatorname{Im} f = 0$. Considerăm proiecţia canonică $\pi_{N'} : M \to M/N'$. Dacă

$x \in \mathrm{Ker}(\pi_{N'} \circ f)$, atunci $f(x) \in N'$, deci $f(x) = 0$, adică $x = 0$. Obţinem astfel că $\pi_{N'} \circ f$ este injectiv, de unde rezultă că $\pi_{N'}$ este injectiv, ceea ce implică $N' = 0$, contradicţie. □

Corolar 1.0.5. *Fie M un R-modul la dreapta şi $N \leq M_R$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *$N \trianglelefteq M_R$;*
2. *incluziunea $i_N : N \to M$ este monomorfism esenţial;*
3. *pentru orice $f \in \mathrm{Hom}(M, M')$ cu M' R-modul arbitrar, faptul că $f \circ i_N$ este monomorfism implică f monomorfism.*

Propoziţie 1.0.6. *Fie $f : N_R \to M_R$ şi $g : M_R \to P_R$ două monomorfisme. Atunci $g \circ f$ este esenţial dacă şi numai dacă g şi f sunt esenţiale.*

Demonstraţie.
„$\Leftarrow$" Fie $z \in P \setminus \{0\}$. Cum g este esenţial, există $r \in R$ astfel încât $zr \in \mathrm{Im}\, g \setminus \{0\}$. Există $y \in M \setminus \{0\}$ astfel încât $zr = g(y)$.

Cum f este esenţial, există $r' \in R$ astfel încât $yr' \in \mathrm{Im}\, f \setminus \{0\}$. De aici există $x \in N \setminus \{0\}$ astfel încât $yr' = f(x)$. Dar $zr' = g(y)r' = g(yr') = g(f(x))$. Dacă $zr' = 0$, atunci $g(f(x)) = 0$ şi deci $x = 0$, contradicţie. Obţinem astfel că $zr' \in \mathrm{Im}(g \circ f)$ şi că $zr' \neq 0$, ceea ce ne arată că $g \circ f$ este esenţial.

„$\Rightarrow$" Fie $y \in M \setminus \{0\}$. Cum g este monomorfism, $g(y) \neq 0$. Deci există $r \in R$ astfel încât $g(yr) \in \mathrm{Im}\, g \setminus \{0\}$ şi $g(yr) \neq 0$. Rezultă că există $x \in N \setminus \{0\}$ astfel încât $g(yr) = g(f(x))$ de unde $yr = f(x) \in \mathrm{Im}\, f$, ceea ce ne arată că f este monomorfism esenţial.

Dacă $z \in P \setminus \{0\}$ există $r \in R$ astfel încât $zr \in \mathrm{Im}(g \circ f)$ şi $zr \neq 0$. Cum $\mathrm{Im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Im} g$, rezultă că $zr \in \mathrm{Im} g$, şi deci g este monomorfism esenţial.

□

Propoziţie 1.0.7. *Fie M un R-modul la dreapta şi $L_1, L_2, \ldots, L_n$ submodule ale lui M. Atunci:*

1) $\bigcap_{i=1}^{n} L_i$ este esenţial în M dacă şi numai dacă L_i este esenţial în M pentru orice $i = 1, \ldots, n$.

2) Dacă $L_1 \subseteq L_2$ şi L_1 este esenţial în M, atunci L_2 este esenţial în M.

Demonstraţia este evidentă.

Propoziţie 1.0.8. *Fie K şi L două submodule ale lui M. 1) Dacă $K \subseteq L \subseteq M$, atunci $K \trianglelefteq M$ dacă şi numai dacă $K \trianglelefteq L$ şi $L \trianglelefteq M$.*

2) Dacă $h : K_R \to M_R$ este morfism de module şi $L \trianglelefteq M$, atunci $h^{-1}(L) \trianglelefteq K$.

3) Dacă $L_1, L_2 \leq M_R$ şi $K_1 \trianglelefteq L_1$, $K_2 \trianglelefteq L_2$, atunci $K_1 \cap K_2 \trianglelefteq L_1 \cap L_2$.

Demonstraţie.
1) Se aplică 1.5 şi 1.6.

2) Fie U submodul nenul al lui K. (i) Dacă $h(U) = 0$, atunci $U \subseteq \ker h \subseteq h^{-1}(L)$, ceea ce implică $U \cap h^{-1}(L) \neq 0$. (ii) Dacă $h(U) \neq 0$, atunci $h(U) \cap L \neq 0$ şi deci

există $u \in U$ astfel încât $h(u) \in L$, $h(u) \neq 0$, de unde $u \in U \cap h^{-1}(L)$ şi $u \neq 0$. Din (i) şi (ii) rezultă că $h^{-1}(L) \trianglelefteq K$.

3) Dacă $0 \neq X \leq L_1 \cap L_2$ atunci $X \subseteq L_1$ ceea ce implică $0 \neq X \cap K_1 \leq L_1$. Dar cum $X \subseteq L_2$, rezultă $0 \neq (X \cap K_1) \cap L_2 = X \cap (K_1 \cap K_2)$, şi deci $K_1 \cap K_2 \trianglelefteq L_1 \cap L_2$. □

Propoziţie 1.0.9. *Fie $(K_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ două familii de submodule ale lui M. Dacă $(K_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ este familie independentă în M şi $K_\lambda \trianglelefteq L_\lambda$ pentru orice $\lambda \in \Lambda$, atunci $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ este familie independentă în M şi $(\oplus_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda) \trianglelefteq (\oplus_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda)$.*

Demonstraţie.

Fie $K_1 \trianglelefteq L_1$, $K_2 \trianglelefteq L_2$ astfel încât $K_1 \cap K_2 = 0$. Din 1.8(3) rezultă că $0 \trianglelefteq L_1 \cap L_2$, adică $L_1 \cap L_2 = 0$.

Fie proiecţiile canonice $\pi_1 : L_1 \oplus L_2 \to L_1$, $\pi_2 : L_1 \oplus L_2 \to L_2$. Cum $K_1 \trianglelefteq L_1$, $K_2 \trianglelefteq L_2$ rezultă că

$$\pi_1^{-1}(K_1) = K_1 \oplus 0 \trianglelefteq L_1 \oplus L_2,$$

şi

$$\pi_2^{-1}(K_2) = 0 \oplus K_2 \trianglelefteq L_1 \oplus L_2.$$

Deci

$$K_1 \oplus K_2 = (\pi_1^{-1}(K_1)) \cap (\pi_2^{-1}(K_2)) \trianglelefteq L_1 \oplus L_2.$$

Prin inducţie se obţine afirmaţia pentru mulţimi finite. În cazul general, fie $0 \neq m \in \oplus_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda$. Atunci există o mulţime finită $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ cu $m \in \oplus_{\lambda\in\Lambda_0} L_\lambda$. Cum $(\oplus_{\lambda\in\Lambda_0} K_\lambda) \trianglelefteq (\oplus_{\lambda\in\Lambda_0} L_\lambda)$, există $r \in R$ astfel încât $rm \in (\oplus_{\lambda\in\Lambda_0} K_\lambda) \setminus \{0\} \subseteq (\oplus_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda) \setminus \{0\}$. Rezultă că $(\oplus_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda) \trianglelefteq (\oplus_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda)$. □

Propoziţie 1.0.10. *Fie N un submodul al lui M. Atunci există un submodul Q, $N \subseteq Q \subseteq M$, astfel încât Q este o extensie esenţială maximală a lui N conţinută în M.*

Demonstraţie.

Fie $\mathfrak{S} = \{L \leq M;\ N \subseteq L \subseteq M,\ N \ulcorner L\}$, $\mathfrak{S}$ cu relaţia de ordine incluziunea. $\mathfrak{S} \neq \varnothing$ deoarece $N \in \mathfrak{S}$. Fie $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ o familie total ordonată de elemente din $\mathfrak{S}$ şi

$$L := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda.$$

Evident $L \leq M_R$.

Fie $x \in L \setminus \{0\}$. Atunci există $\lambda_0 \in \Lambda$ cu $x \in L_{\lambda_0}$. Cum N este esenţial în L_{λ_0}, rezultă că există $r \in R$ astfel încât $xr \in N$ şi $xr \neq 0$, de unde obţinem că L este extensie esenţială a lui N. Deci $\mathfrak{S}$ este inductivă şi, conform lemei lui Zorn, $\mathfrak{S}$ admite un element maximal Q care satisface condiţiile cerute. □

Definiţie 1.0.11. Fie M un R-modul la dreapta şi $N \leq M_R$. Un submodul $K \leq M_R$ se numeşte *complement* al lui N în M dacă K este un submodul maximal al lui M cu proprietatea că $K \cap N = 0$. Un submodul $K \leq M_R$ se numeşte *submodul complement al lui M* dacă există $N \leq M_R$ astfel încât K este complement al lui N în M.

Observaţie 1.0.12. Mulţimea

$$\widetilde{\mathfrak{S}} = \{\, L \leq M_R \mid N \cap L = 0 \,\}$$

este inductivă şi, aplicând lema lui Zorn, rezultă că există un complement al lui N în M. În particular, 0 şi M sunt submodule complement ale lui M.

Propoziţie 1.0.13. *Fie M_R, $N \leq M_R$ şi $K \leq M_R$, K un complement al lui N în M. Există un complement Q al lui K în M astfel încât $N \subseteq Q$. Mai mult, Q este o extensie esenţială maximală a lui N în M.*

Demonstraţie. Se observă uşor că mulţimea

$$\widetilde{\mathfrak{S}} = \{\, L \leq M_R \mid K \cap L = 0,\ N \subseteq L \,\}$$

este inductivă şi lema lui Zorn asigură existenţa lui Q.

Fie L un submodul nenul al lui Q astfel încât $L \cap N = 0$. Fie $K_1 = L + K$. Este clar că $K \subseteq K_1$. Dacă $x \in N \cap (L + K)$, atunci $x = y + z$ cu $y \in L$, $z \in K$. Dar $z = x - y \in Q$. Cum $Q \cap K = 0$, rezultă $z = 0$ şi deci $x = y$. Din egalitatea $L \cap N = 0$ deducem $x = y = 0$ şi deci $N \cap (L + K) = 0$, ceea ce contrazice faptul că K este un complement al lui N în M. Obţinem $L \cap N \neq 0$ pentru orice $0 \neq L \leq Q$, de unde Q este extensie esenţială a lui N.

Presupunem că există $Q' \leq M_R$ cu $N \trianglelefteq Q'$ şi $Q \subsetneq Q'$. Cum Q' este complement al lui K, rezultă $Q' \cap K \neq 0$. Dar $N \cap (Q' \cap K) = 0$ şi $0 \neq Q' \cap K \leq Q'$, contradicţie cu $N \trianglelefteq Q'$. Rezultă că Q este extensie esenţială maximală a lui N în M. □

Definiţie 1.0.14. Un submodul N al lui M_R se numeşte *închis* dacă N nu are nicio extensie esenţială în M proprie (diferită de N).

Corolar 1.0.15. *Fie M_R un R-modul. Submodulele complement ale lui M coincid cu submodulele închise ale lui M.*

Demonstraţie. Din 1.13 rezultă imediat că orice submodul închis al lui M este un submodul complement al lui M.

Invers, fie K un submodul complement al lui M_R. Rezultă că există $N \leq M_R$ astfel încât K este un complement al lui N în M. Presupunem că K are o extensie esenţială în M proprie, adică există $K' \leq M_R$ cu $K \trianglelefteq K'$ şi $K \subsetneq K'$. Atunci $K' \cap N \neq 0$, din maximalitatea lui K, iar cum $K \trianglelefteq K'$, rezultă că

$$K \cap K' \cap N \neq 0,$$

contradicţie. □

Corolar 1.0.16. *Fie N un submodul al lui M_R. Dacă K este un complement al lui N în M, atunci:*

1. $(N + K) \trianglelefteq M_R$.

2. *Morfismul canonic $\pi_K \circ i_N : N \to M/K$ este monomorfism esenţial.*

Demonstraţie. (1) Fie $x \in M \setminus \{0\}$. Dacă $x \notin K$, atunci $K + Rx \neq K$ şi deci $N \cap (K+Rx) \neq 0$. Fie $y \in N \cap (K+Rx)$, $y \neq 0$. Există $z \in K$, $r \in R$ cu $y = z + rx$. Dacă $rx = 0$, atunci $y = z$ şi cum $N \cap K = 0$ rezultă $y = 0$, contradicţie. Deci $rx \neq 0$ şi, cum $rx = y - z$, obţinem $rx \in N + K$, ceea ce ne arată că $(N+K) \trianglelefteq M_R$.

(2) $\mathrm{Im}(\pi_K \circ i_N) = (N+K)/K$. Fie L/K un submodul nenul al lui M/K. Atunci

$$\frac{N+K}{K} \cap \frac{L}{K} = \frac{(N+K) \cap L}{K} = \frac{N \cap L + K}{K}.$$

Cum K este un complement al lui N, rezultă că $N \cap L \neq 0$ şi deci

$$\frac{N \cap L + K}{K} \neq 0,$$

ceea ce ne arată că $\pi_K \circ i_N$ este monomorfism esenţial. $\square$

Capitolul 2

Module injective

2.1 Module injective

Fie Q şi M două R-module drepte. Q se numeşte *M-injectiv* dacă pentru orice monomorfism $u : M' \to M$ şi orice morfism $f : M' \to Q$, există $g : M \to Q$ astfel încât $g \circ u = f$, adică diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & Q & \end{tikzcd}$$

este comutativă.

Această proprietate este echivalentă cu condiţia ca aplicaţia

$$\mathrm{Hom}(u, Q) : \mathrm{Hom}(M, Q) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M', Q)$$

să fie surjectivă pentru orice monomorfism $u : M' \to M$. Cum functorul $\mathrm{Hom}(-, Q)$ este exact la stânga, rezultă că Q este M-injectiv dacă şi numai dacă $\mathrm{Hom}(-, Q)$ este exact în raport cu orice şir exact de forma

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

R-modulul Q se numeşte *quasi-injectiv* (sau *self-injectiv*) dacă este Q-injectiv. Dacă Q este M-injectiv pentru orice R-modul M, atunci Q se numeşte *injectiv.*

2.1.1 Propoziţie

Propoziţie 2.1.1. *Fie Q şi M două R-module. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *Q este M-injectiv.*

2. *Pentru orice submodul N al lui M şi orice morfism $f : N \to Q$, există $g : M \to Q$ astfel încât $g_{|N} = f$.*

3. *Pentru orice submodul esenţial N al lui M şi orice morfism $f : N \to Q$, există $g : M \to Q$ astfel încât $g_{|N} = f$.*

Demonstraţie. Implicaţiile (1) $\Rightarrow$ (2) şi (2) $\Rightarrow$ (3) sunt evidente.

(2) $\Rightarrow$ (1). Fie M'_R, $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{u} M$ şi $f : M' \to Q$. Atunci $u(M') \leq M$. Considerăm $i : u(M') \to M$ injecţia canonică şi $\bar{u} : M' \to u(M')$ izomorfismul indus de u. Există $g : M \to Q$ astfel încât $g \circ i = f \circ \bar{u}^{-1}$. Atunci

$$g \circ i \circ \bar{u} = f \quad \text{şi deci} \quad g \circ u = f.$$

Diagrama corespunzătoare este

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\bar{u}"] \arrow[dr, "f"'] & u(M') \arrow[r, hook, "i"] & M \arrow[dl, dashed, "g"] \\
& & Q &
\end{tikzcd}$$

(3) $\Rightarrow$ (2). Fie N un submodul al lui M şi K un complement al lui N în M. Atunci $(N \oplus K) \trianglelefteq M$. Fie $h : N \oplus K \to Q$, definit prin $h(n+k) = f(n)$ pentru orice $n \in N$, $k \in K$. Cum $N \cap K = 0$, aplicaţia h este bine definită. Există $g : M \to Q$ astfel încât $g_{|N \oplus K} = h$ şi deci $g_{|N} = h_{|N} = f$.

Aceasta se poate reprezenta prin diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & N \oplus K \arrow[r, hook] \arrow[d, "h"] & M \arrow[dl, dashed, "g"] \\
& & Q &
\end{tikzcd}$$

$\square$

Propoziţie 2.1.2. *Fie $(M_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ o familie de R-module şi M un R-modul. Atunci $\prod_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ este M-injectiv dacă şi numai dacă M_α este M-injectiv pentru orice $\alpha \in \Lambda$.*

Demonstraţie. Fie N un submodul al lui M. Notăm $P = \prod_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$ şi $\pi_\alpha : P \to M_\alpha$ proiecţiile canonice, pentru orice $\alpha \in \Lambda$.

" $\Leftarrow$ " Considerând un morfism $f : N \to P$, avem că morfismele $\pi_\alpha \circ f : N \to M_\alpha$ pot fi extinse la $g_\alpha : M \to M_\alpha$. Există $g : M \to P$ astfel încât $g_{|N} = f$. $\square$