Лабораторна робота №1.1. **Елементи теорії графів**

Завдання 1. У наступній таблиці задана множина ребер E для графа $G = (V, E)$, де V – множина вершин. Для непарних варіантів граф G – неорієнтований, для парних – орієнтований. Зобразити на площині граф G. Крім того, для кожного варіанта виконати наступні завдання:

1) побудувати матрицю суміжності;
2) побудувати матрицю інцидентності;
3) визначити число вершин;
4) визначити число ребер;
5) знайти степені всіх вершин;
6) побудувати таблицю відстаней графа G;
7) знайти діаметр;
8) знайти радіус;
9) визначити центр графа;
10) знайти хроматичне число графа G.

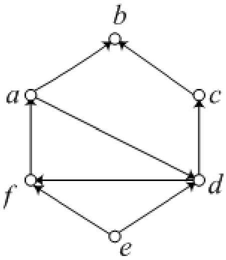
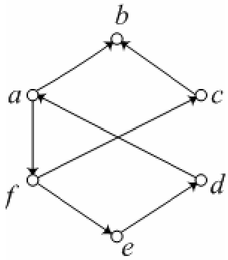
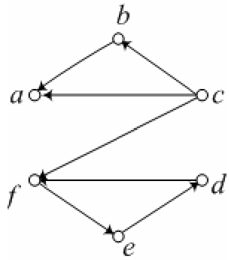
№ з/п	Множина ребер E
1	{(*a*, *a*), (*a*, *b*), (*a*, *c*), (*b*, *b*), (*b*, *a*), (*b*, *f*), (*c*, *c*), (*c*, *b*), (*c*, *d*), (*d*, *a*), (*d*, *b*), (*d*, *e*), (*d*, *d*), (*e*, *a*), (*e*, *b*), (*e*, *e*), (*f*, *b*), (*f*, *c*), (*f*, *d*), (*f*, *e*), (*f*, *f*)}
2	{(*a*, *d*), (*a*, *e*), (*a*, *c*), (*b*, *b*), (*b*, *c*), (*b*, *d*), (*b*, *e*), (*c*, *c*), (*c*, *d*), (*c*, *f*), (*d*, *a*), (*d*, *b*), (*d*, *d*), (*e*, *a*), (*e*, *e*), (*e*, *f*), (*f*, *c*), (*f*, *d*), (*f*, *e*), (*f*, *b*)}
3	{(*a*, *b*), (*a*, *d*), (*b*, *c*), (*b*, *d*), (*b*, *f*), (*b*, *b*), (*c*, *a*), (*c*, *d*), (*c*, *f*), (*d*, *a*), (*d*, *b*), (*d*, *c*), (*d*, *e*), (*d*, *d*), (*d*, *f*), (*e*, *b*), (*e*, *a*), (*e*, *e*), (*e*, *f*), (*f*, *a*), (*f*, *f*), (*f*, *c*)}
4	{(*a*, *a*), (*a*, *c*), (*a*, *e*), (*b*, *c*), (*b*, *d*), (*b*, *f*), (*c*, *c*), (*c*, *e*), (*c*, *f*), (*d*, *a*), (*d*, *c*), (*d*, *d*), (*d*, *f*), (*e*, *a*), (*e*, *b*), (*e*, *d*), (*e*, *f*), (*f*, *a*), (*f*, *c*), (*f*, *d*), (*f*, *e*), (*f*, *e*)}
5	{(*a*, *a*), (*a*, *d*), (*a*, *f*), (*b*, *b*), (*b*, *d*), (*b*, *f*), (*c*, *c*), (*c*, *d*), (*c*, *d*), (*d*, *a*), (*d*, *b*), (*d*, *e*), (*d*, *f*), (*e*, *a*), (*e*, *c*), (*e*, *f*), (*f*, *a*), (*f*, *c*), (*f*, *d*), (*f*, *e*), (*f*, *e*), (*f*, *f*)}
6	{(*a*, *c*), (*a*, *e*), (*a*, *f*), (*b*, *b*), (*b*, *c*), (*b*, *e*), (*b*, *f*), (*c*, *a*), (*c*, *d*), (*c*, *e*), (*c*, *f*), (*d*, *a*), (*d*, *a*), (*d*, *b*), (*d*, *d*), (*e*, *c*), (*e*, *e*), (*e*, *f*), (*f*, *a*), (*f*, *d*), (*f*, *e*), (*f*, *f*)}
7	{(*a*, *d*), (*a*, *f*), (*b*, *b*), (*b*, *d*), (*b*, *f*), (*b*, *f*), (*c*, *a*), (*c*, *e*), (*c*, *f*), (*d*, *a*), (*d*, *b*), (*d*, *c*), (*d*, *e*), (*d*, *f*), (*d*, *f*), (*e*, *b*), (*e*, *c*), (*e*, *e*), (*e*, *f*), (*f*, *a*), (*f*, *c*), (*f*, *d*)}
8	{(*a*, *a*), (*a*, *c*), (*a*, *e*), (*a*, *f*), (*b*, *c*), (*b*, *e*), (*b*, *f*), (*c*, *a*), (*c*, *c*), (*c*, *f*), (*c*, *f*), (*d*, *a*), (*d*, *b*), (*d*, *d*), (*d*, *f*), (*d*, *f*), (*e*, *b*), (*e*, *d*), (*e*, *f*), (*f*, *a*), (*f*, *d*), (*f*, *f*)}
9	{(*a*, *c*), (*a*, *e*), (*a*, *f*), (*b*, *b*), (*b*, *c*), (*b*, *e*), (*b*, *f*), (*c*, *a*), (*c*, *d*), (*c*, *f*), (*c*, *f*), (*d*, *a*), (*d*, *a*), (*d*, *b*), (*d*, *f*), (*e*, *c*), (*e*, *e*), (*e*, *f*), (*f*, *b*), (*f*, *d*), (*f*, *e*), (*f*, *f*)}
10	{(*a*, *a*), (*a*, *b*), (*a*, *f*), (*b*, *d*), (*b*, *f*), (*b*, *f*), (*c*, *a*), (*c*, *e*), (*c*, *f*), (*d*, *a*), (*d*, *a*), (*d*, *c*), (*d*, *e*), (*d*, *f*), (*e*, *a*), (*e*, *c*), (*e*, *f*), (*e*, *f*), (*f*, *b*), (*f*, *c*), (*f*, *d*), (*f*, *f*)}
11	{(*a*, *b*), (*a*, *c*), (*a*, *f*), (*b*, *a*), (*b*, *a*), (*b*, *e*), (*b*, *f*), (*c*, *b*), (*c*, *d*), (*c*, *f*), (*d*, *a*), (*d*, *d*), (*d*, *e*), (*d*, *f*), (*e*, *b*), (*e*, *a*), (*e*, *e*), (*f*, *a*), (*f*, *b*), (*f*, *c*), (*f*, *e*), (*f*, *f*)}
12	{(*a*, *b*), (*a*, *e*), (*a*, *d*), (*b*, *b*), (*b*, *d*), (*b*, *e*), (*b*, *f*), (*c*, *a*), (*c*, *e*), (*c*, *f*), (*c*, *f*), (*d*, *a*), (*d*, *b*), (*d*, *d*), (*d*, *f*), (*e*, *c*), (*e*, *d*), (*e*, *f*), (*f*, *b*), (*f*, *d*), (*f*, *e*), (*f*, *e*)}
13	{(*a*, *a*), (*a*, *c*), (*a*, *f*), (*b*, *a*), (*b*, *b*), (*b*, *e*), (*b*, *f*), (*c*, *b*), (*c*, *f*), (*c*, *f*), (*d*, *a*), (*d*, *d*), (*d*, *e*), (*d*, *f*), (*e*, *a*), (*e*, *b*), (*e*, *f*), (*f*, *a*), (*f*, *b*), (*f*, *d*), (*f*, *e*), (*f*, *f*)}
14	{(*a*, *d*), (*a*, *e*), (*b*, *a*), (*b*, *d*), (*b*, *e*), (*b*, *f*), (*c*, *b*), (*c*, *d*), (*c*, *c*), (*d*, *a*), (*d*, *b*), (*d*, *e*), (*d*, *f*), (*e*, *a*), (*e*, *e*), (*f*, *a*), (*f*, *b*), (*f*, *d*), (*f*, *e*), (*f*, *f*)}
15	{(*a*, *c*), (*a*, *e*), (*a*, *f*), (*b*, *b*), (*b*, *d*), (*b*, *f*), (*c*, *b*), (*c*, *e*), (*c*, *f*), (*c*, *c*), (*d*, *a*), (*d*, *b*), (*d*, *f*), (*e*, *c*), (*e*, *e*), (*f*, *b*), (*f*, *b*), (*f*, *c*), (*f*, *e*)}

Завдання 2. Знайти для заданого в таблиці орієнтованого графа

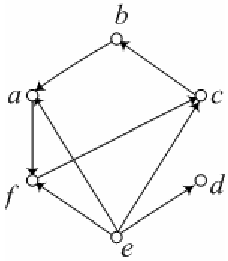
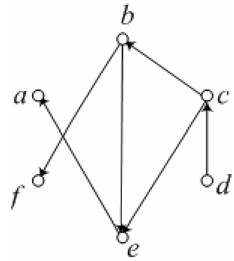
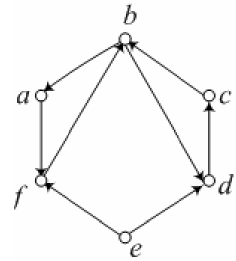
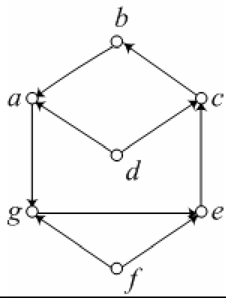
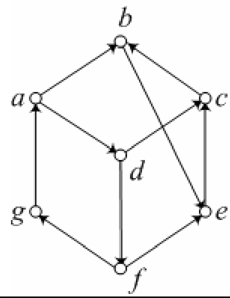
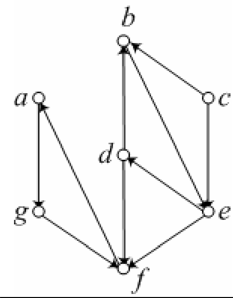
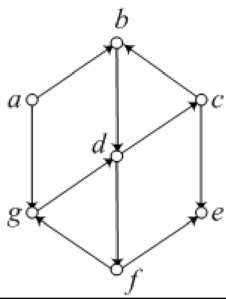
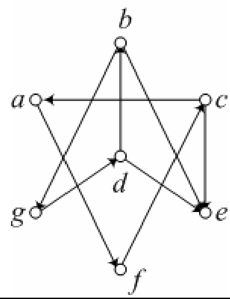
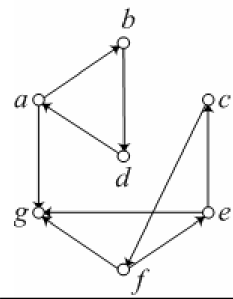
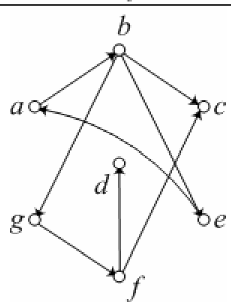
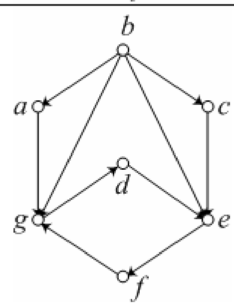
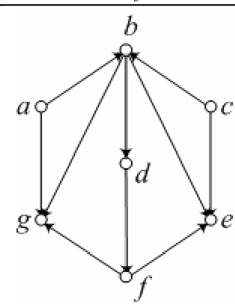
$G = (V, E)$, де V – множина вершин, E – множина ребер:

1) число компонент зв'язності;

2) цикломатичне число.

G	G	G
1) 	2) 	3) 

Продовж. таблиці

G	*G*	*G*
4) 	5) 	6) 
7) 	8) 	9) 
10) 	11) 	12) 
13) 	14) 	15) 

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Зобразити на площині граф $G = (V, E)$, де V – множина вершин, E – множина ребер. Крім того, для графа G:

1) побудувати матрицю суміжності;
2) побудувати матрицю інцидентності;

3) визначити число вершин;
4) визначити число ребер;
5) знайти степені всіх вершин;
6) побудувати таблицю відстаней графа G;
7) знайти діаметр;
8) знайти радіус;
9) визначити центр графа;
10) знайти хроматичне число графа G.

Приклад 1. $G = (V, E)$ – неорієнтований граф (рис. 1), $E = \{(a, b), (b, c), (a, c), (c, d), (c, c), (a, d), (d, a), (d, d)\}$.

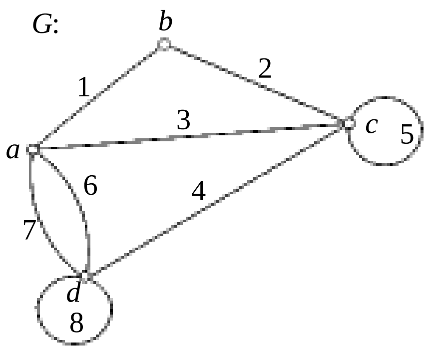


Рис.1

Розв'язання

1) Складаємо *матрицю суміжності* вимірності $n \times n$ (n – кількість вершин). Для неорієнтованого графа елемент матриці, який стоїть на перетині рядка і стовпця, що відповідають певній парі вершин, дорівнює кратності ребра, інцидентного цим вершинам. Діагональний елемент матриці відповідає петлі й дорівнює її подвоєній кратності.

	a	*b*	*c*	*d*
a	0	1	1	2
b	1	0	1	0
c	1	1	2	1
d	2	0	1	2

2) *Матриця інцидентності* матиме m рядків та n стовпців. Стовпці відповідають вершинам графа (n), а рядки – його ребрам (m). Спочатку пронумеруємо ребра графа у відповідності до їхнього порядку в заданому списку. У рядку матриці, який відповідає ребру з тим самим номером, у стовпцях інцидентних йому вершин записуються одиниці, а в рядку, що відповідає петлі, – двійка.

	a	*b*	*c*	*d*
1	1	1	0	0
2	0	1	1	0
3	1	0	1	0
4	0	0	1	1
5	0	0	2	0
6	1	0	0	1
7	1	0	0	1
8	0	0	0	2

3) *Кількість вершин* графа $n(G) = 4$.

4) *Кількість ребер* графа $m(G) = 8$.

5) Використовуючи матрицю суміжності, можна визначити *локальні степені* всіх вершин графа G. Оскільки для неорієнтованого графа матриця суміжності симетрична відносно головної діагоналі, степінь кожної вершини обчислюється як сума елементів відповідного рядка або стовпця.

	a	*b*	*c*	*d*
Степінь вершини	4	2	5	5

6) Побудуємо для заданого графа *матрицю відстаней* вимірності $n \times n$ (n – кількість вершин). На перетині рядка і стовпця, які відповідають двом певним вершинам графа, елемент матриці відстаней дорівнює мінімальній довжині простого ланцюга між цими вершинами.

	a	*b*	*c*	*d*
a	0	1	1	1
b	1	0	1	2
c	1	1	0	1
d	1	2	1	0

7) *Діаметр графа* $d(G) = 2$ – максимальна відстань між довільними вершинами заданого графа.

8) У матрицю відстаней додамо стовпець, в якому визначимо максимальне віддалення $r(v)$ від кожної вершини. *Радіус графа* визначається як найменше із значень максимального віддалення від кожної вершини: $r(G) = 1$.

	a	b	c	d	$r(v)$
a	0	1	1	1	1
b	1	0	1	2	2
c	1	1	0	1	1
d	1	2	1	0	2

9) *Центр графа* G – це множина вершин графа, максимальне віддалення від яких збігається з радіусом цього графа. Отже, $\{a, c\}$ – центр даного графа.

10) *Хроматичне число* графа – це мінімальне число фарб (k), в які можна розфарбувати вершини графа так, щоб кінці будь-якого ребра мали різні кольори.

Для розв'язання задачі k-розфарбовування графа G (рис. 2) скористаємось наступним алгоритмом:

Крок 1. На рисунку біля кожної вершини графа позначимо її степінь. Візьмемо фарбу $k = 1$.

Крок 2. Проглянемо вершини в порядку незростання степенів і забарвимо першу незафарбовану вершину в колір з номером k.

Крок 3. Проглянемо вершини в порядку незростання степенів і забарвимо в колір k всі вершини, які несуміжні вершинам, уже зафарбованим у колір k.

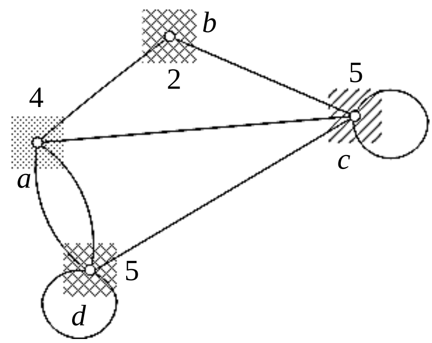


Рис. 2

Крок 4. Якщо всі вершини зафарбовані, то k – хроматичне число. Якщо ні, то $k = k + 1$, і переходимо до кроку 2.

Таким чином, хроматичне число для заданого графа $k = 3$.

Приклад 2. $G = (V, E)$ – орієнтований граф (рис. 3), $E = \{(a, b), (b, a), (b, c), (b, c), (c, c), (c, d), (d, a), (e, d), (e, e)\}$.

Розв'язання

1) Складаємо *матрицю суміжності* вимірності $n \times n$ (n – кількість вершин) для заданого орієнтованого графа, враховуючи при цьому, що позначення рядків – імена вершин, з яких виходять дуги, а позначення стовпців – імена вершин, в які дуги входять. Якщо існує дуга, яка виходить з вершини v_i і входить в v_j, то елемент матриці суміжності на перетині i-го

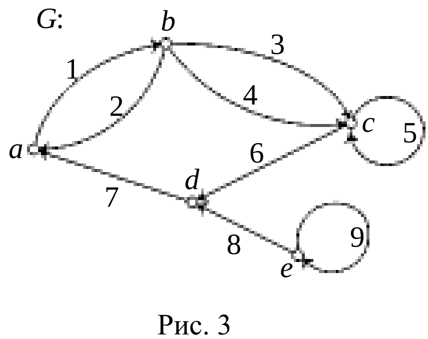


Рис. 3

	a	b	c	d	e
a	0	1	0	0	0
b	1	0	2	0	0
c	0	0	1	1	0
d	1	0	0	0	0
e	0	0	0	1	1

рядка та j-го стовпця дорівнює 1 (або числу k, рівному кратності вказаної дуги).

2) *Матриця інцидентності* має m рядків та n стовпців. Стовпці відповідають вершинам графа (n), а рядки – його дугам (m). Пронумеруємо дуги графа у відповідності до їхнього порядку в заданому списку. У кожному рядку на перетині зі стовпцем, що відповідає вершині – початку дуги, елемент матриці дорівнює –1, а на перетині зі стовпцем, що відповідає вершині – кінцю дуги, елемент матриці дорівнює 1. Якщо дуга починається та закінчується в одній вершині (тобто це петля), то відповідний елемент матриці є 2.

	a	b	c	d	e
1	–1	1	0	0	0
2	1	–1	0	0	0
3	0	–1	1	0	0
4	0	–1	1	0	0
5	0	0	2	0	0
6	0	0	–1	1	0
7	1	0	0	–1	0
8	0	0	0	1	–1
9	0	0	0	0	2

3) *Кількість вершин* графа $n(G) = 5$.

4) *Кількість дуг* графа $m(G) = 9$.

5) Використовуючи матрицю суміжності, визначимо *локальні степені* всіх вершин графа G.

	a	b	c	d	e
Додатний степінь вершини (ρ^+)	1	3	2	1	2
Від'ємний степінь вершини (ρ^-)	2	1	3	2	1
Степінь вершини	3	4	5	3	3

Для вершин орієнтованого графа окремо визначається додатний степінь (по дугах, що виходять з вершини) та від'ємний степінь (по дугах, що входять у вершину). Степінь по вхідних дугах дорівнює сумі елементів відповідного вершині стовпця матриці суміжності, а степінь по вихідних дугах – сумі елементів відповідного вершині рядка матриці суміжності.

	a	b	c	d	e
a	0	1	2	3	∞
b	1	0	1	2	∞
c	2	3	0	1	∞
d	1	2	3	0	∞
e	2	3	4	1	0

6) Побудуємо *матрицю відстаней* вимірності $n \times n$ (n – кількість вершин) для даного орієнтованого графа. На перетині рядка і стовпця, що відповідають певним вершинам графа, елемент матриці відстаней дорівнює мінімальній довжині простого ланцюга між цими вершинами. Якщо між вершинами не існує ланцюга, то відповідний елемент матриці визначається як ∞.

	a	b	c	d	e	$r(v)$
a	0	1	2	3	∞	3
b	1	0	1	2	∞	2
c	2	3	0	1	∞	3
d	1	2	3	0	∞	3
e	2	3	4	1	0	4

7) *Діаметр графа* $d(G) = 4$ – максимальна відстань між довільними вершинами заданого графа.

8) У матрицю відстаней додамо стовпець, в якому визначимо максимальну відстань між вершинами. *Радіус графа* визначається як найменше із значень максимальної відстані між вершинами: $r(G) = 2$.

9) *Центр графа* G – це множина вершин, максимальна відстань від яких у графі G збігається з радіусом цього графа. Отже, $\{b\}$ – центр даного графа.

10) *Хроматичне число* графа – це мінімальне число фарб (k), в які можна розфарбувати вершини графа так, щоб кінці будь-якого ребра мали різні кольори. Для розв'язання задачі k-розфарбовування графа G скористаємось тим же алгоритмом, як і в прикладі 1. Хроматичне число для заданого графа $k = 2$ (рис. 4).

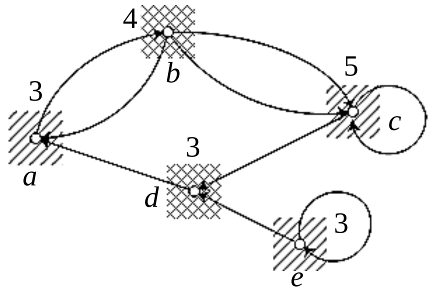


Рис. 4

Завдання 2. Задано орієнтований граф $G = (V, E)$ (рис. 5), де V – множина вершин, E – множина ребер. Знайти:

1) число компонент зв'язності;

2) цикломатичне число.

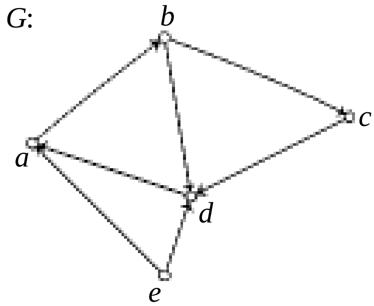


Рис. 5

Розв'язання

1. Виділимо *компоненти зв'язності* орієнтованого графа G.

По-перше, знайдемо матрицю досяжності.

Позначимо через $A^k(G)$ k-й степінь матриці суміжності, $k = n - 1$, n – кількість вершин графа.

Знайдемо матриці $A^1(G)$, $A^2(G)$, $A^3(G)$, $A^4(G)$. Матриця суміжності $A^1(G)$ матиме вигляд

$$A^1(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$A^2(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A^3(G)=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix};$$

$$A^4(G)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&1&1&0\end{pmatrix}.$$

Отже, $T\,(G) = E + A^1(G) + A^2\,(G) + A^3\,(G) + A^4\,(G)$, тобто

$$T(G)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю зв'язності як результат поелементної кон'юнкції матриці $T(G)$ і транспонованої матриці $T^T(G)$:

$$S(G)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Візьмемо $S_1(G) = S(G)$. Складаємо множину вершин першої компоненти зв'язності G_1: це ті вершини, яким відповідають одиниці в першому рядку матриці $S_1(G)$. Таким чином, перша компонента зв'язності складається з чотирьох вершин $V_1 = \{a, b, c, d\}$. Матриця суміжності для цієї компоненти

$$A(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Викреслюючи з матриці $S_1(G)$ рядки та стовпці, які відповідають вершинам з множини V_1, одержуємо матрицю $S_2(G) = (1)$, тобто $V_2 = \{e\}$. Будуємо матрицю суміжності для компоненти зв'язності G_2 як підматрицю матриці $A(G)$: вона буде складатися з тих елементів матриці A, які знаходяться на перетині рядків і стовпців, що відповідають вершинам з V_2. Отже, маємо $A(G_2) = (1)$.

Отримано дві компоненти зв'язності графа G (рис. 6).

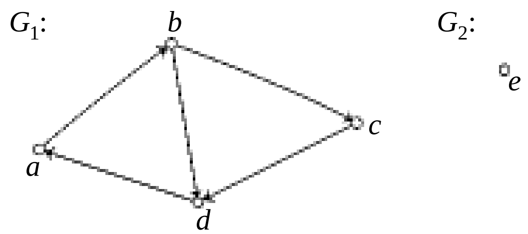


Рис. 6

2. Визначимо *цикломатичне число* орієнтованого графа G за формулою

$$\lambda(G) = m(G) - n(G) + \gamma(G),$$

де $\gamma(G)$ – число компонент зв'язності графа G:

$$\lambda(G) = 7 - 5 + 2 = 4.$$

Лабораторнга робота № 1.2. **Дерева**

Завдання 1. У таблиці наведені ребра неорієнтованого графа $G = (V, E)$. Побудувати остовне дерево графа. Знайти центр цього дерева.

№ з/п	Множина ребер графа $G(E)$
1	01-15, 01-16, 02-14, 02-18, 03-12, 03-17, 04-11, 04-13, 05-06, 05-07, 06-09, 06-10, 07-04, 07-09, 07-17, 08-04, 08-06, 08-07, 09-02, 09-14, 10-03, 10-01, 10-11, 11-12, 12-14, 14-15, 16-15, 17-01, 17-02, 17-14, 18-15, 05-03, 11-14
2	01-07, 05-07, 12-16, 18-10, 14-09, 06-07, 12-18, 13-14, 10-04, 11-07, 16-13, 18-08, 08-04, 11-12, 16-18, 15-14, 14-04, 02-12, 17-01, 15-08, 14-03, 08-09, 10-03, 10-09, 17-15, 13-03, 13-10, 07-18, 07-15, 07-17
3	10-11, 06-02, 12-07, 01-08, 10-08, 06-14, 12-09, 01-07, 10-01, 06-05, 11-08, 09-07, 06-03, 11-07, 02-15, 14-04, 05-15, 05-13, 17-12, 13-12, 13-10, 10-09, 18-07, 18-11, 04-16, 04-18, 16-10, 03-15, 13-17, 13-18, 15-16

Продовж. таблиці

№ з/п	Множина ребер графа $G(E)$
4	01-14, 14-15, 09-08, 01-03, 14-17, 16-12, 01-02, 18-15, 11-12, 06-03, 13-17, 11-04, 06-02, 15-09, 03-14, 15-16, 03-18, 15-11, 03-13, 17-09, 02-07, 17-16, 02-14, 17-11, 07-10, 17-04, 07-09, 09-05, 07-15, 09-10
5	01-04, 01-08, 01-14, 02-08, 02-13, 03-01, 03-10, 03-02, 03-06, 04-11, 04-13, 05-11, 06-08, 06-16, 07-03, 07-05, 08-11, 08-13, 08-16, 09-03, 08-12, 09-06, 09-02, 10-14, 10-04, 11-12, 11-14, 12-15, 12-18, 12-17, 13-12, 13-15, 14-15, 15-17, 16-15, 16-17
6	01-05, 01-08, 02-17, 04-15, 04-03, 05-08, 05-10, 06-07, 06-10, 07-09, 07-10, 08-10, 08-13, 09-04, 09-17, 09-12, 09-18, 10-13, 10-12, 11-15, 12-17, 12-15, 13-03, 13-02, 13-11, 13-15, 14-05, 14-06, 14-08, 16-06, 16-07, 18-03, 18-15, 10-17, 16-10, 01-07
7	01-02, 01-04, 02-03, 02-08, 02-10, 02-17, 03-09, 04-09, 05-06, 05-08, 03-08, 06-14, 06-08, 08-07, 09-07, 09-08, 10-14, 10-09, 11-02, 11-05, 11-17, 12-01, 12-08, 13-01, 13-12, 15-11, 15-18, 16-15, 16-12, 17-06, 17-14, 18-02, 18-04, 18-09, 02-06, 13-04
8	01-11, 01-05, 02-01, 02-03, 02-04, 03-05, 03-12, 04-05, 04-11, 05-08, 05-11, 06-12, 06-16, 07-03, 07-06, 07-13, 08-17, 09-17, 11-08, 11-10, 12-16, 12-18, 13-12, 13-11, 14-13, 14-15, 15-05, 16-08, 16-10, 16-09, 18-10, 16-17, 07-12, 14-05, 02-12
9	01-03, 01-10, 02-05, 02-09, 03-09, 03-13, 04-07, 04-08, 05-06, 05-07, 05-17, 06-14, 06-17, 07-17, 07-12, 09-06, 09-17, 10-02, 10-03, 10-09, 11-01, 11-10, 13-06, 13-14, 15-02, 15-18, 16-10, 16-15, 16-18, 17-08, 17-12, 17-14, 18-04, 18-05, 15-05, 18-07
10	01-05, 01-07, 02-07, 02-10, 03-06, 03-12, 04-03, 04-06, 04-09, 05-16, 05-10, 06-02, 06-12, 06-11, 07-15, 07-17, 08-06, 08-13, 09-06, 09-13, 10-17, 11-10, 11-16, 12-07, 12-18, 13-07, 13-05, 14-09, 14-08, 14-01, 15-16, 15-18, 11-16, 01-11, 09-11, 07-10
11	01-02, 01-14, 04-03, 11-03, 11-12, 08-12, 12-16, 14-13, 03-02, 03-17, 03-18, 03-12, 02-14, 17-16, 18-16, 14-15, 05-06, 07-06, 07-10, 09-10, 15-05, 15-07, 13-09, 16-13, 16-15, 12-15, 14-09, 17-13, 08-18, 01-17
12	05-09, 10-09, 10-07, 10-16, 08-09, 08-16, 12-16, 12-11, 04-11, 04-17, 09-07, 09-15, 09-17, 16-17, 16-15, 11-15, 11-17, 15-07, 17-14, 17-13, 14-02, 02-06, 15-14, 15-18, 17-18, 07-02, 14-03, 18-03, 13-03, 03-01, 03-06, 02-01
13	01-03, 01-13, 02-15, 02-04, 03-16, 04-14, 05-12, 06-02, 06-13, 06-04, 07-02, 07-03, 08-06, 08-13, 09-02, 09-07, 09-15, 10-08, 10-09, 11-08, 11-12, 11-09, 12-01, 12-07, 13-14, 13-17, 14-17, 14-18, 15-16, 15-17, 16-17, 16-18, 04-16, 07-14, 12-13
14	01-12, 01-17, 02-13, 02-17, 03-01, 03-10, 04-11, 04-13, 05-03, 05-10, 06-05, 06-15, 07-08, 07-16, 08-09, 08-15, 09-02, 09-04, 09-11, 10-12, 10-17, 11-13, 11-17, 14-02, 14-03, 14-04, 15-04, 15-05, 15-14, 16-06, 16-08, 18-06, 18-16, 16-14, 15-10
15	01-12, 01-13, 02-10, 03-02, 03-10, 04-03, 05-09, 06-14, 06-01, 07-08, 07-17, 08-17, 08-05, 09-10, 11-02, 11-03, 12-04, 12-11, 13-04, 13-12, 14-01, 14-07, 14-15, 15-08, 15-13, 16-14, 16-15, 16-07, 17-05, 17-11, 17-04, 18-14, 18-07, 08-11, 05-03, 06-13

Завдання 2. Граф $G = (V, E)$ містить 6 вершин: $V = \{a, b, c, d, e, f\}$. Відстані між вершинами задані таблицею. Знайти для графа G:

1) мінімальне остовне дерево;

2) максимальне остовне дерево.

№ з/п	G	№ з/п	G	№ з/п	G
1)	$\begin{array}{ccccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ b & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ c & 3 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ d & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ e & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ f & 4 & 4 & 0 & 2 & 4 & 0 \end{array}$	2)	$\begin{array}{ccccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ b & 2 & 0 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ c & 3 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ d & 0 & 2 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ e & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ f & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}$	3)	$\begin{array}{ccccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ b & 2 & 0 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ c & 3 & 4 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ d & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ e & 0 & 3 & 4 & 3 & 0 & 4 \\ f & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}$
4)	$\begin{array}{ccccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ b & 2 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ c & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ d & 4 & 2 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ e & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ f & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{array}$	5)	$\begin{array}{ccccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ b & 2 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ c & 3 & 4 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ d & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ e & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ f & 0 & 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \end{array}$	6)	$\begin{array}{ccccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 2 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ b & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ c & 3 & 0 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ d & 0 & 2 & 3 & 0 & 3 & 4 \\ e & 4 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ f & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \end{array}$
7)	$\begin{array}{ccccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ b & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ c & 0 & 4 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ d & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ e & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 4 \\ f & 3 & 2 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}$	8)	$\begin{array}{ccccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ b & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ c & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ e & 4 & 0 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ f & 3 & 2 & 4 & 0 & 3 & 0 \end{array}$	9)	$\begin{array}{ccccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ b & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ c & 3 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ d & 0 & 4 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ e & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 3 \\ f & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}$
10)	$\begin{array}{ccccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ b & 2 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ c & 3 & 4 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ d & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ e & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ f & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{array}$	11)	$\begin{array}{ccccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ b & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ c & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ d & 3 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ e & 4 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ f & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	12)	$\begin{array}{ccccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ c & 2 & 4 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ d & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 4 \\ e & 0 & 2 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ f & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}$
13)	$\begin{array}{ccccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ b & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ d & 2 & 4 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ e & 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ f & 3 & 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \end{array}$	14)	$\begin{array}{ccccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ b & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ c & 3 & 2 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ d & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ e & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 4 \\ f & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}$	15)	$\begin{array}{ccccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ b & 2 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ c & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ d & 4 & 2 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ e & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ f & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{array}$

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ

Завдання 1. Для неорієнтованого графа $G = (V, E)$ задана множина ребер E = {01-02, 01-08, 01-09, 01-16, 02-04, 02-15, 02-03, 03-05, 03-06, 04-05, 04-06, 04-07, 05-06, 05-07, 09-04, 06-14, 06-18, 07-14, 07-18, 08-03, 08-15, 09-07, 10-02, 10-09, 10-16, 11-10, 11-12, 12-01, 12-10, 13-01, 13-12, 15-05, 16-03, 17-12, 17-10, 15-18}. Побудувати остовне дерево графа. Знайти центр цього дерева.

Розв'язання. Для заданого графа G можна побудувати остовний підграф G_1, який є деревом, за допомогою наступного алгоритму пошуку.

Насамперед наведемо матрицю суміжності графа G.

G	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1						1	1			1	1			1		
2	1		1	1						1					1			
3		1			1	1		1								1		
4		1			1	1	1		1									
5			1	1		1	1								1			
6			1	1	1									1				1
7				1	1				1					1				1
8	1		1												1			
9	1			1			1			1								
10		1							1		1	1				1	1	
11										1		1						
12	1									1	1		1				1	
13	1											1						
14						1	1											
15		1			1			1										1
16	1		1							1								
17										1		1						
18						1	1								1			

Вибираємо в G довільну вершину, яка утворює підграф G_1. Множина вершин $V^{(1)} = \{1\}$. Множина ребер $E^{(1)} = \varnothing$.

За допомогою матриці суміжності знайдемо вершини з множини вершин графа G, які суміжні з вершиною "1": $V^{(2)} = \{2, 8, 9, 12, 13, 16\}$. Запишемо в матрицю суміжності підграфа G_1 відповідні одиниці. Ребра, які інцидентні парам вершин із множин $V^{(1)}$ та $V^{(2)}$, утворюють множину $E^{(2)}$ = {01-02, 01-08, 01-09, 01-12, 01-13, 01-16}.

Переглянувши елементи множини $V^{(2)}$, визначимо суміжні з ними вершини. Ті з них, які не є вже елементами множин $V^{(1)}$ та $V^{(2)}$, додаємо у множину $V^{(3)}$. Таким чином, $V^{(3)} = \{3, 4, 10, 15, 11, 17\}$. У матрицю суміжності підграфа G_1 запишемо тільки ті одиниці, які позначають суміжність вершин з множини $V^{(2)}$ та вершин з множини $V^{(3)}$. Ребра, які приводять до утворення циклів (позначка "*" у матриці суміжності), не включаємо до множини $E^{(3)}$ = {02-03, 02-04, 02-10, 02-15, 12-11, 12-17}.

G_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1						1	1			1	1			1		
2	*		1	1						1					1			
3		*			1	1		*								*		
4		*			*	*	1		*									
5			*	*		*	*								*			
6			*	*	*									1				*
7				*	*				*					*				*
8	*		*												*			
9	*			*			*			*								
10		*							*		*	*				*	*	
11										*		*						
12	*									*	1		*				1	
13																		
14						*	*											
15		*			*			*										1
16																		
17										*		*						
18						*	*								*			

Переглянувши елементи множини $V^{(3)}$, отримаємо $V^{(4)}$ = {5, 6, 7, 18}, $E^{(4)}$ = {03-05, 03-06, 04-07, 15-18}.

Аналогічно $V^{(5)}$ = {14}, $E^{(5)}$ = {06-14}.

Тепер визначимо множини V_1 та E_1 остовного підграфа G_1:

$V_1 = V^{(1)} \cup V^{(2)} \cup V^{(3)} \cup V^{(4)} \cup V^{(5)}$ = {1, 2, 8, 9, 12, 13, 16, 3, 4, 10, 15, 11, 17, 5, 6, 7, 18, 14};

$E_1 = E^{(1)} \cup E^{(2)} \cup E^{(3)} \cup E^{(4)} \cup E^{(5)}$ = {01-02, 01-08, 01-09, 01-12, 01-13, 01-16, 02-03, 02-04, 02-10, 02-15, 12-11, 12-17, 03-05, 03-06, 04-07, 15-18, 06-14}.

Отримано остовний підграф $G_1 = (V_1, E_1)$ заданого графа $G = (V, E)$. Матриця суміжності для G_1 повинна бути симетричною, тому що G_1 – неорієнтований граф. Для цього відобразимо всі одиниці отриманої матриці відносно головної діагоналі.

G	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1		1						1	1			1	1			1		
2	1		1	1						1					1			
3		1			1	1												
4		1					1											
5			1															
6			1											1				
7				1														
8	1																	
9	1																	

Продовж. таблиці

G	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
10		1																
11												1						
12	1										1						1	
13	1																	
14						1												
15		1																1
16	1																	
17												1						
18															1			

Зведемо отримане остовне дерево (рис. 7) до кореневої форми, для чого знайдемо його центр. У дереві відтинаємо всі кінцеві вершини й ребра (рис. 8,***а***), потім в отриманому дереві знову відтинаємо кінцеві вершини й ребра і т. д. (див. рис. 8,***б***,***в***) доти, поки дерево не скоротиться до єдиної вершини.

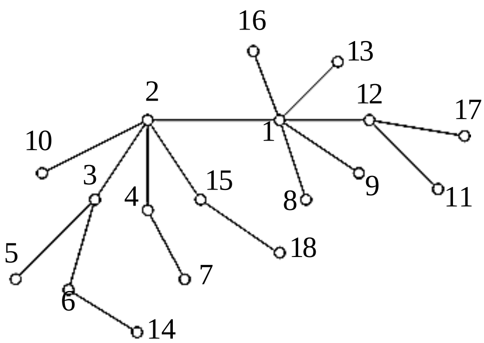
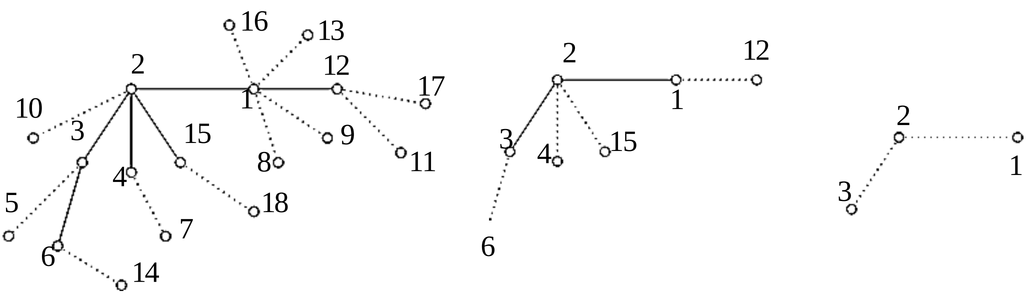


Рис. 7

У даному прикладі центром (або коренем) дерева буде вершина "2". Центрально-коренева форма дерева зображена на рис. 9.



а ***б*** ***в***

Рис. 8

Завдання 2. Граф $G = (V, E)$ містить 8 вершин:

$$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}.$$

Відстані між вершинами задані таблицею. Знайти для графа *G*:

1) мінімальне остовне дерево;
2) максимальне остовне дерево.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
a	0	6	0	0	0	11	17	0
b	6	0	19	0	0	17	0	0
c	0	19	0	9	0	0	0	0
d	0	0	9	0	14	0	0	0
e	0	0	0	14	0	2	0	21
f	11	17	0	0	2	0	6	0
g	17	0	0	0	0	6	0	0
h	0	0	0	0	21	0	0	0

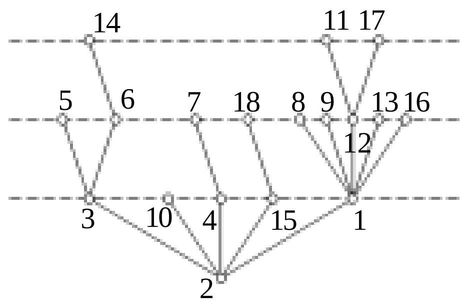


Рис. 9

Розв'язання

1) Задача побудови мінімального дерева полягає в тому, щоб з множини остовних дерев знайти таке, у якого сума довжин ребер мінімальна.

Цю задачу можна розв'язати за допомогою алгоритму Краскала. Усі ребра графа G перебираємо за неспаданням ваги. Для чергового ребра перевіряємо, чи лежать кінці ребра в різних компонентах зв'язності, і, якщо це так, ребро додається і компоненти поєднуються. Якщо вершини, які поєднуються цим ребром, лежать в одній компоненті зв'язності, то ребро не додаємо до остовного дерева, тому що воно утворює цикл.

Матриця відстаней між вершинами заданого графа $G = (V, E)$ (рис. 10,***а***) симетрична, тому можна розглядати тільки елементи, які розташовані вище або нижче головної діагоналі.

Відсортуємо ребра графа в порядку неспадання ваги:

1. Додаємо до остовного дерева $G_1 = (V_1, E_1)$ ребро з мінімальною вагою (e, f). Множина вершин $V_1 = \{e, f\}$, множина ребер $E_1 = \{(e, f)\}$ (див. рис. 10,***б***).

2. Розглянемо ребро (a, b). Додавання вершин a, b до множини V_1 та ребра (a, b) до дерева не утворює циклів, тому що вершини a і b не належать множині V_1. Після включення ребра (a, b) до дерева множина вершин $V_1 = \{e, f, a, b\}$, множина ребер $E_1 = \{(e, f), (a, b)\}$ (див. рис. 10,***в***).

3. Наступним кандидатом на включення до остовного дерева є ребро (f, g). Додавання вершини g до множини V_1 та ребра (f, g) до дерева не приведе до утворення циклу, тому що вершина g не належить множині V_1. Після включення ребра (f, g) до дерева маємо (див. рис. 10,***г***):

$$V_1 = \{e, f, a, b, g\};$$

$$E_1 = \{(e, f), (a, b), (f, g)\}.$$

Множина ребер графа $G(E)$	Вага ребра	Додати до мінімального дерева-остова G_1
(e, f)	2	+
(a, b)	6	+
(f, g)	6	+
(c, d)	9	+
(a, f)	11	+
(d, e)	14	+
(a, g)	17	–
(b, f)	17	–
(b, c)	19	–
(e, h)	21	+

4. Аналогічно додаємо ребро (c, d) (див. рис. 10,***д***):

$$V_1 = \{e, f, a, b, g, c, d\};\ E_1 = \{(e, f), (a, b), (f, g), (c, d)\}.$$

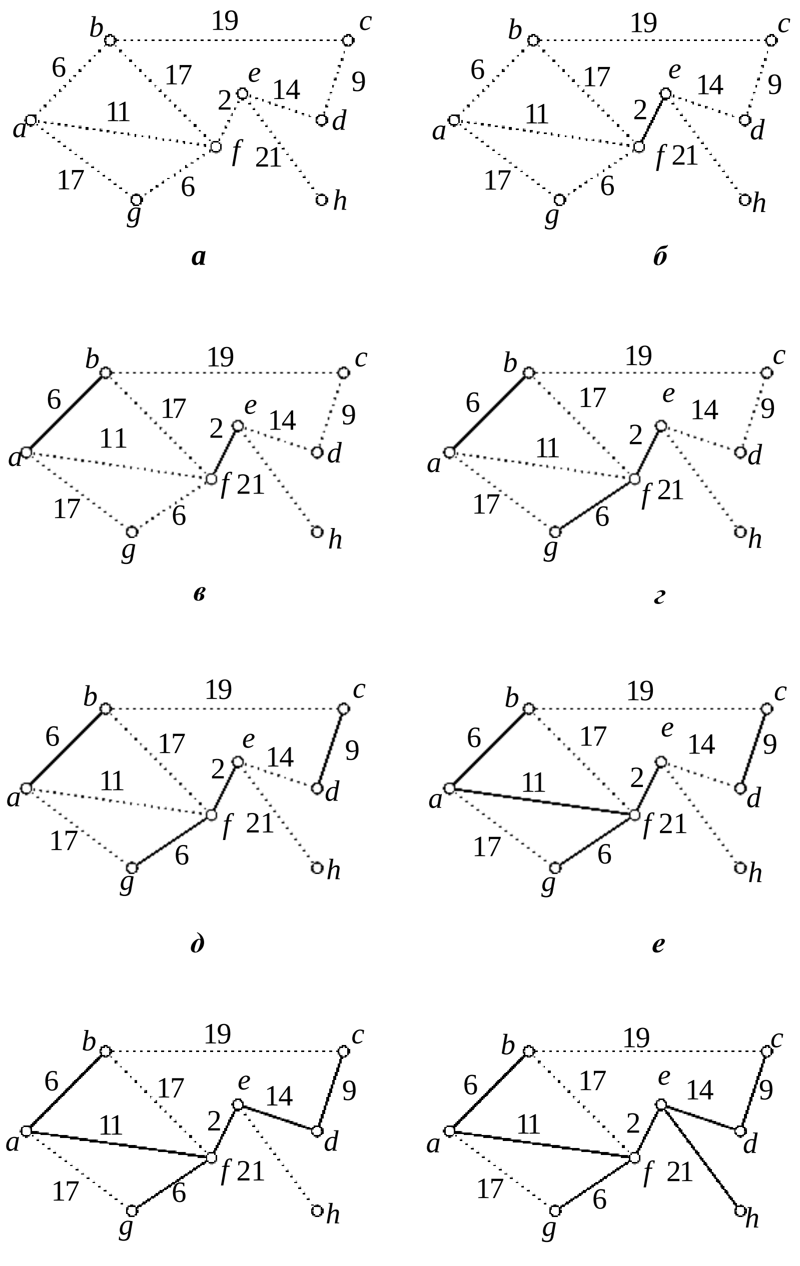


Рис. 10

5. Додавання ребра (a, f) не приведе до утворення циклу, тому що вершини a та f належать різним компонентам зв'язності. Множина вершин не змінюється: $V_1 = \{e, f, a, b, g, c, d\}$, а множина ребер буде складатися вже з п'яти елементів: $E_1 = \{(e, f), (a, b), (f, g), (c, d), (a, f)\}$ (див. рис. 10,***е***).

6. Кінці ребра (d, e) лежать у різних компонентах зв'язності, тому включення його до остовного дерева не утворить циклів: $V_1 = \{e, f, a, b, g, c, d\}$; $E_1 = \{(e, f), (a, b), (f, g), (c, d), (a, f), (d, e)\}$ (див. рис. 10,***ж***).

7. Додавання ребра (a, g) приведе до утворення циклу. Тому не включаємо це ребро до дерева G_1.

8. З тих же міркувань не можна включати до остовного дерева ребра (b, f) та (b, c).

9. Розглянемо ребро (e, h). Додавання його до мінімального остовного дерева не утворить циклів, тому $V_1 = \{e, f, a, b, g, c, d, h\}$; $E_1 = \{(e, f), (a, b), (f, g), (c, d), (a, f), (d, e), (e, h)\}$ (див. рис. 10,***з***).

Усі вершини даного графа $G = (V, E)$ увійшли в дерево, тобто отримано мінімальне остовне дерево $G_1 = (V_1, E_1)$, де $V_1 = \{e, f, a, b, g, c, d, h\}$; $E_1 = \{(e, f), (a, b), (f, g), (c, d), (a, f), (d, e), (e, h)\}$.

Вага цього дерева складає: 2 + 6 + 6 + 9 + 11 + 14 + 21 = 69.

2) Побудуємо максимальне остовне дерево $G_2 = (V_2, E_2)$. Для цього скористаємось тим же алгоритмом з тією різницею, що множина ребер даного графа G повинна бути відсортована в порядку незростання ваги.

Множина ребер графа $G(E)$	Вага ребра	Додати до максимального дерева-остова G_2
(e, h)	21	+
(b, c)	19	+
(a, g)	17	+
(b, f)	17	+
(d, e)	14	+
(a, f)	11	+
(c, d)	9	+
(f, g)	6	–
(a, b)	6	–
(e, f)	2	–

Починаючи з ребра (e, h), яке має найбільшу вагу, послідовно додаємо до дерева G_2 ребра, що не утворюють циклів: (b, c), (a, g), (b, f), (d, e), (a, f), (c, d).

Результатом зазначеної побудо- ви буде максимальне остовне дерево $G_2 = (V_2, E_2)$, де

$$V_2 = \{e, h, b, c, a, g, f, d\};$$

$$E_2 = \{(e, h), (b, c), (a, g), (b, f), (d, e), (a, f), (c, d)\}.$$

Вага цього остовного дерева складає: 21 + 19 + 17 + 17 + 14 + 11 + 9 = 108 (рис. 11,***а–з***).

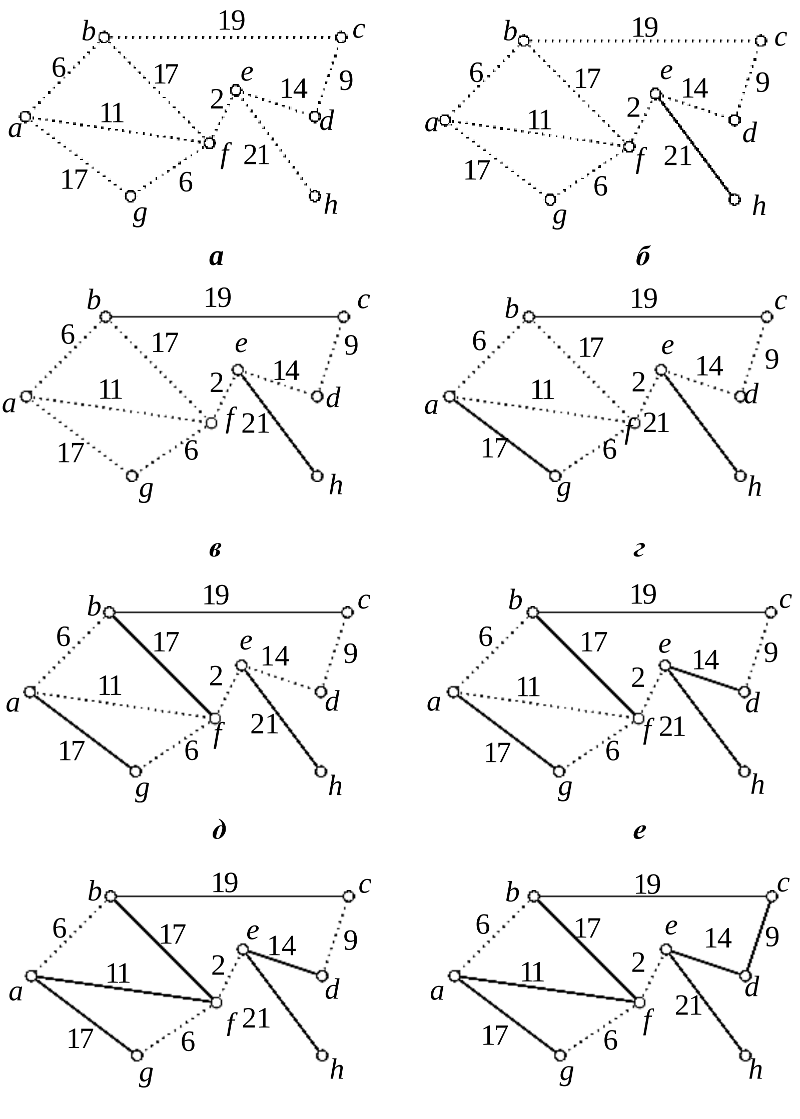


Рис. 11