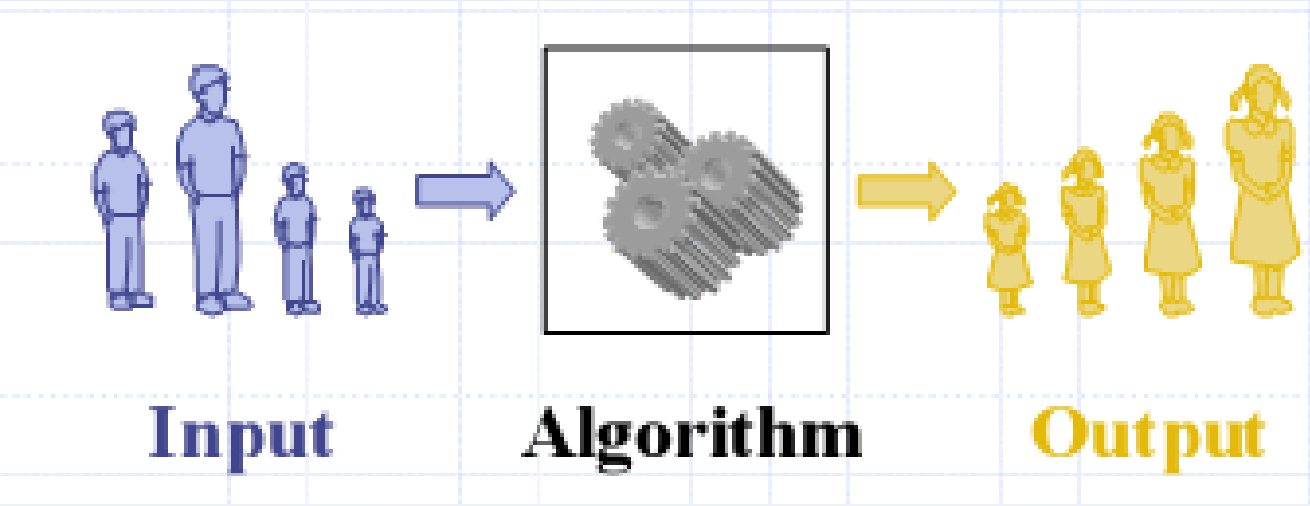
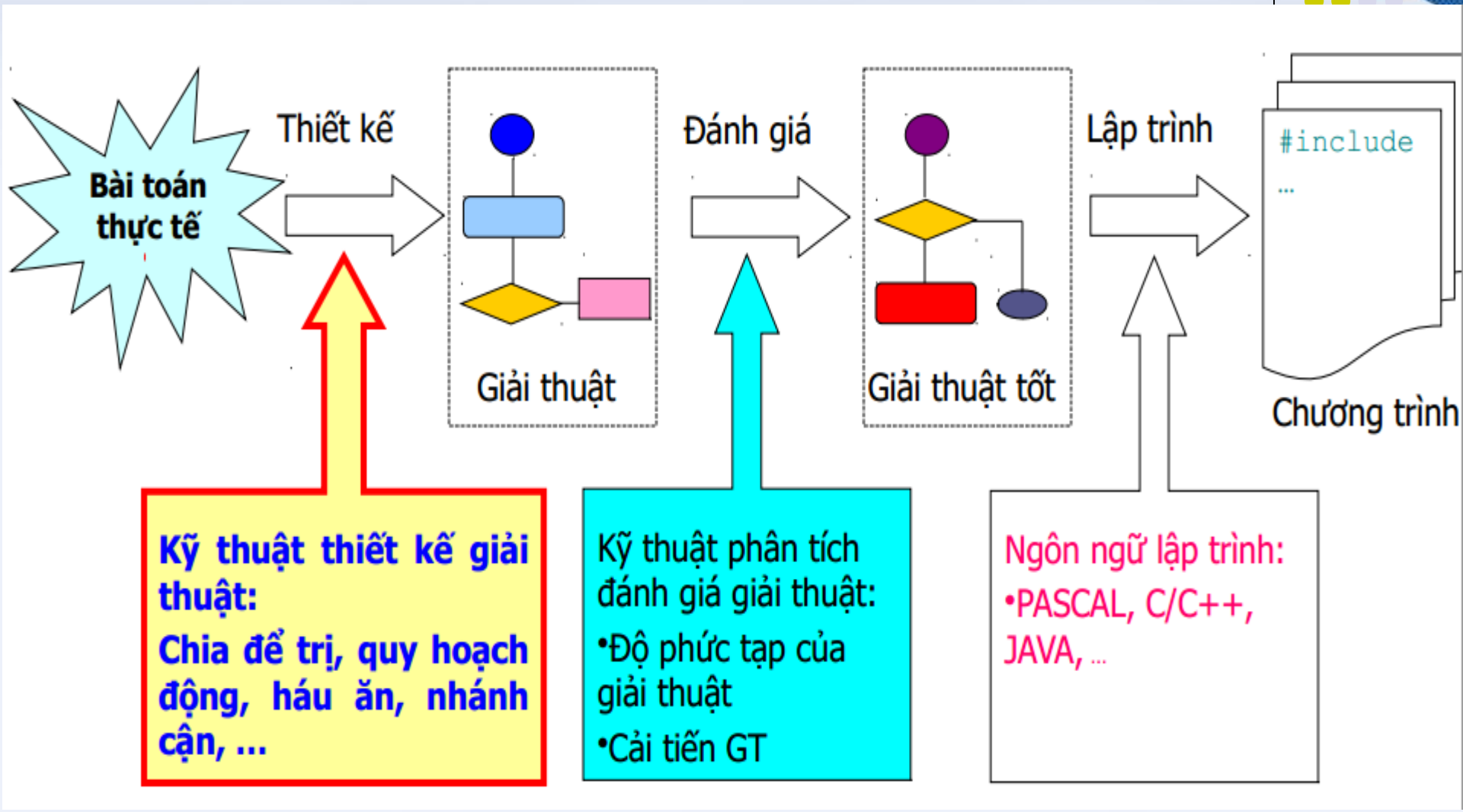
# Phân tích các thuật toán
## (Analysis of Algorithms)




**Thuật toán** là một qui trình thực hiện từng bước, từng bước giải quyết một vấn đề trong một khoảng thời gian hữu hạn.

# Từ bài toán đến chương trình



# Tính hiệu quả của thuật toán

- Thuật toán đơn giản, dễ hiểu
- Thuật toán dễ cài đặt
- Thuật toán cần ít bộ nhớ
- Thuật toán chạy nhanh

➔ Khi cài đặt thuật toán chỉ để sử dụng một số ít lần thì ưu tiên tiêu chí 1 và 2

➔ Khi cài đặt thuật toán mà sử dụng rất nhiều lần, trong nhiều chương trình khác nhau: sắp xếp, tìm kiếm, đồ thị… thì ưu tiên tiêu chí 3 và 4

# Các khía cạnh cần phân tích

- Bộ nhớ (Space)

  Xác định tổng dung lượng bộ nhớ cần thiết để lưu trữ toàn bộ dữ liệu đầu vào, trung gian và kết quả đầu ra.

  - Ví dụ: Sắp xếp một dãy n phần tử.

    Bộ nhớ cần cho bài toán là: Bộ nhớ lưu biến n, lưu n phần tử của dãy, lưu các biến i, j, tg (nếu là thuật toán Bubble Sort)

- Thời gian chạy của thuật toán (Running time)

# Thời gian chạy (Running time)

- Hầu hết các thuật toán thực hiện biến đổi các đối tượng đầu vào thành các đối tượng đầu ra.

⇨ Thời gian chạy của thuật được đặc trưng bởi kích thước của dữ liệu đầu vào.

- Chúng ta thường đi đánh giá thời gian chạy của thuật toán trong 3 trường hợp: xấu nhất, trung bình và tốt nhất.

Search (x, a, n)

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 6 | 3 | 10 | 1 | 4 | 7 | 9 |

⇨ **Chúng ta tập trung vào phân tích thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất (do dễ phân tích)**

# Phương pháp đánh giá

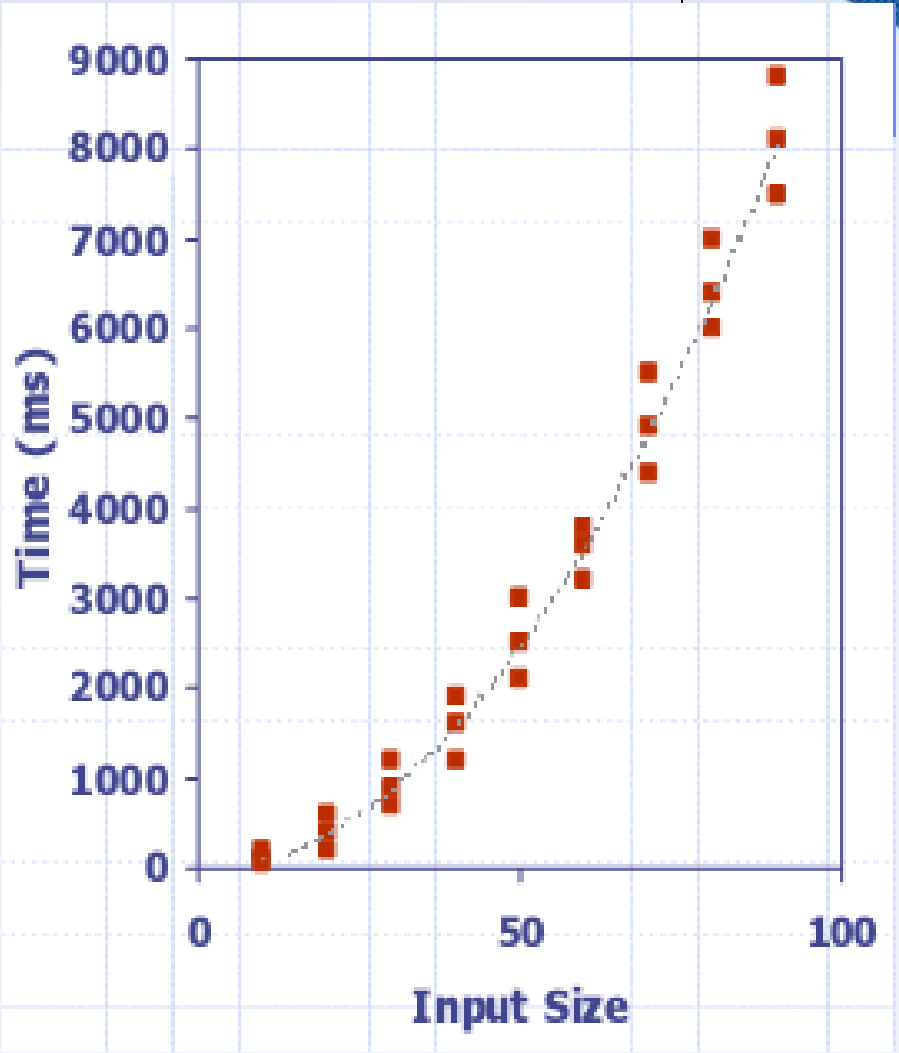
1. **Phương pháp thực nghiệm**

2. **Phương pháp phân tích lý thuyết**

# Phương pháp thực nghiệm

Các bước thực hiện:

- Viết một chương trình thể hiện thuật toán
- Chạy chương trình với các bộ dữ liệu đầu vào có kích thước khác nhau và tổng hợp lại.
- Sử dụng một hàm như một đồng hồ để lấy chính xác thời gian chạy của thuật toán.
- Vẽ đồ thị biểu diễn kết quả



# Hạn chế của phương pháp thực nghiệm

1. Cần phải cài đặt thuật toán bằng một ngôn ngữ lập trình, nhưng một số thuật toán việc cài đặt là khó.

2. Kết quả thu được không thể biểu thị cho những bộ dữ liệu đầu vào chưa được thực nghiệm

3. Phụ thuộc và chương trình dịch
4. Phụ thuộc vào phần cứng của từng máy tính
5. Phụ thuộc kỹ năng của người lập trình

# Phương pháp phân tích lý thuyết

- Sử dụng thuật toán được mô tả ở mức cao (giả mã) thay cho chương trình cài đặt.
- Mô tả thời gian chạy của thuật toán bằng một hàm phụ thuộc vào kích thước của dữ liệu đầu vào, *n*.
- Tính toán tất cả các khả năng của dữ liệu đầu vào
- Cho phép chúng ta đánh giá tốc độ của thuật toán không phụ thuộc vào phần cứng/môi trường phần mềm.

# Giả mã (Pseudocode)

- Mô tả thuật toán ở mức trừu tượng cao
- Nhiều cấu trúc hơn ngôn ngữ tự nhiên
- Kém chi tiết hơn chương trình
- Sử dụng nhiều ký hiệu để mô tả

Ví dụ thuật toán tìm Max các phần tử của một mảng

**Algorithm** ***arrayMax(A,n)***

**Input:** Mảng A có n số nguyên

**Output:** Giá trị lớn nhất của A

Max ← A[0]

**for** i ← 1 **to** n-1 **do**

**if** A[i] > Max **then**

Max ← A[i]

**return** Max

# Những chi tiết mô tả PseudoCode

- **Cấu trúc điều khiển**
  - **If then else**
  - **while do**
  - **For do**
  - Xuống dòng thay cho dấu {, }

- **Khai báo phương thức**

**Algorithm** ***Phươngthức([Danh sách đối])***

**Input:**

**output**:

- **Gọi hàm, phương thức**

Biến.Phươngthức([Danh sách đối])

- **Trả lại giá trị cho hàm**

**return** Biểu_thức

- **Các biểu thức**

← Phép gán sánh

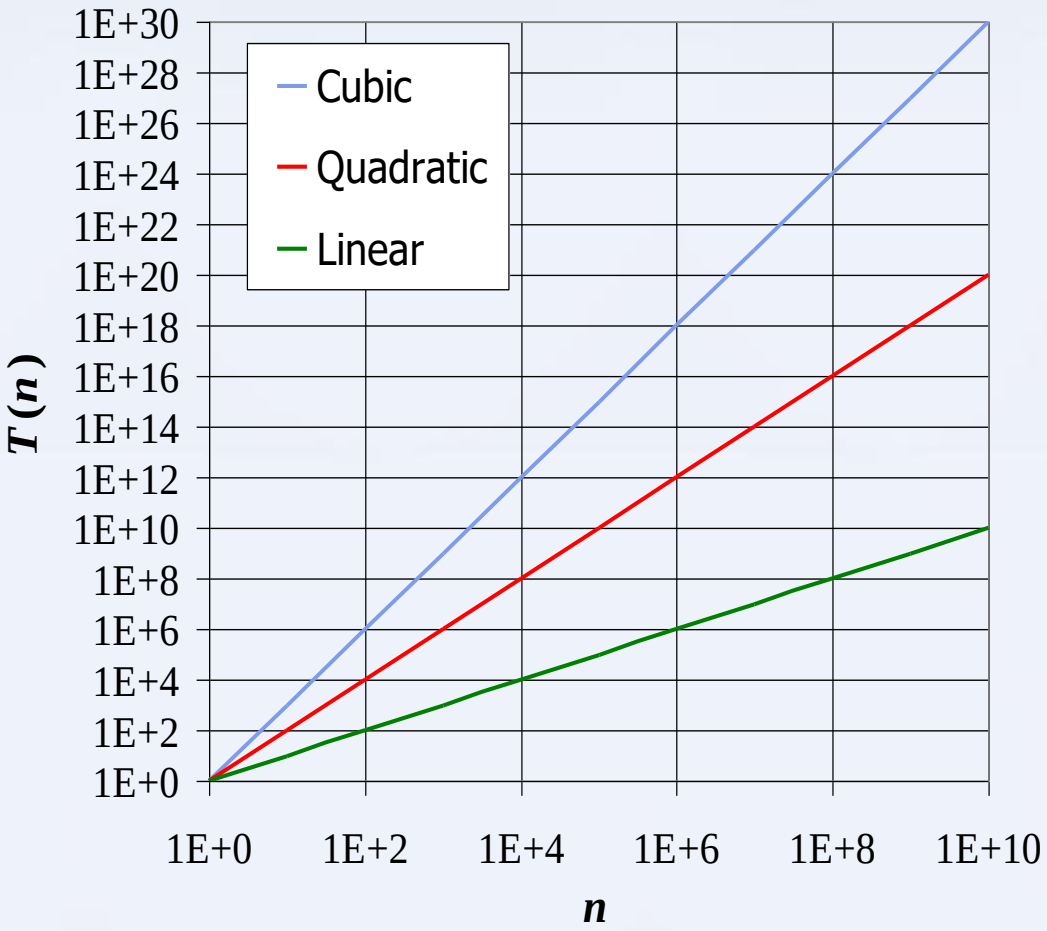
= Phép so sánh bằng

$n^2$ Cho phép viết số mũ

# Bẩy hàm quan trọng sử dụng trong phân tích thuật toán

- Hàm hằng $\approx 1$
- Hàm Logarit $\approx \log n$
- Hàm tuyến tính $\approx n$
- N-Log-N $\approx n \log n$
- Hàm bậc 2 $\approx n^2$
- Hàm bậc 3 $\approx n^3$
- Hàm mũ $\approx 2^n$

- Trong biểu đồ log-log, độ nghiêng của đường thẳng tương ứng với tốc độ phát triển của hàm



# Các phép toán cơ sở

1. Các phép toán cơ sở được thực hiện bởi thuật toán được xem là như nhau
2. Độc lập với ngôn ngữ lập trình
3. Không cần thiết xác định chính xác số lượng các phép toán
4. Giả thiết mỗi phép toán mất một khoảng thời gian xác định để thực hiện trong mô hình RAM

**Các phép toán cơ sở**

- Định giá một biểu thức
- Gán giá trị cho một biến
- Đưa vào/truy cập một phần tử mảng
- Gọi hàm
- Trả lại giá trị cho hàm (return)

# Xác định số phép toán cơ sở

- **Bằng cách duyệt thuật toán giả mã, chúng ta có thể xác định được số phép tính tối đa mà thuật toán có thể phải thực hiện.**

- **Từ đó ta xây dựng được một hàm thể hiện thời gian chạy của thuật toán phụ thuộc vào kích thước dữ liệu vào.**

**Ví dụ:**

**Algorithm** ***arrayMax(A,n)*** ***Số phép toán***

```
Max ← A[0]
for i ← 1 to n-1 do
    if A[i] > Max then
        Max ← A[i]
return Max
```

# Ước lượng thời gian chạy

- Thuật toán ArrayMax thực hiện 5n+1 phép tính cơ bản trong trường hợp xấu nhất
- Định nghĩa:

  a = Khoảng thời gian ngắn nhất cần để thực hiện một phép tính cơ bản

  b = Khoảng thời gian dài nhất cần để thực hiện một phép tính cơ bản

- Ký hiệu T(n) là thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất của thuật toán ArrayMax thì:

  **a(5n+1)< T(n) <b(5n+1)**

- Do đó thời gian chạy T(n) được bao bởi 2 đường tuyến tính

# Thời gian chạy của các lệnh

1. Các phép toán sơ cấp: O(1)

2. Lệnh gán: X = <Biểu thức>

Thời gian: là tg thực hiện biểu thức

3. Lệnh lựa chọn:

| | | |
|---|---|---|
| if (điều kiện) | → | $T_0(n)$ |
| lệnh 1 | → | $T_1(n)$ |
| else | | |
| lệnh 2 | → | $T_2(n)$ |

Thời gian: $T_0(n) + \max(T_1(n), T_2(n))$

# Thời gian chạy của các lệnh

## 4. Các lệnh lặp: for, while , do..while:

$$\sum_{i=1}^{X(n)} (T_0(n) + T_i(n))$$

X(n): Số vòng lặp
$T_0$(n): Điều kiện lặp
$T_i$(n): Thời gian thực hiện vòng lặp thứ *i*

Nếu tg thực hiện thân vòng lặp không đổi thì tg thực hiện vòng lặp = số lần lặp x tg thực hiện thân vòng lặp

# Tốc độ phát triển của thời gian chạy

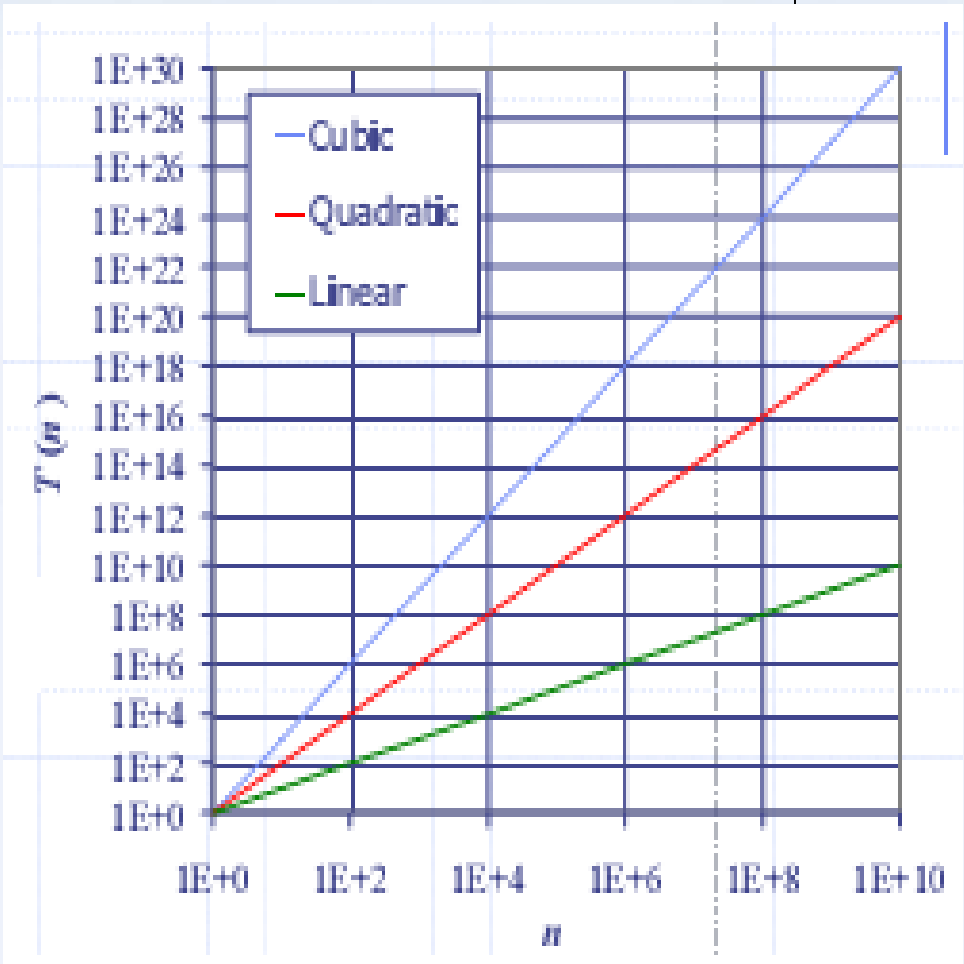
- Khi thay đổi Phần cứng/Môi trường phần mềm

  - Ảnh hưởng đến T(n) là 1 hằng số, nhưng không làm thay tổi tốc độ phát triển của T(n)

- Tốc độ phát triển tuyến tính của T(n) là bản chất của thuật toán Arraymax.

# Tốc độ phát triển TG của thuật toán

- Các hàm thể hiện tốc độ phát triển TG, ví dụ như:
  - Tuyến tính : n
  - Bậc 2 : $n^2$
  - Bậc 3 : $n^3$
- Trong biểu đồ, độ nghiêng của các đường thể hiện tốc độ phát triển của các hàm

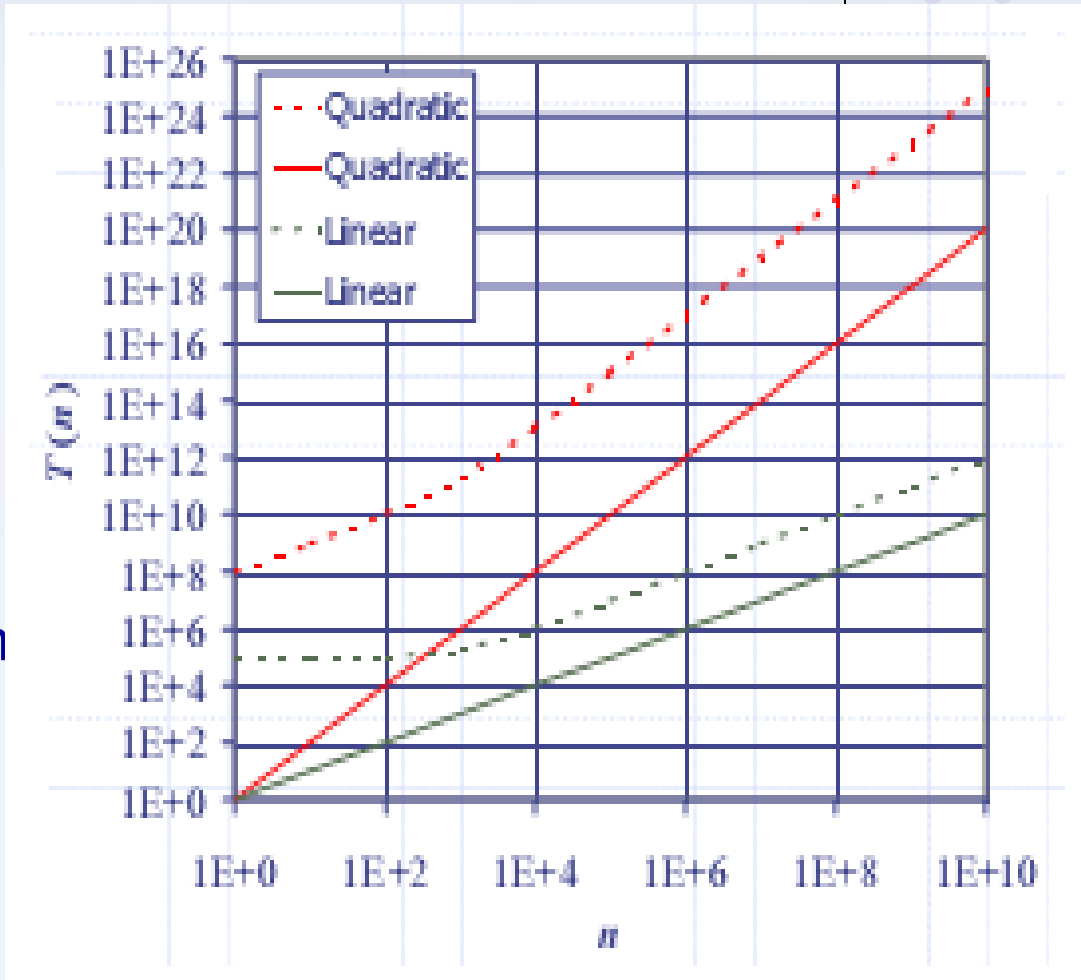


# Hệ số hằng

- Tốc độ phát triển của hàm không bị ảnh hưởng bởi:
  - Hệ số hằng và
  - Số hạng bậc thấp
- Ví dụ:

  $10^2n+10^5$ là hàm tuyến tính

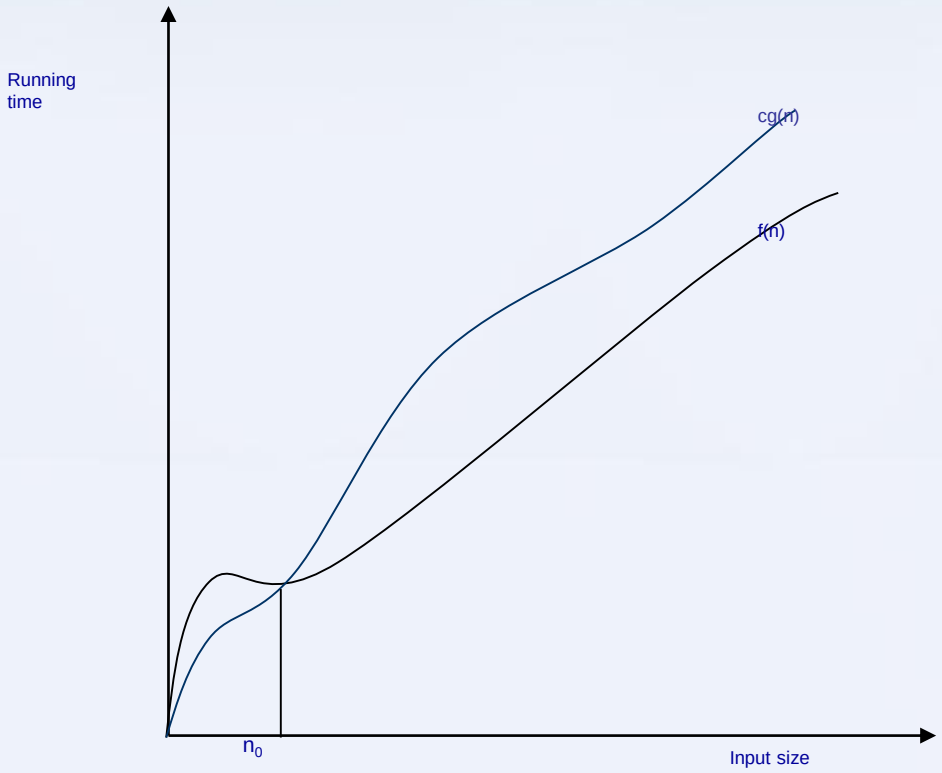
  $10^2n^2+10^5n$ là hàm bậc 2



# Ký hiệu ô-lớn (Big-Oh)

- Cho hàm f(n) và g(n), chúng ta nói rằng f(n) có ô lớn là O(g(n)), nếu tồn tại hằng số dương c và số nguyên $n_0$ sao cho:

  **$f(n) \leq cg(n)$** với mọi $n \geq n_0$




- Ví dụ: 2n +10 là O(n)

Thật vậy: $2n+10 \leq cn$

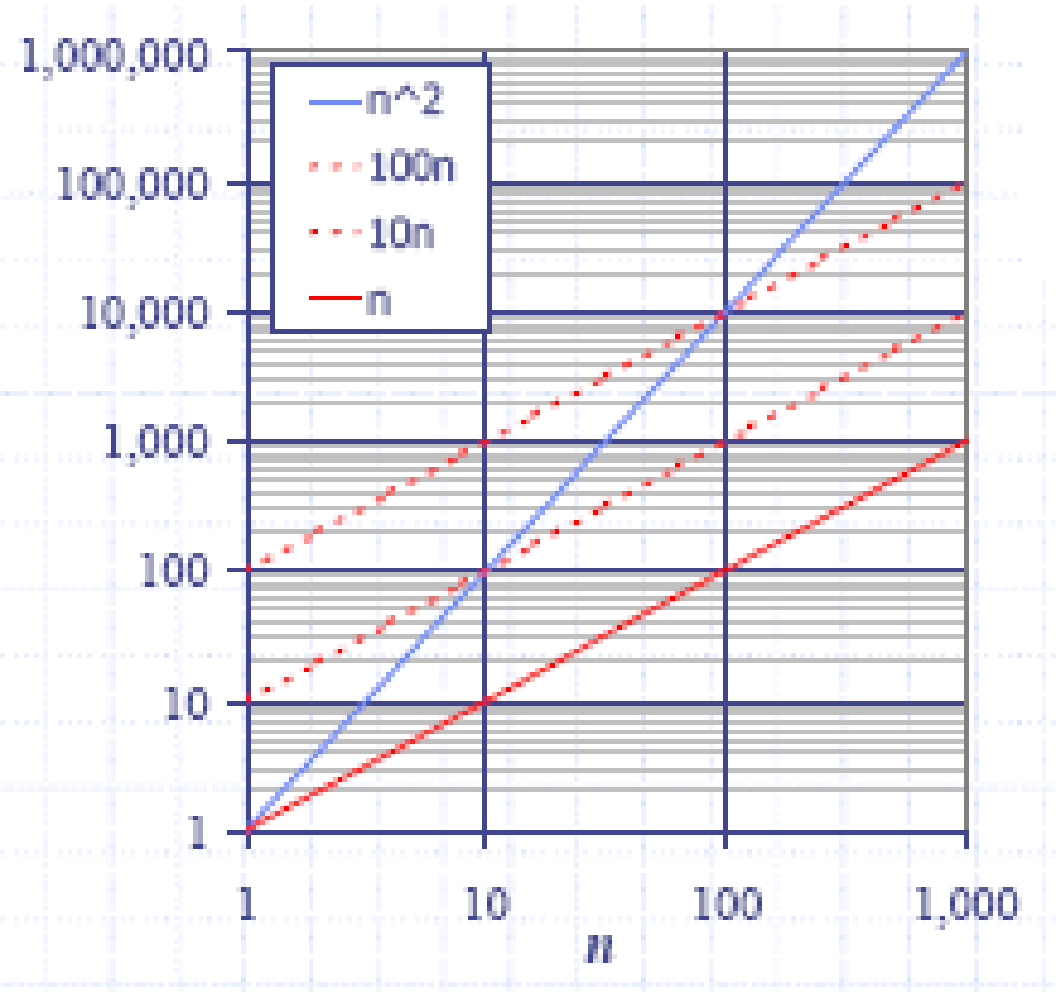
$10 \leq (c-2)n$

$10/(c-2) \leq n$

Chọn c=3 và $n_0$=10

# Ví dụ:

- Hàm $n^2$ không là O(n) vì:
  - $n^2 \leq cn$
  - $n \leq c$
- Không thể xác định được hằng c số thỏa mãn điều kiện trên



# Thêm một số ví dụ về ô-lớn

- 7n-2

  7n-2 là O(n)

  Vì: chọn hằng số c=7 và $n_0$=1 khi đó 7n-2≤cn $\forall n \geq n_0$

- $3n^3+20n^2+5$

  $3n^3+20n^2+5$ là $O(n^3)$

  Vì nếu chọn c=4 và $n_0$=21 khi đó $3n^3+20n^2+5 \leq cn^3$ $\forall n \geq n_0$

- 3logn+log logn

  3logn+log logn là O(logn)

  Vì nếu chọn c=4 và $n_0$=2 khi đó 3logn+log logn ≤ c*logn $\forall n \geq n_0$

# Thêm một số ví dụ về ô-lớn

1. $3n^2 - 15n^4 + 4n - 83$
2. $999n^2 - (3+2002*n)*n^4 + (1/5+ n)*n^5 + 2014$
3. $4\log n + n^3 + 543n^2 - 75n - 2012$
4. $54n - 2*n*(n-1)$
5. $2\log n - 1654n$

# Ô-lớn và tốc độ phát triển giá trị

- Ký hiệu Ô-lớn chỉ ra một cận trên của tốc độ phát triển giá trị của một hàm
- Ta nói "f(n) là O(g(n))" có nghĩa là tốc độ phát triển giá trị của f(n) không lớn hơn tốc độ phát triển của g(n).
- Chúng ta có thể sử dụng ký hiệu Ô-lớn để xếp hạng các hàm theo thứ tự tốc độ phát triển giá trị nó.

| | f(n) là O(g(n)) | g(n) là O(f(n)) |
|---|---|---|
| Tốc độ g(n) lớn hơn | Đúng | Không |
| Tốc độ bằng nhau | Đúng | Đúng |

# Qui tắc xác định Ô-lớn

- **Nếu f(n) là đa thức bậc d thì f(n) là $O(n^d)$**
  - Bỏ qua các số hạng bậc thấp
  - Bỏ qua các hệ số hằng
- **Sử dụng lớp hàm nhỏ nhất có thể**
  - Ta nói "2n là O(n)" thay cho "2n là $O(n^2)$"
- **Sử dụng lớp hàm đơn giản nhất có thể**

  Ta nói "3n+5 là O(n)" thay cho "3n+5 là O(3n)"

# Phân tích tiệm cận

- Việc phân tích thời gian chạy tiệm cận của một thuật toán được xác định bằng ký hiệu Ô-lớn (O)

- **Thực hiện phân tích:**

  - Tìm số phép toán cơ bản cần phải thực hiện trong trường hợp xấu nhất, thể hiện bằng một hàm phụ thuộc vào kích thước của dữ liệu đầu vào.

  - Diễn tả hàm bằng ký hiệu Ô-lớn

- Các hệ số hằng và các số hạng bậc thấp bị bỏ qua khi xác định số phép toán cơ bản.

# Phân tích tiệm cận

- **Ví dụ:**

  - Chúng ta đã xác định thuật toán ArrayMax thực hiện tối đa 5n+1 phép toán cơ bản

  - Chúng ta nói rằng thuật toán ArrayMax chạy trong thời gian O(n)

# Ví dụ: Tính trung bình các phần tử đầu dãy (prefix average)

- Để minh họa phân tích tiệm cận chúng ta phân tích hai thuật toán tính trung bình các phần tử đầu dãy sau:
- Hãy tính trung bình i phần tử đầu của một mảng, với i=0,..,n-1. Trung bình i phần tử đầu của dãy X là:

  A[i]=(X[0]+X[1]+….+X[i-1])/(i+1)

# Thuật toán độ phức tạp bậc hai

- Thuật toán được định nghĩa như sau:

  **Algorithm** prefxAverage(X, n)

  **Input**: mảng X có n số nguyên

  **Output**: Mảng trung bình các phần tử đầu dãy của X

```
A ← new int[n];
for i ←0 to n-1 do
        s ← X[0];
        for j ← 1 to i do
                s ← s + X[j];
        A[i] ← s/(i+1);
return A;
```

# Thuật toán độ phức tạp bình phương

- Tổng số phép toán tối đa thuật toán thực hiện là:

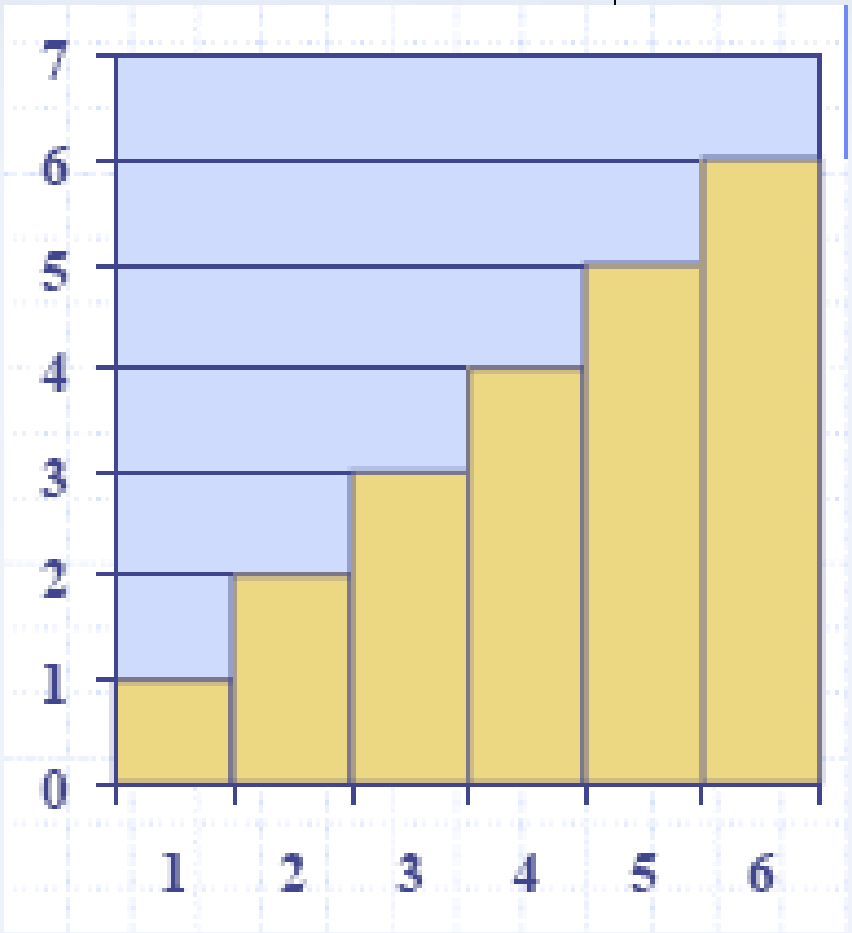
  $T(n) = 4(1+2+\ldots+(n-1))+10n+4$

  $T(n) = 4(1+2+\ldots+n) + 6n+4$

- Tổng của n số nguyên đầu là $n(n+1)/2$

  - Hình bên minh họa tốc độ gia tăng thời gian tnực hiện của thuật toán

$$T(n) = 2n^2+ 8n+4$$



# Thời gian chạy của thuật toán

- Thời gian chạy của thuật toán prefixAverages1 là:

  $O(2n^2+ 8n+4)$
- Do đó thuật toán prefixAveragres1 có thời gian chạy là $O(n^2)$

# Thuật toán độ phức tạp bậc nhất (tuyến tính)

- Thuật toán được mô tả như sau:

**Algorithm** prefxAverage(X, n)
**Input**: mảng X có n số nguyên

**Output**: Mảng trung bình các phần tử đầu dãy của X

```
A ← new int[n];                    n
s ← 0;                             1
for i ←0 to n-1 do                 n+3
      s ← s + X[i];                3n
      A[i] ← s/(i+1);              4n
return A;                          1
```

- Tổng số phép toán tối đa cần phải thực hiện là
  - T(n) = 9n + 5
- Độ phức tạp tiệm cận của thuật toán prefixAverages2 là O(n)

# Xác định độ phức tạp của thuật toán

- **Qui tắc cộng**

Nếu một thuật toán thực hiện hai đoạn chương trình P1, P2 rời nhau và có độ phức tạp tương ứng là O(g(n)) và O(f(n)). Khi đó độ phức tạp của thuật toán là:

**T(n) = O(max{g(n),f(n)}).**

- **Ví dụ:**

```
for i = 1 to n do
   input a[i];

Min ← a[0];

 for i=1 to n-1 do
     if a[i]<min then
           min←a[i];
```

P1 có thời gian chạy là O(n)

P2 có thời gian chạy là O(1)

P3 có thời gian chạy là O(n)

Vậy thời gian chạy của cả thuật toán là: T(n) = O(max{1, n, n})=O(n)

# Xác định độ phức tạp của thuật toán

- **Qui tắc nhân**

Nếu một thuật toán thực hiện hai đoạn chương trình P1, P2, có độ phức tạp tương ứng là O(g(n)) và O(f(n)) và P2 lồng trong P1. Khi đó độ phức tạp của thuật toán là:

**T(n) = O(g(n)*f(n)).**

- **Ví dụ:**

```
for i = 1 to n do
   input a[i];

for i ← 1 to n-1 do
    for j ← i+1 to n do
       if a[i]<a[j] then
            tg ← a[i];
            a[i] ← a[j];
            a[j] ← tg;
```

P1 có thời gian chạy là O(n)

P2 có thời gian chạy là O(n)

P3 có thời gian chạy là O(n)

# Xác định độ phức tạp của thuật toán

- Ta thấy đoạn chương trình P3 lồng trong đoạn chương trình P2. Áp dụng qui tắc nhân thì độ phức tạp của đoạn chương trình P2 và P3 là: O(n*n) hay $O(n^2)$.

- Áp dụng qui tắc cộng cho đoạn chương trình gồm P1, P2, P3 thì ta được độ phức tạp của thuật toán: $T(n) = O(n^2)$.

# Một số hàm sử dụng để đánh giá tốc độ gia tăng thời gian chạy.

| Constant | Logarithm | Linear | n-log-n | Quadratic | cubic | exponent |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | logn | n | nlogn | $n^2$ | $n^3$ | $a^n$ |

# Một số hàm sử dụng để đánh giá tốc độ gia tăng thời gian chạy.

| Thời gian chạy | Cỡ dữ liệu vào | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
| n | 0,00001 giây | 0,00002 giây | 0,00003 giây | 0,00004 giây | 0,00005 giây | 0,00006 giây |
| $n^2$ | 0,0001 giây | 0,0004 giây | 0,0009 giây | 0,0016 giây | 0,0025 giây | 0,0036 giây |
| $n^3$ | 0,001 giây | 0,008 giây | 0,027 giây | 0,064 giây | 0,125 giây | 0,216 giây |
| $n^5$ | 0,1 giây | 3,2 giây | 24,3 giây | 1,7 phút | 5,2 phút | 13 phút |
| $2^n$ | 0,001 giây | 1,0 giây | 17,9 phút | 12,7 ngày | 35,7 năm | 366 thế kỷ |
| $3^n$ | 0,059 giây | 58 phút | 6,5 năm | 3855 thế kỷ | $2.10^8$ thế kỷ | $1,3. \quad 10^{13}$ thế kỷ |

# Tóm tắt

- Độ phức tạp hằng số O(1): đoạn chương trình không chứa vòng lặp hoặc lời gọi đệ qui có tham số là một hằng số.
- Độ phức tạp O(n): Độ phức tạp của hàm hoặc đoạn code là O(n) nếu biến trong vòng lặp tang hoặc giảm bởi một hang số c
- Độ phức tạp $O(n^k)$: Độ phức tạp của các vòng lặp lồng nhau bằng lũy thừa của số lần lồng nhau.

# Tóm tắt

- Độ phức tạp logarit $O(\log_c n)$: Độ phức tạp của vòng lặp là Log(n) nếu biến lặp được chia hoặc nhân với một hằng số c
- Độ phức tạp nlogn: $O(n\log_a n)$ nếu biến lặp được nhân hoặc chia cho một hàm mũ

# Tổng kết:

1. Các lệnh gán, nhập, xuất, return: O(1)
2. Một chuỗi tuần tự các lệnh: Quy tắc cộng → là thời gian thi hành một lệnh nào đó lâu nhất trong chuỗi lệnh.
3. Cấu trúc IF: Max(đk, CV1, CV2)
Thường thời gian kiểm tra điều kiện là O(1).
4. Cấu trúc lặp là tổng (trên tất cả các lần lặp) thời gian thực hiện thân vòng lặp. Nếu thời gian thực hiện thân vòng lặp không đổi thì thời gian thực hiện vòng lặp là tích của số lần lặp với thời gian thực hiện thân vòng lặp.
5. Trình tự đánh giá:
 - Nối tiếp: Từ trên xuống
 - Lồng nhau: Từ trong ra

# Độ phức tạp theo thứ tự tăng dần

| Tên gọi | Ký hiệu |
|---|---|
| Độ phức tạp hằng | $O(c)$ |
| Độ phức tạp logarit | $O(\log_a n)$ |
| Độ phức tạp tuyến tính | $O(n)$ |
| Độ phức tạp nlogn | $O(n\log_a n)$ |
| Độ phức tạp đa thức | $O(n^k)$ |
| Độ phức tạp lũy thừa | $O(a^n)$ |
| Độ phức tạp giai thừa | $O(n!)$ |

Chấp nhận được

Khó chấp nhận

# Ví dụ 1

```
/*1*/ sum=0;
/*2*/ for(i=1; i<=n; i=i*2)      {
/*3*/  scanf("%d", &x);
/*4*/  sum=sum+x;}
```

- 1: O(1)
- 3 và 4: O(1)
- 2 thực hiện $\log_2 n$ lần → O(logn) (dùng logn thay cho $\log_2 n$)

→ T(n)=O(logn)

# Ví dụ 2: Sắp xếp nổi bọt

```
Void Sort(int a[], int n) {
        int i, j,temp;
/*1*/ for(i=0; i<=n-2; i++)
/*2*/    for(j=n-1;j>=i+1; j--)
/*3*/            if(a[j] <a[j-1]) {
/*4*/                    temp=a[j-1];
/*5*/                    a[j-1] = a[j];
/*6*/                    a[j] = temp;
                            }
            }
```

- 4, 5, 6: O(1)
- 3: O(1)
- 2 lặp (n-1)-(i+1)+1
- =n-i-1 lần (mỗi lần O(1)
- 2: O(n-i-1)
- 1: là toàn chương trình

T(n)=$\sum_{i=0}^{n-2}(n-i-$

# Ví dụ 3: Tìm kiếm tuần tự

```
int search(int x, int a[], int n) {
        int i;
        int found;
/*1*/   i =0;
/*2*/   found=0;
/*3*/   while (i<=n-1 && ! found)
/*4*/           if (x==a[i])
/*5*/                   found=1;
/*6*/           else  i++;
/*7*/   return found;
}
```

- 1, 2, 7: O(1)
- 5 và 6: O(1) →4: O(1)
- Trường hợp xấu nhất 3 thực hiện n lần →3: O(n)
- T(n)=O(n)

# Bài tập: Tính độ phức tạp thuật toán

## 1. Thuật toán tạo ma trân đơn vị A cấp n

```
(1)    for (i = 0 ; i < n ;  i++)
(2)          for (j = 0 ; j < n ; j++)
(3)                A[i][j] = 0;

(4)    for (i = 0 ; i < n ; i++)
(5)          A[i][i] = 1;
```

# Bài tập: Tính độ phức tạp thuật toán

## 2. Thuật toán tạo ma trân đơn vị A cấp n (v2)

```
(1)   for (i = 0 ; i < n ;  i++)
(2)       for (j = 0 ; j < n ; j++)
(3)           if (i == j)
(4)               A[i][j] = 1;
(5)           Else
(6)               A[i][j] = 0;
```

# Bài tập: Tính độ phức tạp thuật toán

## 3. Thuật toán tính tổng

```
1)   sum  = 0;
2)   for ( i = 0; i < n; i + +)
3)     for ( j = i + 1; j < = n; j + +)
4)       for ( k = 1; k < 10; k + +)
5)           sum = sum + i * j * k  ;
```

# Bài tập: Tính độ phức tạp thuật toán

## 4. Thuật toán tính tổng (v2)

```
1.  for (i = 0; I < n; I ++)
2.          for (j = 0; j < m; j ++) {
3.                  int x = 0;
4.                  for (k = 0; k < n; k ++)
5.                          x = x + k;
6.                  for (k = 0; k < m; k++)
7.                          x = x +k;
8.          }
```

# Bài tập: Tính độ phức tạp thuật toán

**5. Tính** $e^x = 1 + ( x/1!) + (x*x/2!) + (x*x*x/ 3!) + \ldots + (x^n /n!)$

```
double SumDevideFactorial(int n){
   double S = 1;
   double p = 1;
   for(int i = 0; i < n; i++){
       for(int j = 1;  j < i;  j++){
            p = p*x/ j;
            S += p;
       }
   }
   return S;
}
```

# Bài tập: Tính độ phức tạp thuật toán

**5. Tính** $e^x = 1 + ( x/1!) + (x*x/2!) + (x*x*x/ 3!) + \ldots + (x^n /n!)$

Thuật giải 2: Kế thừa bước trước để tính bước sau

```
double SumDevideFactorial(int n){
    double S = 1;
    double p = 1;
    for(int i = 1; i < n; i++){
            p = p*x/ i;
            S += p;
    }
    return S;
}
```