

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Математическая модель</b>	<b>4</b>
2.1	Полулагранжева формулировка . . . . .	5
2.2	Гидродинамическая формулировка . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Дифференциальные приближения и редукции</b>	<b>7</b>
3.1	Многослойная аппроксимация . . . . .	8
3.2	Газодинамическая аналогия . . . . .	9
3.3	Модель холодной плазмы . . . . .	9
3.3.1	Решение задачи Римана о распаде произвольного разрыва . . .	10
<b>4</b>	<b>Сравнение моделей</b>	<b>11</b>
4.1	Многослойная аппроксимация . . . . .	11
4.2	Газодинамическая аналогия . . . . .	12
4.3	Модель холодной плазмы . . . . .	13
4.4	Сравнение результатов расчета по моделям (9), (10) и (11) . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Формирование дисперсионных разрывов.</b>	<b>14</b>
5.1	Модельный пример . . . . .	16
<b>6</b>	<b>Заключение</b>	<b>16</b>

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ИОННО-ЗВУКОВЫХ ВОЛН И ФОРМИРОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННЫХ РАЗРЫВОВ В БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

## 1 Введение

Исследования нелинейных нестационарных течений разреженной плазмы представляет существенный теоретический и практический интерес [1, 2]. Эти исследования важны в задачах моделирования обтекания Земли, планет и других естественных или искусственных тел космической плазмой. Бесстолкновительная плазма является особой средой, для описания которой существенно необходимой становится кинетическая теория. Ввиду отсутствия столкновительной диссипации на первый план выходят дисперсионные эффекты и тонкие механизмы бесстолкновительной диссипации, что приводит разнообразным волновым конфигурациям и физическим явлениям [3]. В кинетической теории отсутствие соударений функции распределения электронов и ионов описываются бесстолкновительным уравнением Больцмана, которые вместе с уравнениями Максвелла для поля составляют весьма сложную систему. Однако в ряде случаев модель можно упростить. В частности, широкое применение получили уравнения распространения ионно-звуковых волн в плазме без магнитного поля [4] и кинетическое уравнение квазинейтральной бесстолкновительно плазмы [3]. Отметим, что переход к пределу квазинейтральной плазмы имеет принципиальное значение и соответствует переходу к невязкой (идеальной) жидкости в гидродинамике.

В дипломной работе основное внимание уделяется построению редукций и дифференциальных аппроксимаций кинетического уравнения квазинейтральной бесстолкновительно плазмы, а также сравнению результатов численного моделирования волновых возмущений на основе этих моделей. Выполненные исследования существенно опираются на работу [5], где исследованы свойства нелинейного кинетического уравнения. В частности, сформулированы условия обобщенной гиперболичности модели, построены классы точных решений, предложена “многослойная” аппроксимация системой дифференциальных законов сохранения и выполнено численное моделирование распространения волн. Проведенные в дипломной работе расчеты плазменных волн, возникающих в результате распада начального разрыва в рамках дифференциальных редукций и аппроксимаций позволяют оценить степень детализации используемых уравнений по сравнению с исходной кинетической моделью.

Другая часть дипломной работы связана с рассмотрением дисперсионной модели ионно-звуковых волн [3, 12]. Отметим, что эта модель при отсутствии дисперсии сводится уравнениям холодной плазмы, которые возникают из кинетического уравнения квазинейтральной плазмы в рамках дельта-функционального анзаца. Для дисперсионной модели выписано решение линеаризованных уравнений и предложен численный алгоритм решения, основанный на расщеплении, которое состоит в последовательном решении гиперболической подсистемы и обращении положительно определенного эллиптического оператора. Аналогичный подход применялся в [6, 7]

для интегрирования дисперсионных уравнений распространения волн на поверхности идеальной жидкости.

## 2 Математическая модель

При моделировании течений плазмы квазинейтральное приближение является аналогом теории длинных волн. Такое приближение применяется при рассмотрении движений с характерными размерами, существенно превышающими дебаевский радиус  $R_D$ . Параметр  $R_D$  определяет максимальный масштаб разделения зарядов в плазме: при больших по сравнению с величиной  $R_D$  смещениях электронов движение частиц под действием электрического поля приводит к быстрому восстановлению нейтральности. В одномерном случае в отсутствие магнитного поля уравнение движения квазинейтральной бесстолкновительной плазмы имеет вид [3]

$$\frac{\partial f^1}{\partial t} + u \frac{\partial f^1}{\partial x} + \frac{e}{M_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f^1}{\partial u} = 0, \quad \varphi = \frac{T_e}{e} \ln \left( \frac{1}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} f^1 du \right) \quad (1)$$

Здесь  $f^1(t, x, u)$  — функция распределения ионов;  $x, t$  — пространственная координата и время  $\varphi(t, x)$  — потенциал электрического поля;  $u, M_i$  — скорость и масса ионов;  $e, T_e$  — заряд и температура электронов;  $N_0$  — плотность невозмущенной плазмы. Величины  $M_i, e, T_e, N_0$  — заданные положительные постоянные. В работе [3] исследованы автомодельные движения квазинейтральной разреженной плазмы, изучено явление ускорения ионов при свободном расширении плазмы и установлена возможность кинетического опрокидывания функции распределения для решений типа простых волн и волн гидродинамического типа.

Следуя [5] рассмотрим решения уравнения (1) в классе кусочно-непрерывных по переменной  $u$  функций с ограниченным носителем

$$f^1(t, x, u) = f(t, x, u)[\theta(u - v_0(t, x)) - \theta(u - v_1(t, x))], \quad (2)$$

где  $\theta$  — функция Хевисайда,  $v_0(t, x), v_1(t, x)$  — границы интервала по переменной  $u$ , вне которого функция распределения  $f^1(t, x, u)$  тождественно равна нулю;  $f(t, x, u)$  — положительная, непрерывно дифференцируемая функция на множестве

$$\{(t, x, u) : t \geq 0, x \in R, u \in [v_0, v_1]\}$$

функция. Подставим представление решения (2) в кинетическое уравнение (1). Обозначим

$$\rho = \int_{v_0}^{v_1} f du, \quad b = \frac{T_e}{M_i}.$$

Тогда

$$\varphi = \frac{T_e}{e} \ln \left( \frac{1}{N_0} \rho \right), \quad \frac{e}{M_i} \varphi_x = b \frac{\rho_x}{\rho}.$$

Подставляя функцию  $f^1$  в уравнение (1) получим

$$\begin{aligned}
0 &= \left( f_t + u f_x - b \frac{\rho_x}{\rho} f_u \right) (\theta_0 - \theta_1) + \\
&+ f(t, x, u) \left( -v_{0t} \delta(u - v_0) - u v_{0x} \delta(u - v_0) + b \frac{\rho_x}{\rho} \delta(u - v_0) \right) + \\
&+ f(t, x, u) \left( v_{1t} \delta(u - v_1) + u v_{1x} \delta(u - v_1) - b \frac{\rho_x}{\rho} \delta(u - v_1) \right) = \\
&= \left( f_t + u f_x - b \frac{\rho_x}{\rho} f_u \right) (\theta_0 - \theta_1) - \\
&- f|_{u=v_0} \left( v_{0t} + u v_{0x} - b \frac{\rho_x}{\rho} \right) \delta(u - v_0) + \\
&+ f|_{u=v_1} \left( v_{1t} + u v_{1x} + b \frac{\rho_x}{\rho} \right) \delta(u - v_1) = 0
\end{aligned}$$

где  $\theta'(u - v_i) = \delta(u - v_i)$ ,  $(i = 1, 2)$  — дельта функция Дирака. Тогда система (1) примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{b}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} &= 0, \quad \rho = \int_{v_0}^{v_1} f du, \\
\frac{\partial v_0}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{b}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{b}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Таким образом, получили интегродифференциальную систему уравнений для определения величин  $f(t, x, u)$ ,  $v_0(t, x)$  и  $v_1(t, x)$ .

## 2.1 Полулагранжева формулировка

Для исследования свойств кинетической модели (3) используем полулагранжевы переменные  $x, \lambda$ , переход к которым осуществляется с помощью замены переменных [8]

$$u = u(t, x, \lambda), \quad \bar{f}(t, x, \lambda) = f(t, x, u(t, x, \lambda)), \quad \lambda \in [0, 1]$$

где функция  $u(t, x, \lambda)$  — решение задачи Коши

$$u_t + u u_x = -b \frac{\rho_x}{\rho}, \quad u|_{t=0} = u^0(x, \lambda).$$

Предполагается выполненным неравенство  $u_\lambda > 0$  обеспечивающее обратимость замены переменных. При  $\lambda = 0$  и  $\lambda = 1$  функция  $u(t, x, \lambda)$  принимает значения  $v_0(t, x)$  и  $v_1(t, x)$  соответственно. В результате для определения новых искомым величин  $u(t, x, \lambda)$  и  $H(t, x, \lambda) = u_\lambda \bar{f}$  получаем интегро-дифференциальную систему уравнений:

$$u_t + u u_x + \frac{b}{\rho} \int_0^1 H_x d\lambda = 0, \quad H_t + (u H)_x = 0, \quad \rho = \int_0^1 H d\lambda \tag{4}$$

Приведем детали получения системы (4). Учитывая, что

$$\bar{f}_t = f_t + u_t f_u, \quad \bar{f}_x = f_x + u_x f_u, \quad \bar{f}_\lambda = u_\lambda f_u$$

имеет место следующее выражение:

$$\bar{f}_t + u \bar{f}_x = f_t + u f_x + (u_t + u u_x) f_u = f_t + u f_x - b \frac{\rho_x}{\rho} f_u = 0.$$

Можем расписать второе уравнение системы (3)

$$\rho = \int_{v_0}^{v_1} f du = \int_0^1 \bar{f} u_\lambda d\lambda = \int_0^1 H d\lambda$$

Ввиду этого справедливо и первое уравнение системы. Подставим  $H(t, x, \lambda) = u_\lambda \bar{f}$  во второе уравнение системы (4):

$$\begin{aligned} (u_\lambda \bar{f})_t + (u u_\lambda \bar{f})_x &= u_{\lambda t} \bar{f} + u_\lambda \bar{f}_t + (u u_\lambda)_x \bar{f} + (u u_\lambda) \bar{f}_x = \\ &= u_\lambda (\bar{f}_t + u \bar{f}_x) + \bar{f} (u_{\lambda t} + (u u_\lambda)_x) = \bar{f} (u_{\lambda t} + u_x u_\lambda + u u_{\lambda x}) = \\ &= \bar{f} ((u_t + u u_x)_\lambda) = (-b \frac{\rho_x}{\rho})_\lambda \bar{f} = 0 \end{aligned}$$

Таким образом  $H_t + (uH)_x = 0$  эквивалентно представлению  $\bar{f}_t + u \bar{f}_x = 0$  при выполненном первом уравнении системы (4).

## 2.2 Гидродинамическая формулировка

Еще одна интерпретация уравнений (3) связана с моделированием плоскопараллельного сдвигового течения идеальной жидкости в длинном канале с упругой стенкой [14]

$$u_t + u u_x + v u_y + (p(h))_x = 0, \quad h_t + \left( \int_0^h u dy \right)_x = 0, \quad v = - \int_0^y u_x dy. \quad (5)$$

Здесь  $u(t, x, y)$ ,  $v(t, x, y)$  — горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости; уравнениями  $y = 0$  и  $y = h(t, x)$  задаются стенки канала, замыкающее соотношение  $p = p(h)$  определяет упругие свойства верхней стенки. В гемодинамике [15] используются различные варианты замыкания, в том числе зависимость вида

$$p(h) = b \ln h + p_0.$$

В этом случае уравнения (5) эквивалентны системе (4) или (3).

Сделаем замену переменных

$$\hat{u}(t, x, \lambda) = u(t, x, \Phi(t, x, \lambda)), \quad \hat{v}(t, x, \lambda) = v(t, x, \Phi(t, x, \lambda)),$$

$$y = \Phi(t, x, \lambda), \quad H = \Phi_\lambda,$$

где функция  $\Phi$  — решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u(t, x, \Phi) \frac{\partial \Phi}{\partial x} = v(t, x, \Phi) \\ \Phi|_{t=0} = \lambda h_0(x). \end{cases} \quad (6)$$

Тогда

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = u_t + u_y \Phi_t; \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} = u_x + u_y \Phi_x; \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial \lambda} = u_y \Phi_\lambda.$$

Принимая во внимание вид функции  $p(h)$ , имеем

$$p_x = p'(h)h_x = \frac{b}{h}h_x, \quad h = \int_0^1 H d\lambda.$$

Выразим  $u_t, u_x$  и подставим в первое уравнение системы (5):

$$\hat{u}_t - u_y \Phi_t + \hat{u}(\hat{u}_x - u_y \Phi_x) + \hat{v}u_y + p_x = \hat{u}_t - \hat{u}\hat{u}_x - u_y(\Phi_t + u\Phi_x - \hat{v}) + p_x = 0.$$

Таким образом получим эквивалентное первому уравнению системы (4) выражение

$$\hat{u}_t - \hat{u}\hat{u}_x + \frac{b}{h} \int_0^1 H_x d\lambda = 0, \quad h = \int_0^1 H d\lambda.$$

Продифференцируем первое уравнение системы (6) по  $\lambda$

$$\Phi_{\lambda t} + u\Phi_{\lambda x} + u_y\Phi_\lambda\Phi_x = v_y\Phi_\lambda$$

Знаем, что  $\Phi_\lambda = H$  и  $v = -\int_0^y u_x dy$ ,  $v_y = -u_x$ .

Тогда

$$H_t + uH_x + u_y\Phi_\lambda\Phi_x + u_x\Phi_\lambda = 0;$$

$$H_t + uH_x + (u_y\Phi_\lambda + u_x)H = H_t + \hat{u}H_x + \hat{u}_xH = 0;$$

$$H_t + (\hat{u}H)_x = 0.$$

Это эквивалентно второму уравнению системы (4). Т.е. получили еще одну интерпретацию уравнений исходной системы (3), относящуюся к моделированию сдвиговых течений идеальной жидкости.

### 3 Дифференциальные приближения и редукции

В процессе эволюции гладкого решения обобщенно-гиперболической системы интегро-дифференциальных уравнений может возникнуть градиентная катастрофа. Дальнейшее описание решения возможно в классе разрывных функций, что приводит к необходимости формулировки модели в виде законов сохранения. Аналогично [13] используем следующую консервативную формулировку (4):

$$\begin{aligned} u_{\lambda t} + (uu_\lambda)_x &= 0, & H_t + (uH)_x &= 0, \\ A_{1t} + (A_2 + b\rho)_x &= 0, & A_l &= \int_0^1 u^l H d\lambda \quad (l = 1, 2) \end{aligned} \quad (7)$$

Покажем эквивалентность систем (7) и (4). Для этого проинтегрируем по  $\lambda$  второе уравнение (4):

$$0 = \int_0^1 H_t + (uH)_x d\lambda = \left( \int_0^1 H d\lambda \right)_t + \left( \int_0^1 uH d\lambda \right)_x = \rho_t + A_{1t}$$

Что в точности совпадает со вторым уравнением системы (7). Теперь домножим второе уравнение из (4) на  $u$  и проинтегрируем по  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 uH_t + u(uH)_x d\lambda = \left( \int_0^1 uH d\lambda \right)_t - \int_0^1 Hu_t d\lambda + \left( \int_0^1 u^2 H d\lambda \right)_x - \int_0^1 uHu_x d\lambda = \\ &= A_{1t} + A_{2x} - \int_0^1 H(u_t + uu_x) d\lambda = A_{1t} + A_{2x} + \frac{b}{\rho} \rho_x \int_0^1 H d\lambda = A_{1t} + A_{2x} + \frac{b}{\rho} \rho_x \rho = \\ &= A_{1t} + A_{2x} + b\rho_x = A_{1t} + (A_2 + b\rho)_x = 0. \end{aligned}$$

Это в точности третье уравнение системы (7). Теперь продифференцируем по  $\lambda$  первое уравнение:

$$\begin{aligned} u_{t\lambda} + (uu_x)_\lambda + \left( \frac{b}{\rho} \int_0^1 H_x d\lambda \right)_\lambda &= 0, \\ u_{t\lambda} + (uu_x)_\lambda &= u_{t\lambda} + (u_\lambda u_x + uu_{x\lambda}) = u_{t\lambda} + (uu_\lambda)_x = 0. \end{aligned}$$

Таким образом показали эквивалентность уравнений (4) и (7).

### 3.1 Многослойная аппроксимация

Для вывода дифференциальных законов сохранения, аппроксимирующих интегро-дифференциальную модель (7), сделаем разбиение по переменной  $\lambda$  ( $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_M = 1$ ) и используем кусочно-постоянную аппроксимацию функции распределения

$$f(t, x, u) = f_{ci}(t, x), \quad u \in [u_{i-1}, u_i]$$

при осреднении уравнений (7) по  $\lambda$ . Здесь  $u_i(t, x) = u(t, x, \lambda_i)$ ,  $i = 1, \dots, M$ . В силу выбранной аппроксимации функции распределения и с учетом того, что

$$H = u_\lambda \bar{f}(t, x, \lambda), \quad H d\lambda = f du$$

имеют место равенства

$$\int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} H d\lambda = f_{ci} h_i, \quad \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} uH d\lambda = u_{ci} f_{ci} h_i, \quad \int_{\lambda_{i-1}}^{\lambda_i} u^2 H d\lambda = u_{ci}^2 f_{ci} h_i + \frac{f_{ci} h_i^3}{12} \quad (8)$$

где  $h_i = u_i - u_{i-1}$ ;  $u_{ci} = (u_i + u_{i-1})/2$ . Проинтегрируем уравнения (7) по лагранжевой переменной  $\lambda$  от  $\lambda_i - 1$  до  $\lambda_i$ . Используя формулы (8), получаем систему законов

сохранения, состоящую из  $2M + 1$  дифференциальных уравнений для определения искоемых функций  $h_i(t, x)$ ,  $f_{ci}(t, x)$  и  $A_1(t, x)$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_{ci}h_i) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}(f_{ci}h_i) + \frac{\partial}{\partial x}(u_{ci}f_{ci}h_i) = 0, \\ \frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{i=1}^M (u_{ci}^2 f_{ci} h_i + \frac{f_{ci} h_i^3}{12} + b f_{ci} h_i) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Входящие в (9) величины  $u_{ci}(t, x)$  задаются формулами

$$u_{ci} = \frac{h_i}{2} + \sum_{k=1}^{i-1} h_k + u_0, \quad u_0 = \left( \sum_{i=1}^M f_{ci} h_i \right)^{-1} \left( A_1 - \sum_{i=1}^M \frac{f_{ci} h_i^2}{2} - \sum_{i=2}^M f_{ci} h_i \sum_{k=1}^{i-1} h_k \right).$$

Для численного решения гиперболической системы дифференциальных законов сохранения (9), в отличие от интегро-дифференциальных уравнений (7), применимы стандартные численные методы.

### 3.2 Газодинамическая аналогия

Предложенная для численного моделирования плазменных волн система дифференциальных законов сохранения (9) при  $M = 1$  приводится к уравнениям газодинамического типа

$$\begin{aligned} (\rho/f)_t + (v\rho/f)_x &= 0, \quad \rho_t + (v\rho)_x = 0, \\ (v\rho)_t + (v^2\rho + p)_x &= 0, \quad p(\rho, f) = \rho^3/(12f^2) + b\rho, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\rho = h_1 f_{c1}$ ;  $v = u_{c1}$ ;  $f = f_{c1}$ . Известные гидродинамические пределы кинетического уравнения (1) получаются как частные случаи системы (10). При  $f = f_0 = \text{const}$  уравнения (10) совпадают с исходной моделью (1) на классе решений типа ступеньки  $f^1(t, x, u) = (\theta(u - v_0) - \theta(u - v_1))f_0$ .

### 3.3 Модель холодной плазмы

Если в системе (10) принять  $f = \text{const}$  и пренебречь первым слагаемым в уравнении состояния  $p = p(\rho, f)$ , то получим модель холодной плазмы [3]

$$\rho_t + (v\rho)_x = 0, \quad (v\rho)_t + (v^2\rho + b\rho)_x = 0, \quad (11)$$

которая также следует из уравнения (1) в случае  $f^1(t, x, u) = \rho(t, x)\delta(u - v(t, x))$  (далее обозначим  $\delta(u - v(t, x)) = \delta$ )

$$\begin{cases} \frac{\partial f^1}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta - \frac{\partial v}{\partial t} \rho \delta'; \\ \frac{\partial f^1}{\partial x} = \rho_x \delta - v_x \rho \delta'; \\ \frac{\partial f^1}{\partial u} = \rho \delta'. \end{cases}$$



Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^1 du = (\delta, \rho) = \rho(\delta, 1) = \rho,$$

то в силу второго уравнения (1) имеем  $\varphi = \frac{T_e}{e} \ln(\rho/N_0)$ . При подстановке в (1) получим следующее соотношение:

$$(\rho_t + u\rho_x)\delta - (v_t + uv_x + b\frac{\rho_x}{\rho})\rho\delta' = 0; \quad (\star)$$

Ввиду известных свойств дельта функции Дирака:

- 1)  $(\delta'(u-v), u) = -(\delta(u-v), 1);$
- 2)  $(\delta(u-v), u) = v$

уравнение  $(\star)$  примет вид:

$$\rho_t + (v\rho)_x = 0$$

Умножим  $(\star)$  на  $u$

$$\begin{aligned} &(\rho_t + u\rho_x)u\delta - (v_t + uv_x + b\frac{\rho_x}{\rho})\rho u\delta' = 0; \\ &(\rho_t + v\rho_x)v\delta + (v_t + b\frac{\rho_x}{\rho})\rho\delta + 2vv_x\rho\delta = \\ &= ((\rho_t + (v\rho)_x))v + (v_t + vv_x + b\frac{\rho_x}{\rho})\rho = \\ &= (v\rho)_t + (v^2\rho + b\rho)_x = 0; \end{aligned}$$

Таким образом  $(v\rho)_t + (v^2\rho + b\rho)_x = 0$  – получено второе уравнение системы (10).

### 3.3.1 Решение задачи Римана о распаде произвольного разрыва

Построим решение уравнений холодной плазмы (11) с кусочно-постоянными начальными данными

$$(u, \rho)|_{t=0} = \begin{cases} (u_1, \rho_1), & x < 0 \\ (u_2, \rho_2), & x > 0 \end{cases} \quad (12)$$

Уравнения (11) являются гиперболической системой, скорости характеристик которой задаются формулами

$$\lambda_1 = u + \sqrt{b}, \quad \lambda_2 = u - \sqrt{b}.$$

Инварианты Римана имеют вид

$$r = u + \sqrt{b} \ln \rho, \quad l = u - \sqrt{b} \ln \rho,$$

и позволяют переписать систему (11) в следующем эквивалентном виде (на гладких решениях)

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial r}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial l}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial l}{\partial x} = 0.$$

Уравнения (11) и начальные условия (12) инвариантны относительно растяжения  $t \rightarrow at, x \rightarrow ax$ . Поэтому решение можно искать в виде  $u = u(\xi), \rho = \rho(\xi), \xi = x/t$  (или  $r = r(\xi), l = l(\xi)$ ).

Если  $r = r_0 = \text{const}$ , то  $(\lambda_2 - \xi)l'(\xi) = 0$ . Следовательно,  $\lambda_2 = \xi$ , иначе получаем постоянное решение. Аналогично, если  $l = l_0 = \text{const}$ , то  $(\lambda_1 - \xi)r'(\xi) = 0$  и непостоянное решение возможно лишь при  $\lambda_1 = \xi$ . Определим уравнения  $r$ -волны ( $\rho \leq \rho_1$ )

$$\begin{cases} u + \sqrt{b} \ln \rho = u_1 + \sqrt{b} \ln \rho_1, \\ u - \sqrt{b} = x/t, \end{cases}$$

и уравнения  $l$ -волны ( $\rho \leq \rho_2$ )

$$\begin{cases} u - \sqrt{b} \ln \rho = u_2 - \sqrt{b} \ln \rho_2, \\ u + \sqrt{b} = x/t, \end{cases}$$

Ударная волна, направленная влево задается соотношением

$$u = u_1 - (\rho - \rho_1) \sqrt{\frac{b}{\rho \rho_1}}, \quad \rho \geq \rho_1.$$

Для ударной волны, направленной вправо, имеем

$$u = u_2 + (\rho - \rho_2) \sqrt{\frac{b}{\rho \rho_2}}, \quad \rho \geq \rho_2.$$

Совмещенная  $(u, \rho)$ -диаграмма простых и ударных волн изображена на рис. 1. Для построения были взяты следующие значения  $b = 1, u_1 = 0, \rho_1 = 1, u_2 = 0, \rho_2 = 2$ . В рассмотренном примере переход к постоянному состоянию “3” ( $u_3, \rho_3$  — точка пересечение кривых, направленных влево и вправо) дается левой ударной и правой простой волнами.

Для решения задачи о распаде разрыва малой амплитуды можно воспользоваться  $(u, \rho)$ -диаграммой в линейном приближении. Тогда состояние “3” дается явными формулами

$$\begin{cases} \rho_3 = \frac{(u_1 - u_2 + 2\sqrt{b})\rho_1\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)\sqrt{b}} \\ u_3 = \frac{\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2 + \sqrt{b}(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 + \rho_2} \end{cases}$$

Приведенный метод построения точного решения задачи о распаде произвольного разрыва для уравнений холодной плазмы будет использован ниже для верификации численных результатов.

## 4 Сравнение моделей

### 4.1 Многослойная аппроксимация

Выполним расчет о распаде произвольного разрыва на основе дифференциальной аппроксимации (9). Пусть при  $t = 0$  свойства плазмы в полупространстве  $x < 0$  опре-

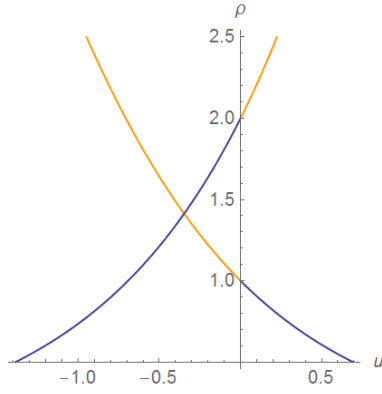


Рис. 1: Совмещенная диаграмма простых и ударных волн.

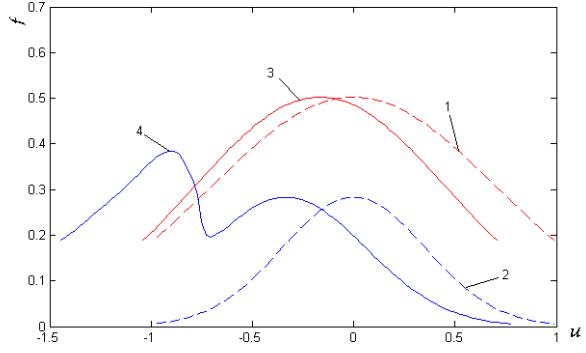


Рис. 2: Функция распределения  $f(u)$ .

деляются функцией распределения  $f_1(u)$ , а в полупространстве  $x > 0$  — функцией распределения  $f_2(u)$ . На интервале  $u \in (v_0, v_1)$  зададим функции  $f_1, f_2$  следующим образом (рис. 2, кривые 1, 2):

$$f_1(u) = \frac{3 \exp(-u^2)}{4\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(1)}, \quad f_2(u) = \frac{\exp(-4u^2)}{2\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(2)} \quad (v_1 = -v_0 = 1)$$

Расчетный интервал по пространственной переменной  $x \in [x_a, x_b]$  разбивается на  $N$  равных ячеек. В центральных точках ячеек  $x_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) при  $t = 0$  задаются начальные значения вектора искомых величин  $(h_1, \dots, h_M; f_{c1}h_1, \dots, f_{cM}h_M; A_1)$ . Здесь  $h_i = (v_1 - v_0)/M$ ;  $f_{ci}$  — среднее значение функции  $f_1(u)(f_2(u))$  на промежутке  $(u_{i-1}, u_i)$ , где  $u_i = v_0 + ih_i$ . В силу выбора начальной функции распределения  $A_1 = 0$ . Для всех значений времени  $t > 0$  дополнительно задаются граничные условия в точках  $x_{1-i}$  и  $x_{N+i}$  ( $i = 1, 2$ ). При этом использованы граничные условия вида  $u(x_{1-i}) = u(x_1), u(x_{N+i}) = u(x_N)$ , которые позволяют проводить вычисления до тех пор, пока начальные возмущения не достигнут границ расчетной области.

Вычисления проводятся с использованием TVD схемы повышенного порядка аппроксимации типа предиктор-корректор [11]. Параметр  $b = 1$ ; границы расчетного интервала  $x_b = -x_a = -2$ . Расчеты выполнены при  $N = 200, M = 100$ . Сплошными линиями на рис. 2 (кривые 3 и 4) показана функция распределения  $f(u)$  при  $t = 1$  для значений  $x = 1$  и  $x = -1.2$ . Появление двух локальных максимумов функции распределение (кривая 4) соответствует кинетическому опрокидыванию [3] и развитию неустойчивости [10]. На рис. 3 показано распределение плотности плазмы  $\rho(t, x)$  при  $t = 0$  (пунктирная линия) и  $t = 1$  (сплошная линия).

## 4.2 Газодинамическая аналогия

Приведем расчет задачи о распаде произвольного разрыва на основе уравнений (10). Расчетный интервал по пространственной переменной  $x \in [x_a, x_b]$  разбивается на  $N$  равных ячеек. В центральных точках ячеек  $x_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) при  $t = 0$  задаются

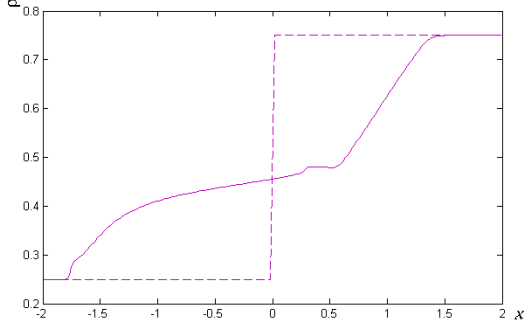


Рис. 3: Плотность плазмы  $\rho$  при  $t = 0$  (пунктир) и  $t = 1$ . Расчет по многослойной модели (9).

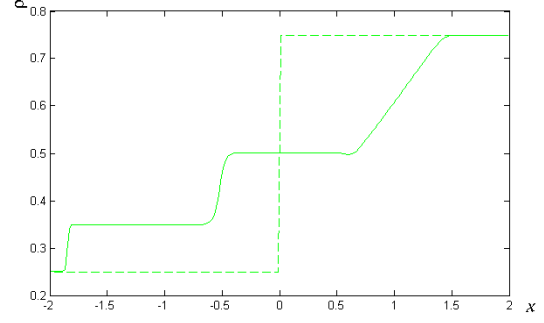


Рис. 4: Плотность плазмы  $\rho$  при  $t = 0$  (пунктир) и  $t = 1$ . Расчет по газодинамической модели (10).

начальные

$$(\rho, \rho/f, \rho v)|_{t=0} = \begin{cases} (1/4, 2, 0), & x < 0 \\ (3/4, 2, 0), & x > 0, \end{cases}$$

соответствующие предыдущему примеру с учетом выбранной “однослойной” аппроксимации. Расчеты выполнены при  $N = 200$ . На рис. 4 показано распределение плотности плазмы  $\rho(t, x)$  при  $t = 0$  (пунктирная линия) и  $t = 1$  (сплошная линия).

### 4.3 Модель холодной плазмы

Выполним аналогичный расчет на основе модели (11). Начальные значения вектора искомых величин следующие

$$(\rho, v\rho)|_{t=0} = \begin{cases} (1/4, 0), & x < 0 \\ (3/4, 0), & x > 0. \end{cases}$$

Расчеты выполнены при  $N = 250$ . На рис. 5 показано распределение плотности плазмы  $\rho(t, x)$  при  $t = 0$  (пунктирная линия) и  $t = 1$  (сплошная линия). Отметим хорошее совпадение численного решения с аналитическим (построенным по формулам из подраздела (3.3.1)). На рис. 6 показано точное (красная линия) и численное (синяя линия) решения.

### 4.4 Сравнение результатов расчета по моделям (9), (10) и (11)

Сравним результаты расчета плазменных волн, возникающих в результате рассмотренного распада разрыва. Плотности плазмы при  $t = 1$ , полученные с использованием уравнений (9), (10) и (11) показаны на рис. 7. Очевидно, что все три модели правильно описывают общие тенденции процесса, но с разной степенью детализации. Причем в области простой волны разрежения результаты по всем моделям близки. Скорость распространения сильного разрыва в рамках рассматриваемых моделей разная, более того, отличается и число разрывов (один для уравнений (11) и два

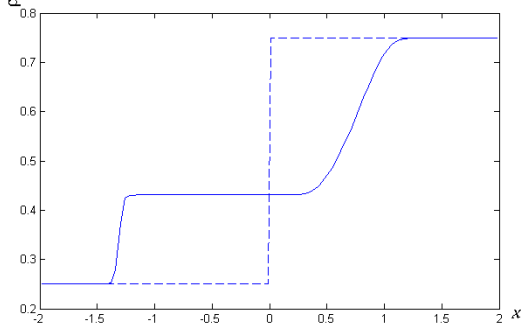


Рис. 5: Плотность плазмы  $\rho$  при  $t = 0$  (пунктир) и  $t = 1$ . Расчет по модели (11).

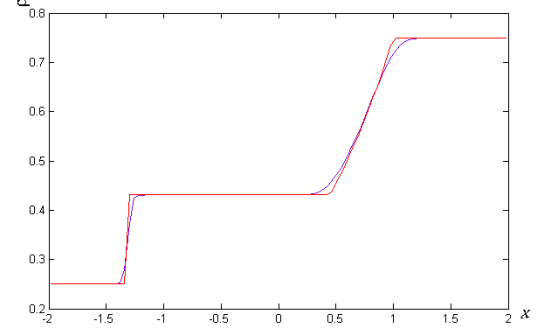


Рис. 6: Сравнение численного и точного решений модели холодной плазмы (11).

для системы (10)). В рамках равнений “многослойно” аппроксимации имеется  $M$  контактных характеристик, поэтому один контактный разрыв, реализуемый для модели (10), размазывается на  $M$  разрывов малой амплитуды. Таким образом, можно сделать вывод, что приведенные модели одинаково описывают общую тенденцию течения, но для более детального моделирования следует использовать многослойную аппроксимацию (9).

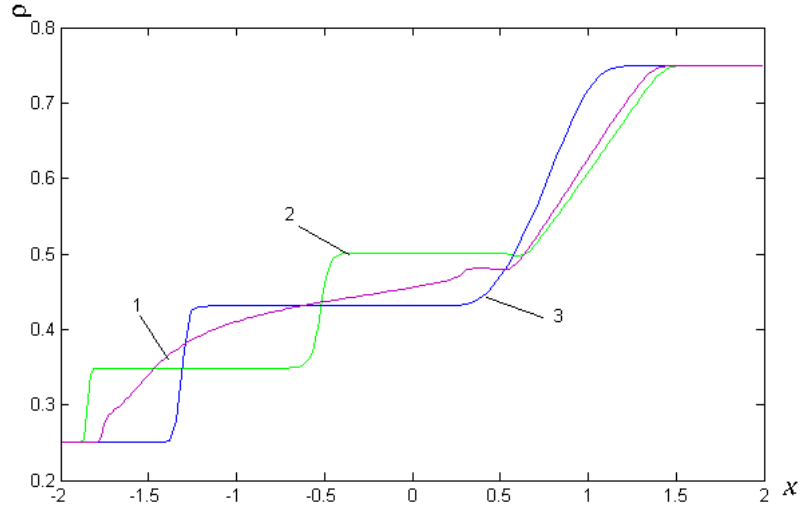


Рис. 7: Плотность плазмы  $\rho$ . Сравнение моделей (9), (10) и (11)

## 5 Формирование дисперсионных разрывов.

Рассмотрим дисперсионную модель ионно-звуковых волн [3, 12]

$$\begin{cases} \rho_t + (v\rho)_x = 0, & v_t + vv_x + b\varphi_x = 0, \\ \varepsilon\varphi_{xx} = e^\varphi - \rho. \end{cases} \quad (13)$$

которая сводится к (11) при  $\varepsilon = 0$ . Уравнения (13) допускают запись в эквивалентном виде

$$\begin{cases} \rho_t + (v\rho)_x = 0, \\ (v\rho)_t + (v^2\rho + be^\varphi - b/2\varepsilon\varphi_x^2)_x = 0, \\ \varepsilon\varphi_{xx} = e^\varphi - \rho. \end{cases} \quad (14)$$

Систему (14) можно решать методом расщепления, т.е. последовательным решением гиперболической подсистемы и обращении эллиптического оператора. На первом шаге решаем гиперболическую часть (первое, второе уравнения системы (14)) для нахождения  $\varphi$ . На втором шаге уже с известным  $\varphi$  находим  $(v, \rho)$ . Далее приводится численный алгоритм для решения третьего уравнения системы (14). В разностном виде уравнение записывается следующим образом:

$$\varphi_{j-1}^{n+1} - 2\varphi_j^{n+1} + \varphi_{j+1}^{n+1} = -(\rho_j^{n+1} - \exp(\varphi_j^n))\frac{h^2}{\varepsilon}, \quad (i = 1, \dots, N-1).$$

Или

$$\begin{aligned} a_j\varphi_{j-1} - c_j\varphi_j + b_j\varphi_{j+1} &= -f_j, \quad a_j = b_j = 1, c_j = 2, f_j = (\rho_j^{n+1} - \exp(\varphi_j^n))\frac{h^2}{\varepsilon}, \\ \varphi_0 &= \varkappa_1\varphi_1 + \mu_1, \dots, \varphi_N = \varkappa_2\varphi_{N-1} + \mu_2, \\ \vec{\varphi} &= (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N), \vec{f} = (\mu_1, -f_1, \dots, -f_{N-1}, \mu_2). \end{aligned}$$

Учитывая нелинейность уравнения, введем дополнительную переменную и воспользуемся методом установления:  $-\varepsilon\varphi_{xx\xi} + e^\varphi\varphi_\xi = \varepsilon\varphi_{xx} - e^\varphi + \rho$ ,

$$\begin{aligned} & -\varepsilon \left( \frac{\varphi_{j-1}^n - 2\varphi_j^n + \varphi_{j+1}^n}{h^2} - \frac{\varphi_{j-1}^{n-1} - 2\varphi_j^{n-1} + \varphi_{j+1}^{n-1}}{h^2} \right) \frac{1}{\tau} + e^{\varphi_j^{n-1}} \frac{\varphi_j^n - \varphi_j^{n+1}}{\tau} = \\ & = \varepsilon \frac{\varphi_{j-1}^{n-1} - 2\varphi_j^{n-1} + \varphi_{j+1}^{n-1}}{h^2} - e^{\varphi_j^{n-1}} + \rho_j, \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} & \varphi_{j-1}^n - (2 + \frac{h^2}{\varepsilon}e^{\varphi_j^{n-1}})\varphi_j^n = \varphi_{j-1}^{n-1} - (2 + \frac{h^2}{\varepsilon}e^{\varphi_j^{n-1}})\varphi_j^{n-1} + \\ & + \varphi_{j+1}^{n+1} - (\varphi_{j-1}^{n-1} - 2\varphi_j^{n-1} + \varphi_{j+1}^{n-1})\tau + (e^{\varphi_j^{n-1}} - \rho_j)\frac{h^2\tau}{\varepsilon}. \\ & \begin{cases} a_j = b_j = 1, \quad c_j = 2 + \frac{h^2}{\varepsilon}e^{\varphi_j^{n-1}}; \\ f_j = \varphi_{j-1}^{n-1} - (2 + \frac{h^2}{\varepsilon}e^{\varphi_j^{n-1}})\varphi_j^{n-1} + \varphi_{j+1}^{n+1} - (\varphi_{j-1}^{n-1} - 2\varphi_j^{n-1} + \varphi_{j+1}^{n-1})\tau + (e^{\varphi_j^{n-1}} - \rho_j)\frac{h^2\tau}{\varepsilon}. \end{cases} \end{aligned}$$

Нахождение решения разностных схем

$$\begin{cases} a_j\varphi_{j-1} - c_j\varphi_j + b_j\varphi_{j+1} = -f_j, \quad (j = 1, \dots, N-1) \\ \varphi_0 = \varkappa_1\varphi_1 + \mu_1, \dots, \varphi_N = \varkappa_2\varphi_{N-1} + \mu_2, \end{cases}$$

где  $\vec{\varphi} = (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N)^T$ ,  $\vec{f} = (\mu_1, -f_1, \dots, -f_{N-1}, \mu_2)^T$  сводится к решению системы  $A\varphi = f$ , где матрица  $A$  есть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\kappa_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -c_1 & b_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-1} & -c_{N-1} & b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\kappa_2 & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть  $\varphi_j = \alpha_{j+1}\varphi_{j+1} + \beta_{j+1}$ , ( $\varphi_{j-1} = \alpha_j\varphi_j + \beta_j$ ), тогда

$$(a_j\alpha_j - c_j)\varphi_j + b_j\varphi_{j+1} = -(f_j + a_j\beta_j)$$

$$\varphi_j - \alpha_{j+1}\varphi_{j+1} = \beta_{j+1}.$$

Теперь можем найти соотношения для  $\alpha_{j+1}$ ,  $\beta_{j+1}$ :

$$\alpha_{j+1} = \frac{b_j}{c_j - a_j\alpha_j}, \quad \beta_{j+1} = \frac{f_j + a_j\beta_j}{c_j - a_j\alpha_j}. \quad (j = 1, \dots, N-1)$$

На нулевом слое  $j = 0$ :  $\varphi_0 = \alpha_1\varphi_1 + \beta_1 = \kappa_1\varphi_1 + \mu_1$ , соответственно  $\alpha_1 = \kappa_1$ ,  $\beta_1 = \mu_1$ . Значит

$$\begin{cases} \varphi_{N-1} - \alpha_N\varphi_N = \beta_N, \\ \kappa_2\varphi_{N-1} - \varphi_N = -\mu_2. \end{cases}$$

и  $\varphi_N = \frac{\mu_2 + \kappa_2\beta_N}{1 - \alpha_N\kappa_2}$ . Таким образом, найдено соотношение для  $\varphi_N$ .

## 5.1 Модельный пример

В качестве модельного примера рассмотрим уравнение Benjamin-Bona-Mahony

$$u_t + uu_x - u_{txx} = 0 \tag{15}$$

Перепишем (15) в следующем эквивалентном виде

$$K_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, \quad K = u - u_{xx}. \tag{16}$$

Систему (16) можно решать описанным выше методом расщепления. Результаты расчета распада разрыва приведены на рис. (8), иллюстрирующем формирование дисперсионных разрывов.

## 6 Заключение

В работе рассмотрены математические модели, описывающие распространение плазменных волн [3]. Основное внимание уделяется кинетическому уравнению квазинейтральной бесстолкновительной плазмы (3), построению редукций и дифференциальных аппроксимаций этого уравнения. При этом существенно используются результаты работы [5]. Выполнено построение и сравнение численных решений уравнений

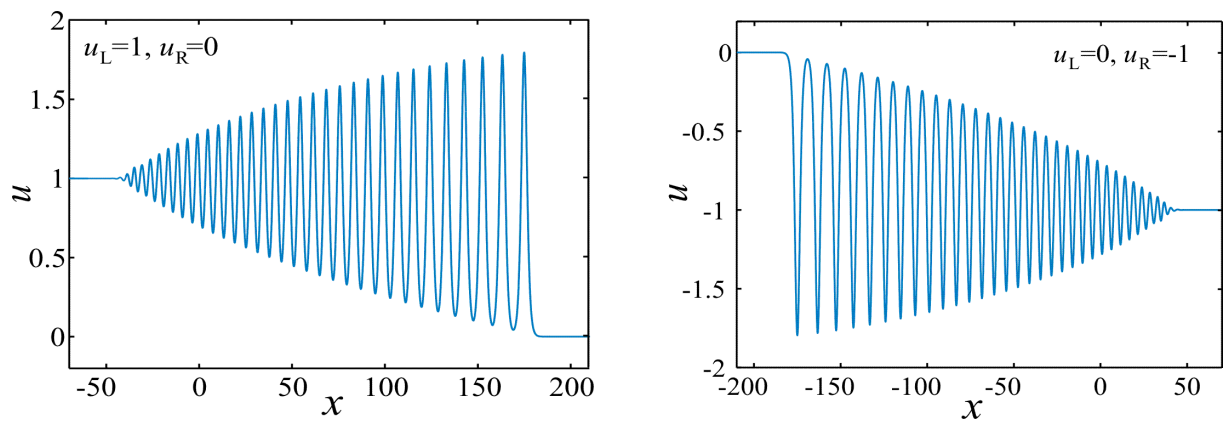


Рис. 8

распространения волн в плазме для трех различных моделей: многослойной аппроксимации (9), газодинамических уравнений (10) и модели холодной плазмы (11). Показано, что все приведенные модели правильно отражают общую тенденцию процесса, но наиболее детальное моделирование, описывающее эффект кинетического опрокидывания волн, возможно лишь на основе уравнений многослойной аппроксимации. Другая часть работы связана с поиском подходов к численному моделированию дисперсионных разрывов для уравнений ионно-звуковых волн [3, 12]. Предложен один из возможных подходов к численному решению уравнений (13) и показана его эффективность на модельном примере (15).

## Список литературы

- [1] Davidson R. C. *Methods in nonlinear plasma theory*. New York (USA): Academic Press, 1972. 356 p.
- [2] Лифшиц, Е. М., Питаевский, Л. П. *Физическая кинетика*. М.: Физматлит, 2002. 536 с.
- [3] Гуревич А. В., Питаевский Л. П. *Нелинейная динамика разреженной плазмы и ионосферная аэродинамика*. // Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1980. Вып. 10. С. 3–87.
- [4] Карпман В. И. *Нелинейные волны в диспергирующих средах*. М.: Наука, 1973.
- [5] Хе А. К., Чесноков А. А. *Распространение нелинейных возмущений в квазинейтральной бесстолкновительной плазме* // ПМФТ. 2011. Т. 52 № 5. С. 3–16.
- [6] Le Metayer O., Gavriluk S., Hank S. *A numerical scheme for the Green–Naghdi model* // J. Comput. Phys. 2010. V. 229. P. 2034–2045.
- [7] Gavriluk S. L., Liapidevskii V. Yu., Chesnokov A. A. *Spilling breakers in shallow water: applications to Favre waves and to the shoaling and breaking of solitary waves* // J. Fluid Mech. 2016. V. 808. P. 441–468.



- [8] Захаров В. Е. *Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи* // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 2. С. 15–24.
- [9] Ляпидевский В. Ю. *Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости.* / В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
- [10] Стикс Т. *Теория плазменных волн.* М.: Атомиздат, 1965.
- [11] Nessyahu H., Tadmor E. *Non-oscillatory central differencing schemes for hyperbolic conservation laws* // J. Comp. Phys. 1990. V. 87, N 2. P. 408–463.
- [12] El G. A., Khodorovskii V. V., Tyurina A. V. *Undular bore transition in bi-directional conservative wave dynamics* // Physica D. 2005. V. 206. P. 232–251.
- [13] Teshukov V., Russo G., Chesnokov A. *Analytical and numerical solutions of the shallow water equations for 2D rotational flows* // Math. Models Methods Appl. Sci. 2004 V. 14. P. 1451–1481.
- [14] Чесноков А. А. *Осесимметричные вихревые движения жидкости в длинной эластичной трубке* // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 4. С. 76–87.
- [15] Педли Т. *Гидродинамика крупных кровеносных сосудов.* М.: Мир, 1983