

# Ayudantía 1 - Algoritmos y Complejidad

## Análisis numérico, cálculo de raíces y análisis de convergencia

Rooted Complexers

### 1. Estabilidad

El análisis numérico trata de métodos computacionales para obtener resultados *numéricos* precisos a diferentes operaciones. Las soluciones numéricas son muy útiles en ingeniería y en muchas situaciones donde las soluciones exactas son imposibles de calcular. (Por ejemplo las ecuaciones de Navier-Stokes<sup>1</sup>)

Para obtener resultados relevantes, hay que tener en cuenta que existen muchas fuentes de error:

1. Significancia del modelo. (El modelo es una sobre-simplificación de la realidad)
2. Los parámetros del modelo no se conocen de forma precisa.
3. Se usan aproximaciones numéricas para resolver el modelo. ( $\pi = \frac{333}{106}$ )
4. Errores de redondeo.

Nos interesan los puntos 3 y 4

#### 1.1. Error

Sea  $x \in \mathbb{R}$  y  $x^*$  una aproximación de  $x$ , de sus clases favoritas de física 100 usted debería conocer el:

Error Absoluto:	$ x^* - x $
Error Relativo:	$\frac{ x^* - x }{ x }$

Por ejemplo, 1000 es una aproximación de 1024 con error absoluto de 24 y error relativo de 0,023.

Diremos que la aproximación tiene  $k$  dígitos significativos si el error relativo es menor que  $10^{-k+1}$ . Para nuestro caso  $k = 2$  por que  $0,023 < 10^{-2+1}$ ; tenemos 2 cifras significativas.

---

<sup>1</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Navier-Stokes\\_equations](https://en.wikipedia.org/wiki/Navier-Stokes_equations)

## 1.2. Propagación del error

Suponga que usted conoce y quiere calcular  $y = f(x)$  pero solo consigue obtener la aproximación  $y^*$ , cuantifique el error:

### 1.2.1. Forward Error

Es el error entre el valor aproximado y el real, ya sea absoluto o relativo. Pero como no conocemos el valor  $y$  preciso (y por que a veces tampoco conocemos la  $f(x)$  *real*), tenemos que aproximarlos. (Si, otra aproximación)  
Puede aproximar  $f(x)$  con una serie de Taylor centrada en  $x$ , luego:

$$|y^* - y| \approx |f'(x)| \cdot |\Delta x|$$

Luego usted puede encontrar la cota del error.

### 1.2.2. Backward Error

Aquí usted sabe que  $y^*$  es el resultado de  $f(x^*)$ , buscamos el mínimo  $\Delta x$  tal que:

$$y^* = f(x + \Delta x)$$

Ese  $\Delta x$  es el error hacia atrás. Decimos que un algoritmo es estable hacia atrás si ese  $\Delta x$  es “*pequeño*” respecto a todos los  $x$  de entrada.

Existen problemas cuyas soluciones son muy sensibles a los datos de entrada, estos problemas son los *mal condicionados* (*ill-conditioned, ill-formed*)

Note que el condicionamiento y la inestabilidad (Cuando errores intermedios se amplifican hasta el final) son cosas diferentes, el condicionamiento depende del problema y la inestabilidad del algoritmo.

### 1.2.3. Pérdida de Significancia

Otro problema de los cálculos con precisión finita es la pérdida de significancia, que a veces lleva a la **cancelación catastrófica**. Sucede cuando el error relativo incrementa mucho más rápido que el error absoluto. (Por ejemplo, al restar dos números muy cercanos). Compare estas dos funciones algebraicamente equivalentes para  $x$  muy pequeños:

$$f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{\sin^2(x)} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{1 + \cos(x)}$$

$x$	$f(x)$	$g(x)$
1	0.64922320520476	0.64922320520476
0.1	0.50125208628858	0.50125208628857
0.01	0.50001250020848	0.50001250020834
0.001	0.50000012499219	0.50000012500002
0.0001	0.49999999862793	0.50000000125000
0.00001	0.50000004138685	0.50000000001250
0.000001	0.50004445029134	0.50000000000013
0.0000001	0.49960036108132	0.50000000000000
0.00000001	0	0.50000000000000
0.000000001	0	0.50000000000000
0.0000000001	0	0.50000000000000

Cuadro 1: Hint: Fíjese en el  $1 - \cos(x)$  (Enfasis en el signo menos) que la otra función no tiene

Ahora Fíjese en el siguiente código :

```

1 #include <stdio.h>
2
3 int main() {
4     float f;
5     for (f = 0; f < 1.0f; f+=0.1f);
6     printf("Float equal to 1? %d\n", (f == 1.0f) );
7     printf("%.16f\n", f);
8
9     return 0;
10 }
```

Listing 1: Nunca confíe en los números flotantes

Usted espera que  $f = 1,0$  al terminar? ¿por qué no resulta?  
 Este es un ejemplo sencillo de **inestabilidad** de la aritmética de punto flotante con precisión finita.

## 2. Búsqueda de raíces

Las raíces de una función  $f$  son los puntos  $x^*$  tal que  $f(x^*) = 0$ .

Intentamos encontrar dichos puntos sabiendo que podemos evaluar  $f(x)$  en cualquier momento, y a veces también  $f'(x)$ .

Esto también nos sirve, por ejemplo, para igualar dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ , pues encontrar los puntos en que se igualen equivale a encontrar las raíces de la función  $h(x) = f(x) - g(x)$ .

Existen varios algoritmos para lograr esto, trabajaremos con dos grupos:

1. Los que buscan directamente una solución para  $f(x) = 0$ , reduciendo cada vez más, de manera iterativa, el intervalo donde se puede encontrar.

2. Los que se aprovechan de otras funciones cuyos puntos fijos coinciden con las raíces de  $f$ . Un punto fijo  $x_p$  de una función  $g$  cumple con la propiedad de  $x_p = g(x_p)$ .

### 3. Métodos iterativos

#### 3.1. Método de la bisección

Del teorema del valor medio se deduce que si una función  $f(x)$  es continua y de un punto  $x = a$  a otro  $x = b$  cambia de signo, hay una raíz  $x^* \in [a, b]$ .

Si se conoce la existencia de una raíz en el intervalo  $[a, b]$  (por ejemplo, si los signos de  $f(a)$  y  $f(b)$  son distintos) se puede evaluar  $f(\frac{a+b}{2})$  para descartar una de las dos mitades del intervalo (la que tenga signos iguales).

Este proceso se puede repetir para ir *atrapando* a la raíz en un intervalo cada vez más pequeño. Cuando nos cansemos de hacer pequeño el intervalo, tomamos la mitad del mismo como aproximación de  $x^*$ . Suena lógico el que si en algún momento evaluamos  $f(x)$  y nos da 0, hemos encontrado la raíz exacta, pero no siempre ocurre.

**Pregunta al margen:** Si se busca una raíz  $x^*$  en el intervalo  $[a, b]$  con el método de la bisección y se pueden realizar tantas iteraciones como se quiera ¿Qué valores de  $x^*$  es imposible encontrar de manera exacta?

**Respuesta:** Los que se no puedan expresar como:

$$x^* = a + (b - a) \frac{j}{2^{k+1}} \quad \text{Con } j, k \in \mathbb{Z}$$

Si se realizan  $n$  iteraciones,  $f$  se evaluará  $n + 2$  veces y el error máximo será:

$$|x - x^*| = \frac{b - a}{2^n} \cdot \frac{1}{2}$$

*Si la aproximación  $x$  hecha de  $x^*$  se hace en la mitad del último intervalo encontrado, el error no puede ser mayor a la mitad de dicho intervalo.*

**Pregunta:** Calcule cuantas iteraciones son necesarias para lograr una precisión de  $k$  números decimales usando el método de la bisección cuando se parte con el intervalo  $[2, 7]$ .

**Respuesta:** El tamaño del intervalo tras  $n$  pasos será  $\frac{b-a}{2^n}$  y el error máximo  $x_n - x^*$  será la mitad de eso (porque siempre colocaremos  $x_n$  en la mitad del intervalo en el paso actual).

Que la precisión sea mayor a  $k$  números decimales equivale a que el error sea menor

que  $0,5 \cdot 10^{-k}$ . Entonces tenemos que lograr:

$$\begin{aligned}
 e_n &< 0,5 \cdot 10^{-k} \\
 \frac{7-2}{2^{n+1}} &< 0,5 \cdot 10^{-k} \\
 \frac{5}{2^{n+1}} &< 0,5 \cdot 10^{-k} \\
 2^{-(n+1)} &< 10^{-k-1} \\
 -(n+1) &< \log_2(10^{-k-1}) \\
 -n &< \log_2(10^{-k-1}) + 1 \\
 n &> (k+1) \log_2(10) - 1
 \end{aligned}$$

### 3.2. Método regula-falsi

El método de la regla falsa es como el método de la bisección, sin embargo, ve en cual de los extremos del intervalo  $[a, b]$  la función se acerca más al 0 y decide hacer el corte más cerca de ese extremo.

Si la función es más cercana a la recta entre estos dos puntos (osea, no tiene sesgo, o dicho de otra forma, no está muy abultada) convergerá más rápido que el método de la bisección, si no, convergirá peor, pues sólo descartará la parte más corta del intervalo.

$$\begin{aligned}
 c &= b - f(b) \frac{b-a}{f(b)-f(a)} \\
 c &= \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}
 \end{aligned}$$

## 4. Iteraciones de punto fijo

Los puntos fijos de una función  $f$  son los  $x_p$  tal que  $f(x_p) = x_p$ .

Algunas funciones convergen a un punto fijo cuando se aplican muchas veces sobre si mismas, por ejemplo:

$$\cos(\cos(\cos(\cos(\dots(\cos(\alpha))\dots))) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Siempre podemos transformar cualquier problema  $f(x) = 0$  a uno  $g(x) = x$ , simplemente realizando las operaciones correctas. La forma más sencilla de hacer esto es:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 0 \\
 f(x) + x &= x \\
 g(x) &= x
 \end{aligned}$$

Sin embargo, no todas convergen al punto fijo, ni todas necesariamente tienen uno. Pero si convergen a algo, será a un punto fijo.

## 5. Análisis de convergencia

A la hora de elegir un método es importante saber a qué velocidad nos estamos acercando a la solución o qué condiciones, si las hay, se requieren para que converjan. Para tener una idea de la velocidad de convergencia buscamos una relación entre el error en un paso  $n \rightarrow \infty$ ,  $e_n = x_n - x^*$  y en el siguiente  $e_{n+1} = x_{n+1} - x^*$ .

- **Convergencia lineal:** Un método convergerá linealmente con razón  $M$  si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e_{n+1}}{e_n} \right| = M$$

Siempre que  $M$  sea menor que 1, si no, el error crecerá.

- **Convergencia cuadrática:** Un método convergerá cuadráticamente con razón  $S$  si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e_{n+1}}{(e_n)^2} \right| = S$$

Siendo  $S$  cualquier valor (cuando no hay convergencia cuadrática el límite se hace  $\infty$ ).

Si se evalúa la convergencia lineal de estos métodos, resultará ser 0.

- **Convergencia (en general):** Se dice que hay convergencia de orden  $p$  si se puede demostrar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{e_{n+1}}{(e_n)^p} \right| \leq C$$

para alguna  $C > 0$ .

A veces no hay convergencia cuadrática pero se puede demostrar que lo anterior se cumple para  $1 < p < 2$ , en tal caso se llama **convergencia super-lineal**. Si  $p > 1$ , entonces  $M = 0$ .

**Problema** : Calcular la convergencia lineal del método de la bisección.

**Respuesta** : Si el intervalo inicial era  $[A, B]$ , tras el paso  $n$  vemos que el tamaño del intervalo será  $\frac{B-A}{2^n}$  y el error máximo  $x_n - x^*$  a lo más será  $\frac{B-A}{2^n}$  y que la aproximación en el paso  $n$ , se coloca en la mitad del intervalo pequeño. Al comparar los errores máximos en  $n$  y  $n+1$ , resulta:

$$\begin{aligned} \frac{e_{n+1}}{e_n} &= \frac{\frac{B-A}{2^{n+1}}}{\frac{B-A}{2^n}} \\ &= \frac{\frac{B-A}{2^{n+2}}}{\frac{B-A}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

### 5.1. Convergencia lineal de iteraciones de punto fijo

Lo clave es que el error de la aproximación  $n + 1$  está relacionado con la aproximación anterior, por ejemplo, si se trata de una iteración de punto fijo  $e_{n+1} = x_{n+1} - x^* = g(x_n) - x^*$ .

Por ejemplo, para intentar demostrar convergencia podemos partir de la serie de Taylor, intentando formar  $f(x)$  y sabiendo que los términos más pequeños de la serie podemos descartarlos ya que  $n \rightarrow \infty$  y que  $f(x^*) = 0$ .

Para demostrar la convergencia lineal de cualquier método iterativo:

$$\begin{aligned}g(x_n) &= g(x^*) + g'(x^*)(x_n - x^*) + O((x_n - x^*)^2) \\x_{n+1} &= g(x^*) + g'(x^*)(x_n - x^*) \\x_{n+1} &= x^* + g'(x^*)(x_n - x^*) \\x_{n+1} - x^* &= g'(x^*)(x_n - x^*) \\\frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} &= g'(x^*)\end{aligned}$$

Todos los métodos convergerán si  $|g'(x^*)| < 1$ .

Si demostramos que  $|g'(x^*)| < 1$  sabremos que al menos en un intervalo cerca de la solución (puede ser muy pequeño para nuestra desgracia), pasará que los  $x_n$  convergirán, ya que habrá un intervalo en que también  $|g'(x_n)| < 1$  y siempre nos iremos acercando, esto se llama *convergencia local*. El problema es que generalmente no sabemos el valor de  $x^*$  (de hecho eso es lo que queremos buscar al principio), pero podemos demostrar que un intervalo que contiene la raíz cumple con  $|g'(x)| < 1$ .

**Ejercicio** Se busca resolver el siguiente problema  $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$  para lo cual se descubren las siguientes iteraciones de punto fijo:

$$\begin{aligned}x &= 1 - x^3 = g(x) \\x &= \sqrt[3]{1 - x} = g(x) \\x &= \frac{1 + 2x^3}{1 + 3x^2} = g(x)\end{aligned}$$

Comprobar si hay convergencia local en las raíces de  $f(x)$ , que son los puntos fijos de cada una de estas  $g(x)$ .

**Respuesta** Se deben derivar cada  $g(x)$  y comprobar si el valor absoluto de la derivada es menor a 1.

### 5.2. Método de Newton-Raphson

Consiste en, a partir de una suposición inicial  $x_0$ , aproximar la función a su recta tangente y avanzar al punto en que ésta se hace 0.

Osea:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Esta es una FPI muy especial, dado que siempre  $g'(x) = 0$  (a menos que  $f(x) = 0$ ), por lo tanto no sólo siempre converge linealmente, sino que (a menos que  $f(x) = 0$ ) converge cuadráticamente (lo demostraremos más adelante).

### 5.3. Método de la secante

Si queremos utilizar el método de Newton pero no tenemos la derivada de la función (es muy común que sea así en aplicaciones computacionales), podemos partir con dos initial guesses  $x_0$  y  $x_1$ ; y aproximar una *tangente* con la secante entre esos dos puntos para obtener un punto  $x_2$  nuevo, y así seguimos, siempre con los últimos dos puntos.

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})}{\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}}$$

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})(x_{n+1} - x_n)}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}$$

Resulta algo bastante parecido al método regular-falsi ¿Cuál es la diferencia?

**Nota:** Como son iteraciones de punto fijo, no está garantizado que converjan.

### 5.4. Convergencia cuadrática del método de Newton

Para demostrar la convergencia del método de Newton:

$$f(x_n) = f(x^*) + f'(x^*)(x_n - x^*) + \frac{f''(x^*)(x_n - x^*)^2}{2} + O((x_n - x^*)^3)$$

$$x_{n+1} = x^* + f'(x^*)(x_n - x^*) + \frac{f''(x^*)(x_n - x^*)^2}{2} + O((x_n - x^*)^3)$$

$$x_{n+1} - x^* = f'(x^*)(x_n - x^*) + \frac{f''(x^*)(x_n - x^*)^2}{2} + O((x_n - x^*)^3)$$

Usted puede demostrar que  $f'(x) = 0$  para el método de newton. Sabiendo eso:

$$x_{n+1} - x^* = \frac{f''(x^*)(x_n - x^*)^2}{2} + O((x_n - x^*)^3)$$

$$e_{n+1} = \frac{f''(x^*)e_n^2}{2} + O(e_n^3)$$

$$\frac{e_{n+1}}{e_n^2} = \frac{f''(x^*)}{2} + O(e_n)$$



Alternativamente:

$$\begin{aligned}
 f(x^*) &= f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{f''(x_n)(x^* - x_n)^2}{2} + O((x^* - x_n)^3) \\
 0 &= f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{f''(x_n)(x^* - x_n)^2}{2} \\
 -f(x_n) &= f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{f''(x_n)(x^* - x_n)^2}{2} \\
 -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= x^* - x_n + \frac{f''(x_n)(x^* - x_n)^2}{2f'(x_n)} \\
 x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= x^* + \frac{f''(x_n)(x^* - x_n)^2}{2f'(x_n)} \\
 x_{n+1} &= x^* + \frac{f''(x_n)(x^* - x_n)^2}{2f'(x_n)} \\
 x_{n+1} - x^* &= \frac{f''(x_n)(x^* - x_n)^2}{2f'(x_n)} \\
 \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} &= \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}
 \end{aligned}$$

Y vemos que convergerá cuadráticamente con radio  $\left| \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)} \right|$  siempre que dicho radio sea un número, osea, el método de Newton no converge cuadráticamente cuando:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = f'(x^*) \rightarrow 0$$

Osea, si la primera derivada es diferente de 0, Newton no podra tener convergencia cuadratica.

## 6. Problemas

1. Demostrar que 1, 2, 3 son puntos fijos de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^3 + x - 6}{6x - 10}$$

**Respuesta** : Resuelva el sistema para  $f(x) = x$ , si sus puntos son fijos, van a converger en esta iteracion de punto fijo.

2. Encontrar la razón de convergencia lineal de las siguientes funciones para iteración de punto fijo:

$$\begin{aligned}
 g_1(x) &= \frac{2x-1}{x^2} && \text{al punto fijo } x = 1 \\
 g_2(x) &= \cos(x) + x + 1 && \text{al punto fijo } x = \pi \\
 g_3(x) &= e^{2x} - 1 && \text{al punto fijo } x = 0
 \end{aligned}$$

**Respuesta** : Obtenga las derivadas:

$$g_1'(x) = \frac{2-2x}{x^3}$$

$$g_2'(x) = -\sin(x) + 1$$

$$g_3'(x) = 2e^{2x}$$

Y se evalúe...

$$g_1'(1) = \frac{2-2}{1^3} = 0$$

$$g_2'(\pi) = -\sin(\pi) + 1 = 1$$

$$g_3'(0) = 2e^{2 \cdot 0} = 2$$

Ni  $g_2(x)$  ni  $g_3(x)$  convergen linealmente, pues  $M \geq 1$ . Por otro lado, puesto que  $M = 0$  para  $g_1(x)$ , es candidata para un orden de convergencia mayor que lineal.

$$g_1''(x) = \frac{4x-6}{x^4}$$

$$g_1''(1) = \frac{4-6}{1^4} = -2$$

$g_1(x)$  converge mejor que lineal pero no alcanza para ser cuadrática.

3. Encuentre el resultado de  $\frac{N}{D}$  sin usar la división.

**Respuesta** : Encontrar la división de  $N$  por  $D$  equivale a encontrar la raíz de:

$$f(y) = D - \frac{N}{y}$$

4. Encuentre la raíz cuadrada de  $x$

**Respuesta** : Encontrar  $\sqrt{x}$  equivale a encontrar la solución de:

$$y^2 = x$$

Que es la búsqueda de ceros de:

$$f(y) = y^2 - x$$

5. Suponga que utiliza el método de la bisección para obtener una raíz de  $\frac{1}{x}$ . ¿Qué sucede?

6. Para calcular  $\sqrt{2}$  los *antiguos* babilonios utilizaban, sin saberlo, la siguiente iteración de punto fijo:

$$x = \frac{x + \frac{2}{x}}{2}$$

Y comenzaban con  $x = 1$ , sabían que si  $1 \leq x < 2$  la respuesta se encontraba entre  $x$  y  $\frac{2}{x}$ , así que sacaban el promedio entre los dos números para obtener el siguiente  $x$ . Se puede ver la obtención de  $g(x)$ :

$$x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 2$$

$$2x^2 = x^2 + 2$$

$$2x = x + \frac{2}{x}$$

$$x = \frac{x + \frac{2}{x}}{2}$$

- Demuestre que este método converge cuadráticamente.
- ¿Puede expresar esta iteración de punto fijo como un método de Newton y calcular el radio de convergencia cuadrática?
- Expandir su método para encontrar la raíz de cualquier número  $n$ .

**Respuesta:**

- Compruebe la convergencia con su derivada en el punto fijo:

$$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$$

Converge al menos linealmente porque  $|g'(\sqrt{2})| = 0$

$$g''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Converge al menos cuadráticamente porque  $|g''(\sqrt{2})| = 0$

- Si, es Newton-Raphson, estamos buscando el cero de  $f(x) = x^2 - 2$ , se puede extender con Newton.
- Cambie  $f(x) = x^2 - 2$  por  $f(x) = x^2 - y$ .

7. El método *regula-falsi* tiene un radio de convergencia dado por:

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = 1 - f'(x^*) \frac{e_0}{f(x_0)}$$

donde  $x_0$  corresponde al lado del *bracketing* que se mantiene durante las últimas iteraciones (osea, se supone que entre  $x_0$  y  $x^*$  la función es convexa).

- a) Identifique el radio de convergencia para la función  $f(x) = x^2 - 1$  comenzando con el intervalo  $[0, 2]$ .
- b) Demuestre que este método siempre converge cuando existe una raíz (y no más de una) en el intervalo entre  $f(x_1)$  y  $f(x_0)$ .
- c) Identifique en qué condiciones converge más rápido que el método de la bisección.

**Respuesta a** : Si graficamos la función vemos que  $x_0 = 2$ , pues el *bracketing* siempre mantendrá ese lado fijo, podemos usar eso para encontrar  $f(x_0)$  y  $e_0$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{e_{n+1}}{e_n} \right| &= \left| 1 - f'(x^*) \frac{e_0}{f(x_0)} \right| \\ &= \left| 1 - f'(1) \frac{2-1}{f(2)} \right| \\ &= \left| 1 - 2 \frac{1}{3} \right| \\ &= \left| \frac{1}{3} \right| \end{aligned}$$

El radio de convergencia es  $1/3$ , mejor que usando bisección.

**Respuesta b** :

**Esta respuesta es experimental, requiere más desarrollo y aun no ha sido confirmada.**

Para resolver el problema hay que notar que la tasa de convergencia lineal es:

$$\left| 1 - f'(x^*) \frac{e_0}{f(x_0)} \right|$$

Primero demostraremos que  $0 < f'(x^*) \frac{e_0}{f(x_0)}$ , Eso es fácil si consideramos que  $\frac{f(x_0)}{e_0} = \frac{f(x_0) - f(x^*)}{x_0 - x^*}$  y  $f'(x^*)$  deben tener el mismo signo, de otra manera, hay más de 1 raíz si la función es continua (entre  $x^*$  y  $x_0$ ). Ahora demostramos que la expresión dentro del valor absoluto no puede *darse vuelta* por el lado de los negativos (no es necesario el valor absoluto), ya que si:

$$\begin{aligned} f'(x^*) \frac{e_0}{f(x_0)} &> 1 \\ f'(x^*) &> \frac{f(x_0)}{e_0} \\ f'(x^*) &> \frac{f(x_0) - f(x^*)}{x_0 - x^*} \end{aligned}$$

Lo que, gráficamente no puede ser (si consideramos que cuando  $x \rightarrow \infty$  la función  $f$  tiende a lineal, sin refutar que  $x_0$  sea el lado del *bracketing* que se mantiene).

**Respuesta c :**

**Esta respuesta es experimental, requiere más desarrollo y aun no ha sido confirmada.**

Ahora tenemos que encontrar los casos en que

$$1 - f'(x^*) \frac{e_0}{f(x_0)} < \frac{1}{2}$$
$$f'(x^*) \frac{e_0}{f(x_0)} > \frac{1}{2}$$

Sabiendo que  $\frac{f(x_0)}{e_0}$  y  $f'(x^*)$  tienen el mismo signo:

$$|f'(x^*)| > \frac{1}{2} \left| \frac{f(x_0)}{e_0} \right|$$

Ahora podemos dibujar un caso en que  $f'(x^*)$  sea muy pequeño comparado con pendiente de la recta entre  $(x_0, f(x_0))$  y  $(x^*, 0)$  para ver que aquí el método *regula-falsi* converge más lento.