Ayudantía 2 - Algoritmos y Complejidad
Interpolación

Approximated Complexers

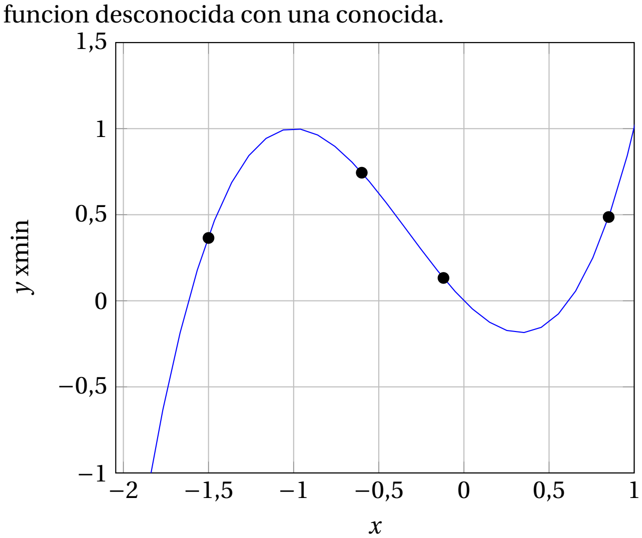
1. Introducción

Muchas veces olvidamos que los computadores no piensan como nosotros. A pesar de que a nosotros nos gusten las funciones avanzadas y complejas el computador en general prefiere trabajar con casos más generales.

Como el computador sabe que cualquier función puede escribirse como una serie polinomial, le gusta aproximar las funciones utilizando polinomios a costa de un pequeño error (el cual existiría de todas maneras debido a la representación de punto flotante).

2. Interpolación

A partir de valores **exactos** de una función **desconocida**, buscamos el polinomio de menor grado que cumpla con todos esos valores, de esta forma aproximando la funcion desconocida con una conocida.



Teo: Existe exactamente un polinomio de grado menor o igual a n que pase por $n+1$ puntos.

Dem: Supongamos $p(x)$ y $q(x)$ polinomios diferentes de grado $\leq n$ que tienen $n+1$ puntos en común;

$$\Rightarrow p(x) - q(x) \text{es de grado } n \text{ y tiene } n+1 \text{ ceros}$$

Por teorema fundamental del algebra:

$$\Rightarrow p(x) - q(x) = 0$$

por que un polinomio de grado n solo puede tener n ceros

pregunta ¿Cuántos polinomios existen de grado mayor?

3. Interpolando

3.1. Sistema de Ecuaciones

Si queremos armar un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ armamos el sistema:

$$\begin{aligned}
p(x_0) = y_0 &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots a_n x_0^n \\
p(x_1) = y_1 &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots a_n x_1^n \\
&\vdots \\
p(x_n) = y_n &= a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots a_n x_n^n
\end{aligned}$$

O en su forma de matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Tiene solución única cuando $\Delta \neq 0$ (Determinante de Vandermonde).
Se cumple si $x_i \neq x_j \forall i \neq j$, ya que:

$$\Delta = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

3.2. Lagrange

$$p(x) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} f(x_k) \cdot \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq k}} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

Expandido:

$$\begin{aligned} p(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} + f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} + \cdots \\ + f(x_n)\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\cdots(x_n-x_{n-1})} \end{aligned}$$

Fijese que calcular esta forma tiene complejidad $O(n^2)$ en el número de puntos. En la practica se suele preferir la forma baricentrica.

3.3. Lagrange-Baricentrico

$$p(x) = \frac{\sum\limits_{0 \leq j \leq n} \frac{w_j f(x_j)}{x - x_j}}{\sum\limits_{0 \leq j \leq n} \frac{w_j}{x - x_j}} \tag{1}$$

con:

$$w_j = \left(\prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq j}} (x_j - x_k) \right)^{-1} \tag{2}$$

Es númericamente estable y recomendable.

3.4. Newton

Con:

$$a_0 = f(x_0) \qquad\qquad Q_0(x) = a_0$$

Escribimos:

$$a_k = \frac{f(x_k) - Q_{k-1}(x_k)}{\prod\limits_{0 \leq i \leq k-1} (x_k - x_i)} \qquad\qquad Q_k(x) = Q_{k-1}(x) + a_k \prod_{0 \leq i \leq k-1} (x - x_i)$$

Comprimido:

$$Q_0(x) = f(x_0)$$
$$Q_k(x) = \prod_{i \leqslant k-1} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \cdot \Big(f(x_k) - Q_{k-1}(x_k)\Big) + Q_{k-1}(x)$$

Q_k es la interpolacion de grado k

3.4.1. Diferencias divididas

Para obtener el polinomio interpolador comenzamos dibujando los puntos conocidos (x_i, y_i) en dos columnas verticales.
Luego se construye una pirámide hacia el lado (cada piso tiene 1 celda menos que el piso anterior), en que cada celda contiene la división entre **la resta de los valores de las dos celdas que la sostienen** y **los x_i que están en los extremos de la base de la subpirámide que tiene a la celda como cúspide**.

Sean los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$,

$$\begin{array}{c|lll}
x_0 & y_0 & & \\
 & & \Delta y_0 = f[x_0 \quad x_1] = [y_0 \quad y_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} & \\
x_1 & y_1 & & \Delta^2 y_0 = f[x_0 \quad x_1 \quad x_2] = [y_0 \quad y_1 \quad y_2] = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{x_2 - x_0} \\
 & & \Delta y_1 = f[x_1 \quad x_2] = [y_1 \quad y_2] = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} & \\
x_2 & y_2 & &
\end{array}$$

Dejando el polinomio en:

$$P(x) = y_0 + \Delta y_0 \cdot (x - x_0) + \Delta^2 y_0 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)$$

Fijese en como las diferentes notaciones van dando pistas de los puntos que hay que usar en cada paso.

El polinomio interpolador será finalmente, siendo r_i los valores de la primera celda de cada piso i.

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(y_i \cdot \prod_{j=0}^{i-2} (x - x_j) \right)$$

4. Error de Interpolación

El error de interpolacion no es mas que la diferencia entre la funcion original y la interpolada. Aveces no tenemos la funcion original, o es muy dificil de calcular/evaluar, entonces este teorema nos ayuda a al menos acotar el error.

Theorem: Sea $P(x)$ interpolador de grado $n-1$ que pasa por n puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_{n-1}, y_{n-1})$

$$E(x) = f(x) - P(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{n!} f^{(n)}(\zeta)$$

Con ζ entre el menor y el mayor de los x_i

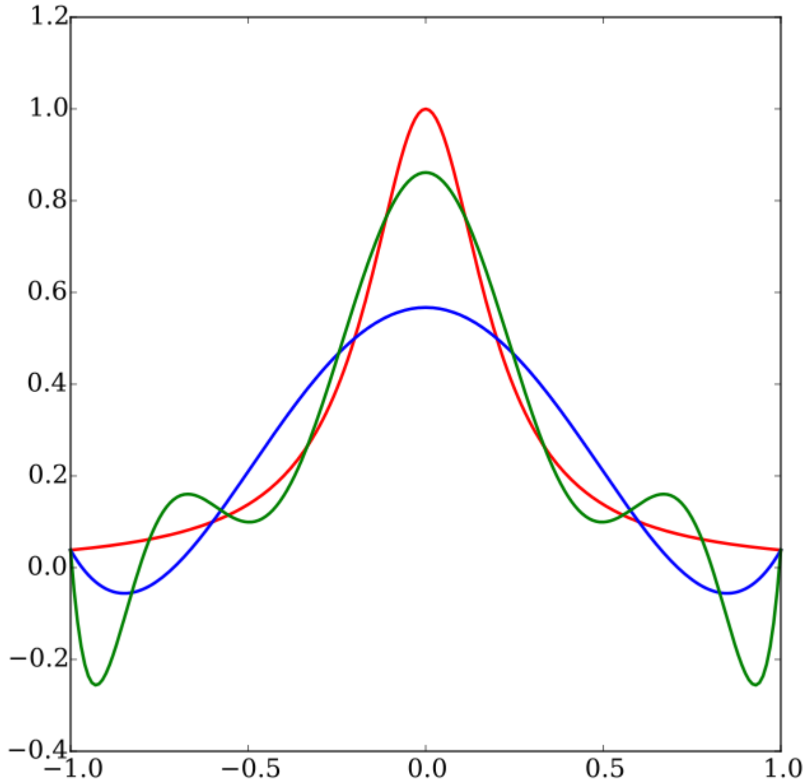
Que el ζ este corriendo entre el menor y el mayor de los x_i tiene sentido por que es en este intervalo donde la interpolacion "tiene sentido", si estuviera fuera del intervalo estariamos extrapolando. Moviendo el ζ uno puede encontrar una cota para el error.

De forma Equivalente usando la forma de Newton, el error se puede escribir como:

$$E(x) = f(x) - Q_{n-1}(x) = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(\zeta) \cdot \prod_{1 \leq j \leq n-1} (x - x_j)$$

4.1. Fenomeno de Runge

Se puede usar un polinomio para interpolar cualquier cantidad de puntos, pero nada asegura que el polinomio se comporte de una forma "estetica y bonita". Por ejemplo, si interpolamos sobre puntos equiespaciados ocurre el llamado fenomeno de Runge donde el polinomio interpolado empieza a ocilar erraticamente en los bordes.



4.2. Puntos de Chebyshev

La idea de los puntos de Chebyshev es reducir el efecto del fenomeno de Runge, dandole mas puntos de interpolacion a los bordes. Requiere poder controlar los puntos que vamos a interpolar.

Primero elíja n **Nodos** de Chebyshev en el intervalo $[-1,1]$:

$$x_k = cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \forall k = 1, \cdots, n$$

Estas son los puntos que va a interpolar ahora, usando cualquier metodo. Si queremos generalizar para un intervalo $[a,b]$ tendremos la transformacion afin:

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \forall k = 1, \cdots, n$$

Y siempre tendremos que:

$$\left|\prod_{1\leqslant j\leqslant n}(x-x_j)\right| \leq \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^n}{2^{n-1}}$$

5. Ejercicios

1. Se quiere interpolar, utilizando puntos de Chebyshev, la función $f(x) = e^{2x}$ en el intervalo $[0, r]$, encuentre una cota para el número mínimo de puntos necesarios para que el error sea menor que $\mathfrak{E}$ en dicho intervalo.

   Respuesta Tomando la fórmula del error de interpolación:

   $$E(x) = f(x) - Q_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\zeta) \cdot \prod_{1\leq j\leq n}(x-x_j)$$

   Sabemos que por tratarse de puntos de chebyshev:

   $$\left|\prod_{1\leq j\leq n}(x-x_j)\right| \leq \frac{(r-0)^n}{2^{2n-1}} = \frac{r^n}{2^{2n-1}}$$

   Ahora debemos encontrar una cota para:

   $$f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1}e^{2x}$$

   Como esta función es positiva y creciente en el intervalo $[0, r]$, su máximo estará en $x = r$, por lo tanto:

   $$|f^{(n)}(x)| \leq |f^{(n)}(r)| = 2^n e^{2r}$$

   Entonces, el error en dicho intervalo, está acotado por:

   $$\begin{aligned} |E(x)| &= \left|\frac{1}{n!}\right| \cdot \left|f^{(n)}(\zeta)\right| \cdot \left|\prod_{1\leq j\leq n}(x-x_j)\right| \\ &\leq \frac{1}{n!}2^n e^{2r}\frac{r^n}{2^{2n-1}} \\ &= \frac{e^{2r}}{(n+1)!}\frac{r^n}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

   Simplemente hay que elegir un n tal que:

   $$\frac{e^{2r}r^n}{n!\cdot 2^{n-1}} \leq \mathfrak{E}$$

2. Encontrar el polinomio interpolador de los puntos $(-1,1), (2,3) y (4,0)$ utilizando diferencias divididas. Suponga que ahora le piden interpolar agregando el punto (a, b). Calcule el nuevo polinomio interpolador reciclando su trabajo anterior.

Respuesta:

$$
\begin{array}{r|lll}
-1 & 1 & & \\
 & & \frac{3-1}{2-(-1)} = \frac{2}{3} & \\
2 & 3 & & \frac{\frac{-3}{2}-\frac{2}{3}}{4-(-1)} = \frac{-13}{30} \\
 & & \frac{0-3}{4-2} = \frac{-3}{2} & \\
4 & 0 & &
\end{array}
$$

$$P_2(x) = 1 + \frac{2}{3}(x-(-1)) + \frac{-13}{30}(x-(-1))(x-2)$$

Agregar otro punto es agregar un piso mas a la piramide:

$$
\begin{array}{r|llll}
-1 & 1 & & & \\
 & & \frac{3-1}{2-(-1)} = \frac{2}{3} & & \\
2 & 3 & & \frac{\frac{-3}{2}-\frac{2}{3}}{4-(-1)} = \frac{-13}{30} & \\
 & & \frac{0-3}{4-2} = \frac{-3}{2} & & \mathbf{\frac{\frac{\frac{b-0}{a-4}-\frac{-3}{2}}{a-2}-\frac{-13}{30}}{a-(-1)}} \\
4 & 0 & & \mathbf{\frac{\frac{b-0}{a-4}-\frac{-3}{2}}{a-2}} & \\
 & & \mathbf{\frac{b-0}{a-4}} & & \\
\mathbf{a} & \mathbf{b} & & &
\end{array}
$$

3. Considere los puntos $(0,0); (1,0); (2,0); (3,0); (4,24)$. Encuentre el polinomio interpolador usando Lagrange y Diferencias Dividas.¿Qué método es más directo en este caso? ¿Por qué?

Respuesta :
Diferencias Divididas:

$$
\begin{array}{r|lllll}
0 & 0 & & & & \\
 & & 0 & & & \\
1 & 0 & & 0 & & \\
 & & 0 & & 0 & \\
2 & 0 & & 0 & & 1 \\
 & & 0 & & 4 & \\
3 & 0 & & 12 & & \\
 & & 24 & & & \\
4 & 24 & & & &
\end{array}
$$

obteniendo el polinomio $x(x-1)(x-2)(x-3)$.
Lagrange:

$$0 \cdot L_0 + 0 \cdot L_1 + 0 \cdot L_2 + 0 \cdot L_3 + 24 \cdot \frac{(x-3)(x-2)(x-1)x}{4!} \quad = \quad x(x-1)(x-2)(x-3)$$

Lagrange resulta más directo ya que la mayor parte de las imágenes son 0, por lo que solo hay que calcular uno de los polinomios de Lagrange.