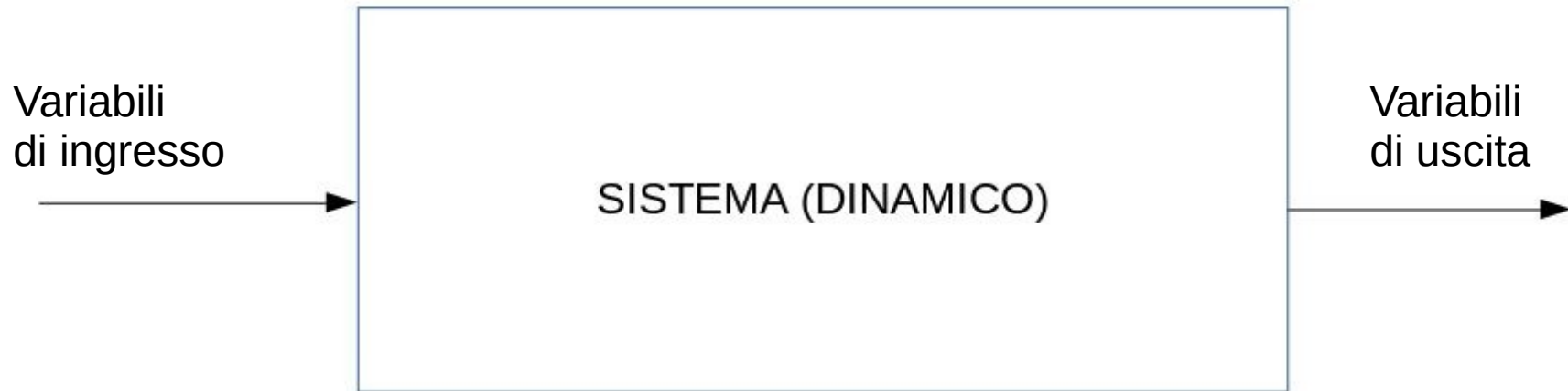


## Breve panoramica: Cosa è un sistema e le variabili di stato



Sistema: insieme, isolato artificialmente dal contesto, costituito da più parti tra loro interagenti di cui si vuole indagare il comportamento.

Variabili di ingresso: azioni compiute sul sistema da agenti esterni che ne influenzano il comportamento

Variabili di uscita: grandezze del sistema in esame che per qualche ragione sono di interesse

**Rapporto di causa effetto tra le variabili**

# Breve panoramica: dal sistema al modello

- Sistema statico/dinamico
  - Modello matematico dei sistemi statici
    - **equazioni algebriche** (sistemi privi di memoria)
      - l'uscita del sistema dipende solo dal valore assunto dall'ingresso in quell'istante
      - Es: relazione tra tensione e corrente in una resistenza
  - Modello dei sistemi dinamici (a parametri concentrati)
    - **Equazioni differenziali** (sistemi con memoria)
      - l'uscita del sistema non dipende solo dal valore assunto dall'ingresso in quell'istante, ma anche da quelli passati
      - Es: relazione tra tensione e corrente in un condensatore

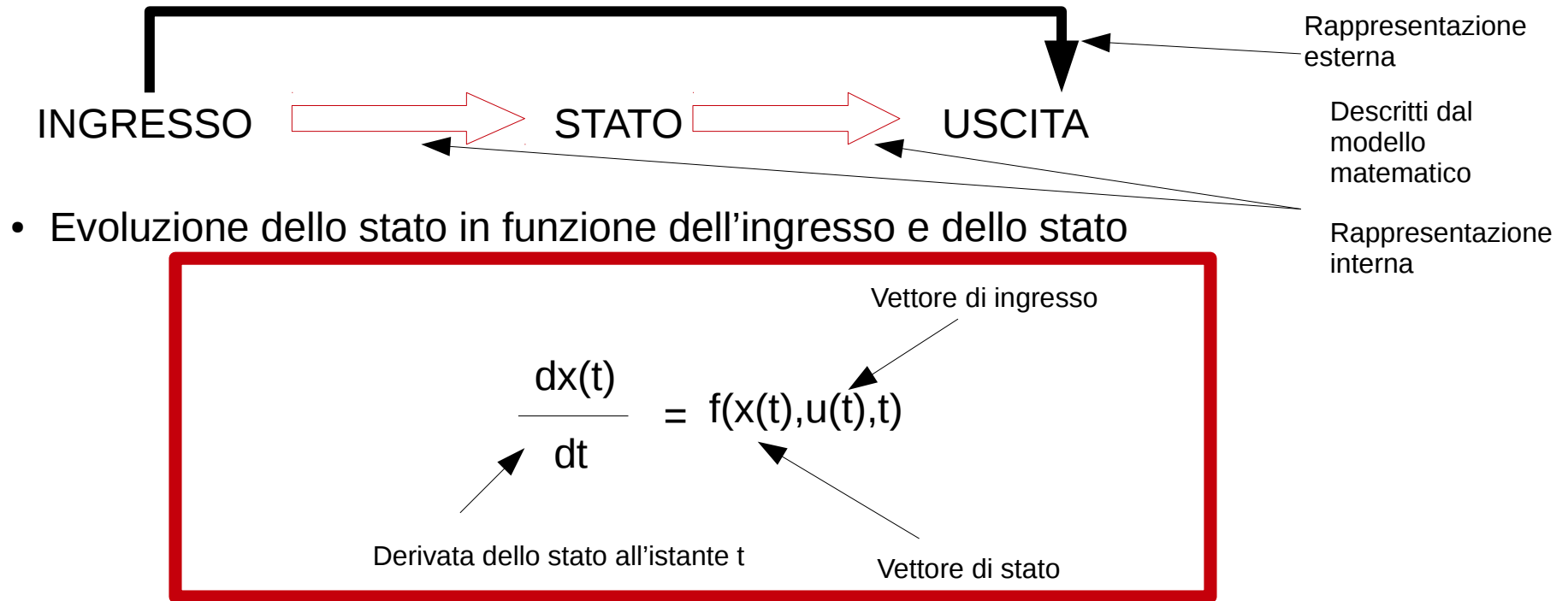


**Che cosa sono le variabili di stato :** esse sono variabili che descrivono la “situazione interna” del sistema necessarie per determinare l'uscita. I valori assunti dalle variabili di stato in un generico istante di tempo contengono, nel loro complesso, tutta l'informazione sulla storia passata del sistema necessaria per valutare l'andamento futuro sia delle stesse variabili di stato che di quelle di uscita, una volta noto l'andamento degli ingressi per tempi successivi all'istante considerato.

# Breve panoramica: Scelta delle variabili di stato

- Nei sistemi fisici la situazione interna viene determinata dai fenomeni di accumulo di energia, di quantità di moto o di massa e, pertanto, può risultare opportuno scegliere come variabili di stato quelle da cui tali accumuli dipendono
  - Nei modelli dei circuiti elettrici si possono scegliere come variabili di stato le tensioni ai morsetti dei condensatori, perché da questa dipende l'energia elettrostatica  $W = (1/2)CV^2$  da essi accumulata, e le correnti negli induttori, perché da queste dipende l'energia magnetica  $W = (1/2)LI^2$  accumulata al loro interno
  - Nei modelli dei sistemi meccanici è comodo scegliere come variabili di stato la posizione e la velocità dei vari elementi, in quanto risultano legati agli accumuli di energia potenziale, di energia cinetica o di quantità di moto
  - Nei sistemi termici, le temperature sono particolarmente adatte a essere assunte come variabili di stato, in quanto da esse dipendono le energie termiche immagazzinate.
- le leggi fondamentali della fisica quali l'elettromagnetismo, la meccanica, la termodinamica e idraulica, esprimono delle relazioni tra variabili di ingresso  $u(t)$ , variabili di stato  $x(t)$  e le loro derivate che opportunamente elaborate, conducono alle equazioni di stato
- le variabili e le equazioni di stato di un sistema dinamico NON sono definite in modo unico e neppure il numero delle variabili di stato, ovvero l'ordine del sistema, è fissato a priori e ciò è legato alla maggiore o minore accuratezza con cui si descrivono i fenomeni in gioco;
- il modello matematico di un "oggetto fisico" deve essere individuato evitando le ridondanze e stabilendo un adeguato compromesso tra la semplicità e la "precisione" nella descrizione della realtà in riferimento allo specifico problema in esame.

# Breve panoramica: dal sistema al modello



- Dipendenza dell'uscita dall'ingresso e dallo stato

$y(t) = g(x(t), u(t), t)$

↑ Vettore di uscita

Dato  $x(t_0)$  (valore dello stato iniziale) e dato  $u(t)$ ,  $t \geq t_0$ , l'equazione di stato definisce l'andamento di  $x(t)$  e  $y(t)$

## Breve panoramica: Vantaggi della rappresentazione dei sistemi con le variabili di stato e spazio di stato

- ODE non necessariamente lineari

Le equazioni differenziali ordinarie (ODE) non devono essere necessariamente lineari o stazionarie. Chiaramente lo studio di sistemi tempo variabili e non lineari risulta difficoltosa, pertanto verrà posta l'attenzione sui sistemi lineari tempo invarianti (LTI) per i quali i domini del tempo, della frequenza e dello spazio degli stati risultano legati l'uno all'altro. L'esempio del pendolo inverso, chiaramente fenomeno non lineare, lascia tuttavia intendere la possibilità di essere studiato attorno ai suoi punti di equilibrio secondo questa trattazione sopra richiamata.

- Studio sistemi MIMO

L'analisi della stabilità dei sistemi attraverso le tecniche della risposta in frequenza o della posizione delle radici spesso è limitata ai sistemi SISO. Diversamente l'analisi attraverso lo Spazio di Stato trova nei sistemi MIMO l'ambito di maggior utilità

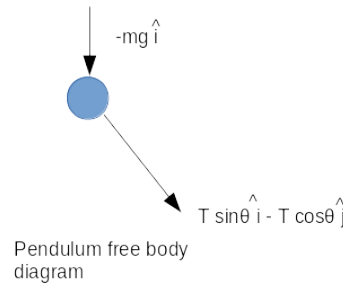
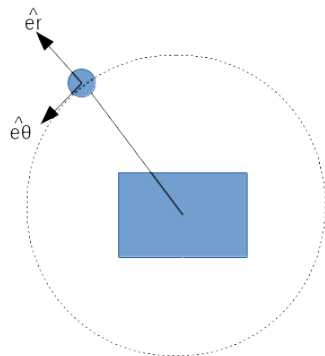
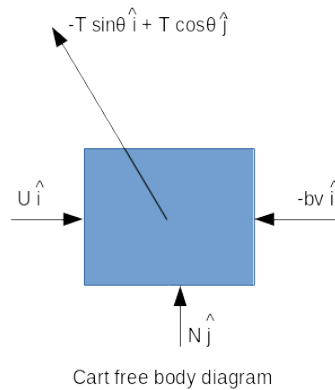
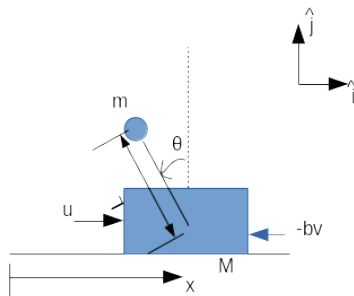
- Studio della “traiettoria” del vettore nello spazio di stato

In fisica il piano posizione-velocità di una particella è chiamato piano fase e la traiettoria del moto può essere disegnata come una curva su questo piano. Lo stato è una generalizzazione di questa idea per includere più di due dimensioni. Mentre non è possibile disegnare oltre le tre dimensioni i concetti di distanza, ortogonalità, linee parallele ed altri concetti della geometria possono essere utili per visualizzare le soluzioni di un ODE come la traiettoria nello spazio di stato.

- Studio dell'energia interna del sistema

Lo stato di un sistema dinamico spesso descrive direttamente la distribuzione dell'energia interna nel sistema. L'energia interna può sempre essere calcolata dalle variabili di stato. Al contrario la funzione di trasferimento di un sistema lega solo ingressi e uscite e non mostra il comportamento interno.

# Vediamo un esempio di sistema dinamico : il pendolo inverso



L'equazione del carrellino

$$1) \hat{i} : u - T \sin \theta - b \dot{x} = M \ddot{x}$$

L'equazione del pendolo

$$\hat{i} : T \sin \theta = m a_{px}$$

$$\hat{j} : -T \cos \theta - mg = m a_{py}$$

Accelerazione pendolo

$$a_p = \ddot{x} \hat{i} - L \dot{\theta}^2 (-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) + \ddot{L} \theta (-\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j})$$

$$\tilde{a}_p = \tilde{a}_c + \tilde{a}_{pr} = \ddot{x} \hat{i} + (L \ddot{\theta} e_{\theta} - L \dot{\theta}^2 e_r)$$

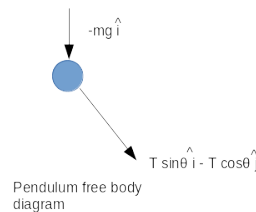
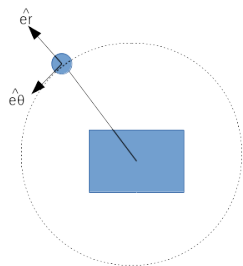
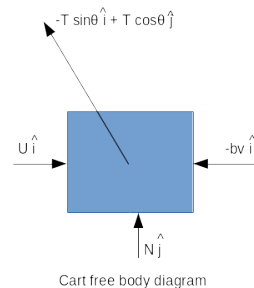
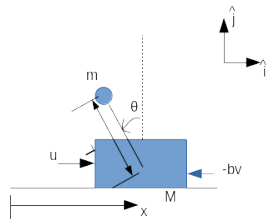
Riscrivendo le equazioni del corpo libero rispetto ai versori si ottiene

$$2) \hat{i} : T \sin \theta = m \ddot{x} - mL \ddot{\theta} \cos \theta + mL \dot{\theta}^2 \sin \theta$$

$$3) \hat{j} : -T \cos \theta - mg = -mL \ddot{\theta} \sin \theta - mL \dot{\theta}^2 \cos \theta$$

# Breve panoramica

## vediamo un esempio di sistema dinamico : il pendolo inverso



E' possibile giungere alla formula dell'equazione differenziale del vettore di stato vista in precedenza

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u$$

In particolare intorno ai punti di equilibrio del pendolo la matrice di transizione di stato risulta a coefficienti costanti

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b/M & mg/M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{b}{ML} & \frac{(m+M)g}{ML} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{ML} \end{bmatrix} \quad (\theta = \pi, 0)$$

Utilizzando le equazioni 1-2-3 per eliminare T ed esplicitare a sinistra le derivate seconde otteniamo:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{-m^2 L^2 g \cos(\theta) \sin(\theta) + mL^2 (mL\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - b\dot{x}) + mL^2 u}{mL^2 (M + m (1 - \cos(\theta))^2)}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(m + M) mgL \sin(\theta) - mL \cos(\theta) (mL\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - b\dot{x}) + mL \cos(\theta) u}{mL^2 (M + m (1 - \cos(\theta))^2)}$$

Scrivendo le derivate temporali come

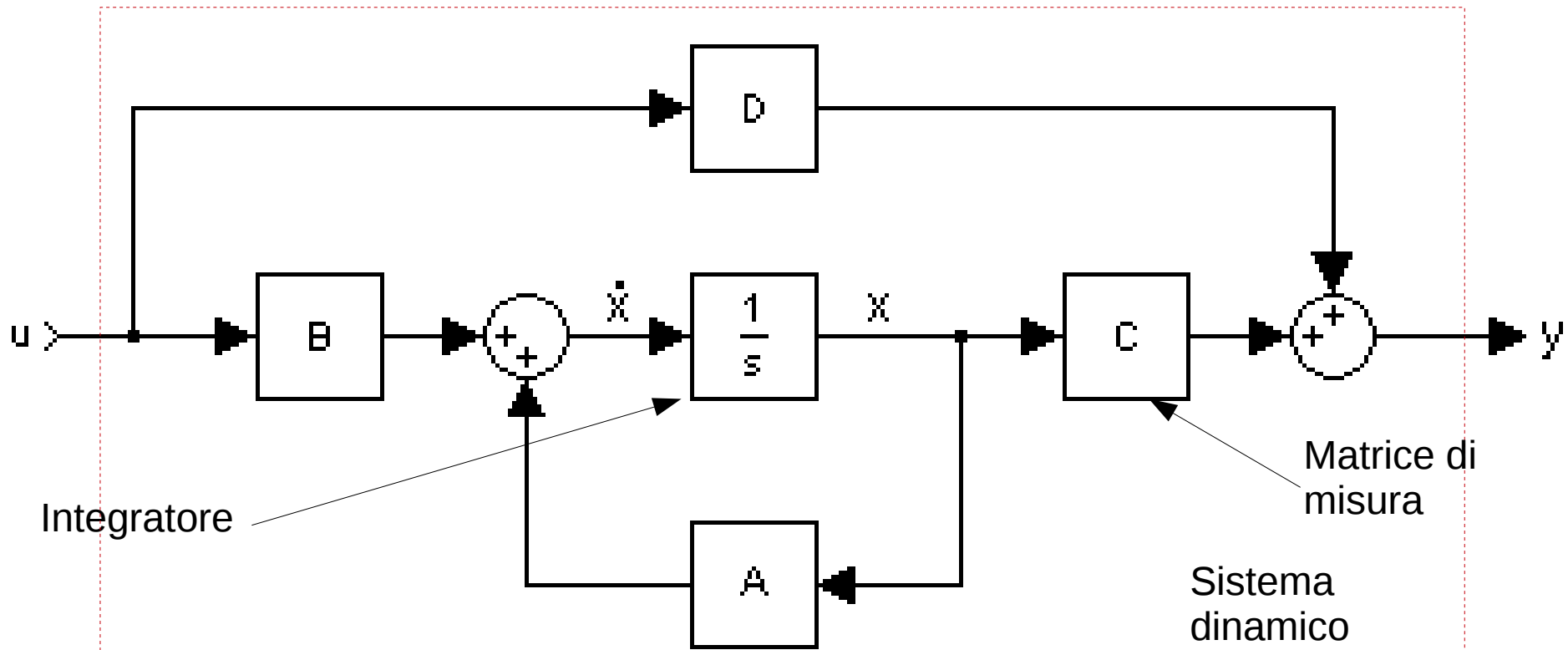
$$\dot{x} = v, \ddot{x} = \dot{v}, \dot{\theta} = \omega, \ddot{\theta} = \dot{\omega}$$

Ed il vettore di stato come

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ v \\ \theta \\ \omega \end{bmatrix}$$

# Breve panoramica

## Rappresentazione del Plant per un sistema LTI



Un sistema LTI viene descritto nello spazio degli stati nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t)\end{aligned}$$

Con

$x(t) = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  = vettore di stato di grado  $n$ ,  
 $u(t)$  = vettore ingressi di grado  $m$   
 $y(t)$  = vettore delle uscite di grado  $p$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$   
Matrici di dimensioni opportune



# Trasformazioni di coordinate nei sistemi LTI e proprietà

- L'unica condizione è che la matrice  $T$  non sia singolare
- Tutte le infinite rappresentazioni che si ottengono al variare della matrice  $T$  sono equivalenti tra di loro, nel senso che descrivono tutte allo stesso modo la dinamica del sistema fisico in oggetto.

- Valgono le seguenti proprietà:

- Gli autovalori della matrice  $A$  e delle sue trasformate coincidono con i poli della funzione di trasferimento  $G(s)$
- La matrice di trasferimento  $G(s)$  è legata al modello del sistema nello spazio degli stati dalla relazione:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

- Se  $D=0$ , il sistema è strettamente proprio ossia il grado del  $n$  del polinomio denominatore di  $G(s)$  è maggiore del grado del polinomio numeratore.
- L'evoluzione temporale del vettore di uscita  $y(t)$  si ottiene utilizzando la relazione:

$$y(t) = C x(t) + D u(t)$$

- Il sistema è controllabile (ossia agendo opportunamente sugli ingressi è possibile assegnare un qualunque valore alle variabili di stato del sistema) se la seguente matrice di controllabilità è a rango pieno:

$$\mathcal{R}^+ = [ B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B ]$$

- Se il sistema è controllabile, mediante una retroazione statica dello stato

$$u(t) = Kx(t) + v(t)$$

( $v(t)$  è un nuovo ingresso ausiliario) è possibile posizionare a piacere gli autovalori (ossia i poli) del sistema retro-azionato.

# Le variabili di stato nei sistemi a feedback

Segue:

$$\diamond \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{v}(t) \\ \mathbf{y}(t) = (\mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{v}(t) \end{cases}$$

- Il segnale di controllo  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$  spesso non è direttamente utilizzabile perché il vettore di stato  $\mathbf{x}(t)$  non è completamente noto.
- Dato un sistema lineare, invariante ad un solo ingresso ( $m=1$ ):

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

e dato un polinomio monico  $p(\lambda)$  scelto a piacere:

$$p(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + d_1\lambda + d_0,$$

se la coppia  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  è controllabile, allora la matrice dei guadagni  $\mathbf{K}$  si ottiene imponendo l'uguaglianza tra il polinomio caratteristico  $\Delta_{\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}}(\lambda)$  del sistema retroazionato ed il polinomio  $p(\lambda)$  si calcola anche utilizzando *la formula di Ackerman*

$$\boxed{\mathbf{K} = -\mathbf{q}^T p(\mathbf{A})}$$

# Le variabili di stato nei sistemi a feedback

Dove  $q^T$  è l'ultima riga dell'inversa della matrice di controllabilità

$$q^T = [0 \ \dots \ 0 \ 1] (\mathcal{R}^+)^{-1}$$

Con  $p(A)$  si indica la matrice che si ottiene dal polinomio  $p(\lambda)$  sostituendo la matrice di transizione di stato  $A$  al posto del parametro  $\lambda$

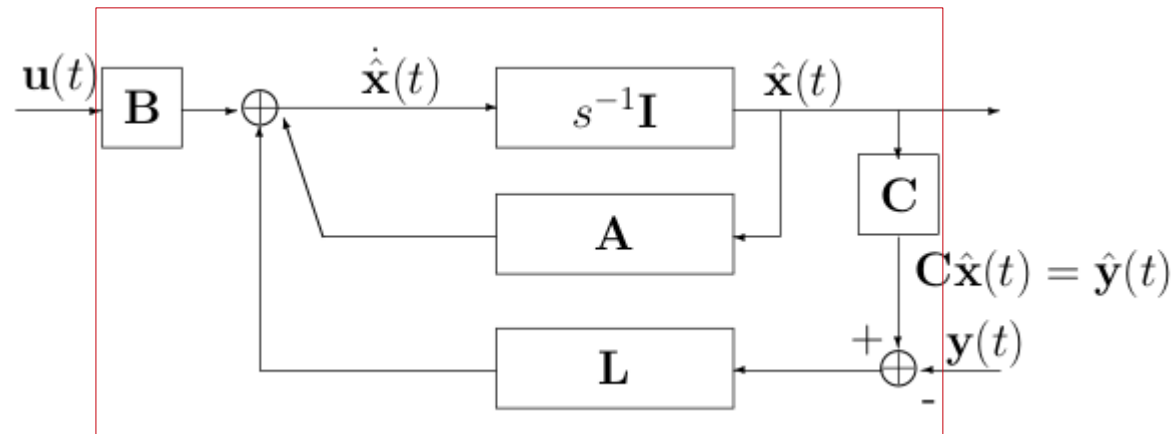
- Il sistema è completamente *osservabile* (ossia è possibile stimare esattamente il vettore di stato  $x(t)$  dalla conoscenza delle funzioni di ingresso  $u(t)$  e di  $y(t)$  del sistema) se la seguente matrice di osservabilità è a rango pieno:

$$\mathcal{O}^- = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

# Le variabili di stato nei sistemi a feedback

- Se un sistema è completamente osservabile, per esso è possibile costruire un osservatore asintotico dello stato (in catena chiusa)

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{LC})\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{L}\mathbf{y}(t) + \mathbf{B}u(t)$$



- Se la coppia  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  è osservabile, il vettore dei guadagni  $\mathbf{L}$  di un osservatore asintotico dello stato che posiziona ad arbitrio gli autovalori della matrice  $\mathbf{A} + \mathbf{LC}$  si calcola utilizzando la formula di *Ackerman*:

$$\mathbf{L} = -p(\mathbf{A}) \underbrace{(\mathcal{O}^-)^{-1}}_{\mathbf{q}} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -p(\mathbf{A})\mathbf{q}$$

# Studiamo il pendolo inverso

- Utilizziamo Matlab per studiare, sulla base delle proprietà elencate in precedenza, il pendolo inverso. Attorno al punto di equilibrio instabile è possibile linearizzare le equazioni del moto per ottenere un sistema LTI di cui studiamo i poli della matrice di transizione di stato, controllabilità e osservabilità del sistema attraverso anello di retroazione.
- Se stampiamo i poli della matrice di transizione di stato otteniamo:

state variables describe the same physical system. The m-

```
s = 1; % pendulum up (s=1)
%% Base system Matrices
F = [0 1 0 0;
     0 -d/M -m*g/M 0;
     0 0 0 1;
     0 -s*d/(M*L) -s*(m+M)*g/(M*L) 0];

G = [0; 1/M; 0; s*1/(M*L)];
H = [1 1 1 1];
J = 0;
sys = ss(F,G,H,J);
[modal_sys,T] = canon(sys, 'modal')

modal_sys =

A =
      x1      x2      x3      x4
x1      0      0      0      0
x2      0  2.434      0      0
x3      0      0 -2.467      0
x4      0      0      0 -0.1665
```

Osserviamo che nella forma normale gli autovalori della matrice di stato A sono sulla diagonale. In particolare uno risulta nel semipiano complesso destro, pertanto il sistema è instabile.

# Studiamo il pendolo inverso

- Possiamo controllare il pendolo con un controllo a feedback? Sì perché la matrice di controllabilità è a rango pieno

```
>> ctrb(A,B)
```

```
ans =
```

```
      0      0.2000     -0.0400      0.2080  
0.2000     -0.0400      0.2080     -0.0816  
      0      0.1000     -0.0200      0.6040  
0.1000     -0.0200      0.6040     -0.1408
```

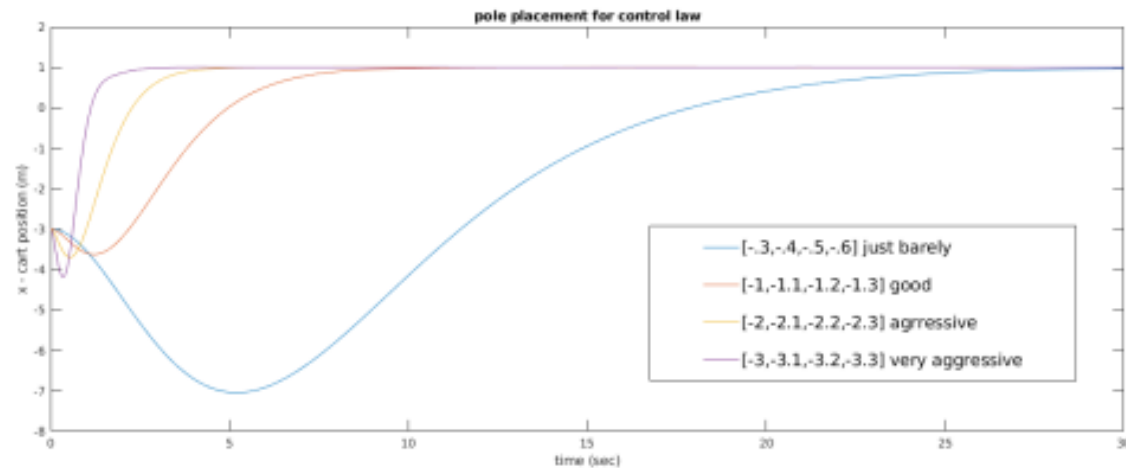
```
>> rank(ctrb(A,B))
```

```
ans =
```

```
4
```

# Studiamo il controllo del pendolo inverso

- Con Matlab, attraverso il comando “place” è possibile ottenere il vettore K tale per cui il sistema posizioni i poli del sistema retro-azionato dove il progettista vuole ossia nel semipiano complesso sinistro. Se poniamo il pendolo fuori dalla sua posizione di equilibrio come condizione al contorno iniziale il pendolo recupera la sua posizione



# Studiamo il controllo del pendolo inverso. Il regolatore lineare quadratico

- Osserviamo che spostare i poli verso sinistra rende il sistema più “reattivo” ma il prezzo da pagare è una maggiore spesa energetica del pendolo.
- Il compromesso tra reattività e costo energetico può essere analiticamente rappresentato attraverso il funzionale

$$J(t) = \int_0^t \mathbf{x}(\tau)^* \mathbf{Q} \mathbf{x}(\tau) + \mathbf{u}(\tau)^* \mathbf{R} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

$\mathbf{Q}$  è la matrice simmetrica semidefinita positiva che pesa il costo della deviazione dello stato da zero (indica quanto il nostro modello si discosta dalla realtà).

$\mathbf{R}$  è la matrice simmetrica definita positiva che pesa il costo dell'attuazione nel processo di misura del sistema.

Cerchiamo il valore di  $\mathbf{K}$  per cui  $J$  è minimo



# Studiamo il controllo del pendolo inverso. Il regolatore lineare quadratico

- Poichè la funzione costo è quadratica c'è una soluzione ottima per ottenere  $K$  data da:

$$K_r = R^{-1}G^*X$$

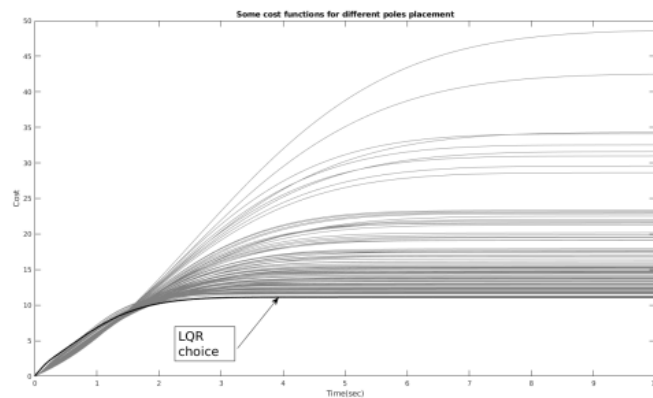
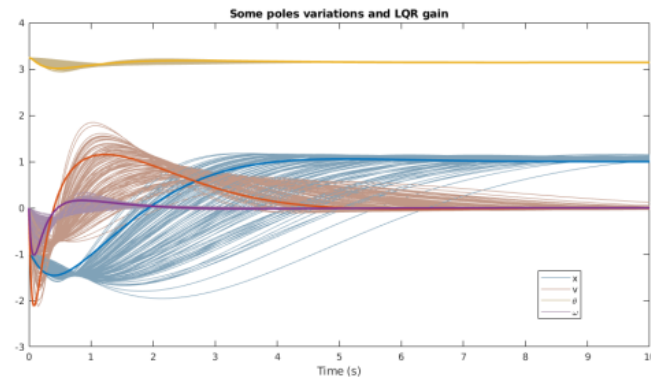
where  $X$  is the solution to an algebraic Riccati equation:

$$F^*X + XF - XGR^{-1}G^*X + Q = 0$$

- Con Matlab è possibile ricavare  $K$  attraverso il comando `lqr`

```
%% Compare with many examples of Pole Placement
K = lqr(F,G,Q,R);
u=@(x)-K*(x - wr);          % control law
[t,x] = ode45(@(t,x)pendcart(x,m,M,L,g,d,u(x)),tspan,x0);
xLQR = x;
for k=1:length(t)
    JLQR(k) = (x(k,:)-wr')*Q*(x(k,:)'-wr) + u(x(k,:))'^2*R;
end
```

# Studiamo il controllo del pendolo inverso. Il regolatore lineare quadratico



- Con Matlab stampiamo due grafici tra qui la funzione costo in modo da poter osservare come la soluzione ottima risulti la minima per  $t$  sufficientemente grande.

# L'osservabilità delle variabili di stato del pendolo inverso

Non è realistico procedere col processo di misura per tutte le variabili di stato spesso si selezionano alcune di queste per ricostruirne lo stato. Il rango della matrice di osservabilità determina se una o più variabili misurate sono sufficienti per ricostruire lo stato del sistema. Riportiamo il codice per la misura della posizione del pendolo inverso e del suo angolo. Nel primo è possibile ricostruire lo stato del sistema, nel secondo no.

```
C = [1 0 0 0];  
  
obsv(A,C)  
det(obsv(A,C))  
  
%% only observable if x measured... because x can't be  
%% reconstructed  
C = [0 0 1 0];
```

```
obsv(A,C)  
det(obsv(A,C))
```

The terminal result:

```
ans =
```

1.0000	0	0	0
0	1.0000	0	0
0	-0.2000	2.0000	0
0	0.0400	-0.4000	2.0000

```
ans =
```

4

0	0	1.0000	0
0	0	0	1.0000
0	0.1000	-6.0000	0
0	-0.0200	0.2000	-6.0000

```
ans =
```

0

# Stimatore lineare quadratico

- La scelta del guadagno  $L$  dell'osservatore comporta la necessità di giungere ad un compromesso tra il tempo di reazione dell'osservatore ed il rumore di banda lasciato passare dal filtro:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u + \mathbf{w}_d$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{J}u + \mathbf{w}_n$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{G}u + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{J}u$$

- Come per il controllo lineare quadratico questa scelta di compromesso che e anche ottima si traduce nel ricavare  $L$  come:

$$\mathbf{L} = \mathbf{Y}\mathbf{H}^*\mathbf{R}$$

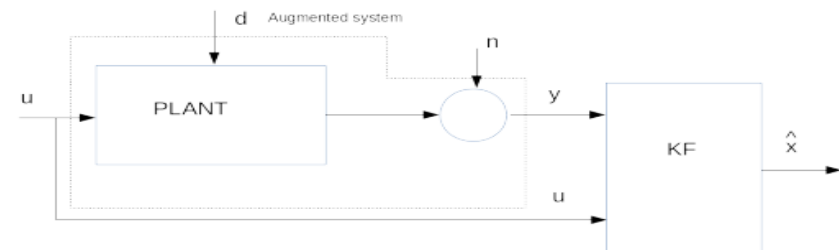
where  $\mathbf{Y}$  is the solution to another algebraic Riccati equation:

$$\mathbf{Y}\mathbf{F}^* + \mathbf{F}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{H}^*\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{Y} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}$$

- Nel rendere minima la funzione costo:

$$J = \lim_{t \rightarrow +\infty} E[(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t))^* (\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t))]$$

- Vedremo un esempio di simulazione...



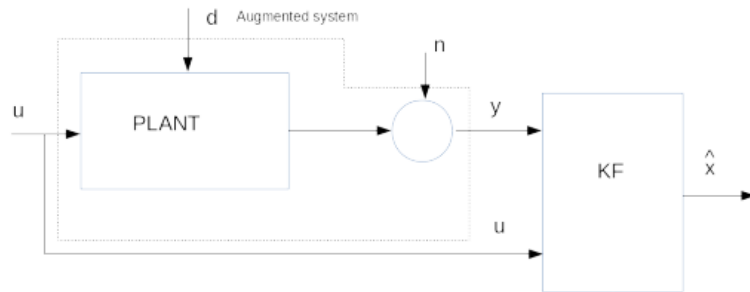
$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{d} \\ \dot{\mathbf{d}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u + \mathbf{Q}\mathbf{d} + \mathbf{0}\mathbf{n} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{0}u + \mathbf{0}\mathbf{d} + \mathbf{R}\mathbf{n} \end{aligned}$$

$$\mathbf{H} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\mathbf{J} = [0 \ 0 \ \mathbf{R}] \begin{bmatrix} u \\ \mathbf{d} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}$$

# Il filtro di Kalman come stimatore ottimo



$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Fx + Gu + Qd + 0n \\ y &= Hx + 0u + 0d + Rn \end{aligned}$$

$$H = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$J = [0 \ 0 \ R]$$

$$\begin{bmatrix} u \\ d \\ n \end{bmatrix}$$

$$F_k = F - K_f H$$

$$G_k = [G K_f]$$

$$H_k = I$$

$$J_k = 0$$

$$u_{aug} = \begin{bmatrix} u & Q^2 * u_{dist} & u_{noise} \end{bmatrix}$$

- Simuliamo il rumore e la distorsione del plant. Confrontiamo la posizione del pendolo inverso attraverso la posizione reale, quella stimata e quella misurata
- Otteniamo attraverso un cambio di variabili di stato un sistema aumentato utile a ricondurre il problema all'equazione di stato già studiata; usiamo il comando `lqe` per ricavare `L`

```
%% Build Kalman filter
[L,P,E] = lqe(F,Q,H,Q,R); % design Kalman filter
Kf = (lqr(F',H',Q,R))'; % alternatively, possible to design using "LQR" code
```

```
sysKF = ss(F-L*H,[G L],eye(4),0*[G L]); % Kalman filter estimator
```

```
%% Estimate linearized system in "down" position (Gantry crane)
dt = .01;
t = dt:dt:50;
```

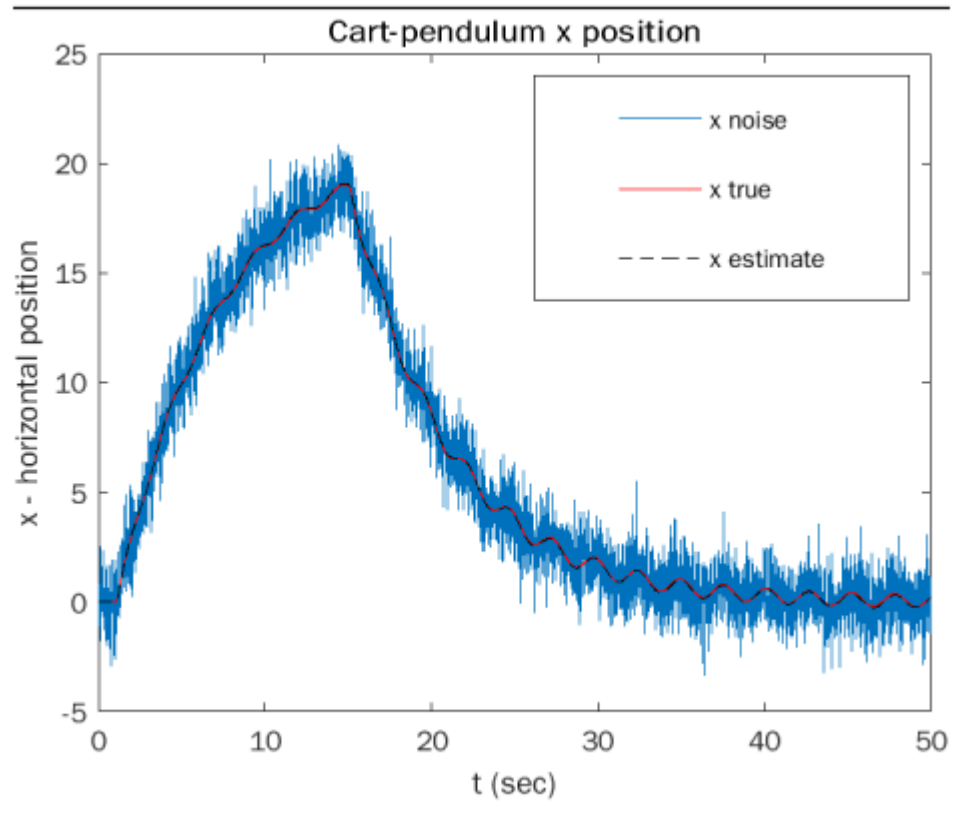
```
uDIST = randn(4,size(t,2));
uNOISE = randn(size(t));
u = 0*t;
u(100:120) = 100; % impulse
u(1500:1520) = -100; % impulse
```

```
uAUG = [u; Q*Q*uDIST; uNOISE];
```

```
sysH = ss(F,GA,H,[0 0 0 0 0 R]); % build big state space system... with single output
```

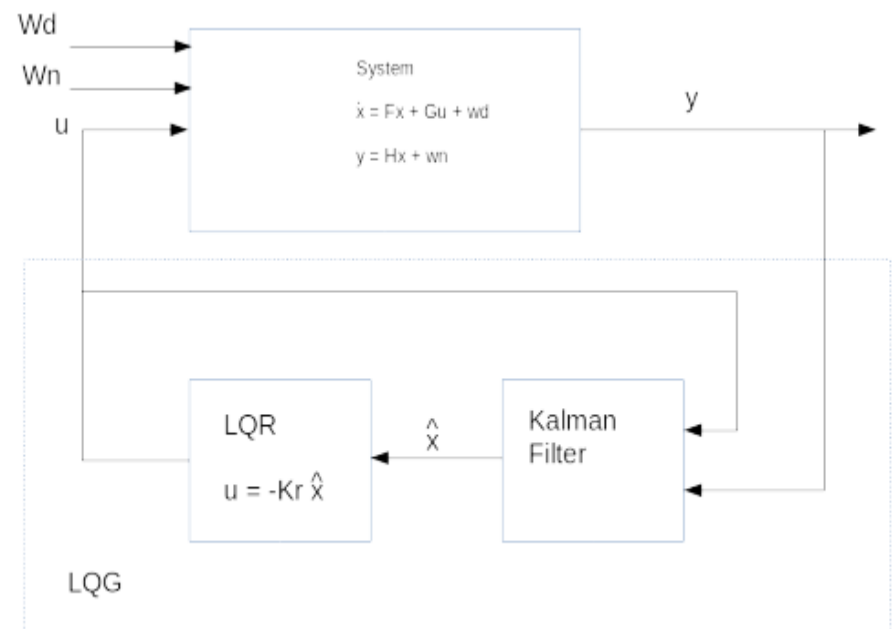
# Il filtro di Kalman come stimatore ottimo

```
[y,t] = lsim(sysH,uAUG,t); % Here y is the noise measured signal  
  
[xtrue,t] = lsim(sysFullOutput,uAUG,t); % The x cart-pendulum position of the plant  
  
[x,t] = lsim(sysKF,[u; y'],t); % The estimate x of cart-pendulum
```

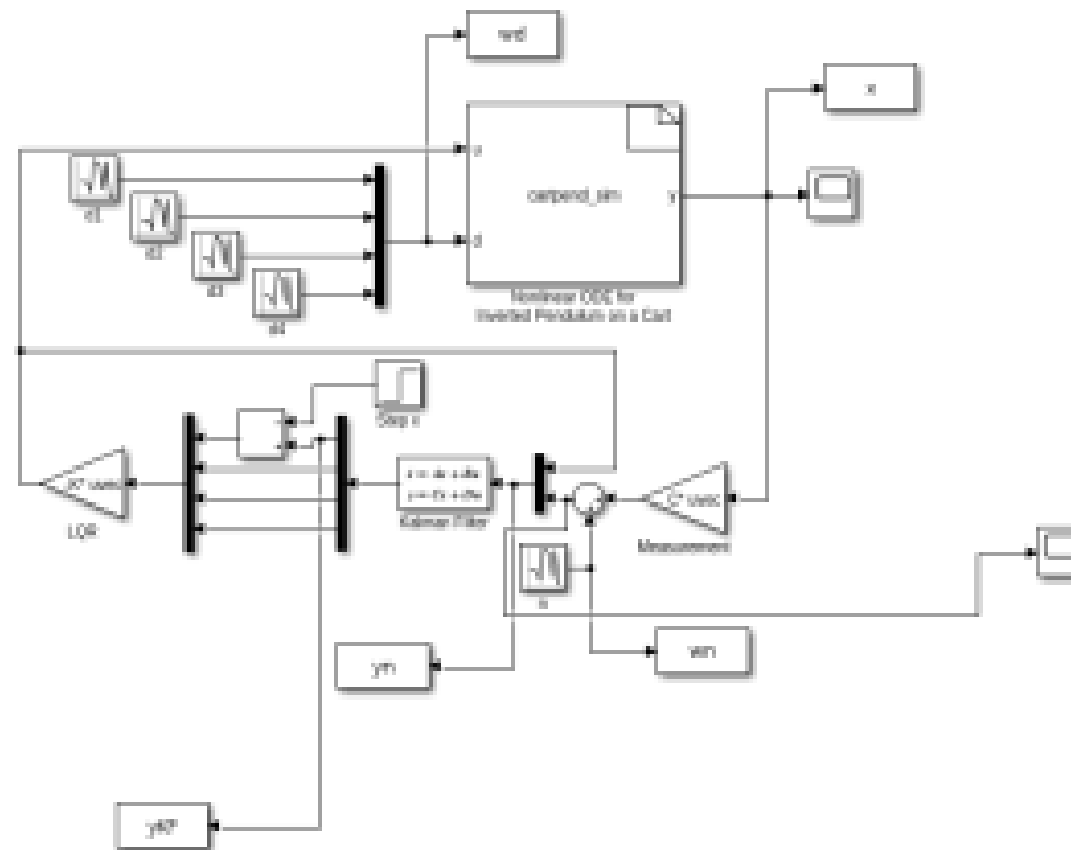


# Una simulazione del sistema di controllo del pendolo inverso mediante il regolatore quadratico gaussiano

- I sistemi di predizione dello stato (filtro di Kalman o stimatore ottimo) e regolatore lineare quadratico possono essere combinati assieme per realizzare il controllo del sistema instabile.
- Realizziamo una simulazione con Simulink dove a fronte di disturbi del sistema e di misura il controllo deve rispondere ad un segnale di riferimento seguendolo.



# Una simulazione del sistema di controllo del pendolo inverso mediante il regolatore quadratico gaussiano





# Una simulazione del sistema di controllo del pendolo inverso mediante il regolatore quadratico gaussiano.

- Impostati i dati del sistema, chiarito come da schema venga introdotto il gradino di riferimento da seguire, con i comandi lqr ed lqe è possibile ricavare i coefficienti (L/Kf e K) dei due sistemi e connetterli in serie. Questa possibilità nella teoria dei controlli è chiamata **principio di separazione**.
- Osserviamo come attraverso le variabili di stato, il dimensionamento del controllo di un sistema mediante feedback si riduce ad un set di coefficienti.

```
K = lqr(F,G,Q,R); % design controller u = -K*x

%% Augmented system
% Augment system with disturbances and noise
Vdmag = .04;
Vd = Vdmag*eye(4); % disturbance covariance
Vn = .0002; % noise covariance

% GF sysC sysFulloutput not used in Simulink
GF = [G Vd 0*G]; % augment inputs to include disturbance and noise
sysH = ss(F,GF,H,[0 0 0 0 0 Vn]); % build big state space system... with single output
% system with full state output, disturbance, no noise
sysFullOutput = ss(F,GF,eye(4),zeros(4,size(GF,2)));

% Build Kalman filter 2 alternatives
[L,P,E] = lqe(F,eye(4),H,Vd,Vn); % design Kalman filter
Kf = (lqr(F',H',Vd,Vn))'; % alternatively, possible to design using "LQR" code

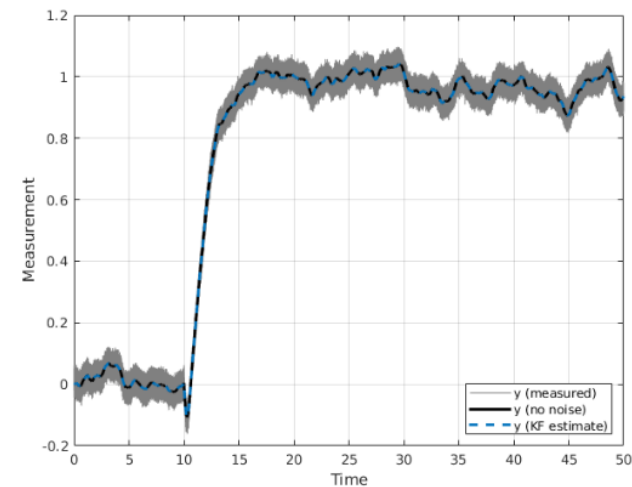
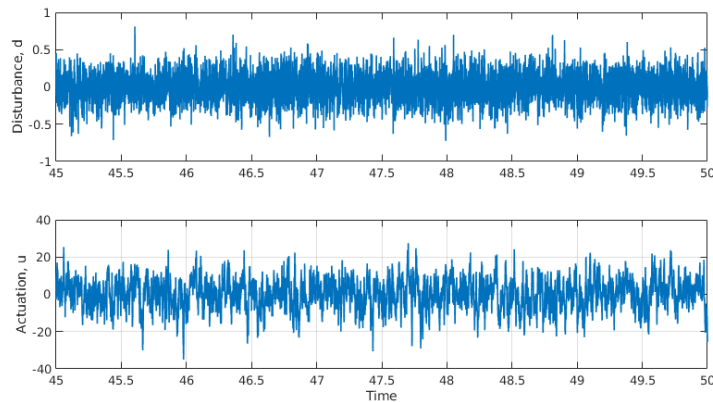
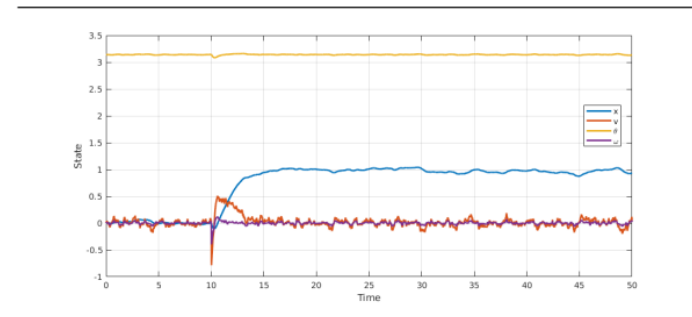
% The system matrices for LQE. Used in Simulink
sysKF = ss(F-Kf*H,[G Kf],eye(4),0*[G Kf]); % Kalman filter estimator
```

$$\epsilon = x - \hat{x}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_r & BK_r \\ 0 & A - K_f C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -K_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_d \\ w_n \end{bmatrix}.$$

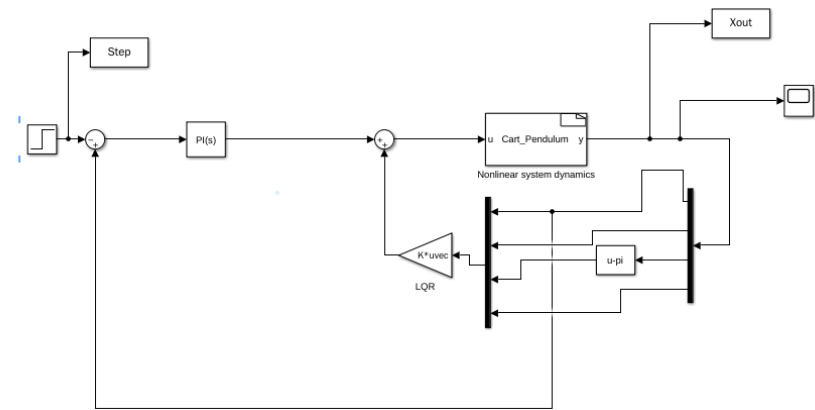
# Una simulazione del sistema di controllo del pendolo inverso mediante il regolatore quadratico gaussiano

- Nonostante il rumore introdotto il filtro predittivo traccia la posizione del pendolo inverso ed è possibile, una volta ricostruito lo stato del sistema controllare il plant sotto un riferimento a forma di gradino.



# Il controllo integrale

- Anche nei sistemi a retroazione con controllo integrale “classico” il metodo delle variabili di stato consiste nel ricondurre l'equazione di stato alla sua forma normale mediante opportuna scelta delle variabili.



$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}u + \mathbf{G}_1w$$

$$\dot{x}_I = \mathbf{H}\mathbf{x} - r(=e), x_I = \int^t e d\tau$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{H} \\ 0 & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{G}_1 \end{bmatrix} w$$

# Il controllo integrale

- Riconduciamo la soluzione la controllo lineare quadratico

$$u = - \begin{bmatrix} K_I & K_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix}$$

- Riportiamo la parte di codice dove riscriviamo le matrici componenti l'equazione di stato nella sua forma normale.

```
% Set cart-position and pendulum angle
H = [1 0 0 0]

J = zeros(size(H,1),size(G,2));

%% Integral control augmented system
Fa = [0 H;0 F(1,:);0 F(2,:);0 F(3,:);0 F(4,:)];
Ga = [0; G];
R = 0.0001;
K = lqr(Fa,Ga,eye(5),R);

printing K via command line

>> K

K =

1.0e+03 *
-0.1000 -0.2696 -0.3145 2.0341 0.9096
```

The K values are inserted in the Simulink block.

Here the graphs of simulation:

