

# **Théorie des coques élastiques**

Sébastien Brisard

2023-09-06

# Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Bienvenue</b>   | <b>4</b>  |
| <b>2</b> | <b>Introduction</b>  | <b>5</b>  |
| <b>3</b> | <b>Outils mathématiques</b>  | <b>6</b>  |
| <b>4</b> | <b>Transformations d'une coque</b>                                     | <b>7</b>  |
| 4.1      | Introduction . . . . .   | 7         |
| 4.2      | □ Outils mathématiques : Plans de l'espace . . . . .                   | 7         |
| 4.3      | □ Outils mathématiques : surfaces paramétrées . . . . .                | 9         |
| 4.3.1    | Définition . . . . .   | 9         |
| 4.3.2    | Courbes tracées sur une surface . . . . .                              | 9         |
| 4.3.3    | Plan tangent . . . . .   | 10        |
| 4.3.4    | Vecteur normal . . . . .   | 12        |
| 4.3.5    | Extension aux surfaces des notions introduites au § 4.2 . . . . .      | 12        |
| 4.3.6    | Représentation cartésienne locale d'une surface . . . . .              | 13        |
| 4.4      | Transformations d'une surface . . . . .                                | 14        |
| 4.5      | Transformations d'une coque ? . . . . .                                | 14        |
| <b>5</b> | <b>Courbure des surfaces</b>   | <b>15</b> |
| 5.1      | Plans de l'espace . . . . .  | 15        |
| 5.2      | Surfaces paramétrées . . . . .   | 15        |
| 5.3      | Courbure des surfaces . . . . .  | 15        |
| 5.3.1    | Tenseur de courbure . . . . .  | 15        |
| 5.3.2    | Courbures principales et classification des points réguliers . . . . . | 17        |
| 5.3.3    | Courbure moyenne, courbure gaussienne . . . . .                        | 18        |
| <b>6</b> | <b>Dérivation et intégration sur une surface</b>                       | <b>19</b> |
| 6.1      | Base duale et notations de Ricci . . . . .                             | 19        |
| 6.2      | Gradient d'un champ de tenseurs . . . . .                              | 22        |
| 6.3      | Dérivation et courbure – Relations de Weingarten . . . . .             | 23        |
| <b>7</b> | <b>Transformations d'une coque</b>                                     | <b>27</b> |
| 7.1      | Points matériels 2D . . . . .  | 27        |
| 7.2      | Coordonnées matérielles des points de la coque . . . . .               | 27        |
| 7.3      | Déplacement . . . . .  | 29        |
| 7.4      | Transport d'un vecteur matériel . . . . .                              | 30        |
| 7.5      | Déformations membranaires de la coque . . . . .                        | 31        |

|                |  |           |
|----------------|--|-----------|
| <b>8</b>       | <b>Membranes</b>   | <b>34</b> |
| <b>9</b>       | <b>Coques en équilibre membranaire</b>                             | <b>35</b> |
| 9.1            | Équilibre membranaire des coques . . . . .                         | 35        |
| 9.2            | Équilibre membranaire des coques axisymétriques . . . . .          | 37        |
| 9.3            | Déformations des coques en équilibre membranaire . . . . .         | 38        |
| <b>10</b>      | <b>Coques en flexion</b>   | <b>40</b> |
| 10.1           | L'hypothèse de Kirchhoff–Love . . . . .                            | 40        |
| 10.2           | Tenseur des variations des courbures . . . . .                     | 41        |
| 10.3           | Construction du modèle par les puissances virtuelles . . . . .     | 44        |
| 10.3.1         | Puissance virtuelle des efforts intérieurs . . . . .               | 44        |
| 10.3.2         | Puissance virtuelle des efforts extérieurs . . . . .               | 45        |
| 10.3.3         | Équations d'équilibre . . . . .                                    | 45        |
| 10.4           | Comportement des coques de Kirchhoff–Love . . . . .                | 46        |
| 10.5           | Équilibre élastique des coques de Kirchhoff–Love . . . . .         | 46        |
| 10.5.1         | Équations générales . . . . .                                      | 47        |
| 10.5.2         | Équations dans l'hypothèse des petites perturbations . . . . .     | 47        |
| <b>11</b>      | <b>Équations d'équilibre incrémentales</b>                         | <b>48</b> |
| 11.1           | Principe du calcul . . . . .                                       | 48        |
| 11.2           | Taux de puissance virtuelle des efforts intérieurs . . . . .       | 49        |
| 11.3           | Raideur géométrique associée aux efforts membranaires . . . . .    | 49        |
| 11.4           | Raideur géométrique associée aux moments fléchissants . . . . .    | 50        |
| 11.5           | Taux de puissance virtuelle des efforts extérieurs . . . . .       | 50        |
| 11.6           | Forme incrémentale du principe des puissances virtuelles . . . . . | 52        |
| 11.7           | Relations de comportement incrémentales . . . . .                  | 52        |
| <b>Annexes</b> |  | <b>53</b> |
| <b>A</b>       | <b>Rappels de géométrie différentielle</b>                         | <b>53</b> |
| A.1            | Courbes paramétrées . . . . .                                      | 53        |
| A.1.1          | Définition . . . . .   | 53        |
| A.1.2          | Tangente . . . . .   | 54        |
| A.1.3          | Rectification d'une courbe . . . . .                               | 55        |
| A.1.4          | Vecteur tangent unitaire . . . . .                                 | 56        |
| A.2            | Courbure des courbes planes . . . . .                              | 57        |
| A.2.1          | Première formule de Frénet . . . . .                               | 57        |
| A.2.2          | Deuxième formule de Frénet . . . . .                               | 58        |
| A.2.3          | Lien avec la direction de la tangente . . . . .                    | 58        |
| <b>B</b>       | <b>Compléments d'algèbre linéaire</b>                              | <b>59</b> |
| B.1            | Application linéaire entre deux plans de l'espace . . . . .        | 59        |

# 1 Bienvenue

These notes by Sébastien Brisard are licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.

## 2 Introduction

## 3 Outils mathématiques

1. Plans de l'espace
2. Surfaces paramétrées

## 4 Transformations d'une coque

### 4.1 Introduction

### 4.2 Outils mathématiques : Plans de l'espace

Les plans constituent un cas particulier de surfaces de l'espace. Ils jouent un rôle central dans la théorie des coques, puisque les déformations et contraintes généralisées sont des tenseurs du **plan tangent**. C'est pourquoi on consacre un paragraphe aux simples plans (on trouvera des compléments à ce paragraphe au § B.1). On considère ici un plan  $\pi \subset \mathbb{R}^3$  de l'espace.

On peut définir deux normales unitaires au plan  $\pi$  : on en choisit une, que l'on note  $\mathbf{n}$ . Ce choix oriente le plan. En effet, une base orthonormée  $(\mathbf{l}, \mathbf{m})$  du plan  $\pi$  sera dite **directe** si la base  $(\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n})$  est elle-même une base orthonormée directe de l'espace. Le tenseur  $\mathbf{a} = \mathbf{l} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$  définit alors l'opérateur de **projection orthogonale** sur le plan  $\pi$ . C'est un **tenseur d'ordre deux, symétrique**.

Un tenseur  $\mathbf{T}$  d'ordre quelconque est dit **tenseur du plan**  $\pi$  si toutes ses composantes sont dans le plan  $\pi$ . Le tenseur  $\mathbf{a}$  défini ci-dessus est bien un tenseur du plan  $\pi$ , puisque  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$ . De plus, on a  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$  pour tout  $\mathbf{v} \in \pi$  : le tenseur  $\mathbf{a}$  sera appelé dans ce cours **identité du plan tangent**.

On introduit maintenant le **tenseur antisymétrique fondamental**  $\mathbf{e}$ , très utile pour calculer des produits vectoriels dans le plan  $\pi$ . On observe tout d'abord que l'application linéaire  $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} \wedge \mathbf{n}$  est un **endomorphisme de l'espace**. Soit  $\mathbf{e}$  le tenseur associé, défini par la relation

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{n} \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3. \quad (4.1)$$

Le tenseur  $\mathbf{e}$  ainsi défini est un **tenseur du plan, antisymétrique**

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{e}^T = -\mathbf{e} \quad \text{et} \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = -\mathbf{a}.$$

#### Démonstration

On considère tout d'abord deux vecteurs quelconques de l'espace  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{n}) = -\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{n}) = -(\mathbf{e} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v},$$

et  $\mathbf{e}$  est donc bien un tenseur antisymétrique. On montre ensuite qu'il s'agit d'un ten-

seur du plan  $\pi$ . Par définition [voir Éq. (4.1)]

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0},$$

puis, en utilisant la propriété d'antisymétrie démontrée ci-dessus

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{e} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0},$$

ce qui montre que  $\mathbf{e}$  est bien un tenseur du plan  $\pi$ . Enfin, la propriété  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = -\mathbf{a}$  résulte de la formule du double produit vectoriel. Pour prouver cette formule, on considère tout d'abord un vecteur  $\mathbf{v}$  du plan  $\pi$  ( $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$ ). Alors

$$(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v} = -\mathbf{v}.$$

Comme par ailleurs,  $(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$ , on en déduit bien la relation annoncée pour tout vecteur de l'espace.

Dans une base orthonormée directe  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  du plan  $\pi$ , les composantes  $e_{\alpha\beta}$  du tenseur antisymétrique fondamental sont

$$e_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_\beta = \mathbf{e}_\alpha \cdot (\mathbf{e}_\beta \wedge \mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{e}_\alpha \wedge \mathbf{e}_\beta), \quad \text{soit} \quad e_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En conséquence, pour tout tenseur  $\mathbf{T}$  d'ordre 2 du plan  $\pi$ ,  $\mathbf{T} : \mathbf{e} = T_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} = T_{12} - T_{21}$ , soit

$$\text{asym } \mathbf{T} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T) = \frac{1}{2}(\mathbf{T} : \mathbf{e}) \mathbf{e}, \quad (4.2)$$

d'où l'on déduit en particulier que  **$\mathbf{T}$  est symétrique si, et seulement si  $\mathbf{T} : \mathbf{e} = 0$** . Inversement, si  $\mathbf{T}$  est antisymétrique, il coïncide avec sa partie antisymétrique, et l'équation (4.2) montre que  **$\mathbf{T}$  est proportionnel à  $\mathbf{e}$** .

Finalement, la formule suivante est valable pour tous vecteurs  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  de l'espace

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{n} + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{e} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{e} \cdot \mathbf{w}). \quad (4.3)$$

#### 💡 Démonstration

On considère tout d'abord deux vecteurs  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  du plan  $\pi$  ; leur produit vectoriel est perpendiculaire à  $\pi$ . En d'autres termes,  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$  est porté par la normale  $\mathbf{n}$ , donc

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})] \mathbf{n} = [\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \wedge \mathbf{n})] \mathbf{n} = [\mathbf{v} \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{w})] \mathbf{n} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{n}.$$

La relation générale (4.3) est alors obtenue en écrivant les vecteurs quelconques  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  comme la somme de leurs composantes dans le plan et hors-plan

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{w} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}.$$

□ Prochain outil mathématique : § 4.3



## 4.3 Outils mathématiques : surfaces paramétrées

### 4.3.1 Définition

Une surface paramétrée  $\varsigma$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$  est l'ensemble des points  $m = f(\xi, \eta)$  de  $\mathbb{R}^3$  images par l'application  $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\varsigma = f(\mathcal{D}) = \{m \in \mathbb{R}^d | \exists (\xi, \eta) \in \mathcal{D} : m = f(\xi, \eta)\}.$$

(voir figure Figure 4.1).

Dans la définition ci-dessus,  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$  est un ouvert de l'espace des paramètres  $\xi$  et  $\eta$ . On supposera dans ce qui suit l'application  $f$  suffisamment régulière pour que toutes les relations faisant intervenir  $f$  et ses dérivées partielles aient un sens.

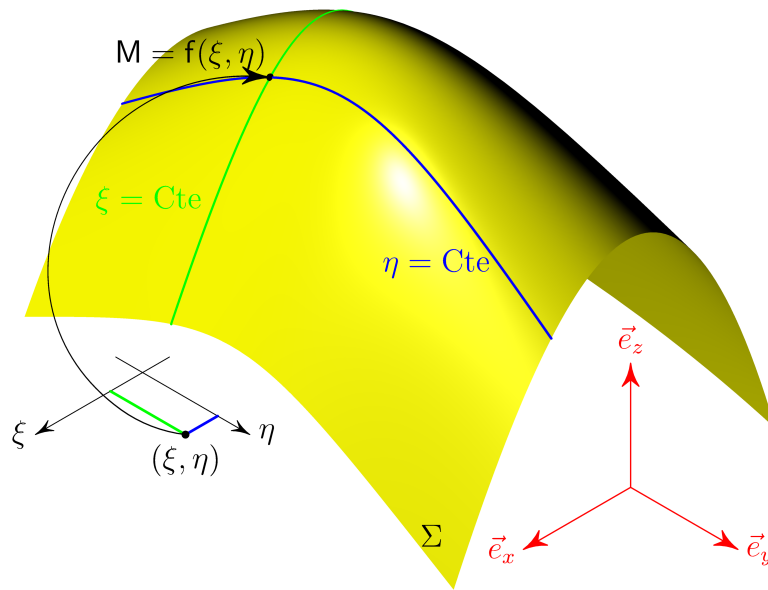


Figure 4.1: La surface paramétrée  $\varsigma$

#### ⚠ Exemples à traiter en classe

Cylindre, cône, sphère. Bien préciser les paramètres et leur domaine de définition.

### 4.3.2 Courbes tracées sur une surface

Une courbe de l'espace est généralement définie par un paramétrage  $t \in ]a, b[ \mapsto g(t)$  (voir Annexe A). L'intervalle  $]a, b[$  étant ici fixé, on se donne deux applications  $X, Y: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , telles que

$$[X(t), Y(t)] \in \mathcal{D} \quad \text{pour tout } t \in ]a, b[.$$

Le paramétrage  $t \mapsto g(t)$  suivant définit alors une courbe  $\gamma = g([a, b])$  de l'espace (voir Figure 4.2)

$$g(t) = f[X(t), Y(t)].$$

Pour tout  $t \in ]a, b[$ , le point  $g(t)$  est par construction contenu dans la surface  $\varsigma$ . On dit que la courbe  $\gamma$  est tracée sur la surface  $\varsigma$ .

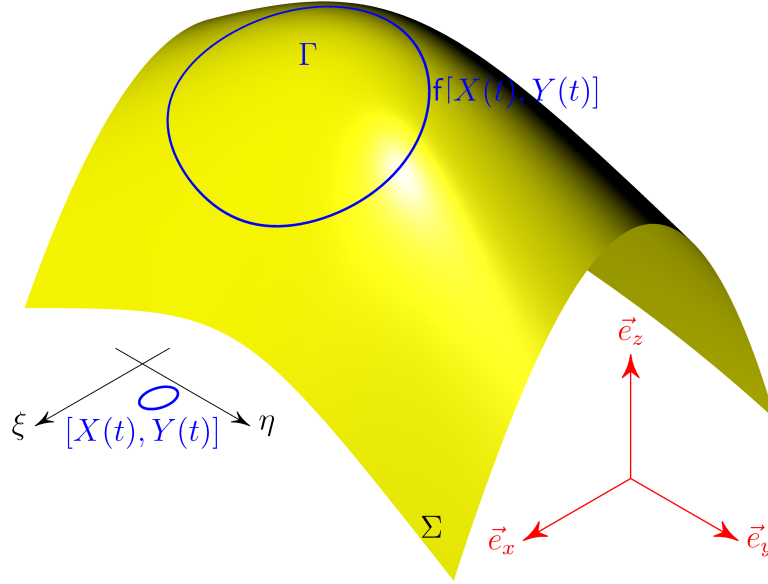


Figure 4.2: Courbe tracée sur la surface  $\varsigma$

### 4.3.3 Plan tangent

La notion de plan tangent est essentielle en théorie des coques, puisque la plupart des objets tensoriels que nous considérerons vivent dans le plan tangent à la configuration initiale ou actuelle. Le plan tangent est défini comme le plan engendré par l'ensemble des vecteurs tangents à la surface en un point donné de celle-ci. On voit qu'il faut donc d'abord définir la notion de vecteur tangent.

Soient  $m = f(\xi, \eta)$  un point de la surface  $\varsigma$  et  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  un vecteur. On dit que le vecteur  $\mathbf{v}$  est **tangent à la surface  $\varsigma$  au point  $m$**  s'il existe une courbe  $\gamma$  tracée sur  $\varsigma$  et passant par  $m$ , telle que  $\mathbf{v}$  soit tangent à la courbe  $\gamma$  au point  $m$ . On peut alors montrer que l'ensemble  $\mathcal{T}(m, \varsigma)$  formé par les vecteurs tangents en  $m$  à  $\varsigma$  est le plan engendré par les vecteurs  $\mathbf{a}_\xi$  et  $\mathbf{a}_\eta$  suivants (voir Figure 4.3)

$$\mathbf{a}_\xi(\xi, \eta) = \partial_\xi f(\xi, \eta) \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_\eta(\xi, \eta) = \partial_\eta f(\xi, \eta).$$

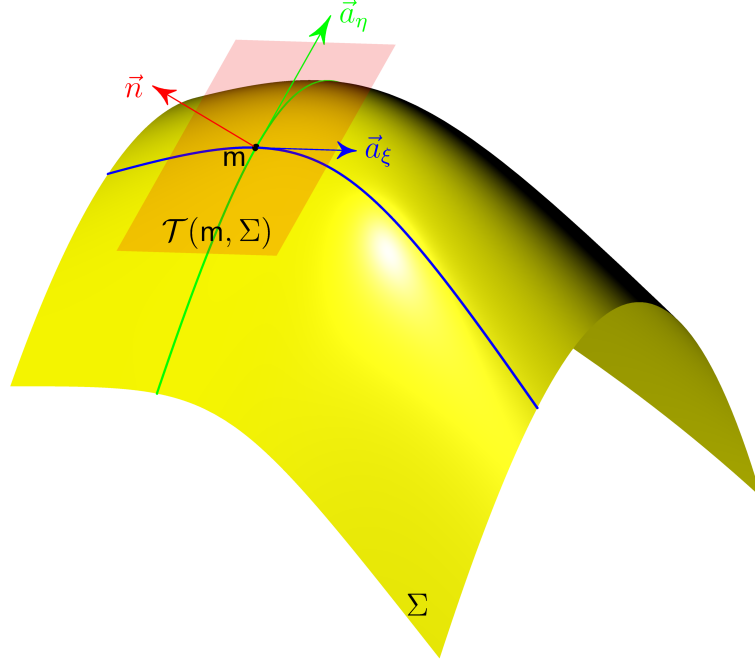


Figure 4.3: Le plan tangent en  $m$  est engendré par les vecteurs  $\mathbf{a}_\xi$  et  $\mathbf{a}_\eta$ . Il contient tous les vecteurs tangents en  $m$  à des courbes tracées sur la surface  $\zeta$ .

#### 💡 Démonstration

Soit  $\mathbf{v} \in \mathcal{T}(m, \zeta)$  l'un de ces vecteurs. Alors par définition, il existe  $a < b$  et  $X, Y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tels que le vecteur  $\mathbf{v}$  soit tangent au point  $m$  à la courbe  $\Gamma$ , définie par le paramétrage  $t \mapsto g(t) = f[X(t), Y(t)]$ . Quitte à changer de paramètre  $t$ , on peut toujours supposer que  $a = -\epsilon < 0$ ,  $b = \epsilon > 0$  et que  $\gamma$  passe par  $m$  en  $t = 0$

$$X(0) = \xi, \quad Y(0) = \eta \quad \text{et} \quad g(0) = f(\xi, \eta) = m.$$

La direction tangente à  $\gamma$  en  $m$  est alors donnée par  $\dot{g}(0)$ , soit en utilisant la règle de dérivation des fonctions composées

$$\begin{aligned} \dot{g}(0) &= \dot{X}(0) \partial_\xi f[X(0), Y(0)] + \dot{Y}(0) \partial_\eta f[X(0), Y(0)] \\ &= \dot{X}(0) \partial_\xi f(\xi, \eta) + \dot{Y}(0) \partial_\eta f(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Puisque  $\mathbf{v}$  est tangent à  $\gamma$  en  $m$ , il est proportionnel au vecteur précédent et on a montré que **tout vecteur tangent en  $m$  à  $\zeta$  est une combinaison linéaire des vecteurs  $\mathbf{a}_\xi$  et  $\mathbf{a}_\eta$**  :  $\mathcal{T}(m, \zeta) \subset \text{Vect}(\mathbf{a}_\xi, \mathbf{a}_\eta)$ .

Inversement, soit  $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{a}_\xi + \mu \mathbf{a}_\eta$  une combinaison linéaire de ces deux vecteurs. On définit alors  $[X(t), Y(t)] = (\xi + t\lambda, \eta + t\mu)$ . Le domaine  $\mathcal{D}$  étant ouvert, on peut trouver  $\epsilon > 0$  tel que  $[X(t), Y(t)] \in \mathcal{D}$  pour tout  $t \in ]-\epsilon, \epsilon[$ . En d'autres termes,  $X$  et  $Y$  définissent une courbe tracée sur  $\gamma$ , passant par  $m = f(\xi, \eta)$  en  $t = 0$ . De plus, la direction tangente à  $\gamma$  en  $m$  est

$$\dot{g}(0) = \lambda \mathbf{a}_\xi + \mu \mathbf{a}_\eta = \mathbf{v}.$$

On a donc tracé sur  $\varsigma$  une courbe  $\gamma$  telle que  $\mathbf{v}$  soit tangent à  $\gamma$  en  $m$  :  $\mathbf{v}$  est bien **tangent** à  $\varsigma$  et **toute combinaison linéaire de  $\mathbf{a}_\xi$  et  $\mathbf{a}_\eta$  est un vecteur tangent en  $m$  à  $\varsigma$**  :  $\text{Vect}(\mathbf{a}_\xi, \mathbf{a}_\eta) \subset \mathcal{T}(m, \varsigma)$ . CQFD.

Le point  $m$  est un **point régulier** de  $\varsigma$  si ces deux vecteurs sont linéairement indépendants ( $\mathbf{a}_\xi \wedge \mathbf{a}_\eta \neq \mathbf{0}$ ). Dans ce cas,  $\mathcal{T}(m, \varsigma)$  est le **plan tangent** à  $\varsigma$  en  $m$  et les vecteurs  $\mathbf{a}_\xi$  et  $\mathbf{a}_\eta$  forment la **base locale naturelle** associée au paramétrage  $(\xi, \eta) \mapsto f(\xi, \eta)$ .

Si ces deux vecteurs sont colinéaires ( $\mathbf{a}_\xi \wedge \mathbf{a}_\eta = \mathbf{0}$ ), le point  $m$  est un **point singulier**. Le plan tangent n'existe pas en un tel point.

#### **i** Note

On peut montrer que le plan tangent ainsi mis en évidence ne dépend pas du choix du paramétrage : il est **intrinsèque**. L'écriture  $\mathcal{T}(m, \varsigma)$  [plutôt que  $\mathcal{T}(\xi, \eta, \varsigma)$ ] est donc légitime.

### 4.3.4 Vecteur normal

En un point  $m = f(\xi, \eta)$  régulier de la surface  $\varsigma$ , le vecteur  $\mathbf{a}_\xi \wedge \mathbf{a}_\eta$  est perpendiculaire au plan tangent  $\mathcal{T}(m, \varsigma)$  (voir Figure 4.3). On définit la **normale unitaire** à  $\varsigma$  de la façon suivante

$$\mathbf{n}(\xi, \eta) = \frac{\mathbf{a}_\xi(\xi, \eta) \wedge \mathbf{a}_\eta(\xi, \eta)}{\|\mathbf{a}_\xi(\xi, \eta) \wedge \mathbf{a}_\eta(\xi, \eta)\|}, \quad (4.4)$$

où le dénominateur n'est pas nul puisque le point  $m$  est régulier.

#### **i** Note

La normale  $\mathbf{n}$  oriente localement la surface puisqu'elle oriente son plan tangent  $\mathcal{T}(m, \varsigma)$  (au sens du **orientation**). Cette orientation est néanmoins **arbitraire**. En effet, permuter l'ordre de  $\xi$  et  $\eta$  aurait conduit à une inversion du sens de  $\mathbf{n}$  et donc de l'orientation du plan tangent.

#### **i** Note

Puisque le plan tangent est une caractéristique intrinsèque de la surface, la direction normale l'est également. Bien que le vecteur normal  $\mathbf{n}$  apparaisse dans l'éq. (4.4) comme une fonction de  $\xi$  et  $\eta$ , on préférera dans ce qui suit la notation  $\mathbf{n}(m)$ .

### 4.3.5 Extension aux surfaces des notions introduites au § 4.2

À chaque point  $m$  de la surface est associé un unique plan tangent,  $\mathcal{T}(m, \varsigma)$ . Dans ce plan, on peut définir, comme au § 4.2, l'identité du plan tangent  $\mathbf{a}$  et le tenseur antisymétrique

fondamental  $\mathbf{e}$ . Ces deux tenseurs sont des champs (ils dépendent du point d'observation  $\mathbf{m}$  sur la surface  $\zeta$ ) **intrinsèques** (ils ne dépendent pas du choix de la représentation paramétrique de cette surface)

$$\mathbf{a}(\mathbf{m}) = \mathbf{I} - \mathbf{n}(\mathbf{m}) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{m}) \quad \text{et} \quad \mathbf{e}(\mathbf{m}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{n}(\mathbf{m}) \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Ces champs de tenseurs ont bien sûr les mêmes propriétés que leurs homologues introduits sur un plan fixe.

#### 4.3.6 Représentation cartésienne locale d'une surface

Soit  $\mathbf{m} \in \zeta$  un point régulier de la surface  $\zeta$  et  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$  une base orthonormée de son plan tangent  $\mathcal{T}(\mathbf{m}, \zeta)$ . En posant  $\mathbf{e}_z = \mathbf{n}(\mathbf{m})$ , on construit ainsi un repère cartésien orthonormé de l'espace  $(\mathbf{m}, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ . Dans ce repère, il existe une fonction  $g(x, y)$ , définie et dérivable au voisinage de l'origine  $\mathbf{m}(x = 0, y = 0)$ , telle que l'équation cartésienne de la surface  $\zeta$  s'écrive, au voisinage de  $\mathbf{m}$

$$z = g(x, y) \quad \text{avec} \quad g(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_x g(0, 0) = \partial_y g(0, 0) = 0.$$

##### Démonstration

Soit  $(\xi, \eta) \mapsto \mathbf{f}(\xi, \eta)$  un paramétrage de la surface  $\zeta$ . On peut toujours supposer que  $\mathbf{m} = \mathbf{f}(0, 0)$ . Soient  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  les fonctions définies de la façon suivante

$$\varphi_x(\xi, \eta) = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{a}(\mathbf{m}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{m}\mathbf{m}'} \quad \text{et} \quad \varphi_y(\xi, \eta) = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{a}(\mathbf{m}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{m}\mathbf{m}'}$$

où  $\mathbf{m}' = \mathbf{f}(\xi, \eta)$  désigne un point voisin de  $\mathbf{m}$  sur la surface  $\zeta$  et  $\mathbf{a}$  est l'identité du plan tangent en  $\mathbf{m}$ . La base  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  étant orthonormée, on remarque que

$$\mathbf{a} = \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y,$$

puisque  $\mathbf{e}_z = \mathbf{n}$  par construction. On définit alors la fonction  $\varphi$

$$\varphi(\xi, \eta) = [\varphi_x(\xi, \eta), \varphi_y(\xi, \eta)],$$

qui extrait les coordonnées dans le repère  $(\mathbf{m}, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$  de la projection orthogonale du point courant  $\mathbf{m}' = \mathbf{f}(\xi, \eta)$  sur le plan tangent  $\mathcal{T}(\mathbf{m}, \zeta)$ . Le jacobien de  $\varphi$  vaut

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_\xi(\xi, \eta) & \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_\eta(\xi, \eta) \\ \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_\xi(\xi, \eta) & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_\eta(\xi, \eta) \end{vmatrix} = \mathbf{e}_z \cdot [(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_\xi(\xi, \eta)) \wedge (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_\eta(\xi, \eta))]$$

En  $(\xi, \eta) = (0, 0)$ , on a  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_\xi(0, 0) = \mathbf{a}_\xi(0, 0)$  et  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_\eta(0, 0) = \mathbf{a}_\eta(0, 0)$ . Le jacobien vaut donc  $\|\mathbf{a}_\xi(0, 0) \wedge \mathbf{a}_\eta(0, 0)\|$ , qui est non-nul puisque  $\mathbf{m}$  est un point régulier. La différentielle de  $\varphi$  est donc inversible en  $(0, 0)$ . Le théorème d'inversion locale garantit alors qu'on peut inverser localement au voisinage de  $(\xi = 0, \eta = 0)$  la fonction  $\varphi$ . Soit  $\psi$  son inverse ; on a alors, pour tous  $(x, y)$  suffisamment petits :  $\varphi[\psi(x, y)] = (x, y)$ . En d'autres termes

$$\mathbf{a} \cdot \overrightarrow{\mathbf{m}\mathbf{m}'} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y, \quad \text{avec} \quad \mathbf{m}' = \mathbf{f}[\psi(x, y)].$$

On définit alors la fonction  $g(x, y)$

$$g(x, y) = \mathbf{e}_z \cdot \overrightarrow{mm'}, \quad \text{avec} \quad m' = f[\psi(x, y)].$$

Comme  $\mathbf{a} + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z = \mathbf{I}$ , on obtient

$$\overrightarrow{mm'} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + g(x, y) \mathbf{e}_z,$$

pour tout point  $m'$  de  $\zeta$ , suffisamment proche de  $m$ . On a donc bien construit localement une représentation cartésienne de la surface  $\zeta$ . Bien sûr, lorsque  $x = y = 0$ , le point  $m'$  coïncide avec  $m$ , donc  $g(0, 0) = 0$ . Par ailleurs, puisque le plan tangent en  $m$  à  $\zeta$  est le plan  $(m, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ , on a également  $\partial_x g(0, 0) = \partial_y g(0, 0) = 0$ . Pour le voir, il suffit d'observer que l'on peut considérer les coordonnées  $(x, y)$  comme un paramétrage de la surface  $\zeta$ . Ainsi,  $g(x, y)$  est un point de  $\zeta$  pour tous  $x, y$  suffisamment petits, en posant

$$g(x, y) = m + x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + g(x, y) \mathbf{e}_z.$$

La base locale naturelle associée est

$$\mathbf{a}_x(x, y) = \mathbf{e}_x + \partial_x g(x, y) \mathbf{e}_z \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_y(x, y) = \mathbf{e}_y + \partial_y g(x, y) \mathbf{e}_z.$$

Les vecteurs  $\mathbf{a}_x(0, 0)$  et  $\mathbf{a}_y(0, 0)$  sont tangents à  $\zeta$  en  $m$  : ils sont donc contenus dans le plan tangent en  $m$ , et leur composante selon  $\mathbf{e}_z$  est nulle.

## 4.4 Transformations d'une surface

## 4.5 Transformations d'une coque ?

## 5 Courbure des surfaces

Dans ce chapitre, on introduit les notions fondamentales suivantes : surface paramétrée, base locale naturelle, vecteur normal, tenseur identité du plan tangent, tenseur antisymétrique fondamental, tenseur de courbure. Ces notions seront utilisées dans les chapitres suivants pour construire la théorie des coques de Kirchhoff–Love.

### 5.1 Plans de l'espace

### 5.2 Surfaces paramétrées

### 5.3 Courbure des surfaces

#### 5.3.1 Tenseur de courbure

Soient  $m$  un point régulier d'une surface  $\varsigma$  et  $\mathbf{t}$  un vecteur unitaire, tangent à  $\varsigma$  en  $m$ . Le point  $m$  et les vecteurs  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{n}(m)$  définissent un plan  $\pi$  qui rencontre la surface  $\varsigma$  le long de la courbe  $\gamma$  (voir Figure 5.1). Cette courbe est une courbe plane, puisqu'elle est par construction contenue dans le plan  $\pi$ . Sa courbure en  $m$  est donc une notion connue (voir § A.2).

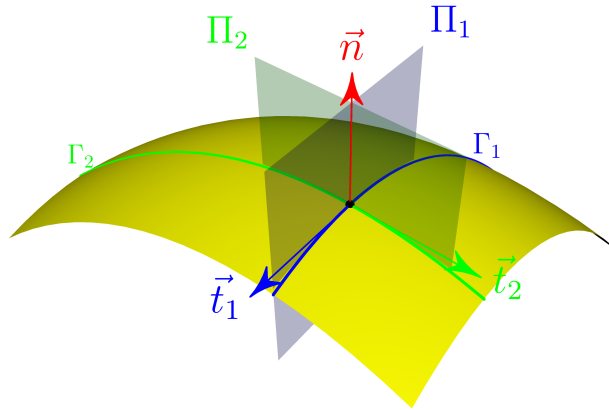


Figure 5.1: Le plan  $\pi$ , passant par  $m \in \varsigma$  et contenant la normale  $\mathbf{n}(m)$  ainsi que le vecteur  $\mathbf{t} \in \mathcal{T}(m, \varsigma)$  donné, rencontre la surface  $\varsigma$  le long de la courbe  $\gamma$ . La courbure de  $\gamma$  en  $m$  est  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{t}$ .

Si la surface  $\varsigma$  est suffisamment régulière en  $m$ , alors on il existe un tenseur  $\mathbf{b}(m)$  tel que la courbure de  $\gamma$  au point  $m$  soit donnée par l'expression :  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{b}(m) \cdot \mathbf{t}$ . Le tenseur  $\mathbf{b}(m)$  ainsi introduit est le **tenseur de courbure de la surface  $\varsigma$  au point  $m$** . C'est un tenseur du plan tangent en  $m$ , symétrique.

#### 💡 Démonstration

Pour établir l'existence du tenseur  $\mathbf{b}$  au point  $m \in \varsigma$ , on considère une représentation cartésienne locale  $(x, y) \mapsto g(x, y)$  de la surface au voisinage de  $m$ . Ainsi tout point  $m'$  suffisamment proche de  $m$  sur  $\varsigma$  s'écrit

$$m' = m + x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + g(x, y) \mathbf{e}_z \in \varsigma,$$

où  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$  désigne une base orthonormée du plan tangent  $\mathcal{T}(m, \varsigma)$  et  $\mathbf{e}_z = \mathbf{n}$ . Tout point  $m'$  du plan  $\pi$  peut par ailleurs s'écrire

$$m' = m + r \mathbf{t} + z \mathbf{e}_z = m + r t_x \mathbf{e}_x + r t_y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z \in \pi.$$

Un point  $m'$  de la courbe  $\gamma$  doit satisfaire simultanément les représentations précédentes. On en déduit la représentation paramétrique de  $\gamma$  au voisinage de  $M$

$$x = r t_x, \quad y = r t_y \quad \text{et} \quad z = g(r t_x, r t_y),$$

où le (petit) paramètre est  $r$ . Les dérivées premières de  $g$  étant nulles, on obtient à l'ordre le plus bas en  $r$

$$z = g(r t_x, r t_y) = \frac{r^2}{2} \left[ t_x^2 \partial_{xx}^2 g(0, 0) + 2 t_x t_y \partial_{xy}^2 g(0, 0) + t_y^2 \partial_{yy}^2 g(0, 0) \right] + o(r^2). \quad (5.1)$$

Soit  $\mathbf{b}$  la **hessienne** de  $g$  à l'origine

$$\mathbf{b} = \partial_{\alpha\beta}^2 g(0, 0) \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta.$$

Le tenseur  $\mathbf{b}$  ainsi défini est un tenseur du plan tangent  $\mathcal{T}(m, \varsigma)$ , symétrique. De plus, l'équation (5.1) se met sous la forme

$$z = \frac{r^2}{2} \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{t} + o(r^2).$$

On reconnaît, dans la base cartésienne  $(\mathbf{t}, \mathbf{e}_z)$  du plan  $\pi$ , l'équation d'une parabole et le terme en  $r^2/2$  correspond à la courbure au sommet de cette parabole (soit, au point  $m$ ). On a donc bien mis la courbure de  $\gamma$  en  $m$  sous la forme  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{t}$ , où  $\mathbf{b}$  est la hessienne de  $g$  à l'origine.

Le tenseur de courbure  $\mathbf{b}$  a été construit ici dans un système de coordonnées curviligne très particulier. Pour conclure cette démonstration, il faut montrer que ce tenseur est bien **intrinsèque**, c'est-à-dire indépendant de la représentation paramétrique de  $\varsigma$ . C'est en fait immédiat, puisque  $\mathbf{b}$  relie le vecteur unitaire du plan tangent  $\mathbf{t}$  à la courbure  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{t}$  d'une courbe plane, ces objets étant eux-mêmes définis de façon intrinsèque. On écrira donc  $\mathbf{b}(m)$  et pas  $\mathbf{b}(\xi, \eta)$  pour désigner le tenseur de courbure au point  $m$  de  $\varsigma$ .



### 5.3.2 Courbures principales et classification des points réguliers

Le tenseur de courbure  $\mathbf{b}$  étant symétrique, il est diagonalisable dans une base orthonormée du plan tangent  $\mathcal{T}(m, \varsigma)$  et on peut introduire les **courbures principales**  $b_I$  et  $b_{II}$ , qui sont les valeurs propres de ce tenseur. On conviendra d'ordonner ces valeurs propres de façon à ce que  $b_I \leq b_{II}$ . Les courbures principales sont les valeurs extrêmes de la courbure en  $m$  de la courbe plane  $\gamma$  introduite ci-dessus.

#### Démonstration

Pour montrer ce résultat, on introduit les directions principales de courbure  $\mathbf{t}_I$  et  $\mathbf{t}_{II}$  (vecteurs unitaires orthogonaux), de sorte que

$$\mathbf{b} = b_I \mathbf{t}_I \otimes \mathbf{t}_I + b_{II} \mathbf{t}_{II} \otimes \mathbf{t}_{II}.$$

Les vecteurs  $\mathbf{t}_I$  et  $\mathbf{t}_{II}$  forment une base orthonormée, dans laquelle on peut décomposer le vecteur  $\mathbf{t}$  :  $\mathbf{t} = \cos \theta \mathbf{t}_I + \sin \theta \mathbf{t}_{II}$ . La courbure de  $\gamma$  en  $m$  a donc pour expression

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{t} = \cos^2 \theta b_I + \sin^2 \theta b_{II},$$

dont les valeurs extrêmes sont bien obtenues pour  $\theta = 0$  ( $\mathbf{t} = \mathbf{t}_I$ ) ou  $\theta = \pi/2$  ( $\mathbf{t} = \mathbf{t}_{II}$ ).

Comme pour une courbe plane, le signe des courbures principales **dépend de l'orientation de  $\varsigma$**  (de la normale  $\mathbf{n}$ ). Les produits  $b_I \mathbf{n}$  et  $b_{II} \mathbf{n}$  sont quant à eux intrinsèques et indiquent de quel côté la surface oriente sa courbure. En effet les deux centres de courbure associés aux courbures principales sont situés en  $m + \mathbf{n}/b_I$  et  $m + \mathbf{n}/b_{II}$ .

#### Exemples à traiter en classe

Sphère, cylindre.

On peut introduire une classification des points réguliers  $m$  d'une surface en fonction des signes des courbures principales  $b_I$  et  $b_{II}$ .

- Si  $b_I b_{II} > 0$  (courbures principales non-nulles et de même signe), le point  $m$  est dit **elliptique**.
- Si  $b_I b_{II} < 0$  (courbures principales non-nulles et de signes contraires), le point  $m$  est dit **hyperbolique**.
- Si l'une seulement des deux courbures principales est nulle, le point  $m$  est **parabolique**.
- Si les deux courbures principales sont nulles, le point  $m$  est un **méplat**.
- Si les deux courbures principales sont égales et non-nulles, le tenseur de courbure est diagonal et la courbure de la courbe  $\gamma$  est indépendante du vecteur  $\mathbf{t}$  ; le point  $m$  est un point **ombilic**.

### 5.3.3 Courbure moyenne, courbure gaussienne

Les courbures **moyenne**  $h$  et **gaussienne**  $k$  de la surface sont définies à partir des courbures principales  $b_I$  et  $b_{II}$

$$h = \frac{1}{2} (b_I + b_{II}) \quad \text{et} \quad k = b_I b_{II}.$$

Le tenseur de courbure  $\mathbf{b}$  est un tenseur du plan tangent  $\mathcal{T}(m, \varsigma)$  : il peut donc être considéré comme le représentant d'un **endomorphisme** de  $\mathcal{T}(m, \varsigma)$  (espace vectoriel de dimension 2). Les courbures moyenne et gaussienne apparaissent alors comme les **invariants** de  $\mathbf{b}$

$$h = \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{b} \quad \text{et} \quad k = \det_{2 \times 2} \mathbf{b} = \det_{3 \times 3} (\mathbf{b} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$$

(les notations  $\det_{2 \times 2}$  et  $\det_{3 \times 3}$  sont précisées dans l'annexe § B.1). Le point  $m$  de la surface  $\varsigma$  est elliptique, parabolique ou hyperbolique si la courbure gaussienne est positive, nulle ou négative, respectivement. Par ailleurs, le théorème de Cayley–Hamilton permet d'écrire que  $\mathbf{b}$  annule son polyôme caractéristique

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - 2h \mathbf{b} + k \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

## 6 Dérivation et intégration sur une surface

On considère dans ce chapitre une surface  $\zeta$  et sa représentation paramétrique  $(\xi, \eta) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \mapsto f(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^3$ . La base locale naturelle  $(\mathbf{a}_\xi, \mathbf{a}_\eta)$  et la normale  $\mathbf{n}$  ont été introduites au chapitre précédent

$$\mathbf{a}_\xi(\xi, \eta) = \partial_\xi f(\xi, \eta), \quad \mathbf{a}_\eta(\xi, \eta) = \partial_\eta f(\xi, \eta) \quad \text{et} \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}(\xi, \eta) = \frac{\mathbf{a}_\xi(\xi, \eta) \wedge \mathbf{a}_\eta(\xi, \eta)}{\|\mathbf{a}_\xi(\xi, \eta) \wedge \mathbf{a}_\eta(\xi, \eta)\|}.$$

### 6.1 Base duale et notations de Ricci

Dans une base cartésienne orthonormée  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , le produit scalaire avec les vecteurs de la base permet d'extraire les coordonnées d'un vecteur. Ainsi, pour tout vecteur  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3.$$

La base locale naturelle n'est en général **ni orthogonale, ni normée** et la relation précédente **ne s'applique pas**

$$\mathbf{v} \neq (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_\xi) \mathbf{a}_\xi + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_\eta) \mathbf{a}_\eta + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}.$$

On souhaite construire trois vecteurs  $\mathbf{a}^\xi$ ,  $\mathbf{a}^\eta$  et  $\mathbf{n}^*$  (attention à la position des indices !), tels que la relation suivante soit, elle, vraie pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^\xi) \mathbf{a}_\xi + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^\eta) \mathbf{a}_\eta + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^*) \mathbf{n}. \quad (6.1)$$

Les vecteurs suivants satisfont bien cette relation et on peut vérifier que ce sont les seuls

$$\mathbf{a}^\xi = \frac{\mathbf{a}_\eta \wedge \mathbf{n}}{\|\mathbf{a}_\xi \wedge \mathbf{a}_\eta\|}, \quad \mathbf{a}^\eta = -\frac{\mathbf{a}_\xi \wedge \mathbf{n}}{\|\mathbf{a}_\xi \wedge \mathbf{a}_\eta\|} \quad \text{et} \quad \mathbf{n}^* = \mathbf{n}. \quad (6.2)$$



#### Démonstration

On raisonne par analyse et synthèse, en supposant que les vecteurs cherchés existent. On écrit alors la relation (6.1) successivement pour  $\mathbf{v} = \mathbf{a}_\xi$ , puis  $\mathbf{v} = \mathbf{a}_\eta$ , enfin  $\mathbf{v} = \mathbf{n}$ .

On obtient ainsi

$$\begin{cases} \mathbf{a}_\xi = (\mathbf{a}_\xi \cdot \mathbf{a}^\xi) \mathbf{a}_\xi + (\mathbf{a}_\xi \cdot \mathbf{a}^\eta) \mathbf{a}_\eta + (\mathbf{a}_\xi \cdot \mathbf{n}^*) \mathbf{n}, \\ \mathbf{a}_\eta = (\mathbf{a}_\eta \cdot \mathbf{a}^\xi) \mathbf{a}_\xi + (\mathbf{a}_\eta \cdot \mathbf{a}^\eta) \mathbf{a}_\eta + (\mathbf{a}_\eta \cdot \mathbf{n}^*) \mathbf{n}, \\ \mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}^\xi) \mathbf{a}_\xi + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}^\eta) \mathbf{a}_\eta + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^*) \mathbf{n} \end{cases}$$

et, puisque les vecteurs  $\mathbf{a}_\xi$ ,  $\mathbf{a}_\eta$  et  $\mathbf{n}$  forment une base

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\xi \cdot \mathbf{a}^\xi &= 1, & \mathbf{a}_\xi \cdot \mathbf{a}^\eta &= 0, & \mathbf{a}_\xi \cdot \mathbf{n}^* &= 0, \\ \mathbf{a}_\eta \cdot \mathbf{a}^\xi &= 0, & \mathbf{a}_\eta \cdot \mathbf{a}^\eta &= 1, & \mathbf{a}_\eta \cdot \mathbf{n}^* &= 0, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}^\xi &= 0, & \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}^\eta &= 0, & \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^* &= 1. \end{aligned}$$

Ces relations définissent de manière unique les vecteurs  $\mathbf{a}^\xi$ ,  $\mathbf{a}^\eta$  et  $\mathbf{n}^*$  (le vérifier !). Inversement, on vérifie que les vecteurs donnés par la relation (6.2) satisfont bien la relation (6.1).

#### ⚠ Remarque

Une démonstration plus générale est possible (en dimension quelconque), en considérant l'isomorphisme canonique qui existe entre un espace euclidien et son dual.

On peut montrer que les vecteurs  $\mathbf{a}^\xi$ ,  $\mathbf{a}^\eta$  et  $\mathbf{n}$  sont **linéairement indépendants** et forment une base, nommée **base duale de la base locale naturelle**.

#### 💡 Démonstration

Soit  $V = \text{Vect}(\mathbf{a}^\xi, \mathbf{a}^\eta, \mathbf{n}) \subset \mathbb{R}^3$  le sous-espace engendré par les vecteurs  $\mathbf{a}^\xi$ ,  $\mathbf{a}^\eta$  et  $\mathbf{n}^* = \mathbf{n}$ . On considère  $\mathbf{v} \in V^\perp$ , c'est-à-dire que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^\xi = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}^\eta = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ . En appliquant la relation (6.1), supposée vraie, on trouve que nécessairement  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . L'orthogonal de  $V$  est donc réduit au vecteur-nul, c'est-à-dire que  $V = \mathbb{R}^3$ . Donc  $V$  est de dimension 3 ; comme par construction,  $V$  est engendré par trois vecteurs, ceux-ci sont linéairement indépendants.

La relation (6.1) permet également d'obtenir la relation symétrique suivante, vraie pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_\xi) \mathbf{a}^\xi + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_\eta) \mathbf{a}^\eta + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}. \quad (6.3)$$

#### 💡 Démonstration

Soient  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  quelconques, et  $\tilde{\mathbf{v}} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_\xi) \mathbf{a}^\xi + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_\eta) \mathbf{a}^\eta + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}^*$ . On souhaite montrer que  $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$ . Il suffit de montrer que  $\tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$  pour tout  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ . L'identité (6.1) s'écrit, pour  $\mathbf{w}$  arbitraire

$$\mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}^\xi) \mathbf{a}_\xi + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}^\eta) \mathbf{a}_\eta + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}^*) \mathbf{n},$$

soit, en prenant le produit scalaire avec  $\mathbf{v}$

$$\begin{aligned}\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} &= (\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}^\xi) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_\xi) + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}^\eta) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_\eta) + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}^*) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \\ &= (\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}^\xi) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_\xi) + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{a}^\eta) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_\eta) + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}^*) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \\ &= \mathbf{w} \cdot [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_\xi) \mathbf{a}^\xi + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_\eta) \mathbf{a}^\eta + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}^*] \\ &= \mathbf{w} \cdot \tilde{\mathbf{v}} \quad \text{CQFD.}\end{aligned}$$

On déduit des relations (6.1) et (6.3) que

$$\mathbf{l} = \mathbf{a}^\xi \otimes \mathbf{a}_\xi + \mathbf{a}^\eta \otimes \mathbf{a}_\eta + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{a}_\xi \otimes \mathbf{a}^\xi + \mathbf{a}_\eta \otimes \mathbf{a}^\eta + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n},$$

soit

$$\mathbf{a} = \mathbf{l} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{a}^\xi \otimes \mathbf{a}_\xi + \mathbf{a}^\eta \otimes \mathbf{a}_\eta = \mathbf{a}_\xi \otimes \mathbf{a}^\xi + \mathbf{a}_\eta \otimes \mathbf{a}^\eta, \quad (6.4)$$

En convenant dans le reste de ce livre que les indices muets grecs ( $\alpha, \beta, \dots$ ) parcourent l'ensemble  $\{\xi, \eta\}$ , les relations (6.4) s'écrivent

$$\mathbf{a} = \sum_{\alpha} \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}_\alpha = \sum_{\alpha} \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}^\alpha.$$

Dans l'expression ci-dessus, on s'aperçoit que l'indice muet  $\alpha$  apparaît **exactement deux fois**, et dans des **positions différentes** : une fois en position inférieure, une fois en position supérieure. **Lorsque ces deux conditions sont remplies**, et uniquement dans ce cas, on pourra utiliser la convention de sommation d'Einstein

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}^\alpha.$$

#### ⚠ Remarque importante

Il est important de ne jamais sommer sur deux indices répétés dans la même position (on parle d'indices de **même variance**). Ainsi, les expressions  $\mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\alpha$  et  $\mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\alpha$  n'ont pas de sens, car elles ne sont **pas invariantes par changement de base**. Plus précisément, soient  $(\mathbf{a}'_\xi, \mathbf{a}'_\eta)$  une autre base du plan tangent et  $(\mathbf{a}'^\xi, \mathbf{a}'^\eta)$  la base duale associée. Alors, en général

$$\mathbf{a}_\xi \otimes \mathbf{a}_\xi + \mathbf{a}_\eta \otimes \mathbf{a}_\eta \neq \mathbf{a}'_\xi \otimes \mathbf{a}'_\xi + \mathbf{a}'_\eta \otimes \mathbf{a}'_\eta \quad \text{et} \quad \mathbf{a}^\xi \otimes \mathbf{a}^\xi + \mathbf{a}^\eta \otimes \mathbf{a}^\eta \neq \mathbf{a}'^\xi \otimes \mathbf{a}'^\xi + \mathbf{a}'^\eta \otimes \mathbf{a}'^\eta.$$

En revanche, on a bien

$$\mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}^\alpha = \mathbf{a}'_\beta \otimes \mathbf{a}'^\beta \quad \text{et} \quad \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{a}'^\beta \otimes \mathbf{a}'_\beta.$$

#### ⚠ À faire

Expression du tenseur antisymétrique fondamental ?

## 6.2 Gradient d'un champ de tenseurs

Soient  $m = f(\xi, \eta)$  et  $m' = f(\xi + d\xi, \eta + d\eta)$  deux points infiniment proches de la surface  $\varsigma$ , de sorte que

$$\begin{aligned} d\vec{m} = \overrightarrow{mm'} &= m' - m = f(\xi + d\xi, \eta + d\eta) - f(\xi, \eta) \\ &= \partial_\xi f(\xi, \eta) d\xi + \partial_\eta f(\xi, \eta) d\eta. \end{aligned}$$

En reconnaissant les vecteurs de la base locale naturelle, et en utilisant la relation (6.1), on obtient donc

$$d\vec{m} = \mathbf{a}_\xi d\xi + \mathbf{a}_\eta d\eta, \quad \text{soit} \quad d\xi = \mathbf{a}^\xi \cdot d\vec{m} \quad \text{et} \quad d\eta = \mathbf{a}^\eta \cdot d\vec{m}. \quad (6.5)$$

Soit alors  $\mathbf{T}(m)$  un champ de tenseurs d'ordre quelconque, défini sur la surface  $\varsigma$ . En composant par la représentation paramétrique  $f$  de la surface, on définit une application  $(\xi, \eta) \mapsto \mathbf{T} \circ f(\xi, \eta)$  définie sur l'espace des paramètres  $\mathcal{D}$ . On souhaite évaluer la variation  $d\mathbf{T}$  du champ  $\mathbf{T}$  entre les points  $m$  et  $m' = m + d\vec{m}$

$$\begin{aligned} d\mathbf{T} &= \mathbf{T}(m + d\vec{m}) - \mathbf{T}(m) = \mathbf{T} \circ f(\xi + d\xi, \eta + d\eta) - \mathbf{T} \circ f(\xi, \eta) \\ &= \partial_\xi (\mathbf{T} \circ f) d\xi + \partial_\eta (\mathbf{T} \circ f) d\eta, \end{aligned}$$

soit, en utilisant les relations (6.5)

$$d\mathbf{T} = \partial_\xi (\mathbf{T} \circ f) (\mathbf{a}^\xi \cdot d\vec{m}) + \partial_\eta (\mathbf{T} \circ f) (\mathbf{a}^\eta \cdot d\vec{m}) = \tilde{\mathbf{G}}(\xi, \eta) \cdot d\vec{m},$$

en posant

$$\tilde{\mathbf{G}} = \partial_\xi (\mathbf{T} \circ f) \otimes \mathbf{a}^\xi + \partial_\eta (\mathbf{T} \circ f) \otimes \mathbf{a}^\eta,$$

où on remarque que l'application  $(\xi, \eta) \mapsto \tilde{\mathbf{G}}$  est **définie sur l'espace des paramètres  $\mathcal{D}$** . On définit alors le champ de tenseurs  $\mathbf{G}$  sur  $\varsigma$  de la façon suivante

$$\mathbf{G} = \tilde{\mathbf{G}} \circ f^{-1} \quad \text{soit} \quad \mathbf{G}(m) = \tilde{\mathbf{G}}(\xi, \eta) \quad \text{pour} \quad m = f(\xi, \eta).$$

On a ainsi mis la variation  $d\mathbf{T}$  sous la forme intrinsèque suivante

$$d\mathbf{T} = \mathbf{T}(m + d\vec{m}) - \mathbf{T}(m) = \mathbf{G}(m) \cdot d\vec{m}.$$

On reconnaît la définition usuelle d'un gradient : le champ  $\mathbf{G}$  ainsi défini est le **gradient surfacique** de  $\mathbf{T}$  ; on le note **grad  $\mathbf{T}$**

$$\mathbf{grad} \mathbf{T}(m) = \partial_\xi (\mathbf{T} \circ f) \otimes \mathbf{a}^\xi + \partial_\eta (\mathbf{T} \circ f) \otimes \mathbf{a}^\eta, \quad (6.6)$$

où  $\mathbf{a}^\xi$ ,  $\mathbf{a}^\eta$ ,  $\mathbf{T} \circ f$  et ses dérivées sont implicitement évalués en  $(\xi, \eta)$  tels que  $f(\xi, \eta) = m$ . Si  $\mathbf{T}$  est un champ de tenseurs d'ordre  $n$ , alors **grad  $\mathbf{T}$**  est un champ de tenseurs d'ordre  $n + 1$ . On a de plus toujours, par construction

$$\mathbf{grad} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}.$$

### Remarque

La définition précédente du gradient fait intervenir un paramétrage particulier  $(\xi, \eta) \mapsto f(\xi, \eta)$  de la surface. Pour autant, le champ **grad**  $\mathbf{T}$  ainsi construit est bien intrinsèque. Ainsi, on peut vérifier que si  $(\varphi, \psi) \mapsto g(\varphi, \psi)$  désigne un second paramétrage de la surface, alors

$$\partial_\xi(\mathbf{T} \circ f) \otimes \mathbf{a}^\xi + \partial_\eta(\mathbf{T} \circ f) \otimes \mathbf{a}^\eta = \partial_\varphi(\mathbf{T} \circ g) \otimes \mathbf{a}^\varphi + \partial_\psi(\mathbf{T} \circ g) \otimes \mathbf{a}^\psi,$$

où  $\mathbf{a}^\xi, \mathbf{a}^\eta, \mathbf{T} \circ f$  et ses dérivées sont implicitement évalués en  $(\xi, \eta)$ , tandis que  $\mathbf{a}^\varphi, \mathbf{a}^\psi, \mathbf{T} \circ g$  et ses dérivées sont implicitement évalués en  $(\varphi, \psi)$  tels que  $f(\xi, \eta) = g(\varphi, \psi) = m$ .

L'opérateur gradient ainsi défini est un **opérateur linéaire** dont les propriétés sont proches de celles du gradient usuel. On peut également définir la **divergence surfacique** d'un champ de tenseurs  $\mathbf{T}$  d'ordre  $n \geq 1$

$$\text{div } \mathbf{T} = \text{grad } \mathbf{T} : \mathbf{a},$$

c'est un champ de tenseurs d'ordre  $n - 1$ .

### Remarque importante

Les développements précédents permettent d'assurer que la définition du gradient proposée est intrinsèque. En pratique néanmoins, il sera commode de travailler directement avec le champ surfacique  $\mathbf{T} \circ f$  qui est alors une fonction des fonctions des paramètres  $\xi$  et  $\eta$  (plutôt que comme une fonction du point  $m \in \zeta$ ). Par abus de langage, on écrira, comme c'est l'habitude,  $\mathbf{T}(\xi, \eta)$  plutôt que  $\mathbf{T} \circ f(\xi, \eta)$ . En revanche, on écrira explicitement  $\partial_\alpha \mathbf{T} \otimes \mathbf{a}^\alpha$  et  $\partial_\alpha \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}^\alpha$  plutôt que **grad**  $\mathbf{T}$  et **div**  $\mathbf{T}$  (noter l'utilisation de la convention d'Einstein, possible car l'indice  $\alpha$  apparaît une fois en position inférieure et une fois en position supérieure).

### À faire

Proposer les propriétés du gradient en exercice.

## 6.3 Dérivation et courbure – Relations de Weingarten

La courbure introduite au chapitre précédent est intimement liée à la notion de gradient défini ci-dessus. On peut en effet établir les relations de Weingarten (**première forme**)

$$\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_\beta = \mathbf{n} \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}_\beta = \mathbf{n} \cdot \partial_\beta \mathbf{a}_\alpha,$$

d'où l'on déduit la **deuxième forme**

$$\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_\beta = -\partial_\alpha \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_\beta = -\partial_\beta \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_\alpha,$$

en observant que

$$\mathbf{n} \cdot \partial_\alpha \mathbf{a}_\beta = \partial_\alpha (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_\beta) - \partial_\alpha \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_\beta = -\partial_\alpha \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_\beta.$$

### 💡 Démonstration

On considère ici un point fixe  $\mathbf{m}_0$  de  $\zeta$ . Pour simplifier, on supposera que le paramétrage est choisi de façon à ce que les coordonnées curvilignes du point  $\mathbf{m}_0$  soient  $\xi = \eta = 0 : \mathbf{m}_0 = \mathbf{f}(0, 0)$ .

Soient  $\mathbf{n}_0$  la normale à  $\zeta$  en  $\mathbf{m}_0$  et  $\mathbf{t}_0$  un vecteur tangent à  $\zeta$  en  $\mathbf{m}_0$ . Le point  $\mathbf{m}_0$  et les vecteur  $\mathbf{t}_0$  et  $\mathbf{n}_0$  définissent le plan  $\pi$ , qui rencontre la surface  $\zeta$  le long de la courbe  $\gamma$  (plane).

L'orientation étant donnée par le vecteur  $\mathbf{t}_0$ , on note  $s$  l'abscisse sur la courbe  $\gamma$  et  $s \mapsto g(s)$  le paramétrage de  $\gamma$ . L'origine  $s = 0$  est placée en  $\mathbf{m}_0$ . On note alors  $\mathbf{t}$  le vecteur tangent unitaire à  $\gamma$  au point d'abscisse curviligne  $s$ , et  $\mathbf{n}$  la normale unitaire. Celle-ci est orientée de façon à coïncider avec  $\mathbf{n}_0$  en  $s = 0$ .

Par définition du tenseur de courbure (voir § 5.3), la courbure  $\kappa_0$  de  $\gamma$  en  $\mathbf{m}_0$  est égale à  $\mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{t}_0$ . Puisque  $\gamma$  est une courbe plane, les formules de Frénet s'appliquent

$$\left. \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right|_{s=0} = \kappa_0 \mathbf{n}_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_0 \cdot \left. \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right|_{s=0} = \kappa_0 = \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{t}_0. \quad (6.7)$$

La courbe  $\gamma$  est une courbe tracée sur  $\zeta$ . On peut donc trouver deux fonctions  $\bar{\xi}(s)$  et  $\bar{\eta}(s)$  telles que  $g(s) = \mathbf{f}[\bar{\xi}(s), \bar{\eta}(s)]$ . Alors, en dérivant la fonction composée

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{d\mathbf{g}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \bar{\xi}}[\bar{\xi}(s), \bar{\eta}(s)] \frac{d\bar{\xi}}{ds}(s) + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \bar{\eta}}[\bar{\xi}(s), \bar{\eta}(s)] \frac{d\bar{\eta}}{ds}(s) \\ &= \frac{d\bar{\xi}}{ds}(s) \mathbf{a}_\xi[\bar{\xi}(s), \bar{\eta}(s)] + \frac{d\bar{\eta}}{ds}(s) \mathbf{a}_\eta[\bar{\xi}(s), \bar{\eta}(s)], \end{aligned} \quad (6.8)$$

pour toute valeur de  $s$ . En particulier, en  $s = 0$

$$\mathbf{t}_0 = t_0^\xi \mathbf{a}_\xi(0, 0) + t_0^\eta \mathbf{a}_\eta(0, 0), \quad \text{avec} \quad t_0^\xi = \left. \frac{d\bar{\xi}}{ds} \right|_{s=0} \quad \text{et} \quad t_0^\eta = \left. \frac{d\bar{\eta}}{ds} \right|_{s=0}. \quad (6.9)$$

En dérivant une nouvelle fois par rapport à  $s$  la relation (6.8)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{ds}(s) &= \frac{d^2\bar{\xi}}{ds^2}(s) \mathbf{a}_\xi[\bar{\xi}(s), \bar{\eta}(s)] + \frac{d^2\bar{\eta}}{ds^2}(s) \mathbf{a}_\eta[\bar{\xi}(s), \bar{\eta}(s)] \\ &\quad + \frac{d\bar{\xi}}{ds}(s) \left\{ \frac{d\bar{\xi}}{ds}(s) \partial_\xi \mathbf{a}_\xi[\bar{\xi}(s), \bar{\eta}(s)] + \frac{d\bar{\eta}}{ds}(s) \partial_\eta \mathbf{a}_\xi[\bar{\xi}(s), \bar{\eta}(s)] \right\} \\ &\quad + \frac{d\bar{\eta}}{ds}(s) \left\{ \frac{d\bar{\xi}}{ds}(s) \partial_\xi \mathbf{a}_\eta[\bar{\xi}(s), \bar{\eta}(s)] + \frac{d\bar{\eta}}{ds}(s) \partial_\eta \mathbf{a}_\eta[\bar{\xi}(s), \bar{\eta}(s)] \right\}, \end{aligned}$$



soit, en  $s = 0$  [en utilisant les relations (6.9)]

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right|_{s=0} &= \left. \frac{d^2\bar{\xi}}{ds^2} \right|_{s=0} \mathbf{a}_\xi(0,0) + \left. \frac{d^2\bar{\eta}}{ds^2} \right|_{s=0} \mathbf{a}_\eta(0,0) \\ &+ t_0^\xi \left[ t_0^\xi \partial_\xi \mathbf{a}_\xi(0,0) + t_0^\eta \partial_\eta \mathbf{a}_\xi(0,0) \right] \\ &+ t_0^\eta \left[ t_0^\xi \partial_\xi \mathbf{a}_\eta(0,0) + t_0^\eta \partial_\eta \mathbf{a}_\eta(0,0) \right], \end{aligned}$$

d'où l'on déduit la relation suivante, en développant et en observant que  $\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{a}_\xi(0,0) = \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{a}_\eta(0,0) = 0$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_0 \cdot \left. \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right|_{s=0} &= (t_0^\xi)^2 \mathbf{n}_0 \cdot \partial_\xi \mathbf{a}_\xi(0,0) + (t_0^\eta)^2 \mathbf{n}_0 \cdot \partial_\eta \mathbf{a}_\eta(0,0) \\ &+ t_0^\xi t_0^\eta \left[ \mathbf{n}_0 \cdot \partial_\xi \mathbf{a}_\eta(0,0) + \mathbf{n}_0 \cdot \partial_\eta \mathbf{a}_\xi(0,0) \right]. \end{aligned}$$

En combinant les relations (6.7) et (6.9), on trouve que

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{t}_0 &= (t_0^\xi)^2 \mathbf{n}_0 \cdot \partial_\xi \mathbf{a}_\xi(0,0) + (t_0^\eta)^2 \mathbf{n}_0 \cdot \partial_\eta \mathbf{a}_\eta(0,0) \\ &+ t_0^\xi t_0^\eta \left[ \mathbf{n}_0 \cdot \partial_\xi \mathbf{a}_\eta(0,0) + \mathbf{n}_0 \cdot \partial_\eta \mathbf{a}_\xi(0,0) \right]. \end{aligned}$$

Le point  $m_0$  de la surface, et le vecteur tangent  $\mathbf{t}_0$  en  $m_0$  étant quelconque, on peut omettre les indices 0 dans ce qui suit

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{t} = (t^\xi)^2 \mathbf{n} \cdot \partial_\xi \mathbf{a}_\xi + t^\xi t^\eta \left( \mathbf{n} \cdot \partial_\xi \mathbf{a}_\eta + \mathbf{n} \cdot \partial_\eta \mathbf{a}_\xi \right) + (t^\eta)^2 \mathbf{n} \cdot \partial_\eta \mathbf{a}_\eta,$$

pour tout vecteur unitaire tangent  $\mathbf{t}$  à  $\zeta$  en  $m$ . En écrivant que  $\mathbf{t} = t^\xi \mathbf{a}_\xi + t^\eta \mathbf{a}_\eta$ , on a par ailleurs l'expression générale

$$\begin{aligned} \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{t} &= (t^\xi \mathbf{a}_\xi + t^\eta \mathbf{a}_\eta) \cdot \mathbf{b} \cdot (t^\xi \mathbf{a}_\xi + t^\eta \mathbf{a}_\eta) \\ &= (t^\xi)^2 \mathbf{a}_\xi \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_\xi + t^\xi t^\eta \mathbf{a}_\xi \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_\eta + (t^\eta)^2 \mathbf{a}_\eta \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_\eta. \end{aligned}$$

On obtient les relations annoncées en comparant terme à terme les deux dernières égalités et en observant que

$$\partial_\xi \mathbf{a}_\eta = \partial_\xi (\partial_\eta f) = \partial_{\xi\eta}^2 f = \partial_\eta (\partial_\xi f) = \partial_\eta \mathbf{a}_\xi.$$

Les relations de Weingarten ci-dessus permettent d'écrire pour  $\alpha \in \{\xi, \eta\}$  fixé

$$(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_\alpha) \cdot \mathbf{a}_\beta = -\partial_\alpha \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_\beta \quad \text{pour tout } \beta \in \{\xi, \eta\} \quad \text{donc} \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_\alpha = -\partial_\alpha \mathbf{n}.$$

La relation étant vraie pour tout  $\alpha \in \{\xi, \eta\}$ , on en déduit que

$$\mathbf{b} = -\partial_\alpha \mathbf{n} \otimes \mathbf{a}^\alpha. \quad (6.10)$$

ou, sous forme intrinsèque (voir Éq. (6.6))

$$\mathbf{b} = -\text{grad } \mathbf{n}.$$

Le tenseur de courbure  $\mathbf{b}$  apparaît donc comme **l'opposé du gradient de la normale**. Ce résultat est à comparer avec la deuxième relation de Frénet pour les courbes planes :  $\mathbf{n}' = -\kappa \mathbf{t}$ .

## 7 Transformations d'une coque

Une coque est une structure dont l'une des dimensions (**l'épaisseur**) est grande devant les deux autres. Il est alors naturel de chercher à décrire l'état de la coque par un ensemble de champs construits sur son **feuillet de référence** seulement. On construit ainsi une théorie surfacique de coque. La plus simple de ces théories est la théorie de Kirchhoff–Love, dans laquelle on suppose que l'état mécanique de la coque est complètement défini par les changements de géométrie de son feuillet de référence. Dans ce chapitre, on définit donc des grandeurs tensorielles permettant de mesurer ces changements de géométrie. On veillera à ce que les **déformations généralisées** ainsi définies permettent bien d'identifier les mouvements de corps solides.

### 7.1 Points matériels 2D

Vue comme un solide tridimensionnel, la coque est constituée de **points matériels 3D**, qui correspondent aux points matériels classiques de la mécanique des milieux continus. Si le matériau constitutif de la coque est standard (de Cauchy), **chaque point matériel 3D possède 3 degrés de liberté de translation**.

Vue comme un solide surfacique, la coque est constituée de **points matériels 2D**. Un point matériel 2D correspond mathématiquement à un point géométrique du feuillet de référence et physiquement à **l'ensemble des points matériels 3D** de la coque (vue comme un solide tridimensionnel) **situés sur la même normale au feuillet de référence** (voir Figure 7.1).

La translation d'ensemble des points matériels 3D permet de définir une translation du point matériel 2D, soit **3 degrés de liberté de translation**.

La translation **relative** des points matériels 3D permet également de définir **2 degrés de liberté de rotation** supplémentaires. Les points matériels 2D ne possèdent pas de degré de liberté en rotation selon la normale au feuillet de référence.

### 7.2 Coordonnées matérielles des points de la coque

On notera  $\Sigma$  et  $\varsigma$  les feuillets de référence de la coque dans les configurations initiale et actuelle, respectivement. Ces surfaces sont définies par les paramétrages

$$(\Xi, H) \mapsto M = F(\Xi, H) \in \Sigma \quad \text{et} \quad (\xi, \eta) \mapsto m = f(\xi, \eta) \in \varsigma.$$



Figure 7.1: Un point matériel 2D correspond à un ensemble de points matériels 3D, tous situés initialement sur la même fibre. Le mouvement d'ensemble des points matériels 3D définit la translation du point matériel 2D ; leur mouvement relatif définit deux rotations du point matériel 2D.

(noter l'utilisation des majuscules sur la configuration initiale et des minuscules sur la configuration actuelle). Le mouvement de la coque peut alors être défini par la transformation des coordonnées curvilignes

$$(\Xi, H) \mapsto (\xi, \eta) = \Phi(\Xi, H).$$

On peut ainsi, pour tout point matériel de la coque, associer à sa position  $M \in \Sigma$  sur la configuration initiale, sa position  $m \in \varsigma$  sur la configuration actuelle de la façon suivante

$$M = F(\Xi, H) \quad \mapsto \quad m = f[\Phi(\Xi, H)].$$

La représentation précédente de la transformation de la coque est d'une grande généralité, mais conduit à certaines lourdeurs mathématiques. On conviendra dans ce cours que les fonctions  $F$  et  $f$  sont choisies de sorte  $\xi = \Xi$  et  $\eta = H$ . Ainsi,  $(\xi, \eta)$  sont les coordonnées curvilignes du **même point matériel**, dans les deux configurations. On parle de **coordonnées matérielles** ; elles permettent d'identifier un point matériel. Ainsi, le point matériel de coordonnées matérielles  $(\xi, \eta)$  occupe la position  $M = F(\xi, \eta) \in \Sigma$  dans la configuration initiale. Il est transporté en  $m = f(\xi, \eta) \in \varsigma$  dans la configuration actuelle (voir Figure 7.2).



Figure 7.2: On utilise les mêmes coordonnées curvilignes  $\xi$  et  $\eta$  pour paramétrer les configurations initiale  $\Sigma$  et actuelle  $\varsigma$ . Ces coordonnées curvilignes sont des coordonnées matérielles.

### 7.3 Déplacement

Soit un point matériel de la coque occupant les positions  $M$  et  $m$  dans les configurations initiale et actuelle. Le **déplacement** de ce point matériel est par définition le vecteur (voir Figure 7.2)

$$\mathbf{u}(M) = \overrightarrow{Mm} = m - M.$$

Il correspond à la translation du point matériel entre les deux configurations. Le champ de déplacement ainsi défini est une quantité lagrangienne (définie sur la configuration de référence). On peut aussi considérer le champ des déplacements comme une fonction des coordonnées matérielles  $\xi$  et  $\eta$

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) - F(\xi, \eta).$$

La configuration actuelle de la coque est ainsi complètement définie par la configuration initiale et le champ des déplacements, puisque la relation précédente s'inverse trivialement

$$f(\xi, \eta) = F(\xi, \eta) + \mathbf{u}(\xi, \eta).$$

En particulier, on peut exprimer les vecteurs  $(\mathbf{a}_\xi, \mathbf{a}_\eta)$  de la base locale naturelle actuelle en fonction des vecteurs  $\mathbf{A}_\xi$  et  $\mathbf{A}_\eta$  de la base locale naturelle initiale

$$\mathbf{a}_\xi(\xi, \eta) = \partial_\xi f(\xi, \eta) = \partial_\xi F(\xi, \eta) + \partial_\xi \mathbf{u}(\xi, \eta) = \mathbf{A}_\xi(\xi, \eta) + \partial_\xi \mathbf{u}(\xi, \eta).$$

On omettra souvent la dépendance en  $\xi$  et  $\eta$  en écrivant simplement

$$\mathbf{a}_\xi = \mathbf{A}_\xi + \partial_\xi \mathbf{u} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_\eta = \mathbf{A}_\eta + \partial_\eta \mathbf{u}. \quad (7.1)$$

## 7.4 Transport d'un vecteur matériel

Soient deux points matériels infiniment proches, de coordonnées matérielles  $(\xi, \eta)$  et  $(\xi_1 = \xi + d\xi, \eta_1 = \eta + d\eta)$  (voir Figure 7.3). Le *vecteur matériel* constitué par ces deux points correspond dans la position initiale au vecteur géométrique suivant

$$d\vec{M} = \overrightarrow{MM_1} = M_1 - M,$$

avec

$$M = F(\xi, \eta)$$

et

$$\begin{aligned} M_1 &= F(\xi_1, \eta_1) = F(\xi + d\xi, \eta + d\eta) = F(\xi, \eta) + \partial_\xi F(\xi, \eta) d\xi + \partial_\eta F(\xi, \eta) d\eta \\ &= M + \mathbf{A}_\xi d\xi + \mathbf{A}_\eta d\eta, \end{aligned}$$

soit, en regroupant les résultats précédents

$$d\vec{M} = \mathbf{A}_\xi d\xi + \mathbf{A}_\eta d\eta. \quad (7.2)$$

En d'autres termes,  $d\xi$  et  $d\eta$  sont les coordonnées du vecteur matériel  $d\vec{M}$  dans la base  $(\mathbf{A}_\xi, \mathbf{A}_\eta)$ . Cette base n'est en général **pas orthonormée**. Il n'est donc en général pas vrai que

$$d\xi = \mathbf{A}_\xi \cdot d\vec{M}, \quad \text{ni que} \quad d\eta = \mathbf{A}_\eta \cdot d\vec{M}.$$

Pour retrouver des formules de ce type, il est nécessaire d'introduire la **base duale**  $(\mathbf{A}_\xi^*, \mathbf{A}_\eta^*)$  de la base locale naturelle, définie par les relations suivantes

$$\mathbf{A}_\xi^* \cdot \mathbf{A}_\xi = \mathbf{A}_\eta^* \cdot \mathbf{A}_\eta = 1 \quad \text{et} \quad \mathbf{A}_\xi^* \cdot \mathbf{A}_\eta = \mathbf{A}_\eta^* \cdot \mathbf{A}_\xi = 0, \quad (7.3)$$

ainsi que

$$\mathbf{A}_\xi^* \cdot \mathbf{N} = \mathbf{A}_\eta^* \cdot \mathbf{N} = 0.$$

### **i** Note

Les relations (7.3) définissent bien de manière unique deux vecteurs  $\mathbf{A}_\xi^*$  et  $\mathbf{A}_\eta^*$ , dont on peut montrer qu'ils sont linéairement indépendants si  $\mathbf{A}_\xi$  et  $\mathbf{A}_\eta$  le sont. Lorsqu'on utilise la convention de sommation d'Einstein, il est courant de noter ces vecteurs avec un indice supérieur (indice **contravariant**)

$$\mathbf{A}_\xi^* = \mathbf{A}^\xi \quad \text{et} \quad \mathbf{A}_\eta^* = \mathbf{A}^\eta.$$

Nous n'utiliserons pas cette convention, ni les notations associées dans le présent cours.

En combinant les relations (7.2) et (7.3), on obtient alors les expressions

$$d\xi = \mathbf{A}_\xi^* \cdot d\vec{\mathbf{M}} \quad \text{et} \quad d\eta = \mathbf{A}_\eta^* \cdot d\vec{\mathbf{M}}, \quad (7.4)$$

qui montrent l'intérêt de la base duale. L'expression (7.2) est par ailleurs vraie également dans la configuration actuelle, où le vecteur matériel correspond alors au vecteur géométrique

$$d\vec{\mathbf{m}} = \mathbf{a}_\xi d\xi + \mathbf{a}_\eta d\eta,$$

soit, en introduisant les relations (7.4)

$$d\vec{\mathbf{m}} = \mathbf{a}_\xi (\mathbf{A}_\xi^* \cdot d\vec{\mathbf{M}}) + \mathbf{a}_\eta (\mathbf{A}_\eta^* \cdot d\vec{\mathbf{M}}) = \mathbf{F} \cdot d\vec{\mathbf{M}}, \quad (7.5)$$

où l'**application linéaire tangente**  $\mathbf{F}$  est définie de la façon suivante

$$\mathbf{F} = \mathbf{a}_\xi \otimes \mathbf{A}_\xi^* + \mathbf{a}_\eta \otimes \mathbf{A}_\eta^*. \quad (7.6)$$

L'application linéaire tangente  $\mathbf{F}$  permet d'exprimer le transport d'un vecteur matériel entre les configurations initiale et actuelle à l'aide de la relation (7.5). Il joue donc le même rôle que le tenseur du même nom de la mécanique des milieux continus. On prendra garde néanmoins au fait que  $\mathbf{F}$  n'est pas un tenseur inversible de l'espace. En effet

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{0},$$

ce qui montre que  $\mathbf{F}$  représente un endomorphisme du plan tangent  $\mathcal{T}(M, \Sigma)$  vers le plan tangent  $\mathcal{T}(m, \varsigma)$ .

#### **i** Note

Ainsi définie,  $\mathbf{F}$  apparaît comme une fonction des coordonnées matérielles  $\xi$  et  $\eta$  :  $\mathbf{F}(\xi, \eta)$ . On peut vérifier que  $\mathbf{F}$  est en fait une grandeur intrinsèque (qui ne dépend pas du paramétrage de la coque). Il est donc légitime d'écrire, en représentation lagrangienne,  $\mathbf{F}(M)$ .

## 7.5 Déformations membranaires de la coque

Par analogie avec la mécanique des milieux continus, on mesure les déformations de la coque au cours de sa transformation par la variation du produit scalaire entre deux vecteurs matériels construits au même point. En d'autres termes, on considère les trois points matériels voisins suivants (voir Figure 7.4)

$$(\xi, \eta), \quad (\xi_1 = \xi + d\xi_1, \eta_1 = \eta + d\eta_1) \quad \text{et} \quad (\xi_2 = \xi + d\xi_2, \eta_2 = \eta + d\eta_2)$$

et on construit les vecteurs matériels  $(d\xi_1, d\eta_1)$  et  $(d\xi_2, d\eta_2)$ . En configuration initiale, ces vecteurs matériels sont représentés par

$$d\vec{\mathbf{M}}_1 = \mathbf{A}_\xi d\xi_1 + \mathbf{A}_\eta d\eta_1 \quad \text{et} \quad d\vec{\mathbf{M}}_2 = \mathbf{A}_\xi d\xi_2 + \mathbf{A}_\eta d\eta_2,$$



Figure 7.3: L'application linéaire tangente  $\mathbf{F}$  transporte le vecteur matériel  $(d\xi, d\eta)$  de la configuration initiale  $(d\vec{M})$  vers la configuration actuelle  $(d\vec{m})$ .

tandis que, en configuration actuelle

$$d\vec{m}_1 = \mathbf{a}_\xi d\xi_1 + \mathbf{a}_\eta d\eta_1 \quad \text{et} \quad d\vec{m}_2 = \mathbf{a}_\xi d\xi_2 + \mathbf{a}_\eta d\eta_2.$$

La relation de transport (7.5) permet alors d'exprimer la variation du produit scalaire de ces deux vecteurs matériels

$$\begin{aligned} d\vec{m}_1 \cdot d\vec{m}_2 - d\vec{M}_1 \cdot d\vec{M}_2 &= (\mathbf{F} \cdot d\vec{M}_1) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\vec{M}_2) - d\vec{M}_1 \cdot d\vec{M}_2 \\ &= d\vec{M}_1 \cdot \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} \cdot d\vec{M}_2 - d\vec{M}_1 \cdot d\vec{M}_2. \end{aligned}$$

Le tenseur  $\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}$  est un tenseur symétrique du plan tangent  $\mathcal{T}(M, \Sigma)$  (puisque  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0}$ ). Les vecteurs  $d\vec{M}_1$  et  $d\vec{M}_2$  étant eux-mêmes des vecteurs de ce plan tangent, on peut écrire

$$d\vec{m}_1 \cdot d\vec{m}_2 - d\vec{M}_1 \cdot d\vec{M}_2 = d\vec{M}_1 \cdot (\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} - \mathbf{A}) \cdot d\vec{M}_2.$$

On introduit alors le **tenseur des déformations membranaires**

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} - \mathbf{A}), \quad (7.7)$$

de sorte que

$$d\vec{M}_1 \cdot \mathbf{E} \cdot d\vec{M}_2 = \frac{1}{2}(d\vec{m}_1 \cdot d\vec{m}_2 - d\vec{M}_1 \cdot d\vec{M}_2).$$



**i** Note

Le tenseur ainsi introduit joue le même rôle que le tenseur de Green–Lagrange de la mécanique des milieux continus. L'interprétation de ses coefficients est identique (dans le plan tangent).



Figure 7.4: Le transport de deux vecteurs matériels construits au même point permet de définir le tenseur des déformations membranaires.

## 8 Membranes

On établit dans ce chapitre la théorie des **membranes**, c'est-à-dire des coques sans raideur à la flexion. On fait l'hypothèse que l'état de contraintes des membranes est complètement défini par la mesure des **déformations membranaires** introduites au chapitre [Chapitre 7](#).

## 9 Coques en équilibre membranaire

Le présent chapitre est consacré aux coques en équilibre membranaire. Comme les membranes, ce sont des systèmes mécaniques qui équilibrent leur chargement par des **efforts membranaires seulement** (pas de moments fléchissants). Contrairement aux membranes, la raideur en flexion des coques en équilibre membranaire est suffisante pour leur permettre d'équilibrer les chargements **sans changer de géométrie**. La théorie des coques en équilibre membranaire est donc formulée dans l'**hypothèse des petites perturbations**.

Cette théorie peut être vue comme une approche en contraintes (généralisées) de l'équilibre des coques élastiques. La géométrie de la coque et son chargement étant donnés, on verra en effet qu'il est en général toujours possible de construire un champ de contraintes généralisées purement membranaires et statiquement admissibles avec le chargement. Comme dans l'approche en contraintes de l'équilibre élastique des milieux continus, il s'agit alors d'intégrer le champ des déformations (généralisées) pour remonter aux déplacements (généralisés). Cette dernière étape n'est pas toujours possible : dans ce cas, l'hypothèse d'équilibre **membranaire** de la coque est mise en défaut, et on doit traiter un problème général dans lequel efforts membranaires et flexion sont couplés.

Bien qu'elle ne soit pas toujours vérifiée, il est fréquent en phase initiale d'un projet de faire l'hypothèse d'un équilibre membranaire, qui permet d'estimer aisément les efforts intérieurs et d'obtenir ainsi un prédimensionnement. Il convient ensuite de vérifier que cette hypothèse est valide. Dans un grand nombre de situations pratiques, on constate que cette hypothèse n'est violée que **localement** : dans les phases suivantes du projet, la coque est alors renforcée dans ces zones uniquement afin de reprendre les efforts de flexion qui s'y développent.

Dans ce chapitre, on présente les équations des coques en équilibre membranaires, ainsi que quelques exemples d'application.

On rappelle que la théorie des coques en équilibre membranaire est formulée dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations. Il n'y a donc pas lieu de distinguer les configurations initiale  $\Sigma$  et actuelle  $\varsigma$  (toutes deux désignées par  $\Sigma$  dans ce qui suit), ni les contraintes généralisées  $\mathbf{N}^{KL}$  et  $\mathbf{N}^{kl}$  (toutes deux désignées par  $\mathbf{N}$  dans ce qui suit). De même, on ne distingue pas les opérateurs différentiels Div et div, Grad et grad.

### 9.1 Équilibre membranaire des coques

Dans l'hypothèse d'un équilibre membranaire, les équations d'équilibre d'une coque ont été établies au chapitre précédent sur la configuration **actuelle**. Puisqu'on confond ici confi-

gurations initiale et actuelle, ces équations d'équilibre s'écrivent simplement

$$\operatorname{div} \mathbf{N} + \mathbf{p} = \mathbf{0}, \quad (9.1)$$

où  $\mathbf{p}$  désigne la densité surfacique de forces (par unité de surface de la coque). Le tenseur  $\mathbf{N}$  est le tenseur des efforts membranaires ; c'est un tenseur symétrique du plan tangent, dont on rappelle l'interprétation physique.

**⚠ Interprétation physique des contraintes membranaires**

La résultante des efforts intérieurs exercés sur la facette  $ds$  de normale unitaire  $\mathbf{g}$  est

$$d\mathbf{R}_{\text{int}} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{g} ds.$$

À l'équation d'équilibre précédente, il faut joindre la condition aux limites sur  $\partial\Sigma$

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{g} = \mathbf{q},$$

où  $\mathbf{g}$  désigne la normale unitaire **sortante** au bord  $\partial\Sigma$  et  $\mathbf{q}$  est la densité linéique des forces exercées sur ce bord.

On rappelle que

1. Les forces exercées au bord de la coque sont nécessairement contenues dans le plan tangent.
2. Un point régulier de la coque ne peut équilibrer une force ponctuelle.

La projection selon la normale  $\mathbf{n}$  de l'équation aux dérivées partielles (9.1) conduit à une équation algébrique, dite **équation d'équilibre normal**

$$\mathbf{b} : \mathbf{N} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

où  $\mathbf{b}$  est le tenseur de courbure de la coque.

En résumé, l'équilibre membranaire d'une coque se met en équation de la façon suivante

$$\mathbf{a} \cdot \operatorname{div} \mathbf{N} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{p} = 0 \quad (\Sigma), \quad (9.2)$$

$$\mathbf{b} : \mathbf{N} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\Sigma), \quad (9.3)$$

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{g} = \mathbf{q} \quad (\partial\Sigma). \quad (9.4)$$

En général, la géométrie  $\Sigma$  de la coque et son chargement  $\mathbf{p}$  étant fixés, il est toujours possible de trouver une solution au système précédent. Par ailleurs, on évite lorsque c'est possible de résoudre l'équation aux dérivées partielles (9.2) en écrivant plutôt l'équilibre de sous-systèmes bien choisis.

## 9.2 Équilibre membranaire des coques axisymétriques

On considère la coque axisymétrique dont la génératrice est représentée ci-après (voir Figure 9.1). On rappelle l'expression du tenseur des courbures

$$\mathbf{b} = b_{tt} \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} - \frac{\cos \psi}{r} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta,$$

où  $b_{tt}$  désigne la courbure de la génératrice (vue comme une courbe plane). On suppose que les chargements surfacique  $\mathbf{p}$  et linéique  $\mathbf{q}$  sont axisymétriques et n'ont pas de composante orthoradiale

$$\mathbf{p} = p_t(s) \mathbf{t} + p_n(s) \mathbf{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{q} = q_t \mathbf{t}$$

où les composantes  $p_t$  et  $p_n$  et  $q_t$  ne dépendent pas de l'angle  $\theta$ .

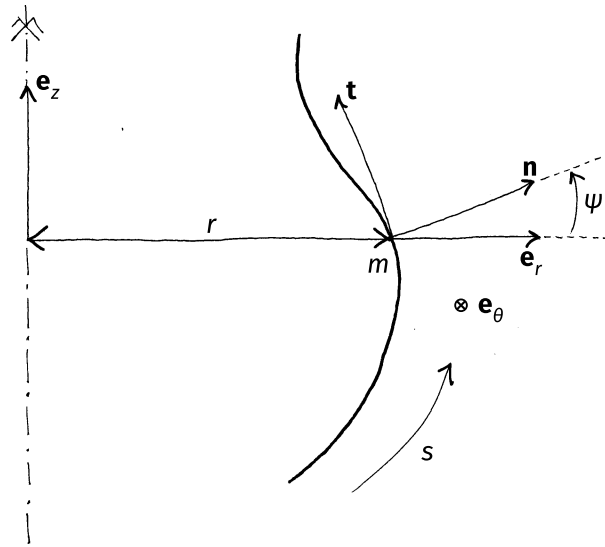


Figure 9.1: Génératrice de la coque axisymétrique considérée.

Soit  $\Pi$  un plan horizontal à l'altitude  $z$  fixée. On considère le sous-système  $\Sigma'$  constitué par la partie de la coque située **au-dessus** du plan  $\Pi$ . Les moments étant évalués par rapport à un point de l'axe de révolution, on s'intéresse au torseur des efforts extérieurs (résultante :  $\mathbf{R}'_{\text{ext}}$  ; moment :  $\mathbf{M}'_{\text{ext}}$ ) et intérieurs (résultante :  $\mathbf{R}'_{\text{int}}$  ; moment :  $\mathbf{M}'_{\text{int}}$ ) exercés sur ce sous-système. L'équilibre du sous-système considéré conduit à

$$\mathbf{R}'_{\text{int}} + \mathbf{R}'_{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}'_{\text{int}} + \mathbf{M}'_{\text{ext}} = \mathbf{0}.$$

Compte-tenu de l'invariance par rotation autour de l'axe vertical de la géométrie et du chargement, la composante verticale  $\mathbf{M}'_{\text{ext}} \cdot \mathbf{e}_z$  du moment des actions extérieures est nul

$$\mathbf{M}'_{\text{ext}} \cdot \mathbf{e}_z = \mathbf{M}'_{\text{int}} \cdot \mathbf{e}_z = 0.$$

Les efforts intérieurs s'exercent au droit de la coupure ; la normale sortante étant  $-\mathbf{t}$ , la densité linéique des efforts extérieurs est  $-\mathbf{N} \cdot \mathbf{t}$ . Si  $r$  désigne le rayon du parallèle contenu dans le plan  $\Pi$ , le moment des efforts intérieurs s'écrit

$$\mathbf{M}'_{\text{int}} = \int_0^{2\pi} (r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z) \wedge (-\mathbf{N} \cdot \mathbf{t}) r d\theta,$$

soit

$$\mathbf{M}'_{\text{int}} \cdot \mathbf{e}_z = - \int_0^{2\pi} r^2 (\mathbf{t} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_\theta) d\theta = -2\pi r^2 (\mathbf{t} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_\theta),$$

où l'on remarque que l'effort membranaire  $(\mathbf{t} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_\theta)$  est indépendant de  $\theta$ . On en déduit finalement que

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_\theta = 0$$

(pas de cisaillements plans). Il reste donc à déterminer les composantes  $N_{tt}$  et  $N_{\theta\theta}$  du tenseur des efforts membranaires.

Pour déterminer  $N_{tt}$ , il suffit d'écrire l'équilibre en résultante selon la verticale du sous-système  $\Sigma'$  considéré. En effet

$$\mathbf{R}'_{\text{int}} = \int_0^{2\pi} (-\mathbf{N} \cdot \mathbf{t}) r d\theta = -r N_{tt} \int_0^{2\pi} \mathbf{t} d\theta = -2\pi r \cos \psi N_{tt} \mathbf{e}_z,$$

soit

$$N_{tt} = \frac{\mathbf{R}'_{\text{ext}} \cdot \mathbf{e}_z}{2\pi r \cos \psi}.$$

La résultante  $\mathbf{R}'_{\text{ext}}$  dépend de l'application et doit être évaluée au cas par cas. On en déduit alors l'expression de  $N_{tt}$  par la relation précédente. Finalement, on utilise l'équation d'équilibre normal (9.3) pour déterminer  $N_{\theta\theta}$

$$N_{\theta\theta} = \frac{r}{\cos \psi} (b_{tt} N_{tt} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}).$$

### 9.3 Déformations des coques en équilibre membranaire

Dans l'hypothèse des petites perturbations, on peut linéariser l'expression des déformations membranaires en fonction du champ des déplacements

$$\mathbf{E} \simeq \boldsymbol{\epsilon} = \text{sym}(\mathbf{a} \cdot \text{grad } \mathbf{u}).$$

Afin de déterminer les déplacements, il faut relier les déformations membranaires aux efforts membranaires par l'intermédiaire des **relations de comportement**. Celles-ci ne peuvent être obtenues que par une analyse de la coque vue comme un solide tridimensionnel. Nous admettons ici que, pour une coque linéairement élastique

$$\mathbf{N} = \frac{E h}{1 - \nu^2} [(1 - \nu) \boldsymbol{\epsilon} + \nu (\text{tr } \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{a}],$$

où  $h$  désigne l'épaisseur de la coque,  $E$  son module d'Young et  $\nu$  son coefficient de Poisson. Dans une base orthonormée  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  du plan tangent, les relations de comportement s'écrivent

$$N_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}), \quad N_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11}),$$

$$N_{12} = \frac{Eh}{1+\nu} \varepsilon_{12}.$$

Ces relations s'inversent comme suit

$$\varepsilon_{11} = \frac{N_{11} - \nu N_{22}}{Eh}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{N_{22} - \nu N_{11}}{Eh} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{Eh} N_{12}.$$

Une fois déterminés les efforts membranaires, on peut alors établir l'expression des déformations membranaires linéarisées. Si celles-ci sont **géométriquement compatibles**, les déplacements sont alors obtenus par intégration. Dans le cas contraire, l'hypothèse d'équilibre membranaire n'était pas légitime et il est nécessaire de prendre en compte la **flexion** dans la coque.

## 10 Coques en flexion

Dans ce chapitre, on présente le modèle de Kirchhoff–Love. C’est le modèle de coques le plus simple qui permette de rendre compte de couplages membrane-flexion. Le modèle de membrane a été formulé au Chapitre 8 sous les hypothèses suivantes : (1) seuls les degrés de liberté de translation des points de la coque interviennent dans l’expression de la puissance des efforts extérieurs et (2) la puissance des efforts intérieurs est une forme linéaire du seul tenseur des déformations membranaires. Ces hypothèses très restrictives conduisent à un modèle qui n’a pas de raideur en flexion. On lève successivement ces deux hypothèses dans le présent chapitre, organisé comme suit. L’hypothèse de Kirchhoff–Love est introduite au § 10.1. Cette hypothèse permet de définir une rotation sans introduire de degrés de libertés supplémentaires, et donc de prendre en compte des moments extérieurs. On introduit ensuite au paragraphe § 10.2 le tenseur des variations des courbures, qui complète le tenseur des déformations membranaires : à eux deux, ils caractérisent les mouvements de corps rigides. Le modèle de Kirchhoff–Love est construit par la méthode des puissances virtuelles au § 10.3. Il est complété au § 10.4 par les relations de comportement pour un matériau constitutif de Kirchhoff–Saint-Venant. Finalement, une synthèse des équations du modèle est présentée au § 10.5.

### 10.1 L’hypothèse de Kirchhoff–Love

Dans le modèle de Kirchhoff–Love, les points matériels n’ont par construction que **trois degrés de liberté** de translation. Afin de rendre compte de phénomènes de flexion dans la coque, il est nécessaire de faire travailler les moments contre une **rotation**. Celle-ci est nécessairement **liée à la translation**, afin de ne pas introduire de nouveaux degrés de liberté. On se place ici dans l’hypothèse de Kirchhoff–Love : **la rotation des points matériels coïncide avec celle de la normale**.

Dans ce paragraphe, on établit donc l’expression de la vitesse de rotation instantanée de la normale. Celle-ci interviendra dans l’expression de la puissance des moments extérieurs (voir § 10.3.2). Le point de départ du calcul de cette vitesse instantanée de rotation est l’expression suivante de la dérivée temporelle de la normale  $\dot{\mathbf{n}}$

$$\dot{\mathbf{n}} = -\dot{\phi}, \quad \text{avec} \quad \dot{\phi} = \mathbf{n} \cdot \text{grad } \dot{\mathbf{u}}. \quad (10.1)$$



### 💡 Démonstration

Soit un point matériel  $(\xi, \eta)$  de la coque, occupant la position  $m$  sur la configuration actuelle  $\varsigma$ . On considère le vecteur matériel  $(d\xi, d\eta)$  issu de ce point, représenté par  $d\vec{m}$  en configuration actuelle. On a déjà vu que **RÉFÉRENCE**

$$d\dot{\vec{m}} = \mathbf{grad} \dot{u} \cdot d\vec{m}.$$

Or  $\mathbf{n} \cdot d\vec{m} = 0$  à chaque instant, puisque  $d\vec{m}$  est tangent à la configuration actuelle. En dérivant par rapport au temps, on obtient donc,

$$\dot{\mathbf{n}} \cdot d\vec{m} = -\mathbf{n} \cdot d\dot{\vec{m}} = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} \dot{u} \cdot d\vec{m} = -\hat{\phi} \cdot d\vec{m}, \quad \text{soit} \quad \dot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} = -\hat{\phi} \cdot \mathbf{v},$$

**pour tout vecteur  $\mathbf{v}$  du plan tangent à  $\varsigma$ .** Puisque  $\dot{\mathbf{n}}$  et  $\hat{\phi}$  sont tous deux des vecteurs du plan tangent ( $\dot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} = 0$  et  $\mathbf{grad} \dots \cdot \mathbf{n} = 0$ ), on obtient bien l'expression (10.1).

En remarquant que  $\mathbf{n}$  est un vecteur unitaire, donc  $\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{n}} = 0$ , on a par ailleurs

$$(\mathbf{n} \wedge \dot{\mathbf{n}}) \wedge \mathbf{n} = -\mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \dot{\mathbf{n}}) = -(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{n}}) \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \dot{\mathbf{n}} = \dot{\mathbf{n}}.$$

En d'autres termes, la dérivée temporelle de la normale s'exprime de la façon suivante

$$\dot{\mathbf{n}} = (\hat{\phi} \wedge \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n},$$

où le vecteur  $\hat{\phi} \wedge \mathbf{n}$  apparaît donc comme la vitesse instantanée de rotation de la normale. De même, pour un mouvement virtuel, la vitesse virtuelle instantanée de rotation de la normale est  $\hat{\phi} \wedge \mathbf{n}$ , avec

$$\hat{\phi} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} \hat{u}.$$

## 10.2 Tenseur des variations des courbures

### i Exemple

Considérons la transformation d'une feuille de papier, initialement plane, en un cylindre. On peut vérifier expérimentalement que dans cette transformation, les déformations membranaires sont nulles. Pour autant, la transformation n'est pas un mouvement rigidifiant, car la courbure de la feuille a changé. Les déformations membranaires ne permettent donc pas à elles seules de caractériser les mouvements rigidifiants et il faut lui associer au moins une autre variable de déformation.

Compte-tenu de l'exemple qui précède, on pressent que la nouvelle variable de déformation à définir sera liée au changement de courbure de la coque. Il s'agit donc de comparer les courbures initiale et actuelle,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{b}$ . Bien entendu, former la différence  $\mathbf{B} - \mathbf{b}$  n'a pas de sens, puisque les tenseurs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{b}$  ne vivent pas dans le même plan tangent. On doit donc par

exemple transporter le tenseur  $\mathbf{b}$  dans le plan tangent  $\mathcal{T}(M, \Sigma)$  avant de former la différence avec la courbure initiale.

À cet effet, on peut s'inspirer de la définition du tenseur des déformations membranaires

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{A}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{A}),$$

qui montre que le tenseur des déformations membranaires permet de mesurer les changements de métriques entre les configurations initiale ( $\mathbf{A}$ ) et actuelle ( $\mathbf{a}$ ). Par analogie, Koiter a ainsi introduit le tenseur suivant, dit **tenseur des variations des courbures**

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{B}.$$

Ce tenseur est un **tenseur du plan tangent à la configuration initiale, symétrique**.

Dans l'exemple précédent, on a  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ , mais  $\mathbf{K} \neq \mathbf{0}$ . On peut en fait montrer que les déformations généralisées  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{K}$  **caractérisent les mouvements de corps solides** de la coque. En d'autres termes, la coque subit un mouvement de corps solide si, et seulement si,  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ . □ **À FAIRE : ajouter la preuve** □

Les tenseurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{K}$  ainsi définis constituent les déformations généralisées intervenant dans la théorie de Kirchhoff–Love des coques. Ces déformations généralisées ne font intervenir que les variations de géométrie du feuillet de référence, c'est-à-dire le champ des déplacements  $\mathbf{u}$ .

En vue d'écrire la puissance des efforts intérieurs, il faut évaluer le **tenseur des taux des variation des courbure**, c'est-à-dire la dérivée de  $\mathbf{K}$  par rapport au temps, qui s'exprime de la façon suivante

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{F}, \quad \text{avec} \quad \dot{\mathbf{k}} = \text{grad}^T \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \text{grad} \dot{\phi}. \quad (10.2)$$

#### Démonstration

En utilisant la formule de transport du gradient

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{B} = -\mathbf{F}^T \cdot \text{grad} \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{B} = -\mathbf{F}^T \cdot \text{Grad} \mathbf{n} - \mathbf{B},$$

soit en dérivant par rapport au temps

$$\dot{\mathbf{K}} = -\dot{\mathbf{F}}^T \cdot \text{Grad} \mathbf{n} - \mathbf{F}^T \cdot \overline{\text{Grad} \mathbf{n}}.$$

L'opérateur **Grad** étant lagrangien, il commute avec la dérivée par rapport au temps :  $\overline{\text{Grad} \mathbf{n}} = \text{Grad} \dot{\mathbf{n}}$  donc

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}} &= -\dot{\mathbf{F}}^T \cdot \text{Grad} \mathbf{n} - \mathbf{F}^T \cdot \text{Grad} \dot{\mathbf{n}} = -\dot{\mathbf{F}}^T \cdot \text{grad} \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{F}^T \cdot \text{grad} \dot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F} \\ &= \dot{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{F}^T \cdot \text{grad} \dot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}, \end{aligned}$$

en utilisant une nouvelle fois la formule de transport du gradient. On remarque maintenant que

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} + \text{Grad} \mathbf{u}, \quad \text{soit} \quad \dot{\mathbf{F}} = \text{Grad} \dot{\mathbf{u}} = \text{grad} \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{F}$$

et finalement

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{grad}^T \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{grad} \dot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{grad}^T \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{grad} \dot{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{F}.$$

Dans l'expression précédente,  $\mathbf{grad}^T \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b}$  est un tenseur du plan tangent à la configuration actuelle, mais pas  $\mathbf{grad} \dot{\mathbf{n}}$ . Néanmoins, compte-tenu de la contraction à gauche avec  $\mathbf{F}$ , on peut remplacer  $\mathbf{grad} \dot{\mathbf{n}}$  par  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{grad} \dot{\mathbf{n}}$

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{grad}^T \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{grad} \dot{\mathbf{n}}$$

et on déduit (10.2) de (10.1).

Le tenseur  $\dot{\mathbf{K}}$  ainsi introduit est le **tenseur des taux eulériens des variations des courbures**. Il peut également être mis sous la forme suivante

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{grad} \dot{\mathbf{u}}). \quad (10.3)$$

#### 💡 Démonstration

En combinant les relations (10.2) et (10.1) (qui sera démontrée au § 10.3.2) on obtient

$$\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{grad}^T \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{grad}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} \dot{\mathbf{u}}), \quad (10.4)$$

puis, par définition de l'opérateur  $\mathbf{grad}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} \dot{\mathbf{u}}) &= \sum_{\alpha} \partial_{\alpha} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} \dot{\mathbf{u}}) \otimes \mathbf{a}_{\alpha}^* \\ &= \sum_{\alpha} (\partial_{\alpha} \mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{n} \cdot \partial_{\alpha} \mathbf{grad} \dot{\mathbf{u}}) \otimes \mathbf{a}_{\alpha}^* \\ &= \sum_{\alpha} (\mathbf{grad}^T \dot{\mathbf{u}} \cdot \partial_{\alpha} \mathbf{n}) \otimes \mathbf{a}_{\alpha}^* + \mathbf{n} \cdot \sum_{\alpha} \partial_{\alpha} \mathbf{grad} \dot{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{a}_{\alpha}^* \\ &= \sum_{\alpha} (\mathbf{grad}^T \dot{\mathbf{u}} \cdot \partial_{\alpha} \mathbf{n}) \otimes \mathbf{a}_{\alpha}^* + \mathbf{n} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{grad} \dot{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (10.5)$$

et en utilisant la formule de Weingarten RÉFÉRENCE

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} (\mathbf{grad}^T \dot{\mathbf{u}} \cdot \partial_{\alpha} \mathbf{n}) \otimes \mathbf{a}_{\alpha}^* &= - \sum_{\alpha} (\mathbf{grad}^T \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_{\alpha}) \otimes \mathbf{a}_{\alpha}^* \\ &= - \mathbf{grad}^T \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} \cdot \sum_{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha} \otimes \mathbf{a}_{\alpha}^* \\ &= - \mathbf{grad}^T \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = - \mathbf{grad}^T \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (10.6)$$

La relation (10.3) est finalement obtenue en combinant (10.4), (10.5) et (10.6).

Une conséquence importante de l'expression (10.3) est que le tenseur des taux eulériens des variations des courbures est un **tenseur symétrique du plan tangent à la configuration actuelle**.

Pour un champ  $\hat{\mathbf{u}}$  de vitesses virtuelles, on peut également définir les taux virtuels lagrangien  $\hat{\mathbf{K}}$  et eulérien  $\hat{\mathbf{k}}$  de la façon suivante

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{F}^\top \cdot \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{F}, \quad (10.7)$$

avec

$$\hat{\mathbf{k}} = \text{grad}^\top \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \text{grad} \hat{\phi} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{n} \cdot \text{grad grad} \hat{\mathbf{u}}).$$

## 10.3 Construction du modèle par les puissances virtuelles

### 10.3.1 Puissance virtuelle des efforts intérieurs

Les déformations de la coque sont caractérisées par les tenseurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{K}$ . On postule donc que la puissance virtuelle des efforts intérieurs est une forme linéaire des taux virtuels de ces deux tenseurs

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(\hat{\mathbf{u}}) = - \int_{\Sigma} (\mathbf{N}^{\text{KL}} : \hat{\mathbf{E}} + \mathbf{M}^{\text{KL}} : \hat{\mathbf{K}}) dA,$$

où les contraintes généralisées duales  $\mathbf{N}^{\text{KL}}$  et  $\mathbf{M}^{\text{KL}}$  sont le **tenseur des efforts membranaires** et le **tenseur des moments fléchissants**, respectivement. Comme  $\hat{\mathbf{E}}$  et  $\hat{\mathbf{K}}$  sont des tenseurs symétriques du plan tangent à la configuration initiale, les tenseurs  $\mathbf{N}^{\text{KL}}$  et  $\mathbf{M}^{\text{KL}}$  sont également des **tenseurs symétriques du plan tangent à la configuration initiale** (on ne saurait pas faire travailler des composantes hors-plan ou antisymétriques de ces tenseurs).

Les composantes du tenseur des efforts membranaires sont homogènes à une force par unité de longueur, tandis que les composantes du tenseur des moments fléchissants sont homogènes à un moment par unité de longueur (c'est-à-dire, une force). Ces tenseurs permettent d'écrire la puissance des efforts intérieurs sur la configuration initiale : ils jouent donc le même rôle que le **tenseur de Piola–Kirchhoff de seconde espèce** de la mécanique des milieux continus.

Exprimée sur la configuration actuelle, la puissance des efforts intérieurs s'écrit également comme suit

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = - \int_{\varsigma} (\mathbf{N}^{\text{kl}} : \hat{\mathbf{e}} + \mathbf{M}^{\text{KL}} : \hat{\mathbf{k}}) da, \quad (10.8)$$

où les tenseurs  $\mathbf{N}^{\text{kl}}$  et  $\mathbf{M}^{\text{kl}}$  sont des **tenseurs symétriques du plan tangent à la configuration actuelle** et jouent le même rôle (du point de vue de la puissance des efforts intérieurs, pas du point de vue des efforts intérieurs eux-mêmes) que le **tenseur de Cauchy** de la mécanique des milieux continus. Leur expression est donnée par les formules suivantes

$$\mathbf{N}^{\text{kl}} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}^{\text{KL}} \cdot \mathbf{F}^\top \quad \text{et} \quad \mathbf{M}^{\text{kl}} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{\text{KL}} \cdot \mathbf{F}^\top. \quad (10.9)$$

### 💡 Démonstration

On utilise la formule de transport de l'élément d'aire **RÉFÉRENCE** ainsi que les expressions **RÉFÉRENCE** et (10.7)

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = - \int_{\zeta} \left[ \mathbf{N}^{\text{KL}} : (\mathbf{F}^{\text{T}} \cdot \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{F}) + \mathbf{M}^{\text{KL}} : (\mathbf{F}^{\text{T}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{F}) \right] J^{-1} da,$$

d'où l'on déduit les expressions (10.9) en appliquant l'identité

$$\mathbf{A} : (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^{\text{T}}) : \mathbf{B} = (\mathbf{B}^{\text{T}} \cdot \mathbf{A}) : \mathbf{C}.$$

Dans la théorie de Kirchhoff–Love des coques, il est difficile de donner une interprétation physique aux tenseurs  $\mathbf{N}^{\text{kl}}$  et  $\mathbf{M}^{\text{kl}}$ , qui, contrairement aux membranes, ne donnent pas directement accès aux résultantes et aux moments s'exerçant sur une facette orientée. On retiendra néanmoins que  $\mathbf{N}^{\text{kl}} \cdot \mathbf{g} ds$  correspond « à peu près » à la composante dans le plan de la résultante des efforts intérieurs exercés sur la facette  $\mathbf{g} ds$ , tandis  $\mathbf{M}^{\text{kl}} \cdot \mathbf{g} ds$  correspond « à peu près » au moment des efforts intérieurs exercés sur cette facette.

### 10.3.2 Puissance virtuelle des efforts extérieurs

La coque est soumise aux efforts suivants

- forces surfaciques appliquées à  $\zeta$ , de densité  $\mathbf{p}$ ,
- forces linéiques appliquées à  $\partial\zeta$ , de densité  $\mathbf{q}$ ,
- couples surfaciques appliquées à  $\zeta$ , de densité  $\mathbf{c}$ ,
- couples linéiques appliqués à  $\partial\zeta$ , de densité  $\mathbf{m}$ .

Toutes ces densités sont exprimées par unité de surface ou de longueur mesurées **sur la configuration actuelle**. Dans l'hypothèse de Kirchhoff–Love, chaque point matériel de la coque est animé d'une vitesse virtuelle de translation  $\hat{\mathbf{u}}$  et une vitesse virtuelle instantanée de rotation  $\hat{\phi} \wedge \mathbf{n}$ . La puissance virtuelle des efforts extérieurs a donc pour expression

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(\hat{\mathbf{u}}) = \int_{\zeta} [\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{c} \cdot (\hat{\phi} \wedge \mathbf{n})] da + \int_{\partial\zeta} [\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{m} \cdot (\hat{\phi} \wedge \mathbf{n})] ds. \quad (10.10)$$

### 10.3.3 Équations d'équilibre

On obtient les équations d'équilibre portant sur les contraintes généralisées  $\mathbf{N}^{\text{kl}}$  et  $\mathbf{M}^{\text{kl}}$  en écrivant le principe des puissances virtuelles **sur la configuration actuelle**

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(\hat{\mathbf{u}}) + \mathcal{P}_{\text{ext}}(\hat{\mathbf{u}}) = 0 \quad \text{pour tout mouvement virtuel } \hat{\mathbf{u}},$$

où les puissances virtuelles des efforts intérieurs et extérieurs sont données par les expressions (10.8) et (10.10), respectivement. En procédant aux nécessaires intégrations par parties, on peut en principe en déduire la forme forte des équations d'équilibre. Néanmoins,

ces équations sont peu commodes à manipuler et ne permettent pas (contrairement aux membranes par exemple) de déterminer la signification physique précise des contraintes généralisées  $\mathbf{N}^{kl}$  et  $\mathbf{M}^{kl}$ . Dans le présent cours, on renoncera donc à établir ces équations d'équilibre. Ainsi, pour tout problème de flexion d'une coque, on devra écrire le principe des puissances virtuelles pour déterminer l'ensemble des champs de contraintes généralisées statiquement admissibles.

## 10.4 Comportement des coques de Kirchhoff–Love

Dans l'approche bidimensionnelle suivie ici, il n'est pas possible d'établir les relations de comportement de la coque. Une analyse tridimensionnelle est nécessaire pour faire le lien entre contraintes de Cauchy et contraintes généralisées de Kirchhoff–Love. Nous admettrons dans ce cours les relations de comportement suivantes, valables pour une **coque mince, en grandes transformations mais petites déformations**

$$\mathbf{N}^{KL} = K[(1 - \nu)\mathbf{E} + \nu(\text{tr } \mathbf{E})\mathbf{A}] \quad \text{et} \quad \mathbf{M}^{KL} = D[(1 - \nu)\mathbf{K} + \nu(\text{tr } \mathbf{K})\mathbf{A}],$$

où  $K$  et  $D$  désignent la raideur membranaire et la raideur en flexion, respectivement

$$K = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \quad \text{et} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}.$$

Ces relations négligent les **couplages flexion-membrane** et ne sont donc valables en toute rigueur que pour des coques très minces.

### **i** Note

La coque est en **grandes transformations et petites déformations**. En particulier, les déplacements ne sont pas nécessairement petits, ni les variations de courbures. En revanche, les **déformations locales** (tridimensionnelles) sont supposées petites, ce qui explique pourquoi la loi de comportement peut être supposée élastique, linéaire.

## 10.5 Équilibre élastique des coques de Kirchhoff–Love

On s'intéresse ici au problème de l'équilibre d'une coque de Kirchhoff–Love élastique. Cette coque est soumise à un chargement  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{m}$  ainsi qu'à des conditions aux limites cinématiques au bord. On souhaite alors déterminer la **figure d'équilibre** (c'est-à-dire, la configuration déformée – les déplacements suffisent) ainsi que l'**état de contraintes** de la coque. On présente dans ce paragraphe une synthèse de toutes les équations nécessaires à la résolution de ce problème. On supposera que la densité surfacique de couples  $\mathbf{c}$  est nulle.

### 10.5.1 Équations générales

On obtient les équations d'équilibre en écrivant le PPV **sur la configuration actuelle**

$$\int_{\zeta} (-\mathbf{N}^{kl} : \hat{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathbf{M}^{kl} : \hat{\boldsymbol{\kappa}} + \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{u}}) da + \int_{\partial\zeta} [\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{m} \cdot (\hat{\boldsymbol{\phi}} \wedge \mathbf{n})] ds = 0,$$

avec

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \text{sym}(\mathbf{a} \cdot \text{grad } \hat{\mathbf{u}}), \quad \hat{\boldsymbol{\kappa}} = \text{grad}^T \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \text{grad } \hat{\boldsymbol{\phi}} \quad \text{et} \quad \hat{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{n} \cdot \text{grad } \hat{\mathbf{u}}.$$

Les déformations généralisées s'écrivent par ailleurs en fonction des déplacements généralisées (relations de « compatibilité géométrique »).

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} + \text{Grad } \mathbf{u}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{A}) \quad \text{et} \quad \mathbf{K} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{B}.$$

Enfin, les relations de comportement s'écrivent **sur la configuration initiale**

$$\mathbf{N}^{KL} = K[(1 - \nu)\mathbf{E} + \nu(\text{tr } \mathbf{E})\mathbf{A}] \quad \text{et} \quad \mathbf{M}^{KL} = D[(1 - \nu)\mathbf{K} + \nu(\text{tr } \mathbf{K})\mathbf{A}],$$

avec les relations de transport

$$\mathbf{N}^{kl} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}^{KL} \cdot \mathbf{F}^T \quad \text{et} \quad \mathbf{M}^{kl} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{M}^{KL} \cdot \mathbf{F}^T.$$

Contrairement aux équations d'équilibre, établies par le PPV sur la configuration actuelle, ces relations de comportement sont écrites sur la configuration initiale et font intervenir les grandeurs lagrangiennes  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{N}^{KL}$  et  $\mathbf{M}^{KL}$ .

### 10.5.2 Équations dans l'hypothèse des petites perturbations

Dans l'hypothèse des petites perturbations, le déplacement et les déformations sont « petits ». On linéarise toutes les expressions vis-à-vis du déplacement  $\mathbf{u}$ . Il n'y a alors plus lieu de distinguer les configurations initiale ou actuelle, ni les contraintes généralisées lagrangiennes ( $\mathbf{N}^{KL}$ ,  $\mathbf{M}^{KL}$ ) ou eulériennes ( $\mathbf{N}^{kl}$ ,  $\mathbf{M}^{kl}$ ). Les équations précédentes se simplifient de la façon suivante

$$\begin{aligned} \int_{\zeta} (-\mathbf{N} : \boldsymbol{\epsilon} - \mathbf{M} : \boldsymbol{\kappa} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}) da + \int_{\partial\zeta} [\mathbf{q} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\phi} \wedge \mathbf{n})] ds &= 0, \\ \boldsymbol{\epsilon} &= \text{sym}(\mathbf{a} \cdot \text{grad } \mathbf{u}), \quad \boldsymbol{\kappa} = \text{grad}^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \text{grad } \boldsymbol{\phi} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\phi} = \mathbf{n} \cdot \text{grad } \mathbf{u}, \\ \boldsymbol{\epsilon} &= \text{sym}(\mathbf{a} \cdot \text{grad } \mathbf{u}), \quad \boldsymbol{\kappa} = \text{grad}^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \text{grad } \boldsymbol{\phi} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\phi} = \mathbf{n} \cdot \text{grad } \mathbf{u}, \\ \mathbf{N} &= K[(1 - \nu)\boldsymbol{\epsilon} + \nu(\text{tr } \boldsymbol{\epsilon})\mathbf{a}] \quad \text{et} \quad \mathbf{M} = D[(1 - \nu)\boldsymbol{\kappa} + \nu(\text{tr } \boldsymbol{\kappa})\mathbf{a}]. \end{aligned}$$

# 11 Équations d'équilibre incrémentales

On s'intéresse dans ce chapitre à la variation de l'état de contraintes d'une coque, lorsque le chargement est modifié de façon infinitésimale. On peut alors écrire **sur la configuration actuelle** des équations d'équilibre dites **linéarisées au voisinage d'une position d'équilibre**. Sur le plan théorique, ces équations permettent par exemple de détecter les éventuelles bifurcations d'un système mécanique. En pratique, elles sont aussi très utilisées en mécanique numérique.

Dans ce chapitre, on introduit explicitement le temps, qui apparaît ici comme un simple paramètre de chargement (puisque les effets d'inertie ne sont pas pris en compte). Lorsque c'est nécessaire, l'instant considéré est rappelé en indice.

## 11.1 Principe du calcul

On considère une coque soumise à un chargement quasi-statique dépendant du temps  $t$ . À  $t = 0$ , le chargement est nul et la coque au repos occupe sa configuration initiale  $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ . À l'instant  $t$ , la coque est en équilibre avec son chargement, que l'on désigne symboliquement  $Q_t$  ; elle occupe la configuration  $\varsigma \subset \mathbb{R}^3$ . À l'instant  $t' = t + \delta t$ , le chargement vaut  $Q' = Q + \dot{Q} \delta t$  et la figure d'équilibre de la coque est maintenant  $\varsigma' \subset \mathbb{R}^3$  ;  $\varsigma'$  est « proche » de  $\varsigma$  : le déplacement entre ces deux configurations s'écrit

$$\overrightarrow{mm'} = \overrightarrow{Mm'} - \overrightarrow{Mm} = \mathbf{u}' - \mathbf{u} = \dot{\mathbf{u}} \delta t.$$

Le principe des puissances virtuelles est satisfait à chaque instant, soit

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{P}_{\text{ext}}(\dot{\mathbf{u}}) = 0 \quad \text{pour tous } t \text{ et } \dot{\mathbf{u}}.$$

En utilisant **le même champ des vitesses virtuelles** à  $t$  et  $t + \delta t$ , on peut dériver l'expression précédente : on obtient alors le PPV sous forme incrémentale

$$\dot{\mathcal{P}}_{\text{int}}(\dot{\mathbf{u}}) + \dot{\mathcal{P}}_{\text{ext}}(\dot{\mathbf{u}}) = 0 \quad \text{pour tout } \dot{\mathbf{u}}.$$

On doit donc calculer les dérivées temporelles des puissances virtuelles  $\mathcal{P}_{\text{int}}$  et  $\mathcal{P}_{\text{ext}}$ . En ce qui concerne la dérivée de la puissance virtuelle des efforts intérieurs, le calcul est développé au paragraphe § 11.2. L'expression de la puissance virtuelle des actions extérieures dépend de l'application considérée, et on présentera quelques exemples dans le § 11.5. On cherchera à écrire  $\dot{\mathcal{P}}_{\text{int}}$  et  $\dot{\mathcal{P}}_{\text{ext}}$  sur la **configuration actuelle** (à  $t$ ). Cependant, les dérivations par rapport au temps seront d'abord effectuées sur la configuration initiale (**en représentation Lagrangienne**).



## 11.2 Taux de puissance virtuelle des efforts intérieurs

L'expression **lagrangienne** de la puissance virtuelle des efforts intérieurs à l'instant  $t$  est

$$\mathcal{P}_{\text{int}}(\hat{\mathbf{u}}) = - \int_{\Sigma} (\mathbf{N}^{\text{KL}} : \dot{\hat{\mathbf{E}}} + \mathbf{M}^{\text{KL}} : \dot{\hat{\mathbf{K}}}) dA,$$

soit, en dérivant par rapport au temps (la configuration  $\Sigma$  étant **fixe**)

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{P}}_{\text{int}}(\hat{\mathbf{u}}) = & - \int_{\Sigma} (\dot{\mathbf{N}}^{\text{KL}} : \dot{\hat{\mathbf{E}}} + \dot{\mathbf{M}}^{\text{KL}} : \dot{\hat{\mathbf{K}}}) dA \\ & - \int_{\Sigma} (\mathbf{N}^{\text{KL}} : \ddot{\hat{\mathbf{E}}} + \mathbf{M}^{\text{KL}} : \ddot{\hat{\mathbf{K}}}) dA. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Comme au Chapitre 10, le premier terme peut être mis sous la forme d'une intégrale sur la **configuration actuelle**

$$\int_{\Sigma} (\dot{\mathbf{N}}^{\text{KL}} : \dot{\hat{\mathbf{E}}} + \dot{\mathbf{M}}^{\text{KL}} : \dot{\hat{\mathbf{K}}}) dA = \int_{\zeta} (\dot{\mathbf{N}}^{\text{kl}} : \dot{\hat{\mathbf{e}}} + \dot{\mathbf{M}}^{\text{kl}} : \dot{\hat{\mathbf{k}}}) da,$$

en posant

$$\dot{\mathbf{N}}^{\text{kl}} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{N}}^{\text{KL}} \cdot \mathbf{F}^{\text{T}} \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{M}}^{\text{kl}} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{M}}^{\text{KL}} \cdot \mathbf{F}^{\text{T}}.$$

Les tenseurs  $\dot{\mathbf{N}}^{\text{kl}}$  et  $\dot{\mathbf{M}}^{\text{kl}}$  sont des **tenseurs symétriques du plan tangent à la configuration actuelle**. Ils sont homogènes à des taux de variations de contraintes généralisées, mais **ce ne sont pas les dérivées temporelles des contraintes généralisées eulériennes**. On rappelle que

$$\hat{\mathbf{e}} = \text{sym}(\mathbf{a} \cdot \text{grad } \hat{\mathbf{u}}), \quad \hat{\mathbf{k}} = \text{grad}^{\text{T}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \text{grad } \hat{\phi} \quad \text{et} \quad \hat{\phi} = \mathbf{n} \cdot \text{grad } \hat{\mathbf{u}}.$$

Le second terme de l'équation 11.1 fait intervenir les contraintes généralisées  $\mathbf{N}^{\text{kl}}$  et  $\mathbf{M}^{\text{kl}}$  à l'instant  $t$ . Ces contraintes généralisées sont supposées être connues (leurs « incréments »  $\dot{\mathbf{N}}^{\text{kl}}$  et  $\dot{\mathbf{M}}^{\text{kl}}$  sont quant à eux inconnus). Ce terme est nommé **raideur géométrique** : on verra qu'il traduit le fait qu'une précontrainte peut raidir (ou assouplir) un système. Par exemple, la fréquence propre fondamentale d'une corde de guitare croît avec la tension : elle apparaît donc comme « plus raide » lorsqu'elle est tendue (même si son matériau constitutif, et donc sa **raideur matérielle**, ne change pas). Les raideurs géométriques associées aux efforts membranaires et aux moments fléchissants sont calculées au § 11.3 et au § 11.4.

## 11.3 Raideur géométrique associée aux efforts membranaires

On s'intéresse ici au terme suivant

$$\int_{\Sigma} \mathbf{N}^{\text{KL}} : \dot{\hat{\mathbf{E}}} dA$$

On calcule tout d'abord  $\dot{\mathbf{E}}$ . Par définition du tenseur des taux virtuels des déformations membranaires, on a

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\mathbf{Grad} \hat{\mathbf{u}}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{Grad} \hat{\mathbf{u}})$$

et, puisque le champs des vitesses virtuelles  $\hat{\mathbf{u}}$  est indépendant du temps  $t$

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\mathbf{Grad} \hat{\mathbf{u}}^T \cdot \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{Grad} \hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Grad} \hat{\mathbf{u}}^T \cdot \mathbf{Grad} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{Grad}^T \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{Grad} \hat{\mathbf{u}}),$$

soit (puisque  $\mathbf{N}^{KL}$  est symétrique)

$$\mathbf{N}^{KL} : \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{N}^{KL} : (\mathbf{Grad}^T \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{Grad} \hat{\mathbf{u}}) = (\mathbf{Grad} \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{N}^{KL}) : \mathbf{Grad} \hat{\mathbf{u}}$$

et, en utilisant la formule de transport du gradient (eq?)-

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^{KL} : \dot{\mathbf{E}} &= (\mathbf{grad} \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}^{KL}) : (\mathbf{grad} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{F}) \\ &= (\mathbf{grad} \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}^{KL} \cdot \mathbf{F}^T) : \mathbf{grad} \hat{\mathbf{u}} \\ &= J (\mathbf{grad} \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{N}^{kl}) : \mathbf{grad} \hat{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

Finalement, en reconnaissant la formule de transport des aires  $da = J dA$ , on obtient l'expression

$$\int_{\Sigma} \mathbf{N}^{KL} : \dot{\mathbf{E}} dA = \int_{\zeta} (\mathbf{grad} \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{N}^{kl}) : \mathbf{grad} \hat{\mathbf{u}} da.$$

## 11.4 Raideur géométrique associée aux moments fléchissants

On se restreindra dans ce cours aux situations où la coque n'est pas fléchiée à  $t$ , c'est-à-dire que  $\mathbf{M}^{kl} = \mathbf{M}^{KL} = \mathbf{0}$ . La raideur géométrique associée aux moments fléchissants est donc nulle.

## 11.5 Taux de puissance virtuelle des efforts extérieurs

L'expression de la dérivée par rapport au temps de la puissance virtuelle des efforts extérieurs dépend du problème considéré. Elle doit être établie avec soin, en tenant notamment compte du fait que **la surface de la coque varie entre  $t$  et  $t'$** . On écrira  $\dot{\mathcal{P}}_{\text{ext}}$  sur la configuration actuelle  $\zeta$ , sous la forme générale suivante

$$\dot{\mathcal{P}}_{\text{ext}}(\hat{\mathbf{u}}) = \int_{\zeta} [\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\boldsymbol{\phi}} \wedge \mathbf{n})] da + \int_{\partial\zeta} [\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{m}} \cdot (\hat{\boldsymbol{\phi}} \wedge \mathbf{n})] ds.$$

où  $\hat{\mathbf{p}}$  et  $\hat{\mathbf{q}}$  sont des taux de densités (surfactive, linéique) de forces, tandis que  $\hat{\mathbf{c}}$  et  $\hat{\mathbf{m}}$  sont des taux de densités (surfactive, linéique) de moments. Ces densités ne sont en général pas la dérivée par rapport au temps des densités  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{c}$  et  $\mathbf{m}$ .

**i** Exemple: ballon sphérique sous pression

On considère un ballon sous pression  $p(t)$ , de rayon  $r(t) = \lambda(t) R$ , où  $R$  est le rayon initial. Le champ des déplacements est  $\mathbf{u} = (r-R) \mathbf{N}$ , soit  $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\lambda} R \mathbf{N}$  (puisque le vecteur normal ne change pas de direction). Le champ des vitesses virtuelles est purement radial :  $\hat{\mathbf{u}} = \hat{w} \mathbf{N}$ . Alors

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(\hat{\mathbf{u}}) = \int_{\zeta} p \hat{w} da = \int_{\Sigma} (p J) \hat{w} dA,$$

soit

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{P}}_{\text{ext}}(\hat{\mathbf{u}}) &= \int_{\Sigma} (\dot{p} J + p \dot{J}) \hat{w} dA = \int_{\Sigma} (\dot{p} + p J^{-1} \dot{J}) \hat{w} J dA \\ &= \int_{\zeta} (\dot{p} + p J^{-1} \dot{J}) \hat{w} da = \int_{\zeta} \dot{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{u}} da, \end{aligned}$$

en posant

$$\dot{\mathbf{p}} = (\dot{p} + p J^{-1} \dot{J}) \mathbf{N} = \dot{\mathbf{p}} + J^{-1} \dot{J} \mathbf{p}.$$

Le second terme (qu'il ne faut pas oublier !) rend compte des changements d'aire du ballon au cours du chargement.

**i** Exemple: coque cylindrique en compression axiale

On considère une coque cylindrique d'axe  $\mathbf{e}_z$ , de rayon initial  $R$  et de longueur initiale  $L$ . Elle repose sans frottement sur un plateau inférieur indéformable, horizontal. Une charge verticale  $-Q \mathbf{e}_z$  lui est appliquée sans frottement par l'intermédiaire d'un piston fixé à un plateau rigide. On suppose que la transformation est axisymétrique, c'est-à-dire que

$$\mathbf{u} = u(z) \mathbf{e}_z + w(z) \mathbf{e}_r \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{u}} = \hat{u}(z) \mathbf{e}_z + \hat{w}(z) \mathbf{e}_r.$$

La puissance des efforts extérieurs a alors pour expression

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(\hat{u}, \hat{w}) = \int_{\gamma} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{u}} ds = \int_{\gamma} (q_z \hat{u} + q_r \hat{w}) ds,$$

où  $\mathbf{q}$  désigne la densité linéique des efforts exercés par le plateau sur la partie supérieure  $\gamma$  du cylindre. Cette densité est exprimée par unité de longueur de la configuration actuelle. En l'absence de frottement, on a  $q_r = 0$  et (puisque  $\hat{u}$  est indépendant de  $\theta$ )

$$\mathcal{P}_{\text{ext}}(\hat{u}, \hat{w}) = \hat{u} \int_{\gamma} q_z ds = Q \hat{u},$$

soit finalement

$$\dot{\mathcal{P}}_{\text{ext}}(\hat{u}, \hat{w}) = \dot{Q} \hat{u}.$$

## 11.6 Forme incrémentale du principe des puissances virtuelles

En rassemblant les résultats précédents, on trouve donc finalement

$$\dot{\mathcal{P}}_{\text{int}}(\hat{\mathbf{u}}) = - \int_{\zeta} [\dot{\mathbf{N}}^{\text{kl}} : \hat{\mathbf{e}} + \dot{\mathbf{M}}^{\text{kl}} : \hat{\mathbf{k}} + (\mathbf{grad} \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{N}^{\text{kl}}) : \mathbf{grad} \hat{\mathbf{u}}] da$$

et

$$\dot{\mathcal{P}}_{\text{ext}}(\hat{\mathbf{u}}) = \int_{\zeta} [\dot{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{c}} \cdot (\hat{\boldsymbol{\phi}} \wedge \mathbf{n})] da + \int_{\partial\zeta} [\dot{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{m}} \cdot (\hat{\boldsymbol{\phi}} \wedge \mathbf{n})] ds.$$

On obtiendra alors les équations d'équilibre incrémentales, portant sur  $\dot{\mathbf{N}}^{\text{kl}}$  et  $\dot{\mathbf{M}}^{\text{kl}}$  (les contraintes généralisées  $\mathbf{N}^{\text{kl}}$  et  $\mathbf{M}^{\text{kl}}$  étant connues), en écrivant le principe des puissances virtuelles sous forme incrémentale

$$\dot{\mathcal{P}}_{\text{int}}(\hat{\mathbf{u}}) + \dot{\mathcal{P}}_{\text{ext}}(\hat{\mathbf{u}}) = 0 \quad \text{pour tout } \hat{\mathbf{u}}.$$

## 11.7 Relations de comportement incrémentales

On suppose que la coque obéit aux lois de comportement élastiques, linéaires, découplées, suivantes

$$\mathbf{N}^{\text{KL}} = \mathbf{C}_{EE} : \mathbf{E} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}^{\text{KL}} = \mathbf{C}_{KK} : \mathbf{K}.$$

En dérivant par rapport au temps, on a alors

$$\dot{\mathbf{N}}^{\text{KL}} = \mathbf{C}_{EE} : \dot{\mathbf{E}} \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{M}}^{\text{KL}} = \mathbf{C}_{KK} : \dot{\mathbf{K}},$$

soit

$$\dot{\mathbf{N}}^{\text{kl}} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot [\mathbf{C}_{EE} : (\mathbf{F}^{\text{T}} \cdot \dot{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{F})] \cdot \mathbf{F}^{\text{T}} = \mathbf{C}_{\varepsilon\varepsilon} : \dot{\mathbf{e}}$$

et

$$\dot{\mathbf{M}}^{\text{kl}} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot [\mathbf{C}_{KK} : (\mathbf{F}^{\text{T}} \cdot \dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{F})] \cdot \mathbf{F}^{\text{T}} = \mathbf{C}_{\kappa\kappa} : \dot{\mathbf{k}},$$

en posant

$$C_{\varepsilon\varepsilon,ijkl} = F_{iL} F_{jJ} F_{kK} F_{lL} C_{EE,IJKL} \quad \text{et} \quad C_{\kappa\kappa,ijkl} = F_{iL} F_{jJ} F_{kK} F_{lL} C_{KK,IJKL}.$$

# A Rappels de géométrie différentielle

## A.1 Courbes paramétrées

### A.1.1 Définition

Une courbe paramétrée  $\Gamma$  du plan  $\mathbb{R}^2$  ou de l'espace  $\mathbb{R}^3$  est l'ensemble des points  $M = f(t)$  de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2, 3$ ) images par l'application  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , du paramètre réel  $a \leq t \leq b$  (voir Figure A.1)

$$\Gamma = \{M \in \mathbb{R}^d | \exists t \in [a, b] : M = f(t)\}.$$

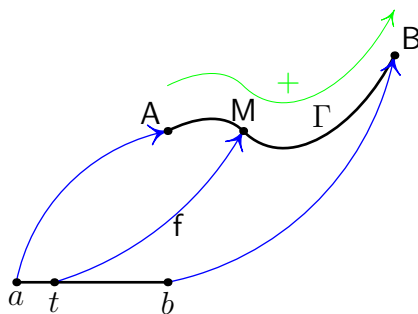


Figure A.1: La courbe  $\Gamma$  est paramétrée par  $f$ .

On supposera dans ce qui suit l'application  $f$  suffisamment régulière (en général, au moins une fois continûment dérivable par morceaux) pour que toutes les relations faisant intervenir  $f$  et ses dérivées aient un sens. En particulier, l'application  $f$  est *continue*: la courbe décrite par  $f$  dans  $\mathbb{R}^d$  est donc elle-même continue au sens usuel du terme : on trace cette courbe sans lever le crayon.

Le choix du paramétrage  $t \mapsto f(t)$  définit naturellement une *orientation* de la courbe  $\Gamma$ , de son *origine*  $A = f(a)$  vers son extrémité  $B = f(b)$ . Toute application  $\Phi: [a', b'] \leftrightarrow [a, b]$  strictement croissante et régulière permet de définir le nouveau paramétrage  $f \circ \Phi$  de la courbe  $\Gamma$ . Dans ce changement de paramètre, l'orientation de la courbe est préservée.

#### **i** Note

Dans le plan ( $d = 2$ ) et dans l'espace ( $d = 3$ ), respectivement, l'application  $f$  est définie par les *équations paramétriques*  $(x(t), y(t))$  et  $x(t), y(t), z(t)$ , respectivement, de la courbe

$\Gamma$

$$f(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad f(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}.$$

### A.1.2 Tangente

Notion intuitive : soit  $M = f(t) \in \Gamma$  fixé. On considère le point  $M' = f(t')$ , voisin de  $M$ . La droite  $(MM')$  définit une *sécante* à la courbe  $\Gamma$ . Lorsque  $M'$  « se rapproche de  $M$  » (voir Figure A.2), cette sécante se rapproche de la *tangente* à  $\Gamma$  en  $M$  qui est donc définie comme la droite passant par  $M$  et de vecteur directeur

$$\lim_{t' \rightarrow t} \frac{\overrightarrow{MM'}}{t' - t} = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{M' - M}{t' - t} = \dot{f}(t),$$

où le point désigne la dérivée par rapport au paramètre  $t$ . Le vecteur  $\dot{f}(t)$  est donc un vecteur tangent au point  $f(t)$  de la courbe  $\Gamma$ .

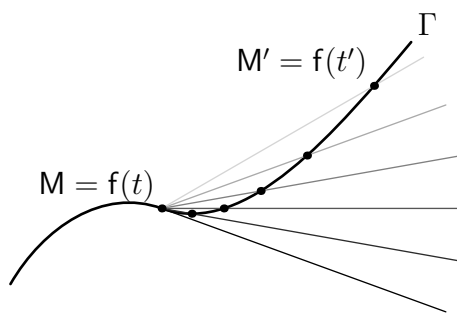


Figure A.2: Construction de la tangente à la courbe  $\Gamma$  au point  $M$ .

#### **i** Note

On vérifie aisément que la droite tangente ainsi définie est invariante par changement de paramètre.

#### **i** Note

Les coordonnées du vecteur tangent, sont en dimensions 2 et 3, respectivement

$$\dot{f}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \dot{f}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}.$$

### A.1.3 Rectification d'une courbe

On cherche à calculer la longueur de l'arc AB. À cet effet, on approxime l'arc par une ligne polygonale  $M_0 = A, M_1, \dots, M_n = B$ , où  $M_k$  est le point de  $\Gamma$  d'antécédent  $t_k$  par  $f$  ( $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ ). La longueur de cette ligne polygonale est (voir Figure A.3)

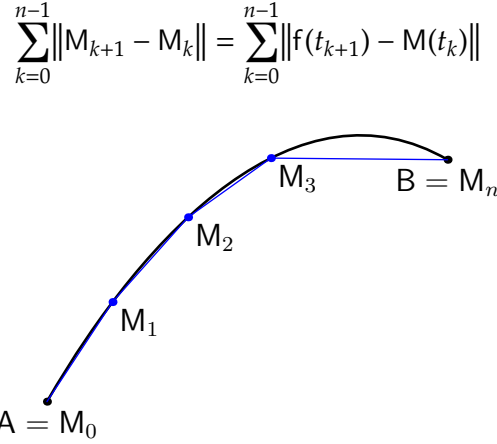


Figure A.3: Approximation de l'arc AB construit sur  $\Gamma$  par une ligne brisée.

Si les points  $M_k$  sont suffisamment rapprochés, on peut remplacer la sécante par la tangente

$$\sum_{k=0}^{n-1} \|M_{k+1} - M_k\| \simeq \sum_{k=0}^{n-1} \|\dot{f}(t_k)\| (t_{k+1} - t_k)$$

et la somme discrète par une intégrale

$$\sum_{k=0}^{n-1} \|M_{k+1} - M_k\| \simeq \int_a^b \|\dot{f}(t)\| dt.$$

L'intégrale ci-dessus est la longueur de l'arc AB tracé sur la courbe  $\Gamma$

$$\mathcal{L}_\Gamma(A, B) = \int_a^b \|\dot{f}(t)\| dt. \quad (\text{A.1})$$

#### **i** Note

On vérifie aisément que cette expression est invariante par changement de paramètre.

On peut de même mesurer pour tout point  $M$  situé entre  $A$  et  $B$ , la longueur de l'arc AB : c'est l'*abscisse curviligne*  $s$  du point  $M$ , l'origine étant fixée en  $A$  :  $s = \mathcal{L}_\Gamma(A, M)$ . On définit ainsi une application  $\Psi: [a, b] \rightarrow [0, L]$

$$s = \Psi(t) = \int_a^t \|\dot{f}(u)\| du.$$

La fonction ainsi définie étant croissante et suffisamment régulière, elle est inversible :  $t = \Phi(s)$ . L'application  $f \circ \Phi$  définit un paramétrage particulier de la courbe par l'abscisse curviligne  $s$ . On dit qu'on a *rectifié* la courbe  $\Gamma$ .

#### **i** Note

La définition (A.1) est *algébrique*. Plus précisément, si on choisit pour origine des abscisses curvilignes le point C de paramètre  $c$  ( $a < c < b$ ), alors l'abscisse curviligne  $\int_c^t \|\dot{f}(t)\| dt$  du point  $M = f(t)$  est *négative* si M est entre A et C ( $a \leq t \leq c$ ), et *positive* si M est entre C et B ( $c \leq t \leq b$ ).

### A.1.4 Vecteur tangent unitaire

On suppose la courbe  $\Gamma$  rectifiée, et on note  $s \mapsto f(s)$  le paramétrage associé. Le vecteur  $\mathbf{t} = f'(s)$  est *tangent* à  $\Gamma$  au point  $M = f(s)$  (voir @).

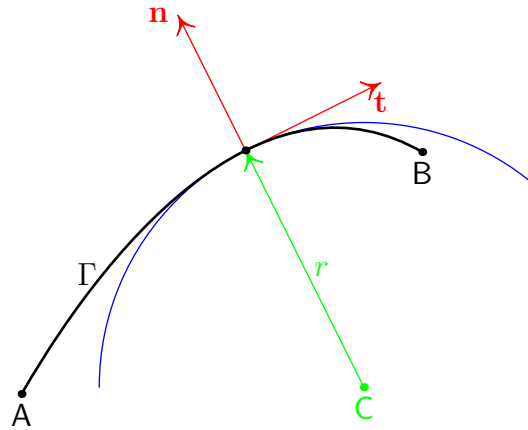


Figure A.4: Les vecteurs unitaires  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{n}$  forment la base de Frénet. Le point C est le centre de courbure, et le cercle bleu est le cercle osculateur en M.

On vérifie aisément que ce vecteur est unitaire. En effet, la longueur de l'arc AM tracé sur  $\Gamma$  s'écrit

$$\mathcal{L}_\Gamma(A, M) = \int_a^s \|\dot{f}(u)\| du.$$

où le paramètre est l'abscisse curviligne  $s$ , qui est par définition égale à  $\mathcal{L}_\Gamma(A, M)$ . On a donc, pour tout  $s$

$$s = \int_a^s \|\dot{f}(u)\| du,$$

d'où il résulte que  $\|\mathbf{t}\| = 1$ . Le vecteur  $\mathbf{t}$  est le *vecteur tangent unitaire* à la courbe  $\Gamma$  au point M. Il sera parfois commode de repérer ce vecteur par l'angle  $\theta$  qu'il fait par rapport à une direction fixe arbitraire (typiquement,  $\mathbf{e}_x$ )

$$\mathbf{t}(s) = \cos \theta(s) \mathbf{e}_x + \sin \theta(s) \mathbf{e}_y. \quad (\text{A.2})$$



## A.2 Courbure des courbes planes

Dans ce paragraphe, on considère le cas d'une courbe plane ( $d = 2$ ), dont on définit la *courbure*. Les résultats présentés peuvent être étendus aux courbes *gauches* ( $d = 3$ ) en introduisant également la notion de *torsion*, dont nous n'aurons pas besoin dans ce cours.

Le vecteur tangent  $\mathbf{t}$  unitaire étant défini en tout point de la courbe, on peut également définir le *vecteur normal unitaire*  $\mathbf{n}$ , qui lui est perpendiculaire.

### **i** Note

Deux orientations sont possibles pour le vecteur  $\mathbf{n}$ . Il est important de remarquer qu'il n'y a pas de choix *canonique* : il sera donc toujours nécessaire de **préciser l'orientation de la normale**.

### A.2.1 Première formule de Frénet

Au point  $M$  de la courbe  $\Gamma$ , le vecteur  $\mathbf{t}$  défini au §§ A.1.4 est unitaire. Sa dérivée  $\mathbf{t}'$  lui est perpendiculaire. En effet

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1 \quad \text{donc} \quad 0 = \frac{d}{ds}(\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}) = 2\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}'.$$

En d'autres termes,  $\mathbf{t}'$  est porté par  $\mathbf{n}$ . On introduit le scalaire  $\kappa$  tel que

$$\mathbf{t}' = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n}$$

(première formule de Frénet).  $\kappa$  est homogène à l'inverse d'une longueur. C'est la *courbure* de  $\Gamma$  en  $M$ . Son inverse,  $r = \kappa^{-1}$  est le *rayon de courbure*. On montre en effet que le cercle de centre  $M + r\mathbf{n}$  et de rayon  $|r|$  est celui qui approche le mieux la courbe  $\Gamma$  au voisinage de  $M$  (cercle osculateur).

### **i** Note

La courbure est une grandeur *algébrique*, dont le **signe n'est pas intrinsèque** : il dépend de l'orientation de la normale  $\mathbf{n}$ , qui est arbitraire. En effet, changer  $\mathbf{n}$  en  $-\mathbf{n}$  conduit à remplacer la courbure  $\kappa$  par son opposé  $-\kappa$ .

Les vecteurs  $\kappa \mathbf{n}$  et  $r \mathbf{n}$  sont quant à eux bien intrinsèques. Ils pointent vers le centre de courbure.

**Traiter l'exemple du cercle en cours**

### A.2.2 Deuxième formule de Frénet

Par construction, le vecteur normal unitaire  $\mathbf{n}$  est de norme constante : sa dérivée lui est donc perpendiculaire, et  $\mathbf{n}'$  est parallèle à  $\mathbf{t}$ . On introduit le scalaire  $\alpha$  tel que  $\mathbf{n}' = \alpha \mathbf{t}$ . Comme  $\mathbf{t}$  et  $\mathbf{n}$  sont perpendiculaires, on a  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$ , soit, en dérivant

$$0 = \mathbf{t}' \cdot \mathbf{n} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}' = \kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} + \alpha \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = \kappa + \alpha$$

et  $\alpha = -\kappa$ . On a ainsi obtenu la deuxième formule de Frénet

$$\mathbf{n}' = \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\kappa \mathbf{t}.$$

### A.2.3 Lien avec la direction de la tangente

L'angle  $\theta(s)$  a été défini plus haut par la relation (A.2). En dérivant cette relation, on obtient

$$\kappa \mathbf{n} = \mathbf{t}' = \theta'(s) \left[ -\sin \theta(s) \mathbf{e}_x + \cos \theta(s) \mathbf{e}_y \right]$$

Le vecteur entre crochets est un vecteur unitaire, *directement perpendiculaire* à  $\mathbf{t}$ . Donc

- $\kappa = \theta'$  si  $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$  est une base directe,
- $\kappa = -\theta'$  si  $(\mathbf{n}, \mathbf{t})$  est une base directe.

## B Compléments d'algèbre linéaire

### B.1 Application linéaire entre deux plans de l'espace

Dans ce paragraphe, on considère *deux* plans de l'espace,  $\Pi$  et  $\pi$ , leurs normales unitaires  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{n}$  et les opérateurs de projection associés  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{a}$ . Soit  $\mathbf{f}$  une application linéaire de  $\Pi$  sur  $\pi$ . Pour tout  $\mathbf{V} \in \Pi$ , on a  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{V}) = 0$ , puisque  $\mathbf{f}(\mathbf{V}) \in \pi$  par construction. L'application linéaire  $\mathbf{f}$ , définie seulement sur  $\Pi$ , peut être prolongée sur l'espace  $\mathbb{R}^3$  tout entier en convenant que  $\mathbf{f}(\mathbf{N}) = \mathbf{0}$ . En d'autres termes, on pose

$$\mathbf{f}(\mathbf{V}) = \mathbf{f}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}) \quad (\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3).$$

On a ainsi défini un *endomorphisme* de l'espace  $\mathbb{R}^3$ , auquel on peut associer le tenseur  $\mathbf{F}$ . Par construction,  $\mathbf{f}(\mathbf{N}) = \mathbf{0}$ ; par ailleurs, l'image par  $\mathbf{f}$  de tout vecteur de l'espace est contenue dans le plan  $\pi$ . En d'autres termes, pour tout  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{V}) = 0$ . On en déduit donc les relations importantes

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{0}. \quad (\text{B.1})$$

Inversement, un tenseur  $\mathbf{F}$  d'ordre deux de l'espace satisfaisant les relations précédentes peut être vu comme une application linéaire de  $\Pi$  sur  $\pi$ .

Compte-tenu de la première des relations (B.1), le tenseur  $\mathbf{F}$  n'est bien sûr pas inversible dans l'espace. Son déterminant n'apporte donc aucune information, puisqu'il est nul. On montrera en revanche que le déterminant du tenseur  $\mathbf{F} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{N}$  permet de mesurer des variations d'aire au cours de la transformation d'une coque. On a en effet la relation suivante, valable pour tous vecteurs  $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathbb{R}^3$  de l'espace

$$\mathbf{n} \cdot [(\mathbf{F} \cdot \mathbf{V}) \times (\mathbf{F} \cdot \mathbf{W})] = \mathbf{N} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W}) \det(\mathbf{F} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{N}).$$

Soient  $\mathbf{F}^\# = \mathbf{F} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{N}$  et  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{W}$  deux vecteurs quelconques de l'espace. Par construction de  $\mathbf{F}$ , on a  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{V})$ . Puisque  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} \in \Pi$ , on a  $\mathbf{F}^\# \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}) = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}$  (relations similaires pour  $\mathbf{W}$ ). En observant par ailleurs que  $\mathbf{F}^\# \cdot \mathbf{N} = \mathbf{n}$  et en reconnaissant un produit mixte, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot [(\mathbf{F} \cdot \mathbf{V}) \times (\mathbf{F} \cdot \mathbf{W})] &= [\mathbf{F}^\# \cdot \mathbf{N}, \mathbf{F}^\# \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}), \mathbf{F}^\# \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{W})] \\ &= [\mathbf{N}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{W}] \det \mathbf{F}^\#. \end{aligned}$$

Enfin, en remarquant que  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} [\mathbf{N}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}, \mathbf{A} \cdot \mathbf{W}] &= [\mathbf{N}, \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) \mathbf{N}, \mathbf{W} - (\mathbf{W} \cdot \mathbf{N}) \mathbf{N}] \\ &= [\mathbf{N}, \mathbf{V}, \mathbf{W}] - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) [\mathbf{N}, \mathbf{N}, \mathbf{W}] - (\mathbf{W} \cdot \mathbf{N}) [\mathbf{N}, \mathbf{V}, \mathbf{N}] \\ &\quad + (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) (\mathbf{W} \cdot \mathbf{N}) [\mathbf{N}, \mathbf{N}, \mathbf{N}] = [\mathbf{N}, \mathbf{V}, \mathbf{W}], \end{aligned}$$

puisque  $[\mathbf{N}, \mathbf{N}, \mathbf{W}] = [\mathbf{N}, \mathbf{V}, \mathbf{N}] = [\mathbf{N}, \mathbf{N}, \mathbf{N}] = 0$ .

Vu comme un endomorphisme de l'espace,  $\mathbf{F}$  n'est *jamais inversible*. En revanche, il peut être le représentant d'une application linéaire inversible entre les plans  $\Pi$  et  $\pi$ . On notera  $\mathbf{F}^\dagger$  son inverse. En d'autres termes, pour tous  $\mathbf{V} \in \Pi$  et  $\mathbf{v} \in \pi$ , on a

$$\mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} \quad \text{ssi} \quad \mathbf{V} = \mathbf{F}^\dagger \cdot \mathbf{v},$$

que l'on peut également résumer par les relations suivantes

$$\mathbf{F}^\dagger \cdot \mathbf{F} = \mathbf{A} \quad \text{et} \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\dagger = \mathbf{a}.$$

#### **i** Note

Le tenseur  $\mathbf{F}^\dagger$  n'est pas l'inverse du tenseur (de l'espace)  $\mathbf{F}$ . C'est l'extension à tout l'espace de l'inverse de la restriction de  $\mathbf{F}$  aux plans  $\Pi$  (espace de départ) et  $\pi$  (espace d'arrivée). On parle alors de **pseudo-inverse**<sup>1</sup> de  $\mathbf{F}$ .

On peut facilement montrer que  $\mathbf{F}$  admet une pseudo-inverse si, et seulement si,  $\mathbf{F} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{N}$  est inversible, c'est-à-dire  $\det(\mathbf{F} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{N}) \neq 0$ . Dans ce cas, on a

$$(\mathbf{F} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{N})^{-1} = \mathbf{F}^\dagger + \mathbf{N} \otimes \mathbf{n}.$$

Il suffit de former les produits suivants

$$\begin{aligned} (\mathbf{F} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{N}) \cdot (\mathbf{F}^\dagger + \mathbf{N} \otimes \mathbf{n}) &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\dagger + (\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}) \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes (\mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^\dagger) + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \\ &= \mathbf{a} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{I}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}^\dagger + \mathbf{N} \otimes \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{N}) &= \mathbf{F}^\dagger \cdot \mathbf{F} + (\mathbf{F}^\dagger \cdot \mathbf{n}) \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes (\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}) + \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \\ &= \mathbf{A} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup><https://fr.wikipedia.org/wiki/Pseudo-inverse>, visité le 10/02/2023.

**i** Note

Lorsque les plans  $\Pi$  et  $\pi$  sont confondus, le tenseur  $\mathbf{F}$  peut être vu comme un *endomorphisme* du plan, pour lequel la notion de déterminant ( $2 \times 2$ ) a un sens. Dans ce cas

$$\det_{2 \times 2} \mathbf{F} = \det_{3 \times 3} (\mathbf{F} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}).$$