



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
INSTITUTO DE FÍSICA

# THE PLACE OF THE MILKY WAY AND ANDROMEDA IN THE COSMIC WEB

**Sebastian Bustamante Jaramillo**

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Instituto de Física

**Advisor:** Jaime E. Forero-Romero

**Co-advisor:** Jorge I. Zuluaga





UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
INSTITUTO DE FÍSICA

# THE PLACE OF THE MILKY WAY AND ANDROMEDA IN THE COSMIC WEB

**Sebastian Bustamante Jaramillo**

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Instituto de Física

**Advisor:** Jaime E. Forero-Romero

**Co-advisor:** Jorge I. Zuluaga

Student

Advisor

Co-advisor

Medellín, January 2013



*to my family, my girlfriend and my friends.*

*The place of the Milky Way and Andromeda in the cosmic web*

Author: Sebastian Bustamante

Advisor: Jaime E. Forero-Romero

Co-advisor: Jorge I. Zuluaga

In the next link it could be found updated information about this work and some topics related to it:

<https://github.com/sbustamante/Thesis>

Printed in Medellín, Colombia

First edition, january 2013

---

## **Resumen**

Como ha sido demostrado a partir de simulaciones y observaciones cosmológicas, el universo actual presenta una compleja estructura a gran escala de filamentos entrelazados permeados por regiones de altos vacíos. Esta estructura es denominada red cósmica y es una de las principales características emergentes del régimen no lineal. Muchos estudios se han realizado dirigidos a la cuantificación de la red cósmica y de sus efectos sobre las propiedades físicas de sistemas como halos de materia oscura y galaxias. Algunas importantes correlaciones se han establecido ya para algunas de estas propiedades, tales como la masa de los halos, su parámetro de espín y su forma. También existe un creciente interés en estudiar las propiedades del grupo local de galaxias (dominado principalmente por las galaxias de Andrómeda y la Vía Láctea) en un contexto cosmológico como un test del modelo cosmológico estándar.

Con la motivación de seguir esta línea, en el actual trabajo se hace un estudio de sistemas similares al grupo local (LG) en simulaciones cosmológicas de materia oscura. Como principal propuesta, se introduce un método para la construcción de muestras de sistemas LG a partir de la aplicación del esquema V-web para la clasificación del entorno cosmológico en simulaciones que reproducen el universo local. Se demuestra que las muestras LG construidas son consistentes y presentan sesgos significativos para algunas propiedades físicas respecto a la distribución de los halos. En especial se determina que a diferencia de los halos, que se forman en zonas de alta densidad, los sistemas LG se encuentran preferencialmente en zonas de más baja densidad, tal como regiones vacías y regiones con una distribución plana de materia.



## **Agradecimientos**

Es bastante satisfactorio mirar en retrospectiva todo el proceso de formación que he recibido y darse cuenta que cada paso logrado ha contribuido de una u otra forma a culminar este logro. En especial, nada de esto hubiera sido posible sin el apoyo incondicional de mi familia, mi madre Gilma Jaramillo, mi padre Aníbal Bustamante y mi hermano Santiago Bustamante, a ellos muy especialmente va dedicado este trabajo.

Cito la frase de Isaac Newton, “Si he logrado ver más lejos, ha sido porque he subido a hombros de gigantes”. Con esto quiero aludir a todos los profesores que en algún grado contribuyeron a mi proceso de formación, especialmente Jaime Forero por permitirme trabajar en estos apasionantes temas, brindarme la oportunidad de realizar una pasantía que me ayudó enormemente en este proyecto, además por su infinita paciencia. Al profesor Jorge Zuluaga por su acompañamiento durante casi toda mi carrera y enseñarme la gran mayoría de mis conocimientos en programación. A Carlos Vera por introducirme en el fascinante mundo de la astrofísica y finalmente a los profesores Boris Rodríguez y Pablo Cuartas, que en un momento u otro de mi carrera aportaron valiosamente en este arduo proceso.

Quiero especialmente agradecer a mi novia Nataly Mateus por su apoyo permanente y acompañamiento, por su paciencia en los malos momentos y por escucharme y aportarme con ideas y correcciones de mi tesis. Con ella quiero compartir la alegría de culminar esta etapa y también le

dedico este trabajo. También agradezco a su familia por su gran apoyo y preocupación, por acogerme durante las maratónicas jornadas de estudio, que no fueron pocas.

Finalmente también dedico este trabajo a todos mis amigos, muy en especial aquellos de astronomía y física, por los momentos alegres que me han brindado y su preocupación en los malos momentos. Agradezco también a Cesar Uribe por escuchar tan pacientemente sobre temas de esta tesis y aportar con algunas ideas.

*Sinceramente,*

Sebastian Bustamante

octubre 2013

# Índice general

<b>Índice de figuras</b>	<b>vii</b>
<b>1 Preliminaries</b>	<b>1</b>
1.1 Prehistory . . . . .	1
1.2 The Current Cosmology Picture . . . . .	4
1.3 Cosmological Observations . . . . .	8
<b>2 Theoretical Framework in Cosmology</b>	<b>11</b>
2.1 Isotropic and Homogeneous Universe . . . . .	11
2.1.1 Metric of Curved Spaces . . . . .	12
2.1.2 General Relativity and Friedmann's Equations . . . . .	16
2.1.3 Simple Solutions of the Universe . . . . .	18
2.2 Linear Regime of Structure Formation . . . . .	22
2.2.1 Aproximación Newtoniana . . . . .	23
2.2.2 Inestabilidad de Jeans . . . . .	26
2.2.3 Propiedades Estadísticas y Función de Transferencia . . . . .	31
2.3 Régimen No Lineal de Formación de Estructuras . . . . .	37
2.3.1 Aproximación de Zeldovich . . . . .	38
<b>3 Métodos Computacionales en Cosmología</b>	<b>41</b>
3.1 Simulaciones de N-Cuerpos . . . . .	42
3.1.1 Método P-P . . . . .	43
3.1.2 Método PM . . . . .	44
3.1.3 Método P <sup>3</sup> M . . . . .	46

## **ÍNDICE GENERAL**

---

3.2	Tipos de Simulación . . . . .	48
3.2.1	Simulaciones No Restringidas (Bolshoi) . . . . .	49
3.2.2	Simulaciones Restringidas (CLUES) . . . . .	51
3.3	Caracterización del Entorno . . . . .	54
3.3.1	Método T-web . . . . .	54
3.3.2	Método V-web . . . . .	56
3.4	Detección de Halos y Definición de Muestras . . . . .	58
3.4.1	Método FOF . . . . .	59
3.4.2	Definición de Muestras . . . . .	60
3.4.3	Método de Detección de Pares . . . . .	63
<b>4</b>	<b>El Entorno Cosmológico y el Grupo Local</b>	<b>65</b>
4.1	Propiedades de las Simulaciones . . . . .	65
4.1.1	Función de Masa de los Halos . . . . .	66
4.1.2	Distribución del Entorno Cosmológico . . . . .	68
4.2	Propiedades de la Muestra <i>CLG</i> . . . . .	73
4.2.1	Determinación del Entorno . . . . .	73
4.2.2	Masa de los <i>CLG</i> . . . . .	79
4.2.3	Distribuciones de Energía y Momentum Angular . . . . .	83
4.2.4	Alineación del Momentum Angular . . . . .	85
4.3	Conclusiones . . . . .	86
<b>Bibliografía</b>		<b>89</b>

# Índice de figuras

1.1	William Herschel's model for our galaxy based upon a count of stars with the assumption of equal intrinsic luminosity. [14]. . . . .	2
1.2	Different geometries according to variations on Euclid's fifth postulate. . . . .	4
1.3	Cosmic background radiation. Taken from <a href="http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3c/I1c_9yr_moll4096.png">http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3c/I1c_9yr_moll4096.png</a> . . . . .	5
1.4	Local Group. Taken from <a href="http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Local_Group.svg">http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Local_Group.svg</a> . . . . .	7
1.5	Map of the large-scale universe according to the Sloan Digital Sky Survey. Taken from the official web page of the project <a href="http://www.sdss.org/">http://www.sdss.org/</a> . . . . .	9
2.1	Metric of a spherical surface. . . . .	12
2.2	Curved spaces according to the curvature parameter. . . . .	13
2.3	Different solutions of the universe according to the Friedmann's equations. . . . .	22
2.4	Evolución de la masa de Jeans para diferentes estadios del universo. En las regiones coloreadas se ilustra el rango típico de masa para varios tipos de estructuras, desde cúmulos estelares abiertos hasta cúmulos y supercúmulos de galaxias. . . . .	29
2.5	Evolución de los modos normales del campo de densidad. Por motivos ilustrativos se ha normalizado respecto a las condiciones iniciales. . . . .	31
2.6	Distribución inicial de perturbaciones para el campo de contraste de densidad a partir de la distribución Gaussiana 2.57 y el espectro de potencia de Harrison- Zeldovich $\sigma_k \propto k$ . . . . .	33

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

2.7	Función de transferencia para materia oscura fría en la época actual [26] (Izquierda). Comparación entre el espectro de potencia inicial, Harrison-Zeldovich, y el espectro de potencia procesado (derecha). . . . .	36
2.8	Evolución de una simulación numérica de materia oscura en una caja de $40 \text{ Mpc}/h$ , iniciando en un estado de alta homogeneidad (arriba-izquierda) hasta la época actual de estructuras altamente no lineales (abajo-derecha). Tomado de <a href="http://www.astro.utu.fi/research/CosmoS/lss/lss_p1.shtml">http://www.astro.utu.fi/research/CosmoS/lss/lss_p1.shtml</a> . . . . .	37
2.9	Comparación de la evolución en régimen no lineal entre una simulación de N-cuerpos (a), y la aproximación de Zeldovich (b). En ambos casos se usan las mismas condiciones iniciales. Tomado de [26]. . . . .	39
3.1	Formulación del problema de N-cuerpos. . . . .	42
3.2	Diagrama ilustrativo del método P <sup>3</sup> M. El mapa dibujado sobre la distribución de partículas corresponde a la densidad asociada a cada celda de la malla. Las zonas oscuras corresponden a regiones de sobredensidad mientras las zonas blancas a regiones de menor densidad, acorde a la cantidad de partículas por celda y sus masas individuales. . . . .	44
3.3	Diagrama ilustrativo del método P <sup>3</sup> M. Para la partícula de referencia en el centro la interacción con partículas lejanas es calculada con el método PM, mientras que para las partículas cercanas en la región gris y blanca es usado el método de suma directa PP. . . . .	46
3.4	Ejemplo de construcción de un código de árbol para una simulación de N-cuerpos. En los paneles superiores se muestran iteraciones del método para un problema 2D. En la parte inferior se ilustra el árbol construido con cada partícula de la simulación. . . . .	47
3.5	Evolución de la simulación Bolshoi. Se ilustran el campo de densidad de una región rectangular de $16 \text{ Mpc}/h$ de grosor y $250 \text{ Mpc}/h$ de lado para diferentes estadios de evolución. $z = 9,5$ (superior izquierda), $z = 3$ (superior derecha), $z = 1$ (inferior izquierda) y $z = 0$ (inferior derecha). Tomado de <a href="http://spectrum.ieee.org/aerospace/astrophysics/the-cosmological-supercomputer">http://spectrum.ieee.org/aerospace/astrophysics/the-cosmological-supercomputer</a> . . . . .	50

---

## ÍNDICE DE FIGURAS

3.6	Campo de densidad y campo de velocidad peculiar inicial construidos a partir de restricciones para la reproducción del entorno local en una escala de $160 h^{-1} \text{Mpc}$ . Algunas estructuras identificadas son: <i>Coma</i> , cúmulo de coma, <i>PP</i> , supercúmulo de Perseus-Pisces, <i>LS</i> , supercúmulo local, <i>GA</i> , gran atractor. La flecha superior derecha indica la escala del campo de velocidad peculiar en 1000 km/s. Tomado de [22]. . . . .	51
3.7	Tres simulaciones restringidas del proyecto CLUES en las se identifican sistemas tipo grupo local. Se ilustra el campo de densidad de cada simulación junto con los halos de materia oscura (puntos negros), y los grupos locales encontrados (puntos rojos). . . . .	52
3.8	Simulación obtenida en el proyecto CLUES. En esta se muestran las estructuras a gran escala del universo local y se aprecian con claridad los miembros más significativos del grupo local. Tomado de la página oficial del proyecto <a href="http://www.clues-project.org">http://www.clues-project.org</a> . . . . .	53
3.9	Esquema de clasificación del entorno cosmológico para los esquemas T-web y V-web. El valor umbral $\lambda_{th}$ es tomado como un parámetro libre. . .	56
3.10	Se ilustra para cada una las simulaciones (CLUES 1, CLUES 2, CLUES 3, Bolshoi) la diferencia entre los esquemas de clasificación T-web y V-web para diferentes valores de $\lambda_{th}$ (Negro - Nudo, Gris oscuro - Filamento, Gris - Hoja, Blanco - Vacío). En las gráficas superiores se muestra la impresión visual obtenida a partir de los respectivos campos de contraste de densidad ( $\log(\delta + 1)$ ), usadas para la calibración de los valores $\lambda_{th}$ . La resolución para una de las mallas construidas es aproximadamente $1,0h^{-1} \text{Mpc/celda}$ y para todas se realiza un suavizado Gaussiano del tamaño de una celda, el grosor de cada slide es de una celda de la malla. . . . .	57
3.11	Diagrama ilustrativo del método FOF. Los círculos grises entorno a cada partícula representan la zona de vinculación y la curva roja representa una de las estructuras encontradas. . . . .	59
3.12	Halos encontrados a partir del esquema FOF en una de las simulaciones CLUES. El gradiente de color indica la profundidad respecto al eje $x$ , donde los halos negros son los más cercanos. . . . .	60

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

3.13 Entorno cosmológico a partir del esquema V-web (con $\lambda_{th} = 0,3$ ) para cada uno de los LG de las simulaciones CLUES, indicados por los puntos rojos. . . . .	62
3.14 Ilustración 2D del método para la detección de las muestras de pares. Distribución de halos de materia oscura (izquierda), definición de zonas (derecha). . . . .	64
4.1 Distribución espacial de los halos de materia oscura, reflejando la estructura de la red cósmica. El gradiente de color indica la profundidad respecto al eje $x$ , donde los halos negros son los más cercanos. . . . .	66
4.2 Funciones de masa integrada de halos de materia oscura (muestra GH) para cada simulación. . . . .	67
4.3 Distribución de los autovalores en el esquema V-web para cada una de las celdas de volumen (línea continua) y para los entornos de los halos de materia oscura en los catálogos FOF (línea discontinua). Las distribuciones están normalizadas tal que su área es la unidad. Resolución de $1,0h^{-1}$ Mpc/celda y suavizado Gaussiano de una celda. . . . .	68
4.4 Parámetro de densidad medio para diferentes tipos de regiones en función del valor umbral $\lambda_{th}$ (paneles izquierda). Fracciones de volumen normalizadas para diferentes tipos de regiones, también acorde al valor umbral $\lambda_{th}$ . . . . .	70
4.5 Comparación de la impresión visual obtenida con el método V-web para varios valores del parámetro $\lambda_{th}$ . Se usa el siguiente esquema de clasificación (Negro - Nudo, Gris oscuro - Filamento, Gris - Hoja, Blanco - Vacío). La resolución de cada malla es $1,0h^{-1}$ Mpc/celda, con un suavizado Gaussiano de una celda. El grosor de cada slide es de una celda. . . . .	71
4.6 Situación patológica respecto al entorno de los sistemas de pares de halos. . . . .	73
4.7 Comparación entre las distribuciones de los autovalores de la V-web para los dos halos en los sistemas de pares (muestras <i>LG</i> , <i>CLG</i> y <i>IP</i> ). . . . .	74

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

4.8	Distribuciones 2D del entorno cosmológico para diferentes muestras, $\lambda_1-\lambda_3$ (izquierda) y $\lambda_1-\lambda_2$ (derecha). El histograma de fondo, graficado en colores, corresponde a la distribución de entorno para todos los halos de Bolshoi (muestra <i>GH</i> ), su resolución es de $100\times 100$ para el rango mostrado y están normalizados respecto a su área. Los puntos negros corresponden a la distribución de la muestra <i>IP</i> y finalmente los puntos blancos a la muestra <i>CLG</i> . . . . .	75
4.9	Fracciones de cantidad de objetos en diferentes regiones en función del valor umbral $\lambda_{th}$ . Para el caso de la muestra <i>GH</i> se cuentan número de Halos, mientras que para las muestras <i>IP</i> y <i>CLG</i> número de pares. . . . .	77
4.10	Histograma integrado del fraccional de anisotropía para las muestras de pares <i>IP</i> y <i>CLG</i> . . . . .	78
4.11	Funciones de distribución integrada para la masa total $M_A+M_B$ (izquierda) y la razón de las masas $M_B/M_A$ (derecha), de las muestras de pares en Bolshoi. . . . .	80
4.12	Diagrama de dispersión de los parámetros de masa definidos ( $M_{tot}, \chi$ ) para cada una de las muestras de pares. Las regiones cuadradas son construidas a partir del valor medio y la desviación estándar de la muestra del mismo color. La región gris en la parte inferior izquierda corresponde a un corte impuesto artificialmente con el rango mínimo de masa de los halos tomados $M_*$ para construir las muestras de pares. . . . .	81
4.13	Diagramas de dispersión para el fraccional de anisotropía respecto a los parámetros de masa. El mapa de fondo y las curvas de contorno corresponden a número de pares de la muestra <i>IP</i> . . . . .	82
4.14	Diagrama de dispersión para la energía total y el momentum angular orbital de los sistemas de pares. El mapa de fondo corresponde a la distribución de la muestra <i>P</i> , mientras las líneas de contorno a la distribución de la muestra <i>IP</i> , en ambos casos los valores corresponden al número de pares.	83
4.15	Diagramas de dispersión para el fraccional de anisotropía respecto a la energía y el momentum angular. El mapa de fondo y las curvas de contorno corresponden a número de pares de la muestra <i>IP</i> . . . . .	84

## **ÍNDICE DE FIGURAS**

---

- 4.16 Histogramas integrados para el ángulo formado entre el momentum angular de los pares, el cual determina el plano orbital, y cada uno de los autovectores definidos por la V-web en el entorno cosmológico. Se realiza para cada las muestras de pares *CLG* y *IP*, mientras que los grupos locales de CLUES son ilustrados con las líneas rojas punteadas. . . . . 85

*“Equipped with his five senses, man explores the universe around him and calls the adventure Science”*

Edwin Hubble

CHAPTER

# 1

# Preliminaries

“What is our place in the cosmos?” This is one of the simpler and transcendental question that human beings have wondered from ancient times; furthermore, this, being powered by our innate curiosity, has led to a relatively understandable and structured picture of our Universe. Despite of that, this knowledge is very new regarding to our whole history, so the astronomy can only be considered as a scientific rigorous discipline since the seventeenth century.

## 1.1 Prehistory

Almost in every scientific discipline, a significant theoretical development is accompanied by a technical and instrumental improvement. That is why at the beginning of the seventeenth century, Johannes Kepler could establish his three well-known empirical laws of the planetary movements based upon the very precise data of astronomical bodies compiled by Tycho Brahe. This event was very remarkable in the history of the astronomy since it was the first of many strikes against the well established anthropocentric notion of the cosmos. Although Kepler’s laws constituted the most crucial test to the Nicolaus Copernicus’s heliocentric model, it was only until 1685, when Isaac Newton formulated the law of universal gravitation (from which can be derived all the Kepler’s laws), when the astronomers could

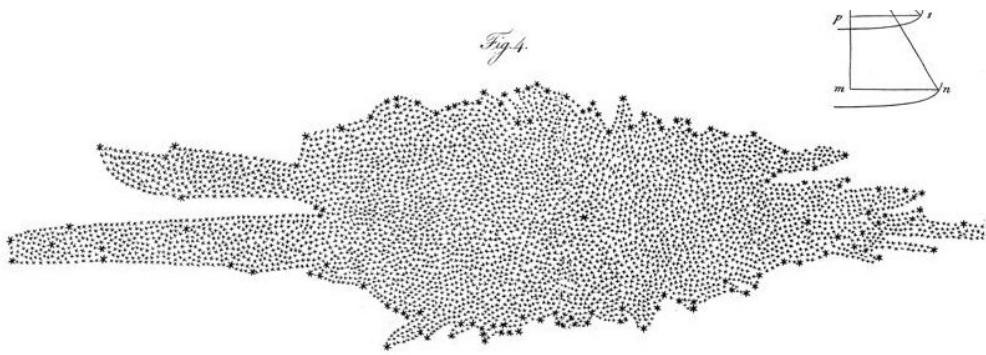
## 1. PRELIMINARIES

---

count with enough powerful theoretical tools to start a depth and serious discussion about the real nature of our universe on scales bigger than the solar system, and thus inaugurating the *sciences of gravity* [26].

After the establishment of the law of universal gravitation, the next significant theoretical achievement in this area came in the centuries eighteenth and nineteenth with the development of classical mechanics, i.e. Hamiltonian and Lagrangian formalism, and powerful numerical tools. All those achievements propelled the study of key topics like the many body problem, chaotic phenomena, etc. Allowing a depth understanding of the dynamic of complex gravitational systems, such as planetary systems, star clusters, etc.

Parallel to the previous theoretical advances, on the observational branch was beginning to arise the idea of *island universe*, from which would evolve the concept of galaxy. All of this was powered by the development of the telescope, furthermore allowing to understand that galaxies are just a large collection of stars like our sun. It was also very remarkable the pioneer work of William Herschel, who tried to build a complete map of our galaxy determining distances from the assumption of stars with the same intrinsic luminosity and with the inverse square law for the intensity decay (see figure 1.1). Although his results were very imprecise due to the incorrect assumption on which were based, the importance of his work lies on the recognition of some structure (disk-like) for our galaxy.



**Figura 1.1:** William Herschel's model for our galaxy based upon a count of stars with the assumption of equal intrinsic luminosity. [14].

## **1.1 Prehistory**

---

Another important observational question, that was emerging among scientists by that time, was the existence of *island universes* like ours. It was already well-known the existence of extended objects that do not fit to the definition of stars or planets, like nebulae, planetary disks and galaxies. Even, William Herschel and his son, John Herschel, contributed with the realization of a large (for the epoch) catalogue of extended bodies known as *Catalogue of Nebulae and Clusters of Stars* and a subsequent improved and expanded version finished by John Dreyer in 1888, *New General Catalogue of Nebulae and Clusters of Stars*, which together with *Index Catalogues* of 1895 and 1908 constitute a large collection of bodies widely used in current astronomy, referred with the abbreviations *NGC* and *IC* respectively [26]. Despite of those observational advances, the real nature of these objects was a complete mystery, especially if they lie within our own galaxy or are completely independent systems.

This question remained unsolved until the twentieth century, and together with the indetermination of the real size of the universe, were the two big issues treated on the well-known *Great Debate*, or also called the *Shapley-Curtis Debate*. In this important event in the history of astronomy, the astronomers Harlow Shapley and Herber Curtis discussed about these topics, giving, respectively, different arguments for and against if these objects are within our galaxy and if the Milky Way is our whole universe or not [4] [32]. Despite of that, their arguments were not very conclusive and the definitive solution to these issues had to wait until 1924, when Edwin Hubble measured the distance to Andromeda Galaxy (M31 or NGC 224) and demonstrated unquestionably the real extragalactic nature of this object, and in following years for other ones [18]. This achievement along with the observational verification of the expanding universe (also due to Hubble) were the beginning of the modern observational cosmology.

It also happened in the twentieth century a key event for the modern sciences of gravity, Albert Einstein formulated his theory of General Relativity [6], challenging and changing completely the previous conception of space and time and laying the foundation of current cosmology picture.

## 1. PRELIMINARIES

---

### 1.2 The Current Cosmology Picture

The theoretical basis on which are based the theory of general relativity began to arise with the zenith of non-euclidean geometries in the nineteenth century and the beginning of twentieth, when it was demonstrated that the Euclid's fifth postulate is not needed to build self-consistent geometries, thus giving rise to non-planar geometries (see figure 1.2). In particular, it was highlighted the work of Nikolai Lobachevsky, father of non-euclidean geometries, and Bernhard Riemann, the founder of the Riemannian geometry.



**Figura 1.2:** Different geometries according to variations on Euclid's fifth postulate.

In spite of these first developments contributed widely to the current cosmological paradigm, bringing forward discussions on what kind of geometry the universe has, the concepts of space and time were completely misunderstood yet, being interpreted as unrelated and absolute entities. That is why the foundation of the theory of general relativity opened the door to our whole current understanding.

Once obtained the equations of metric field of the general relativity, it was possible to build global and self-consistent models of the universe. A first rough attempt was also due to Einstein, who formulated, influenced by his own belief, a static and closed model of the universe. To achieve it, he must use the well-known cosmological constant in order to compensate the expansion/contraction obtained naturally by the theory.

Few years later, Aleksander Friedmann demonstrated on two articles a set of solutions for closed and hyperbolic universes' expanding from a singularity [10] [11].

## 1.2 The Current Cosmology Picture

---

These expanding solutions were in agreement with the observations made by Hubble for redshift of far galaxies. Because of that, the inclusion of the cosmological constant for stationary solutions it is historically known and recognized by Einstein himself as the biggest blunder of his life. This theoretical finding prompted a set of studies on the real nature of the universe in the light of those new solutions, like large-scale dynamics, global geometry and precise measurements of different cosmological parameters of those models.

The next important advance came with the formulation of the Big Bang theory by George Gamow. This theory proposes that early stages of the universe had been very dense and hot, starting from a singularity and reaching the current stage, a constantly cooling and expanding universe. All this is in agreement with the Friedmann's solutions. One of the first predictions of this theory was the early nucleosynthesis, which is responsible of the creation of heavy elements like helium and lithium through fusion reactions of primordial hydrogen. Because of the current abundances of helium and lithium cannot be given account by the standard nuclear processes in stars, this was the first of many achievement of the Big Bang theory; furthermore the early nucleosynthesis was later demonstrated by Ralph Alpher and Robert Herman and it has been observationally corroborated very precisely nowadays.



**Figura 1.3:** Cosmic background radiation. Taken from [http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3c/I1c\\_9yr\\_moll4096.png](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3c/I1c_9yr_moll4096.png)

## 1. PRELIMINARIES

---

The next remarkable prediction of the Big Bang theory was the current existence of a residual black-body radiation from early stages, when, due to the conditions of high density and temperature, the universe was radiation-dominated. This remainder was verified observationally by Arno Penzias and Robert Wilson in 1965 with the discovery of the cosmic background radiation (CMBR). The spectrum of this residual radiation proved to be produced by an almost perfect black-body with a characteristic temperature of  $T = 2,725$  K. These predictions have made this theory being adopted as a fundamental part of the standard cosmological paradigm.

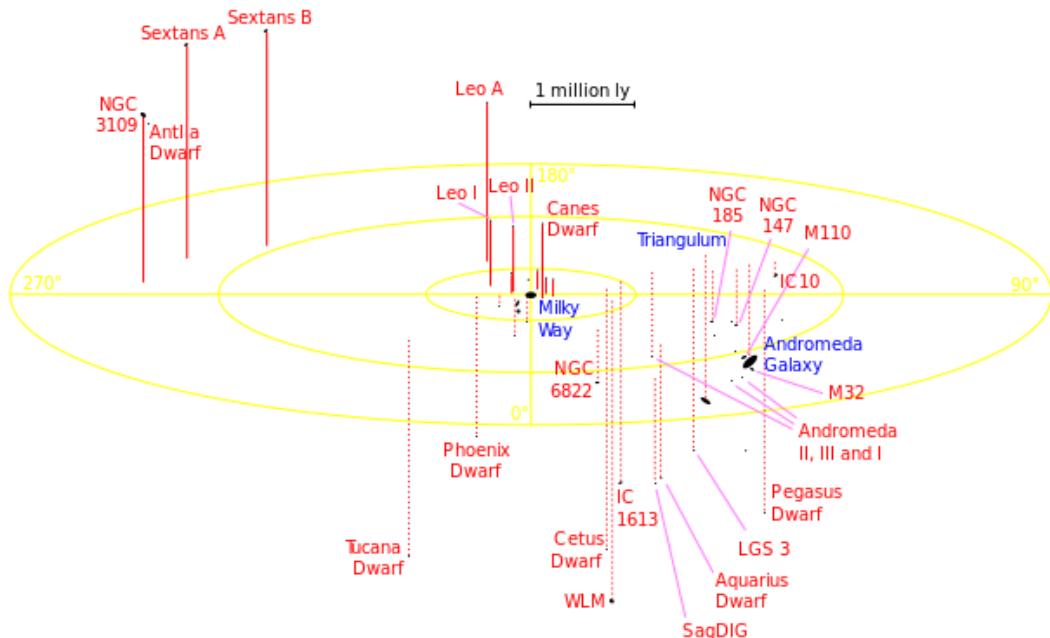
Although the discovery of the CMBR was certainly one the most important hits of the astronomy along the century twenty, as it has been established in many scientific disciplines, new answers lead to new questions. In this case, the horizon problem. This is originated by the high angular isotropy measured from the CMBR spatial spectrum (see figure 1.3), which suggests a causal connection between regions of the universe very far apart from each other that, in theory, they should not be correlated. The widely accepted solution to this problem was proposed by Alan Guth in 1980, the inflationary theory. This postulates an exponential expansion of the early universe powered by a scalar field, the inflaton. During the time of expansion, vacuum quantum fluctuations of each field present in the universe was magnified by the expansion itself, producing small perturbations in the density field, from which would evolve current large-scale structures. According to this, the inflationary theory can explain satisfactorily the problem of small perturbations of the very early universe, becoming thus an essential part of the current paradigm.

The existence of dark matter was proposed since early 1930s, initially by Jan Oort in 1932 and then by Fritz Zwicky in 1933, in order to give account of non-luminous matter of galaxies and galaxy clusters, which is manifested through dynamical interactions of their single components, like stars or galaxies in the case of clusters. In spite of that, the real nature of this new type of matter remained as a complete mystery. In 1984 Joel Primack, George Blumenthal, Sandra Moore and Martin Rees proposed a model called cold dark matter (CDM), in which is postulated that dark matter is made of certain unknown type of non-relativistic particle which only interacts gravitationally and electromagnetically (more weakly). Under this scheme, it is possible to demonstrate that large-scale structure formation follows a *top-down* hierarchical process, in which the smallest structures are

## 1.2 The Current Cosmology Picture

formed first and the biggest, composed by the first, are formed later. This has been observationally verified through galaxy surveys (see section 1.3).

In the 1990s, some cosmological observations suggested an accelerated rate of expansion of the universe, which only can be explained (see subsection 2.1.3) with the inclusion of the cosmological constant in the field equations of the general relativity. Because this constant can be placed as an energy density term with negative pressure, the term of *dark energy* was quickly coined, even though its real nature is completely unknown. Very precise measurements have proved that our universe is currently vacuum-dominated, reaching 70 % of all content of matter-energy of it. This last fact completes our overall picture of the current cosmological paradigm and it is called standard  $\Lambda$ CDM model or concordance model.



**Figura 1.4:** Local Group. Taken from [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Local\\_Group.svg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Local_Group.svg)

The local group (LG) is a local system composed of 30 galaxies approximately, which interact gravitationally between them and evolve relatively isolated from other large-scale structures. The Milky Way and Andrómeda (M31) galaxies are

## 1. PRELIMINARIES

---

its more representative members and even in this work we shall simplify the local group just as systems of two galaxies similar to these (see figure 1.4).

The importance of our local group in a cosmological context is because it is by far the best known large-scale structure, thereby allowing to verify some current predictions of the concordance model. Among the issues originated by these predictions, we highlight the over abundance of satellite galaxies in the Milky Way, the possible link between the flows of the Magellanic clouds and M31 galaxy, tidal forces in the local group, the kinematic of M31 and Milky Way galaxies in a cosmological context [9] and the influence of the cosmological environment on the formation properties of systems like the local group.

### 1.3 Cosmological Observations

The boom produced by the space age along with the significant technological development of measuring instruments and sensors have powered enormously observational research in cosmology, thereby allowing, together with the theoretical advances previously discussed, to reach the current cosmological picture. Next, we shall present some of the larger and more important observational projects in cosmology and which are widely used in current research.

#### 2DF Galaxy Redshift Survey

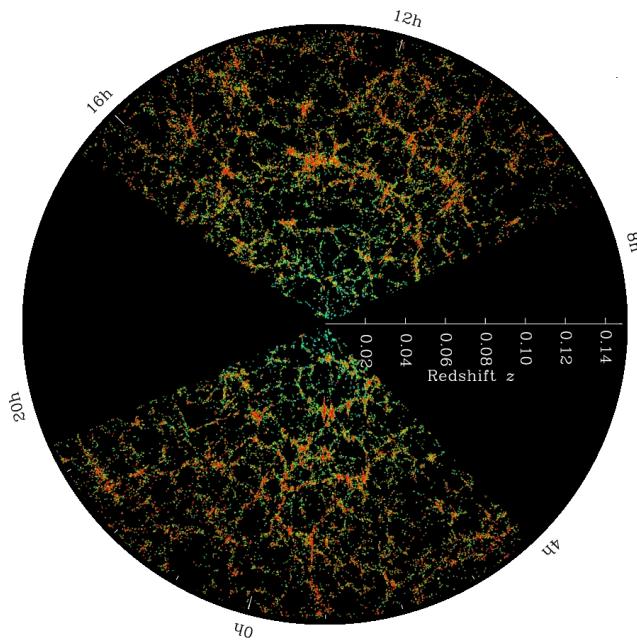
The 2DF Galaxy Redshift Survey (2DFGRS), or Two-Degree-Field Galaxy Redshift Survey<sup>1</sup>, is a galaxy redshift survey performed within an angular area of 1500 square degrees of regions near to the north and south galactic poles in order to avoid extinction produced by the galactic disk. This survey was made by the 3,9 m telescope of the Anglo-Australian observatory from 1997 to 2002. Among the main results of this survey are remarkable the mapping of the local structure of the large-scale environment around the local group of galaxies. This was achieved through photometric measurements of 382 323 objects within a redshift range of  $z = 0,3$  to  $z = 0,0$ . It is also remarkable the measuring of the density parameter of non-relativistic matter (dark + baryonic) of the standard cosmological model.

---

<sup>1</sup>Official web page of the project at <http://magnum.anu.edu.au/~TDFgg/>.

## Sloan Digital Sky Survey

The Sloan Digital Sky Survey (SDSS), like the 2DFGRS, is a redshift survey of the large-scale universe made by the 2,5 m telescope of the Apache Point observatory in New Mexico since 2000.



**Figura 1.5:** Map of the large-scale universe according to the Sloan Digital Sky Survey.

Taken from the official web page of the project <http://www.sdss.org/>

The survey covers an area significantly larger than 2DFGRS, approximately 7500 square degrees, and has catalogued around 2 million of objects, thereby allowing to build a map of the large-scale universe in which it was first seen the structure of the cosmic web (see figure 1.5).

## WMAP

The Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP), is a NASA spacecraft launched in 2001 and placed in the lagrange point L2. Its main objective is to measure, with very high precision, small temperature contrasts and polarization of the cosmic background radiation (see figure 1.3). Approximately every two years, NASA releases the accumulated results obtained, called as WMAP1, WMAP3, WMAP5,

## 1. PRELIMINARIES

---

WMAP7 and finally WMAP9 for data released in 2012. These results have been up to date the most reliable proof of the standard cosmological  $\Lambda$ CDM model. Especially it is remarkable the precise measuring of the age of the universe, the cosmological density parameters, the Hubble's constant, also the determination of the global geometry of the universe (flat geometry) and the confirmation of the inflationary model.

Parameter	Notation	Value	Unit
Age of universe	$t_0$	$13,75 \pm 0,13$	Ga
Hubble's constant	$H_0$	$71,0 \pm 2,5$	km/(Mpc s)
Hubble's parameter	$h$	$0,71 \pm 0,025$	–
Barion density	$\Omega_b$	$0,0449 \pm 0,0027$	–
Dark matter density	$\Omega_c$	$0,222 \pm 0,026$	–
Dark energy density	$\Omega_\Lambda$	$0,734 \pm 0,029$	–
Radiation density	$\Omega_r$	$8,24 \times 10^{-5}$	–
Amplitude of Fluctuations at $8h^{-1}$ Mpc	$\sigma_8^2$	$0,801 \pm 0,030$	–
Spectral index	$n_s$	$0,963 \pm 0,014$	–
Reionization optic depth	$\tau$	$0,088 \pm 0,015$	–
Total density of the Universe	$\Omega_0$	$1,080 +0,093/-0,071$	–

**Cuadro 1.1:** WMAP7 cosmological parameters [20].

In the table 1.1 is tabulated all the results of the WMAP7 release [20], which are widely used in next chapters and especially in the different cosmological simulations presented below in the chapters 3 and 4.

*“The Cosmos is all that is or was or ever will be. Our feeblest contemplations of the Cosmos stir us: there is a tingling in the spine, a catch in the voice, a faint sensation, as if a distant memory, of falling from a height. We know we are approaching the greatest of mysteries.”*

Carl Sagan

CHAPTER

# 2

# Theoretical Framework in Cosmology

The aim of this chapter is to cover, in a self-contained and summarized way, all the theoretical framework needed for the study of the large-scale universe. From the simplest models of the universe given by Friedman’s solutions, the theory of perturbations for the formation of complex structures like galaxies and galaxy clusters, until the schemes to quantify the cosmic web.

## 2.1 Isotropic and Homogeneous Universe

The two big pillars of the modern cosmology are the cosmological principle and the theory of the general relativity. The first one is a principle where it is assumed that the universe is isotropic and homogeneous at very large scales, while the second one gives the theoretical support needed in order to understand properly the relation between the matter content of the universe and the structure of the space-time.

As it has been evidenced by observations of large-scale structures and the CMB, the universe appears to be isotropic and homogeneous at large scales, which is in agreement with the cosmological principle. Moreover, this fact simplifies quite

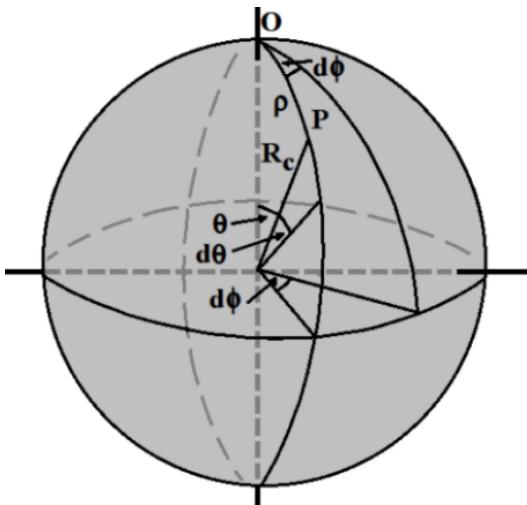
## 2. THEORETICAL FRAMEWORK IN COSMOLOGY

---

enough the complex tensorial formulation of the general relativity, thereby allowing finally to lead to the Friedmann's equations.

### 2.1.1 Metric of Curved Spaces

In the construction of an isotropic and homogeneous model of universe, it is necessary to establish an adequate metric which describes it properly. An illustrative example that could be generalized is a 2D spherical surface, which clearly satisfies the criteria of homogeneity and isotropy.



**Figura 2.1:** Metric of a spherical surface.

A line element over the surface shown in the figure 2.1 can be described as

$$dl^2 = d\rho^2 + R_c^2 \sin^2 \left( \frac{\rho}{R_c} \right) d\phi^2$$

where it have been introduced a new length coordinate over the surface, defined as  $\rho = \theta R_c$  and  $R_c$  is the curvature radius of the sphere. Another very convenient way to rewrite this expression, and that allowing a very useful generalization, it is reached defining the curvature parameter  $k$  and the coordinate  $r = \sin(\rho/a)$ , obtaining:

$$dl^2 = a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\phi^2 \right]$$

## 2.1 Isotropic and Homogeneous Universe

---

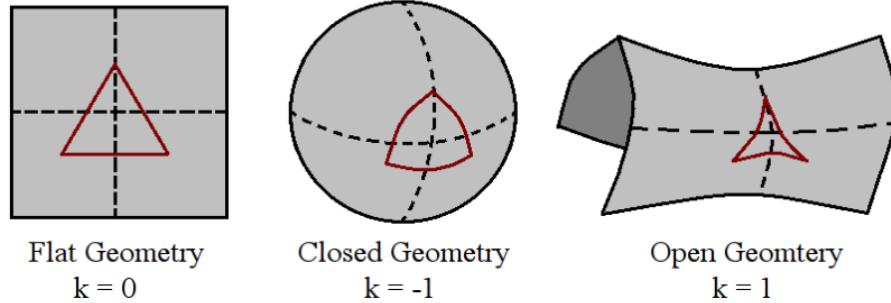
with  $k = -1$  and it is assumed a time-dependent curvature radius  $R_c = a(t)$ . The metric in this case is 3D and is obtained by replacing the differential element of angle  $d\phi^2$  by the solid angle differential  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ .

$$dl^2 = a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (2.1)$$

Finally, time is included, so the space-time interval for the metric of isotropic and homogeneous curved spaces is:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (2.2)$$

The direct generalization of this expression consists in varying the different values of the curvature parameter  $k$  in order to obtain the metric of flat ( $k = 0$ ), spherical closed ( $k = -1$ ) or opened spaces ( $k = 1$ ), as it is shown in [26] or [27].



**Figura 2.2:** Curved spaces according to the curvature parameter.

An alternative way to rewrite the metric is introducing two changes of coordinates defined as

$$\chi = \int \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}}$$

$$\tau = \int \frac{cdt'}{a(t')}$$

where each one is respectively interpreted as a length coordinate over the hyper-surface that defines the space ( $\chi$ ) and as the proper time measured locally ( $\tau$ ). It is obtained the next expressions for the metric

## 2. THEORETICAL FRAMEWORK IN COSMOLOGY

---

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) [d\xi^2 + f_k^2(\xi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (2.3)$$

$$ds^2 = \bar{a}^2(\tau) [d\tau^2 - d\xi^2 - f_k^2(\xi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (2.4)$$

where the function  $f_k(\chi)$  is defined according to the value of the curvature parameter.

$$f_k(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & k = 1 \\ \chi & k = 0 \\ \sinh \chi & k = -1 \end{cases} \quad (2.5)$$

In spite of the derived expressions for the metric 2.2 2.3 and 2.4 are completely equivalent, the usage of one or another depends on the specific problem. Especially the expression 2.3 is usually more used and is defined as the Friedmann's metric.

It could be shown that in Riemannian manifolds <sup>1</sup>, the space-time interval is expressed in terms of the metric tensor as [33]

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx_\nu$$

where it has been introduced the cuadrvector  $x^\mu = (ct, r, \theta, \phi)$ .

Due to the assumption of isotropy and homogeneity, the metric tensor must be diagonal, furthermore, comparing with the expression 2.2, it is possible to obtain the next explicit form

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(t)(1 - kr^2)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

From this metric and the Einstein's field equations, it is possible to build simple models of the universe, such as it shall be shown in the subsection 2.1.2.

---

<sup>1</sup>A Riemannian manifold is a space where it can be defined (well-defined) a metric.

### Measuring distances

Once defined the metric of curved spaces, it is very useful to introduce some concepts related with distances, which are used recurrently [26]. For the sake of simplicity it will be assumed a flat metric ( $k = 0$ ).

- **Comovil radial distance:** by definition, a light signal has an associated null interval, i.e.  $ds^2 = 0$ . Using the expression 2.2 for the metric, it is obtained

$$r = \int_t^{t_0} \frac{cdt'}{a(t')} = \int_a^1 \frac{cda}{a\dot{a}} \quad (2.7)$$

where the specific form of  $a(t)$  depends on the specific chosen cosmology (see subsection 2.1.3) and  $t_0$  is the reference time, which is taken as the current age of the universe.

Due to the assumption of an expanding metric, the distance between two objects depends on the time in which the measurement is performed. Moreover, the distance cannot be determined from a beam of light since light has a finite velocity <sup>1</sup>. Because of that, it must be performed a projection on the light-cone traced by the beam in the current time, such as it is made in the expression 2.8. The latter allows interpreting  $r$  as the distance to an object in the current time, and it is quite different to the apparent distance which corresponds to the time when the object in question emitted the observed light.

- **Proper radial distance:** by virtue of the definition of scale factor, to obtain the distance to an object in any time, it is enough to multiply the comovil distance by the scale factor evaluated in the same time, that is

$$r_{\text{prop}} = a(t) \int_t^{t_0} \frac{cdt'}{a(t')} = a \int_a^1 \frac{cda}{a\dot{a}} \quad (2.8)$$

- **Particle horizon:** considering a beam travelling through vacuum since the beginning of all time, at  $t = 0$ ; the maxim proper distance that could be travelled by the light in a time  $t$  is denominated particle horizon and determines

---

<sup>1</sup> $c = 299\,792\,458$  m/s

## 2. THEORETICAL FRAMEWORK IN COSMOLOGY

---

all regions in the universe that could have been causally connected in that time.

$$r_H = a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} = a \int_0^a \frac{cda}{a\dot{a}} \quad (2.9)$$

### 2.1.2 General Relativity and Friedmann's Equations

The Einstein's field equations of the general relativity play a fundamental role since they express explicitly the relation between the matter content of the universe and the local geometry of the space-time.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.10)$$

or equivalently

$$R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right) \quad (2.11)$$

where  $T$  is the trace of the energy-momentum tensor (see 2.14),  $R_{\mu\nu}$  the Ricci curvature tensor and  $R$  the scalar curvature. The last two terms are calculated from different traces of the Riemann curvature tensor, as  $R_{\mu\nu} = R^\eta_{\mu\eta\nu}$  and  $R = R^\mu_\mu$ . For convenience, it has been introduced the term associated with the cosmological constant, which will be used below to calculate different models of the universe with dark energy contribution.

The Riemann curvature tensor quantifies deviations of the metric of curved space-times with respect to the Euclidean metric and allows to determinate completely the geometrical properties like the local curvature, different measures of distances and angles, etc. [33]. This tensor is built from the Levi-Civita connection as

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\nu\alpha,\beta} - \Gamma^\mu_{\nu\beta,\alpha} + \Gamma^\mu_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\nu\beta} - \Gamma^\mu_{\sigma\beta}\Gamma^\sigma_{\nu\alpha} \quad (2.12)$$

with the Levi-Civita connection defined from the metric as

$$\Gamma^\nu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(g_{\sigma\alpha,\beta} + g_{\sigma\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\sigma}) \quad (2.13)$$

## 2.1 Isotropic and Homogeneous Universe

---

The right-hand side of the equation 2.10 contains the energy-momentum tensor  $T_{\mu\nu}$ , which characterizes the density and the matter-energy flux of the universe. By virtue of the cosmological principle, this tensor must also be diagonal and if, furthermore, it is assumed an ideal fluid model, the next form is obtained

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} c\rho^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Finally, using the equations 2.6, 2.11 and 2.14, it is possible to reduce the complex system of tensorial equations to two scalar coupled equations which are usually called Friedmann's equations [26]. These equations describe completely the evolution of an isotropic and homogeneous universe in terms of the scale factor  $a(t)$  (see equation 2.1)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3P}{c^2} \right) + \frac{c^2 \Lambda}{3} \quad (2.15)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{c^2 k}{a^2} = 4\pi G \left( \rho - \frac{P}{c^2} \right) + c^2 \Lambda \quad (2.16)$$

In order to solve this equation system in terms of  $a(t)$  and thereby obtaining the evolution of the scale factor, it is necessary to know the explicit time-dependent expression of the density  $\rho$  and the pressure  $P$ , or equivalently, the dependence on the scale factor. This must be done for each type of energy-matter of the universe. A detailed derivation of these explicit expressions could be found in [26] and they are summarized in the table 2.1.

By convention, it has been taken the current scale factor as  $a_0 = a(t_0) = 1$  and the reference values are defined as  $\rho_0 = \rho(a_0)$ ,  $P_0 = P(a_0)$  and  $T_0 = T(a_0)$ . Using the Friedmann's equations, defining the Hubble parameter as  $H(t) = \dot{a}/a$  and the vacuum density as  $\rho_\Lambda = c^2 \Lambda / 8\pi G$ , it is obtained

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \left[ \rho_m \frac{1}{a^3} + \rho_r \frac{1}{a^4} + \rho_\Lambda \right] - \frac{c^2 k}{a^2}$$

Evaluating this expression in the current epoch  $H(t_0) = H_0$ , with  $H_0$  the Hubble constant and defining the critical density  $\rho_c$  as the density that the universe must have in order to be flat.

## 2. THEORETICAL FRAMEWORK IN COSMOLOGY

---

Property	Density	Pressure	Temperature
<b>Matter</b> (baryonic + dark)	$\rho = \rho_0 a^{-3}(t)$	$p = p_0 a^{-5}(t)$	$T = T_0 a^{-2}(t)$
<b>Radiation</b> (+ relativistic matter)	$\rho = \rho_0 a^{-4}(t)$	$p = p_0 a^{-4}(t)$	$T = T_0 a^{-1}(t)$
<b>Vacuum</b>	$\rho = \rho_0$	$p = p_0$	—

**Cuadro 2.1:** Dependence of some quantities on the scale factor  $a(t)$  [26].

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (2.17)$$

it leads to the equation of evolution for the Hubble parameter

$$H^2(t) = H_0^2 \left[ (1 - \Omega_0) \frac{1}{a^2} + \Omega_m \frac{1}{a^3} + \Omega_r \frac{1}{a^4} + \Omega_\Lambda \right] \quad (2.18)$$

where it has been introduced the density parameters  $\Omega_i$ , defined as the current density of the  $i$ -th specie in the current epoch, normalized with the critical density 2.17, and  $\Omega_0 = \sum_i \Omega_i$ . These density parameters along with the Hubble constant are part of the free parameters of the theory and must be determined by observations. This allows to characterize different particular cosmologies <sup>1</sup>

### 2.1.3 Simple Solutions of the Universe

Although in this stage it has not been introduced the complete formalism of small perturbations and structure formation, the set of equations 2.15, 2.16 and 2.18 leads to a first and rough understanding of the evolution of the Universe.

In this subsection will be presented some analytic solutions to the Friedmann's equations. In spite of the ideal assumptions on which are based, in some cases, they

---

<sup>1</sup> Cosmology must be understood in this context as a specific solution of the Friedmann's equations.

## 2.1 Isotropic and Homogeneous Universe

---

can be used as approximations in some stages of evolution of the universe, thus allowing a physical understanding more adequate than exact numerical solutions.

### **Einstein - de Sitter Universe**

The Einstein-de Sitter Universe is a cosmological model with a flat metric and composed entirely of matter, this implies that  $\Omega_0 = \Omega_m = 1$  and  $k = 0$ . Applying this in equation 2.18, it is obtained the next expression

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \frac{1}{a^3} \quad (2.19)$$

Integrating, it leads to the explicit time-dependent solution for the scale factor

$$t(a) = \frac{2}{3H_0} a^{3/2} \quad (2.20)$$

Although in this case it is possible to obtain the explicit form of  $a(t)$ , most of the time it is only possible to have the implicit solution  $t(a)$ . Another very useful way to describe this solution is by using the redshift  $z$ , which is related with the scale factor as [26]

$$z + 1 = \frac{a_0}{a} \quad (2.21)$$

to finally obtain

$$t(a) = \frac{2}{3H_0} (1+z)^{-3/2} \quad (2.22)$$

This solution is quite close to the real behaviour of the universe in the matter-dominated epoch, between 70000 and 5 millions of years after the Big Bang [27].

### **Radiation-Dominated Universe**

In this case, it will be assumed that the universe is radiation-dominated, that is  $\Omega_0 = \Omega_r$ , but not necessarily flat. The Friedmann's equations lead to the next expression

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[ (1-\Omega_r) \frac{1}{a^2} + \Omega_r \frac{1}{a^4} \right] \quad (2.23)$$

## 2. THEORETICAL FRAMEWORK IN COSMOLOGY

---

Integrating this expression, it is obtained the next implicit solution for the scale factor

$$t = \begin{cases} H_0^{-1}(\Omega_r - 1)^{-1} \left( \Omega_r^{1/2} - [a^2(1 - \Omega_r) + \Omega_r]^{1/2} \right) & \Omega_r \neq 1 \\ H_0^{-1}a^2/2 & \Omega_r = 1 \end{cases} \quad (2.24)$$

or in terms of redshift

$$t = \begin{cases} H_0^{-1}(\Omega_r - 1)^{-1} \left( \Omega_r^{1/2} - [(1+z)^{-2}(1 - \Omega_r) + \Omega_r]^{1/2} \right) & \Omega_r \neq 1 \\ H_0^{-1}(1+z)^{-2}/2 & \Omega_r = 1 \end{cases} \quad (2.25)$$

This solution is useful as an approximation for the radiation-dominated epoch, which happened from the big bang until the recombination epoch, approximately 380000 years after the big bang, or equivalently in a redshift of  $z = 1100$  [27].

### Vacuum-dominated Universe

This type of hypothetical universe is completely vacuum-dominated, or equivalently dominated by the cosmological constant. Making  $\Omega_0 = \Omega_\Lambda$  in the Friedmann's equations, it is obtained

$$H^2(t) = \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H_0^2 \left[ (1 - \Omega_\Lambda) \frac{1}{a^2} + \Omega_\Lambda \right] \quad (2.26)$$

Solving for  $t(a)$

$$t = \frac{1}{H_0^2 \Omega_\Lambda^{1/2}} \ln \left[ a \left( \frac{\Omega_\Lambda}{1 - \Omega_\Lambda} \right)^{1/2} + \left( 1 + \frac{\Omega_\Lambda}{1 - \Omega_\Lambda} a^2 \right)^{1/2} \right] \quad (2.27)$$

and using the redshift

$$t = \frac{1}{H_0^2 \Omega_\Lambda^{1/2}} \ln \left[ \frac{1}{1+z} \left( \frac{\Omega_\Lambda}{1 - \Omega_\Lambda} \right)^{1/2} + \left( 1 + \frac{\Omega_\Lambda}{1 - \Omega_\Lambda} \frac{1}{(1+z)^2} \right)^{1/2} \right] \quad (2.28)$$

This solution is very interesting because, unlike the previous solutions, is only valid for values of the density parameter within the range  $0 < \Omega_\Lambda < 1$ . This implies that it is not possible to have a universe with flat or hyperbolic geometry when it

## 2.1 Isotropic and Homogeneous Universe

---

is vacuum-dominated. Another aspect equally remarkable is the concavity of the scale factor  $a(t)$  obtained from 2.27 (see figure 2.3), which shows an accelerated expansion of the universe. This characteristic is only possible when there is a non-null term associated to the vacuum energy.

Finally and like the previous solutions, the expression 2.27 can be used as an approximation for the vacuum-dominated epoch of the universe, which lasts from the end of the matter-dominated epoch, 5 millions of years after the big bang, until nowadays [26].

### WMAP7 Universe

The set of parameters associated to the standard cosmological model has been measured on several occasions by different spacecraft missions (see section 1.3). Among those measurements it is notable the one conducted by WMAP. The data obtained after seven years of observation (WMAP7) are adopted in this work [20]. Among the cosmological parameters measured are the Hubble constant and the density parameters  $\Omega_i$ . Taking the values given in the table 1.1 and for simplicity assuming  $\Omega_0 = 1$  it is possible to integrate the Friedmann's equations

$$H^2(t) = H_0^2 \left[ \Omega_m \frac{1}{a^3} + \Omega_r \frac{1}{a^4} + \Omega_\Lambda \right] \quad (2.29)$$

to obtain

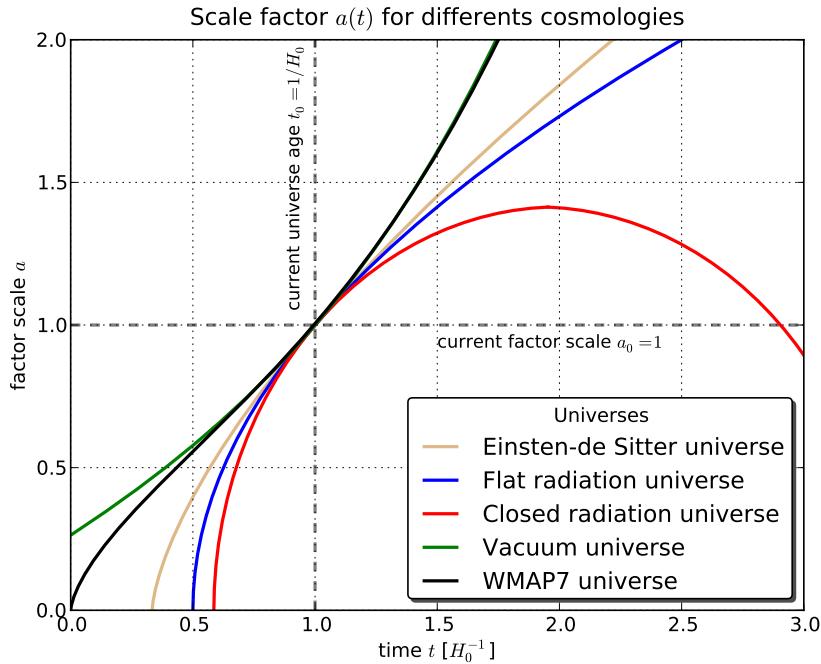
$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^a \left[ \Omega_m \frac{1}{a'} + \Omega_r \frac{1}{a'^2} + \Omega_\Lambda a'^2 \right]^{-1/2} da' \quad (2.30)$$

It is possible to obtain an analytic solution of this integral in terms of elliptic functions, but for simplicity it is chosen the numerical solution. In the figure 2.3 is shown the solution for a WMAP7 universe and it is compared with other cosmologies, derived previously.

An interesting characteristic of the solution for the WMAP7 universe is the change of concavity (black curve in the figure 2.3), which indicates a transition from the matter/radiation-dominated epoch to an accelerated expanding regime associated to the vacuum energy. Another important aspect is the prediction of the age of the universe. Taking into account the previously defined normalization for

## 2. THEORETICAL FRAMEWORK IN COSMOLOGY

---



**Figura 2.3:** Different solutions of the universe according to the Friedmann's equations.

the scale factor  $a(t_0) = a_0$ , it is straightforward to see that  $t_0 = H_0^{-1} \approx 13,75 \times 10^9$  years. Other cosmologies under the same normalization predict different ages, since larger values such as a vacuum-dominated universe, until smaller and even a collapse time (usually known as big crunch time) such as a radiation-dominated and closed universe.

## 2.2 Linear Regime of Structure Formation

The previous section deals about the universe as a whole, assuming as valid the condition of isotropy and homogeneity. Although the real universe has this asymptotic behaviour at very large scales, at smaller local scales the behaviour is quite different, being even completely anisotropic and highly non-homogeneous. Life is certainly the most illustrative example of that, one of the highest non-linearities of the universe, and thus, planets, stars, galaxies, galaxy clusters, in the same order of inhomogeneity and anisotropy.

## 2.2 Linear Regime of Structure Formation

---

The standard way to introduce these local structures in the universe is by assuming as valid the solutions of the Friedmann's equations at very large scales, but considering inhomogeneities as perturbations of the model. First, in the linear regime, where the perturbations in the density field are much smaller than the background mean density ( $\delta\rho \ll \rho_b$ ), and after, in the non-linear regime, where the perturbations are comparable or even larger ( $\delta\rho \sim \rho_b$ ) (see section 2.3).

### 2.2.1 Aproximación Newtoniana

El marco de la evolución lineal puede ser abordado de dos formas. La primera es considerar un término perturbativo en el tensor momentum-energía  $\delta T_{\mu\nu}$  y linearizar las ecuaciones de campo métrico 2.10 y resolver finalmente para  $\delta R_{\mu\nu}$

$$\mathcal{L}(R_{\mu\nu}, \delta R_{\mu\nu}) = \frac{8\pi G}{c^2} (T_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}) \quad (2.31)$$

A pesar de que este método es rigurosamente más adecuado, tiene un inconveniente que lo hace considerablemente complicado de aplicar, los términos perturbativos no lo son necesariamente en todos los sistemas coordenados e incluso pueden llegar a ser del mismo orden o mayores que el término de fondo [27].

El segundo método consiste en asumir perturbaciones con una dimensión comóvil menor al radio de Hubble ( $r_\delta \ll r_H \sim cH_0^{-1}$ ) <sup>1</sup>, y así despreciar los efectos relativistas debido a la curvatura de la espacio-tiempo. Una vez hecho esto es posible usar un esquema Newtoniano para el desarrollo de las perturbaciones en el universo de fondo, este esquema asume el contenido de materia como un fluido y está soportado por tres ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos. La primera es la ecuación de continuidad que representa la conservación de la masa del fluido

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.32)$$

La segunda es la ecuación de Euler que caracteriza el campo de velocidades del fluido y físicamente representa la conservación del momentum

---

<sup>1</sup>Un radio de Hubble  $r_H$  es una unidad de longitud que define el orden de magnitud del tamaño del universo observable.

## 2. THEORETICAL FRAMEWORK IN COSMOLOGY

---

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla\varphi \quad (2.33)$$

Y finalmente la ecuación de Poisson que es la forma no relativista de las ecuaciones de campo de Einstein y especifica el contenido de materia como fuentes de campo gravitacional.

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho \quad (2.34)$$

Para completar el marco Newtoniano de perturbaciones es necesario incluir en el anterior sistema de ecuaciones (2.32, 2.33 y 2.34) el efecto de la expansión del universo, para esto se realiza un cambio de coordenadas de distancia propia  $\mathbf{x}$  a distancia comóvil  $\mathbf{r}$

$$\mathbf{x} = a\mathbf{r}$$

esto implica directamente que

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{x} + \mathbf{v} = \dot{a}\mathbf{r} + \mathbf{v}$$

Esta forma de reescribir  $\mathbf{u}$  permite separar la componente debida a la expansión del universo ( $\dot{a}/a\mathbf{x}$ ), o también denominada Ley de Hubble, de la componente debida al movimiento del fluido, denominado campo de velocidad peculiar y es definido como  $\mathbf{v} = a\dot{\mathbf{r}}$ .

Por conveniencia se descompone el campo de densidad del fluido en una parte media o de fondo y en una parte perturbativa, esto es  $\rho = \bar{\rho} + \delta\rho = \bar{\rho}(1 + \delta)$ , donde  $\delta$  se denomina parámetro de densidad y es adimensional. En el caso del potencial gravitacional  $\varphi$  se define un nuevo campo dado por  $\Phi = \phi + \ddot{a}ar^2/2$  [26]. Con estas consideraciones se obtiene finalmente el conjunto final de ecuaciones de fluido para el marco Newtoniano

$$\text{Ecuación de continuidad} \quad \frac{\partial\delta}{\partial t} = -\frac{1}{a}\nabla_r \cdot [(1 + \delta)\mathbf{v}] \quad (2.35)$$

$$\text{Ecuación de Euler} \quad \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{v} + \frac{1}{a}(\mathbf{v} \cdot \nabla_r)\mathbf{v} = -\frac{\nabla_r P}{a\bar{\rho}(1 + \delta)} - \frac{1}{a}\nabla_r\Phi \quad (2.36)$$

$$\text{Ecuación de Poisson} \quad \nabla_r^2\Phi = 4\pi G\bar{\rho}a^2\delta \quad (2.37)$$

## 2.2 Linear Regime of Structure Formation

---

Hasta este punto no se ha hecho explícito el tipo de contenido materia-energía que es perturbado con las ecuaciones de fluido (e.g. radiación, materia o energía oscura). Siguiendo el procedimiento para derivar el anterior sistema puede notarse que no se ha hecho ninguna suposición a priori sobre comportamiento de las variables de estado respecto al factor de escala (ver tabla 2.1), por tanto son válidas para cualquiera de las especies<sup>1</sup> presentes en el universo. Teniendo en cuenta que las estructuras del universo actual son completamente de materia, solo se usará el marco Newtoniano para perturbaciones de esta especie.

Las cantidades físicas que deben ser determinadas a partir de las ecuaciones de fluido, sumadas a las ecuaciones de Friedmann son: el parámetro de densidad  $\delta$ , el campo de velocidad peculiar  $v$ , el potencial efectivo  $\Phi$ , la presión  $P$  y finalmente el factor de escala  $a$ . Es claro entonces que debe incluirse una ecuación extra para la completa autoconsistencia del problema, esto se logra a partir de una ecuación de estado para la presión. Por simplicidad se asume un modelo de gas monoatómico de la materia para el cual la ecuación estado satisface

$$\nabla_r P = c_s^2 \bar{\rho} \nabla \delta + \frac{2}{3} \bar{T} \rho \nabla s \quad (2.38)$$

donde  $c_s$  es la velocidad del sonido en el medio,  $\bar{T}$  la temperatura de fondo y  $s$  la entropía específica. Usando esta expresión junto con 2.35 y 2.36 se llega a la ecuación general para la evolución de las perturbaciones

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial \delta}{\partial t} = 4\pi G \bar{\rho} \delta + \frac{c_s^2}{2} \nabla^2 \delta + \frac{2}{3} \frac{\bar{T}}{a^2} \nabla^2 s \quad (2.39)$$

En el régimen lineal  $\delta \ll 1$  los modos del campo de densidad evolucionan de forma independiente, permitiendo así desacoplar las perturbaciones de diferentes escalas de tamaño. Una forma bastante estándar de resolver este tipo de problemas es usando transformaciones de Fourier, esto debido a que en el espacio recíproco los modos son naturalmente desacoplados.

Puesto que se han asumido perturbaciones menores al radio de Hubble, el volumen de universo observable puede considerarse finito, y por tanto la descomposición de los campos en coordenadas comóviles se hace discreta, obteniendo

---

<sup>1</sup>De acá en adelante cada uno de los tipos de materia-energía que contribuyen al tensor momentum-energía serán denominados *especies*.

## 2. THEORETICAL FRAMEWORK IN COSMOLOGY

---

$$\begin{aligned}\delta(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} & \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{v}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ s(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\mathbf{k}} s_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} & \Phi(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\mathbf{k}} \Phi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}\end{aligned}\quad (2.40)$$

Si se asumen perturbaciones adiabáticas, es decir, perturbaciones que no intercambian calor con el entorno (universo de fondo) mientras evolucionan, la entropía específica debe permanecer homogénea y por tanto  $\nabla_r s = 0$  [26]. Teniendo esto en cuenta y usando las anteriores descomposiciones de los campos se llega al siguiente conjunto de ecuaciones para la evolución de los modos de densidad y de velocidad peculiar de las perturbaciones

$$\frac{d^2\delta_{\mathbf{k}}}{dt^2} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{d\delta_{\mathbf{k}}}{dt} = \left[4\pi G\bar{\rho} - \frac{c_s^2}{a^2}k^2\right]\delta_{\mathbf{k}} \quad (2.41)$$

$$-k^2\Phi_{\mathbf{k}} = 4\pi G\bar{\rho}a^2\delta_{\mathbf{k}} \quad (2.42)$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{k}} = \frac{ia\mathbf{k}}{k^2}\frac{d\delta_{\mathbf{k}}}{dt} \quad (2.43)$$

### 2.2.2 Inestabilidad de Jeans

Las soluciones de la ecuación 2.41 para los modos del campo de densidad pueden ser clasificadas en dos familias, la primera son soluciones donde la amplitud de los modos oscilan en el tiempo y no colapsan. La segunda familia son aquellas donde los modos crecen en el tiempo, colapsando y volviéndose altamente no lineales ( $\delta_k \gg 1$ ). Un ejemplo sencillo que ilustra lo anterior y puede ser generalizado consiste en considerar perturbaciones en un universo estático, es decir  $\dot{a} = 0$ . Teniendo en cuenta esto la ecuación 2.41 toma la forma

$$\frac{d^2\delta_{\mathbf{k}}}{dt^2} - \omega_k^2\delta_{\mathbf{k}} = 0, \quad a = \text{cte} \quad (2.44)$$

donde se ha definido la frecuencia característica  $\omega_k$  como

## 2.2 Linear Regime of Structure Formation

---

$$\omega_k^2 = \left[ \frac{c_s^2}{a^2} k^2 - 4\pi G \bar{\rho} \right] \quad (2.45)$$

La expresión 2.44 es denominada ecuación de Jeans y tiene la forma de una ecuación de ondas, con base en esto las soluciones pueden ser clasificadas según el valor de  $\omega_k$ , tal como se había mencionado inicialmente.

- Si  $\omega_k^2 > 0$  el modo  $\delta_k$  se comporta de forma oscilatoria, manteniendo su amplitud constante en el tiempo. Esta solución no es de interés para el contexto de formación de estructuras debido a que no es posible llegar tener colapso gravitacional.
- Si  $\omega_k^2 < 0$  la amplitud del modo  $\delta_k$  crece en el tiempo, permitiendo el colapso y la formación de estructuras no lineales.

La expresión 2.45 para  $\omega_k$  junto con el anterior criterio para determinar el tipo de solución permite definir la longitud de Jeans  $\lambda_J$

$$\lambda_J = \frac{2\pi a^2}{k_J} = c_s \left( \frac{\pi}{G \bar{\rho}} \right)^{1/2} \quad (2.46)$$

Esta longitud se interpreta como el mínimo tamaño en coordenadas comóviles que debe tener una perturbación embebida en un medio homogéneo y estático de densidad  $\bar{\rho}$  para colapsar gravitacionalmente. En este mismo contexto es posible definir la masa de Jeans como la mínima masa necesaria para el colapso.

$$M_J = \frac{4}{3}\pi \lambda_J^3 \propto \frac{c_s^3}{G^{3/2} \bar{\rho}^{1/2}} \quad (2.47)$$

A pesar de que lo derivado anteriormente solo es estrictamente válido para medios estáticos, la importancia de su consideración es debida a dos razones: la primera es el interés histórico, ya que el problema de perturbaciones que crecen en medios homogéneos surge inicialmente en astronomía estelar, donde es necesario calcular la masa mínima de una perturbación para su colapso y posterior formación de estrellas y sistemas planetarios. La segunda razón de debe a que la solución para medios estáticos sirve para evaluar el comportamiento asintótico y la validación de las soluciones generales para medios en expansión.

## 2. THEORETICAL FRAMEWORK IN COSMOLOGY

---

Antes de proseguir con las soluciones para medios en expansión es conveniente usar las definiciones de longitud y masa de Jeans como aproximaciones al caso general, para esto se usa la tabla de propiedades en función del factor de escala 2.1 y la definición de la velocidad del sonido en un medio [28]

$$c_s^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s \quad (2.48)$$

- En el caso de perturbaciones de materia bariónica se usa la ecuación de estado de gas ideal asumiendo hidrógeno atómico y se obtiene la siguiente expresión para la masa de Jeans

$$M_J \approx 9,97 \times 10^5 \left( \frac{a_{rc}}{a} \right)^{3/2} M_\odot \quad (2.49)$$

Por conveniencia se ha introducido el factor de escala correspondiente a la época de recombinação <sup>1</sup> $a_{rc}$ .

- Para perturbaciones de radiación y materia relativista se usa la ecuación de estado de la presión de radiación del campo electromagnético [19]  $P = c^2 \rho / 3$  y la ley de Stefan-Boltzmann  $\rho \propto T^4$ , se obtiene la siguiente masa de Jeans

$$M_J \approx 8,39 \times 10^{27} a^3 M_\odot \quad (2.50)$$

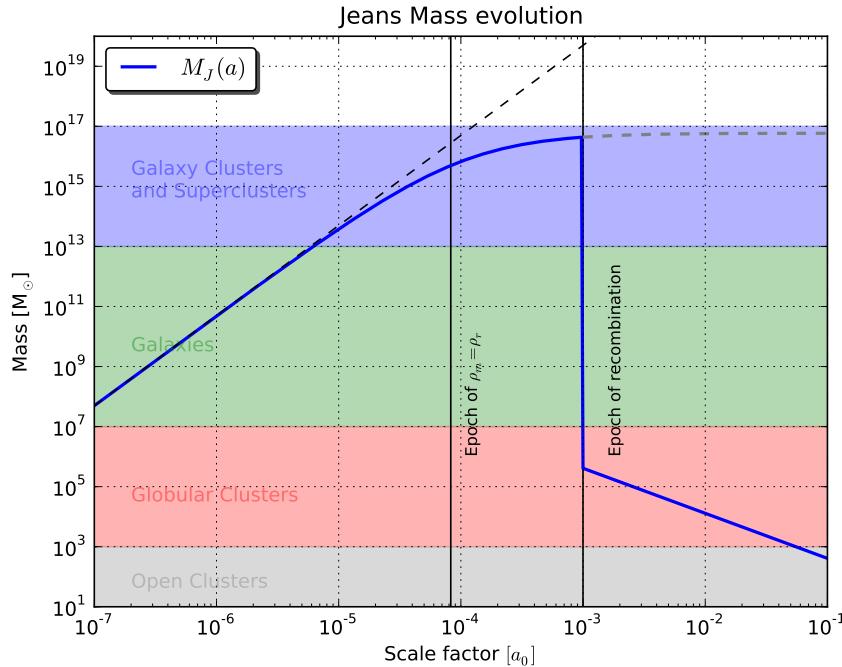
Ambos casos pueden ser usados como aproximaciones a diferentes estadios del universo. Antes de la época de recombinação, cuando la materia y la radiación estaban acopladas vía efecto Compton, las perturbaciones solo colapsan si tienen una masa aproximada a la masa de Jeans 2.50. Después de esta época, cuando la materia evoluciona de forma independiente es válida la expresión 2.49.

En la figura 2.4 se ilustra el cambio de la masa de Jeans respecto al factor de escala del universo. Es interesante notar que antes de la época de recombinação la formación de estructuras poco masivas era impedida, lo que se debe al proceso de homogeneización producido por la difusión de fotones en el medio. Luego de

---

<sup>1</sup>Época en la que se desacopla la materia y la radiación, sucede en un corrimiento al rojo aproximadamente de  $z_{rc} \approx 1000$ .

esta época, cuando surgen las perturbaciones de materia bariónica, es posible la formación de estructuras menos masivas (del orden de cúmulos globulares), lo que está acorde con la teoría de formación jerárquica de estructuras a gran escala.



**Figura 2.4:** Evolución de la masa de Jeans para diferentes estadios del universo. En las regiones coloreadas se ilustra el rango típico de masa para varios tipos de estructuras, desde cúmulos estelares abiertos hasta cúmulos y supercúmulos de galaxias.

Con el anterior análisis se ha establecido la masa mínima necesaria para el colapso de una perturbación, a continuación se estudia la evolución de tales perturbaciones en medios en expansión. Para esto se hace uso de los modelos de universo derivados en la subsección 2.1.3 y la ecuación general de evolución de perturbaciones 2.41.

- **Universo Einstein - de Sitter**

Recordando que para este tipo de universo  $\Omega_m = \Omega_0 = 1$ , usando la función de Hubble 2.19, la solución para el factor de escala 2.20 y la velocidad del sonido derivada de 2.48 y la ecuación de estado de gas ideal se llega a la siguiente expresión para la evolución de las perturbaciones

## 2. THEORETICAL FRAMEWORK IN COSMOLOGY

---

$$\delta_k(a) = \delta_{k,0} \left( \frac{a}{a_{\text{ref}}} \right)^1 \quad (2.51)$$

donde  $\delta_{k,0}$  son las condiciones del campo en el tiempo de referencia  $t_{\text{ref}}$ . Otra solución posible es de la forma  $\delta_k \propto a^{-3/2}$ , pero debido a que es una solución que decae en el tiempo, no es de interés.

- **Universo dominado por radiación**

Para el caso de perturbaciones en un universo dominado por radiación con  $\Omega_r = \Omega_0 = 1$ , usando 2.24 se llega a

$$\delta_k(a) = \delta_{k,0} \left( \frac{a}{a_{\text{ref}}} \right)^{1,22} \quad (2.52)$$

donde de nuevo  $\delta_{k,0}$  representa los modos iniciales del campo y se ignoran soluciones divergentes.

- **Universo dominado por vacío**

Para un universo de constante cosmológica  $\Omega_\Lambda^1$  se tiene el siguiente comportamiento para la evolución de los modos

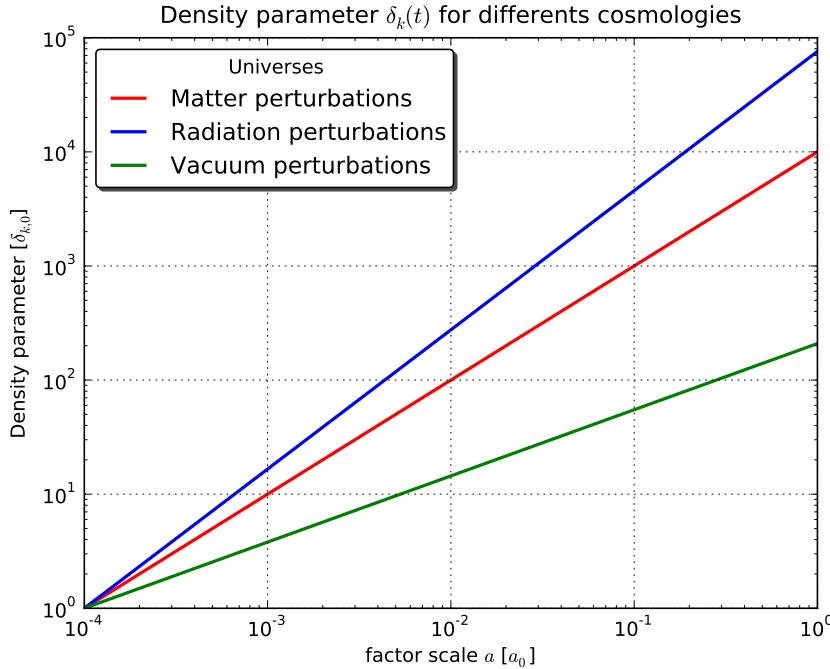
$$\delta_k(a) = \delta_{k,0} \left( \frac{a}{a_{\text{ref}}} \right)^{0,58} \quad (2.53)$$

Graficando cada una de estas soluciones se obtiene la figura 2.5. Por simplicidad y para ilustrar mejor el comportamiento con el factor de escala se normaliza cada solución respecto a su valor en el tiempo de referencia  $\delta_{k,0}$ .

Las condiciones iniciales dependen del número de onda comóvil  $k$  y deben ser determinadas a partir de las propiedades estadísticas del campo de densidad (ver subsección 2.2.3) y de medidas observacionales (por ejemplo la radiación cósmica de fondo).

---

<sup>1</sup> $\Omega_\Lambda < 1$  para garantizar convergencia de las soluciones de la ecuación de Friedmann (ver subsección 2.1.3).



**Figura 2.5:** Evolución de los modos normales del campo de densidad. Por motivos ilustrativos se ha normalizado respecto a las condiciones iniciales.

### 2.2.3 Propiedades Estadísticas y Función de Transferencia

Una vez determinada la evolución de los modos de densidad es necesario compararlos con el universo real. Debido a la naturaleza continua de los campos es inviable tratar de determinar de forma observacional la distribución de densidad, más aún, teniendo en cuenta que la mayor parte de la materia es oscura, la cual solo puede ser inferida de forma indirecta, resulta también técnicamente imposible con los instrumentos actuales llevar a cabo esta empresa.

A pesar de lo anterior es posible aún medir las propiedades estadísticas de la distribución de densidad del universo y comparar con lo obtenido de forma teórica. Para esto se introduce el concepto de funcional de probabilidad para un campo continuo  $P[\delta(\mathbf{r}, t)]$ , definido como la probabilidad de que un cierto campo físico tenga la forma funcional específica  $\delta(\mathbf{r}, t)$ .

## 2. THEORETICAL FRAMEWORK IN COSMOLOGY

---

Una manera más conveniente, en términos computacionales, de aplicar el formalismo de funcional de probabilidad se logra discretizando el espacio en celdas de volumen  $\Delta^3\mathbf{r}_i$ , de tal forma que una cierta forma funcional del campo de densidad  $\delta(\mathbf{r}, t)$  sea equivalente a tener simultáneamente en cada celda  $\mathbf{r}_i$  del grid el valor  $\delta_i = \delta(\mathbf{r}_i)$ , así el funcional de probabilidad se transforma en una función de probabilidad conjunta

$$P[\delta(\mathbf{r}, t)] \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathbf{r}}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N; t) \quad (2.54)$$

Teniendo en cuenta la descomposición de Fourier del campo de densidad  $\delta(\mathbf{r}, t)$  en las ecuaciones 2.40, es posible definir una función de probabilidad conjunta en el espacio recíproco  $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}(\delta_{\mathbf{k}_1}, \delta_{\mathbf{k}_2}, \dots, \delta_{\mathbf{k}_N}; t)$  que caracteriza completamente la probabilidad de una distribución específica  $\delta_{\mathbf{k}}(t)$ .

La principal motivación de trabajar en el espacio recíproco de debe a que es posible usar la aproximación de modos incorrelacionados en la cual se asume que cada modo evoluciona de forma independiente. En el espacio real no es posible realizar esto debido a que el largo alcance de la interacción gravitacional acopla fuertemente el campo densidad entre diferentes lugares. Una consecuencia directa de la anterior aproximación es expresar la función de probabilidad conjunta como el producto de  $N$  distribuciones individuales [27]

$$\mathcal{P}_{\mathbf{k}}(\delta_{\mathbf{k}_1}, \delta_{\mathbf{k}_2}, \dots, \delta_{\mathbf{k}_N}; t) = \prod_{\mathbf{k}_i} g_{\mathbf{k}_i}(\delta_{\mathbf{k}_i}; t) \quad (2.55)$$

donde

$$\delta_{\mathbf{k}} = \int_V \delta(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} \quad (2.56)$$

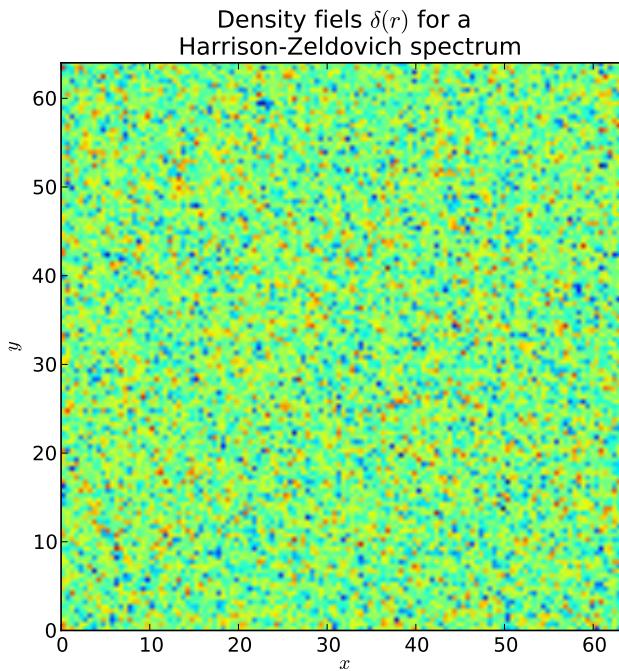
$g_{\mathbf{k}_i}$  la distribución individual de cada modo,  $V = L^3$  el volumen de normalización y  $\mathbf{k} = (2\pi/L)\mathbf{n}$ , con  $\mathbf{n}$  un vector de componentes enteras que caracterizan el modo específico.

Asumiendo que las perturbaciones primordiales del campo de densidad se originaron por el proceso de inflación cósmica, es posible demostrar que la distribución de los modos normales  $g_{\mathbf{k}_i}$  es una función Gaussiana [27]. Por conveniencia se descompone en coordenadas polares complejas el modo de densidad  $\delta_{\mathbf{k}} = r_{\mathbf{k}} \exp(i\phi_{\mathbf{k}})$ , obteniendo la siguiente distribución

$$g_{\mathbf{k}}(r_{\mathbf{k}}, \phi_{\mathbf{k}}; t) = \frac{2(r_{\mathbf{k}} dr_{\mathbf{k}})}{\sigma_k^2} \left( \frac{d\phi_{\mathbf{k}}}{2\pi} \right) \exp \left( -\frac{r_{\mathbf{k}}^2}{\sigma_k^2} \right); \quad \sigma_k^2 = 2\mu_k^2 \quad (2.57)$$

donde  $\mu_k^2$  es la varianza de la distribución y  $\sigma_k^2$  se denomina espectro de potencia. Debido a la asunción de isotropía y homogeneidad para el universo de fondo, ambas cantidades solo dependen de la magnitud del vector de onda  $|\mathbf{k}| = k$ . También es directo mostrar las siguientes propiedades de la distribución del campo

$$\langle \delta_{\mathbf{k}} \rangle = 0; \quad \langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = \sigma_k^2; \quad \langle \delta_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{p}} \rangle = 0 \text{ si } \mathbf{k} \neq \mathbf{p} \quad (2.58)$$



**Figura 2.6:** Distribución inicial de perturbaciones para el campo de contraste de densidad a partir de la distribución Gaussiana 2.57 y el espectro de potencia de Harrison-Zeldovich  $\sigma_k \propto k$ .

Una cantidad que puede ser evaluada directamente es la función de correlación de dos puntos  $\xi(\mathbf{r}) \equiv \langle \delta(\mathbf{r}' + \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}') \rangle$ , definida como la probabilidad de tener una perturbación a una distancia  $\mathbf{r}$  de otra. Es una medida directa del grado de anisotropía y las propiedades de clustering de una distribución.

## 2. THEORETICAL FRAMEWORK IN COSMOLOGY

---

$$\begin{aligned}\xi(\mathbf{r}) = \langle \delta(\mathbf{r}' + \mathbf{r})\delta(\mathbf{r}') \rangle &= \frac{1}{V^2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{p}} \langle \delta_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{p}}^* \rangle \exp [i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}' + \mathbf{r}) - i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}'] \\ &= \int \frac{V^{-1}}{(2\pi)^3} \sigma_k^2 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 \mathbf{k}\end{aligned}\quad (2.59)$$

donde en la última línea se ha realizado el límite al continuo. La expresión 2.59 muestra que  $\sigma_k^2$  es la transformada de Fourier de la función de correlación, es decir

$$V^{-1} \sigma_k^2 = \int \xi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 \mathbf{r} \quad (2.60)$$

La anterior relación junto con la distribución Gaussiana del campo muestra que tanto el espectro de potencia como la función de correlación contienen toda la información estadística del campo de densidad en el régimen lineal. En caso de asumir una distribución no-Gaussiana es necesario tener más momentos de la distribución, tal como la función de correlación de tres puntos, etc.

### Espectro de potencia de Harrison-Zeldovich

Una primera aproximación al espectro de potencia, y que puede ser demostrada con el modelo de inflación cósmica para las perturbaciones primigenias [27], es una ley de potencia de la forma

$$\sigma_k^2 = A k^{n_s} \quad (2.61)$$

donde  $A$  es un factor de normalización y  $n$  es el índice espectral. En el caso específico en que  $n_s = 1$  se denomina espectro de potencia de Harrison-Zeldovich y es invariante de escala<sup>1</sup>.

Para determinar el factor de normalización es común aplicar un filtro a los modos normales que contribuyen al campo de densidad, con esto la función de correlación queda

$$\xi(\mathbf{r}; R) = \int \frac{V^{-1}}{(2\pi)^3} \sigma_k^2 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \tilde{W}(k; R) d^3 \mathbf{k} \quad (2.62)$$

---

<sup>1</sup>El valor determinado observacionalmente es muy cercano  $n_s = 0,963$  (ver tabla 1.1).

## 2.2 Linear Regime of Structure Formation

---

donde  $R$  determina la escala máxima a partir de la cual se aplica el filtro en los modos del campo y  $\tilde{W}(k; R)$  es la transformada de Fourier de la función de filtro. En especial se define la dispersión en el espacio real asociada a una escala  $R$  como  $\sigma_R^2 = \langle \delta^2 \rangle = \xi(0; R)$ , este parámetro puede ser determinado observacionalmente a partir de surveys de galaxias y de la radiación cósmica de fondo, en especial el valor estándar definido por el WMAP7 es  $\sigma_8^2 = \xi(0; R = 8 \text{ Mpc}/h) = 0,801$  (ver tabla 1.1), con esto se llega a

$$\sigma_8^2 = A \int \frac{V^{-1}}{(2\pi)^3} k^{n_s} \tilde{W}(k; R = 8 \text{ Mpc}/h) d^3 k \quad (2.63)$$

de esta forma, a partir de los valores medidos de  $n_s$  y  $\sigma_8^2$ , es posible encontrar la normalización del espectro de potencia.

### Función de Transferencia

Finalmente para el régimen lineal se introduce el concepto de función de transferencia  $T_k(t)$ , definida a partir de la siguiente expresión

$$\delta_{\mathbf{k}}(t) = T_{\mathbf{k}}(t) \delta_{\mathbf{k}}(t_i) \quad (2.64)$$

donde  $t_i$  es un tiempo de referencia, normalmente la época de recombinação en el caso de perturbaciones de materia.

De la expresión 2.64 se infiere que la función de transferencia contiene toda la información dinámica de las perturbaciones, más aún, de la definición 2.58 para el espectro de potencia se tiene

$$\sigma_k(t) = \sigma_k(t_i) |T_k(t)|^2 = A k^{n_s} |T_k(t)|^2 \quad (2.65)$$

donde se ha asumido un espectro de potencia de Harrison-Zeldovich para el tiempo de referencia. Con esto finalmente se concluye que la función de transferencia también permite obtener todas las propiedades estadísticas del campo durante el tiempo en que el régimen lineal es válido.

El cálculo de la función de transferencia es generalmente complejo y requiere realizarse numéricamente <sup>1</sup>, además depende de las propiedades específicas de la

---

<sup>1</sup>CMBFAST es un software bastante conocido para este propósito [http://lambda.gsfc.nasa.gov/toolbox/tb\\_cmbfast\\_ov.cfm](http://lambda.gsfc.nasa.gov/toolbox/tb_cmbfast_ov.cfm)

## 2. THEORETICAL FRAMEWORK IN COSMOLOGY

---

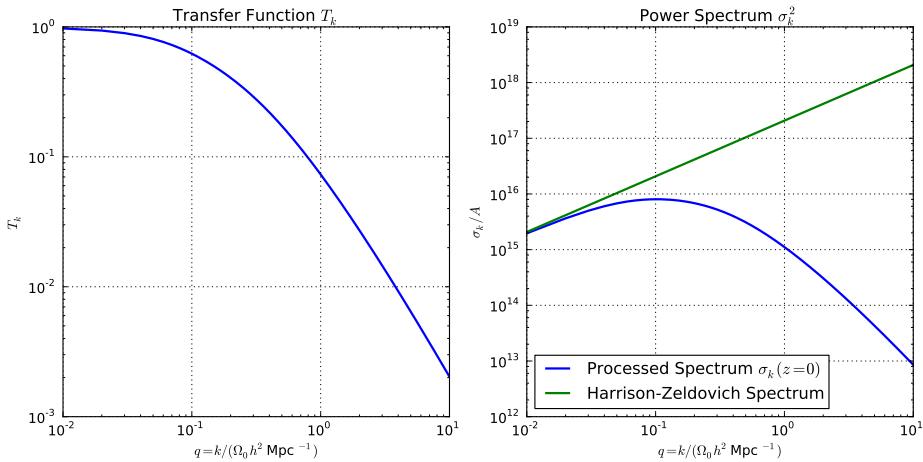
especie asociada a la perturbación. Como un ejemplo, en el caso de perturbaciones de materia oscura debe ser especificado el tipo de partículas que la componen, ya sean partículas livianas relativistas (materia oscura caliente) o partículas pesadas no relativistas (materia oscura fría). Entre ambos casos la función de transferencia y el espectro procesado 2.65 difieren bastante debido a las diferentes ecuaciones de estado asociadas a cada tipo.

En el caso de perturbaciones adiabáticas (isoentrópicas) de materia oscura fría puede usarse la siguiente aproximación analítica para la época actual [26]

$$T_k \approx \frac{\ln(1 + 2,34q)}{2,34q} \left[ 1 + 3,89q + (1,61q)^2 + (5,46q)^3 + (6,71q)^4 \right]^{-1/4} \quad (2.66)$$

donde  $q \equiv k/\Omega_0 h^2 \text{ Mpc}^{-1}$ .

En la siguiente figura se ilustra la función de transferencia 2.66 junto con el espectro de potencia procesado



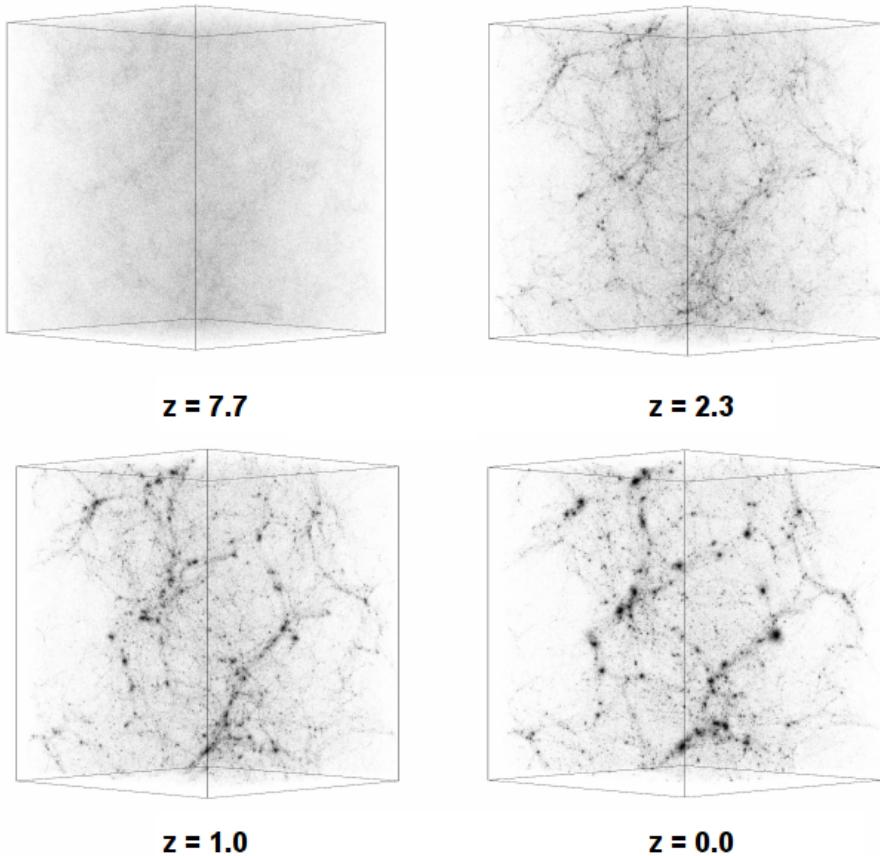
**Figura 2.7:** Función de transferencia para materia oscura fría en la época actual [26] (Izquierda). Comparación entre el espectro de potencia inicial, Harrison-Zeldovich, y el espectro de potencia procesado (derecha).

De todo el formalismo desarrollado en esta sección se concluye que el objetivo final para la caracterización del régimen lineal es obtener la función de transferencia, ya que esta determina completamente la evolución del universo en épocas tempranas donde hay alta homogeneidad e isotropía en todas las escalas.

## 2.3 Régimen No Lineal de Formación de Estructuras

### 2.3 Régimen No Lineal de Formación de Estructuras

En el régimen lineal se describe el proceso de formación de estructuras como perturbaciones en un universo de fondo homogéneo e isotrópico. Cuando las perturbaciones crecen tal que  $\delta \gtrsim 1$  la autogravedad de los modos acopla fuertemente el campo de forma local y e invalida la aproximación lineal. Los procesos físicos asociados al régimen no lineal son altamente complejos e inclusive algunos no son bien entendidos en la actualidad, esto hace que solo sea posible abordar satisfactoriamente el problema a través de simulaciones numéricas (ver capítulo 3).



**Figura 2.8:** Evolución de una simulación numérica de materia oscura en una caja de 40 Mpc/ $h$ , iniciando en un estado de alta homogeneidad (arriba-izquierdo) hasta la época actual de estructuras altamente no lineales (abajo-derecha). Tomado de [http://www.astro.utu.fi/research/CosmoS/lss/lss\\_p1.shtml](http://www.astro.utu.fi/research/CosmoS/lss/lss_p1.shtml)

## 2. THEORETICAL FRAMEWORK IN COSMOLOGY

---

La figura 2.8 corresponde a una simulación numérica de materia oscura para el universo en régimen no lineal. En esta pueden ser apreciadas algunas propiedades emergentes tales como la anisotropía e inhomogeneidad a escalas pequeñas ( $\sim$  Mpc), la formación y clustering de estructuras altamente no lineales y la aparición de un patrón de red a grandes escalas (red cósmica).

### 2.3.1 Aproximación de Zeldovich

A pesar de la complejidad del régimen no lineal, cuando las perturbaciones en el campo de densidad aún no son mucho mayores que el valor de fondo puede realizarse una desarrollo analítico de la evolución, esto es conocido como aproximación de Zeldovich y fue desarrollada en 1970 por Yakov Zeldovich en [36]. Para formular esta aproximación es conveniente expresar de nuevo el campo de contraste de densidad  $\delta(\mathbf{r})$  en términos de coordenadas comóviles y no respecto a los modos normales de Fourier, esto debido a que en este régimen los modos no son independientes y usarlos no simplifica el tratamiento, a diferencia del régimen lineal.

Usando el marco de referencia Lagrangiano de una cierta porción de fluido o distribución de materia, su trayectoria  $\mathbf{r}_f$  puede ser descrita mediante la siguiente expresión

$$\mathbf{r}_f(t, \mathbf{q}) = a(t)\mathbf{r} = a(t)[\mathbf{q} + \Psi(\mathbf{q}, t)] \quad (2.67)$$

donde  $\mathbf{r}$  es la posición comóvil de la porción de fluido,  $\mathbf{q}$  su coordenada Lagrangiana inicial cuando el fluido no está perturbado y  $\Psi(\mathbf{q}, t)$  se denomina función de desplazamiento y da cuenta de las perturbaciones en el medio.

A partir de la ecuación de evolución del campo de contraste de densidad 2.39 es posible demostrar que el campo de desplazamiento  $\Psi(\mathbf{q}, t)$  satisface [34]

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{3}{2} H^2 \Psi \quad (2.68)$$

de esto se obtiene finalmente

$$\Psi = \frac{3}{2} H_0^{-2} a(t) \nabla \Phi \quad (2.69)$$

## 2.3 Régimen No Lineal de Formación de Estructuras

---

donde  $\Phi$  es el potencial gravitacional efectivo asociado al campo de densidad por medio de la ecuación de Poisson 2.37.

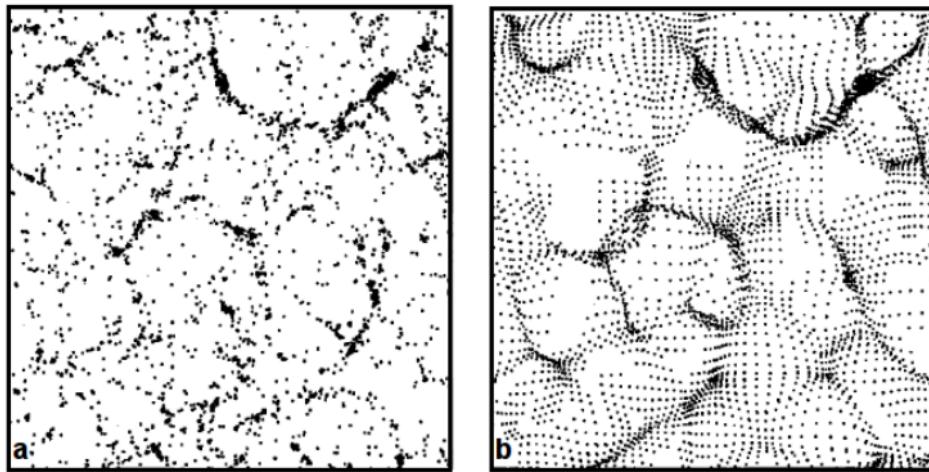
Expresando la conservación de la masa en términos de las coordenadas comóviles y las coordenadas Lagrangianas iniciales, se debe satisfacer

$$\rho(\mathbf{r}, t)d^3\mathbf{r} = \bar{\rho}(t)d^3\mathbf{q} \quad (2.70)$$

calculando ahora el Jacobiano  $\partial q_i / \partial r_j$  de la transformación  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{q}$ , el campo de densidad perturbado puede ser escrito como [27]

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{\bar{\rho}(t)}{(1 - a(t)\lambda_1(\mathbf{q})) (1 - a(t)\lambda_2(\mathbf{q})) (1 - a(t)\lambda_3(\mathbf{q}))} \quad (2.71)$$

donde  $-\lambda_i(\mathbf{q})$  son los autovalores del Jacobiano y están ordenados de tal forma que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ . Cada uno de estos autovalores pueden ser interpretados de forma geométrica como un indicador del colapso o expansión de una porción de fluido en la dirección correspondiente al autovector respectivo, así por ejemplo si  $\lambda_i > 0$ , implica que el campo de densidad está colapsando localmente en la dirección del autovector  $\mathbf{u}_i$ , mientras que  $\lambda_i < 0$  implica una expansión en la misma dirección.



**Figura 2.9:** Comparación de la evolución en régimen no lineal entre una simulación de N-cuerpos (a), y la aproximación de Zeldovich (b). En ambos casos se usan las mismas condiciones iniciales. Tomado de [26].

## **2. THEORETICAL FRAMEWORK IN COSMOLOGY**

---

Finalmente en la figura 2.9 se muestra una comparación entre una simulación numérica de N-cuerpos y la aproximación de Zeldovich, puede notarse una alta semejanza visual en las estructuras obtenidas en los dos casos al final de la evolución, demostrando la alta precisión del método. En la sección 3.3 se hace uso de la idea general planteada en la aproximación de Zeldovich respecto a los autovalores del Jacobiano de la transformación, para la construcción de esquemas de clasificación del entorno cosmológico a partir de los autovalores de otras cantidades físicas más adecuadas para la descripción de la dinámica local del campo de densidad, tales como el tensor de marea o el tensor de velocidad peculiar.

*“Todos los efectos de la Naturaleza son sólo la consecuencia matemática de un pequeño número de leyes inmutables”*

Pierre Simon Laplace

CHAPTER

# 3

## Métodos Computacionales en Cosmología

En los últimos años la física computacional ha adquirido un papel importante en física, permitiendo modelar diversos sistemas complejos sin necesidad de recurrir a la experimentación u observación. Entre los métodos abarcados por la física computacional destaca el problema de N-cuerpos debido a que muchos fenómenos requieren el cómputo de interacciones entre una gran cantidad de cuerpos. Algunos ejemplos muy representativos son la modelación de sistemas moleculares, física de plasmas y especialmente problemas gravitacionales en astrofísica. El desarrollo de los métodos específicos para la solución de este tipo de problemas antecede la aparición de los ordenadores y sistemas de cómputo en general, aún así, el desarrollo de estos potenció enormemente esta área al punto de ser la física computacional una nueva rama de la física.

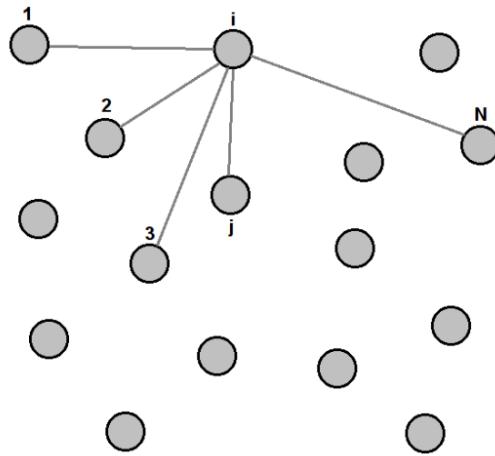
En este capítulo se desarrollan métodos específicos para la solución de problemas gravitacionales en astrofísica, en especial para la simulación del universo a gran escala en régimen no lineal, partiendo de algoritmos básicos para el cómputo de fuerzas, métodos de detección de halos, hasta esquemas de clasificación para el entorno cosmológico.

### 3. MÉTODOS COMPUTACIONALES EN COSMOLOGÍA

---

#### 3.1 Simulaciones de N-Cuerpos

En general, el tipo de fenómenos más promisorios para ser modelados con simulaciones N-cuerpos son aquellos donde las interacciones son fuertemente ligadas entre las partículas, tales como fuerzas de largo alcance o correlaciones no locales. En la figura 3.1 se ilustra un conjunto de partículas puntuales que interactúan mutuamente bajo alguna campo de fuerza  $f$ , estas condiciones conforman la formulación clásica del problema de N-cuerpo.



**Figura 3.1:** Formulación del problema de N-cuerpos.

Asumiendo interacciones que dependen de la posición<sup>1</sup>, la ecuación de movimiento para la partícula  $i$  de la figura 3.1 queda [29] [3]

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^N \mathbf{f}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = -\nabla \phi(\mathbf{r}_i) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.1)$$

donde se ha introducido la función potencial  $\Phi(\mathbf{r})$ . Para el caso de interacción gravitacional el potencia adquiere la forma

$$\phi(\mathbf{r}) = - \sum_{j=1}^N \frac{Gm_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \quad (3.2)$$

---

<sup>1</sup>En el problema generalizado las interacciones pueden depender de otros parámetros tales como velocidad o grados de libertad intrínsecos como espín.

### 3.1 Simulaciones de N-Cuerpos

---

La solución se obtiene a partir del conjunto  $\{\mathbf{r}_1(t), \dots, \mathbf{r}_N(t)\}$  determinado a partir de las ecuaciones 3.1, para lo cual es necesario implementar aproximaciones numéricas debido a la no solubilidad analítica del problema.

#### 3.1.1 Método P-P

La primera aproximación para la solución de las ecuaciones de movimiento 3.1 es computar todas las  $N - 1$  interacciones de la  $i$ -ésima partícula con todas las demás en un cierto tiempo  $t$  y esto para  $i = 1, 2, \dots, N$ , luego a partir de un esquema numérico de integración se calculan las posiciones en un tiempo posterior discretizado  $t + \Delta t$  y así hasta un tiempo máximo  $t_{\max}$  deseado. Este método se denomina P-P (Partícula a Partícula) y es uno de los tres métodos estándar desarrollados para la solución del problema de N-cuerpos.

Cuando las interacciones poseen singularidades, tal como los potenciales Coulombianos de la electrostática y la gravitación (ecuación 3.2), la integración de las ecuaciones de movimiento se hace sensible a encuentro cercanos entre partículas y por tanto debe aumentarse la resolución en la discretización temporal, llevando a un aumento considerable en el tiempo de cómputo. Una solución común es introducir un parámetro de suavizado que elimine estas singularidades, aunque a costa de una pérdida en la precisión de la solución. Para el potencial gravitacional 3.2 queda

$$\phi_s(\mathbf{r}) = - \sum_{j=1}^N \frac{Gm_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j| + \epsilon_j^2} \quad (3.3)$$

donde  $\epsilon_j$  es el parámetro de suavizado y puede interpretarse como una medida de la dimensión física real de la partícula.

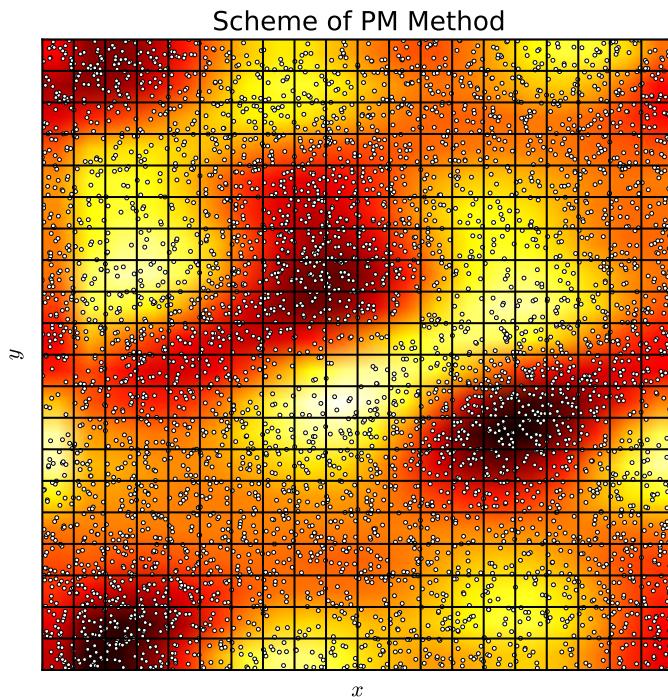
A pesar de la alta precisión lograda con este método, el tiempo de cómputo escala como  $t_{\text{comp}} \propto N^2$ , lo que lo hace altamente inviable para un gran número de partículas (generalmente  $N \gtrsim 10^4 - 10^5$  [27]). Para la simulación de sistemas planetarios, órbitas de cuerpos menores y cúmulos estelares este método resulta ser muy adecuado, pero para problemas cosmológicos y de galaxias, donde el número de partículas debe ser el máximo posible para poder reproducir la verdadera naturaleza continua de las distribuciones de materia, es necesario desarrollar métodos menos costosos computacionalmente.

### 3. MÉTODOS COMPUTACIONALES EN COSMOLOGÍA

---

#### 3.1.2 Método PM

Un segundo esquema para el cómputo del problema de N-cuerpos es el método PM<sup>1</sup>[5], este consiste en determinar una distribución continua del campo de densidad a partir de las masas y posiciones de las partículas, para esto se divide el espacio de la simulación en una malla de  $M \times M \times M$  celdas y se hace un conteo del número de partículas por celda para asociar un valor específico de masa y por tanto de densidad. Un esquema ilustrativo es mostrado en la figura 3.2



**Figura 3.2:** Diagrama ilustrativo del método P<sup>3</sup>M. El mapa dibujado sobre la distribución de partículas corresponde a la densidad asociada a cada celda de la malla. Las zonas oscuras corresponden a regiones de sobredensidad mientras las zonas blancas a regiones de menor densidad, acorde a la cantidad de partículas por celda y sus masas individuales.

---

<sup>1</sup>PM viene de las siglas en inglés *Particle Mesh* y una traducción adecuada sería malla de partículas.

### **3.1 Simulaciones de N-Cuerpos**

---

El método puede ser resumido en los siguientes pasos

1. A partir de la malla establecida sobre la simulación es calculado un campo de densidad continuo  $\rho(\mathbf{r})$  interpolado entre cada celda.
2. Con el campo de densidad se procede a computar el potencial en la ecuación de movimiento 3.1 a través de la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho \quad (3.4)$$

Para esto generalmente son usados esquemas de integración basados en la transformada de Fourier, tales como la transformada rápida de Fourier (FFT por su siglas en inglés).

3. Usando el campo de potencial anterior se calcula la posición de cada partícula en el tiempo siguiente  $t + \Delta t$ , y se repite el esquema completo hasta un tiempo máximo deseado.

Este método es menos preciso que el método de suma directa, aún así es posible demostrar que el tiempo de cómputo escala como  $t_{\text{comp}} \propto N + M \log M$ , con un comportamiento asintótico de  $t_{\text{comp}} \propto N$  para altas resoluciones  $M$  de la malla y  $t_{\text{comp}} \propto N$  para bajas resoluciones [29]. En todos los casos la eficiencia es mucho mayor que el método PM 3.1.2 cuando el número de partículas es relativamente grande  $N \ll 10^4 - 10^5$ , lo que hace a este método bastante competente para problemas de muchas partículas.

Existen algunas situaciones patológicas para las cuales el método presenta dificultades [29]

- Distribuciones de partículas altamente inhomogéneas.
- Sistemas fuertemente correlacionados.
- Sistemas con geometrías no triviales.

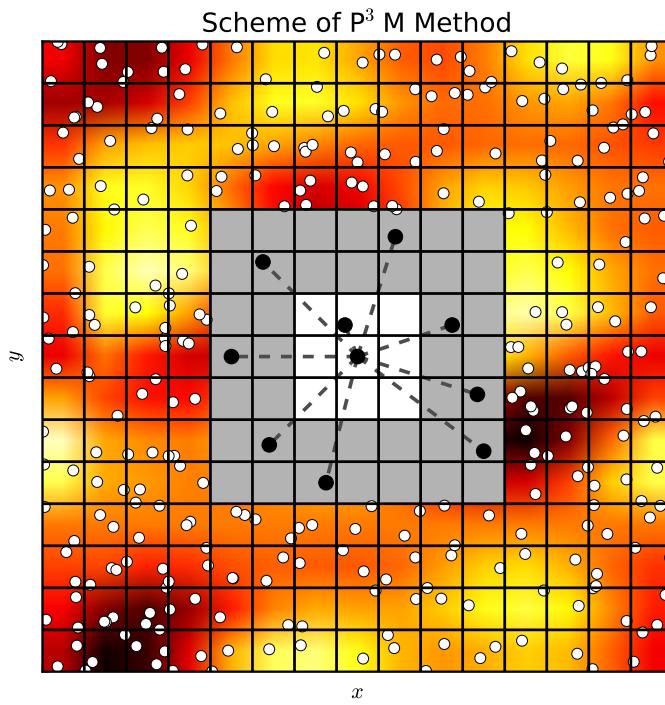
Debido a las altas inhomogeneidades y fuertes correlaciones locales por acople gravitacional entre los diferentes modos en el universo tardío ( $z \gtrsim 8$ ), este método resulta poco preciso para la simulación del régimen no lineal.

### 3. MÉTODOS COMPUTACIONALES EN COSMOLOGÍA

---

#### 3.1.3 Método $P^3M$

El último los tres esquemas estándar para simulaciones de N-Cuerpos es el método  $P^3M$  (PP + PM) [15], este es una combinación de los métodos anteriores, haciendo uso de las ventajas de cada uno.

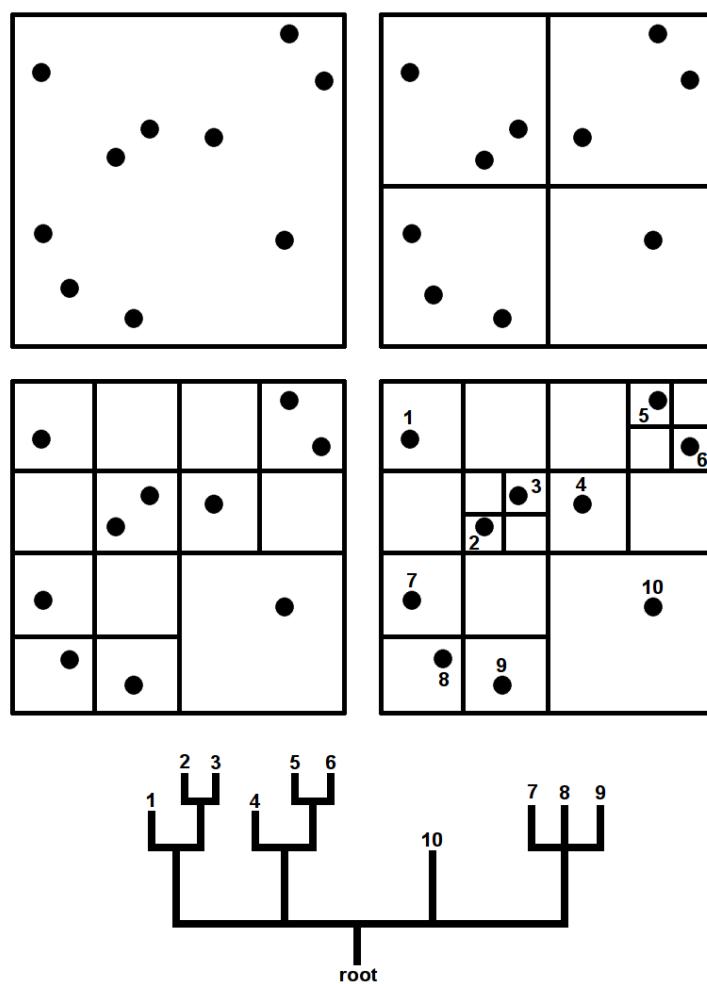


**Figura 3.3:** Diagrama ilustrativo del método  $P^3M$ . Para la partícula de referencia en el centro la interacción con partículas lejanas es calculada con el método PM, mientras que para las partículas cercanas en la región gris y blanca es usado el método de suma directa PP.

En la figura 3.3 se ilustra el método  $P^3M$ , en cada paso de integración del sistema se hace un grid jerárquico respecto a cada partícula, las jerarquías son definidas de acuerdo a la distancias relativas y determinan la aproximación usada para el cómputo de la ecuación de movimiento. Para partículas cercanas (primera jerarquía) se usa el método de suma directa, lo que permite dar cuenta de correlaciones locales y dar un tratamiento adecuado a zonas con altas inhomogeneidades. En las siguientes jerarquías se descompone el potencial en sus componentes

### 3.1 Simulaciones de N-Cuerpos

multipolares, tomando las contribuciones de más alto orden acorde al nivel de la jerarquía, así por ejemplo la segunda jerarquía tiene en cuenta las contribuciones dipolares, la tercera las cuadrupolares, etc. Finalmente para la última jerarquía se usa el esquema PM, interpolando el campo de densidad y resolviendo la ecuación de Poisson 3.4 para el potencial.



**Figura 3.4:** Ejemplo de construcción de un código de árbol para una simulación de N-cuerpos. En los paneles superiores se muestran iteraciones del método para un problema 2D. En la parte inferior se ilustra el árbol construido con cada partícula de la simulación.

### **3. MÉTODOS COMPUTACIONALES EN COSMOLOGÍA**

---

Uno de los principales inconvenientes de este método radica en la construcción de la estructura jerárquica para la evaluación de las interacciones. El esquema original propuesto simultáneamente por [1] [21] y [30] presenta inconsistencias debido a la falta de fundamentación física en la construcción de la estructura jerárquica [29].

Uno de los métodos propuestos para la construcción de la estructura jerárquica y que carece en gran medida de las inconsistencias mencionados se denomina código de árbol octante y fue inicialmente desarrollado por [2]. En este algoritmo el espacio de la simulación es embebido en una celda cúbica denominada raíz (*root*) y luego se divide en 8 regiones de igual tamaño denominadas octantes, estas componen la primera jerarquía del árbol. El método se repite de forma recursiva hasta obtener a lo sumo una partícula por celda, construyendo de esta forma un conjunto de jerarquías que determinan las vecindades de todas las partículas. En la figura 3.4 se ilustra las iteraciones requeridas para la construcción del árbol en una simulación (por simplicidad se ha tomado en dos dimensiones) y en la parte inferior de la misma figura se muestra esquemáticamente la estructura del árbol. De esta forma es posible computar por ejemplo la interacción entre las partículas 7, 8 y 9 con suma directa, por ser vecinas próximas, mientras que su interacción con las demás partículas, pertenecientes a otras ramas, por medio de PM.

## **3.2 Tipos de Simulación**

Usando los métodos descritos en la anterior subsección es posible realizar simulaciones del universo en régimen no lineal y estudiar su comportamiento de forma numérica. Debido a que en régimen no lineal los procesos astrofísicos de grandes escalas son dominados principalmente por materia oscura, es habitual no considerar la contribución de las componentes de radiación y materia bariónica, además de que los procesos físicos que involucran estas componentes aumentarían considerablemente los tiempos de cómputo. Este tipo de simulaciones son denominadas *simulaciones de materia oscura*.

En esta subsección son presentadas las simulaciones de materia oscura que son usadas, además son clasificadas acorde al criterio adoptado para la elección de las condiciones iniciales. Estas pueden ser no restringidas cuando las condiciones

iniciales son escogidas de forma completamente aleatoria, o restringidas cuando son escogidas de tal forma que la simulación satisface alguna condición impuesta a priori, tal como la reproducción del universo local en una escala de algunas decenas de  $\text{Mpc}/h$ .

### 3.2.1 Simulaciones No Restringidas (**Bolshoi**)

Puesto que la evolución del universo en régimen lineal es conocida a través de la función de transferencia (ver sección 2.2), las simulaciones cosmológicas solo son usadas para el estudio del régimen no lineal, aún así es necesario fijar un conjunto de condiciones iniciales para la integración del sistema. Generalmente estas condiciones son determinadas a partir del cómputo del régimen lineal, para esto a su vez es requerido otro conjunto de condiciones iniciales primordiales para el campo de densidad homogéneo de fondo, es debido a esto que estas últimas condiciones serán referidas simplemente como condiciones iniciales.

Como ha sido mencionado en la subsección 2.2.3, las propiedades estadísticas del campo de densidad inicial corresponden a una distribución Gaussiana de los modos de Fourier con un espectro de potencia de Harrison-Zeldovich, acorde con el modelo inflacionario y observaciones cosmológicas (subsección 1.3). Los modos del campo de densidad  $\delta_{\mathbf{k}} = r_{\mathbf{k}} e^{i\phi_{\mathbf{k}}}$  siguen entonces las distribuciones determinadas en la ecuación 2.57

$$P_r(r_{\mathbf{k}})dr_{\mathbf{k}} = \exp\left(-\frac{r_{\mathbf{k}}^2}{\sigma_k^2}\right) \frac{2r_{\mathbf{k}} dr_{\mathbf{k}}}{\sigma_k^2} \quad (3.5)$$

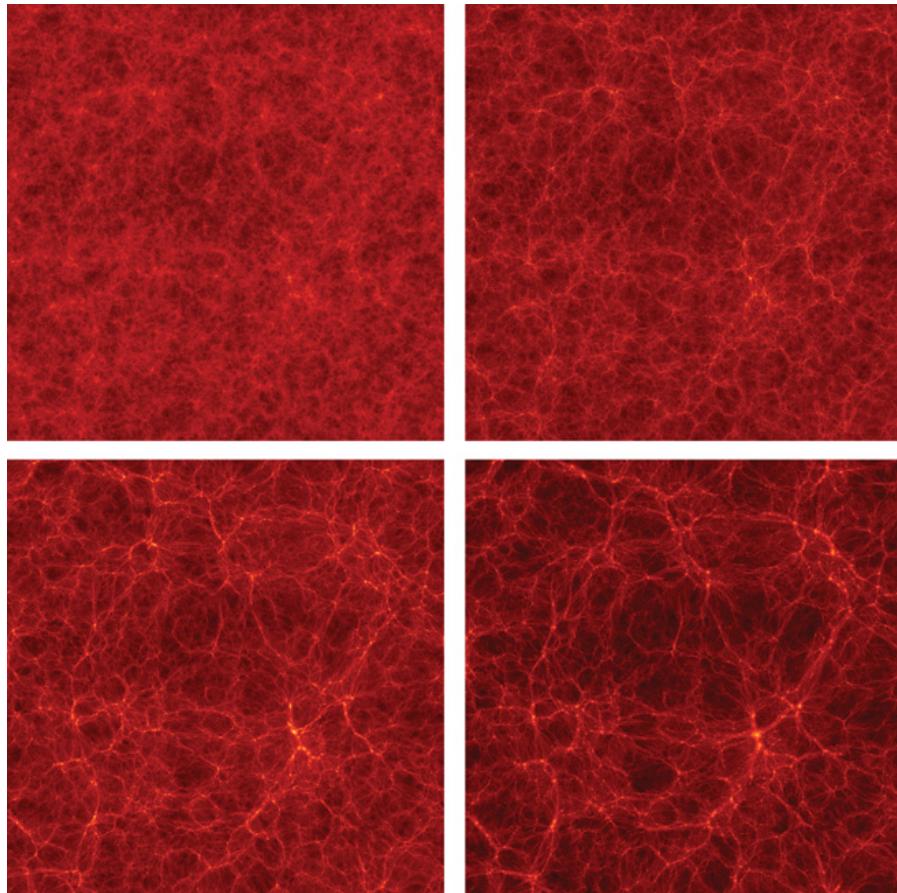
$$P_{\phi}(\phi_{\mathbf{k}})d\phi_{\mathbf{k}} = \left(\frac{1}{2\pi}\right) d\phi_{\mathbf{k}} \quad (3.6)$$

El carácter no restringido de este tipo de simulaciones radica en la elección aleatoria de las fases  $\phi_{\mathbf{k}}$  acorde a la distribución 3.6, sin ningún tipo de restricción observational sobre el resultado final de la simulación.

**Bolshoi** es una simulación cosmológica del universo a gran escala con condiciones iniciales no restringidas, la página oficial del proyecto es <http://hipacc.ucsc.edu/Bolshoi/>.

### 3. MÉTODOS COMPUTACIONALES EN COSMOLOGÍA

---

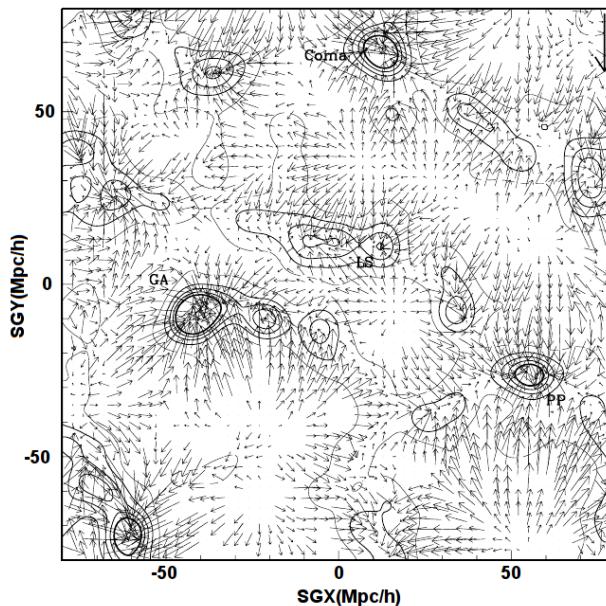


**Figura 3.5:** Evolución de la simulación Bolshoi. Se ilustran el campo de densidad de una región rectangular de  $16 \text{ Mpc}/h$  de grosor y  $250 \text{ Mpc}/h$  de lado para diferentes estadios de evolución.  $z = 9,5$  (superior izquierda),  $z = 3$  (superior derecha),  $z = 1$  (inferior izquierda) y  $z = 0$  (inferior derecha). Tomado de <http://spectrum.ieee.org/aerospace/astrophysics/the-cosmological-supercomputer>

Debido a su mayor tamaño comóvil comparada con las simulaciones restringidas (un cubo de  $250 \text{ Mpc}/h$  de lado), esta es usada para obtener estadística más fina en los resultados del capítulo 4. El modelo cosmológico usado para esta simulación corresponde al WMAP7 (ver tabla 1.1), el número de partículas es de  $2048^3$ , lo que implica una masa promedio por partícula de  $1,35 \times 10^8 h^{-1} \text{ M}_\odot$ . Una descripción técnica más detallada de la simulación puede ser consultada en [23].

#### 3.2.2 Simulaciones Restringidas (CLUES)

Como fue mencionado en el capítulo 2, la forma estándar de comparar el resultado de simulaciones cosmológicas con observaciones es a través de las propiedades estadísticas de las distribuciones, tales como funciones de correlación de dos puntos o espectros de potencia. A pesar de esto, algunos estudios requieren una descripción detallada del universo local en un contexto cosmológico. Debido a dificultades técnicas como la medida directa de la distribución de materia oscura o la falta de datos en altos corrimientos al rojo, es necesario recurrir a simulaciones cosmológicas que reproduzcan el universo local. Uno de los primeros trabajos dirigidos a la reproducción específica del entorno local se debe a [22]. En este se intenta reproducir las principales estructuras observadas en el universo local, como el grupo local, el Supercúmulo Local y el cúmulo de Virgo.

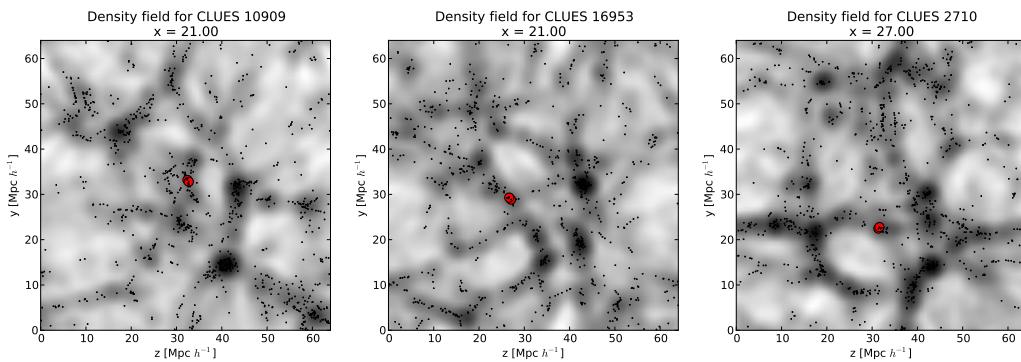


**Figura 3.6:** Campo de densidad y campo de velocidad peculiar inicial construidos a partir de restricciones para la reproducción del entorno local en una escala de  $160 h^{-1}\text{Mpc}$ . Algunas estructuras identificadas son: *Coma*, cúmulo de coma, *PP*, supercúmulo de Perseus-Pisces, *LS*, supercúmulo local, *GA*, gran atractor. La flecha superior derecha indica la escala del campo de velocidad peculiar en 1000 km/s. Tomado de [22].

### 3. MÉTODOS COMPUTACIONALES EN COSMOLOGÍA

---

El método propuesto en [22] y [16] consiste en la construcción del campo de densidad y de velocidad peculiar inicial a partir de surveys de velocidades radiales y de corrimientos al rojo (ver sección 1.3). Para el tratamiento y reducción del ruido y errores de medida en los datos, se usa un método bayesiano de filtros de Wiener (para más detalles técnicos ver [35]). A pequeñas escalas este método es limitado debido a que los filtros aplicados suprimen algunos modos en el espectro de potencia inicial y por tanto deben ser generados de forma aleatoria acorde con la distribución Gaussiana 2.57 para garantizar consistencia con el modelo cosmológico estándar. En la figura 3.6 se ilustran las condiciones iniciales obtenidas con este método para el universo local en una escala de  $160 h^{-1}\text{Mpc}$ .

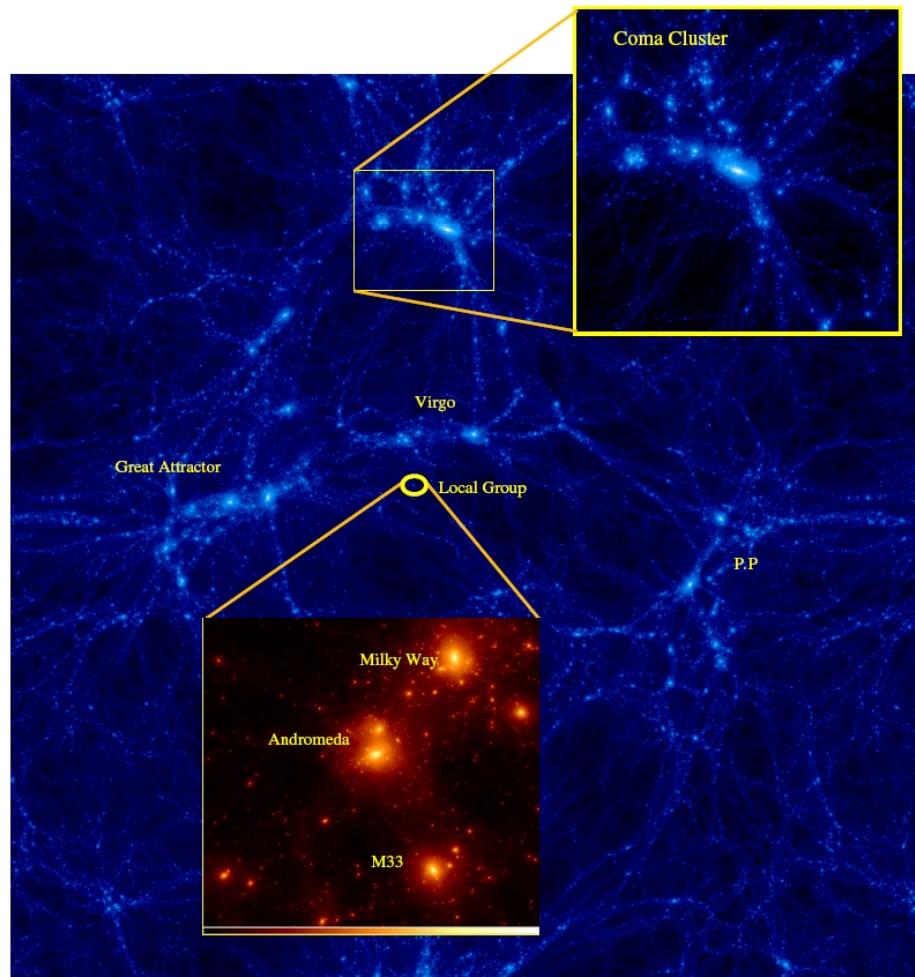


**Figura 3.7:** Tres simulaciones restringidas del proyecto CLUES en las se identifican sistemas tipo grupo local. Se ilustra el campo de densidad de cada simulación junto con los halos de materia oscura (puntos negros), y los grupos locales encontrados (puntos rojos).

**CLUES** (Constrained Local UniversE Simulations) es un proyecto orientado a la reproducción del universo local con la mejor resolución en la actualidad. La página oficial es <http://www.clues-project.org>. En estas simulaciones las condiciones iniciales son construidas con el algoritmo Hoffman-Ribak [16] para la reproducción de un volumen comóvil de  $(64 h^{-1}\text{Mpc})^3$ . Debido a la no restricción en escalas pequeñas ( $\sim 5 h^{-1}\text{Mpc}$ ) es necesario realizar 200 diferentes simulaciones de las cuales 3 resultan satisfactorias respecto a las restricciones observa-

### 3.2 Tipos de Simulación

cionales (ver figura 3.7). Para la evolución se usa el paquete GADGET2<sup>1</sup> con  $1024^3$  partículas de materia oscura y una cosmología consistente con el WMAP7 (ver tabla 1.1). Más detalles técnicos del proyecto pueden ser consultados en [12].



**Figura 3.8:** Simulación obtenida en el proyecto CLUES. En esta se muestran las estructuras a gran escala del universo local y se aprecian con claridad los miembros más significativos del grupo local. Tomado de la página oficial del proyecto <http://www.clues-project.org>

<sup>1</sup>GADGET2 es un popular código para la simulación de N-cuerpos en cosmología y formación de galaxias. Está disponible de forma gratuita en la página oficial del proyecto <http://www.mpa-garching.mpg.de/gadget/>

### 3. MÉTODOS COMPUTACIONALES EN COSMOLOGÍA

---

#### 3.3 Caracterización del Entorno

Una vez obtenidas las simulaciones numéricas de la evolución en régimen no lineal, uno de los principales objetivos es caracterizar las estructuras emergentes propias de este régimen. Entre estas destaca la gran estructura de red que se forma a partir de regiones de diferente dimensionalidad, donde grandes regiones vacías son limitadas por regiones planas, estas a su vez son recorridas por filamentos unidimensionales que se juntan en regiones puntuales altamente densas (red cósmica).

A partir de observaciones cosmológicas se ha logrado establecer la relación entre las propiedades de halos de galaxias, tales como el parámetro de espín, la concentración, la forma, etc. Y el entorno donde están embebidas. Debido a esto es importante cuantificar la estructura de red cósmica en simulaciones cosmológicas. Uno de los primeros trabajos en esta dirección consiste en la aproximación de Zeldovich mostrada en la subsección 2.3.1), otros esquemas posteriores usan estratificaciones del campo de densidad para cuantificar el entorno y son denominados métodos geométricos, pero debido a su carácter local no pueden dar cuenta de propiedades más globales como canales de flujo de materia o influencia de grandes estructuras cercanas. En esta sección se muestran dos esquemas para la clasificación del entorno desarrollados recientemente.

##### 3.3.1 Método T-web

El primero de los métodos fue propuesto por [13] y consiste el uso de la teoría de sistemas dinámicos para el análisis de la estabilidad local de órbitas de prueba alrededor de halos de materia oscura y de esta forma cuantificar su entorno para un tiempo (corrimiento al rojo) fijo dado. Para esto se asume válida la aproximación Newtoniana (ver subsección 2.2.1) y la ecuación de movimiento de una partícula de prueba en el potencial peculiar de la distribución es

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \quad \text{con} \quad \nabla^2\phi = 4\pi G\bar{\rho}\delta \quad (3.7)$$

Es razonable asumir que en el centro de masa  $\bar{\mathbf{r}}_i$  de cada halo existe un mínimo del potencial  $\nabla\phi = 0$ , formando así un pozo de potencial local. Esto permite linearizar la ecuación de movimiento 3.7 entorno a estos puntos, obteniendo

### 3.3 Caracterización del Entorno

---

$$\ddot{r}_i = -T_{ij}(\bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_{k,j}) \quad (3.8)$$

donde se define el tensor de marea como el Hessiano del potencial peculiar

$$T_{ij} \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial r_i \partial r_j} \quad (3.9)$$

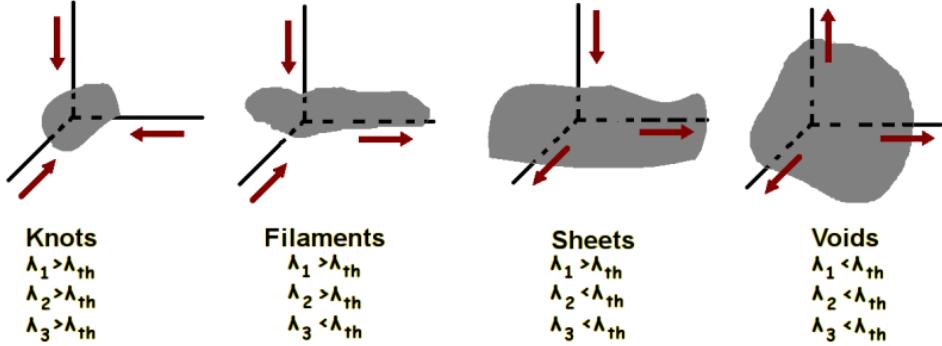
Acorde a la teoría de sistemas dinámicos, un autovalor negativo indica que el punto es inestable en la dirección del respectivo autovector, implicando un flujo de materia hacia el exterior de la región. Para autovalores positivos se presenta una situación completamente análoga. Con base en la aproximación de Zeldovich (subsección 2.3.1) se propone un esquema de clasificación del entorno cosmológico a partir de los autovalores del tensor de marea  $T_{ij}$  (ver figura 3.9).

- **Vacío (Vacuum):** en este caso los tres autovalores son positivos, indicando una expansión en todas las direcciones.
- **Hoja (Sheet):** para este caso  $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$  y  $\lambda_3 < 0$ , indicando un colapso en una sola dirección, dando lugar a una zona con geometría local plana.
- **Filamento (Filament):** para estas zonas solo el  $\lambda_1$  es positivo, indicando un colapso en dos direcciones y expansión e una, formando así una región con geometría unidimensional.
- **Nudo (Knot):** para este último tipo de región, los tres autovalores son negativos, indicando un colapso en todas las direcciones y dando lugar a una zona comprimida.

Lo más destacable de este método respecto a los métodos geométricos es su naturaleza dinámica, permitiendo diferenciar zonas con iguales valores densidad pero con propiedades de estabilidad diferentes. A pesar de lo anterior, la asunción de mínimo local solo es justificada en el centro de cada halo, careciendo así de significado y precisión generalizar este esquema en cualquier punto del espacio. Otro inconveniente es que bajo el esquema de clasificación original con los signos de cada autovalor no se reproduce la impresión visual que se obtiene en la distribución de materia de las simulaciones (ver figura 3.10).

### 3. MÉTODOS COMPUTACIONALES EN COSMOLOGÍA

---



**Figura 3.9:** Esquema de clasificación del entorno cosmológico para los esquemas T-web y V-web. El valor umbral  $\lambda_{th}$  es tomado como un parámetro libre.

Una significativa mejora de este método se logra generalizando el esquema de clasificación respecto a un cierto valor umbral  $\lambda_{th}^T$ , que es tomado como parámetro libre y se ajusta acorde a la impresión visual obtenida [7], en especial el esquema original se recupera fijando  $\lambda_{th}^T = 0$ .

#### 3.3.2 Método V-web

El segundo método dinámico presentado para la clasificación de la red cósmica es presentado en [17] y está basado en el tensor de velocidad de peculiar (shear velocity tensor)

$$\Sigma_{ij} = -\frac{1}{2H_0} \left( \frac{\partial v_i}{\partial r_j} + \frac{\partial v_j}{\partial r_i} \right) \quad (3.10)$$

de forma análoga al esquema T-web, en este esquema son calculados los autovalores del tensor  $\Sigma_{ij}$  y se define el entorno acorde a un valor umbral  $\lambda_{th}^V$  (ver figura 3.9).

Como es mostrado en [17], en el régimen lineal los tensores  $T_{ij}$  y  $\Sigma_{ij}$  son proporcionales, siendo ambos métodos completamente equivalentes en este régimen. Esto es parcialmente evidenciado en la impresión visual de ambos esquemas de clasificación que se obtiene a grandes escalas para la simulación Bolshoi (figura 3.10), y se debe a la menor no linealidad de los modos a mayores escalas.

### 3.3 Caracterización del Entorno



**Figura 3.10:** Se ilustra para cada una las simulaciones (CLUES 1, CLUES 2, CLUES 3, Bolshoi) la diferencia entre los esquemas de clasificación T-web y V-web para diferentes valores de  $\lambda_{th}$  (Negro - Nudo, Gris oscuro - Filamento, Gris - Hoja, Blanco - Vacío). En las gráficas superiores se muestra la impresión visual obtenida a partir de los respectivos campos de contraste de densidad ( $\log(\delta+1)$ ), usadas para la calibración de los valores  $\lambda_{th}$ . La resolución para una de las mallas construidas es aproximadamente  $1,0h^{-1} \text{ Mpc/celda}$  y para todas se realiza un suavizado Gaussiano del tamaño de una celda, el grosor de cada slide es de una celda de la malla.

### **3. MÉTODOS COMPUTACIONALES EN COSMOLOGÍA**

---

En el caso de modos pequeños, donde los efectos no lineales son más dominantes, ambos esquemas difieren notablemente, tal como puede verse en la impresión visual de las simulaciones CLUES. Específicamente, el esquema V-web cuantifica de forma más precisa la estructura fina de la red cósmica a pequeñas escalas, permitiendo definir un entorno más apropiado para pequeñas estructuras a nivel cosmológico como halos de materia oscura o pequeños grupos de ellos.

Otra ventaja del esquema V-web respecto al T-web radica en que está basado en el campo de velocidades peculiares en vez del campo de densidad, aportando así más información dinámica del entorno y haciendo posible dar cuenta de una forma más directa de efectos no locales, como flujos de materia o influencia de estructuras cercanas. Debido a esto, este esquema será adoptado como estándar para la cuantificación del entorno de halos y pares de halos (sistemas como el grupo local) y de las distribuciones de entorno cosmológico en el capítulo 4.

#### **3.4 Detección de Halos y Definición de Muestras**

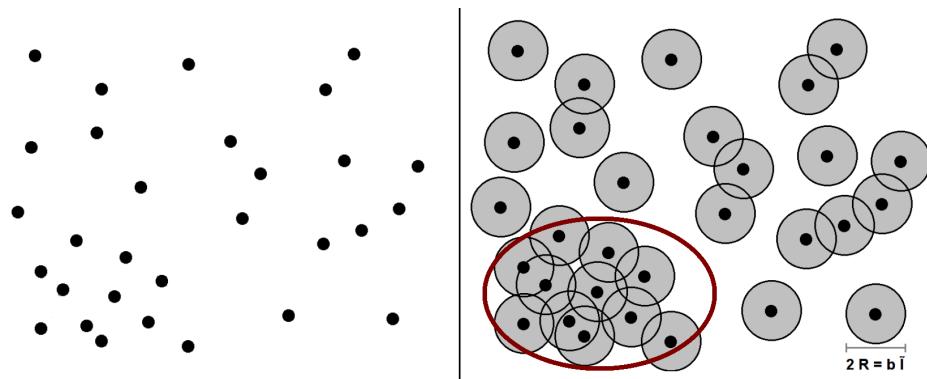
Una vez caracterizado el entorno cosmológico, el siguiente paso es encontrar las estructuras que se forman en las simulaciones, específicamente halos de materia oscura. Debido a la naturaleza continua de la distribución de materia en el universo, es complicado y subjetivo definir estructuras discretas y limitadas espacialmente, como los halos de materia oscura o las galaxias en ellos. A pesar de esto, el carácter aproximado de las soluciones numéricas exige a priori una construcción discreta del campo de densidad a partir de partículas puntuales con una cierta masa representativa (generalmente del orden de  $10^7 \sim 10^9 h^{-1} M_\odot$ , aunque depende específicamente de la resolución de la simulación), esto implica que la detección de estructuras físicas discretas<sup>1</sup> se reduce a encontrar agrupaciones de partículas que representen estos sistemas.

---

<sup>1</sup>A pesar de que las partículas que mapean la distribución de densidad también tienen un carácter discreto, su individualidad carece de sentido físico y solo es consecuencia de los métodos numéricos implementados.

### 3.4.1 Método FOF

Uno de los métodos más utilizados para la detección de estructuras en simulaciones de N-cuerpos se denomina FOF (por sus siglas en inglés *Friend of Friend*).



**Figura 3.11:** Diagrama ilustrativo del método FOF. Los círculos grises entorno a cada partícula representan la zona de vinculación y la curva roja representa una de las estructuras encontradas.

En este método se asocia un volumen finito a cada partícula, denominada región de vinculación, luego las estructuras son halladas a partir de intersecciones contiguas de estas regiones. Un ejemplo ilustrativo es presentado en la figura 3.11, donde la estructura de la curva roja, correspondiente a un halo de materia oscura, es construida a partir de 11 regiones de vinculación adyacentes que se intersectan mutuamente. La geometría de las regiones de vinculación son generalmente esféricas, con un radio  $R_i$  dado por la siguiente expresión

$$R_i = \frac{1}{2}b \bar{l} \quad (3.11)$$

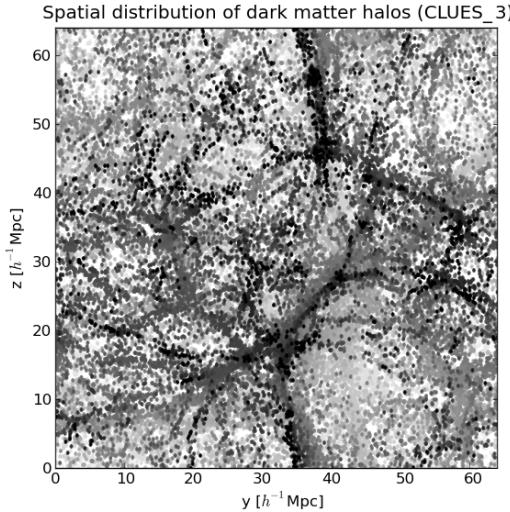
donde  $b$  es el parámetro de vinculación y  $\bar{l}$  el camino libre medio de las partículas en la simulación. El parámetro de vinculación  $b$  es libre y depende de cada simulación, siendo especificado a priori en la construcción de catálogos de halos.

En la figura 3.12 se muestra el resultado del método FOF en la construcción de un catálogo de halos de materia oscura para la simulación CLUES 3. La distribución de los halos está acorde con la distribución de densidad (ver figura 3.10),

### 3. MÉTODOS COMPUTACIONALES EN COSMOLOGÍA

---

siguiendo el mismo patrón de filamentos y nodos de la red cósmica. En el subsección 3.4.2, las muestras de halos definidas en cada simulación se hallan a partir de este esquema, con un parámetro de vinculación  $b = 0,17$ .



**Figura 3.12:** Halos encontrados a partir del esquema FOF en una de las simulaciones CLUES. El gradiente de color indica la profundidad respecto al eje  $x$ , donde los halos negros son los más cercanos.

#### 3.4.2 Definición de Muestras

En esta subsección se presentan las diferentes muestras definidas que serán usadas en el capítulo 4 para la determinación de los efectos del entorno en los sistemas de grupos locales y la caracterización de cada simulación. Estas corresponde a una versión ampliada de las muestras definidas en [8].

- **Halos Generales (GH):** estos corresponden a todos los halos hallados en las simulaciones a partir del esquema FOF, independiente de su rango de masa.
- **Halos Individuales (IH):** son un subconjunto de la anterior muestra, y representan todos los halos de materia oscura que están en el rango de masas  $5,0 \times 10^{11} h^{-1} M_{\odot} - 5,0 \times 10^{12} h^{-1} M_{\odot}$ . Este rango de masa es escogido debido a que corresponde al rango en el cual se forman galaxias de disco, tal como los principales miembros del grupo local, Andrómeda y la Vía Láctea.

### **3.4 Detección de Halos y Definición de Muestras**

---

- **Pares ( $P$ ):** esta es construida a partir de la muestra  $IH$  y está compuesta por pares de halos que satisfacen el criterio de ser mutuamente el halo más cercano al otro. Se construye como una muestra primigenia para encontrar sistemas de pares aislados y similares al grupo local.
- **Pares Aislados ( $IP$ ):** esta muestra se construye a partir de los sistemas en la muestra de pares que además satisfacen las siguientes condiciones [8] [9].
  - La distancia entre el centro de los halos debe ser menor a  $0,7h^{-1}$  Mpc, consistente con la distancia entre la Vía Láctea y Andrómeda.
  - La velocidad radial relativa entre ambos halos debe ser negativa.
  - No debe haber ningún objeto más masivo que alguno de los dos halos a una distancia menor que  $2,0h^{-1}$  Mpc de ambos.
  - No debe existir ningún objeto más masivo que  $5,0 \times 10^{13}h^{-1} M_{\odot}$  a una distancia menor que  $5h^{-1}$  Mpc respecto a ambos halos.

Estas condiciones garantizan el aislamiento de los pares respecto a la influencia gravitacional de estructuras mayores y otros halos

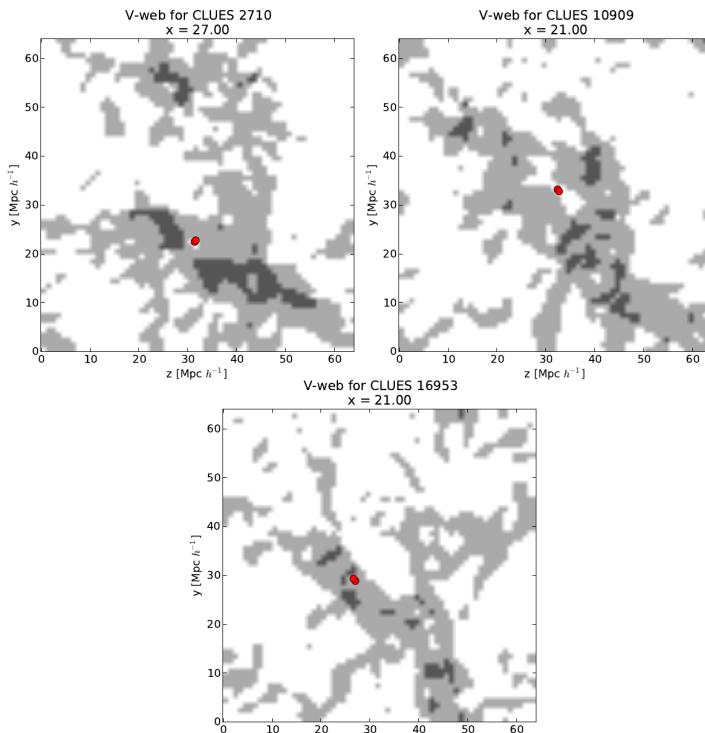
- **Grupos Locales ( $LG$ ):** esta muestra es definida en la simulaciones CLUES y corresponde a los pares de halos construidos a priori para la reproducción del grupo local. Por definición, solo existe un sistema  $LG$  por cada una de las tres simulaciones CLUES.
- **Grupos Locales Construidos ( $CLG$ ):** con el objetivo de obtener una muestra de sistemas tipo  $LG$  en simulaciones no restringidas, se propone un método de construcción basado en el entorno cosmológico de la muestra  $LG$  en las simulaciones CLUES (ver figura 3.13). Para esto se calculan los 3 campos de autovalores del *shear velocity tensor* en una malla con resolución de  $1,0h^{-1}$  Mpc/celda y un suavizado Gaussiano de una celda. En la siguiente tabla se tabulan los valores obtenidos para los autovalores del entorno de los sistemas  $LG$ .

### 3. MÉTODOS COMPUTACIONALES EN COSMOLOGÍA

---

Descripción	$\lambda_1 [10^{-1}]$	$\lambda_2 [10^{-1}]$	$\lambda_3 [10^{-1}]$
CLUES 1 H1	1.82	1.20	-1.59
CLUES 1 H2	1.82	1.20	-1.59
CLUES 2 H1	1.78	$9.54 \times 10^{-1}$	$-8.85 \times 10^{-1}$
CLUES 2 H2	2.19	$4.45 \times 10^{-2}$	-1.29
CLUES 3 H1	3.23	$-6.29 \times 10^{-2}$	-1.98
CLUES 3 H2	3.49	1.21	-1.29
Valor mínimo	1.78	$-6.29 \times 10^{-2}$	-1.98
Valor máximo	3.49	1.21	$-8.85 \times 10^{-1}$

**Cuadro 3.1:** Autovalores asociados al entorno de cada grupo local en las simulaciones CLUES.



**Figura 3.13:** Entorno cosmológico a partir del esquema V-web (con  $\lambda_{th} = 0,3$ ) para cada uno de los LG de las simulaciones CLUES, indicados por los puntos rojos.

### 3.4 Detección de Halos y Definición de Muestras

---

Finalmente, a partir de los autovalores extremos hallados se define la muestra *CLG* como aquellos pares *IP* cuyos autovalores de entorno asociados se encuentran en el intervalo fijado. Para garantizar autoconsistencia, esta muestra también es definida en las simulaciones CLUES.

Muestra	CLUES 1	CLUES 2	CLUES 3	Bolshoi
<i>GH</i>	56632	57707	56799	432000
<i>IH</i>	1493	1490	1493	88068
<i>P</i>	386	380	387	23037
<i>IP</i>	20	12	18	1256
<i>LG</i>	1	1	1	–
<i>CLG</i>	1	2	3	30

**Cuadro 3.2:** Tamaños de las muestras definidas para cada una de las simulaciones.

Para finalizar, en la tabla 3.2 se tabula el tamaño de cada una de las muestras definidas para cada simulación. Puede notarse que los tamaños escalan aproximadamente en la misma proporción que el volumen entre las simulaciones ( $1/60$  – CLUES /Bolshoi). En especial la muestra *CLG* para Bolshoi tiene un tamaño proporcional a la muestra *LG* de las CLUES, indicando que el esquema de construcción propuesto reproduce sistemas tipo LG en simulaciones no restringidas.

#### 3.4.3 Método de Detección de Pares

A continuación se describe el algoritmo desarrollado para la detección de cada una de las muestras de pares en cada simulación (Pair Finder)<sup>1</sup>.

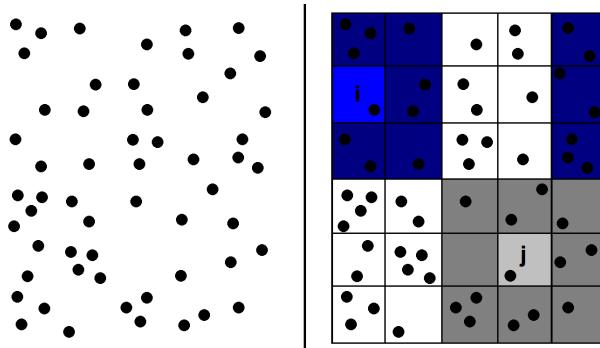
- Se partitiona el espacio de la simulación en  $N \times N \times N$  celdas, luego para cada celda se realiza un indexado de los halos que están dentro de ella, almacenando los identificadores de cada uno de ellos.
- Posteriormente, para cada una de las celdas se identifican los primeros vecinos, teniendo en cuenta condiciones de frontera periódicas, tal como la celda  $i$  en la figura 3.14.

<sup>1</sup>Una versión actualizada del código puede encontrarse en [https://github.com/sbustamante/Thesis/tree/master/codes/Halo\\_Finder](https://github.com/sbustamante/Thesis/tree/master/codes/Halo_Finder)

### 3. MÉTODOS COMPUTACIONALES EN COSMOLOGÍA

---

- Para un halo de una celda dada se calcula la distancia a todos los halos de la misma celda y de las celdas vecinas, luego se almacena la distancia al halo más cercano, la distancia al halo más cercano con una masa mayor y la distancia al halo más cercano con una masa mayor a  $5,0 \times 10^{13} h^{-1} M_{\odot}$ .
- Repitiendo el anterior paso para todos los halos, si dos halos son mutuamente los dos más cercanos, estos se catalogan como un par, construyendo así la muestra  $P$  definida en la subsección anterior 3.4.2.
- Finalmente, para cada uno de los sistemas de pares se evalúan las condiciones definitorias de los  $IP$ , determinando así esta muestra.



**Figura 3.14:** Ilustración 2D del método para la detección de las muestras de pares. Distribución de halos de materia oscura (izquierda), definición de zonas (derecha).

La eficiencia de este método radica en que evita evaluar distancias entre todos los halos de la simulación, siendo necesario solo para los vecinos cercanos. La estructura de celdas lo hace similar a un código de árbol (ver subsección 3.1.3), a excepción de la estructura jerárquica de este último. En principio, el código debe ser más eficiente a medida que se aumenta la resolución  $N$  de la malla, pero existen dos limitaciones que a esto. La primera tiene que ver con el número de halos por celda, este no puede ser demasiado grande, pero tampoco puede ser tal que solo hallan unos pocos halos por celda<sup>1</sup>. La segunda limitación tiene que ver con las condiciones de distancia usadas en la definición de la muestra  $IP$ , el tamaño físico de cada celda no puede ser menor a ninguna de estas distancias.

<sup>1</sup>Este umbral no es bien definido y depende de cada simulación, por ejemplo para las simulaciones usadas (Bolshoi y CLUES), un valor de  $N = 8$  es generalmente adecuado.

*“Lo más incomprendible de nuestro universo es que sea comprensible”*

Albert Einstein

CHAPTER

# 4

# El Entorno Cosmológico y el Grupo Local

A continuación son presentados los resultados obtenidos a partir de las simulaciones descritas en el capítulo anterior 3 para la dependencia de las propiedades de los sistemas tipo grupo local respecto al entorno cosmológico en el que están embebidos. Se caracteriza primero cada una de las simulaciones usadas (CLUES y Bolshoi) con el fin de garantizar concordancia entre las cosmologías que representan y entre las distribuciones de entorno (sección 4.1). Después de esto, en la sección 4.2 se determinan las propiedades físicas y estadísticas de cada una de las muestras definidas en 3.4.2 y se analizan las correlaciones existentes entre las propiedades calculadas y el entorno cosmológico de cada simulación.

## 4.1 Propiedades de las Simulaciones

Uno de los principales objetivos para determinar la influencia del entorno sobre sistemas tipo grupo local es construir una muestra *CLG* en simulaciones no restringidas y así obtener estadística significativa. Para garantizar la consistencia de esta muestra es necesario establecer la equivalencia entre las entre las distribuciones

## 4. EL ENTORNO COSMOLÓGICO Y EL GRUPO LOCAL

---

de halos oscuros y analizar las distribuciones de entorno cosmológico para cada simulación.

### 4.1.1 Función de Masa de los Halos

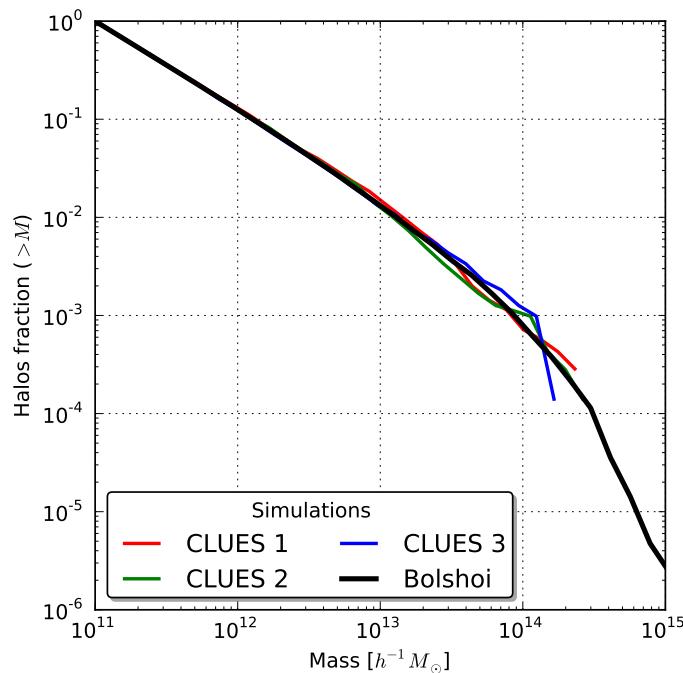
La distribución espacial de los halos refleja la fina estructura de la red cósmica formada por la materia oscura, tanto en simulaciones (ver figura 4.1) como en observaciones cosmológicas (ver sección 1.3). Esto sugiere posibles correlaciones entre las propiedades de los halos y el entorno en el cual están embebidos, tal como es mostrado para la forma de los halos, el parámetro de espín y alineación de subhalos en [25], y para la masa de los halos [24]. En especial el trabajo de [25] demuestra que el esquema de clasificación V-web es el más apropiado para estudios de correlaciones con propiedades direccionales, tal como el momento angular de los sistemas *IP* o *CLG* en la sección 4.2.



**Figura 4.1:** Distribución espacial de los halos de materia oscura, reflejando la estructura de la red cósmica. El gradiente de color indica la profundidad respecto al eje *x*, donde los halos negros son los más cercanos.

## 4.1 Propiedades de las Simulaciones

Acorde a las condiciones definitorias de las muestras *IP* y *CLG* presentadas en la subsección 3.4.2, la principal propiedad de los halos necesaria para la construcción de estas muestras es la masa. Por esta razón es importante establecer la equivalencia entre las distribuciones de masa en cada simulación. En la siguiente figura 4.2 se calculan las funciones integradas de masa para la simulación Bolshoi y para las tres simulaciones CLUES.



**Figura 4.2:** Funciones de masa integrada de halos de materia oscura (muestra GH) para cada simulación.

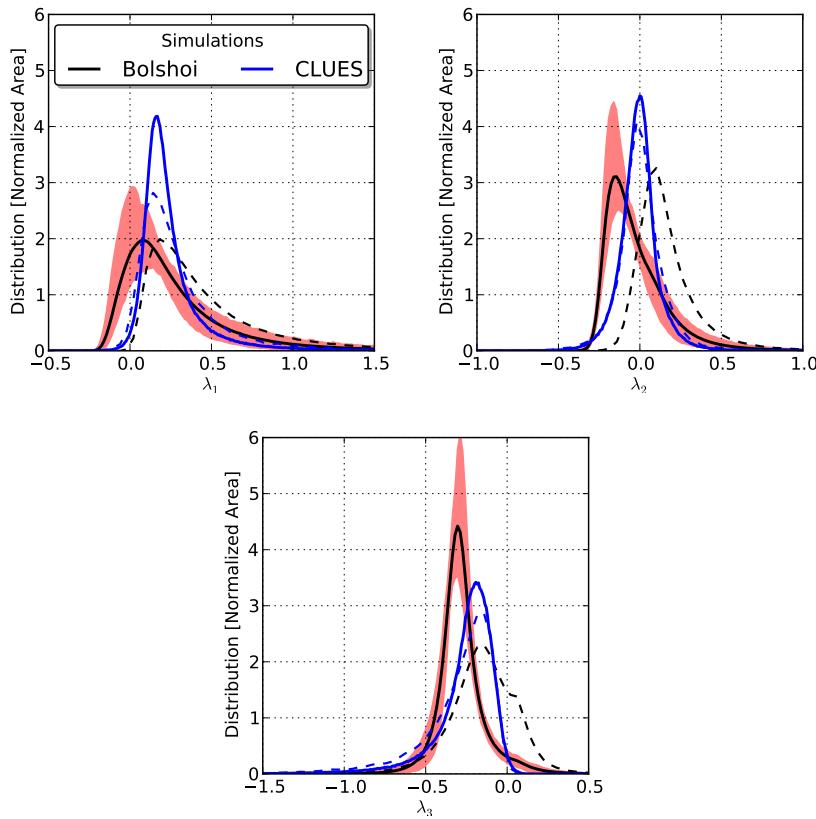
Para valores de masa altos las distribuciones son ligeramente diferentes debido a la menor cantidad de datos en las simulaciones CLUES, lo que hace menos significativa la estadística en este caso. A pesar de esto, en el rango masa donde son definidas las muestras *IH* ( $5,0 \times 10^{11} h^{-1} M_{\odot} - 5,0 \times 10^{12} h^{-1} M_{\odot}$ ) las distribuciones son consistentes con el formalismo Press-Schechter [31] para los parámetros cosmológicos WMAP7, indicando así la equivalencia de las muestras definidas entre las simulaciones.

## 4. EL ENTORNO COSMOLÓGICO Y EL GRUPO LOCAL

---

### 4.1.2 Distribución del Entorno Cosmológico

Como fue mostrado en la sección 3.3, la caracterización del entorno cosmológico se logra a partir de cantidades físicas que indiquen el carácter geométrico o dinámico local de una región de la distribución de materia. En especial el esquema V-web permite dar cuenta de la dinámica a pequeñas escalas de la estructura de la red cósmica, permitiendo definir un entorno adecuado para los halos y otros sistemas. En la siguiente figura son calculadas las distribuciones para cada uno de los autovalores de la V-web (distribuciones de entorno), tanto para las celdas de las simulaciones, como para los entornos de los halos de la muestra *GH*.



**Figura 4.3:** Distribución de los autovalores en el esquema V-web para cada una de las celdas de volumen (línea continua) y para los entornos de los halos de materia oscura en los catálogos FOF (línea discontinua). Las distribuciones están normalizadas tal que su área es la unidad. Resolución de  $1,0h^{-1}$  Mpc/celda y suavizado Gaussiano de una celda.

## 4.1 Propiedades de las Simulaciones

---

El principal resultado de la figura 4.3 consiste en la diferencia de las distribuciones para las celdas de volumen (líneas continuas) entre la simulación Bolshoi y las simulaciones CLUES<sup>1</sup>. El efecto de varianza cósmica (regiones rojas) es incluido a partir del cálculo de distribuciones de entorno en 64 subvolúmenes de la simulación Bolshoi, con un tamaño similar a una simulación CLUES. A pesar de esto, las distribuciones de CLUES están por fuera de la región de varianza cósmica, indicando así una estructura cosmológica a gran escala que difiere entre ambas simulaciones.

Un segundo resultado importante de la figura 4.3 se obtiene a partir de las distribuciones de entorno para los halos (líneas discontinuas). En el caso de Bolshoi, se nota un importante sesgo entre la distribución de entorno de las celdas y de los halos, indicando así que la distribución espacial de los halos no es un buen trazador de la estructura a gran escala del campo de densidad. Este resultado es consistente con el trabajo de [25], donde hallan importantes sesgos en las distribuciones de entorno acorde a diferentes rangos de masa de los halos, también usando Bolshoi. En el caso de las simulaciones CLUES, las distribuciones de entorno de los halos son significativamente menos sesgadas respecto a las de celdas de volumen, indicando para este caso que los halos si se distribuyen espacialmente acorde al entorno cosmológico cuantificado por el esquema V-web.

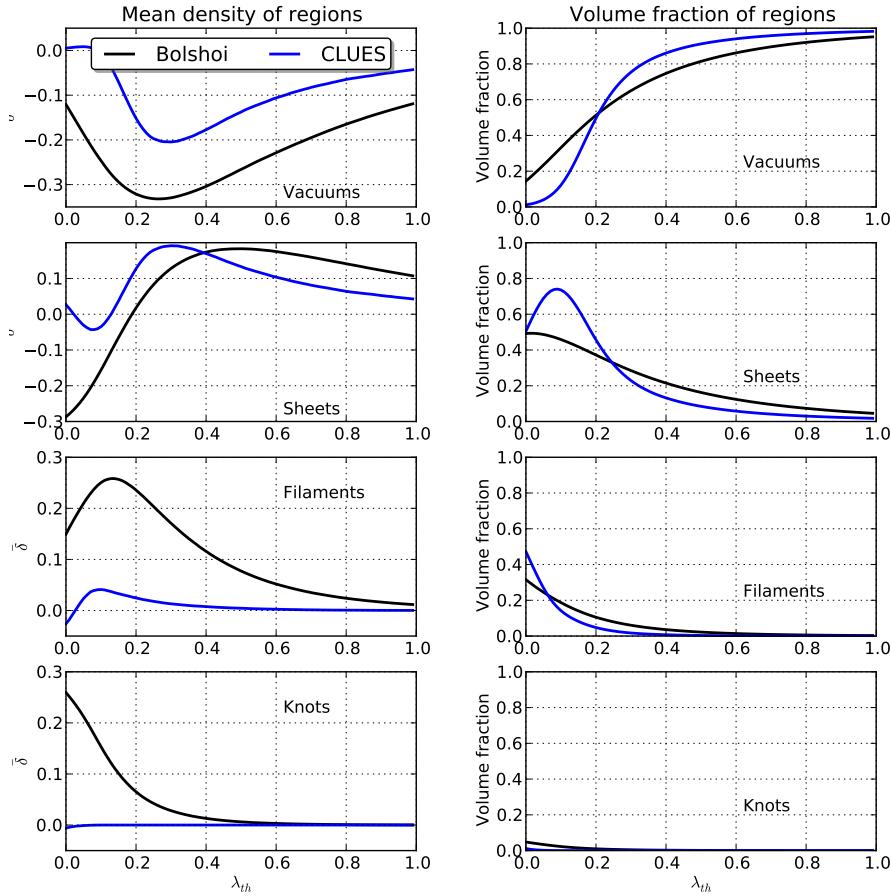
Por último, en la figura 4.4 son calculadas las densidades medias y las fracciones de volumen para cada uno de los tipos de regiones (ver sección 3.3) acorde al valor umbral  $\lambda_{th}$ . Las funciones de fracción de volumen son diferentes entre las simulaciones CLUES y Bolshoi, en especial la región en torno a  $\lambda_{th} = 0,1$  para las regiones tipo hoja (sheet). Esto se debe al desplazamiento relativo entre los picos de las distribuciones de entorno para cada simulación (ver figura 4.3), lo que implica un comportamiento diferente al criterio de selección de regiones a partir del valor  $\lambda_{th}$ . A pesar de esto, las fracciones de volumen se mantienen más o menos consistentes para ambas simulaciones en el rango  $0,2 \leq \lambda_{th} \leq 0,4$ , que corresponde al rango donde mejor se reproduce visualmente la distribución global del campo de densidad.

---

<sup>1</sup>Debido a la alta semejanza entre las distribuciones de las tres simulaciones CLUES, y con el fin de obtener estadística más significativa, se han fusionado las distribuciones.

## 4. EL ENTORNO COSMOLÓGICO Y EL GRUPO LOCAL

---

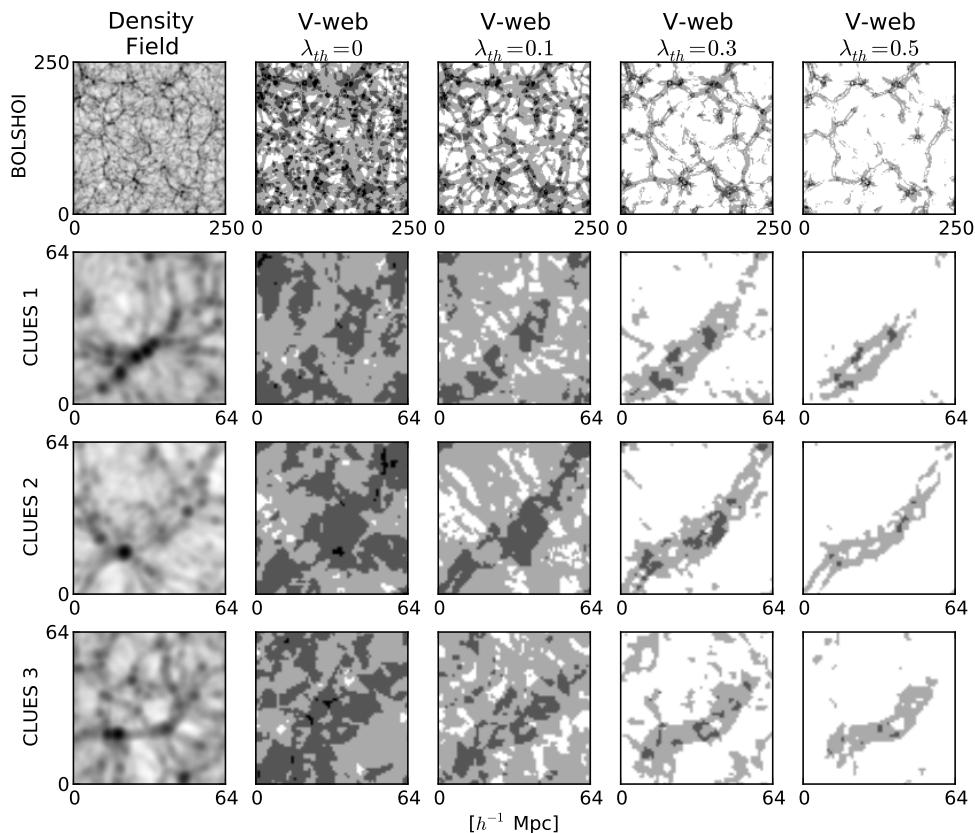


**Figura 4.4:** Parámetro de densidad medio para diferentes tipos de regiones en función del valor umbral  $\lambda_{th}$  (paneles izquierdo). Fracciones de volumen normalizadas para diferentes tipos de regiones, también acorde al valor umbral  $\lambda_{th}$ .

Las gráficas de densidad media para cada tipo de región muestran importantes resultados respecto al entorno cosmológico. Lo primero que puede notarse es la diferencia entre las densidades medias de ambas simulaciones en cada una de las regiones. Por ejemplo para regiones de vacío, en Bolshoi estas corresponden a zonas con densidad promedio mucho menor a la densidad media de la simulación, mientras que para las CLUES estas zonas de subdensidad no son tan marcadas. Debido a la pequeña fracción de volumen de las regiones tipo nudo (knot) en ambas simulaciones, asociado a su dimensionalidad puntual, la estructura global del entorno puede entenderse bien solo en términos de la distribución espacial de vacíos,

## 4.1 Propiedades de las Simulaciones

hojas y filamentos, siendo los filamentos la contraparte de los vacíos respecto al parámetro de densidad. De esto se espera que la diferencia en la subdensidad de los vacíos entre cada simulación se extienda a una marcada diferencia entre las sobredensidades de los filamentos en cada simulación. Esto último es obtenido en la misma figura, donde puede verse que los filamentos de Bolshoi son notablemente más densos que aquellos de las CLUES. En el caso de las hojas, estas corresponden a regiones de densidad intermedias entre los filamentos y los vacíos, por tanto se espera que la diferencia de la densidad media de estas regiones no sea tan marcada entre ambas simulaciones, tal como se nota en la misma figura.



**Figura 4.5:** Comparación de la impresión visual obtenida con el método V-web para varios valores del parámetro  $\lambda_{th}$ . Se usa el siguiente esquema de clasificación (Negro - Nudo, Gris oscuro - Filamento, Gris - Hoja, Blanco - Vacío). La resolución de cada malla es  $1,0h^{-1}$  Mpc/celda, con un suavizado Gaussiano de una celda. El grosor de cada slide es de una celda.

## 4. EL ENTORNO COSMOLÓGICO Y EL GRUPO LOCAL

---

Un segundo resultado de la figura 4.4 consiste en la determinación de un parámetro  $\lambda_{th}$  óptimo para la reproducción visual de la red cósmica. Como se muestra en esta gráfica, las fracciones de volumen asociadas a vacíos y hojas son relativamente altas respecto a las de filamentos y nudos, esto para todo el rango barrido de valores de  $\lambda_{th}$ . De esto se espera que la impresión visual a gran escala del campo de materia sea completamente dominada por la distribución de vacíos y en menor medida por la distribución de hojas y filamentos. En el caso de un valor bajo del parámetro  $\lambda_{th}$ , por ejemplo  $\lambda_{th} < 0,2$ , el parámetro de densidad media de las hojas es negativo, indicando que posiblemente estas regiones están invadiendo zonas que deberían ser vacíos, tal como se ve en la figura 4.5 para  $\lambda_{th} = 0$  o  $\lambda_{th} = 0,1$ . En el caso de valores altos,  $\lambda_{th} > 0,4 \sim 0,5$ , el parámetro de densidad medio para los vacíos comienza a aumentar, indicando que estas regiones están invadiendo zonas que de mayor densidad, que en principio deberían ser hojas o filamentos. Esto puede ser notado en la figura 4.5 para  $\lambda_{th} = 0,5$ , donde todo el volumen es ampliamente dominado por vacíos, perdiendo la estructura característica de la red cósmica. Este análisis sugiere que el valor óptimo de  $\lambda_{th}$  podría ser aquel donde se minimice la densidad media de los vacíos, al ser estos el entorno dominante. Un resultado que apoya este criterio es que el  $\lambda_{th}$  encontrado es similar para ambas simulaciones  $\lambda_{th} \approx 0,3$ , y coincide con el valor obtenido a partir de un análisis cualitativo de la impresión visual del entorno.

Para concluir esta sección se discuten los resultados obtenidos para las distribuciones de entorno. A pesar de existir un notable sesgo entre la distribución de los halos y la del campo de densidad en la simulación Bolshoi, caso contrario a las simulaciones CLUES, y haber una marcada diferencia entre las densidades medias de las regiones en ambas simulaciones, la esencia de construir una muestra *CLG* en la simulación Bolshoi a partir de los grupos locales de las CLUES, como se menciona en el capítulo 3, es obtener una muestra de pares aislados más fiel que también reproduzcan el entorno local de los *LG*. Se espera entonces que la dinámica local cuantificada por la V-web se independiente del diferente resultado global de las distribuciones, manteniéndose así la validez del esquema de construcción de los *CLG*.

## 4.2 Propiedades de la Muestra *CLG*

Una vez determinada la consistencia entre las muestras definidas en CLUES y Bolshoi, el siguiente paso es determinar sus propiedades. Es de especial interés analizar la muestra *CLG* de Bolshoi, tomando como muestra de control la *IP* y como muestra de referencia la *LG* de las simulaciones CLUES.

### 4.2.1 Determinación del Entorno

Como fue definido en la subsección 3.4.2 del capítulo pasado, la muestra *CLG* en la simulación Bolshoi se construye imponiendo a la muestra *IP* la condición extra de reproducir el entorno cosmológico de los grupos locales de las simulaciones CLUES. La principal motivación de esto es encontrar una muestra en Bolshoi análoga a las muestras *LG*, tanto en sus propiedades físicas como en su abundancia. Respecto a esto último es natural asumir, considerando la ya determinada consistencia entre las simulaciones, que la abundancia escala aproximadamente como el volumen simulado. Esto puede ser considerado el primer logro de este esquema, ya que reproduce aproximadamente esta ley de escalamiento para el tamaño de las muestras en cuestión (ver tabla 3.2 para *CLG* de Bolshoi y *LG* de CLUES).

A pesar de lo anterior, este método de construcción no es más que corte de la muestra *IP* respecto a los autovalores de la V-web de la celda donde están embedidos, lo cual no implica la reproducción adecuada de las propiedades físicas ni el entorno cosmológico de los sistemas tipo grupo local. Por esta razón, a continuación son analizados posibles sesgos producidos en las distribuciones del entorno cosmológico para los sistemas *CLG*.

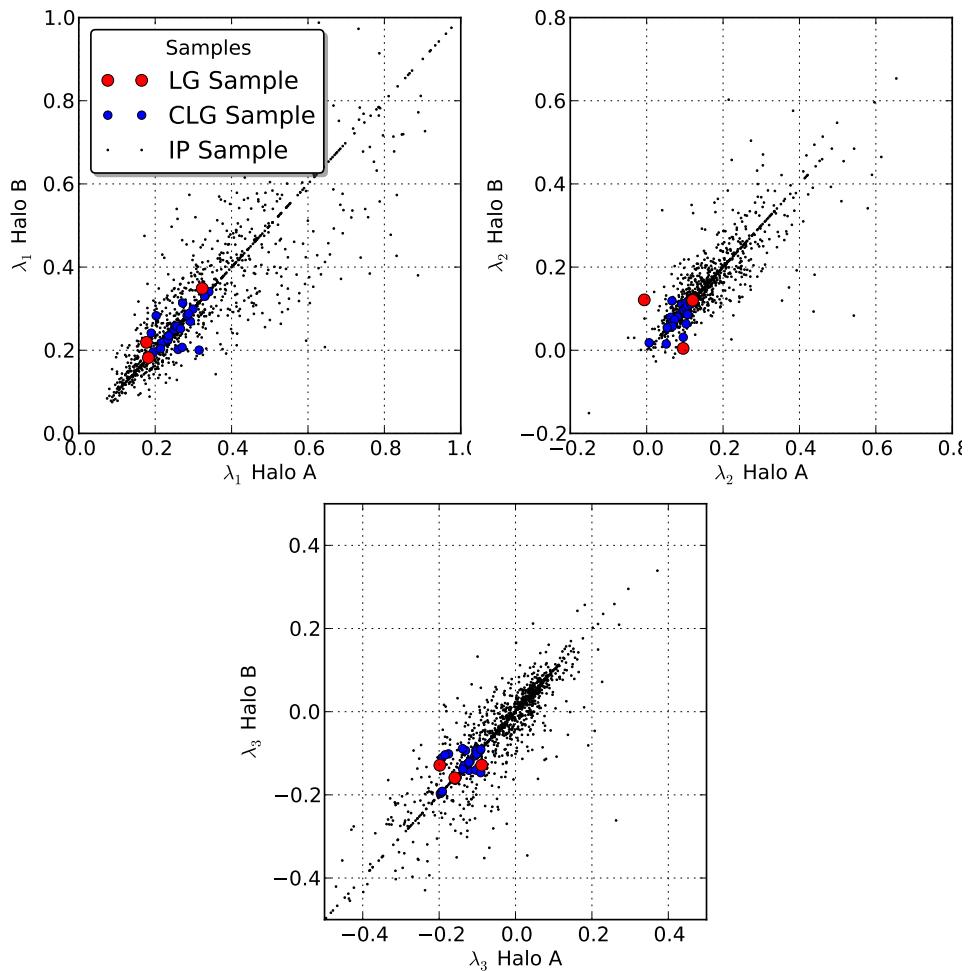


**Figura 4.6:** Situación patológica respecto al entorno de los sistemas de pares de halos.

## 4. EL ENTORNO COSMOLÓGICO Y EL GRUPO LOCAL

---

Una de las primeras consideraciones que debe tenerse en cuenta en la cuantificación del entorno para pares de halos (muestras *P*, *IP*, *CLG* y *LG*), es que cada uno de ellos puede estar embebido en celdas diferentes, tal como es mostrado en la figura 4.6. Esta situación patológica se presenta debido al carácter no puntual de este tipo de sistemas y el tamaño finito de la malla.

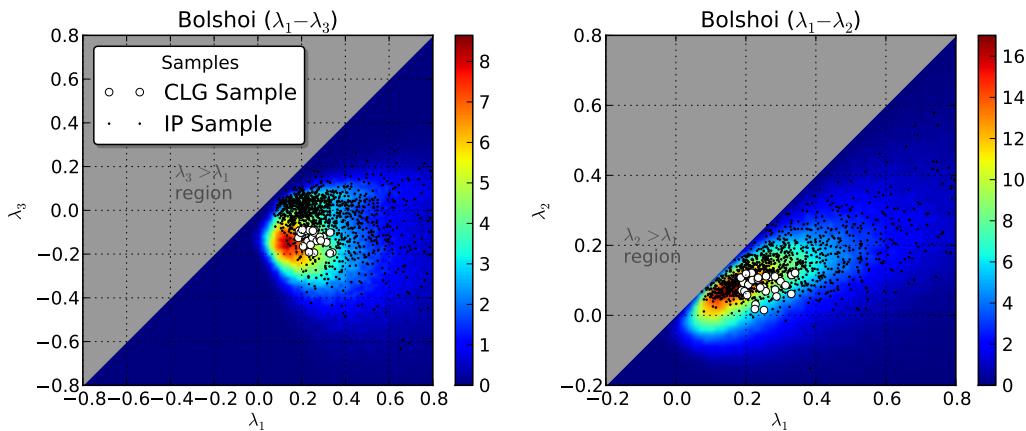


**Figura 4.7:** Comparación entre las distribuciones de los autovalores de la V-web para los dos halos en los sistemas de pares (muestras *LG*, *CLG* y *IP*).

Para cuantificar este efecto, en la figura 4.7 son graficadas las distribuciones de cada uno de los autovalores de la V-web para cada halo de las muestras de pares. La situación ideal, donde ambos halos comparten una misma celda, correspondería

## 4.2 Propiedades de la Muestra CLG

a un línea perfecta con pendiente de  $45^\circ$ , mientras las situaciones patológicas son responsables de dispersiones en las gráficas. Una manera de solucionar esto es disminuir la resolución de la malla tal que ambos halos estén embebidos en una misma celda, pero esto ocasiona una perdida de información del entorno local propio del sistema. Debido al suavizado Gaussiano de una celda ( $\sim 1h^{-1} \text{ Mpc}$ ) que es aplicado a priori a cada campo de autovalores, la variación de estos entre celdas vecinas es menor, tal como es mostrado para la mayoría de sistemas *IP* en la gráfica. Teniendo en cuenta esto último y que la dinámica local de los pares estará dominada por el halo más masivo, por convención será tomada la celda asociada a este halo para la cuantificación del entorno de todo el sistema.



**Figura 4.8:** Distribuciones 2D del entorno cosmológico para diferentes muestras,  $\lambda_1 - \lambda_3$  (izquierda) y  $\lambda_1 - \lambda_2$  (derecha). El histograma de fondo, graficado en colores, corresponde a la distribución de entorno para todos los halos de Bolshoi (muestra *GH*), su resolución es de  $100 \times 100$  para el rango mostrado y están normalizados respecto a su área. Los puntos negros corresponden a la distribución de la muestra *IP* y finalmente los puntos blancos a la muestra *CLG*.

Una vez determinada la forma de cuantificar el entorno de los sistemas de pares, en la figura 4.8 se ilustra la distribución de las muestras *GH*, *IP* y *GCL*. Como fue mostrado en la subsección 4.1.2, la distribución de entorno de los halos en Bolshoi está considerablemente sesgada respecto a la distribución de las celdas de volumen. A pesar de esto y teniendo en cuenta que la construcción de los sistemas de pares

## 4. EL ENTORNO COSMOLÓGICO Y EL GRUPO LOCAL

---

se hace a partir de los halos, es más interesante realizar comparaciones con las distribuciones asociadas a los halos (histogramas de color en la misma figura). Como fue definido en la subsección 3.4.2, la muestra *IP* es construida de tal forma que se garantice su aislamiento gravitacional respecto a halos más masivos, por esta razón hay dos efectos que compiten en cuanto a la distribución de entorno de estos sistemas. En el primero se espera que la abundancia de pares sea más favorable en entornos donde la cantidad de halos es mayor, mientras en el segundo, precisamente la sobreabundancia de halos resulta desfavorable para los criterios de aislamiento gravitacional. El segundo efecto termina siendo dominante y produce un sesgo en la distribución de entorno de la muestra *IP* respecto a la de los halos, mientras que para en la muestra *P* el sesgo no se presenta<sup>1</sup>.

Para terminar el análisis de la anterior figura, se discute acerca de la distribución de entorno para los *CLG* de la simulación Bolshoi. A pesar de que esta distribución es construida de forma artificial por efecto de selección, es interesante notar que la región en el espacio de autovalores que delimita esta muestra es relativamente reducida, indicando que los tres grupos locales de las simulaciones CLUES comparten una dinámica de entorno local muy similar. Aunque esto último puede ser un efecto impuesto a priori por construcción debido al carácter restringido de las simulaciones CLUES, no deja de ser interesante el sesgo que esta característica produce en la distribución de entorno de los *CLG* respecto a los halos y a la muestra *IP*.

Para cuantificar los sesgos producidos en cada muestra respecto a un tipo de entorno específico (ver figura 3.9), en la siguiente figura 4.9 se grafican las fracciones de objetos en las diferentes regiones. En el rango óptimo del valor umbral  $0,2 \leq \lambda_{th} \leq 0,4$  definido en la subsección 4.1.2, se notan importantes diferencias entre cada una de las muestras, especialmente para la *CLG*. Como fue mencionado anteriormente, el efecto de aislamiento gravitacional produce un sesgo entre la distribución de entorno de los halos *GH* y de los sistemas *IP*, esto puede ser claramente notado para cada una de las fracciones en el rango óptimo de  $\lambda_{th}$ . En el caso de vacíos, la fracción dominante de estas dos muestras es la asociada a *IP*, pero en el caso de hojas ambas son comparables, y más aún, en la regiones tipo filamento y nudo domina la fracción de halos *GH*. Esto indica que los sistemas de pares aislados *IP* se presentan con mayor abundancia en regiones de media o baja densidad de

---

<sup>1</sup>Esto último no es mostrado en la figura 4.8, pero es fácilmente calculado.

## 4.2 Propiedades de la Muestra *CLG*

halos, aún así la considerable fracción de estos presentes en hojas y filamentos no permite asociar un tipo de región de entorno específica para estos sistemas. Finalmente, los sistemas *CLG* presentan un importante sesgo en comparación a las dos muestras anteriores, siendo de especial interés aquella producida respecto a la *IP* debido a que *CLG* es una submuestra de esta. De nuevo, apelando al rango óptimo de  $\lambda_{th}$ , es posible en este caso asociar tipos de regiones de entorno específicas a la muestra *CLG*, estando estos sistemas preferencialmente en hojas y vacíos.



**Figura 4.9:** Fracciones de cantidad de objetos en diferentes regiones en función del valor umbral  $\lambda_{th}$ . Para el caso de la muestra *GH* se cuentan número de Halos, mientras que para las muestras *IP* y *CLG* número de pares.

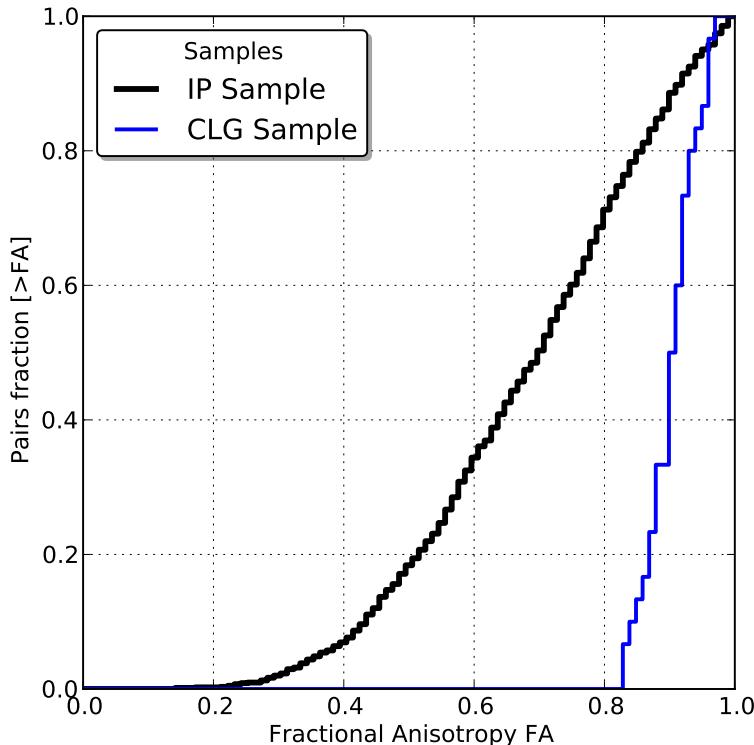
A pesar del esquema de clasificación de regiones usado, las conclusiones anteriores dependen de la elección del parámetro  $\lambda_{th}$ , que aunque ha sido razonablemente acotado en una región óptima que reproduce la impresión visual, no deja de ser un parámetro libre. Para solventar esto se introduce el fraccional de anisotropía (FA) con la normalización usada en [25]

## 4. EL ENTORNO COSMOLÓGICO Y EL GRUPO LOCAL

---

$$FA = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2 + (\lambda_1 - \lambda_2)^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}} \quad (4.1)$$

Esta cantidad cuantifica el grado de anisotropía del entorno cosmológico local, siendo  $FA = 1$  una región altamente anisotrópica, mientras  $FA = 0$  un región con alta isotropía, además es independiente de la elección a priori de algún parámetro libre. Acorde al resultado obtenido por [25], regiones de baja anisotropía corresponden a nudos debido a su colapso isotrópico, mientras que regiones de alta anisotropía corresponden a vacíos debido a su expansión no uniforme. Para regiones filamentales y planas el fraccional de anisotropía está distribuido de forma extendida en valores intermedios, indicando que la dinámica de este tipo de entornos es más compleja. Aún así, hay una tendencia a valores bajos en el caso de filamentos y valores altos para hojas.



**Figura 4.10:** Histograma integrado del fraccional de anisotropía para las muestras de pares *IP* y *CLG*.

## 4.2 Propiedades de la Muestra *CLG*

---

En la figura 4.10 son calculados los histogramas integrados del fraccional de anisotropía para las muestras *IP* y *CLG*. El primer resultado está asociado a la distribución de los *IP*, la cual es altamente homogénea para rangos intermedios (aproximadamente  $0,4 < FA < 0,9$ ) como es evidenciado en la pendiente constante del histograma. Esto implica que los sistemas *IP* están distribuidos en zonas de media a alta anisotropía, en concordancia con las fracciones encontradas en regiones de vacío, hojas y filamentos. El segundo resultado es el sesgo obtenido en la distribución de FA de la muestra *CLG*. A diferencia de los *IP*, esta distribución se encuentra concentrada en regiones de alta anisotropía (aproximadamente  $0,8 < FA < 1,0$ ), lo que confirma finalmente que es posible asociar un tipo de entorno cosmológico a los sistemas *CLG* y el cual esta acorde con regiones vacías y planas, o en términos de las direcciones definidas en la V-web, regiones que se expanden en dos direcciones (asociadas a los autovalores  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$ ), mientras que poseen un ligero colapso/expansión en la tercera dirección (asociada al autovalor  $\lambda_1$ ).

La principal ventaja de usar el fraccional de anisotropía radica en que esta cuantifica en un solo valor la dinámica del entorno cosmológico, permitiendo establecer un marco de estudio más natural y directo para correlaciones de entorno con cantidades físicas.

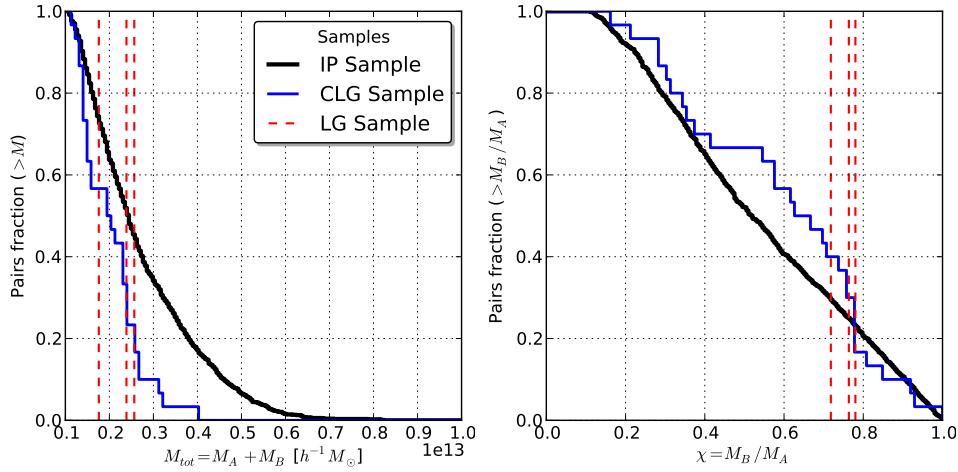
### 4.2.2 Masa de los *CLG*

Como fue demostrado en la subsección 4.1.1, la distribución de masa de los halos es consistente entre las diferentes simulaciones, por tanto se espera que todas las muestras, a excepción de *CLG* que requiere además del entorno cosmológico, sean también consistentes entre las simulaciones. Para el estudio de las masas de los sistemas de pares se propone el uso de dos cantidades, la primera es la masa total del sistema  $M_{tot} = M_A + M_B$  y la segunda es la relación de las masas  $\chi = M_B/M_A$ , donde por convención  $M_A$  es el halo más masivo.

En la siguiente figura 4.11 se calculan los histogramas integrados para la masa total y la razón de las masas. Se toma la muestra *IP* como muestra de control, además se muestran los valores obtenidos para cada uno de los grupos locales en CLUES.

## 4. EL ENTORNO COSMOLÓGICO Y EL GRUPO LOCAL

---

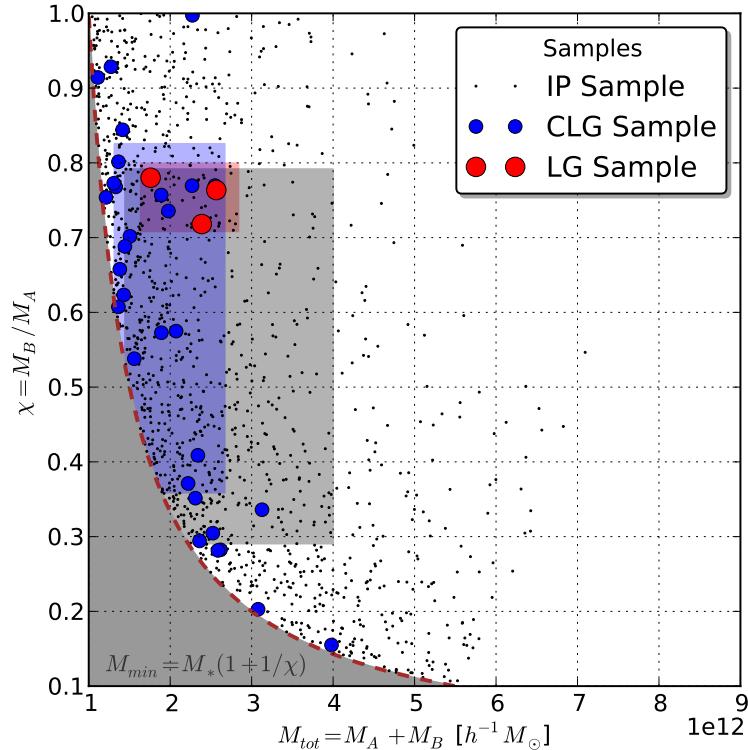


**Figura 4.11:** Funciones de distribución integrada para la masa total  $M_A + M_B$  (izquierda) y la razón de las masas  $M_B/M_A$  (derecha), de las muestras de pares en Bolshoi.

Una característica interesante de esta figura consiste en los rangos bien definidos asociados a la muestra *LG* de CLUES (líneas rojas verticales). Esto evidencia que los grupos locales *LG* no solo comparten una entorno cosmológico común sino también una distribución de masa local. Como posible explicación a esto puede considerarse un efecto de selección de las muestras en la construcción de las simulaciones restringidas, mientras que una alternativa optimista sería tomarlo como una evidencia de la correlación entre la distribución de masa y el entorno local.

Para responder la anterior cuestión se debe analizar la distribución de los parámetros de masa para las demás muestras. En el caso de la masa total de los *IP*, esta se encuentra distribuida acorde a la distribución de masa de los halos (ver figura 4.2), tal como es esperado al no existir ninguna restricción respecto al entorno y en el caso de la razón de masas, se obtiene una distribución completamente homogénea. Ahora, para la muestra *CLG*, la cual se espera que sea influenciada por los efectos del entorno, se obtiene una distribución de masa total sesgada respecto a la de *IP* y centrada aproximadamente en el rango definido por los *LG*. Para la distribución de la razón de masas de *CLG* también se encuentra un comportamiento uniforme teniendo en cuenta la escasez de datos, a pesar de esto hay una aparente sobreabundancia en torno al valor medio definido por los *LG*, pero nuevamente no hay suficientes datos para concluir una posible relación.

## 4.2 Propiedades de la Muestra CLG



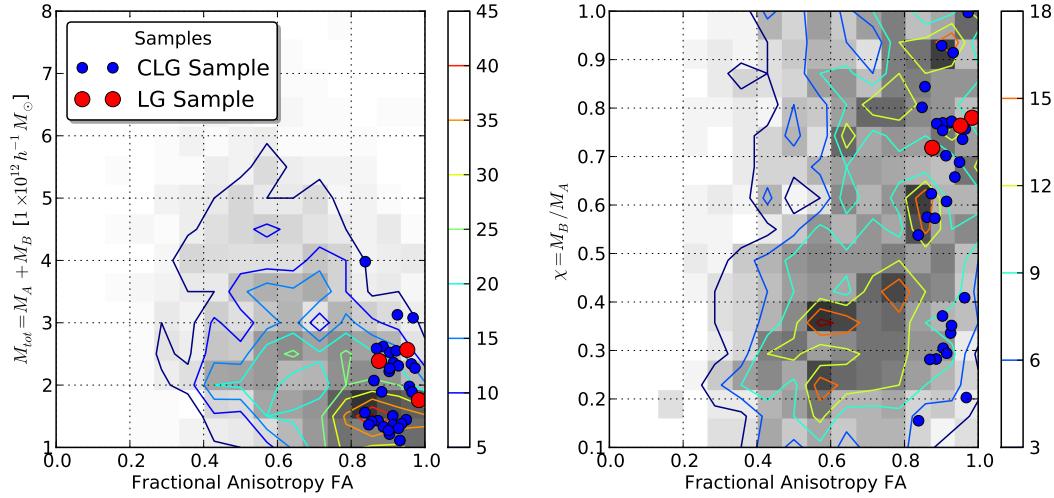
**Figura 4.12:** Diagrama de dispersión de los parámetros de masa definidos ( $M_{tot}, \chi$ ) para cada una de las muestras de pares. Las regiones cuadradas son construidas a partir del valor medio y la desviación estándar de la muestra del mismo color. La región gris en la parte inferior izquierda corresponde a un corte impuesto artificialmente con el rango mínimo de masa de los halos tomados  $M_*$  para construir las muestras de pares.

En la figura 4.12 se muestra un diagrama de dispersión para los parámetros de masa de las muestras de pares. Las regiones cuadradas representan el valor medio más o menos una desviación estándar para los parámetros marcados en cada eje, lo que permite comparar gráficamente las distribuciones. De esta comparación se confirma que el criterio de construcción de la muestra *CLG* selecciona masas de pares  $M_{tot}$  consistente con las masa de los *LG* en las simulaciones restringidas, mientras que no hace ninguna selección respecto a la razón de masas  $\chi$ .

Finalmente, con el objetivo de responder si existe un posible efecto de entorno en la selección de la masa total obtenida para la muestra *CLG*, se calcula en la siguiente figura 4.13 diagramas de correlación entre el fraccional de anisotropía y los parámetros de masa.

## 4. EL ENTORNO COSMOLÓGICO Y EL GRUPO LOCAL

---



**Figura 4.13:** Diagramas de dispersión para el fraccional de anisotropía respecto a los parámetros de masa. El mapa de fondo y las curvas de contorno corresponden a número de pares de la muestra  $IP$ .

En el caso de la masa total  $M_{tot}$  de la muestra  $IP$ , puede notarse que pares con bajos valores de masa están preferencialmente en regiones de alta anisotropía, mientras que pares de masa más alta en regiones de anisotropía intermedia. Esto puede ser considerado como una correlación de entorno para la muestra  $IP$  respecto a la masa total, de lo cual se concluye que el criterio de selección de la muestra  $CLG$  a partir del entorno de los  $LG$  hace un corte para pares de baja masa.

Para la razón de las masas  $\chi$  se nota una distribución más dispersa para la muestra  $IP$ , a pesar de esto se nota una sobreabundancia de pares con valores de  $\chi$  bajos en zonas de anisotropía media, mientras que en regiones de alta anisotropía se presentan valores más altos de  $\chi$ . Esto es consistente con la selección realizada en la muestra  $CLG$ , para la cual aproximadamente el 66 % de los pares tienen un valor  $\chi > 0,5$ . De esto puede intuirse una posible correlación entre el entorno y el valor  $\chi$  de los pares, aún así, debido a la alta dispersión de la distribución y la poca cantidad de datos, no puede concluirse nada al respecto.

### 4.2.3 Distribuciones de Energía y Momentum Angular

La energía y el momentum angular constituyen otras propiedades físicas de interés para los sistemas de pares, estas son definidas acá a partir de las siguiente expresiones

$$e_{tot} = \frac{1}{M_A + M_B} \left[ \frac{1}{2} (M_A v_A'^2 + M_B v_B'^2) - G \frac{M_A M_B}{|\mathbf{r}_A' - \mathbf{r}_B'|} \right] \quad (4.2)$$

$$\mathbf{L}_{orb} = \frac{1}{M_A + M_B} [M_A \mathbf{r}_A' \times \mathbf{v}_A' + M_B \mathbf{r}_B' \times \mathbf{v}_B'] \quad (4.3)$$

donde  $\mathbf{r}_i'$  es la posición comóvil del halo  $i$  y  $\mathbf{v}_i'$  es la velocidad total<sup>1</sup> respecto al centro de masa del par.



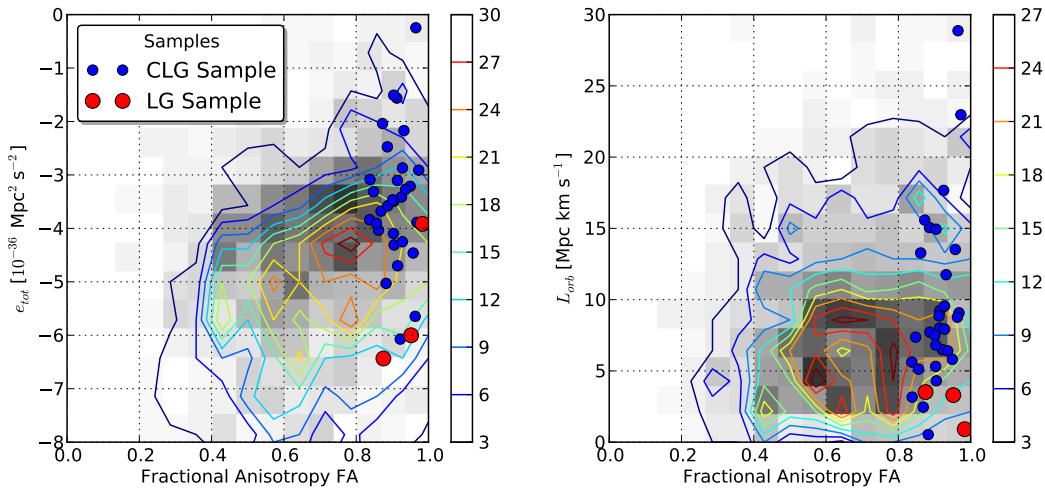
**Figura 4.14:** Diagrama de dispersión para la energía total y el momentum angular orbital de los sistemas de pares. El mapa de fondo corresponde a la distribución de la muestra  $P$ , mientras las líneas de contorno a la distribución de la muestra  $IP$ , en ambos casos los valores corresponden al número de pares.

<sup>1</sup>Velocidad total debido a que se incluye la velocidad peculiar y el flujo de Hubble respecto al centro de masa del sistema, así  $\mathbf{v}_i' = \mathbf{v}_{pec,i} + H_0 \mathbf{r}_i'$ .

## 4. EL ENTORNO COSMOLÓGICO Y EL GRUPO LOCAL

---

En la figura 4.14 se muestran las distribuciones de energía total específica y momentum angular orbital específico para las diferentes muestras. Lo primero que puede ser notado es un significativo sesgo entre la distribución de los *IP* respecto a los *P*, lo que demuestra que el criterio de aislamiento gravitacional definido en la subsección 3.4.2 selecciona un rango de energía y momentum angular más bajo que en los pares generales, siendo así estos sistemas gravitacionalmente más ligados. En el caso de la muestra *CLG*, su distribución parece seguir la de los *IP*, no habiendo así una aparente selección por la condición entorno. Por último, es interesante observar nuevamente que las propiedades asociadas a la muestra *LG* poseen valores muy cercanos, indicando así que representan un tipo de sistema bien definido, aunque como ha sido mencionado, esto puede ser efecto de selección en la construcción de CLUES.



**Figura 4.15:** Diagramas de dispersión para el fraccional de anisotropía respecto a la energía y el momentum angular. El mapa de fondo y las curvas de contorno corresponden a número de pares de la muestra *IP*.

En la figura 4.15 se calculan diagramas de correlación de la energía y el momentum angular con el fraccional de anisotropía con el objetivo de determinar posibles correlaciones. En el caso de la energía específica, sistemas de pares *IP* con mayor energía (menos ligados) parecen estar mayoritariamente en zonas de alta anisotropía, mientras que sistemas de menor energía (más ligados) están en zonas

## 4.2 Propiedades de la Muestra CLG

de anisotropía media, lo que muestra una correlación entre estas dos cantidades. Para sistemas *CLG*, la selección a partir del entorno parece sesgar su distribución de energía a valores más altos que la distribución media de los *IP*, lo que es consistente con la correlación encontrada. En este caso, los sistemas *LG* parecen no seguir esta correlación, teniendo valores mucho más bajos de energía que lo esperado. Finalmente, para la distribución de momentum angular específico no existe ninguna correlación clara, siendo cualquier valor  $L_{orb}$  de los pares igualmente probable en el espectro de posibles entornos para estos sistemas.

### 4.2.4 Alineación del Momentum Angular

Finalmente la última propiedad analizada para los sistemas de pares es su alineación respecto al entorno cosmológico, para esto se define el ángulo  $\phi_i$  como el formado entre el autovector  $\mathbf{u}_{\lambda i}$  de la V-web y el momentum angular del par  $\mathbf{L}_{orb}$ .



**Figura 4.16:** Histogramas integrados para el ángulo formado entre el momentum angular de los pares, el cual determina el plano orbital, y cada uno de los autovectores definidos por la V-web en el entorno cosmológico. Se realiza para cada las muestras de pares *CLG* y *IP*, mientras que los grupos locales de CLUES son ilustrados con las líneas rojas punteadas.

En la figura 4.16 se calculan los histogramas integrados para cada uno de los angulos  $\phi_i$  definidos. Como puede notarse, las muestras *CLG* y *IP* son homogéneas respecto a los tres valores, indicando que no hay una alineación preferida respecto al entorno cosmológico. Esto también se evidencia en los valores calculados de los *LG* de las simulaciones restringidas.

## 4. EL ENTORNO COSMOLÓGICO Y EL GRUPO LOCAL

---

### 4.3 Conclusiones

Esta sección está dedicada a compilar los principales resultados obtenidos en este capítulo. Estos serán enumerados y discutidos acorde al orden en que fueron obtenidos.

1. La construcción de la muestra *IP* fue inicialmente propuesta en [8] con el objetivo de reproducir sistemas tipo grupo local. A pesar de esto, el número de estos sistemas encontrados en la simulación Bolshoi es mucho mayor al que se espera acorde a la abundancia de *LG* en simulaciones restringidas. El método propuesto para la selección de la muestra *CLG* en Bolshoi a partir del entorno cosmológico de los *LG*, produce un número de sistemas que concuerda con los encontrados en las simulaciones restringidas, escalando aproximadamente como el volumen de las simulaciones. Más aún, aplicando este mismo método en las simulaciones restringidas se halla una muestra con un tamaño similar a la *LG*.
2. A partir de los valores medios de densidad en las diferentes regiones del entorno cosmológico (figura 4.4) se propone un esquema para la elección de un rango óptimo del parámetro  $\lambda_{th}$  de la V-web con el objetivo de reproducir la apariencia visual de la red cósmica. Este está basado en la minimización de la densidad media en las regiones de vacío debido a que son las dominan la apariencia del campo de densidad a gran escala. Con esto se garantiza que las regiones vacías no invadan regiones de más alta densidad, que en principio deben ser clasificadas como hojas o filamentos. Este método da un rango de valores óptimos aproximadamente igual para todas las simulaciones usadas ( $0,2 \leq \lambda_{th} \leq 0,4$ ), además reproduce adecuadamente la apariencia visual (ver figura 4.5 para  $\lambda_{th} = 0,3$ ). A pesar de esto, este parámetro sigue siendo libre y no es viable usar un esquema de clasificación basado en este para determinar correlaciones con propiedades físicas, en vez de esto se introduce el fraccional de anisotropía con la normalización usada en [25].
3. La distribución del entorno cosmológico de las simulaciones Bolshoi y CLUES difieren, existiendo un cambio de densidad media muy pronunciado entre regiones de vacío y filamentos en Bolshoi, mientras que es mucho más suave en las CLUES. A pesar de esto, las fracciones de volumen asociadas a cada

### **4.3 Conclusiones**

---

tipo de entorno son aproximadamente iguales para ambas simulaciones en el rango óptimo determinado para  $\lambda_{th}$ . A pesar de esto, se espera que la dinámica local caracterizada por la V-web sea independiente de la estructura global de la distribución de entorno, lo cual valida el esquema de selección de la muestras *CLG* en *Bolshoi*.

4. El método de construcción de los *CLG* selecciona un entorno cosmológico común para estos sistemas, siendo preferidas zonas de vacío y hojas no muy planas. Estas regiones presentan una alta anisotropía, cuantificada por el fraccional de anisotropía FA. En el caso de los sistemas *IP*, estos se encuentran en zonas de media a alta anisotropía, asociadas a valores de baja densidad, contrario a los halos que están en zonas más densas y menos anisotrópicas como filamentos y nudos, aún así la distribución de entorno de los *IP* es amplia y no pueden ser asociados a un tipo de entorno específico. El sesgo producido entre los *IP* y los halos generales se debe al criterio de aislamiento gravitacional usado para construir los *IP*, esto hace que zonas con mayor densidad de halos sean menos aptas por la alta influencia gravitacional.
5. Se encuentra una correlación entre la masa total de los pares de la muestra *IP* y el fraccional de anisotropía del entorno, donde masas mayores son más abundantes en regiones de anisotropía media mientras masas menores se presentan con mayor frecuencia en zonas de alta anisotropía. Esto implica que la selección de entorno realizada en los *CLG* reproduce un rango de masa menor. En el caso de la razón de masa, no se encuentra ninguna correlación significativa con el entorno, aún así se nota una ligera sobreabundancia de razones de masa mayores en regiones más anisotrópicas, pero es necesaria más estadística para poder ser algo concluyente.
6. Se halla un correlación para la energía específica de los sistemas *IP* respecto al entorno, obteniendo valores más altos en regiones más anisotrópicas y valores bajos en regiones de anisotropía media. Esta correlación parece seleccionar un rango de energía para los sistemas *CLG*, aunque esta no es consistente con los valores obtenidos de los *LG*. Para el momentum angular no se encuentra ninguna correlación con el entorno.

#### **4. EL ENTORNO COSMOLÓGICO Y EL GRUPO LOCAL**

---

7. Finalmente se encuentra que no existen alineaciones privilegiadas entre el momento angular de los pares *CLG* (o de su plano orbital) y las direcciones de los autovectores de la V-web.

# Bibliografía

- [1] A.W. Appel. *Undergraduate Thesis, Princeton University*. SIAM J. Sci. Stat. Comput. 6, 85, 1985. 48
- [2] J. Barnes and P. Hut. A hierarchical  $o(n \log n)$  force-calculation algorithm. *Nature*, 324:446–449, 1986. 48
- [3] J. Binney and S. Tremaine. *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, USA, second edition, 2008. ISBN 978-0-691-13027-9. 42
- [4] H. Curtis. The scale of the universe. *Bull. Nat. Res. Coun*, 2:171, 1921. 3
- [5] J.M. Dawson. Particle simulation of plasmas. *Reviews of Modern Physics*, 55:403–447, 1983. 44
- [6] A. Einstein. Grundlage der allgemeinen relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 49(4):769–822, 1916. 3
- [7] J. Forero-Romero, Y. Hoffman, S. Gottlöber, A. Klypin, and G. Yepes. A dynamical classification of the cosmic web. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc*, 396: 1815–1824, 2009. 56
- [8] J. Forero-Romero, Y. Hoffman, G. Yepes, S. Gottlöber, R. Piontek, A. Klypin, and M. Steinmetz. The dark matter assembly of the local group in constrained cosmological simulations of a lambda cold dark matter universe. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc*, 417:1434–1443, 2011. 60, 61, 86

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [9] J.E. Forero-Romero, Y. Hoffman, S. Bustamante, S. Gottlöber, and G. Yepes. The kinematics of the local group in a cosmological context. *Accepted to publication in ApJ Letters*, 2013. 8, 61
- [10] A. Friedman. On the curvature of space. *General Relativity and Gravitation*, 31:1991, 1999. 4
- [11] A. Friedman. On the possibility of a world wih constant negative curvature of space. *General Relativity and Gravitation*, 31:2009, 1999. 4
- [12] S. Gottlöber, Y. Hoffman, and G. Yepes. Constrained local universe simulations (clues). *Proceedings of High Performance Computing in Science and Engineering*, pages 309–322, 2010. 53
- [13] O. Hahn, C. Porciani, M. Carollo, and A. Dekel. Properties of dark matter haloes in clusters, filaments, sheets and voids. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc*, 375: 489–499, 2007. 54
- [14] W. Herschel. On the construction of the heavens. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 75(I):213–266, 1785. vii, 2
- [15] R.W. Hockney and J.W. Eastwood. *Computer Simulation Using Particles*. IOP Publishing Ltd, Great Britain, first edition, 1988. ISBN 0-85274-392-0. 46
- [16] Y. Hoffman and E. Ribak. Constrained realizations of gaussian fields: A simple algorithm. *ApJ*, 380:L5–L8, 1991. 52
- [17] Y. Hoffman, O. Metuki, G. Yepes, G. Gottlöber, J. Forero-Romero, N. Libeskind, and A. Knebe. A kinematical classification of the cosmic web. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc*, 425:2049–2057, 2012. 56
- [18] E.P. Hubble. Extragalactic nebulae. *ApJ*, 64:321–369, 1926. 3
- [19] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., USA, third edition, 1999. ISBN 0-471-30932-X. 28

---

## BIBLIOGRAFÍA

- [20] N. Jarosik et al. Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Sky maps, systematic errors, and basic results. *ApJS*, 192:14, 2011. 10, 21
- [21] J.G. Jernigan. Dynamic of star clusters. *IAU Symposium 113*, page 131, 1985. 48
- [22] A. Klypin, Y. Hoffman, A. Kravtsov, and S. Gottlöber. Constrained simulations of the real universe: the local supercluster. *ApJ*, 596:19–33, 2003. ix, 51, 52
- [23] A.A. Klypin, S. Trujillo-Gomez, and J. Primack. Dark matter halos in the standard cosmological model: Results from the bolshoi simulation. *ApJ*, 740:102, 2011. 50
- [24] G. Lemson and G. Kauffmann. Environmental influences on dark matter halos and consequences for the galaxies within them. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc*, 302:111, 1999. 66
- [25] N. Libeskind, Y. Hoffman, J. Forero-Romero, S. Gottlöber, A. Knebe, M. Steinmetz, and A. Klypin. The velocity shear tensor: tracer of halo alignment. *Mon.Not.Roy.Astron.Soc*, 428:2489–2499, 2013. 66, 69, 77, 78, 86
- [26] M.S. Longair. *Galaxy Formation*. Springer, New York, second edition, 2008. ISBN 978-3-540-73477-2. viii, 2, 3, 13, 15, 17, 18, 19, 21, 24, 26, 36, 39
- [27] T. Padmanabhan. *Structure Formation in the Universe*. Cambridge University Press, Great Britain, first edition, 1995. ISBN 0-521-42486-0. 13, 19, 20, 23, 32, 34, 39, 43
- [28] R.K. Pathria. *Statistical Mechanics*. Butterworth-Heinemann, Great Britain, second edition, 1996. ISBN 0-7506-2409-8. 28
- [29] S. Pfalzner and P. Gibbon. *Many-Body Tree Methods in Physics*. Cambridge University Press, USA, first edition, 1996. ISBN 0-521-49564-4. 42, 45, 48
- [30] D. Porter. *PhD Thesis*. University of California, Berkeley, 1985. 48

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [31] W. Press and P. Schechter. Formation of galaxies and clusters of galaxies by self-similar gravitational condensation. *ApJ*, 187:425–438, 1974. 67
- [32] H. Shapley. The scale of the universe. *Bull. Nat. Res. Coun*, 2:164, 1921. 3
- [33] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, Inc., New York, first edition, 1972. ISBN 0-471-92567-5. 14, 16
- [34] A. Yoshisato, M. Morikawa, N. Gouda, and H. Mouri. Why is the zel'dovich approximation so accurate? *ApJ*, 637:555–560, 2006. 38
- [35] S. Zaroubi, Y. Hoffman, and A. Dekel. Wiener reconstruction of large-scale structure from peculiar velocities. *ApJ*, 520:413–425, 1999. 52
- [36] Y.B. Zeldovich. Gravitational instability: an approximate theory for large density perturbations. *Astronomy and Astrophysics*, 5:84–89, 1970. 38