UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
INSTITUTO DE FÍSICA

# THE PLACE OF THE MILKY WAY AND ANDROMEDA IN THE COSMIC WEB

**Sebastian Bustamante Jaramillo**
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Física

Advisor:
**Prof. Jaime E. Forero-Romero**

Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Física

# The place of the Milky Way and Andromeda in the cosmic web

**Sebastian Bustamante Jaramillo**

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Física

Advisor:
**Prof. Jaime E. Forero-Romero**

Student Advisor

Medellín, January 2013

*El lugar de la Vía Láctea y Andrómeda en la red cósmica*
Autor: Sebastian Bustamante
Asesor: Jaime E. Forero-Romero
Co-asesor: Jorge I. Zuluaga

La siguiente página web contiene información actualizada sobre este trabajo y temas relacionados:
`https://github.com/sbustamante/Thesis`
Texto impreso en Medellín, Colombia
Primera Edición, September 2013

*A mi familia, mi novia y mis amigos.*

# Abstract

Como ha sido demostrado a partir de simulaciones y observaciones cosmológicas, el universo actual presenta una compleja estructura a gran escala de filamentos entrelazado permeados por regiones de altos vacíos. Esta estructura es denominada red cósmica y es una de las principales característica emergentes del régimen no lineal. Muchos estudios se ha realizado dirigidos a la cuantificación de la red cósmica y de sus efectos sobre las propiedades físicas de sistemas como halos de materia oscura y galaxias. Algunas importantes correlaciones se han establecido ya para algunas de estas propiedades, tales como la masa de los halos, su parámetro de espín y su forma. También existe un creciente interés en estudiar las propiedades del grupo local de galaxias (dominado principalmente por las galaxias de andrómeda y la vía láctea) en un contexto cosmológico como un test del modelo cosmológico estándar.

Con la motivación de seguir esta línea, en el actual trabajo se hace un estudio de sistemas similares al grupo local (LG) en simulaciones cosmológicas de materia oscura. Como principal propuesta, se introduce un método para la construcción de muestras de sistemas LG a partir de la aplicación del esquema V-web para la clasificación del entorno cosmológico en simulaciones que reproducen el universo local. Se demuestra que las muestras LG construidas son consistentes y presentan sesgos significativos para algunas propiedades físicas respecto a la distribución de los halos. En especial se determina que a diferencia de los halos, que se forman en zonas de alta densidad, los sistemas LG se encuentran preferencialmente en zonas de más baja densidad, tal como regiones vacías y regiones con una distribución plana de materia.

# Acknowledgements

Es bastante satisfactorio mirar en retrospectiva todo el proceso de formación que he recibido y darse cuenta que cada paso logrado ha contribuido de una u otra forma a culminar este logro. En especial, nada de esto hubiera sido posible sin el apoyo incondicional de mi familia, mi madre Gilma Jaramillo, mi padre Aníbal Bustamante y mi hermano Santiago Bustamante, a ellos muy especialmente va dedicado este trabajo.

Cito la frase de Isaac Newton, “Si he logrado ver más lejos, ha sido porque he subido a hombros de gigantes”. Con esto quiero aludir a todos los profesores que en algún grado contribuyeron a mi proceso de formación, especialmente Jaime Forero por permitirme trabajar en estos apasionantes temas, brindarme la oportunidad de realizar una pasantía que me ayudó enormemente en este proyecto, además por su infinita paciencia. Al profesor Jorge Zuluaga por su acompañamiento durante casi toda mi carrera y enseñarme la gran mayoría de mis conocimientos en programación. A Carlos Vera por introducirme en el fascinante mundo de la astrofísica y finalmente a los profesores Boris Rodríguez y Pablo Cuartas, que en un momento u otro de mi carrera aportaron valiosamente en este arduo proceso.

Quiero especialmente agradecer a mi novia Nataly Mateus por su apoyo permanente y acompañamiento, por su paciencia en los malos momentos y por escucharme y aportarme con ideas y correcciones de mi tesis. Con ella quiero compartir la alegría de culminar esta etapa y también

le dedico este trabajo. También agradezco a su familia por su gran apoyo y preocupación, por acogerme durante las maratónicas jornadas de estudio, que no fueron pocas.

Finalmente también dedico este trabajo a todos mis amigos, muy en especial aquellos de astronomía y física, por los momentos alegres que me han brindado y su preocupación en los malos momentos. Agradezco también a Cesar Uribe por escuchar tan pacientemente sobre temas de esta tesis y aportar con algunas ideas.

*Sinceramente,*

Sebastian Bustamante

September 2013

# Contents

# List of Figures

# List of Tables

*“Equipped with his five senses, man explores the universe around him and calls the adventure Science”*

Edwin Hubble

CHAPTER

1

# Preliminaries

“What is our place in the cosmos?” This is one of the simpler and transcendental question that human beings have wondered from ancient times; furthermore, this, being powered by our innate curiosity, has led to a relatively understandable and structured picture of our Universe. Despite of that, this knowledge is very new regarding to our whole history, so the astronomy can only be considered as a scientific rigorous discipline since the seventeenth century.

## 1.1 Prehistory

Almost in every scientific discipline, a significant theoretical development is accompanied by a technical and instrumental improvement. That is why at the beginning of the seventeenth century, Johannes Kepler could establish his three well-known empirical laws of the planetary movements based upon the very precise data of astronomical bodies compiled by Tycho Brahe. This event was very remarkable in the history of the astronomy since it was the first of many strikes against the well established anthropocentric notion of the cosmos. Although Kepler’s laws constituted the most crucial test to the Nicolaus Copernicus’s heliocentric model, it was only until 1685, when Isaac Newton formulated the law of universal gravitation (from which can be derived all the Kepler's laws), when the astronomers could count with enough powerful theoretical tools to start a depth and serious discussion about the real nature of our universe on scales bigger than the solar system, and thus inaugurating the *sciences of gravity* [**?** ].

After the establishment of the law of universal gravitation, the next significant theoretical achievement in this area came in the centuries eighteenth and nineteenth with the development of classical mechanics, i.e. Hamiltonian and Lagrangian formalism, and powerful numerical tools. All those achievements propelled the study of key topics as the many body problem, chaotic phenomenons, etc. Allowing a depth understanding of the dynamic of complex gravitational system, as planetary system, star clusters, etc.

Parallel to the previous theoretical advances, on the observational branch was beginning to arise the idea of *island universe*, from which would evolve the concept of galaxy. All of this was powered by the development of the telescope, furthermore allowing to understand that galaxies are just a large collection of stars like our sun. It was also very remarkable the pioneer work of William Herschel, who tried to build a complete map of our galaxy determining distances from the assumption of stars with the same intrinsic luminosity and with the inverse square law for the intensity decay (see figure 1.1). Although his results were very imprecise due to the incorrect assumption on which were based, the importance of his work lies on the recognition of some structure (disk-like) for our galaxy.

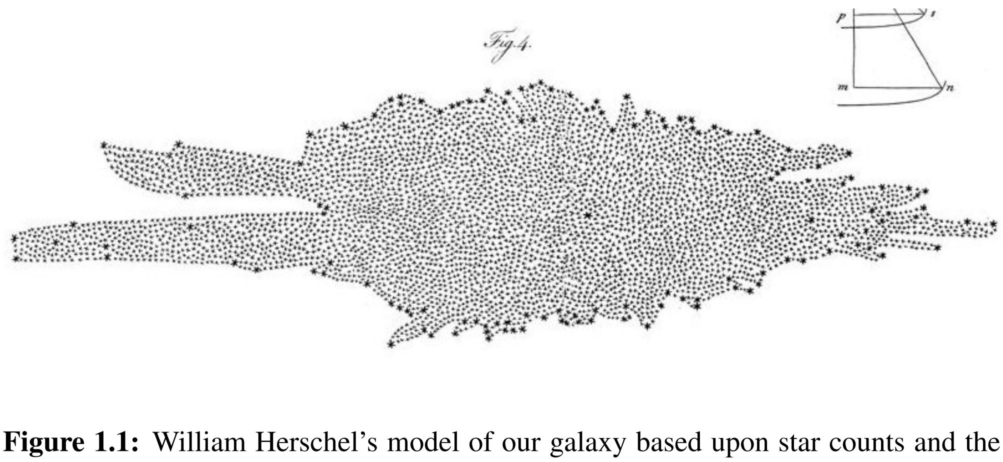

**Figure 1.1:** William Herschel's model of our galaxy based upon star counts and the equal luminosity assumption.[**?** ]

Another important observational question, that was emerging among scientists in that time, was about the existence of *island universes* like ours. It was already well-known the existence of extended objects that do not fit to the definition of stars or planets, like nebulae, planetary disks and galaxies. Even, William Herschel and his son, John Herschel, contributed with the realization of a large (for the epoch) catalogue of extended bodies known as *Catalogue of Nebulae and Clusters of Stars* and a subsequent improved and expanded version finished by John Dreyer in 1888, *New General Catalogue of Nebulae and Clusters of Stars*, which together with *Index Catalogues* of 1895 and 1908 constitute a large collection of bodies widely used in current astronomy, referred with the abbreviations *NGC* and *IC* respectively [**?** ]. Despite of those observational advances, the real nature of these objects was a complete mystery, especially if they lie within our own galaxy or are completely independent systems.

This question remained unsolved until the twentieth century, and together with the indetermination of the real size of the universe, were the two big issues treated in the well-known *Great Debate*, or also called the *Shapley-Curtis Debate*. In this important event in the history of astronomy, the astronomers Harlow Shapley and Herber Curtis discussed about these topics, giving, respectively, different arguments for and against if these objects are within our galaxy and if the Milky Way is our whole universe or not [**?** ] [**?** ]. Despite of that, their arguments were not very conclusive and the solution to these issues had to wait until 1924 when Edwin Hubble measured the distance to Andromeda Galaxy (M31 or NGC 224) and demonstrated unquestionably the real extragalactic nature of this object, and in the following years for other ones. This achievement together to the observational verification of expanding universe (also due to Hubble) were the beginning of modern observational cosmology.

It also happened in the twentieth century a key event for the modern sciences of gravity, Albert Einstein formulated his theory of General Relativity, changing completely the previous conception of space and time and laying the foundation of current cosmology picture.

## 1.2 The Current Cosmology Picture

The conceptions of space and time were misunderstanding before 1900 century and their connection with the gravitational interaction was completely neglected, both key issues for the adequate understanding of our universe, it is for these reason that the formulation of the General Relativity opened the door to a complete set of theoretical tools

## 1.3 Cosmological Observations

## 1.4 Numerical Simulations

*"El cosmos es todo lo que es, todo lo que fue y todo lo que será. Nuestras más ligeras contemplaciones del cosmos nos hacen estremecer: Sentimos como un cosquilleo nos llena los nervios, una voz muda, una ligera sensación como de un recuerdo lejano o como si cayéramos desde gran altura. Sabemos que nos aproximamos al más grande de los misterios."*

Carl Sagan

CHAPTER 2

# Fundamentos en Cosmología

Este capítulo se concentra en abarcar de forma autocontenida y resumida todo el marco teórico necesario para el estudio del universo a gran escala, pasando por los modelos simples de universo dados por las soluciones de Friedmann, la teoría de perturbaciones para la generación de estructuras complejas como galaxias y cúmulos galácticos, hasta la cuantificación del red cósmica.

## 2.1 Universo Isotrópico y Homogéneo

Los dos grandes pilares de la comoslogía moderna son el principio cosmológico y la teoría de la relatividad general. El primero es un principio que asume que el universo es homogéneo e isotrópico a grandes escalas, mientras que la segunda da el soporte teórico necesario para un entendimiento adecuado de la relación entre materia y la estructura del espacio-tiempo.

Como han indicado observaciones de estructura a gran escala y de radiación cósmica de fondo nuestro universo parece ser isotrópico y homogéneo a muy grandes escalas, lo que está acorde con el principio cosmológico. Más aún, esta hecho simplifica bastante la compleja formulación tensorial de la relatividad general para llegar finalmente a las ecuaciones de Friedmann.

### 2.1.1 Métrica de Espacios Curvados

En la construcción de un modelo isotrópico y homogéneo del universo es necesario establecer una métrica adecuada que lo describa, como un ejemplo ilustrativo que puede ser generalizado se considera una superficie esférica, que claramente satisface los criterios de homogeneidad e isotropía.

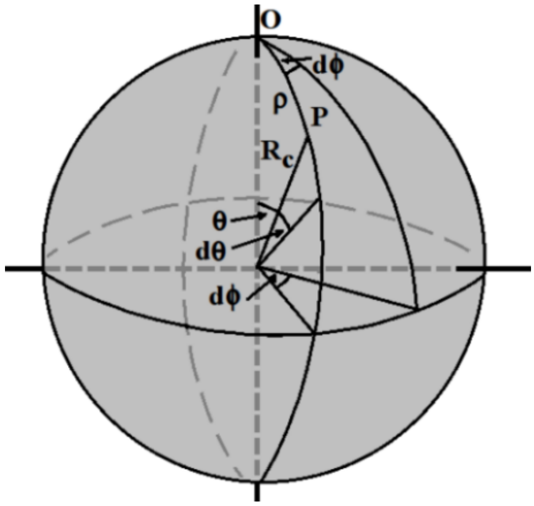


**Figure 2.1:** Métrica de una superficie esférica.

Un elemento de línea sobre la superficie de la figura 2.1 puede ser descrito como

$$dl^2 = d\rho^2 + R_c^2 \sin^2 \frac{\rho}{R_c} d\phi^2$$

donde se ha introducido una nueva coordenada de longitud sobre la superficie definida como $\rho = \theta R_c$ y $R_c$ radio de curvatura de la esfera. Otra forma muy conveniente de reescribir esta expresión y que permite una generalización muy útil se logra introduciendo el parámetro de curvatura $k$ y la coordenada $r = \sin(\rho/a)$, obteniendo

$$dl^2 = a^2(t)\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\phi^2$$

con $k = -1$ y se asume un radio de curvatura dependiente del tiempo $R_c = a(t)$. La métrica para el caso de 3 dimensiones se obtiene reemplazando el diferencial del ángulo $d\phi^2$ por uno de ángulo sólido $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$

eq:LineElement3D $\mathrm{dl}^2 = a^2(t)\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$

Finalmente incluyendo el tiempo, el intervalo espacio-temporal para la métrica de espacios curvos isotrópicos y homogéneos queda

eq:IntervalCurvedSpaces $\mathrm{ds}^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$

La generalización directa de esta expresión consiste en variar los valores del parámetro de curvatura $k$ para llegar a la métrica de espacios planos ($k = 0$), esféricos cerrados ($k = -1$) o abiertos ($k = 1$), tal como es mostrado en [**?** ] o [**?** ].

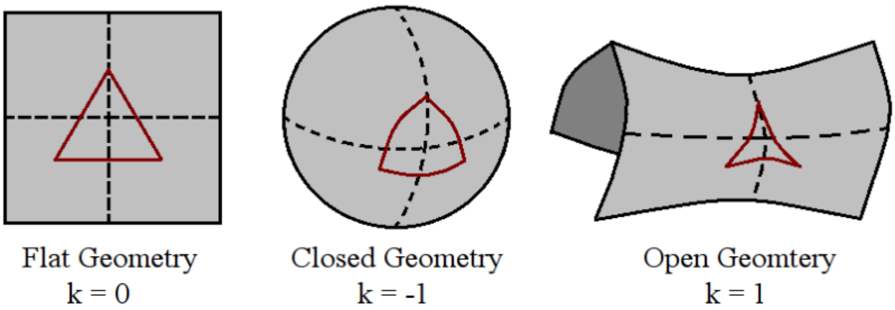


**Figure 2.2:** Diferentes espacios curvos según el parámetro de curvatura.

Una manera alternativa de reescribir la métrica es introduciendo dos cambios de coordenadas definidos por

$$\chi = \int \frac{dr'}{\sqrt{1-kr'^2}}$$

$$\tau = \int \frac{cdt'}{a(t')}$$

los cuales se interpretan respectivamente como una coordenada de longitud sobre la hipersuperficie que define el espacio ($\chi$) y como el tiempo propio medido localmente ($\tau$). Se obtiene la siguiente expresiones para la métrica

eq:IntervalCurvedSpacesAltern1 $\mathrm{ds}^2 = c^2dt^2 - a^2(t)d\xi^2 + f_k^2(\xi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$

eq:IntervalCurvedSpacesAltern2 $\mathrm{ds}^2 = \bar{a}^2(\tau)d\tau^2 - d\xi^2 - f_k^2(\xi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) dondelafunci$ es definida de acuerdo al valor del parámetro de curvatura

eq:CurvatureFunction $\mathrm{f}_k(\chi) = \{\sin\chi k = 1 \chi k = 0 \sinh\chi k = -1$

A pesar de que las expresiones derivadas para la métrica 2.2 2.3 y 2.4 son equivalentes, el uso de una u otra depende de la conveniencia del problema. En especial la forma 2.3 suele ser más usada y se define como métrica de Friedmann.

Puede ser mostrado que en variedades Riemannianas [1] el intervalo espacio-temporal se expresa en términos de la tensor métrico como [**?** ]

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx_\nu$$

donde se ha introducido el cuadrivector $x^\mu = (ct, r, \theta, \phi)$.

Debido a la asunción de isotropía y homogeneidad el tensor métrico debe ser diagonal, además comparando con la expresión 2.2 se llega a la siguiente forma explícita

eq:MetricTensor g$_{\mu\nu}$ $= 10000 - a^2(t)(1-kr^2)^{-1}0000 - a^2(t)r^2 0000 - a^2(t)r^2 \sin^2\theta$

A partir de esta métrica y las ecuaciones de campo de Einstein es posible construir sencillos modelos de universo, tal como se muestra a en la subsección 2.1.2.

### Medición de distancias

Una vez definida la métrica de espacios curvos es útil introducir algunos conceptos de distancia que son usados de forma recurrente [**?** ]. Por simplicidad se asumirá una métrica plana ($k = 0$).

- ***Distancia radial comóvil:*** por definición, una señal lumínica tiene asociado un valor nulo del intervalo $ds^2 = 0$, usando la métrica 2.2 se llega a

  eq:ComovilDistance r = $\int_t^{t_0} \frac{cdt'}{a(t')} = \int_a^1 \frac{cda}{a\dot{a}} dondelaformade$a(t)$dependedelacosmologíaespecíficaq$
  es el tiempo de referencia, el cual se toma como la edad actual del universo.

  Debido a la asunción de expansión de la métrica, la distancia entre dos objetos depende del tiempo en que es medida, y más aún, esta distancia no puede ser determinada a partir de un haz de luz debido a la finitud de su velocidad [2]. Por esta razón se debe realizar una proyección del cono de luz trazado por el haz en la época actual, tal como se hace en la expresión 2.8. Esto último permite interpretar $r$ como la distancia a un objeto en el tiempo actual, y es

[1] Una variedad Riemanniana es un espacio donde puede ser definido el concepto de métrica.
[2] $c = 299\ 792\ 458$ m/s

diferente a la distancia aparente que corresponde al tiempo en que el objeto emitió la luz que se observa.

- ***Distancia radial propia:*** en virtud de la definición de factor de escala, para obtener la distancia a un objeto en cualquier tiempo basta multiplicar su distancia comóvil por el factor de escala en ese mismo tiempo, esto es

  eq:ComovilDistance r$_{prop} = a(t) \int_t^{t_0} \frac{cdt'}{a(t')} = a \int_a^1 \frac{cda}{a\dot{a}}$

- ***Horizonte de partículas:*** considerando un haz de luz que viaja en el vacío desde el inicio del universo en $t = 0$, la máxima distancia propia que puede haber recorrido en un tiempo $t$ se denomina horizonte de partículas y determina la región que puede estar conectada causalmente en el universo en esa época.

  eq:HorizonDistance r$_H = a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')} = a \int_0^a \frac{cda}{a\dot{a}}$

### 2.1.2 Relatividad General y Ecuaciones de Friedmann

Las ecuaciones de campo métrico de Einstein desempeñan un papel fundamental en la relatividad general ya que expresan de forma explícita la relación entre la materia y la geometría local del espacio-tiempo.

eq:EinsteinEquations R$_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R - g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} odeformaequivalente$

eq:EinsteinEquationsAltern R$_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} donde$T$eslatrazadeltensormoment$ el tensor de Ricci y $R$ el escalar de curvatura. Estos dos últimos calculados a partir de trazas del tensor de curvatura de Riemann como $R_{\mu\nu} = R^{\eta}{}_{\mu\eta\nu}$ y $R = R^{\mu}{}_{\mu}$. Por conveniencia se ha introducido el término asociado a la constante cosmológica y será usado posteriormente para calcular modelos de universo con energía oscura.

El tensor de Riemann cuantifica la diferencia entre la métrica del espacio-tiempo curvo y la métrica Euclideana y permite determinar completamente las propiedades geométricas como la curvatura local, la medida de distancias y ángulos, etc [**?** ]. Es construido a partir de la conexión afín como

eq:RiemannTensor R$^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\nu\alpha,\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\nu\beta,\alpha} + \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\alpha}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\beta}\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\alpha} asuvezlaconexiónafínsedefin$

eq:AfinConnection $\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}g_{\sigma\alpha,\beta} + g_{\sigma\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\sigma}$

El lado derecho de la ecuación 2.10 contiene el tensor de momentum energía $T_{\mu\nu}$, que caracteriza la densidad y el flujo materia-energía en el universo. En virtud del principio cosmológico este tensor también debe ser diagonal y si además se asume un modelo de fluido ideal se obtiene la siguiente forma

eq:MomentumEnergyTensor $\mathrm{T}^{\mu}_{\ \nu} = c\rho^2 0000 - P0000 - P0000 - P$

Finalmente usando las ecuaciones 2.6, 2.11 y 2.14 es posible reducir el complejo sistema ecuaciones tensoriales a dos ecuaciones escalares acopladas denominadas ecuaciones de Friedmann [**?** ]. Estas describen completamente la evolución de un universo isotrópico y homogéneo en términos del factor de escala $a(t)$ (ver ecuación 2.1)

eq:FriedmannEquation1 $\frac{}{a=-\frac{4\pi G}{3}\rho+\frac{3P}{c^2}+\frac{c^2\Lambda}{3}}$

eq:FriedmannEquation2 $\frac{}{a+2\frac{\dot{a}^2}{a^2}+2\frac{c^2 k}{a^2}=4\pi G\rho-\frac{P}{c^2}+c^2\Lambda}$

Para resolver este sistema en términos de $a(t)$ y obtener así la evolución de la escala del universo es necesario conocer la forma en la que cambia la densidad $\rho$ y la presión $P$ en el tiempo o el factor de escala, y para todos los diferentes tipos de materia-energía del universo. Una derivación detallada de estas dependencias puede ser encontrada en [**?** ] y es resumido en la tabla 2.1

| **Propiedad** | **Densidad** | **Presión** | **Temperatura** |
|---|---|---|---|
| **Materia**<br>(bariónica + oscura) | $\rho = \rho_0 a^{-3}(t)$ | $p = p_0 a^{-5}(t)$ | $T = T_0 a^{-2}(t)$ |
| **Radiación**<br>(+ materia relativista) | $\rho = \rho_0 a^{-4}(t)$ | $p = p_0 a^{-4}(t)$ | $T = T_0 a^{-1}(t)$ |
| **Vacío** | $\rho = \rho_0$ | $p = p_0$ | – |

**Table 2.1:** Dependencia de algunas propiedades físicas respecto al factor de escala [**?** ].

Por convención se ha tomado el factor de escala en el presente como $a_0 = a(t_0) = 1$ y los valores de referencia se definen como $\rho_0 = \rho(a_0)$, $P_0 = P(a_0)$

y $T_0 = T(a_0)$. Usando las ecuaciones de Friedmann, definiendo el parámetro de Hubble $H(t) = \dot{a}/a$ y la densidad de vacío $\rho_\Lambda = c^2\Lambda/8\pi G$ se obtiene

$$\frac{\dot{a}}{a}^2 = H^2(t) = \frac{8\pi G}{3}\rho_m \frac{1}{a^3} + \rho_r \frac{1}{a^4} + \rho_\Lambda - \frac{c^2 k}{a^2}$$

Evaluando esta expresión en el tiempo actual $H(t_0) = H_0$, con $H_0$ la constante de Hubble y definiendo la densidad crítica $\rho_c$ como la densidad actual necesaria para un universo plano

eq:CriticalDensity $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} sellegaalaecuaci\acute{o}ndeevoluci\acute{o}nparaelpar\acute{a}metrodeHubble$

eq:HubbleEquation $\mathrm{H}^2(t) = H_0^2(1-\Omega_0)\frac{1}{a^2} + \Omega_m \frac{1}{a^3} + \Omega_r \frac{1}{a^4} + \Omega_\Lambda dondesehanintroducidolospa$

definidos como la densidad actual de la i-ésima especie en el tiempo actual normalizada con la densidad crítica 2.17, y $\Omega_0 = \sum_i \Omega_i$. Estos parámetros de densidad junto con la constante de Hubble hacen parte de los parámetros libres de la teoría y deben ser establecidos observacionalmente, lo cual permite caracterizar cosmologías particulares. [3]

### 2.1.3 Soluciones Simples de Universo

A pesar de que en este punto no ha sido introducido el formalismo de pequeñas perturbaciones y la formación de estructuras, el conjunto de ecuaciones 2.15, 2.16 y 2.18 permiten una primera comprensión rudimentaria de la evolución del universo.

En esta subsección serán presentadas algunas soluciones analíticas de las ecuaciones de Friedmann. A pesar de su carácter ideal, en algunos casos pueden ser usadas como aproximaciones a algunas etapas de evolución del universo, permitiendo así un entendimiento físico más adecuado que soluciones numéricas exactas.

#### Universo Einstein - de Sitter

El universo Einstein-de Sitter es un modelo cosmológico con una métrica plana y compuesto enteramente de materia, esto implica que $\Omega_0 = \Omega_m = 1$ y $k = 0$. Aplicando esto en la ecuación 2.18 se obtiene

eq:EinsteindeSitter $\mathrm{H}^2(t) = \frac{\dot{a}}{a}^2 = H_0^2 \frac{1}{a^3}$

[3] *Cosmología* debe ser entendida en este contexto como una solución específica de las ecuaciones de Friedmann.

Integrando se llega a la solución para el factor de escala en función del tiempo

eq:EinsteindeSitterSolution t(a) = $2\frac{}{3H_0 a^{3/2}}$

A pesar de que en este caso es posible obtener la forma explícita de $a(t)$, la mayoría de veces solo se tiene una solución implícita de la forma $t(a)$. Otra forma muy útil de escribir esta solución es en términos del corrimiento al rojo $z$, el cual se relaciona con el factor de escala como [**?** ]

eq:Redshift z + 1 = $a_0\frac{}{aparaobtenerfinalmente}$

eq:EinsteindeSitterSolutionZ t(a) = $2\frac{}{3H_0(1+z)^{-3/2}}$

Esta solución se aproxima al comportamiento del universo real en la época de dominio de la materia, entre $70000$ y $5$ millones de años después del Big Bang [**?** ].

### Universo dominado por radiación

En este caso se asume un universo dominado completamente por radiación tal que $\Omega_0 = \Omega_r$, pero no necesariamente plano. La ecuaciones de Friedmann conducen entonces a la siguiente expresión

eq:RadiationUniverse $\mathrm{H}^2(t) = \frac{\dot{a}}{a}^2 = H_0^2(1-\Omega_r)\frac{1}{a^2} + \Omega_r\frac{1}{a^4}$

Integrando se obtiene la siguiente solución implícita para el factor de escala

eq:RadiationUniverseSolution t = $\begin{cases} H_0^{-1}(\Omega_r-1)^{-1}\Omega_r^{1/2} - a^2(1-\Omega_r) + \Omega_r{}^{1/2}\Omega_r \neq 1 H_0^{-1}a^2/2\Omega_r = 1 \end{cases}$

eq:RadiationUniverseSolutionZ t = $\begin{cases} H_0^{-1}(\Omega_r-1)^{-1}\Omega_r^{1/2} - (1+z)^{-2}(1-\Omega_r) + \Omega_r{}^{1/2}\Omega_r \neq 1 H_0^{-1}(1 \end{cases}$

Esta solución es útil como una aproximación a la época dominada por radiación, la cual sucedió desde la creación del universo hasta la recombinación, aproximadamente $380000$ años después del big bang, o equivalentemente en un corrimiento al rojo de $z = 1100$ [**?** ].

### Universo dominado por vacío

Este tipo de universo hipotético corresponde a uno donde solo existe energía asociada por vacío, o equivalentemente dominado por la constante cosmológica. Haciendo $\Omega_0 = \Omega_\Lambda$ en las ecuaciones de Friedmann se llega a

eq:VacuumUniverse $\mathrm{H}^2(t) = \frac{\dot{a}}{a}^2 = H_0^2(1-\Omega_\Lambda)\frac{1}{a^2} + \Omega_\Lambda$

Solucionando para $t(a)$

eq:VacuumUniverseSolution t = $1\frac{}{H_0^2\Omega_\Lambda^{1/2}\ln a\frac{\Omega_\Lambda}{1-\Omega_\Lambda}^{1/2} + 1 + \frac{\Omega_\Lambda}{1-\Omega_\Lambda}a^2{}^{1/2} yrespectoalcorrimientoalrojo}$

eq:VacuumUniverseSolutionZ t = 1 $\frac{}{H_0^2\Omega_\Lambda^{1/2}\ln\frac{1}{1+z}\frac{\Omega_\Lambda}{1-\Omega_\Lambda}^{1/2}+1+\frac{\Omega_\Lambda}{1-\Omega_\Lambda}\frac{1}{1+z}^{2\,1/2}}$

Lo interesante de esta solución es que solo es válida para valores del parámetro de densidad que satisfacen $0 < \Omega_\Lambda < 1$. Esto muestra que no es posible tener universos con geometría plana o hiperbólica cuando solo se tiene constante cosmológica. Otro aspecto igual de notable es la concavidad de la función $a(t)$ obtenida de 2.27 (ver figura 2.3), lo que muestra una expansión acelerada del universo. Esta característica solo es posible cuando hay un término no nulo de energía de vacío.

Finalmente y al igual que las anteriores soluciones, la expresión 2.27 puede ser usada como aproximación a la era de dominio de vacío del universo, la cual va desde el fin de la era de dominio de materia, $5$ millones de años después del Big Bang, hasta la actualidad [**?** ].

### Universo WMAP7

El conjunto de parámetros derivados del modelo cosmológico estándar han sido medidos en varias ocasiones por diferentes sondas espaciales (ver sección 1.3), entre estas destaca el WMAP. Los datos derivados después de siete años de esta sonda (WMAP7) son los adoptados en este trabajo [**?** ]. Entre los parámetros cosmológicos medidos se encuentra la constante de Hubble y los parámetros de densidad $\Omega_i$. Tomando los valores de la tabla **??** y por simplicidad asumiendo $\Omega_0 = 1$ es posible integrar las ecuaciones de Friedmann

eq:WMAPUniverse H$^2(t) = H_0^2\Omega_m\frac{1}{a^3} + \Omega_r\frac{1}{a^4} + \Omega_\Lambda parallegara$

eq:WMAPUniverse t = 1 $\frac{}{H_0\int_0^a \Omega_m\frac{1}{a'}+\Omega_r\frac{1}{a'^2}+\Omega_\Lambda a'^2{}^{-1/2}da'}$

Es posible obtener una solución analítica de esta integral en términos de funciones elípticas, pero por simplicidad se opta por realizar una integración numérica. En la figura 2.3 se muestra la solución para el universo WMAP7 y se compara con las demás cosmologías derivadas previamente.

Una característica interesante de la solución para un universo WMAP7 es el cambio de concavidad (ver curva negra en la figura 2.3) que indica que se pasa de un régimen dominado por materia/radiación a uno dominado por la expansión acelerada asociada a la energía del vacío. Otro aspecto importante es la predicción de la edad el universo. Teniendo en cuenta la normalización definida anteriormente

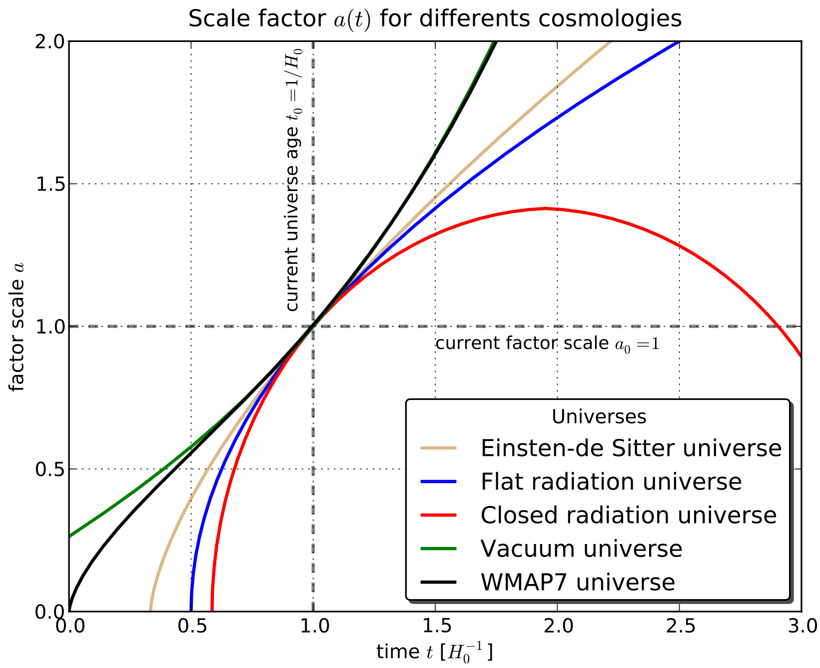


**Figure 2.3:** Diferentes soluciones de universo para las ecuaciones de Friedmann.

para el factor de escala $a(t_0) = a_0$, es directo ver que $t_0 = H_0^{-1} \approx 13.75 \times 10^9$ años. Otras cosmologías bajo la misma normalización predicen edades diferentes, desde mayores como el caso del universo de vacío, hasta mucho menores e inclusive un tiempo final (big crunch) como el universo con geometría cerrada con radiación.

## 2.2 Régimen Lineal de Formación de Estructuras

La sección pasada aborda el universo de manera completamente global, asumiendo válidas las condiciones de isotropía y homogeneidad. El universo real a pesar de tener ese comportamiento de manera asintótica en escalas muy grandes, en escalas menores es muy diferente, siendo completamente anisotrópico y altamente no homogéneo. Un ejemplo claro de esto último es la vida, una de las más altas no linealidades del universo, pasando luego por planetas, estrellas, galaxias, cúmulos galácticos, en orden de inhomogeneidad e anisotropía respectivamente.

La forma estándar de introducir estos efectos de estructura en el universo es asumir válidas las soluciones de Friedmann a grandes escalas y considerar las inhomogeneidades como perturbaciones del modelo. Pasando primero por el régimen lineal para el cual las perturbaciones en el campo de densidad son mucho menores que el valor medio de fondo ($\delta\rho \ll \rho_b$), hasta el régimen no lineal en que son comparables o mayores ($\delta\rho \sim \rho_b$) sección 2.3).

### 2.2.1 Aproximación Newtoniana

El marco de la evolución lineal puede ser abordado de dos formas. La primera es considerar un término perturbativo en el tensor momentum-energía $\delta T_{\mu\nu}$ y linealizar las ecuaciones de campo métrico 2.10 y resolver finalmente para $\delta R_{\mu\nu}$

eq:PerturbativeEinsteinEquations L( R$_{\mu\nu}, \delta R_{\mu\nu}) = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu}$

A pesar de que este método es rigurosamente más adecuado, tiene un incoveniente que lo hace considerablemente complicado de aplicar, los términos perturbativos no lo son necesariamente en todos los sistemas coordenados e incluso pueden llegar a ser del mismo orden o mayores que el término de fondo [**?** ].

El segundo método consiste en asumir perturbaciones con una dimensión comóvil menor al radio de Hubble ($r_\delta \ll r_H \sim cH_0^{-1}$) [4], y así despreciar los efectos relativistas debido a la curvatura de la espacio-tiempo. Una vez hecho esto es posible usar un esquema Newtoniano para el desarrollo de las perturbaciones en el universo de fondo, este esquema asume el contenido de materia como un fluido y está soportado por tres ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos. La primera es la ecuación de continuidad que representa la conservación de la masa del fluido

eq:ContinuityEquation $\rho t = -\rho \nabla \cdot u$

La segunda es la ecuación de Euler que caracteriza el campo de velocidades del fluido y físicamente representa la conservación del momentum

eq:EulerEquation ut = - $\nabla P \overline{\rho - \nabla\varphi}$

Y finalmente la ecuación de Poisson que es la forma no relativista de las ecuaciones de campo de Einstein y especifica el contenido de materia como fuentes de campo gravitacional.

eq:PoissonEquation $\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho$

[4] Un radio de Hubble $r_H$ es una unidad de longitud que define el orden de magnitud del tamaño del universo observable.

Para completar el marco Newtoniano de perturbaciones es necesario incluir en el anterior sistema de ecuaciones (2.32, 2.33 y 2.34) el efecto de la expansión del universo, para esto se realiza un cambio de coordenadas de distancia propia $x$ a distancia comóvil $r$

$$x = ar$$

esto implica directamente que

$$u = xt = \frac{\dot{a}}{a}x + v = \dot{a}r + v$$

Esta forma de reescribir $u$ permite separar la componente debida a la expansión del universo ($\dot{a}/ax$), o también denominada Ley de Hubble, de la componente debida al movimiento del fluido, denominado campo de velocidad peculiar y es definido como $v = a\dot{r}$.

Por conveniencia se descompone el campo de densidad del fluido en una parte media o de fondo y en una parte perturbativa, esto es $\rho = \bar{\rho} + \delta\rho = \bar{\rho}(1+\delta)$, donde $\delta$ se denomina parámetro de densidad y es adimensional. En el caso del potencial gravitacional $\varphi$ se define un nuevo campo dado por $\Phi = \phi + \ddot{a}ar^2/2$ [**?** ]. Con estas consideraciones se obtiene finalmente el conjunto final de ecuaciones de fluido para el marco Newtoninano

Ecuación de continuidad
$$\delta t = -\frac{1}{a}\nabla_r \cdot (1+\delta)v \tag{2.1}$$

Ecuación de Euler
$$vt + \frac{\dot{a}}{a}v + \frac{1}{a}v \cdot \nabla_r v = -\frac{\nabla_r P}{a\bar{\rho}(1+\delta)} - \frac{1}{a}\nabla_r \Phi \tag{2.2}$$

Ecuación de Poisson
$$\nabla_r^2 \Phi = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta \tag{2.3}$$

Hasta este punto no se ha hecho explícito el tipo de contenido materia-energía que es perturbado con las ecuaciones de fluido (e.g. radiación, materia o energía oscura). Siguiendo el procedimiento para derivar el anterior sistema puede notarse que no se ha hecho ninguna suposición a priori sobre comportamiento de las variables de estado respecto al factor de escala (ver tabla 2.1), por tanto son válidas para cualquiera de las especies [5] presentes en el universo. Teniendo en cuenta que las estructuras del universo actual son completamente de materia, solo se usará el marco Newtoniano para perturbaciones de esta especie.

Las cantidades físicas que deben ser determinadas a partir de las ecuaciones de fluido, sumadas a las ecuaciones de Friedmann son: el parámetro de densidad $\delta$, el campo de velocidad peculiar $v$, el potencial efectivo $\Phi$, la presión $P$ y finamente el factor de escala $a$. Es claro entonces que debe incluirse una ecuación extra para la completa autoconsistencia del problema, esto se logra a partir de una ecuación de estado para la presión. Por simplicidad se asume un modelo de gas monoatómico de la materia para el cual la ecuación estado satisface

eq:EOSEquation $\nabla_r P = c_s^2\bar{\rho}\nabla\delta + \frac{2}{3}\bar{T}\rho\nabla s donde$c$_s$ es la velocidad del sonido en el medio, $\overline{T}$ la temperatura de fondo y $s$ la entropía específica. Usando esta expresión junto con 2.35 y 2.36 se llega a la ecuación general para la evolución de las perturbaciones

eq:DeltaEvolution $^2\delta t^2 + 2\frac{\dot{a}}{a}\delta t = 4\pi G\bar{\rho}\delta + \frac{c_s^2}{2}\nabla^2\delta + \frac{2}{3}\frac{\overline{T}}{a^2}\nabla^2 s$

En el régimen lineal $\delta \ll 1$ los modos del campo de densidad evolucionan de forma independiente, permitiendo así desacoplar las perturbaciones de diferentes escalas de tamaño. Una forma bastante estándar de resolver este tipo de problemas es usando transformaciones de Fourier, esto debido a que en el espacio recíproco los modos son naturalmente desacoplados.

Puesto que se han asumido perturbaciones menores al radio de Hubble, el el volumen de universo observable puede considerarse finito, y por tanto la descomposición de los campos en coordenadas comóviles se hace discreta, obteniendo

$$\delta(r,t) = \sum_k \delta_k e^{ik\cdot x} \qquad v(r,t) = \sum_k v_k e^{ik\cdot x}$$

eq:FourierFields s(r, t) = $\sum_k s_k e^{ik\cdot x}$ $\quad \Phi(r,t) = \sum_k \Phi_k e^{ik\cdot x}$

[5]De acá en adelante cada uno de los tipos de materia-energía que contribuyen al tensor momentum-energía serán denominados *especies*.

Si se asumen perturbaciones adiabáticas, es decir, perturbaciones que no intercambian calor con el entorno (universo de fondo) mientras evolucionan, la entropía específica debe permanecer homogénea y por tanto $\nabla_r s = 0$ [**?** ]. Teniendo esto en cuenta y usando las anteriores descomposiciones de los campos se llega al siguiente conjunto de ecuaciones para la evolución de los modos de densidad y de velocidad peculiar de las perturbaciones

$$^2\delta_k t^2 + 2\frac{\dot{a}}{a}\delta_k t = 4\pi G\bar{\rho} - \frac{c_s^2}{a^2}k^2\delta_k \tag{2.4}$$

$$-k^2\Phi_k = 4\pi G\bar{\rho}a^2\delta_k \tag{2.5}$$

$$v_k = \frac{iak}{k^2}\delta_k t \tag{2.6}$$

### 2.2.2 Inestabilidad de Jeans

Las soluciones de la ecuación 2.41 para los modos del campo de densidad pueden ser clasificadas en dos familias, la primera son soluciones donde la amplitud de los modos oscilan en el tiempo y no colapsan. La segunda familia son aquellas donde los modos crecen en el tiempo, colapsando y volviéndose altamente no lineales ($\delta_k \gg 1$). Un ejemplo sencillo que ilustra lo anterior y puede ser generalizado consiste en considerar perturbaciones en un universo estático, es decir $\dot{a} = 0$. Teniendo en cuenta esto la ecuación 2.41 toma la forma

eq:JeansEquation $^2\delta_k t^2 - \omega_k^2\delta_k = 0, \quad a = \text{cte} dondesehadefinidolafrecuenciacaracter\acute{i}stica\omega_k$ como

eq:JeansFrequency $\omega_k^2 = \frac{c_s^2}{a^2}k^2 - 4\pi G\bar{\rho}$

La expresión 2.44 es denominada ecuación de Jeans y tiene la forma de una ecuación de ondas, con base en esto las soluciones pueden ser clasificadas según el valor de $\omega_k$, tal como se había mencionado inicialmente.

- Si $\omega_k^2 > 0$ el modo $\delta_k$ se comporta de forma oscilatoria, manteniendo su amplitud constante en el tiempo. Esta solución no es de interés para el contexto de formación de estructuras debido a que no es posible llegar tener colapso gravitacional.

- Si $\omega_k^2 < 0$ la amplitud del modo $\delta_k$ crece en el tiempo, permitiendo el colapso y la formación de estructuras no lineales.

La expresión 2.45 para $\omega_k$ junto con el anterior criterio para determinar el tipo de solución permite definir la longitud de Jeans $\lambda_J$

eq:JeansLength $\lambda_J = \frac{2\pi a^2}{k_J} = c_s \frac{\pi}{G\bar{\rho}}^{1/2}$

Esta longitud se interpreta como el mínimo tamaño en coordenadas comóviles que debe tener una perturbación embebida en un medio homogéneo y estático de densidad $\bar{\rho}$ para colapsar gravitacionalmente. En este mismo contexto es posible definir la masa de Jeans como la mínima masa necesaria para el colapso.

eq:JeansMass $\mathrm{M}_J = \frac{4}{3}\pi\lambda_J^3 \propto \frac{c_s^3}{G^{3/2}\bar{\rho}^{1/2}}$

A pesar de que lo derivado anteriormente solo es estrictamente válido para medios estáticos, la importancia de su consideración es debida a dos razones: la primera es el interés histórico, ya que el problema de perturbaciones que crecen en medios homogéneos surge inicialmente en astronomía estelar, donde es necesario calcular la masa mínima de una perturbación para su colapso y posterior formación de estrellas y sistemas planetarios. La segunda razón de debe a que la solución para medios estáticos sirve para evaluar el comportamiento asintótico y la validación de las soluciones generales para medios en expansión.

Antes de proseguir con las soluciones para medios en expansión es conveniente usar las definiciones de longitud y masa de Jeans como aproximaciones al caso general, para esto se usa la tabla de propiedades en función del factor de escala 2.1 y la definición de la velocidad del sonido en un medio [**?** ]

eq:SoundVelocity $\mathrm{c}_s^2 = P\rho_s$

- En el caso de perturbaciones de materia bariónica se usa la ecuación de estado de gas ideal asumiendo hidrógeno atómico y se obtiene la siguiente expresión para la masa de Jeans

  eq:MatterJeansMass $\mathrm{M}_J \approx 9.97 \times 10^5 \frac{a_{rc}}{a}^{3/2}$ $\mathrm{M}_\odot$

  Por conveniencia se ha introducido el factor de escala correspondiente a la época de recombinación [6]$a_{rc}$.

[6]Época en la que se desacopla la materia y la radiación, sucede en un corrimiento al rojo aproximadamente de $z_{rc} \approx 1000$.

- Para perturbaciones de radiación y materia relativista se usa la ecuación de estado de la presión de radiación del campo electromagnético [**?** ] $P = c^2\rho/3$ y la ley de Stefan-Boltzmann $\rho \propto T^4$, se obtiene la siguiente masa de Jeans

eq:RadiationJeansMass $\mathrm{M}_J \approx 8.39 \times 10^{27} a^3$ $\mathrm{M}_\odot$

Ambos casos pueden ser usados como aproximaciones a diferentes estadios del universo. Antes de la época de recombinación, cuando la materia y la radiación estaban acopladas vía efecto Compton, las perturbaciones solo colapsan si tienen una masa aproximada a la masa de Jeans 2.50. Después de esta época, cuando la materia evoluciona de forma independiente es válida la expresión 2.49.

En la figura 2.4 se ilustra el cambio de la masa de Jeans respecto al factor de escala del universo. Es interesante notar que antes de la época de recombinación la formación de estructuras poco masivas era impedida, lo que se debe al proceso de homogeneización producido por la difusión de fotones en el medio. Luego de esta época, cuando surgen las perturbaciones de materia bariónica, es posible la formación de estructuras menos masivas (del orden de cúmulos globulares), lo que está acorde con la teoría de formación jerárquica de estructuras a gran escala.

Con el anterior análisis se ha establecido la masa mínima necesaria para el colapso de una perturbación, a continuación se estudia la evolución de tales perturbaciones en medios en expansión. Para esto se hace uso de los modelos de universo derivados en la subsección 2.1.3 y la ecuación general de evolución de perturbaciones 2.41.

- **Universo Einstein - de Sitter**

  Recordando que para este tipo de universo $\Omega_m = \Omega_0 = 1$, usando la función de Hubble 2.19, la solución para el factor de escala 2.20 y la velocidad del sonido derivada de 2.48 y la ecuación de estado de gas ideal se llega a la siguiente expresión para la evolución de las perturbaciones

  eq:EinstendeSitterPerturbations $\delta_k(a) = \delta_{k,0} \frac{a}{a_{ref}}^1 donde \delta_{k,0}$ son las condiciones del campo en el tiempo de referencia $t_{ref}$. Otra solución posible es de la forma $\delta_k \propto a^{-3/2}$, pero debido a que es una solución que decae en el tiempo, no es de interés.

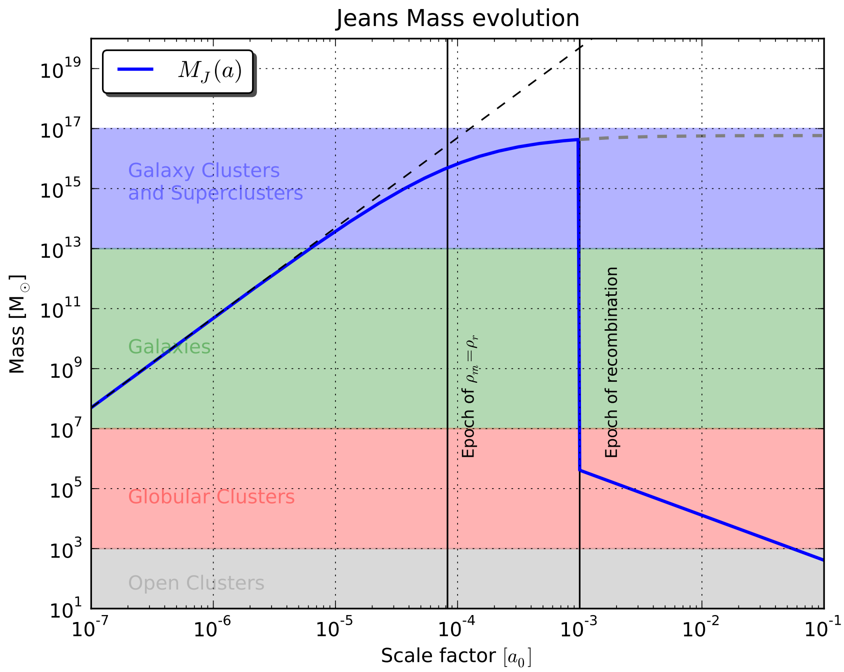


**Figure 2.4:** Evolución de la masa de Jeans para diferentes estadios del universo. En las regiones coloreadas se ilustra el rango típico de masa para varios tipos de estructuras, desde cúmulos estelares abiertos hasta cúmulos y supercúmulos de galaxias.

- **Universo dominado por radiación**

  Para el caso de perturbaciones en un universo dominado por radiación con $\Omega_r = \Omega_0 = 1$, usando 2.24 se llega a

  eq:RadiationPerturbations $\delta_k(a) = \delta_{k,0} \frac{a}{a_{ref}}^{1.22} dondedenuevo \delta_{k,0}$ representa los modos iniciales del campo y se ignoran soluciones divergentes.

- **Universo dominado por vacío**

  Para un universo de constante cosmológica $\Omega_\Lambda$ [7] se tiene el siguiente comportamiento para la evolución de los modos

eq:VacuumPerturbations $\delta_k(a) = \delta_{k,0} \frac{a}{a_{ref}}^{0.58}$

Graficando cada una de estas soluciones se obtiene la figura 2.5. Por simplicidad y para ilustrar mejor el comportamiento con el factor de escala se normaliza cada solución respecto a su valor en el tiempo de referencia $\delta_{k,0}$.

Las condiciones iniciales dependen del número de onda comóvil $k$ y deben ser determinadas a partir de las propiedades estadísticas del campo de densidad (ver subsección 2.2.3) y de medidas observacionales (por ejemplo la radiación cósmica de fondo).

[7] $\Omega_\Lambda < 1$ para garantizar convergencia de las soluciones de la ecuación de Friedmann (ver subsección 2.1.3).

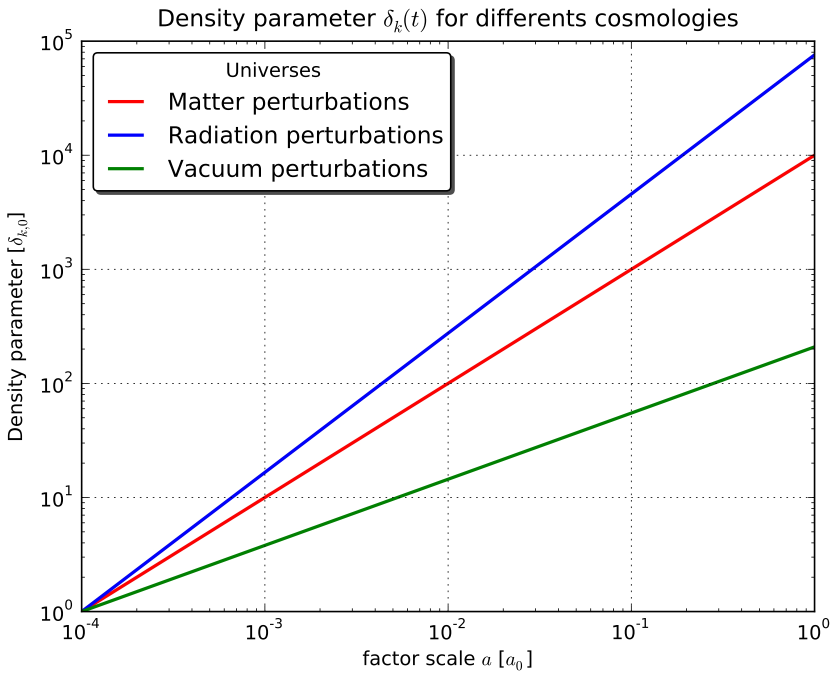


**Figure 2.5:** Evolución de los modos normales del campo de densidad. Por motivos ilustrativos se ha normalizado respecto a las condiciones iniciales.

## 2.2.3 Propiedades Estadísticas y Función de Transferencia

Una vez determinada la evolución de los modos de densidad es necesario compararlos con el universo real. Debido a la naturaleza continua de los campos es inviable tratar de determinar de forma observacional la distribución de densidad, más aún, teniendo en cuenta que la mayor parte de la materia es oscura, la cual solo puede ser inferida de forma indirecta, resulta también técnicamente imposible con los instrumentos actuales llevar a cabo esta empresa.

A pesar de lo anterior es posible aún medir las propiedades estadísticas de la distribución de densidad del universo y comparar con lo obtenido de forma teórica. Para esto se introduce el concepto de funcional de probabilidad para un campo continuo $P\delta(r,t)$, definido como la probabilidad de que un cierto campo físico tenga la forma funcional específica $\delta(r,t)$.

Una manera más conveniente, en términos computacionales, de aplicar el formalismo de funcional de probabilidad se logra discretizando el espacio en celdas de volumen $\Delta^3 r_i$, de tal forma que una cierta forma funcional del campo de densidad $\delta(r,t)$ sea equivalente a tener simultáneamente en cada celda $r_i$ del grid el valor $\delta_i = \delta(r_i)$, así el funcional de probabilidad se transforma en una función de probabilidad conjunta

eq:ProbabilityFunctional P $\delta(r,t) \quad \longrightarrow \quad \mathcal{P}_r(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_N; t)$

Teniendo en cuenta la descomposición de Fourier del campo de densidad $\delta(r,t)$ en las ecuaciones 2.40, es posible definir una función de probabilidad conjunta en el espacio recíproco $\mathcal{P}_k(\delta_{k_1}, \delta_{k_2}, \cdots, \delta_{k_N}; t)$ que caracteriza completamente la probabilidad de una distribución específica $\delta_k(t)$.

La principal motivación de trabajar en el espacio recíproco de debe a que es posible usar la aproximación de modos incorrelacionados en la cual se asume que cada modo evoluciona de forma independiente. En el espacio real no es posible realizar esto debido a que el largo alcance de la interacción gravitacional acopla fuertemente el campo densidad entre diferentes lugares. Una consecuencia directa de la anterior aproximación es expresar la función de probabilidad conjunta como el producto de $N$ distribuciones individuales [**?** ]

eq:ProbabilityJointFour P$_k(\delta_{k_1}, \delta_{k_2}, \cdots, \delta_{k_N}; t) = \prod_{k_i} g_{k_i}(\delta_{k_i}; t) donde$

eq:InverseFourierDelta $\delta_k = \int_V \delta(r) e^{-ik\cdot r} d^3 r \mathrm{g}_{k_i}$ la distribución individual de cada modo, $V = L^3$ el volumen de normalización y $k = (2\pi/L)n$, con $n$ un vector de componentes enteras que caracterizan el modo específico.

Asumiendo que las perturbaciones primordiales del campo de densidad se originaron por el proceso de inflación cósmica, es posible demostrar que la distribución de los modos normales $g_{k_i}$ es una función Gaussiana [**?** ]. Por conveniencia se descompone en coordenadas polares complejas el modo de densidad $\delta_k = r_k \exp i\phi_k$, obteniendo la siguiente distribución

eq:GaussianDistribution g$_k(r_k, \phi_k; t) = \frac{2(r_k dr_k)}{\sigma_k^2} \frac{d\phi_k}{2\pi} \exp -\frac{r_k^2}{\sigma_k^2}; \quad \sigma_k^2 = 2\mu_k^2 donde \mu_k^2$ es la varianza de la distribución y $\sigma_k^2$ se denomina espectro de potencia. Debido a la asunción de isotropía y homogeneidad para el universo de fondo, ambas cantidades solo dependen de la magnitud del vector de onda $|k| = k$. También es directo mostrar las siguientes propiedades de la distribución del campo

eq:Distribution Properties $\delta_k = 0; \quad |\delta_k|^2 = \sigma_k^2; \quad \delta_k \delta_p = 0 \quad \text{si} \quad k \neq p$

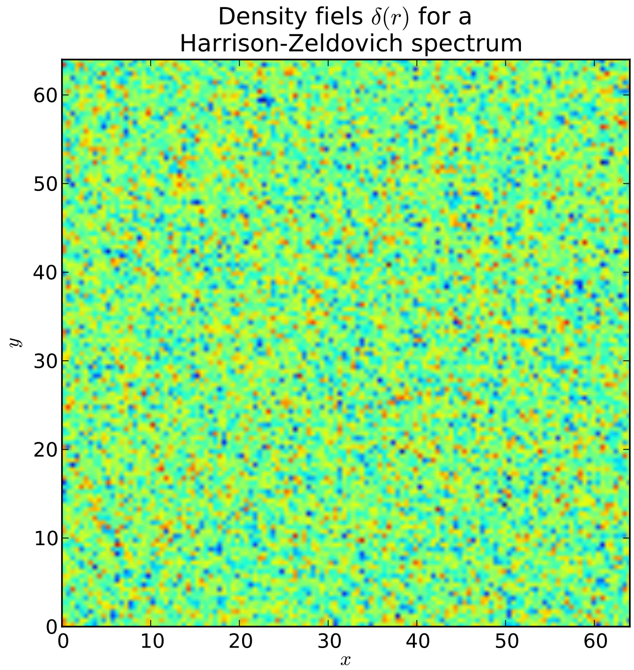


**Figure 2.6:** Distribución inicial de perturbaciones para el campo de contraste de densidad a partir de la distribución Gaussiana 2.57 y el espectro de potencia de Harrison-Zeldovich $\sigma_k \propto k$.

Una cantidad que puede ser evaluada directamente es la función de correlación de dos puntos $\xi(r) \equiv \delta(r'+r)\delta(r')$, definida como la probabilidad de tener una perturbación a una distancia $r$ de otra. Es una medida directa del grado de anisotropía y las propiedades de clustering de una distribución.

$$\begin{aligned} \xi(r) = \delta(r'+r)\delta(r') &= \frac{1}{V^2}\sum_{k,p}\delta_k\delta_p^* \exp ik\cdot(r'+r) - ip\cdot r' \\ &= \int \frac{V^{-1}}{(2\pi)^3}\sigma_k^2 e^{ik\cdot r} d^3k \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde en la última línea se ha realizado el límite al continuo. La expresión 2.59 muestra que $\sigma_k^2$ es la transformada de Fourier de la función de correlación, es decir

eq:2PCorrelationF $\mathrm{V}^{-1}\sigma_k^2 = \int \xi(r)e^{-ik\cdot r}d^3r$

La anterior relación junto con la distribución Gaussiana del campo muestra que tanto el espectro de potencia como la función de correlación contienen toda la información estadística del campo de densidad en el régimen lineal. En caso de asumir una distribución no-Gaussiana es necesario tener más momentos de la distribución, tal como la función de correlación de tres puntos, etc.

### Espectro de potencia de Harrison-Zeldovich

Una primera aproximación al espectro de potencia, y que puede ser demostrada con el modelo de inflación cósmica para las perturbaciones primigenias [**?** ], es una ley de potencia de la forma

eq:PowerSpectrumPower $\sigma_k^2 = Ak^{n_s} donde \mathrm{A} es un factor de normalización y \mathrm{n} es el índice espectral. En$
1 se denomina espectro de potencia de Harrison-Zeldovich y es invariante de escala [8].

Para determinar el factor de normalización es común aplicar un filtro a los modos normales que contribuyen al campo de densidad, con esto la función de correlación queda

eq:Filter2PCorrelation $\xi(r;R) = \int \frac{V^{-1}}{(2\pi)^3}\sigma_k^2 e^{ik\cdot r}\tilde{W}(k;R)d^3k donde \mathrm{R} determina la escala máxima a part$
$\delta^2 = \xi(0;R)$, este parámetro puede ser determinado observacionalmente a partir de surveys de galaxias y de la radiación cósmica de fondo, en especial el valor

[8] El valor determinado observacionalmente es muy cercano $n_s = 0.963$ (ver tabla **??**).

estándar definido por el WMAP7 es $\sigma_8^2 = \xi(0; R = 8\ \mathrm{Mpc}/h) = 0.801$ (ver tabla **??**), con esto se llega a

eq:Normalization $\sigma_8^2 = A \int \frac{V^{-1}}{(2\pi)^3} k^{n_s} \tilde{W}(k; R = 8\ \mathrm{Mpc}/h) d^3 k deestaforma, apartirdelosvalore$

y $\sigma_8^2$, es posible encontrar la normalización del espectro de potencia.

### Función de Transferencia

Finalmente para el régimen lineal se introduce el concepto de función de transferencia $T_k(t)$, definida a partir de la siguiente expresión

eq:TransferFunction $\delta_k(t) = T_k(t)\delta_k(t_i) donde$t$_i$ es un tiempo de referencia, normalmente la época de recombinación en el caso de perturbaciones de materia.

De la expresión 2.64 se infiere que la función de transferencia contiene toda la información dinámica de las perturbaciones, más aún, de la definición 2.58 para el espectro de potencia se tiene

eq:PkTransferFunction $\sigma_k(t) = \sigma_k(t_i)|T_k(t)|^2 = Ak^{n_s}|T_k(t)|^2 dondesehaasumidounespectrode$
$Zeldovichparaeltiempodereferencia. Conestofinalmenteseconcluyequelafuncióndetransfere$

El cálculo de la función de transferencia es generalmente complejo y requiere realizarse numéricamente [9], además depende de las propiedades específicas de la especie asociada a la perturbación. Como un ejemplo, en el caso de perturbaciones de materia oscura debe ser especificado el tipo de partículas que la componen, ya sean partículas livianas relativistas (materia oscura caliente) o partículas pesadas no relativistas (materia oscura fría). Entre ambos casos la función de transferencia y el espectro procesado 2.65 difieren bastante debido a las diferentes ecuaciones de estado asociadas a cada tipo.

En el caso de perturbaciones adiabáticas (isoentrópicas) de materia oscura fría puede usarse la siguiente aproximación analítica para la época actual [**?** ]

eq:TransferFunctionCDM T$_k$ $\approx \frac{\ln 1+2.34q}{2.34q} 1 + 3.89q + 1.61q^2 + 5.46q^3 + 6.71q^{4^{-1/4}} donde$q $\equiv k/\Omega_0 h^2\ \mathrm{Mpc}^{-1}$.

En la siguiente figura se ilustra la función de transferencia 2.66 junto con el espectro de potencia procesado

[9] `CMBFAST` es un software bastante conocido para este propósito `http://lambda.gsfc.nasa.gov/toolbox/tb_cmbfast_ov.cfm`

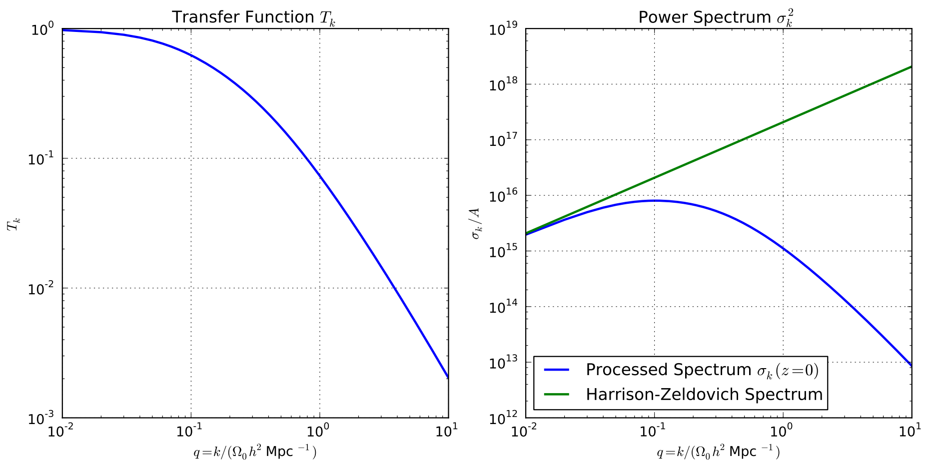


**Figure 2.7:** Función de transferencia para materia oscura fría en la época actual [**?** ] (Izquierda). Comparación entre el espectro de potencia inicial, Harrison-Zeldovich, y el espectro de potencia procesado (derecha).

De todo el formalismo desarrollado en esta sección se concluye que el objetivo final para la caracterización del régimen lineal es obtener la función de transferencia, ya que esta determina completamente la evolución del universo en épocas tempranas donde hay alta homogeneidad e isotropía en todas las escalas.

## 2.3 Régimen No Lineal de Formación de Estructuras

En el régimen lineal se describe el proceso de formación de estructuras como perturbaciones en un universo de fondo homogéneo e isotrópico. Cuando las perturbaciones crecen tal que $\delta \gtrsim 1$ la autogravedad de los modos acopla fuertemente el campo de forma local y e invalida la aproximación lineal. Los procesos físicos asociados al régimen no lineal son altamente complejos e inclusive algunos no son bien entendidos en la actualidad, esto hace que solo sea posible abordar satisfactoriamente el problema a través de simulaciones numéricas (ver capítulo 3).

La figura 2.8 corresponde a una simulación numérica de materia oscura para el universo en régimen no lineal. En esta pueden ser apreciadas algunas propiedades emergentes tales como la anisotropía e inhomogeneidad a escalas pequeñas ($\sim$ Mpc), la formación y clustering de estructuras altamente no lineales y la aparición

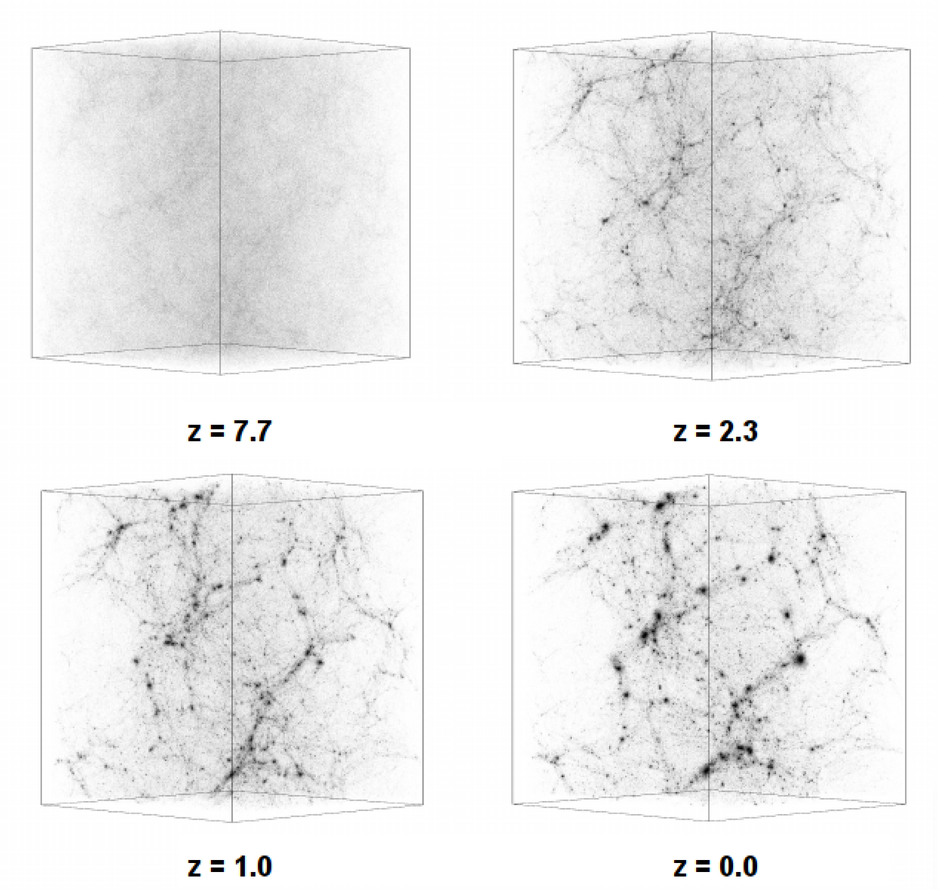


**Figure 2.8:** Evolución de una simulación numérica de materia oscura en una caja de 40 Mpc$/h$, iniciando en un estado de alta homogeneidad (arriba-izquierda) hasta la época actual de estructuras altamente no lineales (abajo-derecha). Tomado de `http://www.astro.utu.fi/research/CosmoS/lss/lss_p1.shtml`

de un patrón de red a grandes escalas (red cósmica).

### 2.3.1 Aproximación de Zeldovich

A pesar de la complejidad del régimen no lineal, cuando las perturbaciones en el campo de densidad aún no son mucho mayores que el valor de fondo puede realizarse una desarrollo analítico de la evolución, esto es conocido como aproximación de Zeldovich y fue desarrollada en 1970 por Yakov Zeldovich en [? ]. Para formular esta aproximación es conveniente expresar de nuevo el campo de contraste de densidad $\delta(r)$ en términos de coordenadas comóviles y no respecto a los modos normales de Fourier, esto debido a que en este régimen los modos no son independientes y usarlos no simplifica el tratamiento, a diferencia del régimen lineal.

Usando el marco de referencia Lagrangiano de una cierta porción de fluido o distribución de materia, su trayectoria $r_f$ puede ser descrita mediante la siguiente expresión

eq:ZeldovichTrayectory r$_f(t,q) = a(t)r = a(t)q + \Psi(q,t) donde$r$eslaposicióncomóvildelaporcióndee$ se denomina función de desplazamiento y da cuenta de las perturbaciones en el medio.

A partir de la ecuación de evolución del campo de contraste de densidad 2.39 es posible demostrar que el campo de desplazamiento $\Psi(q,t)$ satisface [? ]

eq:Displacement $^2\Psi t^2 + 2H\Psi t = \frac{3}{2}H^2\Psi deestoseobtienefinalmente$

eq:DisplacementForm $\Psi = \frac{3}{2}H_0^{-2}a(t)\nabla\Phi donde\Phi$ es el potencial gravitacional efectivo asociado al campo de densidad por medio de la ecuación de Poisson 2.37.

Expresando la conservación de la masa en términos de las coordenadas comóviles y las coordenadas Lagrangianas iniciales, se debe satisfacer

eq:MassConservation $\rho(r,t)d^3r = \bar{\rho}(t)d^3q calculandoahorael Jacobiano \partial q_i/\partial r_j$ de la transformación $r \to q$, el campo de densidad perturbado pude se escrito como [? ]

eq:PerturbedFieldDensity $\rho(r,t) = \frac{\bar{\rho}(t)}{1-a(t)\lambda_1(q)1-a(t)\lambda_2(q)1-a(t)\lambda_3(q)} donde$-$\lambda_i(q)$ son los autovalores del Jacobiano y están ordenados de tal forma que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$. Cada uno de estos autovalores pueden ser interpretados de forma geométrica como un indicador del colapso o expansión de una porción de fluido en la dirección correspondiente al autovector respectivo, así por ejemplo si $\lambda_i > 0$, implica que el campo de densidad está colapsando localmente en la dirección del autovector $u_i$, mientras que $\lambda_i < 0$ implica una expansión en la misma dirección.

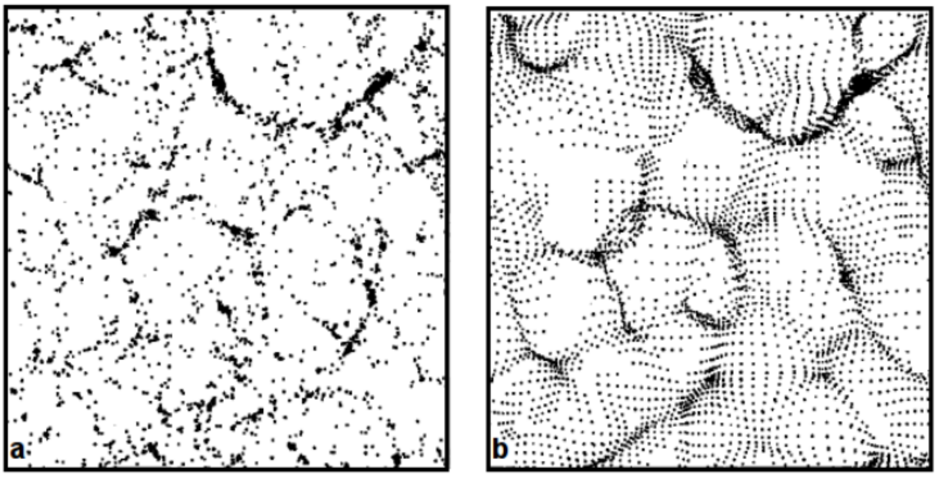


**Figure 2.9:** Comparación de la evolución en régimen no lineal entre una simulación de N-cuerpos (a), y la aproximación de Zeldovich (b). En ambos casos se usan las mismas condiciones iniciales. Tomado de [**?** ].

Finalmente en la figura 2.9 se muestra una comparación entre una simulación numérica de N-cuerpos y la aproximación de Zeldovich, puede notarse una alta semejanza visual en las estructuras obtenidas en los dos casos al final de la evolución, demostrando la alta precisión del método. En la sección 3.3 se hace uso de la idea general planteada en la aproximación de Zeldovich respecto a los autovalores del Jacobiano de la transformación, para la construcción de esquemas de clasificación del entorno cosmológico a partir de los autovalores de otras cantidades físicas más adecuadas para la descripción de la dinámica local del campo de densidad, tales como el tensor de marea o el tensor de velocidad peculiar.

*"Todos los efectos de la Naturaleza son sólo la consecuencia matemática de un pequeño número de leyes inmutables"*

Pierre Simon Laplace

CHAPTER

# 3

# Métodos Computacionales en Cosmología

En los últimos años la física computacional ha adquirido un papel importante en física, permitiendo modelar diversos sistemas complejos sin necesidad de recurrir a la experimentación u observación. Entre los métodos abarcados por la física computacional destaca el problema de N-cuerpos debido a que muchos fenómenos requieren el cómputo de interacciones entre una gran cantidad de cuerpos. Algunos ejemplos muy representativos son la modelación de sistemas moleculares, física de plasmas y especialmente problemas gravitacionales en astrofísica. El desarrollo de los métodos específicos para la solución de este tipo de problemas antecede la aparición de los ordenadores y sistemas de cómputo en general, aún así, el desarrollo de estos potenció enormemente esta área al punto de ser la física computacional una nueva rama de la física.

En este capítulo se desarrollan métodos específicos para la solución de problemas gravitacionales en astrofísica, en especial para la simulación del universo a gran escala en régimen no lineal, partiendo de algoritmos básicos para el cómputo de fuerzas, métodos de detección de halos, hasta esquemas de clasificación para el entorno cosmológico.

## 3.1 Simulaciones de N-Cuerpos

En general, el tipo de fenómenos más promisorios para ser modelados con simulaciones N-cuerpos son aquellos donde las interacciones son fuertemente ligadas entre las partículas, tales como fuerzas de largo alcance o correlaciones no locales. En la figura 3.1 se ilustra un conjunto de partículas puntuales que interactúan mutuamente bajo alguna campo de fuerza $f$, estas condiciones conforman la formulación clásica del problema de N-cuerpo.

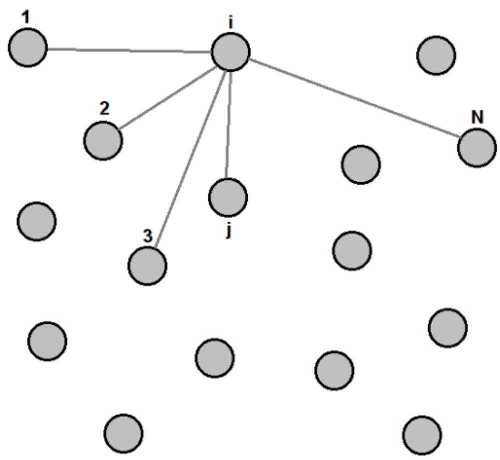


**Figure 3.1:** Formulación del problema de N-cuerpos.

Asumiendo interacciones que dependen de la posición[1], la ecuación de movimiento para la partícula $i$ de la figura 3.1 queda [**?** ] [**?** ]

eq:MovementEquation $_i = \sum_{j=1}^{N} f(r_i, r_j) = -\nabla\phi(r_i) \quad i = 1, 2, \cdots, N dondesehaintroducidolafu$

Para el caso de interacción gravitacional el potencia adquiere la forma

eq:GravitationalPotential $\phi(r) = -\sum_{j=1}^{N} \frac{Gm_j}{|r-r_j|}$

La solución se obtiene a partir del conjunto $\{r_1(t), \cdots, r_N(t)\}$ determinado a partir de las ecuaciones 3.1, para lo cual es necesario implementar aproximaciones numéricas debido a la no solubilidad analítica del problema.

[1] En el problema generalizado las interacciones pueden depender de otros parámetros tales como velocidad o grados de libertan intrínsecos como espín.

### 3.1.1 Método P-P

La primera aproximación para la solución de las ecuaciones de movimiento 3.1 es computar todas las $N-1$ interacciones de la $i$-ésima partícula con todas las demás en un cierto tiempo $t$ y esto para $i = 1, 2, \cdots N$, luego a partir de un esquema numérico de integración se calculan las posiciones en un tiempo posterior discretizado $t + \Delta t$ y así hasta un tiempo máximo $t_{max}$ deseado. Este método se denomina P-P (Partícula a Partícula) y es uno de los tres métodos estándar desarrollados para la solución del problema de N-cuerpos.

Cuando las interacciones poseen singularidades, tal como los potenciales Coulombianos de la electrostática y la gravitación (ecuación 3.2), la integración de las ecuaciones de movimiento se hace sensible a encuentro cercanos entre partículas y por tanto debe aumentarse la resolución en la discretización temporal, llevando a un aumento considerable en el tiempo de cómputo. Una solución común es introducir un parámetro de suavizado que elimine estas singularidades, aunque a costa de una pérdida en la precisión de la solución. Para el potencial gravitacional 3.2 queda

eq:SoftPotential $\phi_s(r) = -\sum_{j=1}^{N} \frac{Gm_j}{|r-r_j|+\epsilon_j^2} donde \epsilon_j$ es el parámetro de suavizado y puede interpretarse como una medida de la dimensión física real de la partícula.

A pesar de la alta precisión lograda con este método, el tiempo de cómputo escala como $t_{comp} \propto N^2$, lo que lo hace altamente inviable para un gran número de partículas (generalmente $N \gtrsim 10^4 - 10^5$ [**?** ]). Para la simulación de sistemas planetarios, órbitas de cuerpos menores y cúmulos estelares este método resulta ser muy adecuado, pero para problemas cosmológicos y de galaxias, donde el número de partículas debe ser el máximo posible para poder reproducir la verdadera naturaleza continua de las distribuciones de materia, es necesario desarrollar métodos menos costosos computacionalmente.

### 3.1.2 Método PM

Un segundo esquema para el cómputo del problema de N-cuerpos es el método PM[1][**?** ], este consiste en determinar una distribución continua del campo de densidad a partir de las masas y posiciones de las partículas, para esto se divide el

[1]PM viene de la siglas en inglés *Particle Mesh* y una traducción adecuada sería malla de partículas.

espacio de la simulación en una malla de $M \times M \times M$ celdas y se hace un conteo del número de partículas por celda para asociar un valor específico de masa y por tanto de densidad. Un esquema ilustrativo es mostrado en la figura 3.2

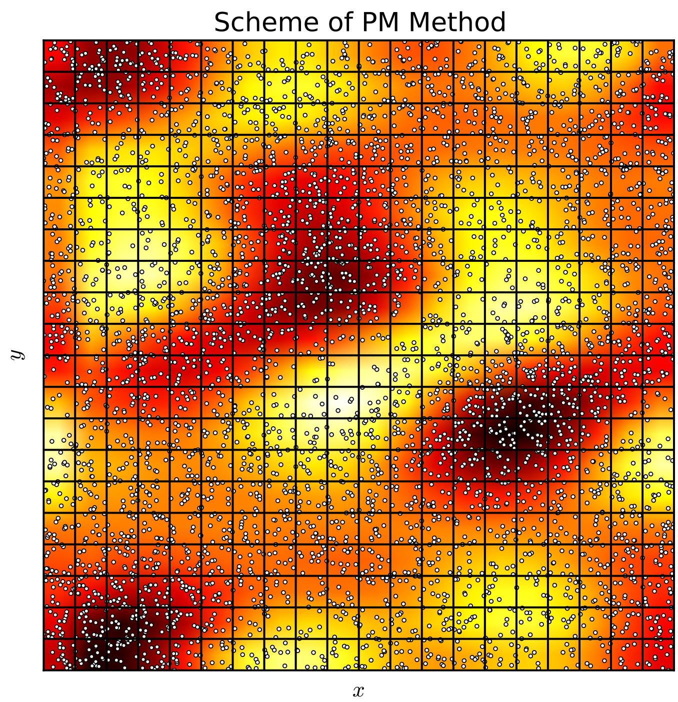


**Figure 3.2:** Diagrama ilustrativo del método $P^3M$. El mapa dibujado sobre la distribución de partículas corresponde a la densidad asociada a cada celda de la malla. Las zonas oscuras corresponden a regiones de sobredensidad mientras las zonas blancas a regiones de menor densidad, acorde a la cantidad de partículas por celda y sus masas individuales.

El método puede ser resumido en los siguientes pasos

1. A partir de la malla establecida sobre la simulación es calculado un campo de densidad continuo $\rho(r)$ interpolado entre cada celda.

2. Con el campo de densidad se procede a computar el potencial en la ecuación de movimiento 3.1 a través de la ecuación de Poisson

   eq:Poisson $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$

   Para esto generalmente son usados esquemas de integración basados en la transformada de Fourier, tales como la transformada rápida de Fourier (FFT por su siglas en inglés).

3. Usando el campo de potencial anterior se calcula la posición de cada partícula en el tiempo siguiente $t+\Delta t$, y se repite el esquema completo hasta un tiempo máximo deseado.

Este método es menos preciso que el método de suma directa, aún así es posible demostrar que el tiempo de cómputo escala como $t_{comp} \propto N + M \log M$, con un comportamiento asintótico de $t_{comp} \propto N$ para altas resoluciones $M$ de la malla y $t_{comp} \propto N$ para bajas resoluciones [**?** ]. En todos los casos la eficiencia es mucho mayor que el método PM 3.1.2 cuando el número de partículas es relativamente grande $N \ll 10^4 - 10^5$, lo que hace a este método bastante competente para problemas de muchas partículas.

Existen algunas situaciones patológicas para las cuales el método presenta dificultades [**?** ]

- Distribuciones de partículas altamente inhomogéneas.
- Sistemas fuertemente correlacionados.
- Sistemas con geometrías no triviales.

Debido a las altas inhomogeneidades y fuertes correlaciones locales por acople gravitacional entre de los diferentes modos en el universo tardío ($z \gtrsim 8$), este método resulta poco preciso para la simulación del régimen no lineal.

### 3.1.3 Método P$^3$M

El último los tres esquemas estándar para simulaciones de N-Cuerpos es el método P$^3$M (PP + PM) [**?** ], este es una combinación de los métodos anteriores, haciendo uso de las ventajas de cada uno.

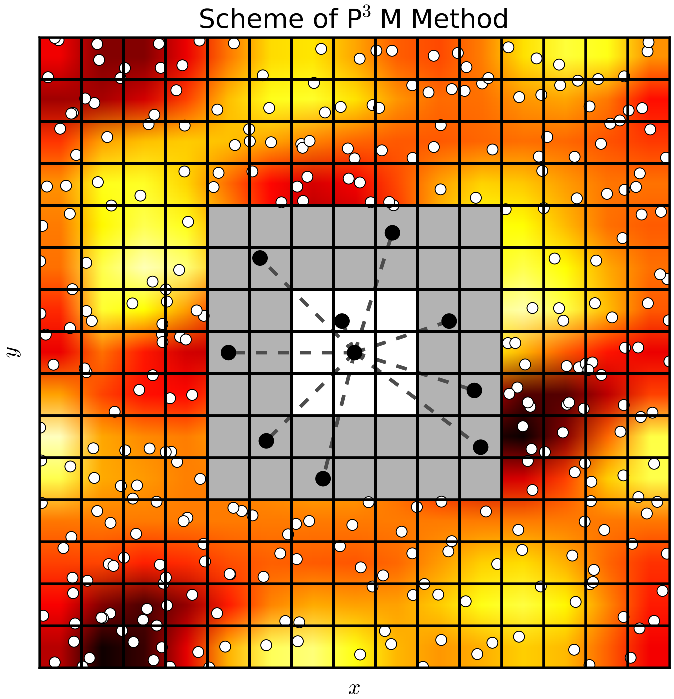


**Figure 3.3:** Diagrama ilustrativo del método P$^3$M. Para la partícula de referencia en el centro la interacción con partículas lejanas es calculada con el método PM, mientras que para las partículas cercanas en la región gris y blanca es usado el método de suma directa PP.

En la figura 3.3 se ilustra el método P$^3$M, en cada paso de integración del sistema se hace un grid jerárquico respecto a cada partícula, las jerarquías son definidas de acuerdo a la distancias relativas y determinan la aproximación usada para el cómputo de la ecuación de movimiento. Para partículas cercanas (primera jerarquía) se usa el método de suma directa, lo que permite dar cuenta de correlaciones locales y dar un tratamiento adecuado a zonas con altas inhomogeneidades. En las siguientes jerarquías se descompone el potencial en sus componentes multipolares, tomando las contribuciones de más alto orden acorde al nivel de la jerarquía, así por ejemplo la segunda jerarquía tiene en cuenta las contribuciones dipolares, la tercera las cuadrupolares, etc. Finalmente para la última jerarquía se usa el esquema PM, interpolando el campo de densidad y resolviendo la ecuación de Poisson 3.4 para el potencial.

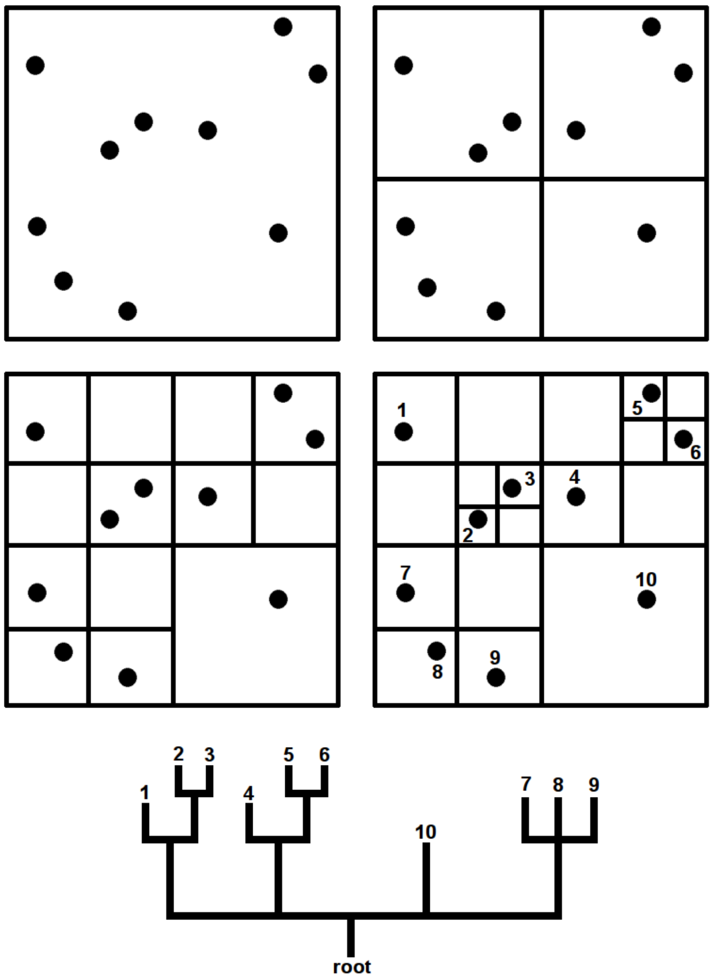


**Figure 3.4:** Ejemplo de construcción de un código de árbol para una simulación de N-cuerpos. En los paneles superiores se muestran iteraciones del método para un problema 2D. En la parte inferior se ilustra el árbol construido con cada partícula de la simulación.

Uno de los principales inconvenientes de este método radica en la construcción de la estructura jerárquica para la evaluación de las interacciones. El esquema original propuesto simultáneamente por [? ] [? ] y [? ] presenta inconsistencias debido a la falta de fundamentación física en la construcción de la estructura jerárquica [? ].

Uno de los métodos propuestos para la construcción de la estructura jerárquica y que carece en gran medida de las inconsistencias mencionados se denomina código de árbol octante y fue inicialmente desarrollado por [? ]. En este algorítmo el espacio de la simulación es embebido en una celda cúbica denominada raíz (*root*) y luego se divide en 8 regiones de igual tamaño denominadas octantes, estas componen la primera jerarquía del árbol. El método se repite de forma recursiva hasta obtener a lo sumo una partícula por celda, construyendo de esta forma un conjunto de jerarquías que determinan las vecindades de todas las partículas. En la figura 3.4 se ilustra las iteraciones requeridas para la construcción del árbol en una simulación (por simplicidad se ha tomado en dos dimensiones) y en la parte inferior de la misma figura se muestra esquemáticamente la estructura del árbol. De esta forma es posible computar por ejemplo la interacción entre las partículas 7, 8 y 9 con suma directa, por ser vecinas próximas, mientras que su interacción con las demás partículas, pertenecientes a otras ramas, por medio de PM.

## 3.2 Tipos de Simulación

Usando los métodos descritos en la anterior subsección es posible realizar simulaciones del universo en régimen no lineal y estudiar su comportamiento de forma numérica. Debido a que en régimen no lineal los procesos astrofísicos de grandes escalas son dominados principalmente por materia oscura, es habitual no considerar la contribución de las componentes de radiación y materia bariónica, además de que los procesos físicos que involucran estás componentes aumentarían considerablemente los tiempos de cómputo. Este tipo de simulaciones son denominadas *simulaciones de materia oscura*.

En esta subsección son presentadas las simulaciones de materia oscura que son usadas, además son clasificadas acorde al criterio adoptado para la elección de las condiciones iniciales. Estas pueden ser no restringidas cuando las condiciones iniciales son escogidas de forma completamente aleatoria, o restringidas cuando son escogidas de tal forma que la simulación satisfaga alguna condición impuesta a priori, tal como la reproducción del universo local en una escala de algunas decenas de Mpc$/h$.

### 3.2.1 Simulaciones No Restringidas (Bolshoi)

Puesto que la evolución del universo en régimen lineal es conocida a través de la función de transferencia (ver sección 2.2), las simulaciones cosmológicas solo son usadas para el estudio del régimen no lineal, aún así es necesario fijar un conjunto de condiciones iniciales para la integración del sistema. Generalmente estas condiciones son determinadas a partir del cómputo del régimen lineal, para esto a su vez es requerido otro conjunto de condiciones iniciales primordiales para el campo de densidad homogéneo de fondo, es debido a esto que estas últimas condiciones serán referidas simplemente como condiciones iniciales.

Como ha sido mencionado en la subsección 2.2.3, las propiedades estadísticas del campo de densidad inicial corresponden a una distribución Gaussiana de los modos de Fourier con un espectro de potencia de Harrison-Zeldovich, acorde con el modelo inflacionario y observaciones cosmológicas (subsección 1.3). Los modos del campo de densidad $\delta_k = r_k e^{i\phi_k}$ siguen entonces las distribuciones determinadas en la ecuación 2.57

eq:RadialModeDistribution $\mathrm{P}_r(r_k)dr_k = \exp -\frac{r_k^2}{\sigma_k^2}\frac{2r_k dr_k}{\sigma_k^2}$

eq:PhiModeDistribution $\mathrm{P}_\phi(\phi_k)d\phi_k = \frac{1}{2\pi}d\phi_k$

El carácter no restringido de este tipo de simulaciones radica en la elección aleatoria de las fases $\phi_k$ acorde a la distribución 3.6, sin ningún tipo de restricción observacional sobre el resultado final de la simulación.

***Bolshoi*** es una simulación cosmológica del universo a gran escala con condiciones iniciales no restringidas, la página oficial del proyecto es `http://hipacc.ucsc.edu/Bolshoi/`.

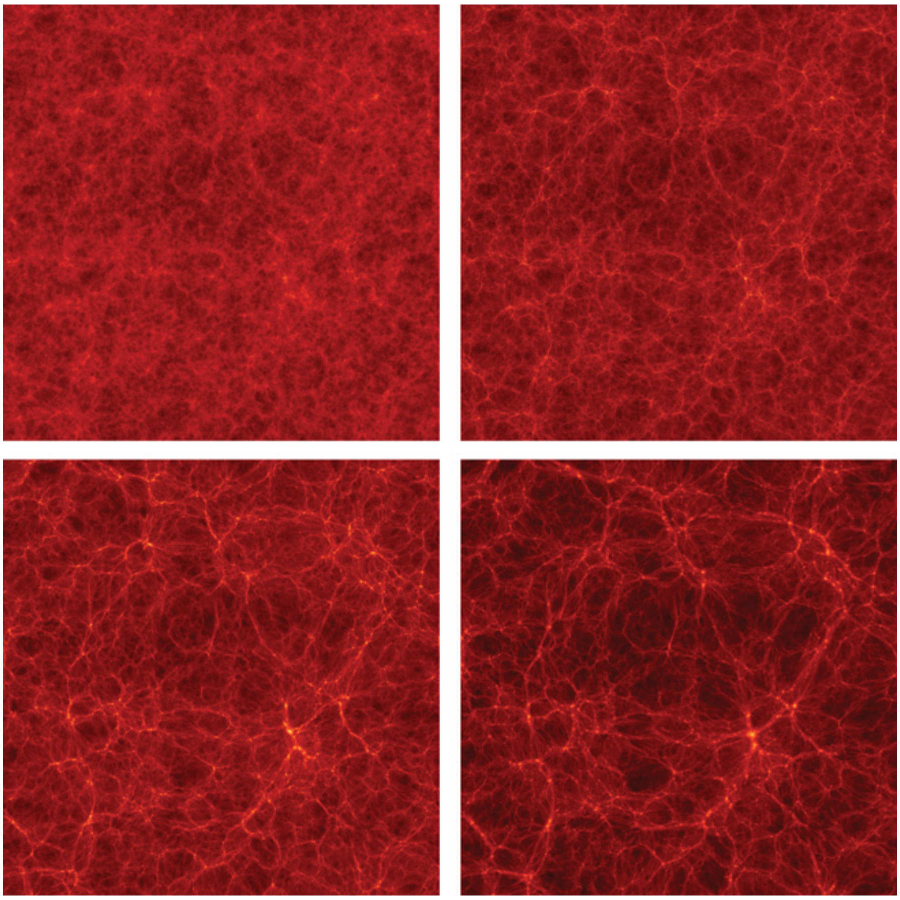

**Figure 3.5:** Evolución de la simulación Bolshoi. Se ilustran el campo de densidad de una región rectangular de 16 Mpc/$h$ de grosor y 250 Mpc/$h$ de lado para diferentes estadios de evolución. $z = 9.5$ (superior izquierda), $z = 3$ (superior derecha), $z = 1$ (inferior izquierda) y $z = 0$ (inferior derecha). Tomado de `http://spectrum.ieee.org/aerospace/astrophysics/the-cosmological-supercomputer`

Debido a su mayor tamaño comóvil comparada con las simulaciones restringidas (un cubo de $250$ Mpc/$h$ de lado), esta es usada para obtener estadística más fina en los resultados del capítulo 4. El modelo cosmológico usado para esta simulación corresponde al WMAP7 (ver tabla **??**), el número de partículas es de $2048^3$, lo que implica una masa promedio por partícula de $1.35 \times 10^8 h^{-1}$ M$_\odot$. Una descripción técnica más detallada de la simulación puede ser consultada en [**?** ].

### 3.2.2 Simulaciones Restringidas (CLUES)

Como fue mencionado en el capítulo 2, la forma estándar de comparar el resultado de simulaciones cosmológicas con observaciones es a través de las propiedades estadísticas de las distribuciones, tales como funciones de correlación de dos puntos o espectros de potencia. A pesar de esto, algunos estudios requieren una descripción detalla del universo local en un contexto cosmológico. Debido a dificultades técnicas como la medida directa de la distribución de materia oscura o la falta de datos en altos corrimientos al rojo, es necesario recurrir a simulaciones cosmológicas que reproduzcan el universo local. Uno de los primeros trabajos dirigidos a la reproducción específica del entorno local se debe a [**?** ]. En este se intenta reproducir las principales estructuras observadas en el universo local, como el grupo local, el Supercúmulo Local y el cúmulo de Virgo.

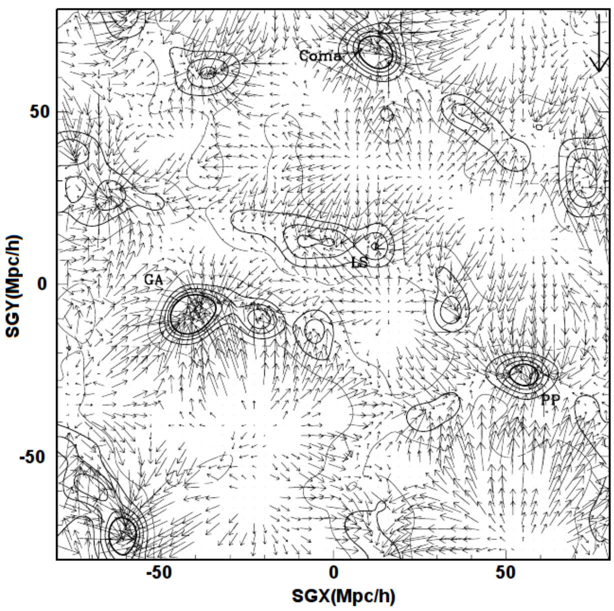


**Figure 3.6:** Campo de densidad y campo de velocidad peculiar inicial construidos a partir de restricciones para la reproducción del entorno local en una escala de 160 $h^{-1}$Mpc. Algunas estructuras identificadas son: *Coma*, cúmulo de coma, *PP*, supercúmulo de Perseus-Pisces, *LS*, supercúmulo local, *GA*, gran atractor. La flecha superior derecha indica la escala del campo de velocidad peculiar en 1000 km/s. Tomado de [**?** ].

El método propuesto en [**?** ] y [**?** ] consiste en la construcción el campo de densidad y de velocidad peculiar inicial a partir de surveys de velocidades radiales y de corrimientos al rojo (ver sección 1.3). Para el tratamiento y reducción del ruido y errores de medida en los datos, se usa un método bayesiano de filtros de Wiener (para más detalles técnicos ver [**?** ]). A pequeñas escalas este método es limitado debido a que los filtros aplicados suprimen algunos modos en el espectro de potencia inicial y por tanto deben ser generados de forma aleatoria acorde con la distribución Gaussiana 2.57 para garantizar consistencia con el modelo cosmológico estándar. En la figura 3.6 se ilustran las condiciones iniciales obtenidas con este método para el universo local en una escala de $160\ h^{-1}$Mpc.

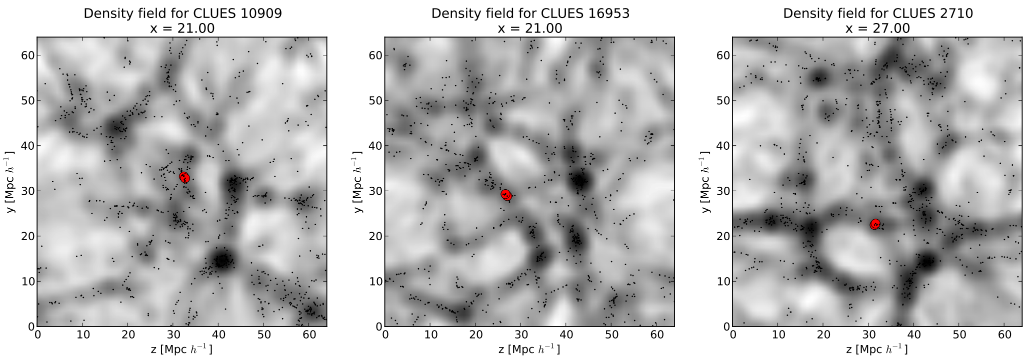


**Figure 3.7:** Tres simulaciones restringidas del proyecto CLUES en las se identifican sistemas tipo grupo local. Se ilustra el campo de densidad de cada simulación junto con los halos de materia oscura (puntos negros), y los grupos locales encontrados (puntos rojos).

**CLUES** (Constrained Local UniversE Simulations) es un proyecto orientado a la reproducción del universo local con la mejor resolución en la actualidad. La página oficial es `http://www.clues-project.org`. En estas simulaciones las condiciones iniciales son construidas con el algoritmo Hoffman-Ribak [**?** ] para la reproducción de un volumen comóvil de $(64\ h^{-1}\mathrm{Mpc})^3$. Debido a la no restricción en escalas pequeñas ($\sim 5\ h^{-1}$Mpc) es necesario realizar $200$ diferentes simulaciones de las cuales $3$ resultan satisfactorias respecto a las restricciones observacionales (ver figura 3.7). Para la evolución se usa el paquete `GADGET2`[1] con $1024^3$ partículas de materia oscura y una cosmología consistente con el WMAP7 (ver tabla **??**). Más detalles técnicos del proyecto pueden ser consultados en [**?** ].

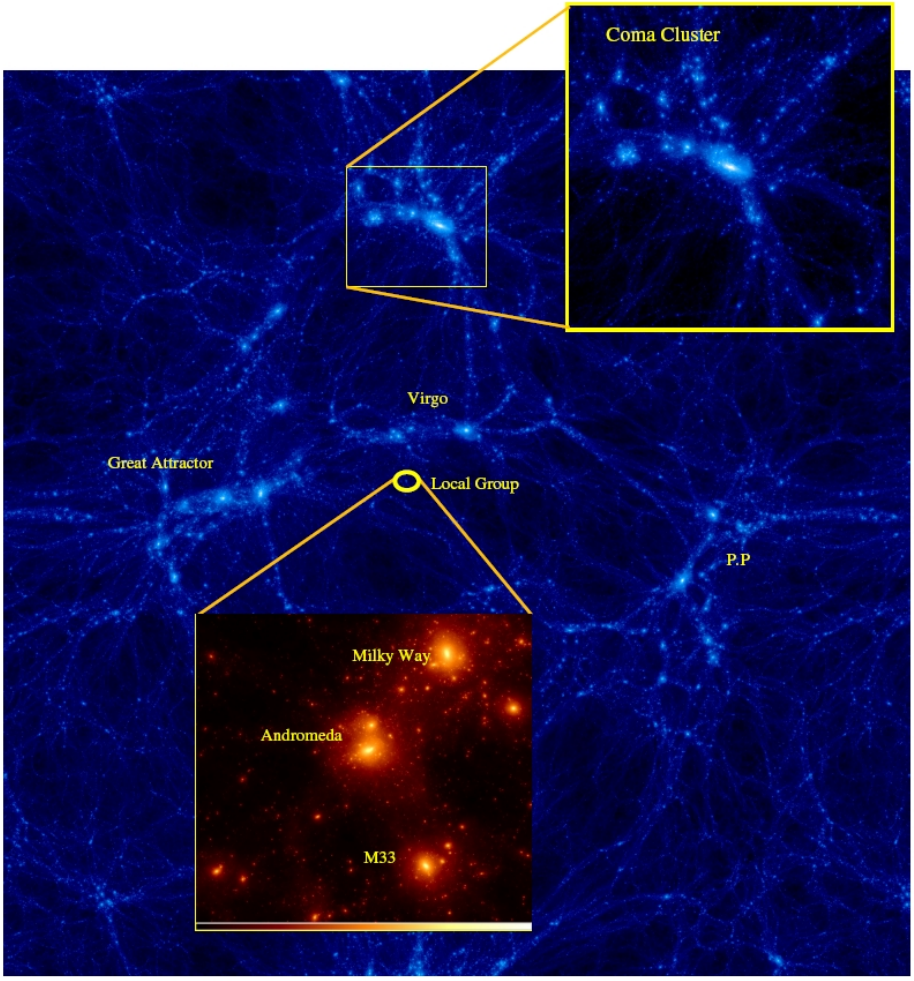


**Figure 3.8:** Simulación obtenida en el proyecto CLUES. En esta se muestran las estructuras a gran escala del universo local y se aprecian con claridad los miembros más significativos del grupo local. Tomado de la página oficial del proyecto `http://www.clues-project.org`

[1]`GADGET2` es un popular código para la simulación de N-cuerpos en cosmología y formación de galaxias. Está disponible de forma gratuita en la página oficial del proyecto `http://www.mpa-garching.mpg.de/gadget/`

## 3.3 Caracterización del Entorno

Una vez obtenidas las simulaciones numéricas de la evolución en régimen no lineal, uno de los principales objetivos es caracterizar las estructuras emergentes propias de este régimen. Entre estas destaca la gran estructura de red que se forma a partir de regiones de diferente dimensionalidad, donde grandes regiones vacías son limitadas por regiones planas, estas a su vez son recorridas por filamentos unidimensionales que se juntan en regiones puntuales altamente densas (red cósmica).

A partir de observaciones cosmológicas se ha logrado establecer la relación entre las propiedades de halos de galaxias, tales como el parámetro de espín, la concentración, la forma, etc. Y el entorno donde están embebidas. Debido a esto es importante cuantificar la estructura de red cósmica en simulaciones cosmológicas. Uno de los primero trabajos en esta dirección consiste en la aproximación de Zeldovich mostrada en la subsección 2.3.1), otros esquemas posteriores usan estratificaciones del campo de densidad para cuantificar el entorno y son denominados métodos geométricos, pero debido a su carácter local no pueden dar cuenta de propiedades más globales como canales de flujo de materia o influencia de grandes estructuras cercanas. En esta sección se muestran dos esquemas para la clasificación del entorno desarrollados recientemente.

### 3.3.1 Método T-web

El primero de los métodos fue propuesto por [**?** ] y consiste el uso de la teoría de sistemas dinámicos para el análisis de la estabilidad local de órbitas de prueba alrededor de halos de materia oscura y de esta forma cuantificar su entorno para un tiempo (corrimiento al rojo) fijo dado. Para esto se asume válida la aproximación Newtoniana (ver subsección 2.2.1) y la ecuación de movimiento de una partícula de prueba en el potencial peculiar de la distribución es

eq:Tweb$_{M}ovement\ddot{r} = -\nabla\phi(r)$ con $\nabla^2\phi = 4\pi G\bar{\rho}\delta$

Es razonable asumir que en el centro de masa $\bar{r}_i$ de cada halo existe un mínimo del potencial $\nabla\phi = 0$, formando así un pozo de potencial local. Esto permite linealizar la ecuación de movimiento 3.7 entorno a estos puntos, obteniendo

eq:Lineal$_{T}web\ddot{r}_i = -T_{ij}(\bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_{k,j})dondesedefineeltensordemareacomoelHessianodelpotencia$

eq:Tweb$_{D}efinitionT_{ij} \equiv \frac{\partial^2\phi}{\partial r_i \partial r_j}$

Acorde a la teoría de sistemas dinámicos, un autovalor negativo indica que el punto es inestable en la dirección del respectivo autovector, implicando un flujo de materia hacia el exterior de la región. Para autovalores positivos se presenta una situación completamente análoga. Con base en la aproximación de Zeldovich (subsección 2.3.1) se propone un esquema de clasificación del entorno cosmológico a partir de los autovalores del tensor de marea $T_{ij}$ (ver figura 3.9).

- **Vacío (Vacuum):** en este caso los tres autovalores son positivos, indicando una expansión en todas las direcciones.

- **Hoja (Sheet):** para este caso $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 < 0$, indicando un colapso en una sola dirección, dando lugar a una zona con geometría local plana.

- **Filamento (Filament):** para estas zonas solo el $\lambda_1$ es positivo, indicando un colapso en dos direcciones y expansión e una, formando así una región con geometría unidimensional.

- **Nudo (Knot):** para este último tipo de región, los tres autovalores son negativos, indicando un colapso en todas las direcciones y dando lugar a una zona comprimida.

Lo más destacable de este método respecto a los métodos geométricos es su naturaleza dinámica, permitiendo diferenciar zonas con iguales valores densidad pero con propiedades de estabilidad diferentes. A pesar de lo anterior, la asunción de mínimo local solo es justificada en el centro de cada halo, careciendo así de significado y precisión generalizar este esquema en cualquier punto del espacio. Otro inconveniente es que bajo el esquema de clasificación original con los signos de cada autovalor no se reproduce la impresión visual que se obtiene en la distribución de materia de las simulaciones (ver figura 3.10).

Una significativa mejora de este método se logra generalizando el esquema de clasificación respecto a un cierto valor umbral $\lambda_{th}^T$, que es tomado como parámetro libre y se ajusta acorde a la impresión visual obtenida [**?** ], en especial el esquema original se recupera fijando $\lambda_{th}^T = 0$.

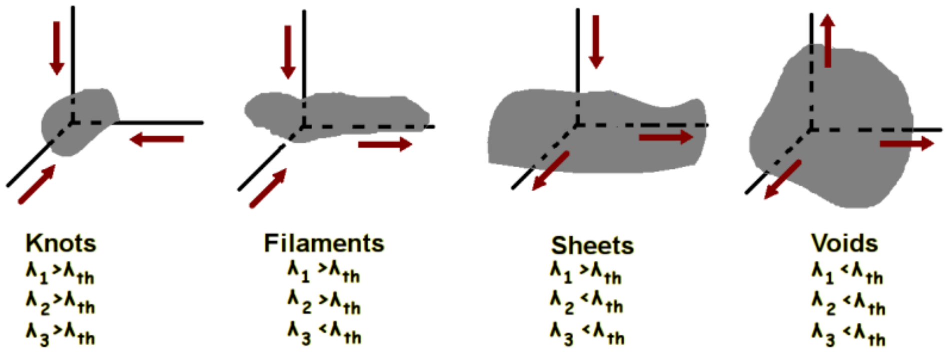


**Figure 3.9:** Esquema de clasificación del entorno cosmológico para los esquemas T-web y V-web. El valor umbral $\lambda_{th}$ es tomado como un parámetro libre.

### 3.3.2 Método V-web

El segundo método dinámico presentado para la clasificación de la red cósmica es presentado en [**?** ] y está basado en el tensor de velocidad de peculiar (shear velocity tensor)

eq:Vweb$_{D}efinition\Sigma_{ij} = -\frac{1}{2H_0}v_i r_j + v_j r_i deformaanálogaalesquemaT-web, enesteesquemasone$
$valoresdeltensor\Sigma_{ij}$ y se define el entorno acorde a un valor umbral $\lambda^V_{th}$ (ver figura 3.9).

Como es mostrado en [**?** ], en el régimen lineal los tensores $T_{ij}$ y $\Sigma_{ij}$ son proporcionales, siendo ambos métodos completamente equivalentes en este régimen. Esto es parcialmente evidenciado en la impresión visual de ambos esquemas de clasificación que se obtiene a grandes escalas para la simulación Bolshoi (figura 3.10), y se debe a la menor no linealidad de los modos a mayores escalas.

En el caso de modos pequeños, donde los efectos no lineales son más dominantes, ambos esquemas difieren notablemente, tal como puede verse en la impresión visual de las simulaciones CLUES. Específicamente, el esquema V-web cuantifica de forma más precisa la estructura fina de la red cósmica a pequeñas escalas, permitiendo definir un entorno más apropiado para pequeñas estructuras a nivel cosmológico como halos de materia oscura o pequeños grupos de ellos.

Otra ventaja del esquema V-web respecto al T-web radica en que está basado en el campo de velocidades peculiares en vez del campo de densidad, aportando así más información dinámica del entorno y haciendo posible dar cuenta de una

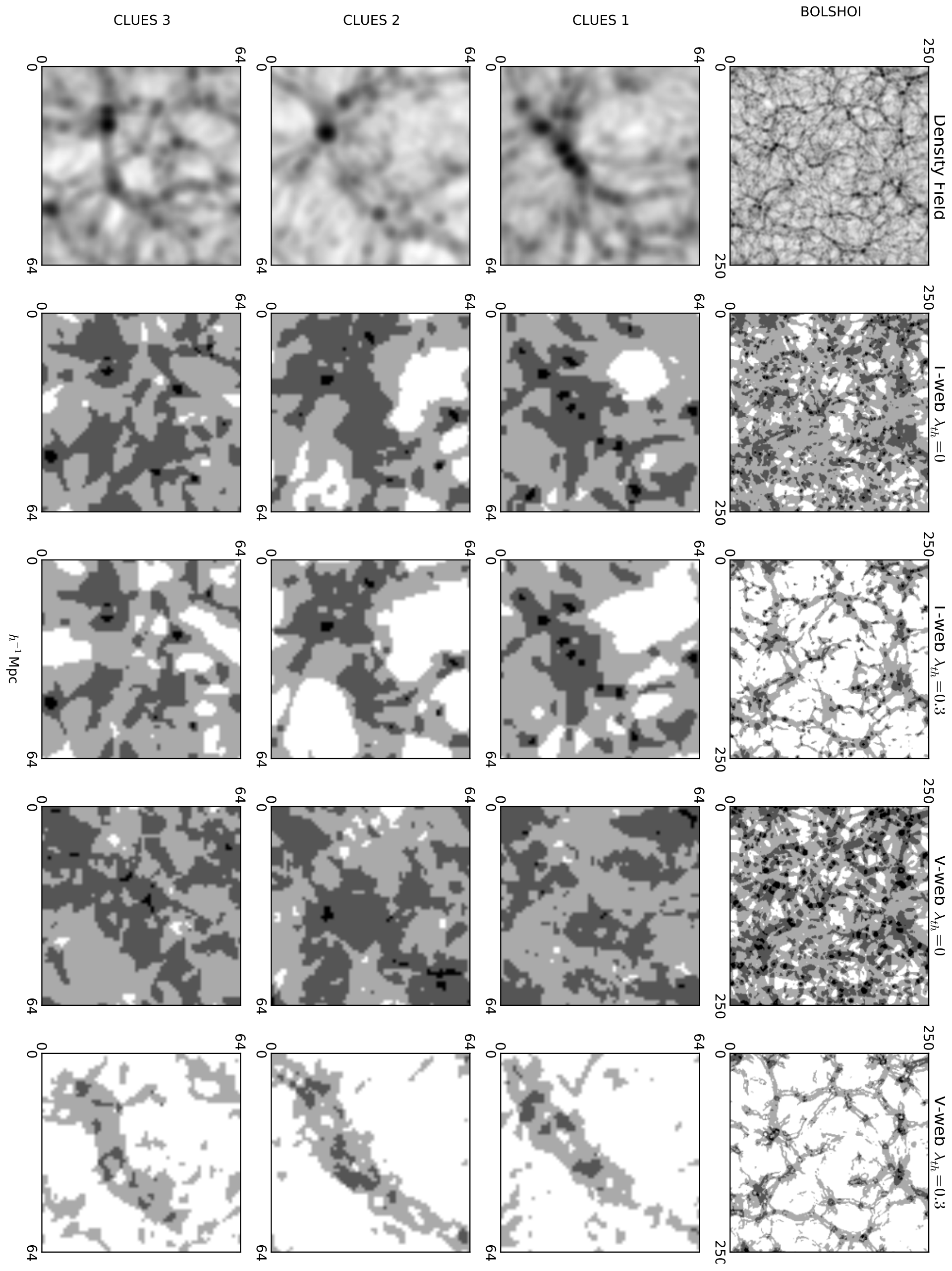


**Figure 3.10:** Se ilustra para cada una las simulaciones (CLUES 1, CLUES 2, CLUES 3, Bolshoi) la diferencia entre los esquemas de clasificación T-web y V-web para diferentes valores de $\lambda_{th}$ (Negro - Nudo, Gris oscuro - Filamento, Gris - Hoja, Blanco - Vacío). En las gráficas superiores se muestra la impresión visual obtenida a partir de los respectivos campos de contraste de densidad ($\log(\delta+1)$), usadas para la calibración de los valores $\lambda_{th}$. La resolución para una de las mallas construidas es aproximadamente $1.0h^{-1}$ Mpc/celda y para todas se realiza un suavizado Gaussiano del tamaño de una celda, el grosor de cada slide es de una celda de la malla.

forma más directa de efectos no locales, como flujos de materia o influencia de estructuras cercanas. Debido a esto, este esquema será adoptado como estándar para la cuantificación del entorno de halos y pares de halos (sistemas como el grupo local) y de las distribuciones de entorno cosmológico en el capítulo 4.

## 3.4 Detección de Halos y Definición de Muestras

Una vez caracterizado el entorno cosmológico, el siguiente paso es encontrar las estructuras que se forman en las simulaciones, específicamente halos de materia oscura. Debido a la naturaleza continua de la distribución de materia en el universo, es complicado y subjetivo definir estructuras discretas y limitadas espacialmente, como los halos de materia oscura o las galaxias en ellos. A pesar de esto, el carácter aproximado de las soluciones numéricas exige a priori uan construcción discreta del campo de densidad a partir de partículas puntuales con una cierta masa representativa (generalmente del orden de $10^7 \sim 10^9 h^{-1}$ M$_\odot$, aunque depende específicamente de la resolución de la simulación), esto implica que la detección de estructuras físicas discretas[1] se reduce a encontrar agrupaciones de partículas que representen estos sistemas.

### 3.4.1 Método FOF

Uno de los métodos más utilizados para la detección de estructuras en simulaciones de N-cuerpos se denomina FOF (por sus siglas en inglés *Friend of Friend*).

En este método se asocia un volumen finito a cada partícula, denominada región de vinculación, luego las estructuras son halladas a partir de intersecciones contiguas de estas regiones. Un ejemplo ilustrativo es presentado en la figura 3.11, donde la estructura de la curva roja, correspondiente a un halo de materia oscura, es

[1] A pesar de que las partículas que mapean la distribución de densidad también tienen un carácter discreto, su individualidad carece de sentido físico y solo es consecuencia de los métodos numéricos implementados.

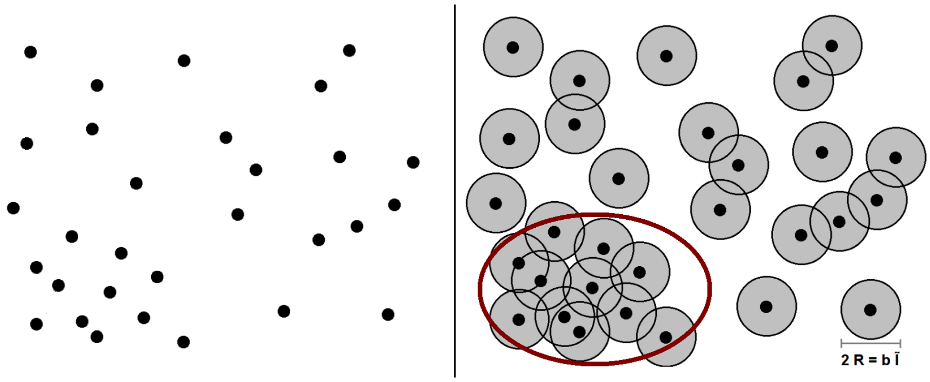

**Figure 3.11:** Diagrama ilustrativo del método FOF. Los círculos grises entorno a cada partícula representa la zona de vinculación y la curva roja representa una de las estructuras encontradas.

construida a partir de 11 regiones de vinculación adyacentes que se intersectan mutuamente. La geometría de las regiones de vinculación son generalmente esféricas, con un radio $R_i$ dado por la siguiente expresión

eq:FOF$_{Diameter} R_i = \frac{1}{2} b\,\bar{l} donde$b$es el parámetro de vinculación y el camino libre medio de la spa$

En la figura 3.12 se muestra el resultado del método FOF en la construcción de un catálogo de halos de materia oscura para la simulación CLUES 3. La distribución de los halos está acorde con la distribución de densidad (ver figura 3.10), siguiendo el mismo patrón de filamentos y nodos de la red cósmica. En el subsección 3.4.2, las muestras de halos definidas en cada simulación se hallan a partir de este esquema, con un parámetro de vinculación $b = 0.17$.

### 3.4.2 Definición de Muestras

En esta subsección se presentan las diferentes muestras definidas que serán usadas en el capítulo 4 para la determinación de los efectos del entorno en los sistemas de grupos locales y la caracterización de cada simulación. Estas corresponde a una versión ampliada de las muestras definidas en [**?** ].

- **Halos Generales** *(GH)*: estos corresponden a todos los halos hallados en las simulaciones a partir del esquema FOF, independiente de su rango de masa.

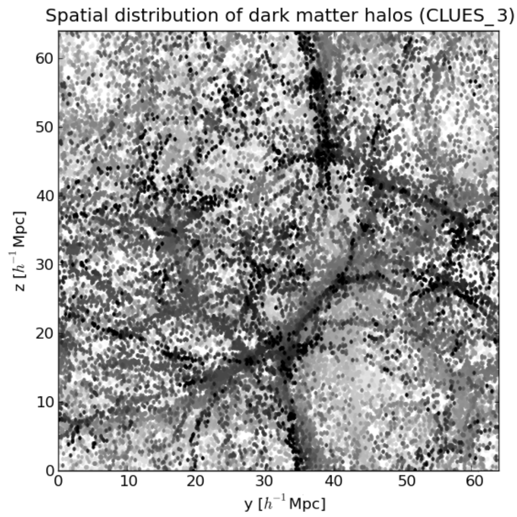


**Figure 3.12:** Halos encontrados a partir del esquema FOF en una de las simulaciones CLUES. El gradiente de color indica la profundidad respecto al eje $x$, donde los halos negros son los más cercanos.

- **Halos Individuales** *(IH)*: son un subconjunto de la anterior muestra, y representan todos los halos de materia oscura que están en el rango de masas $5.0 \times 10^{11} - 5.0 \times 10^{12}$. Este rango de masa es escogido debido a que corresponde al rango en el cual se forman galaxias de disco, tal como los principales miembros del grupo local, Andrómeda y la Vía Láctea.

- **Pares** *(P)*: esta es construida a partir de la muestra *IH* y está compuesta por pares de halos que satisfacen el criterio de ser mutuamente el halo más cercano al otro. Se construye como una muestra primigenia para encontrar sistemas de pares aislados y similares al grupo local.

- **Pares Aislados** *(IP)*: esta muestra se construye a partir de los sistemas en la muestra de pares que además satisfacen las siguientes condiciones [**?** ] [**?** ].

  - La distancia entre el centro de los halos debe ser menor a $0.7h^{-1}$ Mpc, consistente con la distancia entre la Vía Láctea y Andrómeda.
  - La velocidad radial relativa entre ambos halos debe ser negativa.

- No debe haber ningún objeto más masivo que alguno de los dos halos a una distancia menor que $2.0h^{-1}$ Mpc de ambos.
- No debe existir ningún objeto más masivo que $5.0 \times 10^{13}$ a una distancia menor que $5h^{-1}$ Mpc respecto a ambos halos.

Estas condiciones garantizan el aislamiento de los pares respecto a la influencia gravitacional de estructuras mayores y otros halos

- **Grupos Locales** *(LG)***:** esta muestra es definida en la simulaciones CLUES y corresponde a los pares de halos construidos a priori para la reproducción del grupo local. Por definición, solo existe un sistema *LG* por cada una de las tres simulaciones CLUES.

- **Grupos Locales Construidos** *(CLG)***:** con el objetivo de obtener una muestra de sistemas tipo *LG* en simulaciones no restringidas, se propone un método de construcción basado en el entorno cosmológico de la muestra *LG* en las simulaciones CLUES (ver figura 3.13). Para esto se calculan los 3 campos de autovalores del *shear velocity tensor* en una malla con resolución de $1.0h^{-1}$ Mpc/celda y un suavizado Gaussiano de una celda. En la siguiente tabla se tabulan los valores obtenidos para los autovalores del entorno de los sistemas *LG*.

| **Descripción** | $\lambda_1$ $[10^{-1}]$ | $\lambda_2$ $[10^{-1}]$ | $\lambda_3$ $[10^{-1}]$ |
|---|---|---|---|
| CLUES 1 H1 | 1.82 | 1.20 | -1.59 |
| CLUES 1 H2 | 1.82 | 1.20 | -1.59 |
| CLUES 2 H1 | 1.78 | $9.54\times10^{-1}$ | $-8.85\times10^{-1}$ |
| CLUES 2 H2 | 2.19 | $4.45\times10^{-2}$ | -1.29 |
| CLUES 3 H1 | 3.23 | $-6.29\times10^{-2}$ | -1.98 |
| CLUES 3 H2 | 3.49 | 1.21 | -1.29 |
| Valor mínimo | 1.78 | $-6.29\times10^{-2}$ | -1.98 |
| Valor máximo | 3.49 | 1.21 | $-8.85\times10^{-1}$ |

**Table 3.1:** Autovalores asociados al entorno de cada grupo local en las simulaciones CLUES.

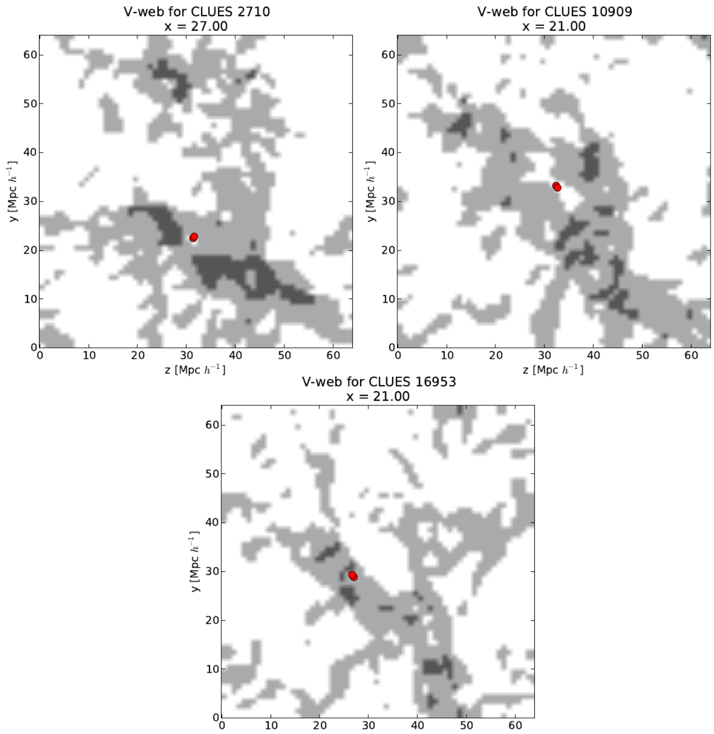


**Figure 3.13:** Entorno cosmológico a partir del esquema V-web (con $\lambda_{th} = 0.3$) para cada uno de los LG de las simulaciones CLUES, indicados por los puntos rojos.

Finalmente, a partir de los autovalores extremos hallados se define la muestra *CLG* como aquellos pares *IP* cuyos autovalores de entorno asociados se encuentran en el intervalo fijado. Para garantizar autoconsistencia, esta muestra también es definida en las simulaciones CLUES.

| Muestra | CLUES 1 | CLUES 2 | CLUES 3 | Bolshoi |
|---|---|---|---|---|
| *GH* | 56632 | 57707 | 56799 | 432000 |
| *IH* | 1493 | 1490 | 1493 | 88068 |
| *P* | 386 | 380 | 387 | 23037 |
| *IP* | 20 | 12 | 18 | 1256 |
| *LG* | 1 | 1 | 1 | – |
| *CLG* | 1 | 2 | 3 | 30 |

**Table 3.2:** Tamaños de las muestras definidas para cada una de las simulaciones.

Para finalizar, en la tabla 3.2 se tabula el tamaño de cada una de las muestras definidas para cada simulación. Puede notarse que los tamaños escalan aproximadamente en la misma proporción que el volumen entre las simulaciones ($1/60$ – CLUES /Bolshoi). En especial la muestra *CLG* para Bolshoi tiene un tamaño proporcional a la muestra *LG* de las CLUES, indicando que el esquema de construcción propuesto reproduce sistemas tipo LG en simulaciones no restringidas.

### 3.4.3 Método de Detección de Pares

A continuación se describe el algoritmo desarrollado para la detección de cada una de las muestras de pares en cada simulación (`Pair Finder`) [1].

- Se particiona el espacio de la simulación en $N \times N \times N$ celdas, luego para cada celda se realiza un indexado de los halos que están dentro de ella, almacenando los identificadores de cada uno de ellos.

- Posteriormente, para cada una de las celdas se identifican los primeros vecinos, teniendo en cuenta condiciones de frontera periódicas, tal como la celda $i$ en la figura 3.14.

[1] Una versión actualizada del código puede encontrarse en `https://github.com/sbustamante/Thesis/tree/master/codes/Halo_Finder`

- Para un halo de una celda dada se calcula la distancia a todos los halos de la misma celda y de las celdas vecinas, luego se almacena la distancia al halo más cercano, la distancia al halo más cercano con una masa mayor y la distancia al halo más cercano con una masa mayor a $5.0 \times 10^{13}$.

- Repitiendo el anterior paso para todos los halos, si dos halos son mutuamente los dos más cercanos, estos se catalogan como un par, construyendo así la muestra *P* definida en la subsección anterior 3.4.2.

- Finalmente, para cada uno de los sistemas de pares se evalúan las condiciones definitorias de los *IP*, determinando así esta muestra.

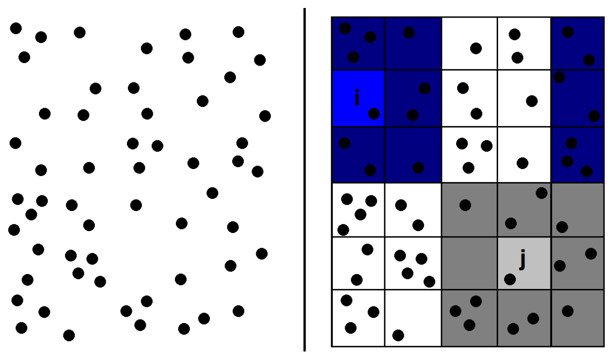


**Figure 3.14:** Ilustración 2D del método para la detección de las muestras de pares. Distribución de halos de materia oscura (izquierda), definición de zonas (derecha).

La eficiencia de este método radica en que evita evaluar distancias entre todos los halos de la simulación, siendo necesario solo para los vecinos cercanos. La estructura de celdas lo hace similar a un código de árbol (ver subsección 3.1.3), a excepción de la estructura jerárquica de este último. En principio, el código debe ser más eficiente a medida que se aumenta la resolución $N$ de la malla, pero existen dos limitaciones que a esto. La primera tiene que ver con el número de halos por celda, este no puede ser demasiado grande, pero tampoco puede ser tal que solo hallan unos pocos halos por celda [1]. La segunda limitación tiene que ver con las condiciones de distancia usadas en la definición de la muestra *IP*, el tamaño físico de cada celda no puede ser menor a ninguna de estas distancias.

[1]Este umbral no es bien definido y depende de cada simulación, por ejemplo para las simulaciones usadas (Bolshoi y CLUES), un valor de $N = 8$ es generalmente adecuado.

*"Lo más incomprensible de nuestro universo es que sea comprensible"*
Albert Einstein

CHAPTER
4

# El Entorno Cosmológico y el Grupo Local

A continuación son presentados los resultados obtenidos a partir de las simulaciones descritas en el capítulo anterior 3 para la dependencia de las propiedades de los sistemas tipo grupo local respecto al entorno cosmológico en el que están embebidos. Se caracteriza primero cada una de las simulaciones usadas (CLUES y Bolshoi) con el fin de garantizar concordancia entre las cosmologías que representan y entre las distribuciones de entorno (sección 4.1). Después de esto, en la sección 4.2 se determinan las propiedades físicas y estadísticas de cada una de las muestras definidas en 3.4.2 y se analizan las correlaciones existentes entre las propiedades calculadas y el entorno cosmológico de cada simulación.

## 4.1 Propiedades de las Simulaciones

Uno de los principales objetivos para determinar la influencia del entorno sobre sistemas tipo grupo local es construir una muestra *CLG* en simulaciones no restringidas y así obtener estadística significativa. Para garantizar la consistencia de esta muestra es necesario establecer la equivalencia entre las entre las distribuciones de halos oscuros y analizar las distribuciones de entorno cosmológico para cada simulación.

### 4.1.1 Función de Masa de los Halos

La distribución espacial de los halos refleja la fina estructura de la red cósmica formada por la materia oscura, tanto en simulaciones (ver figura 4.1) como en observaciones cosmológicas (ver sección 1.3). Esto sugiere posibles correlaciones entre las propiedades de los halos y el entorno en el cual están embebidos, tal como es mostrado para la forma de los halos, el parámetro de espín y alineación de subhalos en [**?** ], y para la masa de los halos [**?** ]. En especial el trabajo de [**?** ] demuestra que el esquema de clasificación V-web es el más apropiado para estudios de correlaciones con propiedades direccionales, tal como el momento angular de los sistemas *IP* o *CLG* en la sección 4.2.

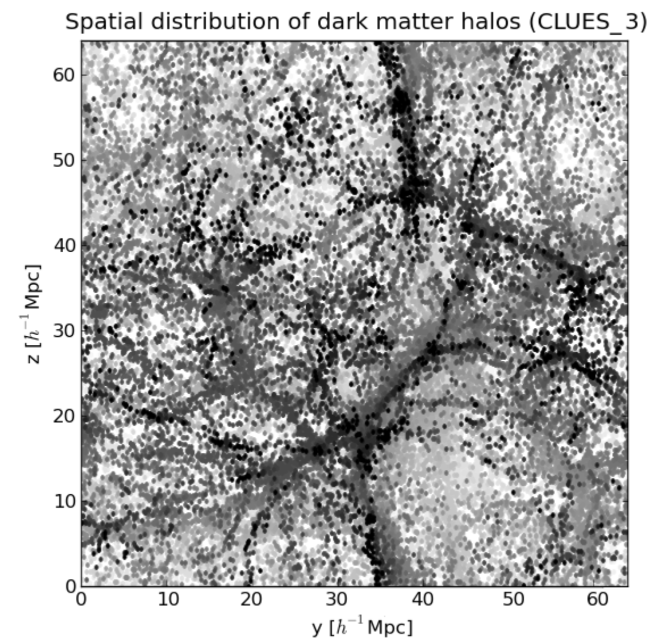


**Figure 4.1:** Distribución espacial de los halos de materia oscura, reflejando la estructura de la red cósmica. El gradiente de color indica la profundidad respecto al eje $x$, donde los halos negros son los más cercanos.

Acorde a las condiciones definitorias de las muestras *IP* y *CLG* presentadas en la subsección 3.4.2, la principal propiedad de los halos necesaria para la construcción de estas muestras es la masa. Por esta razón es importante establecer la equivalencia entre las distribuciones de masa en cada simulación. En la siguiente figura 4.2 se calculan las funciones integradas de masa para la simulación Bolshoi y para las tres simulaciones CLUES.

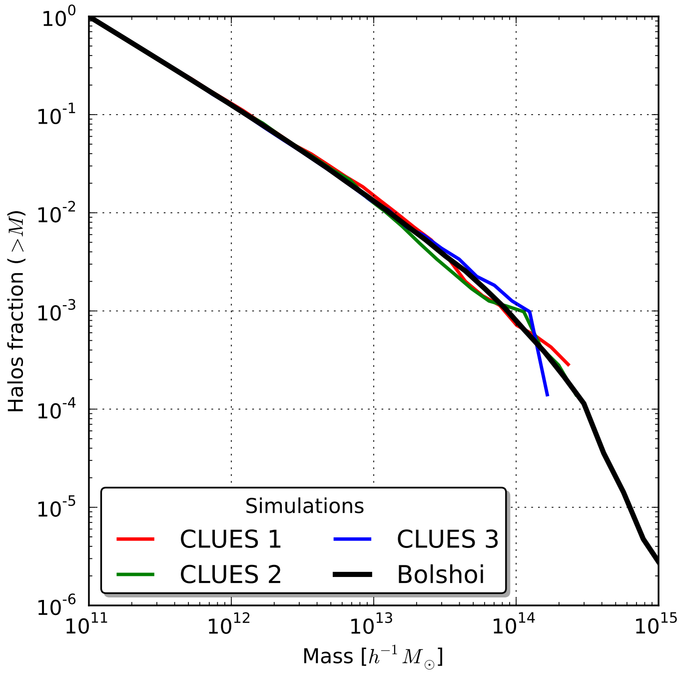


**Figure 4.2:** Funciones de masa integrada de halos de materia oscura (muestra GH) para cada simulación.

Para valores de masa altos las distribuciones son ligeramente diferentes debido a la menor cantidad de datos en las simulaciones CLUES, lo que hace menos significativa la estadística en este caso. A pesar de esto, en el rango masa donde son definidas las muestras *IH* ($5.0 \times 10^{11} - 5.0 \times 10^{12}$) las distribuciones son consistentes con el formalismo Press-Schechter [**?** ] para los parámetros cosmológicos WMAP7, indicando así la equivalencia de las muestras definidas entre las simulaciones.

### 4.1.2 Distribución del Entorno Cosmológico

Como fue mostrado en la sección 3.3, la caracterización del entorno cosmológico se logra a partir de cantidades físicas que indiquen el carácter geométrico o dinámico local de una región de la distribución de materia. En especial el esquema V-web permite dar cuenta de la dinámica a pequeñas escalas de la estructura de la red cósmica, permitiendo definir un entorno adecuado para los halos y otros sistemas. En la siguiente figura son calculadas las distribuciones para cada uno de los autovalores de la V-web (distribuciones de entorno), tanto para las celdas de las simulaciones, como para los entornos de los halos de la muestra *GH*.

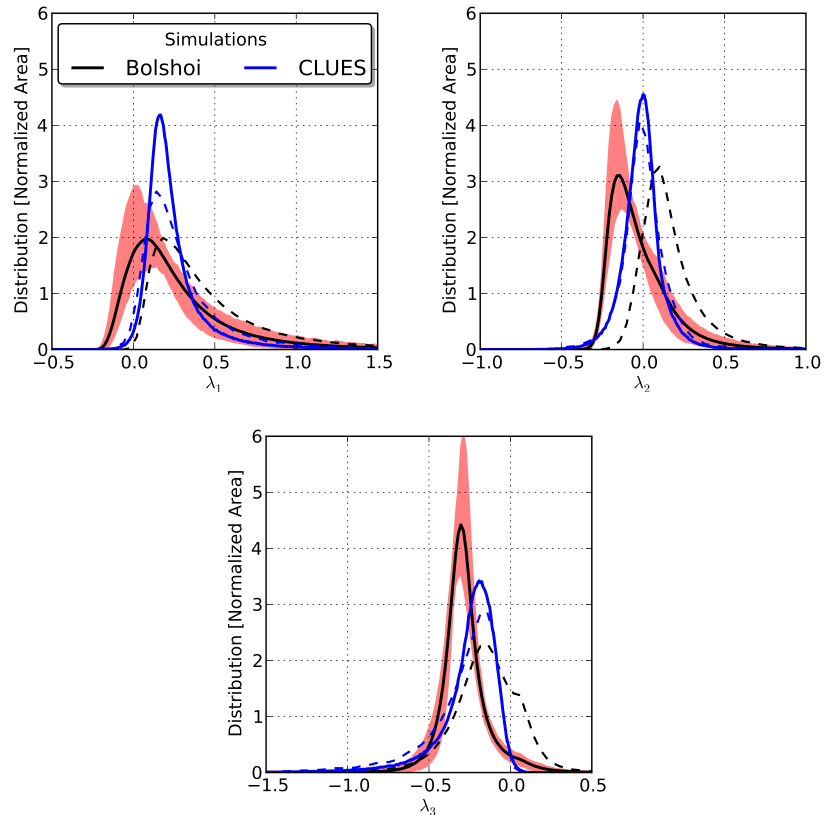


**Figure 4.3:** Distribución de los autovalores en el esquema V-web para cada una de las celdas de volumen (línea continua) y para los entornos de los halos de materia oscura en los catálogos FOF (línea discontinua). Las distribuciones están normalizadas tal que su área es la unidad. Resolución de $1.0h^{-1}$ Mpc/celda y suavizado Gaussiano de una celda.

El principal resultado de la figura 4.3 consiste en la diferencia de las distribuciones para las celdas de volumen (líneas continuas) entre la simulación Bolshoi y las simulaciones CLUES [1]. El efecto de varianza cósmica (regiones rojas) es incluido a partir del cálculo de distribuciones de entorno en $64$ subvolúmenes de la simulación Bolshoi, con un tamaño similar a una simulación CLUES. A pesar de esto, las distribuciones de CLUES están por fuera de la región de varianza cósmica, indicando así una estructura cosmológica a gran escala que difiere entre ambas simulaciones.

Un segundo resultado importante de la figura 4.3 se obtiene a partir de las distribuciones de entorno para los halos (líneas discontinuas). En el caso de Bolshoi, se nota un importante sesgo entre la distribución de entorno de las celdas y de los halos, indicando así que la distribución espacial de los halos no es un buen trazador de la estructura a gran escala del campo de densidad. Este resultado es consistente con el trabajo de [**?** ], donde hallan importantes sesgos en las distribuciones de entorno acorde a diferentes rangos de masa de los halos, también usando Bolshoi. En el caso de las simulaciones CLUES, las distribuciones de entorno de los halos son significativamente menos sesgadas respecto a las de celdas de volumen, indicando para este caso que los halos si se distribuyen espacialmente acorde al entorno cosmológico cuantificado por el esquema V-web.

Por último, en la figura 4.4 son calculadas las densidades medias y las fracciones de volumen para cada uno de los tipos de regiones (ver sección 3.3) acorde al valor umbral $\lambda_{th}$. Las funciones de fracción de volumen son diferentes entre las simulaciones CLUES y Bolshoi, en especial la región en torno a $\lambda_{th} = 0.1$ para las regiones tipo hoja (sheet). Esto se debe al desplazamiento relativo entre los picos de las distribuciones de entorno para cada simulación (ver figura 4.3), lo que implica un comportamiento diferente al criterio de selección de regiones a partir del valor $\lambda_{th}$. A pesar de esto, las fracciones de volumen se mantienen más o menos consistentes para ambas simulaciones en el rango $0.2 \leq \lambda_{th} \leq 0.4$, que corresponde al rango donde mejor se reproduce visualmente la distribución global del campo de densidad.

[1]Debido a la alta semejanza entre las distribuciones de las tres simulaciones CLUES, y con el fin de obtener estadística más significativa, se han fusionado las distribuciones.

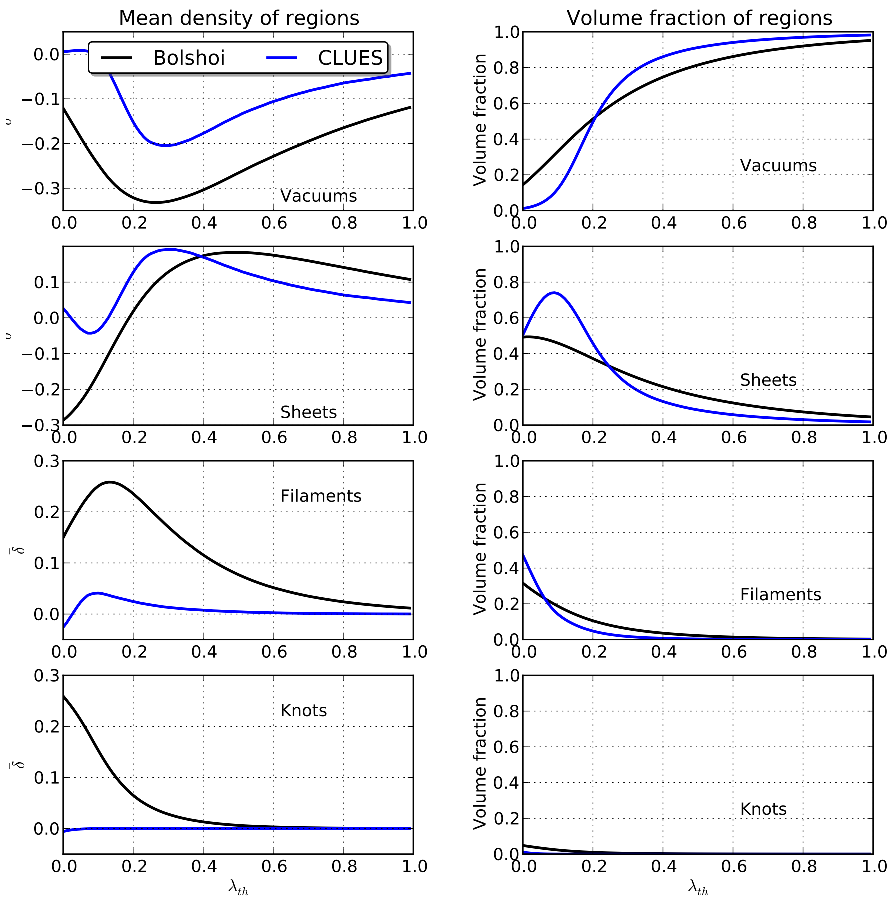


**Figure 4.4:** Parámetro de densidad medio para diferentes tipos de regiones en función del valor umbral $\lambda_{th}$ (paneles izquierda). Fracciones de volumen normalizadas para diferentes tipos de regiones, también acorde al valor umbral $\lambda_{th}$.

Las gráficas de densidad media para cada tipo de región muestran importantes resultados respecto al entorno cosmológico. Lo primero que puede notarse es la diferencia entre las densidades medias de ambas simulaciones en cada una de las regiones. Por ejemplo para regiones de vacío, en Bolshoi estas corresponden a zonas con densidad promedio mucho menor a la densidad media de la simulación, mientras que para las CLUES estas zonas de subdensidad no son tan marcadas. Debido a la pequeña fracción de volumen de las regiones tipo nudo (knot) en ambas simulaciones, asociado a su dimensionalidad puntual, la estructura global del entorno puede entenderse bien solo en términos de la distribución espacial de vacíos, hojas y filamentos, siendo los filamentos la contraparte de los vacíos respecto al parámetro de densidad. De esto se espera que la diferencia en la subdensidad de los vacíos entre cada simulación se extienda a una marcada diferencia entre las sobredensidades de los filamentos en cada simulación. Esto último es obtenido en la misma figura, donde puede verse que los filamentos de Bolshoi son notablemente más densos que aquellos de las CLUES. En el caso de las hojas, estas corresponden a regiones de densidad intermedias entre los filamentos y los vacíos, por tanto se espera que la diferencia de la densidad media de estas regiones no sea tan marcada entre ambas simulaciones, tal como se nota en la misma figura.

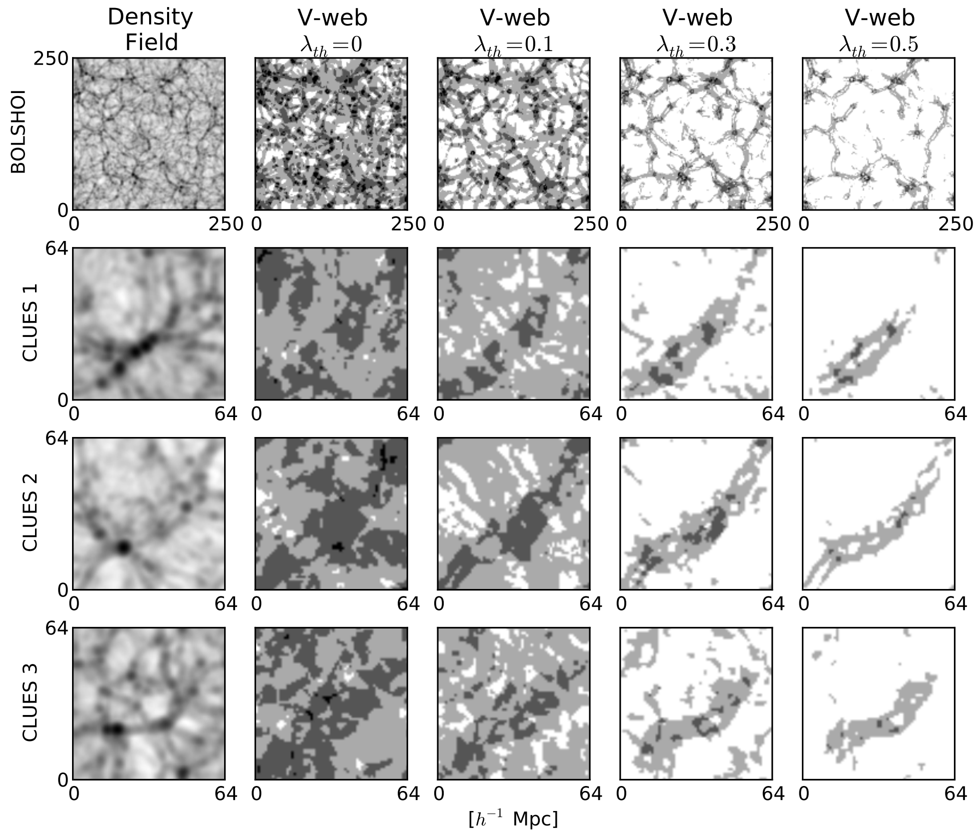


**Figure 4.5:** Comparación de la impresión visual obtenida con el método V-web para varios valores del parámetro $\lambda_{th}$. Se usa el siguiente esquema de clasificación (Negro - Nudo, Gris oscuro - Filamento, Gris - Hoja, Blanco - Vacío). La resolución de cada malla es $1.0h^{-1}$ Mpc/celda, con un suavizado Gaussiano de una celda. El grosor de cada slide es de una celda.

Un segundo resultado de la figura 4.4 consiste en la determinación de un parámetro $\lambda_{th}$ óptimo para la reproducción visual de la red cósmica. Como se muestra en esta gráfica, las fracciones de volumen asociadas a vacíos y hojas son relativamente altas respecto a las de filamentos y nudos, esto para todo el rango barrido de valores de $\lambda_{th}$. De esto se espera que la impresión visual a gran escala del campo de materia sea completamente dominada por la distribución de vacíos y en menor medida por la distribución de hojas y filamentos. En el caso de un valor bajo del parámetro $\lambda_{th}$, por ejemplo $\lambda_{th} < 0.2$, el parámetro de densidad media de las hojas es negativo, indicando que posiblemente estas regiones están invadiendo zonas que deberían ser vacíos, tal como se ve en la figura 4.5 para $\lambda_{th} = 0$ o $\lambda_{th} = 0.1$. En el caso de valores altos, $\lambda_{th} > 0.4 \sim 0.5$, el parámetro de densidad medio para los vacíos comienza a aumentar, indicando que estas regiones están invadiendo zonas que de mayor densidad, que en principio deberían ser hojas o filamentos. Esto puede ser notado en la figura 4.5 para $\lambda_{th} = 0.5$, donde todo el volumen es ampliamente dominado por vacíos, perdiendo la estructura característica de la red cósmica. Este análisis sugiere que el valor óptimo de $\lambda_{th}$ podría ser aquel donde se minimice la densidad media de los vacíos, al ser estos el entorno dominante. Un resultado que apoya este criterio es que el $\lambda_{th}$ encontrado es similar para ambas simulaciones $\lambda_{th} \approx 0.3$, y coincide con el valor obtenido a partir de un análisis cualitativo de la impresión visual del entorno.

Para concluir esta sección se discuten los resultados obtenidos para las distribuciones de entorno. A pesar de existir un notable sesgo entre la distribución de los halos y la del campo de densidad en la simulación Bolshoi, caso contrario a las simulaciones CLUES, y haber una marcada diferencia entre las densidades medias de las regiones en ambas simulaciones, la esencia de construir una muestra *CLG* en la simulación Bolshoi a partir de los grupos locales de las CLUES, como se menciona en el capítulo 3, es obtener una muestra de pares aislados más fiel que también reproduzcan el entorno local de los *LG*. Se espera entonces que la dinámica local cuantificada por la V-web se independiente del diferente resultado global de las distribuciones, manteniéndose así la validez del esquema de construcción de los *CLG*.

## 4.2 Propiedades de la Muestra *CLG*

Una vez determinada la consistencia entre las muestras definidas en CLUES y Bolshoi, el siguiente paso es determinar sus propiedades. Es de especial interés analizar la muestra *CLG* de Bolshoi, tomando como muestra de control la *IP* y como muestra de referencia la *LG* de las simulaciones CLUES.

### 4.2.1 Determinación del Entorno

Como fue definido en la subsección 3.4.2 del capítulo pasado, la muestra *CLG* en la simulación Bolshoi se construye imponiendo a la muestra *IP* la condición extra de reproducir el entorno cosmológico de los grupos locales de las simulaciones CLUES. La principal motivación de esto es encontrar una muestra en Bolshoi análoga a las muestras *LG*, tanto en sus propiedades físicas como en su abundancia. Respecto a esto último es natural asumir, considerando la ya determinada consistencia entre las simulaciones, que la abundancia escala aproximadamente como el volumen simulado. Esto puede ser considerado el primer logro de este esquema, ya que reproduce aproximadamente esta ley de escalamiento para el tamaño de las muestras en cuestión (ver tabla 3.2 para *CLG* de Bolshoi y *LG* de CLUES).

A pesar de lo anterior, este método de construcción no es más que corte de la muestra *IP* respecto a los autovalores de la V-web de la celda donde están embebidos, lo cual no implica la reproducción adecuada de las propiedades físicas ni el entorno cosmológico de los sistemas tipo grupo local. Por esta razón, a continuación son analizados posibles sesgos producidos en las distribuciones del entorno cosmológico para los sistemas *CLG*.

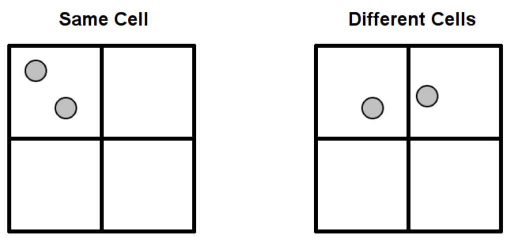


**Figure 4.6:** Situación patológica respecto al entorno de los sistemas de pares de halos.

Una de las primeras consideraciones que debe tenerse en cuenta en la cuantificación del entorno para pares de halos (muestras *P*, *IP*, *CLG* y *LG*), es que cada uno de ellos puede estar embebido en celdas diferentes, tal como es mostrado en la figura 4.6. Esta situación patológica se presenta debido al carácter no puntual de este tipo de sistemas y el tamaño finito de la malla.

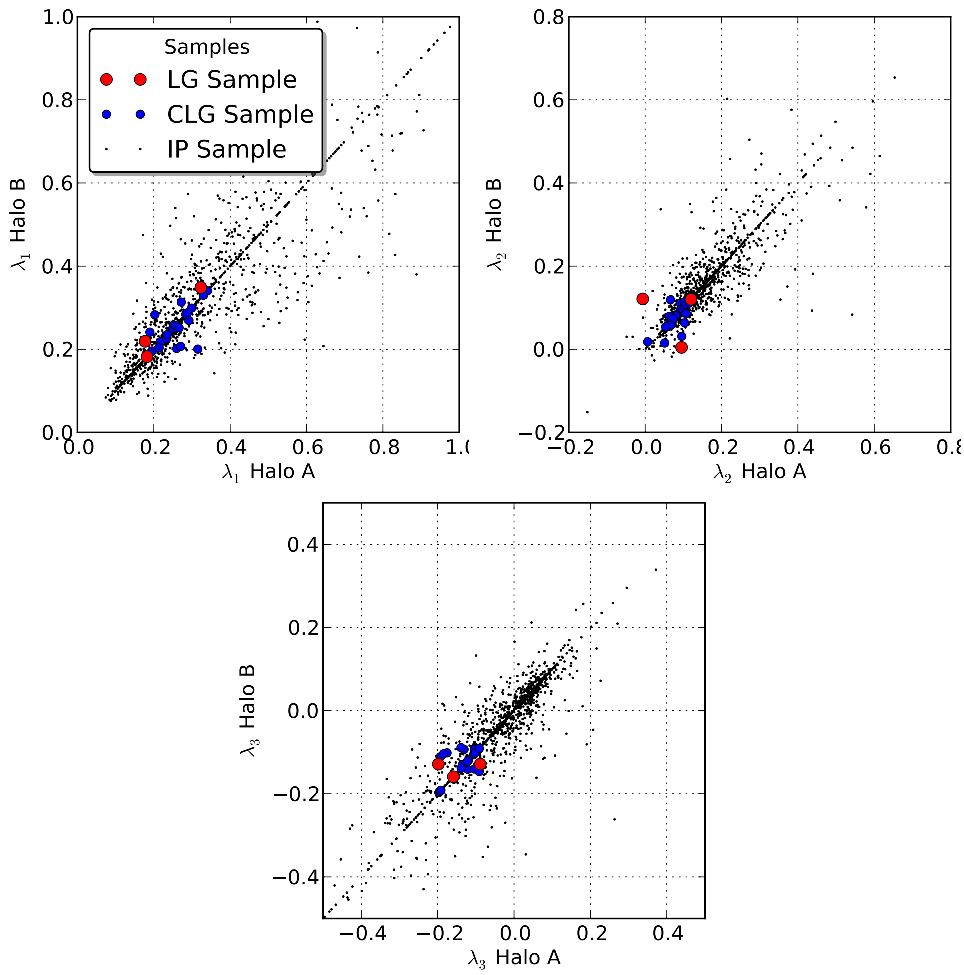


**Figure 4.7:** Comparación entre las distribuciones de los autovalores de la V-web para los dos halos en los sistemas de pares (muestras *LG*, *CLG* y *IP*).

Para cuantificar este efecto, en la figura 4.7 son graficadas las distribuciones de cada uno de los autovalores de la V-web para cada halo de las muestras de pares. La situación ideal, donde ambos halos comparten una misma celda, correspondería a un línea perfecta con pendiente de $45^o$, mientras las situaciones patológicas son responsables de dispersiones en las gráficas. Una manera de solucionar esto es disminuir la resolución de la malla tal que ambos halos estén embebidos en una misma celda, pero esto ocasiona una perdida de información del entorno local propio del sistema. Debido al suavizado Gaussiano de una celda ($\sim 1h^{-1}$ Mpc) que es aplicado a priori a cada campo de autovalores, la variación de estos entre celdas vecinas es menor, tal como es mostrado para la mayoría de sistemas *IP* en la gráfica. Teniendo en cuenta esto último y que la dinámica local de los pares estará dominada por el halo más masivo, por convención será tomada la celda asociada a este halo para la cuantificación del entorno de todo el sistema.

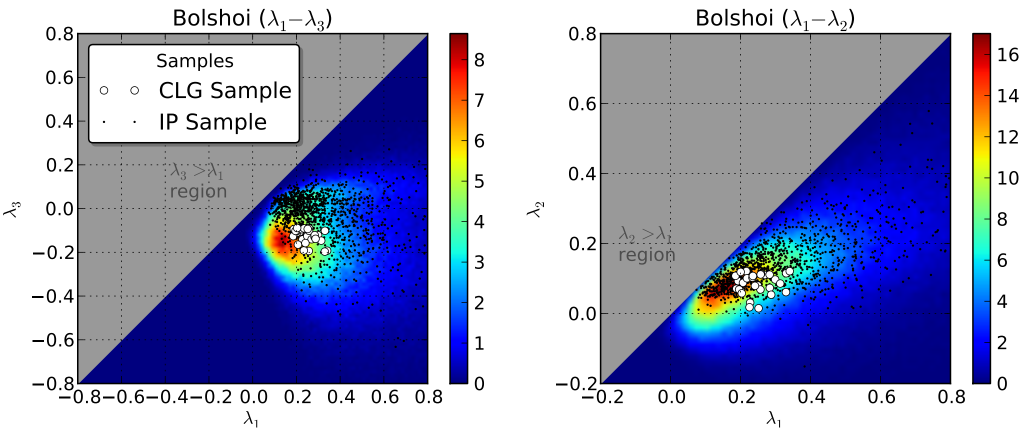


**Figure 4.8:** Distribuciones 2D del entorno cosmológico para diferentes muestras, $\lambda_1$–$\lambda_3$ (izquierda) y $\lambda_1$–$\lambda_2$ (derecha). El histograma de fondo, graficado en colores, corresponde a la distribución de entorno para todos los halos de Bolshoi (muestra *GH*), su resolución es de $100 \times 100$ para el rango mostrado y están normalizados respecto a su área. Los puntos negros corresponden a la distribución de la muestra *IP* y finalmente los puntos blancos a la muestra *CLG*.

Una vez determinada la forma de cuantificar el entorno de los sistemas de pares, en la figura 4.8 se ilustra la distribución de las muestras *GH*, *IP* y *GCL*. Como fue mostrado en la subsección 4.1.2, la distribución de entorno de los halos en Bolshoi está considerablemente sesgada respecto a la distribución de las celdas de volumen. A pesar de esto y teniendo en cuenta que la construcción de los sistemas de pares se hace a partir de los halos, es más interesante realizar comparaciones con las distribuciones asociadas a los halos (histogramas de color en la misma figura). Como fue definido en la subsección 3.4.2, la muestra *IP* es construida de tal forma que se garantice su aislamiento gravitacional respecto a halos más masivos, por esta razón hay dos efectos que compiten en cuanto a la distribución de entorno de estos sistemas. En el primero se espera que la abundancia de pares sea más favorable en entornos donde la cantidad de halos es mayor, mientras en el segundo, precisamente la sobreabundancia de halos resulta desfavorable para los criterios de aislamiento gravitacional. El segundo efecto termina siendo dominante y produce un sesgo en la distribución de entorno de la muestra *IP* respecto a la de los halos, mientras que para en la muestra *P* el sesgo no se presenta[1].

Para terminar el análisis de la anterior figura, se discute acerca de la distribución de entorno para los *CLG* de la simulación Bolshoi. A pesar de que esta distribución es construida de forma artificial por efecto de selección, es interesante notar que la región en el espacio de autovalores que delimita esta muestra es relativamente reducida, indicando que los tres grupos locales de las simulaciones CLUES comparten una dinámica de entorno local muy similar. Aunque esto último puede ser un efecto impuesto a priori por construcción debido al carácter restringido de las simulaciones CLUES, no deja de ser interesante el sesgo que esta característica produce en la distribución de entorno de los *CLG* respecto a los halos y a la muestra *IP*.

Para cuantificar los sesgos producidos en cada muestra respecto a un tipo de entorno específico (ver figura 3.9), en la siguiente figura 4.9 se grafican las fracciones de objetos en las diferentes regiones. En el rango óptimo del valor umbral $0.2 \leq \lambda_{th} \leq 0.4$ definido en la subsección 4.1.2, se notan importantes diferencias entre cada una de las muestras, especialmente para la *CLG*. Como fue mencionado anteriormente, el efecto de aislamiento gravitacional produce un sesgo entre la distribución de entorno de los halos *GH* y de los sistemas *IP*, esto puede ser claramente notado para cada una de las fracciones en el rango óptimo de $\lambda_{th}$. En el caso de vacíos, la fracción dominante de estas dos muestras es la asociada a *IP*, pero en el caso de hojas ambas son comparables, y más aún, en la regiones tipo filamento y nudo domina la fracción de halos *GH*. Esto indica que los sistemas de pares aislados *IP* se presentan con mayor abundancia en regiones de media o baja densidad de

[1]Esto último no es mostrado en la figura 4.8, pero es fácilmente calculado.

halos, aún así la considerable fracción de estos presentes en hojas y filamentos no permite asociar un tipo de región de entorno específica para estos sistemas. Finalmente, los sistemas *CLG* presentan un importante sesgo en comparación a las dos muestras anteriores, siendo de especial interés aquella producida respecto a la *IP* debido a que *CLG* es una submuestra de esta. De nuevo, apelando al rango óptimo de $\lambda_{th}$, es posible en este caso asociar tipos de regiones de entorno específicas a la muestra *CLG*, estando estos sistemas preferencialmente en hojas y vacíos.

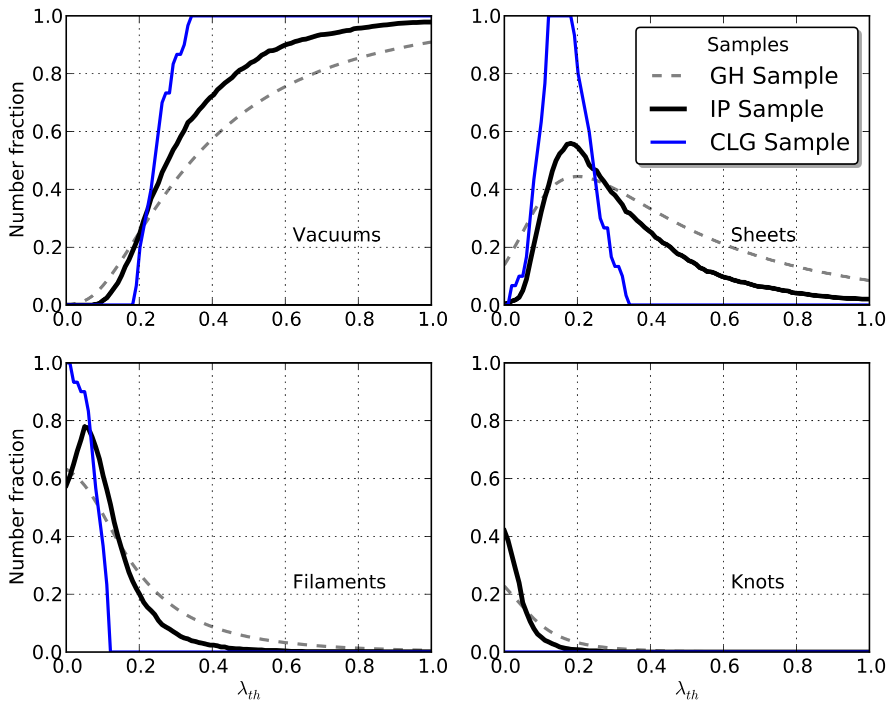


**Figure 4.9:** Fracciones de cantidad de objetos en diferentes regiones en función del valor umbral $\lambda_{th}$. Para el caso de la muestra *GH* se cuentan número de Halos, mientras que para las muestras *IP* y *CLG* número de pares.

A pesar del esquema de clasificación de regiones usado, las conclusiones anteriores dependen de la elección del parámetro $\lambda_{th}$, que aunque ha sido razonablemente acotado en una región óptima que reproduce la impresión visual, no deja de ser un parámetro libre. Para solventar esto se introduce el fraccional de anisotropía (FA) con la normalización usada en [**?** ]

eq:FA FA = $1 \frac{}{\sqrt{3}\sqrt{\frac{(\lambda_1-\lambda_3)^2+(\lambda_2-\lambda_3)^2+(\lambda_1-\lambda_2)^2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}}}$

Esta cantidad cuantifica el grado de anisotropía del entorno cosmológico local, siendo $FA = 1$ una región altamente anisotrópica, mientras $FA = 0$ un región con alta isotropía, además es independiente de la elección a priori de algún parámetro libre. Acorde al resultado obtenido por [**?** ], regiones de baja anisotropía corresponden a nudos debido a su colapso isotrópico, mientras que regiones de alta anisotropía corresponden a vacíos debido a su expansión no uniforme. Para regiones filamentales y planas el fraccional de anisotropía está distribuido de forma extendida en valores intermedios, indicando que la dinámica de este tipo de entornos es más compleja. Aún así, hay una tendencia a valores bajos en el caso de filamentos y valores altos para hojas.

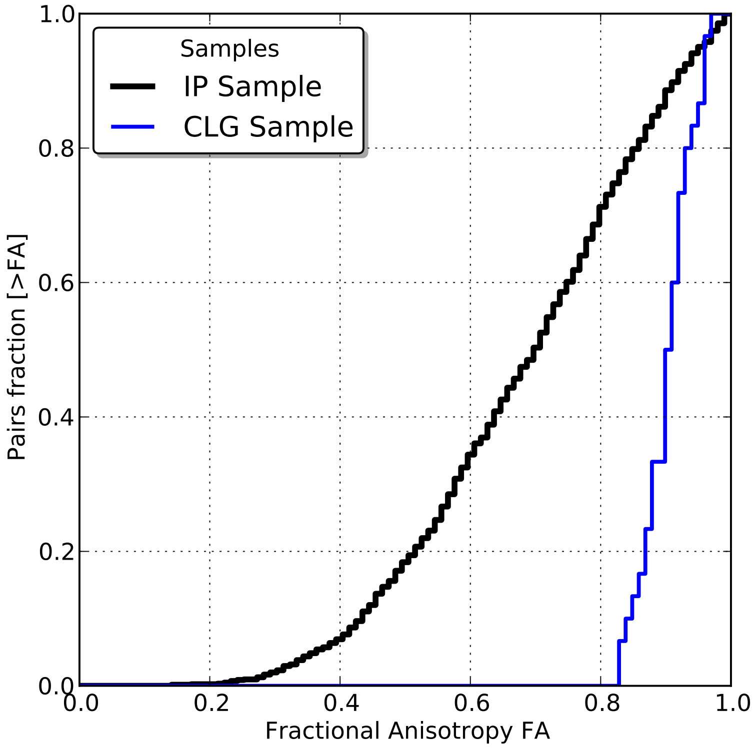


**Figure 4.10:** Histograma integrado del fraccional de anisotropía para las muestras de pares *IP* y *CLG*.

En la figura 4.10 son calculados los histogramas integrados del fraccional de anisotropía para las muestras *IP* y *CLG*. El primer resultado está asociado a la distribución de los *IP*, la cual es altamente homogénea para rangos intermedios (aproximadamente $0.4 < FA < 0.9$) como es evidenciado en la pendiente constante del histograma. Esto implica que los sistemas *IP* están distribuidos en zonas de media a alta anisotropía, en concordancia con las fracciones encontradas en regiones de vacío, hojas y filamentos. El segundo resultado es el sesgo obtenido en la distribución de FA de la muestra *CLG*. A diferencia de los *IP*, esta distribución se encuentra concentrada en regiones de alta anisotropía (aproximadamente $0.8 < FA < 1.0$), lo que confirma finalmente que es posible asociar un tipo de entorno cosmológico a los sistemas *CLG* y el cual esta acorde con regiones vacías y planas, o en términos de las direcciones definidas en la V-web, regiones que se expanden en dos direcciones (asociadas a los autovalores $\lambda_2$ y $\lambda_3$), mientras que poseen un ligero colapso/expansión en la tercera dirección (asociada al autovalor $\lambda_1$).

La principal ventaja de usar el fraccional de anisotropía radica en que esta cuantifica en un solo valor la dinámica del entorno cosmológico, permitiendo establecer un marco de estudio más natural y directo para correlaciones de entorno con cantidades fisicas.

### 4.2.2 Masa de los *CLG*

Como fue demostrado en la subsección 4.1.1, la distribución de masa de los halos es consistente entre las diferentes simulaciones, por tanto se espera que todas las muestras, a excepción de *CLG* que requiere además del entorno cosmológico, sean también consistentes entre las simulaciones. Para el estudio de las masas de los sistemas de pares se propone el uso de dos cantidades, la primera es la masa total del sistema $M_{tot} = M_A + M_B$ y la segunda es la relación de las masas $\chi = M_B/M_A$, donde por convención $M_A$ es el halo más masivo.

En la siguiente figura 4.11 se calculan los histogramas integrados para la masa total y la razón de las masas. Se toma la muestra *IP* como muestra de control, además se muestran los valores obtenidos para cada uno de los grupos locales en CLUES.

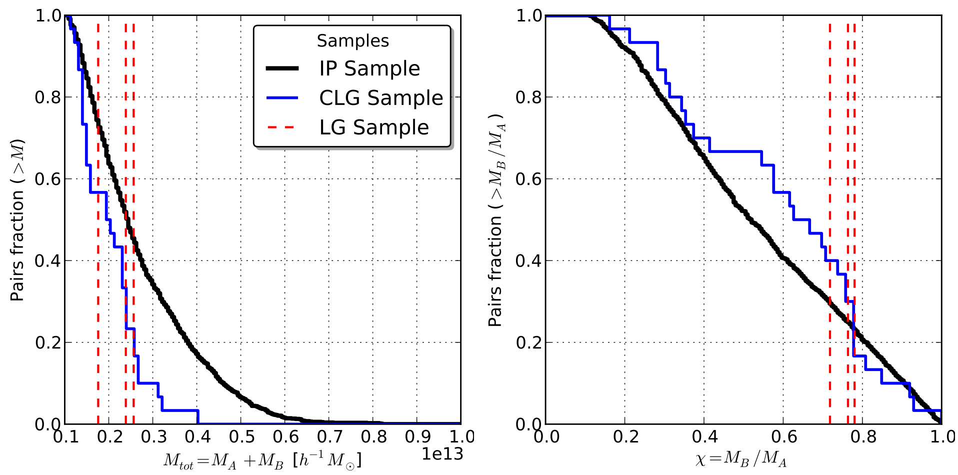


**Figure 4.11:** Funciones de distribución integrada para la masa total $M_A + M_B$ (izquierda) y la razón de las masas $M_B/M_A$ (derecha), de las muestras de pares en Bolshoi.

Una característica interesante de esta figura consiste en los rangos bien definidos asociados a la muestra *LG* de CLUES (líneas rojas verticales). Esto evidencia que los grupos locales *LG* no solo comparten una entorno cosmológico común sino también una distribución de masa local. Como posible explicación a esto puede considerase un efecto de selección de las muestras en la construcción de las simulaciones restringidas, mientras que una alternativa optimista sería tomarlo como una evidencia de la correlación entre la distribución de masa y el entorno local.

Para responder la anterior cuestión se debe analizar la distribución de los parámetros de masa para las demás muestras. En el caso de la masa total de los *IP*, esta se encuentra distribuida acorde a la distribución de masa de los halos (ver figura 4.2), tal como es esperado al no existir ninguna restricción respecto al entorno y en el caso de la razón de masas, se obtiene una distribución completamente homogénea. Ahora, para la muestra *CLG*, la cual se espera que sea influenciada por los efectos del entorno, se obtiene una distribución de masa total sesgada respecto a la de *IP* y centrada aproximadamente en el rango definido por los *LG*. Para la distribución de la razón de masas de *CLG* también se encuentra un comportamiento uniforme teniendo en cuenta la escasez de datos, a pesar de esto hay una aparente sobreabundancia en torno al valor medio definido por los *LG*, pero nuevamente no hay suficientes datos para concluir una posible relación.

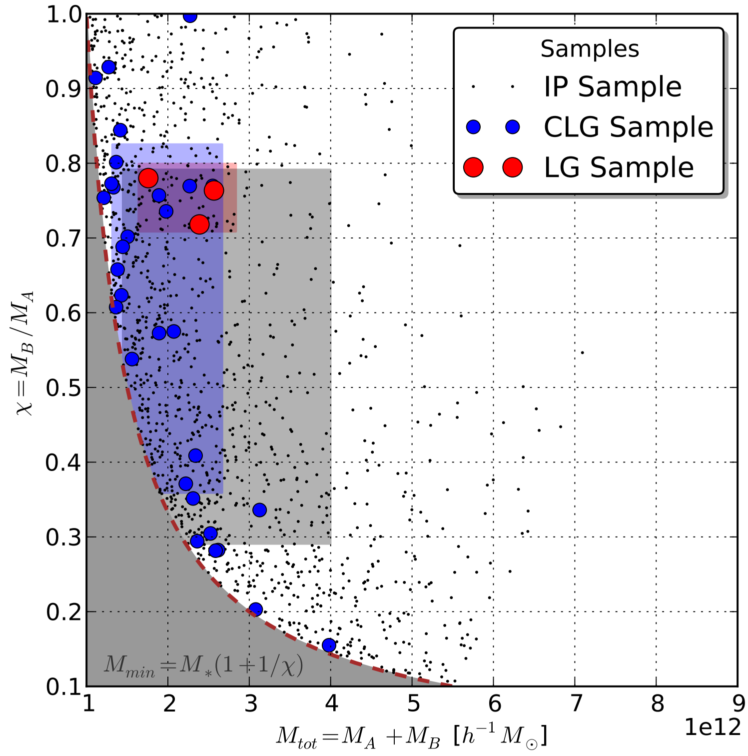


**Figure 4.12:** Diagrama de dispersión de los parámetros de masa definidos ($M_{tot}$,$\chi$) para cada una de las muestras de pares. Las regiones cuadradas son construidas a partir del valor medio y la desviación estándar de la muestra del mismo color. La región gris en la parte inferior izquierda corresponde a un corte impuesto artificialmente con el rango mínimo de masa de los halos tomados $M_*$ para construir las muestras de pares.

En la figura 4.12 se muestra un diagrama de dispersión para los parámetros de masa de las muestras de pares. Las regiones cuadradas representan el valor medio más o menos una desviación estándar para las parámetros marcados en cada eje, lo que permite comparar gráficamente las distribuciones. De esta comparación se confirma que el criterio de construcción de la muestra *CLG* selecciona masas de pares $M_{tot}$ consistente con las masa de los *LG* en las simulaciones restringidas, mientras que no hace ninguna selección respecto a la razón de masas $\chi$.

Finalmente, con el objetivo de responder si existe un posible efecto de entorno en la selección de la masa total obtenida para la muestra *CLG*, se calcula en la siguiente figura 4.13 diagramas de correlación entre el fraccional de anisotropía y los parámetros de masa.

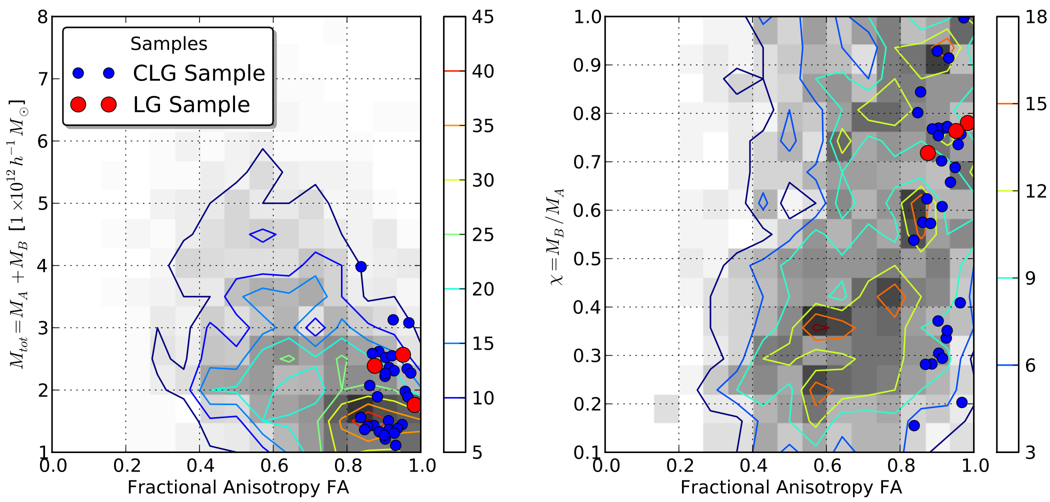


**Figure 4.13:** Diagramas de dispersión para el fraccional de anisotropía respecto a los parámetros de masa. El mapa de fondo y las curvas de contorno corresponden a número de pares de la muestra *IP*.

En el caso de la masa total $M_{tot}$ de la muestra *IP*, puede notarse que pares con bajos valores de masa están preferencialmente en regiones de alta anisotropía, mientras que pares de masa más alta en regiones de anisotropía intermedia. Esto puede ser considerado como una correlación de entorno para la muestra *IP* respecto a la masa total, de lo cual se concluye que el criterio de selección de la muestra *CLG* a partir del entorno de los *LG* hace un corte para pares de baja masa.

Para la razón de las masas $\chi$ se nota una distribución más dispersa para la muestra *IP*, a pesar de esto se nota una sobreabundancia de pares con valores de $\chi$ bajos en zonas de anisotropía media, mientras que en regiones de alta anisotropía se presentan valores más altos de $\chi$. Esto es consistente con la selección realizada en la muestra *CLG*, para la cual aproximadamente el $66\%$ de los pares tienen un valor $\chi > 0.5$. De esto puede intuirse una posible correlación entre el entorno y el valor $\chi$ de los pares, aún así, debido a la alta dispersión de la distribución y la poca cantidad de datos, no puede concluirse nada al respecto.

### 4.2.3 Distribuciones de Energía y Momentum Angular

La energía y el momentum angular constituyen otras propiedades físicas de interés para los sistemas de pares, estas son definidas acá a partir de las siguiente expresiones

eq:EnergyPairs $e_{tot} = \frac{1}{M_A+M_B}\frac{1}{2}M_A v_A'^2 + M_B v_B'^2 - G\frac{M_A M_B}{|r_A'-r_B'|}$

eq:AMomentumPairs $L_{orb} = \frac{1}{M_A+M_B} M_A r_A' \times v_A' + M_B r_B' \times v_B' donde r_i'$ es la posición comóvil del halo $i$ y $v_i'$ es la velocidad total[1] respecto al centro de masa del par.

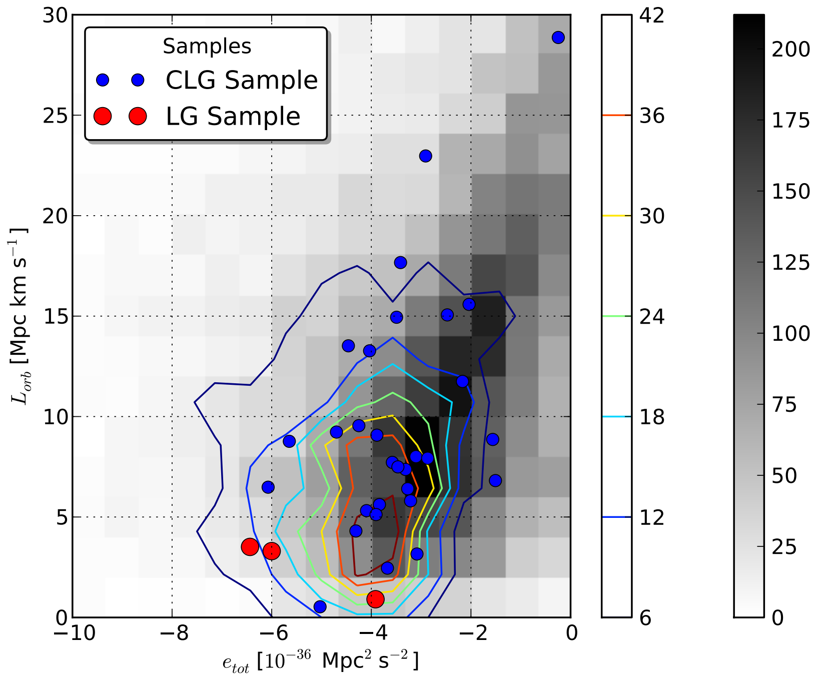


**Figure 4.14:** Diagrama de dispersión para la energía total y el momentum angular orbital de los sistemas de pares. El mapa de fondo corresponde a la distribución de la muestra *P*, mientas las líneas de contorno a la distribución de la muestra *IP*, en ambos casos los valores corresponden al número de pares.

En la figura 4.14 se muestran las distribuciones de energía total específica y momentum angular orbital específico para las diferentes muestras. Lo primero que

[1]Velocidad total debido a que se incluye la velocidad peculiar y el flujo de Hubble respecto al centro de masa del sistema, así $v_i' = v_{pec,i} + H_0 r_i'$.

puede ser notado es un significativo sesgo entre la distribución de los *IP* respecto a los *P*, lo que demuestra que el criterio de aislamiento gravitacional definido en la subsección 3.4.2 selecciona un rango de energía y momentum angular más bajo que en los pares generales, siendo así estos sistemas gravitacionalmente más ligados. En el caso de la muestra *CLG*, su distribución parece seguir la de los *IP*, no habiendo así una aparente selección por la condición entorno. Por último, es interesante observar nuevamente que las propiedades asociadas a la muestra *LG* poseen valores muy cercanos, indicando así que representan un tipo de sistema bien definido, aunque como ha sido mencionado, esto puede ser efecto de selección en la construcción de CLUES.

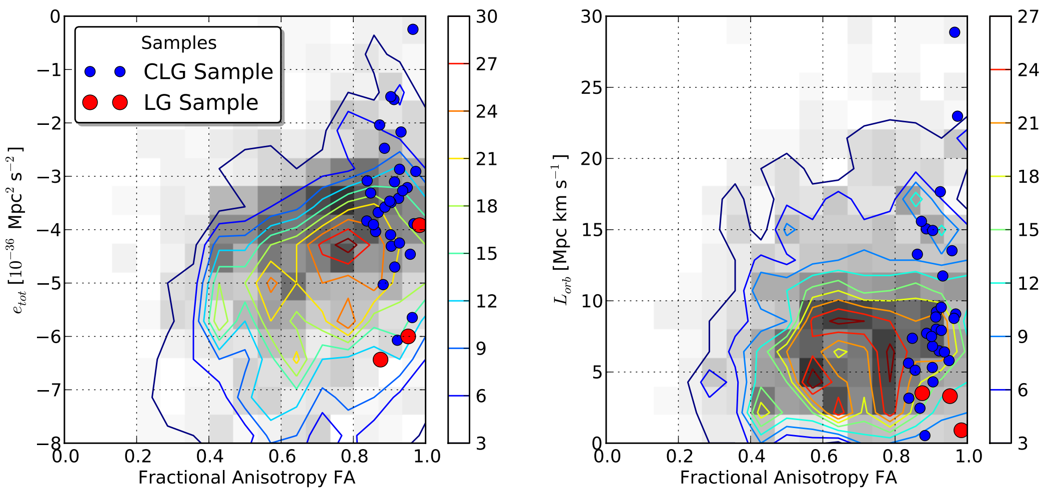


**Figure 4.15:** Diagramas de dispersión para el fraccional de anisotropía respecto a la energía y el momentum angular. El mapa de fondo y las curvas de contorno corresponden a número de pares de la muestra *IP*.

En la figura 4.15 se calculan diagramas de correlación de la energía y el momentum angular con el fraccional de anisotropía con el objetivo de determinar posibles correlaciones. En el caso de la energía específica, sistemas de pares *IP* con mayor energía (menos ligados) parecen estar mayoritariamente en zonas de alta anisotropía, mientras que sistemas de menor energía (más ligados) están en zonas de anisotropía media, lo que muestra una correlación entre estas dos cantidades. Para sistemas *CLG*, la selección a partir del entorno parece sesgar su distribución de energía a valores más altos que la distribución media de los *IP*, lo que es consistente con la correlación encontrada. En este caso, los sistemas *LG* parecen no seguir esta correlación, teniendo valores mucho más bajos de energía que lo esperado. Finalmente, para la distribución de momentum angular específico no existe ninguna correlación clara, siendo cualquier valor $L_{orb}$ de los pares igualmente probable en el espectro de posibles entornos para estos sistemas.

### 4.2.4 **Alineación del Momentum Angular**

Finalmente la última propiedad analizada para los sistemas de pares es su alineación respecto al entorno cosmológico, para esto se define el ángulo $\phi_i$ como el formado entre el autovector $u_{\lambda i}$ de la V-web y el momentum angular del par $L_{orb}$.

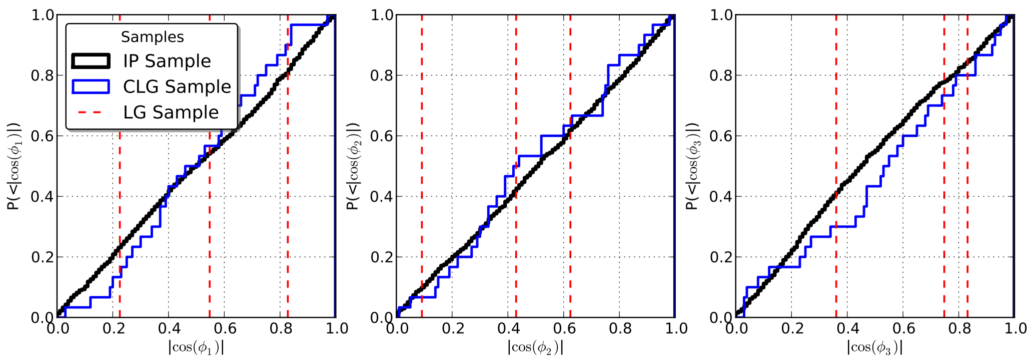


**Figure 4.16:** Histogramas integrados para el ángulo formado entre el momentum angular de los pares, el cual determina el plano orbital, y cada uno de los autovectores definidos por la V-web en el entorno cosmológico. Se realiza para cada las muestras de pares *CLG* y *IP*, mientras que los grupos locales de CLUES son ilustrados con las líneas rojas punteadas.

En la figura 4.16 se calculan los histogramas integrados para cada uno de los angulos $\phi_i$ definidos. Como puede notarse, las muestras *CLG* y *IP* son homogéneas respecto a los tres valores, indicando que no hay una alineación preferida respecto al entorno cosmológico. Esto también se evidencia en los valores calculados de los *LG* de las simulaciones restringidas.

## 4.3 Conclusiones

Esta sección está dedicada a compilar los principales resultados obtenidos en este capítulo. Estos serán enumerados y discutidos acorde al órden en que fueron obtenidos.

1. La construcción de la muestra *IP* fue inicialmente propuesta en [**?** ] con el objetivo de reproducir sistemas tipo grupo local. A pesar de esto, el número de estos sistemas encontrados en la simulación Bolshoi es mucho mayor al que se espera acorde a la abundancia de *LG* en simulaciones restringidas. El método propuesto para la selección de la muestra *CLG* en Bolshoi a partir del entorno cosmológico de los *LG*, produce un número de sistemas que concuerda con los encontrados en la simulaciones restringidas, escalando aproximadamente como el volumen de las simulaciones. Más aún, aplicando este mismo método en las simulaciones restringidas se halla una muestra con un tamaño similar a la *LG*.

2. A partir de los valores medios de densidad en las diferentes regiones del entorno cosmológico (figura 4.4) se propone un esquema para la elección de un rango óptimo del parámetro $\lambda_{th}$ de la V-web con el objetivo de reproducir la apariencia visual de la red cósmica. Este está basado en la minimización de la densidad media en las regiones de vacío debido a que son las dominan la apariencia del campo de densidad a gran escala. Con esto se garantiza que las regiones vacías no invadan regiones de más alta densidad, que en principio deben ser clasificadas como hojas o filamentos. Este método da un rango de valores óptimos aproximadamente igual para todas las simulaciones usadas ($0.2 \leq \lambda_{th} \leq 0.4$), además reproduce adecuadamente la apariencia visual (ver figura 4.5 para $\lambda_{th} = 0.3$). A pesar de esto, este parámetro sigue siendo libre y no es viable usar un esquema de clasificación basado en este para determinar correlaciones con propiedades físicas, en vez de esto se introduce el fraccional de anisotropía con la normalización usada en [**?** ].

3. La distribución del entorno cosmológico de las simulaciones Bolshoi y CLUES difieren, existiendo un cambio de densidad media muy pronunciado entre regiones de vacío y filamentos en Bolshoi, mientras que es mucho más suave

en las CLUES. A pesar de esto, las fracciones de volumen asociadas a cada tipo de entorno son aproximadamente iguales para ambas simulaciones en el rango óptimo determinado para $\lambda_{th}$. A pesar de esto, se espera que la dinámica local caracterizada por la V-web sea independiente de la estructura global de la distribución de entorno, lo cual valida el esquema de selección de la muestras *CLG* en Bolshoi.

**4.** El método de construcción de los *CLG* selecciona un entorno cosmológico común para estos sistemas, siendo preferidas zonas de vacío y hojas no muy planas. Estas regiones presentan una alta anisotropía, cuantificada por el fraccional de anisotropía FA. En el caso de los sistemas *IP*, estos se encuentran en zonas de media a alta anisotropía, asociadas a valores de baja densidad, contrario a los halos que están en zonas más densas y menos anisotrópicas como filamentos y nudos, aún así la distribución de entorno de los *IP* es amplia y no pueden ser asociados a un tipo de entorno específico. El sesgo producido entre los *IP* y los halos generales se debe al criterio de aislamiento gravitacional usado para construir los *IP*, esto hace que zonas con mayor densidad de halos sean menos aptas por la alta influencia gravitacional.

**5.** Se encuentra una correlación entre la masa total de los pares de la muestra *IP* y el fraccional de anisotropía del entorno, donde masas mayores son más abundantes en regiones de anisotropía media mientras masas menores se presentan con mayor frecuencia en zonas de alta anisotropía. Esto implica que la selección de entorno realizada en los *CLG* reproduce un rango de masa menor. En el caso de la razón de masa, no se encuentra ninguna correlación significativa con el entorno, aún así se nota una ligera sobreabundancia de razones de masa mayores en regiones más anisotrópicas, pero es necesaria más estadística para poder ser algo concluyente.

**6.** Se halla un correlación para la energía específica de los sistemas *IP* respecto al entorno, obtiendo valores más altos en regiones más anisotrópicas y valores bajos en regiones de anisotropía media. Esta correlación parece seleccionar un rango de energía para los sistemas *CLG*, aunque esta no es consistente con los valores obtenidos de los *LG*. Para el momentum angular no se encuentra ninguna correlación con el entorno.

7. Finalmente se encuentra que no existen alineaciones privilegiadas entre el momentun angular de los pares *CLG* (o de su plano orbital) y las direcciones de los autovectores de la V-web.