

#### NCTU 高中數理資優研習課程第四次物理作業

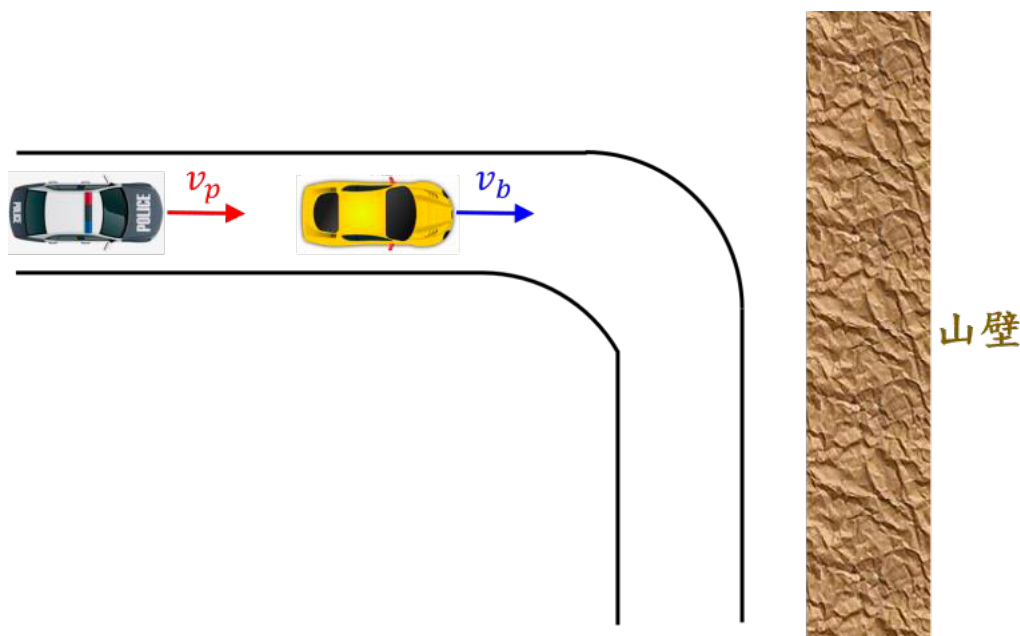
當波源與觀測者有相對運動時，觀測者所接收到波的頻率會不同於波源所發出的頻率，此現象為都卜勒效應(Doppler effect)。波在自然界中是無所不在的，例如聲波、水波、電磁波、物質波等，近一百年，都卜勒效應的相關研究除了讓我們理解諸多科學現象，已廣泛應用於天文觀測、雷達定位系統、GPS 導航應用、流體流速測量、測速照相等，則關於都卜勒效應，試回答下列問題：

##### (1) 聲波或水波的都卜勒效應：

如下圖，小明開著轎車以  $v_b$  的速率在寬廣的公路上行駛，其後另有一警車以  $v_p$  的速率行駛，公路的遠方有一聳立的山壁。

(a) 若警車上裝設的警鈴發出頻率  $f_0$  的聲音，聲速是  $v_s$ ，則警車上警察聽到經山壁反射的警鈴聲波的頻率  $f_1$  為何？

(b) 承上，小明聽到警鈴聲波的頻率  $f_2$  為何？



Sol:

**觀念前置：(自行推導)** 此處  $v_0$  為接收者， $v_s$  為發波者

都卜勒效應計計算推導：

(a) 聲源靜止，觀察者移動

$$\text{視頻率：} f' = \frac{v'}{\lambda'} = \frac{v+v_0}{\lambda} = \frac{v+v_0}{\frac{v}{f}} = f \times \frac{v+v_0}{v}$$

若觀察者遠離則改正號為負號  $f' = f \times \frac{v-v_0}{v}$

(b) 聲源移動，觀察者不動

$$\text{前方觀察者測得視波長 } \lambda' = vT - v_s T = vT \left(1 - \frac{v_s}{v}\right) = \lambda \left(1 - \frac{v_s}{v}\right)$$

$$\text{則視頻率 } f' = \frac{v'}{\lambda'} = \frac{v+v_0}{\lambda(1-\frac{v_s}{v})} = f \times \frac{1}{(1-\frac{v_s}{v})} = f \times \frac{v}{v-v_s}$$

若後方觀察者則改負號為正號  $f \times \frac{v}{v+v_s}$

公式：

$$f' = f \times \frac{v \pm v_0}{v \pm v_s}$$

進行解題：

(a) 分段討論：

Step1. 警車傳至山壁：警車為發波者，山壁為接收者，發波頻率為  $f_0$

故山壁接收到的視頻率  $f'_1 = f_0 \times \frac{v_s}{v_s - v_p}$ 。

Step2. 山壁傳回警車：警車為接收者，山壁為發波者，發波頻率為  $f'_1$

故警車接收到的回波視頻率為  $f_1 = f'_1 \times \frac{v_s + v_p}{v_s}$ 。

兩式合併：

$$f_1 = f_0 \times \frac{v_s}{v_s - v_p} \times \frac{v_s + v_p}{v_s} = f_0 \times \frac{v_s + v_p}{v_s - v_p}$$

(b) 延續上述方法：

$$f_2 = f_0 \times \frac{v_s + v_b}{v_s - v_p}$$

(2) 電磁波或光波的都卜勒效應：

電磁波在空間中傳播，有一觀測者相對於電磁波的運動速度為  $v$ ，若已知電磁波波源所發出的頻率  $f_s$ ，且光速為  $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$ 。

(a) 都卜勒效應在天文觀測中扮演極重要的角色，對於電磁波的都卜勒效應理論，觀測者所接受到電磁波的頻率  $f'$  與電磁波波源頻率  $f_s$  的關係式為

$$f' = f_s \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}},$$

這不同於聲波或水波的狀況，試說明造成此差異之可能原因？

回答：

光波與聲波的不同之處在於：光以光速運行，需要考慮狹義相對論帶來的效應。

簡介：

相對論性都卜勒效應描述了光因為波源與觀察者的相對運動關係（一如尋常版的都卜勒效應）而有的頻率（以及波長）上的變化，而在這裡又多考慮了狹義相對論帶來的效應。

相對論性都卜勒效應和非相對論性版本的都卜勒效應有許多不同之處，例如其方程式納入了狹義相對論中的時間展長效應。這些方程式描述了所觀察到的完全頻率差值，並具有相對論要求的勞倫茲對稱性。

(b) 一星系(galaxy)相對於地球運動且輻射波長0.600 m的電磁波，若地球上的觀測者測量到的波長為1.600 m，即都卜勒波長偏移為紅移現象，則此星系相對於地球運動的速度及方向(靠近或遠離)為何？

回答：遠離。 $v \approx 2.26 \times 10^8 \text{ m/s}$

一、解釋運動方向

因為紅移意指接收到的視頻率比原頻率要來得低，根據都卜勒效應可以得知星系是相對於地球做遠離的運動。

二、計算遠離速度

$$\text{原頻率 } f = \frac{v}{\lambda} = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{0.6} = 5 \times 10^8 \text{ Hz}$$

$$\text{視頻率 } f' = \frac{v}{\lambda} = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{1.6} = 1.875 \times 10^8 \text{ Hz}$$

根據電磁波都卜勒效應公式：

$$1.875 \times 10^8 = 5 \times 10^8 \sqrt{\frac{1 - v/3 \times 10^8}{1 + v/3 \times 10^8}}$$
$$v \approx 2.26 \times 10^8 \text{ m/s}$$

(3) 如前述，都卜勒效應廣泛應用於近代科技，請同學們搜尋文獻資料並選擇一項都卜勒效應的實務應用，簡介該技術原理。

回答：

聲波的都卜勒效應也可以用於醫學的診斷，也就是我們平常說的彩色超音波。彩超簡單的說就是高清晰度的黑白B超再加上彩色都卜勒。超聲頻移診斷法（即D超）應用都卜勒效應原理，當聲源與接收體（即探頭和反射體）之間有相對運動時，回聲的頻率有所改變，此種頻率的變化稱之為頻移。D超包括脈衝都卜勒、連續都卜勒和彩色都卜勒血流圖像。彩色都卜勒超聲一般是用自相關技術進行都卜勒信號

處理，把自相關技術獲得的血流信號經彩色編碼後實時地疊加在二維圖像上，即形成彩色都卜勒超聲血流圖像。由此可見，彩色都卜勒既具有二維超聲結構圖像的優點，又同時提供了血流動力學的豐富資訊，實際應用受到了廣泛的重視和歡迎，在臨床上被譽為「非創傷性血管造影」。

為了檢查心臟、血管的運動狀態，了解血液流動速度，可以通過發射超聲來實現。由於血管內的血液是流動的物體，所以超音波振源與相對運動的血液間就產生都卜勒效應。血液向著超聲源運動時，反射波的波長被壓縮，因而頻率增加。血液離開聲源運動時，反射波的波長變長，因而在單位時向里頻率減少。反射波頻率增加或減少的量，是與血液流運速度成正比，從而就可根據超音波的頻移量，測定血液的流速。

血管內血流速度和血液流量對心血管的疾病診斷具有一定的價值，特別是對循環過程中供氧情況、閉鎖能力、有無紊流、血管粥樣硬化等均能提供有價值的診斷資訊。

原理：

超聲都卜勒法診斷心臟過程是：超聲振盪器產生一種高頻的等幅超聲信號，激勵發射換能器探頭，產生連續不斷的超音波，向人體心血管器官發射，當超音波束遇到運動的臟器和血管時，便產生都卜勒效應，反射信號就為換能器所接受，就可以根據反射波與發射的頻率差異求出血流速度，根據反射波以頻率是增大還是減小判定血流方向。為了使探頭容易對準被測血管，通常採用一種板形雙疊片探頭。

都卜勒觀念小技巧：（自行統整）

一、介紹：

波源與觀察者之間有相對運動時，觀察者接收到的頻率（稱為視頻率 $f'$ ）

與波源發出的頻率（原頻率 $f$ ）不同，此現象稱為都卜勒效應。

二、現象：

(a) 火車鳴笛接近時，路邊靜止的聽者會聽到較高的頻率，反之。

(b) 當星系遠離地球時，地球上所測得恆星光譜線會偏向頻率小者（紅移）。

### 三、討論： $v' = f'\lambda'$

#### (a) 聲源不動，觀察者運動

1. 因聲源不動，故聲源皆由同一位置發出，呈現「同心圓分佈」。

運動	視波長	視波速	視頻率
觀察者接近	$\lambda = \lambda'$	$v < v'$	$f < f'$
觀察者遠離	$\lambda = \lambda'$	$v > v'$	$f > f'$

#### (b) 聲源運動，觀察者不動

1. 因聲源運動，故聲波分佈呈現「偏心圓」

運動	視波長	視波速	視頻率
觀察者接近	$\lambda > \lambda'$	$v = v'$	$f < f'$
觀察者遠離	$\lambda < \lambda'$	$v = v'$	$f > f'$

### 四、結論：

(a) 觀察者運動只會造成「速度」的變化

(b) 波源運動只會造成「波長」的變化

(c) 觀察者與波源「相對接近」時，視頻率會「變大」

(d) 觀察者與波源「相對遠離」時，視頻率會「變小」

(e) 觀察者與波源「無相對運動」時，視頻率會「不變」