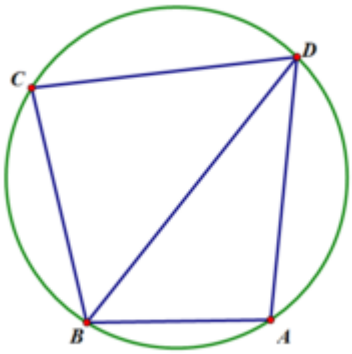
NCTU 高中數理資優研習課程第三次數學作業

解法一：直接求法



令 $\overline{BD}=x$ 、$\angle BCD=\theta$ 、$\angle BAD=\phi$

且$\overline{CD}=5$ 、$\overline{BC}=6$、$\overline{AB}=8$、$\overline{AD}=9$

根據餘弦定理：

討論 ΔBCD:

$x^2=5^2+6^2-2\times5\times6\times cos\theta$ …(1)

討論 ΔBAD:

$x^2=9^2+8^2-2\times9\times8\times cos\phi$

$\because \theta+\phi=180°$

$\therefore cos\theta=-cos\phi$

$x^2=9^2+8^2-2\times9\times8\times cos\phi=9^2+8^2+2\times9\times8\times cos\theta$ …(2)

(1)、(2)聯立求得 $cos\theta=-\frac{7}{17}$ 代回 (1) 求 x

$x^2=5^2+6^2-2\times5\times6\times\left(-\frac{7}{17}\right)=\frac{1457}{17}$

$x=\sqrt{\frac{1457}{17}}$

由$cos\theta=-\frac{7}{17}$ 反推$sin\theta=\frac{\sqrt{240}}{17}$

根據$\Delta ABC=\frac{1}{2}bc\ sina$ 分別求ΔBCD 、ΔBAD面積

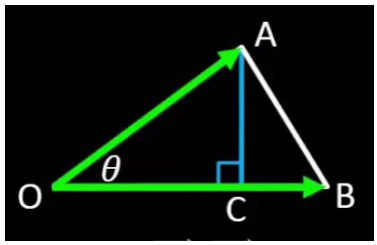
$\Delta BCD=\frac{1}{2}\times5\times6\times\frac{\sqrt{240}}{17}$

$\Delta BAD=\frac{1}{2}\times9\times8\times\frac{\sqrt{240}}{17}$

$\Delta BCD+\Delta BAD=(15+36)\times\frac{\sqrt{240}}{17}=12\sqrt{15}$

解法二：向量求法

面積公式推導：$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$



令 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ 、$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$

$\because h=|\vec{a}|sin\theta$

$\therefore \Delta=\frac{1}{2}|\vec{b}|h=\frac{1}{2}|\vec{b}||\vec{a}|in\theta=\frac{1}{2}|\vec{b}||\vec{a}|\sqrt{1-cos^2\theta}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2cos^2\theta}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

解題：

討論 ΔBCD: 令 $\overrightarrow{CD}=\vec{a}$ 、$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$

$\Delta BCD=\frac{1}{2}\sqrt{5^26^2-(5\times6\times\frac{-7}{17})^2}$

討論 ΔBAD: 令 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ 、$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$

$\Delta BAD=\frac{1}{2}\sqrt{8^29^2-(8\times9\times\frac{7}{17})^2}$

$\Delta BCD+\Delta BAD=12\sqrt{15}$

解法三：速解法 (此題不建議使用)

海龍公式：$\Delta abc=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 、$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

討論 ΔBCD:

$s=\frac{1}{2}(5+6+\sqrt{\frac{1457}{17}})=10.129$

$\Delta BCD=\sqrt{10.129(5.129)(4.129)(0.871)}=13.67$

討論 ΔBCD:

$s=\frac{1}{2}(9+8+\sqrt{\frac{1457}{17}})=13.129$

$\Delta BAD=\sqrt{13.129(4.129)(5.129)(3.871)}=32.807$

$\Delta BCD+\Delta BAD=46.47\cong12\sqrt{15}$