

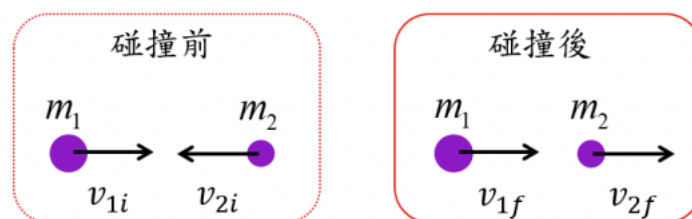
題幹：

碰撞是很典型的物體交互作用運動，詮釋碰撞機制的物理概念也普遍用於日常生活及科技研究應用，例如拉塞福散射、核反應中的粒子速度控制、球類運動科學、汽車撞擊測試研究及火箭飛行器科技等。試回答下列關於碰撞的問題：

試題一：

依據碰撞前後系統的總動能關係，碰撞可分為彈性碰撞及非彈性碰撞，此區別可清楚由恢復係數 ε 看出。對於下圖所示的兩物體碰撞問題，

- (1) 請推導出 ε 的表示式，並說明彈性碰撞及非彈性碰撞的差異。
- (2) 試推導兩物體碰撞後的 v_{1f} 速度及 v_{2f} (hint: 推導結果會包含 ε)。



解題過程：

預備知識：

1. 恢復係數 $\varepsilon = \frac{|v'_1 - v'_2|}{|v_1 - v_2|}$ ，即 $\varepsilon = \frac{\text{撞後相對遠離速度}}{\text{撞前相對接近速度}}$

2. 彈性碰撞：動量守恆且力學能守恆

3. 非彈性碰撞：動量守恆但力學能不守恆

進行推導：

(1)

第一情況（彈性碰撞）：

$$\text{動量守恆式：} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$\text{力學能守恆式：} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

將兩式分別整理：

$$m_1(v_1 - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_2)$$

$$m_1(v_1^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_2^2)$$

上下相除可得：

$$v_1 + v_{1f} = v_{2f} + v_2$$

列成分式型態並加上絕對值可得恢復係數 ϵ ：

$$\epsilon = \frac{|v_{1f} - v_{2f}|}{|v_2 - v_1|} = 1$$

第二情況（非彈性碰撞）：

$$\text{動量守恆式：} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$\text{力學能不守恆：} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 > \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

將兩式分別整理：

$$m_1(v_1 - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_2)$$

$$m_1(v_1^2 - v_{1f}^2) > m_2(v_{2f}^2 - v_2^2)$$

上下相除可得：

$$v_1 + v_{1f} > v_{2f} + v_2$$

$$\epsilon = \frac{|v_{1f} - v_{2f}|}{|v_2 - v_1|} < 1$$

若撞後兩物合體，即完全非彈性碰撞： $v_{1f} - v_{2f} = 0$

則：

$$\varepsilon = \frac{|v_{1f} - v_{2f}|}{|v_2 - v_1|} = 0$$

故非彈性碰撞之恢復係數 ε ：

$$0 \leq \varepsilon = \frac{|v_{1f} - v_{2f}|}{|v_2 - v_1|} < 1$$

恢復係數常用表示法：

$$\varepsilon = -\frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_2 - v_1}$$

$\varepsilon=1$ ，稱為彈性碰撞

$0 < \varepsilon < 1$ ，稱為非彈性碰撞

$\varepsilon=0$ ，稱為完全非彈性碰撞

(2)

根據恢復係數的表示以及動量守恆：

$$v_{2f} - v_{1f} = \varepsilon(v_2 - v_1)$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

兩式整理可得以下結論：

$$v_{1f} = \frac{m_1 - \varepsilon m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{(1 + \varepsilon)m_2}{m_1 + m_2} v_2 = (1 + \varepsilon)v_c - \varepsilon v_1$$

$$v_{2f} = \frac{m_2 - \varepsilon m_1}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{(1 + \varepsilon)m_1}{m_1 + m_2} v_1 = (1 + \varepsilon)v_c - \varepsilon v_2$$

若系統為一維彈性碰撞 ($\varepsilon = 1$)，則：

$$v_{1f} = 2v_c - v_1$$

$$v_{2f} = 2v_c - v_2$$

若系統為一維完全非彈性碰撞 ($\varepsilon = 0$)，則：

$$v_{1f} = v_{2f} = v_c$$

試題二：

球類運動中，球經碰撞後的狀態會影響運動競技的過程，這可用碰撞過程的恢復係數定量評估。

(1) 有一顆籃球自離地面 H 的高度自由落下，忽略空氣阻力，若此籃球與地面

碰撞的恢復係數為 ε_b ，則

(a) 計算此籃球與地面碰撞 1 次的反彈高度。

(b) 當籃球與地面碰撞 10 次並上彈至最高點時，總共歷時多久？

(2) 甲生欲量測其家中籃球跟網球的恢復係數，甲生將這兩種球皆自 H 的高度自

由落下，籃球碰撞地面後反彈的最大高度為 h_b ，而網球碰撞地面後反彈的最大

高度為 h_t ，試計算籃球恢復係數 ε_b 與網球恢復係數 ε_t 的比例關係。

解題過程：

(1-a) 將地面視為被撞物體 m_2 ，且 $m_2 \gg m_1$ ，故撞後 $v'_2 \cong 0$ 。

根據恢復係數可推得： $v'_1 = \varepsilon_b v_1$

利用力學能守恆可知 $v'_1 = \varepsilon_b v_1 = \varepsilon_b \sqrt{2gH}$

再利用一次力學能推出反彈高度

$$h = \varepsilon_b^2 H$$

(1-b)

第一次撞擊 $t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ 第二次撞擊 $t_2 = 2 \times \varepsilon_b \sqrt{\frac{2H}{g}}$

第三次撞擊 $t_3 = 2 \times \varepsilon_b^2 \sqrt{\frac{2H}{g}}$ 第四次撞擊 $t_4 = 2 \times \varepsilon_b^3 \sqrt{\frac{2H}{g}}$

.....

第十次撞擊： $t_{10} = 2 \times \varepsilon_b^9 \sqrt{\frac{2H}{g}}$ 反彈至最高點： $t_f = \varepsilon_b^{10} \sqrt{\frac{2H}{g}}$

總和：

$$t = [1 + 2(\varepsilon_b + \varepsilon_b^2 + \varepsilon_b^3 + \varepsilon_b^4 + \varepsilon_b^5 + \varepsilon_b^6 + \varepsilon_b^7 + \varepsilon_b^8 + \varepsilon_b^9) + \varepsilon_b^{10}] \sqrt{\frac{2H}{g}}$$



(2)

籃球恢復係數 $\varepsilon_b = \sqrt{\frac{h_b}{H}}$ 網球恢復係數 $\varepsilon_t = \sqrt{\frac{h_t}{H}}$

籃球恢復係數 ε_b 與網球恢復係數 ε_t 的比例關係：

$$\varepsilon_b : \varepsilon_t = \sqrt{h_b} : \sqrt{h_t}$$

試題三：

核反應中，中子的速度將決定核裂變反應發生的機率，物體碰撞的原理已普遍應用於控制中子的速度量值大小

- 1) 核裂變反應發生的機率與中子的速度量值大小是否為正相關？請簡述原因。
- 2) 石墨及氘是常用來控制中子速度大小的物質，考慮中子分別與此二物質發生正向彈性碰撞，試分別計算中子碰撞後與碰撞前的動能比值。
- 3) 請簡述以石墨及氘作為控制中子速度大小物質的優缺點。

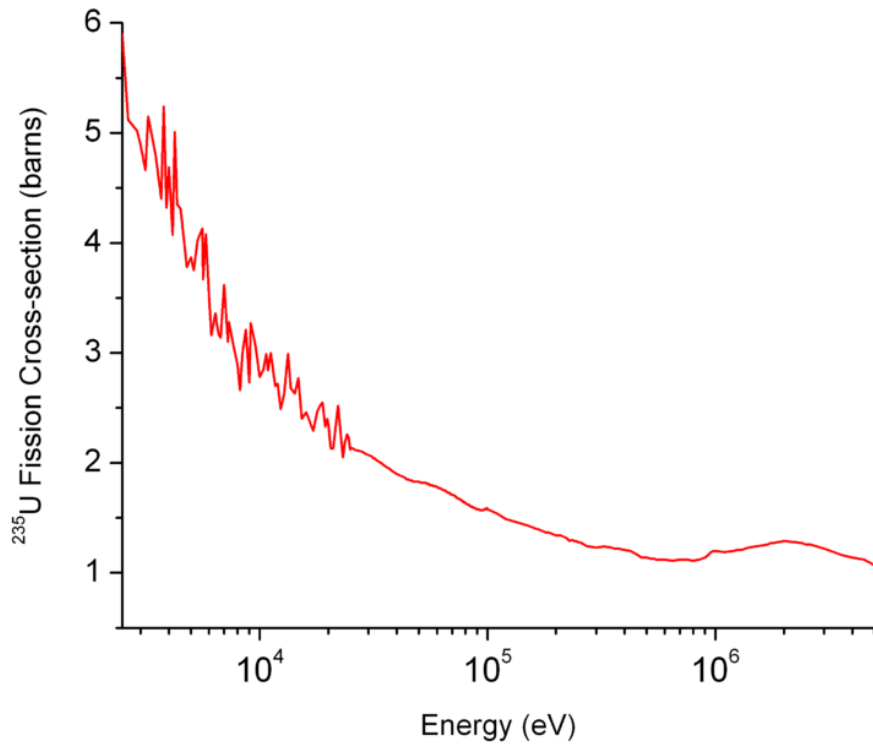
解題過程：

(1) 答：負相關

原子核粒子與物質發生反應的機率大小通常以截面(Cross Section)表示，一種對一核反應截面的大小，表示此核種發生某核反應機率大小的一種量度。

中子截面大小明顯地會與入射中子速率有關。在極端情況下，若入射中子速率過低，無法使核子超過閾能，則無法啟動核反應。因此，中子截面的數值取決於特定能量或某個能量區間內。

舉例來說，下方的 U-235 核分裂中子截面隨能量變化圖中，隨著能量增高，反應截面下降。所以在核反應爐中，我們會使用中子減速劑來降低中子能量，便於促使核分裂連鎖反應發生。



(2)質量比： 中子：石墨：氬 = 1:12:2

根據正向彈性碰撞：

$$v_{1f} = 2v_c - v_1$$

進行計算：

中子與石墨碰撞：

$$v_{1f} = 2 \times \frac{1}{1+12} v_1 - v_1 = -\frac{11}{13} v_1$$

撞後與撞前動能比： $(\frac{11}{13})^2:1 = 121:169 = \frac{121}{169}$

中子與氬碰撞：

$$v_{1f} = 2 \times \frac{1}{1+2} v_1 - v_1 = -\frac{1}{3} v_1$$

撞後與撞前動能比： $(\frac{1}{3})^2:1 = 1:9 = \frac{1}{9}$

(3)

石墨的優缺點：

優點：

(1) 石墨具有較高的散射截面和極低的熱中子吸收截面，較高的散射截面用以慢化中子，低的吸收截面防止中子被吸收，使得核反應堆能夠利用少量燃料達到臨界或正常運行。

(2) 石墨是耐高溫材料，它的三相點，15MPa 時為 4024°C，因此不能採用熔化、鑄造、鍛造等熱加工方法製造而只能採用類似粉末冶金的方法。它不像金屬那樣強度隨溫度而下降，而是略有增加，在 2000°C 以下應用，不會出現問題。

(3) 石墨有良好的導熱性能，在堆內可以有效地降低溫度梯度，不致產生太大的熱應力。

(4) 石墨化學性質非常穩定。除了高溫下的氧化、水蒸氣外，可以耐酸、鹼、鹽的腐蝕，因而可以用作熔鹽核反應堆和鈾鈾核反應堆的堆芯構件。

(5) 石墨抗輻照性能極好，能長期在堆內服役 30~40 年。

(6) 石墨可加工性好，可以加工成各種形狀的構件。

(7) 石墨原料豐富，價格便宜，容易製成純度高、強度大、不同密度要求的各種核石墨

缺點：

(1) 石墨也有缺點，它是各向異性晶體結構，成層狀分佈，原子密集於 a、b 晶面，同層原子最近距離為 0.141nm，相互為共價結合，具有較強的結合能力；而層距離為 0.335nm，層

間結合力為範德瓦爾力，結合力較弱。這種各向異性在石墨的物理、強度、輻照等行為中都會強烈地表現出來。

(2)高密度。核石墨應有較高的密度，一般控制在 $1.79/\text{cm}$ 左右，基本上能滿足石墨堆運行要求，石墨的體積密度表示慢化劑的有效慢化率，密度降低則單位體積內的原子數減少，慢化率也就降低。

(3)各向異性小。石墨用於核反應堆時，由於溫度上升產生熱膨脹和輻照引起的維格納 (Wigner) 生長。這種現象在垂直於擠壓方向表現甚大，而平行於擠壓方向表現較小，則石墨塊不能按原始形狀同樣比例膨脹。因而石墨這種各向異性膨脹在由許多石墨塊堆積而成的慢化層的結構是不能忽視的。石墨各向異性主要是由於石墨晶體結構具有極度的各向異性性質所致。另一方面在擠壓成型時焦炭顆粒的排列對製品的各向異性也具有決定性的影響，因此要在成型過程中採取措施減少各向異性度。

氘的優缺點：

優點：

雖然普通的輕水在一些反應爐（如輕水反應爐）中也可以作為中子慢化劑，但由於輕水能吸收中子使反應爐中中子濃度降低，所以輕水反應爐中的核燃料需要更高程度地濃縮以達到臨界質量，才能為持續反應提供保證。所以相對於輕水反應爐，重水反應爐對核燃料中有效放射性同位素濃度要求極低，可省去絕大部分提純中使

用的同位素分離工序，重水反應爐的用過燃料並不需要在濃縮就可以當成燃料，且其用過燃料不必進行後處理。

重水反應爐可以使用混合氧化物核燃料，這是回收核彈的方法；重水反應爐也可以使用含鈾不含鈾的燃料，則可以避免產生額外的鈾。

目前商用核反應爐的重大風險是在於失控時無法停止反應及核廢料處理儲存問題，重水反應爐可以減輕這些問題。

缺點：

重水反應爐的一些反對者認為正因為這類反應爐可用低濃縮鈾甚至未濃縮鈾作為核燃料，所以建立基於這類反應爐的核電廠會增加核擴散的風險：當某個國家掌握重水反應爐技術後，其只需天然鈾就可以運行核電廠，並通過核反應產生可用於製造核武器的危險放射性副產物，因此，這些國家便可繞過國際機構對濃縮鈾的監管而發展核武器。

印度曾從一個稱為「CIRUS」的研究用重水反應爐提取出鈾元素，並用於其首次核試驗（「笑佛核試驗」）。