國立陽明交通大學高中數理資優研習課程第二週數學

題目：

請在球面

$$S:(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$$

上找點 P，使得 P 到 $(5,2,1)$ 的距離最小，也找點 Q 使得 Q 到 $(5,2,1)$ 的距離最大，並分別且求出此距離最小值 m 及最大值 M。

先行準備條件：

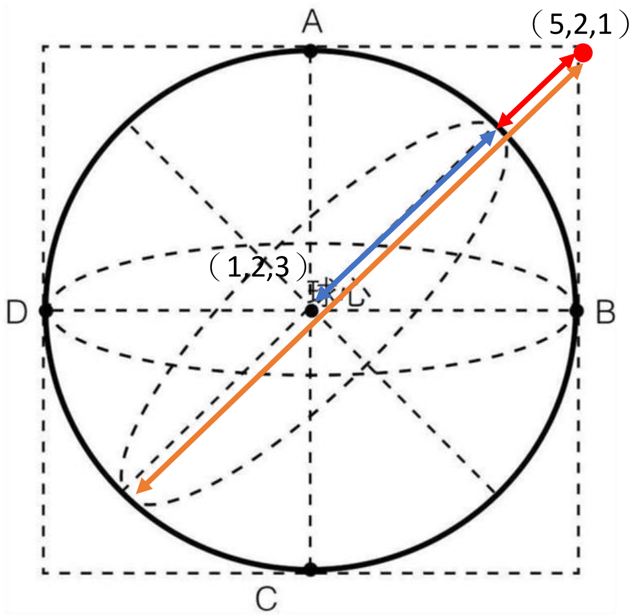
探討（5,2,1）位於球體的內、上、外？

方法：探討（5,2,1）與圓心（1,2,3）的距離與半徑的關係即可。

兩點距離：

$$\sqrt{(5-1)^2+(2-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}>r=3$$

故（5,2,1）位於球體的外部。



解法一：

由上述圓球方程式可知：

圓心為（1,2,3）且半徑為 3。

圖中紅線代表著 P 與（5,2,1）的最小距離 m。

而橘線代表著 Q 與（5,2,1）的最大距離 M。

由圖明顯可以看出

$$m=-r+\overline{OX}$$

$$M=r+\overline{OX}$$

其中 O 代表圓心 (1,2,3)、X 代表點 (5,2,1)。

進行計算：

$$m = -r + \overline{OX} = -3 + \sqrt{(5-1)^2 + (2-2)^2 + (1-3)^2} = -3 + 2\sqrt{5}$$

$$M = r + \overline{OX} = 3 + \sqrt{(5-1)^2 + (2-2)^2 + (1-3)^2} = 3 + 2\sqrt{5}$$

解法二：

利用平面與點之間的關係求距離。

首先先求平面法向量：

$$\vec{n} = (5,2,1) - (1,2,3) = (4,0,-2)$$

故可知兩平面方程式為：$4x - 2z = k$

求 k：

因圓心至平面距離為半徑，故：

$$\frac{|4\times 1 + 0\times 2 - 2\times 3 - k|}{\sqrt{4^2 + 0^2 + (-2)^2}} = 3$$

$$k = -2 \pm 6\sqrt{5}$$

故可知兩平面方程式為：

$$4x - 2z = -2 + 6\sqrt{5}$$

$$4x - 2z = -2 - 6\sqrt{5}$$

再用一次平面與點距離公式：

$$m = \frac{\left|4\times 5 + 0\times 2 - 2\times 1 - (-2 + 6\sqrt{5})\right|}{\sqrt{4^2 + 0^2 + (-2)^2}} = \frac{20 - 6\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{20\sqrt{5}}{10} - 3 = -3 + 2\sqrt{5}$$

$$M=\frac{\left|4\times 5+0\times 2-2\times 1-(-2-6\sqrt{5})\right|}{\sqrt{4^2+0^2+(-2)^2}}=\frac{20+6\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\frac{20\sqrt{5}}{10}+3=3+2\sqrt{5}$$