

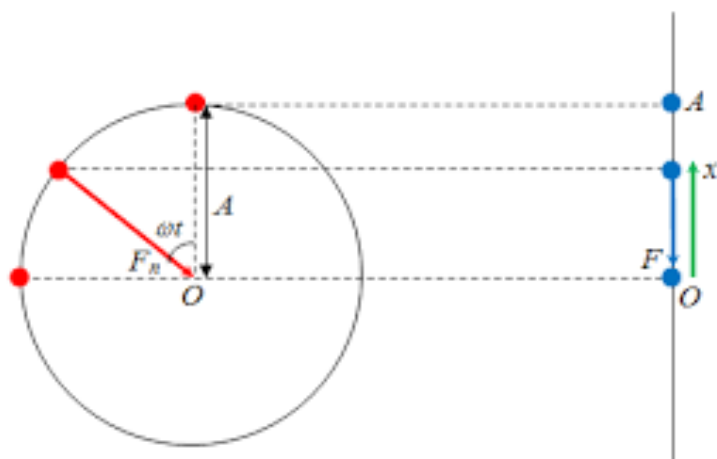
題幹：

波動與振盪在人們的生活中是無所不在的，規律振盪設計而成的時鐘使人們過著井然有序且充實的每一天，神經細胞振盪訊號的傳遞與心跳的脈動則使得生命得以活動與存續，此外，聲音與樂器、交流電源、振盪電路、訊號處理、電磁波應用、地震、水波與海浪運動、微觀原子與分子行為等科技領域均是波動與振盪的範疇。簡諧運動（Simple Harmonic Motion; SHM）是研究振盪乃至波動的最重要基本模型，試回答下列問題：

1.

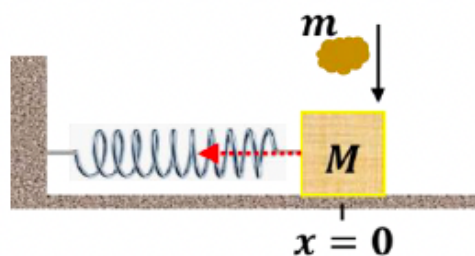
請簡述簡諧運動與週期運動的差異。

回答：簡諧運動最基本也是最簡單的一種機械震動。當某物體進行簡諧運動時，物體所受的力（或物體的加速度）的大小與位移的大小成正比，並且力（或物體的加速度）總是指向平衡位置。週期運動如等速率圓周運動的力則是指向圓心，且力的大小恆定。兩者之間的特殊關係則是「等速率圓周運動的軌跡投影即與簡諧運動的軌跡雷同。」



2.

如右圖，有一質量 M 的物體繫於彈簧，在無摩擦力的平面上做簡諧振盪運動，其振盪的週期 T 及振幅為 A 。現當 M 以速度 v 通過平衡點 ($x=0$) 時，有一質量 m 的黏土正好落在其上並黏住 M 一起移動，則分別計算此時簡諧運動的振幅、振盪週期及動能的最大值。



回答：

振幅：

根據力學能守恆： $\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(M+m)v'^2 + \frac{1}{2}kx'^2$

所以當物體運動至端點（亦即 $v' = 0$ 時），則：

$$x'_{max} = A$$

週期：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} \cdot T' = 2\pi \sqrt{\frac{M+m}{k}}$$

$$T' = \sqrt{\frac{M+m}{M}} \times T$$

最大動能：

根據力學能守恆： $\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(M+m)v'^2 + \frac{1}{2}kx'^2$

當物體到達平衡點時（亦即 $x' = 0$ 時），則：

$$E_K = \frac{1}{2}(M+m)v'^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

3.

對於將一個物體自北極運送至南極，小明提出了兩個方案： _

《方案一》：發射飛船載運物體，讓飛船以第一宇宙速度自北極飛行至南極。

《方案二》：沿著地球直徑建造一條貫穿地球南北極的隧道，讓物體受地球萬有引力的作用而穿過隧道運送。試說明物體透過哪一個方案運送會較省時？（假設地球是質量均勻分佈的球體，且已知地球半徑為 R 、密度為 ρ ，萬有引力常數為 G ）

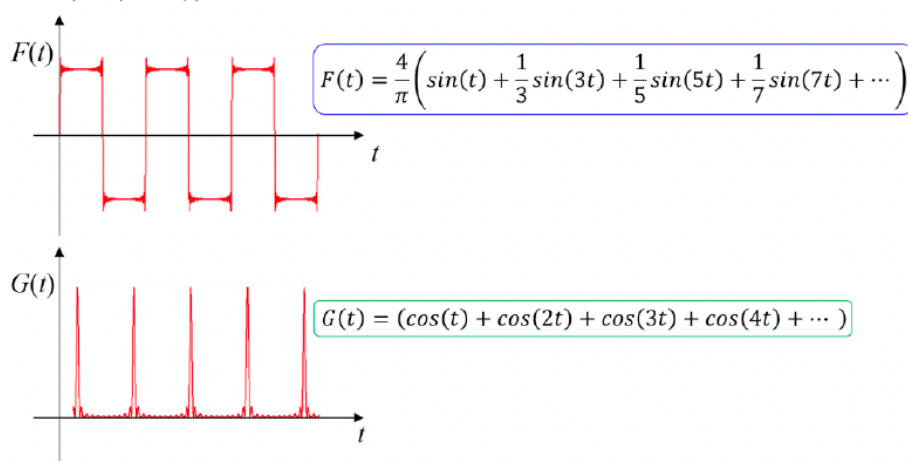
回答：

$$\frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = 0$$

4.

描述簡諧運動的主要函數為正弦（ $\sin(\bullet)$ ）或餘弦函數（ $\cos(\bullet)$ ），無數科學現象均與這些函數有關，則。

- 1) 兩振幅相同但不同頻率的正弦波函數： $\psi_1(t) = A\sin(\omega_1 t)$ ， $\psi_2(t) = A\sin(\omega_2 t + \phi)$ ，則。
 - (a) 試以三角函數公式計算 $\psi_1(t) + \psi_2(t)$
 - (b) 若 $\omega_1 = 10 \text{ rad/s}$ 、 $\omega_2 = \omega_1 + 0.01\omega_1$ 、 $\phi = 0 \text{ rad}$ ，則計算 $\psi_1(t) + \psi_2(t)$ 並大致作圖。
 - (c) 對於第(b)小題的作圖，簡述其意義及應用性（試舉一例）。
- 2) 下圖為各式型態的訊號函數，則
 - (a) 試思考並簡述此圖所傳達的概念。
 - (b) 對於圖中的 $G(t)$ 訊號函數，簡述其在自然界中對應的實例或其在科技上的應用（試舉一例）。



回答：

1-a.

$$\psi_1(t) = A\sin(\omega_1 t) \cdot \psi_2(t) = A\sin(\omega_2 t + \phi)$$

$$\psi_1(t) + \psi_2(t) = A\sin(\omega_1 t) + A\sin(\omega_2 t + \phi) = A[\sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t + \phi)]$$

$$\psi_1(t) + \psi_2(t) = A \left[2\sin \frac{(\omega_1 t) + (\omega_2 t + \phi)}{2} \cos \frac{(\omega_1 t) - (\omega_2 t + \phi)}{2} \right]$$

1-b.

$$\psi_1(t) + \psi_2(t) = A \left[2\sin \frac{(10t) + (10.1t + 0)}{2} \cos \frac{(10t) - (10.1t + 0)}{2} \right]$$

$$\psi_1(t) + \psi_2(t) = A \left[2\sin \frac{20.1t}{2} \cos \frac{-0.1t}{2} \right] = A(\sin 20.1t)$$

使用GeoGebra繪圖計算機：(應題目未給予A值，故繪圖所的最大幅度為1，若要更正圖形，則須將振幅的1改為A即可。)

