

國立陽明交通大學高中數理研習課程第一週數學

問題一：

三角形 ABC 為等腰三角形，其中  $\overline{AB} = \overline{AC} = 3$ ，而 D 為  $\overline{BC}$  上一點。

求  $\overline{AD}^2 + \overline{BD} \cdot \overline{CD} = ?$

解題：

特例推測一：將  $\overline{AD}$  垂直底邊進行推導。

(可推論  $\angle B = \angle C =$  任意值，且  $\angle D$  固定時皆成立)

又因其為等腰三角形，故可知：

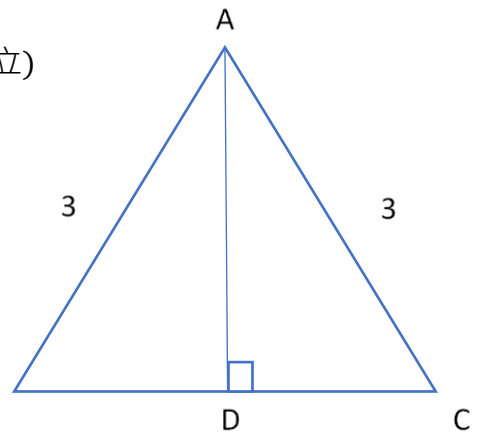
$\overline{AD}$  垂直平分  $\overline{BC}$ ， $\overline{AD}$  為  $\overline{BC}$  的中線。

利用中線定理計算：

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2) = 2(\overline{BD} \cdot \overline{CD} + \overline{AD}^2)$$

$$3^2 + 3^2 = 2(\overline{BD} \cdot \overline{CD} + \overline{AD}^2)$$

$$\overline{BD} \cdot \overline{CD} + \overline{AD}^2 = 9$$



特例推測二：(推論 D 在任一  $\angle B$ 、 $\angle C$  時改變角度亦成立，即  $\angle D$  未固定)

假設此為一正三角形 (特殊三角形)，且 D 向 B 或 C 點前進。

程式碼：以每次調幅 0.01 徑度趨近 C 點，所編譯的程式碼如下：

```

2 package apx;
3 import java.text.DecimalFormat;
4
5 public class APX {
6
7     public static void main(String[] args) {
8         double r,x,y,z,tal;
9         for(r=0;r<=30;r+=0.01){
10             x=(3*Math.sin(Math.toRadians(30+r)))/Math.sin(Math.toRadians(90-r));
11             y=3-x;
12             z=(3*Math.sin(Math.toRadians(60)))/Math.sin(Math.toRadians(90-r));
13             DecimalFormat df = new DecimalFormat("#.##");
14             tal=z*z+x*y;
15             System.out.println("r="+df.format(r)+" "+"tal="+df.format(tal));
16         }
17     }
18 }

```

編譯後所獲得的結果： $\overline{BD} \cdot \overline{CD} + \overline{AD}^2$  皆為 9.00 ，下圖為編譯的一小部份。

```

r=18.68 tal=9
r=18.69 tal=9
r=18.7 tal=9
r=18.71 tal=9
r=18.72 tal=9
r=18.73 tal=9
r=18.74 tal=9
r=18.75 tal=9
r=18.76 tal=9
r=18.77 tal=9
r=18.78 tal=9

```

特例推論二延續：特殊三角形

假設此為一為底角為 45 度的等腰三角形，且 D 向 B 或 C 點前進。

```

2 package apx;
3
4 import java.text.DecimalFormat;
5
6 public class APX_2 {
7     public static void main(String[] args) {
8         double r,x,y,z,tal;
9         for(r=0;r<=30;r+=0.01){
10             x=(3*Math.sin(Math.toRadians(45+r)))/Math.sin(Math.toRadians(90-r));
11             y=3*Math.sqrt(2)-x;
12             z=(3*Math.sin(Math.toRadians(45)))/Math.sin(Math.toRadians(90-r));
13             DecimalFormat df = new DecimalFormat("#.##");
14             tal=z*z+x*y;
15             System.out.println("r="+df.format(r)+" "+"tal="+df.format(tal));
16         }
17     }
18 }
19

```

編譯後所獲得的結果： $\overline{BD} \cdot \overline{CD} + \overline{AD}^2$  皆為 9.00，下圖為編譯的一小部份。

```
r=29.72 tal=9
r=29.73 tal=9
r=29.74 tal=9
r=29.75 tal=9
r=29.76 tal=9
r=29.77 tal=9
r=29.78 tal=9
r=29.79 tal=9
r=29.8 tal=9
```

特例推論三 ( 所有三角形皆適用 )：使所有的角度不斷改變。

```
2 package apx;
3
4 import java.text.DecimalFormat;
5
6 public class apx_3 {
7     public static void main(String[] args){
8         double x,y,z,a,b,c,tal;
9         for(x=0.01;x<90;x+=0.01){
10             for(y=0.01;y<90;y+=0.01){
11                 z=180-x-y;
12                 a=(3*Math.sin(Math.toRadians(y)))/Math.sin(Math.toRadians(z));
13                 b=(3*Math.sin(Math.toRadians(x)))/Math.sin(Math.toRadians(z));
14                 c=Math.sqrt(18.0-18*Math.cos(Math.toRadians(180.0-2*x)))-a;
15                 tal=b*b+a*c;
16                 DecimalFormat df = new DecimalFormat("#.###");
17                 System.out.println("x="+df.format(x)+" y="+df.format(y)+" tal="+df.format(tal));
18             }
19         }
20     }
21 }
```

以圖形解釋：

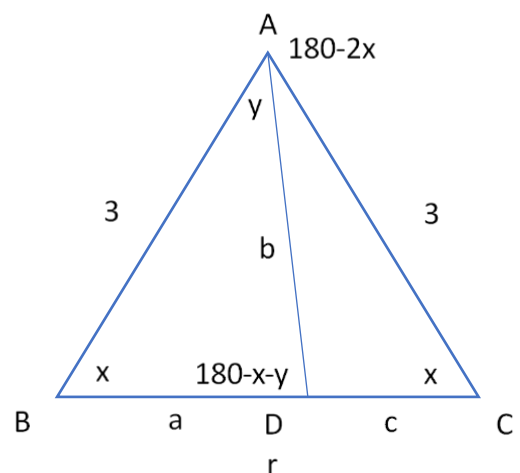
運算過程：

正弦定理求  $a$ 、 $b$ ：

$$\frac{3}{\sin(180^\circ - x - y)} = \frac{a}{\sin y} = \frac{b}{\sin x}$$

餘弦定理求  $c$ ：

$$r^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times 3 \cos(180^\circ - 2x)$$



$$r = \sqrt{18 - 18\cos(180^\circ - 2x)}$$

$$c = r - a$$

題目所求為： $a^2 + bc = 9$

編譯結果 ( 部分截圖 )：編譯結果皆為 9

```
x=0.08 y=89.97 tal=9
x=0.08 y=89.98 tal=9
x=0.08 y=89.99 tal=9
x=0.09 y=0.01 tal=9
x=0.09 y=0.02 tal=9
x=0.09 y=0.03 tal=9
x=0.09 y=0.04 tal=9
```

結論：此三角形的  $\overline{AD}^2 + \overline{BD} \cdot \overline{CD} = 9$

接下來我們來推導此題型的公式解：

將邊長由 0.01 以每次調幅 0.01 遞增至極大值。

程式碼如下：

```
1 package apx;
2
3
4 import java.text.DecimalFormat;
5
6
7 public class apx_4 {
8     public static void main(String[] args){
9         double x,y,z,a,b,c,tal;
10        double d;
11        for(d=0.01;d<1000000000;d+=0.01){
12            for(x=0.01;x<90;x+=0.01){
13                for(y=0.01;y<90;y+=0.01){
14                    z=180-x-y;
15                    a=(d*Math.sin(Math.toRadians(y)))/Math.sin(Math.toRadians(z));
16                    b=(d*Math.sin(Math.toRadians(x)))/Math.sin(Math.toRadians(z));
17                    c=Math.sqrt(2*d*d-2*d*d*Math.cos(Math.toRadians(180.0-2*x)))-a;
18                    tal=b+b*a*c;
19                    DecimalFormat df = new DecimalFormat("#.##");
20                    System.out.println("x="+df.format(x)+" y="+df.format(y)+" tal="+df.format(tal));
21                }
22            }
23        }
24    }
25 }
```

進行編譯歸納後可得到一結論：

當兩腰長為 $n$ 時， $\overline{AD}^2 + \overline{BD} \cdot \overline{CD} = n^2$

作者：國立新竹高級中學 林英豪