

NCTU 高中數理資優研習課程第三次物理作業

(1) 當人造衛星的軌道週期等於地球的自轉週期，即稱為地球同步衛星 (Geosynchronous satellite)，試估算地球同步衛星的軌道半徑 R 。

解法：

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \quad M_g = 5.98 \times 10^{24} \quad R_g = 6.37 \times 10^6$$

根據向心力公式 $\frac{GMm}{R^2} = m \times \frac{4\pi^2 R}{T^2}$

可以推得 $T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$

因其為同步衛星，故可知此時 $T = 38400 \text{ s}$ 代入上式可得

$$38400 = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{R^3}{6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24}}}$$

$$13757.962 = \sqrt{\frac{R^3}{6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24}}}$$

$$R^3 = 7.5498 \times 10^{22}$$

$$R = 4.226 \times 10^7 \text{ m}$$

(a) 地球靜止軌道 (Geostationary orbit, GEO) 是非常重要的同步衛星軌道，則

1. 地球靜止軌道的繞行方向是？為什麼？

回答：

太空飛行器運行方向與地球自轉方向一致，因為這樣才能讓太空飛行器相對於地面觀察者來說是靜止不動的。

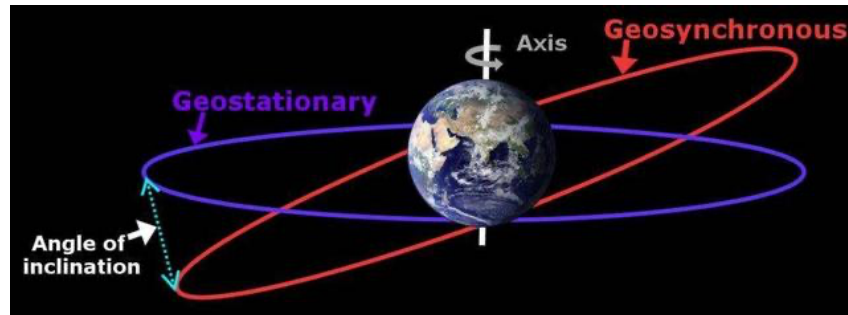
介紹：什麼是地球靜止軌道？

回答：

地球靜止軌道是指地球赤道面上方 **35,786km** 的圓形軌道，該軌道上太空飛行器的運行方向和地球自轉方向一致。在地球靜止軌道上的太空飛行器繞地球運行一周的時間和地球自轉周期（一恆星日）相同，因此，在地面觀測者看來，這樣的太空飛行器是在天空固定不動的。通信衛星和氣象衛星一般運行在靜止軌道，因此地面站天線只要對準衛星的定點位置就可以通訊，而不用轉動天線。利用這個特點，把攜帶有可見光和近紅外光傳感器的海洋衛星發射到靜止軌道上，這樣就可以監測海洋環境的細微變化，比如 **GOCI** 衛星。

一、地球靜止衛星與地球同步衛星的差別：

這兩者的差別在於地球同步衛星可以在也可以不在與赤道平面成夾角的軌道上運行，但對地靜止衛星必須在與赤道平面成 **0 度角**的軌道上運行。

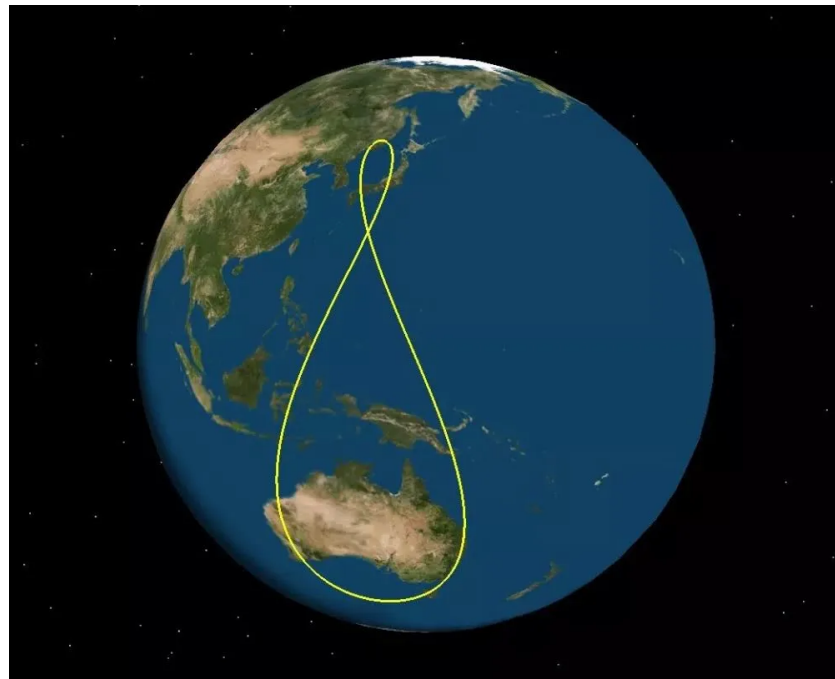


區別一：軌道傾角有區別，地球同步軌道不一定在赤道面上方

區別二：

觀察者看到的現象不同，地球同步衛星每天以相同時間通過地球上的同一個點，地面觀察者看到衛星是移動的；而地球靜止軌道上的衛星一直固定在其定點位置不動。

區別三：星下點軌跡不同，地球同步衛星的星下點軌跡是一條 8 字型的封閉曲線



二、軌道穩定性

地球靜止軌道只能分布在赤道上空大約 $35,786 \text{ km}$ 的地方，在這個高度上，軌道速度為 3.07 km/s ，軌道周期為 $1,436$ 分鐘，很接近一個恆星日 23.934461223 小時)。這確保了衛星的運行周期和地球自轉周期一致，因此衛星的星下點在地面固定不動。所以，所有的靜止軌道衛星都必須運行在這條軌道上。

第一考量：軌道平面進動

靜止軌道上的太空飛行器受到日月引力和地球扁率的疊加影響，導致其軌道平面不斷發生進動。軌道進動周期約為 53 年，傾角的初始變化率約為 $0.85^\circ/\text{年}$ ，這導致每過 26.5 年傾角達到最大值 15° 。為了修正這項軌道攝動，太空飛行器需要進行定期的軌道保持機動，每年用於修正傾角的總速度增量大約為 50m/s

第二考量：經度的漂移

經度的漂移，這是由地球非球型導致的——赤道略呈橢圓形。靜止軌道上有兩個穩定的平衡點 (75.3°E 和 104.7°W)和兩個不穩定的平衡點(165.3°E 和 14.7°W)。位於靜止軌道平衡點之間的太空飛行器，在沒有任何機動的情況下，會緩緩朝著兩個穩定平衡點加速移動，這導致了經度的周期性變化。為了修正經度漂移效應，靜止軌道衛星每年共需要大約 2m/s 的速度增量來進行位置保持機動，具體的數值取決於衛星的定點經度。

太陽風和輻射光壓也會對衛星產生微小的作用力，隨著時間增長，這些作用力會使得衛星逐漸漂移，最終離開其標稱軌道。

(b) 若要自地球表面發射繞經南北極軌道(繞極軌道)的地球同步衛星，所需提供給該衛星的最小速度為何？

由第一題結果可知同步衛星軌道半徑 $R' = 4.226 \times 10^7 \text{m}$

且地球極半徑為 $R = 6.357 \times 10^6 \text{m}$

當同步衛星在該軌道上運行所具有的能量 $E' = K + U = \frac{1}{2}U = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{GMm}{R'}\right)$

當同步衛星在地球表面所具有的能量 $E = U = -\frac{GMm}{R}$

$$E' - E = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{GMm}{R'}\right) - \left(-\frac{GMm}{R}\right) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24} \times m}{4.226 \times 10^7}\right) - \left(-\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24} \times m}{6.357 \times 10^6}\right)$$

$$v^2 = 3.99 \times 10^{14} \times \left(-\frac{1}{8.452 \times 10^7} + \frac{1}{6.357 \times 10^6}\right) = 3.99 \times 10^{14} \times \left(\frac{7.816 \times 10^7}{5.373 \times 10^{14}}\right) = 58.04 \times 10^6$$

$$v = 7.62 \times 10^3 \text{m/s}$$

(c) 若要自地球表面發射繞行於地球靜止軌道的地球同步衛星，所需提供給該衛星的最小速度為何？

由第一題結果可知同步衛星軌道半徑 $R' = 4.226 \times 10^7 \text{m}$

因地球靜止軌道位於赤道面上，

且地球赤道半徑 $R = 6.378 \times 10^6 \text{m}$

當同步衛星在該軌道上運行所具有的能量 $E' = K + U = \frac{1}{2}U = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{GMm}{R'}\right)$

當同步衛星在地球表面所具有的能量 $E = U = -\frac{GMm}{R}$

$$E' - E = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{GMm}{R'} \right) - \left(-\frac{GMm}{R} \right) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24} \times m}{4.226 \times 10^7} \right) - \left(-\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 5.98 \times 10^{24} \times m}{6.378 \times 10^6} \right)$$

$$v^2 = 3.99 \times 10^{14} \times \left(-\frac{1}{8.452 \times 10^7} + \frac{1}{6.378 \times 10^6} \right) = 3.99 \times 10^{14} \times \left(\frac{7.814 \times 10^7}{5.391 \times 10^{14}} \right) = 57.83 \times 10^6$$

$$v = 7.605 \times 10^3 \text{ m/s}$$

(d) 試根據(b)及(c)的結果，簡短統整說明。

因地球赤道半徑大於地球極半徑，在兩者地面（起始點）的能量（位能），位於地球赤道地面者大於位於地球極半徑者。再根據第一題所計算之結果，可知同步衛星的軌道半徑相同，兩者以同步衛星軌道繞行時，所具有的總能量相等。要讓衛星能夠在同步衛星軌道上運行，則必須使衛星擁有等同於該軌道的力學能，故補充之動能即為末能量減去初能量（即起始點之位能），可推知繞行地球靜止軌道所需補充的能量小於繞極軌道。

(a) 試根據文獻資料估算人造衛星在三種軌道的繞行速度及週期。(註：LEO以軌道半徑500公里做計算；MEO以軌道半徑2,500公里做計算；HEO以軌道半徑40,000公里做計算)

解法：

根據向心力公式 $\frac{GMm}{R^2} = m \times \frac{4\pi^2 R}{T^2}$ 可以推得 $T = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$

根據向心力公式 $\frac{GMm}{R^2} = m \times \frac{v^2}{R}$ 可以推得 $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$

此題註解中說明 LEO 的軌道半徑 500km，但 500km 應在地球內部，應更改為距地面高度 500km，故 LEO、MEO、HEO，個人計算時自行更改為具高度～～公里計算

LEO : $T = 5662.15 \text{ s}$ $v = 7619.65 \text{ m/s}$

MEO : $T = 8306.76 \text{ s}$ $v = 6705.81 \text{ m/s}$

HEO : $T = 99289.15 \text{ s}$ $v = 2932.88 \text{ m/s}$

SpaceX 的「星鏈」計畫，

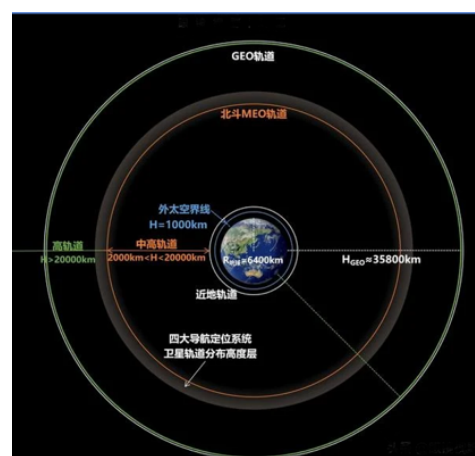
應是將人造衛星發射至哪一種軌道運行工作？
簡短說明原因。

回答：LEO 低軌道衛星群

低軌道衛星距離地面 2,000 公里以下，
由於距離地面較近，延遲時間大約 20 毫秒(ms)，
相對於中軌道衛星延遲約 100 毫秒(ms)

高軌道衛星延遲約 250 毫秒(ms)

根據此結果比較，可知低軌道衛星用來通訊會相較其他兩者效果來得更好。



各類衛星發展特性

	LEO	MEO	GEO
主要應用領域	遙測、通訊、 地球觀測	定位導航	通訊、電視廣播
軌道高度 (km)	160~2000	8000~12000	~36000
傳輸延遲 (ms)	<50	125~250	600~800
傳輸耗能	最低	中等	最高
衛星壽命	約 5 年	7~12 年	約 15 年
建置成本	最低	中等	最高
衛星重量 (kg)	<500	約 550	>1000

[補充] SpaceX 星鏈計畫

一、介紹：

星鏈計畫是太空服務公司 **SpaceX** 計劃推出的一項透過低軌道衛星群，提供覆蓋全球的高速網際網路存取服務。憑藉遠遠超過傳統衛星網際網路的性能，以及不受地面基礎設施限制的全球網路，星鏈可以為網路服務不可靠，費用昂貴或完全沒有網路的位置提供高速網際網路服務，另外也有可能結束當今世界存在的網路封鎖。旨在為世界上的每一個人提供高速網際網路服務。

二、應用層面：

一、提供服務的國家

目前提供美國、加拿大、英國、德國、義大利、葡萄牙、紐西蘭、澳大利亞等國使用，而目前提供版本皆為 Beta 版本。

二、全球寬頻網路

SpaceX 旨在為地球上服務欠缺的地區提供頻寬網際網路連接，並為城市地區提供價格優惠的服務。該公司表示，出售衛星網際網路服務所產生的現金流將是資助其火星計劃的必要條件。

三、交通工具應用

Starlink 衛星網路跟移動中的汽車、卡車、輪船以及飛機等交通工具連結，以便拓展更廣泛的網路服務。希望讓 **Starlink** 可以跟「移動地面站」連結。而他們所說的移動地面站，其實就是指地面上的汽車或卡車、海面上的輪船以及天空中的飛機，希望讓使用者即便在移動過程中都能用衛星網路上網。

四、火星計劃

從長遠來看，**SpaceX** 打算開發和部署一個版本的衛星通訊系統以供火星使用。

三、衛星版本比較

Starlink v0.9 衛星：

具有多個高通量天線和單個太陽能電池陣列的平板設計。

採用霍爾效應推進器。

Star tracker 導航系統，用於精確定位。

能夠使用美國國防部提供的碎片數據來自主避免碰撞。

95%的部件將在地球大氣層中燃燒掉。

質量：227 千克（500 磅）。

Starlink v1.0 衛星

100%的部件將在地球大氣層中燃燒掉。

質量：227 千克（500 磅）。

添加了 **K_a** 波段。

編號為 1130 的衛星或稱為 **DarkSat** 的反照率降低。

四、低軌道衛星通訊計畫

國家	企業	計畫名稱	發射數量	頻段
美國	Space X	Starlink	11927	Ku、Ka
	Amazon	Kuiper	3236	Ka

加拿大	Telesat	Telesat LEO	512	Ka
	Kepler	Kepler	140	Ku
英國	OneWeb	OneWeb	650	Ku、Ka、V

五、問題層面：

一、光污染

因擔心光污染，天文學界對計劃中的大量衛星提出了批評。天文學家稱，可見衛星的數量將超過可見星的數量，並且它們在光學和無線電波長上的亮度都會嚴重影響科學觀測。由於星鏈衛星可以自主改變其軌道，因此無法安排觀測時間來避開它們。

二、垃圾與碰撞

人們對將數千顆衛星放置在軌道上產生長期垃圾危險的擔憂，**SpaceX** 透過降低計劃中的衛星軌道做了部分緩解。失效衛星預期在幾年內脫離軌道。然而，碰撞的風險不可忽略，儘管伊隆·馬斯克（**Elon Musk**）願意按需調整衛星方向，但 **SpaceX** 在計劃早期並未移動幾乎快與歐洲衛星相撞的衛星。

