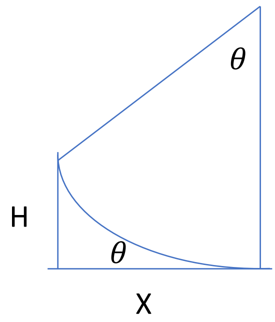
NCTU 高中數理資優研習課程第二次物理作業

1.$\because \frac{H}{x} \sim 0.08$ 屬於小角度弧面運動，可將 $\frac{H}{x}$ 視為單擺與垂直面的夾角正切值

$tan\theta \approx sin\theta \approx \theta$，即為小角度的單擺運動。

$\therefore t_1 = t_2$



2.

[解法一]

(a)根據力學能守恆 $\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad v = \sqrt{2gh}$

$v_{甲} = \sqrt{2gh} \qquad v_{乙} = \sqrt{2gh}$

(b) $gsin45° t_{甲} = \sqrt{2gh} \quad t_{甲} = 2\sqrt{\frac{h}{g}}$

乙：分段討論（以折角為分界）且設折角瞬時速率為v_1且

由力學能守恆推導可得：

$v_0 = 0 \quad v_1 = \sqrt{2gh\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}} \quad v_2 = \sqrt{2gh}$

由角度判斷可知，前半段與後半段的路程相同，設為 x

再由餘弦定理推得$x = (\sqrt{3}-1)h$

最後再以平均速率的解法將總時間算出：

$$t_{乙} = \frac{(\sqrt{3}-1)h}{\frac{0 + \sqrt{2gh\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}}}{2}} + \frac{(\sqrt{3}-1)h}{\frac{\sqrt{2gh\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}} + \sqrt{2gh}}{2}}$$

(3-a)

若要使車子以最短時間由 A 下滑至 B，軌道應設計為擺線。

依據「費馬原理」可知光線會以一條所需時間最短的路徑行走，那麼將質點視作光來看，光從點 A 走到點 B 的路徑即為「最速降線」。再依據「力學能守恆」可知當下移 y'時，$v = \sqrt{2gy'}$ 、「司奈耳定律」可知 $\frac{sin\alpha}{v} = constant$。

最後再依據「微分方程」:

$$sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{1}{\sqrt{tan^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{dy}{dx})^2 + 1}}$$

$$\frac{sin\alpha}{v} = C \text{ , where } C \text{ is a constant}$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{(\frac{dy}{dx})^2 + 1}}}{\sqrt{2gy}} = C$$

$$\frac{1}{\sqrt{2gy[(\frac{dy}{dx})^2 + 1]}} = C$$

$$y[(\frac{dy}{dx})^2 + 1] = \frac{1}{2gC^2} = k \text{ , where } k \text{ is a constant}$$

$$[(\frac{dy}{dx})^2 = \frac{k}{y} - 1 = \frac{k-y}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{k-y}{y}}$$

$$dx = \sqrt{\frac{k-y}{y}}\ dy$$

$$x = \int \sqrt{\frac{y}{k-y}}\ dy = \int \sqrt{\frac{ksin^2\emptyset}{k - ksin^2\emptyset}}\ 2ksin\emptyset cos\emptyset d\emptyset = \int \frac{sin\emptyset}{cos\emptyset} 2ksin\emptyset cos\emptyset d\emptyset$$

$$= 2k \int sin^2\emptyset d\emptyset$$

$$= k \int (1 - cos2\emptyset) d\emptyset$$

$$= k\left(\emptyset - \frac{sin2\emptyset}{2}\right) + C'', \text{where } C \text{ is a constant}$$

We can take appropriate x-axis such that C’’=0

$$x = k\left(\emptyset - \frac{sin2\emptyset}{2}\right) = \frac{k}{2}(2\emptyset - sin2\emptyset)$$

$$y = ksin^2\emptyset = k\left(\frac{1 - cos2\emptyset}{2}\right) = \frac{k}{2}(1 - cos2\emptyset)$$

$$Let\theta = 2\emptyset \text{ and } a = \frac{k}{2} \text{ , we have:}$$

$$x = a(\theta - sin\theta)$$
$$y = a(1 - cos\theta)$$

(3-b)

為使圓周運動順利進行，在圓的最高點所受正向力需大於 0，而此時最高點速率可由向心力觀念求得$v = \sqrt{gR}$ (此即為圓周運動的界限速率)

為使得計算方便，利用力學能守恆觀念將最低點速率求得$v = \sqrt{5gR}$

根據力學能守恆：$mgh = \frac{1}{2}m(5gR)$ $h = \frac{5}{2}R$

(3-c)

$N_Q - mg = m \times \frac{5gR}{R}$ $N_Q = 6mg$

$N_P + mg = m \times \frac{gR}{R}$ $N_P = 0$

(3-d)若雲霄飛車為圓形軌道，那麼乘客會在最高點時感受到失重狀態，然而在衝下最低點時，所受到的卻是 5g 的重力加速度量值，5 倍的重力加速度會使乘客感到不適，甚至是失去意識。所以若能將半徑增大，那麼在運轉期間所受到相應的加速度量值也就能減少許多。