NCTU 高中數理資優研習課程第二次數學研習作業

題目：

$7^{7^{7^{\cdots^{7}}}}$ (2021 個 7) 的末兩位數為多少？

解法：

(末兩位)　7^0=01　7^1 =07　7^2=49　7^3=43　7^4=01

由上述可知 4 個次方項為一循環，

故可以以數學式表示：次方數為$4n + k$ $\{0 \le k \le 3\,, n \ge 0 \wedge n\epsilon\mathbb{Z}\}$

依據同餘性質，只需找出次方數的 mod4 即可

$7^{7^{7^{\cdots^{7}}}} = (2 \times 4 - 1)^{7^{7^{\cdots^{7}}}}$

依據同餘性質 $(km \pm a)^n = (\pm a)^n\ (mod\ m)$

可推得$7^{7^{7^{\cdots^{7}}}} = (2 \times 4 - 1)^{7^{7^{\cdots^{7}}}} = (-1)^{7^{7^{\cdots^{7}}}}(mod\ 4)$

而 $(-1)^{7^{7^{\cdots^{7}}}}$的次方數$7^{7^{7^{\cdots^{7}}}}$為奇數

所以$(-1)^{7^{7^{\cdots^{7}}}} = (-1)$

可推得$7^{7^{7^{\cdots^{7}}}} = (2 \times 4 - 1)^{7^{7^{\cdots^{7}}}} = (-1)^{7^{7^{\cdots^{7}}}}(mod\ 4) = -1\ (mod\ 4)$

其中$-1\ (mod\ 4) \equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)$

所以$7^{7^{7^{\cdots^{7}}}} \equiv 3\ (mod\ 4)$

可推得$7^{7^{7^{\cdots^{7}}}}$的末兩位 $\equiv 7^3$的末兩位 $= 43$