



# Introducción a sistemas de control automático

*Una aproximación didáctica para ingeniería en informática y afines.*

Guillermo Caporaletti  
Juan Manuel Castellano  
2024



# Presentación

La presente publicación es el resultado de una década de práctica pedagógica en el curso de Sistemas de Control Automático de Ingeniería en Informática de la UNDAV. El valor de la publicación no está tanto en los temas incluidos –dado que se encuentran ya desarrollados en otros libros y artículos– sino en su abordaje en función de una enseñanza adecuada a esta carrera. Inicialmente, los capítulos han surgido como apuntes que faciliten el abordaje de los temas. Luego se han ido extendiendo, a impulso del pedido de los y las estudiantes. Finalmente, se han completado algunos capítulos para que de conjunto la publicación sea suficientemente abarcativa.

El libro desarrollado en este proceso se parece más a un tutorial bien elaborado que a un manual o enciclopedia. No pretende abordar todos los temas. Para eso existen ya publicaciones completas y precisas, cuyos capítulos son citados a lo largo de estas páginas para profundizar algunos temas. El objetivo de este libro es ayudar a introducir los conocimientos de control en una disciplina conexas a ingeniería en control. Se espera que, con el curso y la ayuda de estos capítulos, el o la estudiante pueda aprender a resolver problemas simples de control o, en todo caso, incorporar los conceptos necesarios para comprender los problemas que deberá resolver un especialista.

En base al plan de estudios, el contenido del curso es una introducción a los sistemas de control que se aplican en la investigación, la industria y la domótica. Aporta a la formación profesional integrando contenidos de software, hardware, matemática y sistemas físicos incorporados a lo largo de toda la carrera. En el área de matemática, exige la comprensión de las transformadas de Laplace y otros contenidos del área. Requiere también integrar los conocimientos de física, particularmente en la comprensión de la modelización de sistemas físicos. Se nutre además de los conocimientos de electrónica, no sólo para la modelización de circuitos eléctricos, sino también para la implementación de actuadores básicos operados mediante señales de tensión o corriente. La programación de sistemas embebidos, utilizados para implementar el controlador en sí, requiere conocimientos de hardware y de software. Toda esta integración de contenidos debe lograrse junto con los contenidos específicos de sistemas de control, resultando en un complejo desafío didáctico.

El método tradicional es abordar estos contenidos desde la teoría general hacia casos particulares. Los problemas servirían para “reforzar” esa teoría y, en el mejor de los casos, podría haber una práctica de laboratorio orientada a comprobarla. Según este enfoque, es usual que los libros sobre sistemas de control dediquen extensos capítulos a la base general de matemática y física para profundizar luego en los problemas específicos. Esto tiene la lógica de garantizar una descripción general de los métodos matemáticos y modelos físicos utilizados en control. Implicaría ir desde lo abstracto a lo concreto, desde lo general a lo particular. En el curso hemos considerado que esta no es la mejor solución para el proceso de enseñanza-aprendizaje. En primer lugar, porque así se tiende a presentar la teoría y los modelos como verdades ya dadas, incuestionables. Junto con esto, implicaría la postergación de los temas específicos, lo que además suele resultar desmotivante. En este mismo sentido, las sucesivas ediciones de su clásico libro *Ingeniería de control moderna*, Katsuhiko Ogata ha ido desplazando acertadamente temas de matemática desde los primeros capítulos a los anexos, buscando introducirse de forma más directa a los temas específicos.

El método didáctico desarrollado en el curso, y que es acompañado por esta publicación, se ha buscado jerarquizar la práctica –con experiencias de laboratorio concretas– de modo tal que los problemas que van apareciendo nos exigen profundizar en la teoría. De este modo logramos ubicar a los temas específicos de control como eje central de la materia, eje alrededor del cual se van incorporando los demás conocimientos matemáticos, físicos, electrónicos y de software, desde el

inicio hasta el fin del cuatrimestre. Si bien un libro no sigue exactamente el orden de temas de un curso teórico-práctico, sí se ha buscado que se le acerque.

El capítulo introductorio se inicia con una simple pregunta que remite a los preconceptos que tienen los estudiantes: ¿qué es control? Luego siguen: dos capítulos sobre modelización a lazo abierto; un capítulo sobre control sí-no; dos capítulos sobre control proporcional y herramientas de diseño; y un capítulo final sobre control PID. Los temas han buscado ir paso a paso desde lo simple a lo complejo.

Otra cuestión es la importancia dada a las aplicaciones prácticas. Por este motivo, se ha incluido un capítulo sobre control sí-no que, por más simple que pueda parecer, sigue siendo uno de los modos de acción de control más usados en la industria y la domótica. También se ha incorporado el efecto enrole, tema en general ausente en la mayoría de textos académicos pero que por lo general está presente en cualquier aplicación de control integral o PID.

A los efectos de brindar más herramientas, las simulaciones realizadas a lo largo del libro se encuentran disponibles en el repositorio de <https://github.com/sca-undav>. Esperamos que disfruten la edición.

Los autores

# Contenido

<b>Presentación .....</b>	<b>3</b>
<b>Contenido .....</b>	<b>5</b>
 <b>Parte I - Introducción .....</b>	 <b>9</b>
 <b>Capítulo 1. Introducción .....</b>	 <b>11</b>
¿Qué es “control”? .....	11
Elementos de un sistema de control.....	12
Control a lazo abierto.....	13
Control a lazo cerrado o realimentado .....	14
Comparación de control en lazo cerrado y en lazo abierto .....	16
El problema de la estabilidad.....	19
Algunas características de los sistemas de control.....	19
Modos básicos de acción de control.....	21
 <b>Parte II - Modelización de sistemas físicos .....</b>	 <b>23</b>
 <b>Capítulo 2. Modelización de sistemas físicos en 1º orden .....</b>	 <b>25</b>
Circuito R-C pasabajos.....	25
Transferencia de un sistema físico.....	26
Respuesta en frecuencia de un sistema pasabajos.....	28
Respuesta transitoria de un filtro pasa bajos .....	29
Diagrama en bloques .....	32
Sistema de nivel de líquido .....	33
Sistema térmico .....	35
 <b>Capítulo 3. Modelización de sistemas físicos en 2º orden .....</b>	 <b>41</b>
Forma estándar de una transferencia de segundo orden .....	41
Circuito R-L-C.....	42
Sistema mecánico masa-resorte .....	43
Parámetros característicos de una respuesta en el tiempo .....	46
Respuesta transitoria de un sistema de 2º orden.....	47

Procedimiento típico para una modelización .....	54
Parte III - Control no lineal .....	55
<b>Capítulo 4. Acción de control sí-no .....</b>	<b>57</b>
Histéresis.....	58
Ventajas y desventajas.....	59
Obtención de parámetros en un ejemplo real.....	60
Parte IV - Control lineal .....	65
<b>Capítulo 5. Acción de control proporcional.....</b>	<b>67</b>
Transferencia de un sistema de control proporcional .....	67
Rechazo de perturbaciones.....	71
Análisis de estabilidad .....	71
Efectos de la realimentación .....	72
<b>Capítulo 6. Lugar geométrico de las raíces.....</b>	<b>73</b>
Evans .....	73
Ejemplo de 3º orden .....	74
Más ejemplos .....	76
Polos dominantes.....	76
<b>Capítulo 7. Márgenes de ganancia y de fase .....</b>	<b>79</b>
Estabilidad absoluta y relativa .....	79
Margen de ganancia.....	80
Margen de fase .....	82
Un ejemplo.....	83
<b>Capítulo 8. Acción de control PID .....</b>	<b>85</b>
Control proporcional.....	85
Control integral .....	86
Control proporcional-integral .....	88
Controlador proporcional-derivativo.....	89
Controlador proporcional-integral-derivativo .....	91
Limitaciones reales típicas .....	92
Métodos de sintonización.....	94

Anexos y Bibliografía .....	95
<b>Anexo A: Transformada de Laplace .....</b>	<b>97</b>
Definición y ejemplos .....	97
Propiedades .....	98
Teorema del valor final .....	98
<b>Anexo B: Cuadrados mínimos para la obtención de parámetros .....</b>	<b>99</b>
Ejemplo lineal en Scilab.....	99
Ejemplo no lineal en Scilab .....	101
<b>Bibliografía.....</b>	<b>103</b>





# Parte I

## Introducción



# Capítulo 1.

## Introducción

El control automático desempeña un papel vital en el avance de la tecnología y la sociedad. Los sistemas de control se encuentran en gran cantidad en todos los sectores de la industria, tales como control de calidad de los productos manufacturados, líneas de ensamble, control de máquinas-herramienta, tecnología espacial, control por computadora, etc. Y también lo podemos encontrar en las aplicaciones domésticas. Por ejemplo: en un aire acondicionado, un termotanque, un ascensor, una pava eléctrica y cada vez más en IoT aplicado a la domótica.

Para el control automático de un sistema, se requiere que el usuario configure de alguna manera el objetivo deseado y que el equipo de control actúe sobre el sistema lograr ese objetivo. Por ejemplo, si se quiere regular la temperatura de una habitación, debemos contar con un controlador que sea capaz de regular la potencia de un calefactor aun cuando varíen las condiciones del ambiente. Para el diseño de este equipo, debe tenerse en cuenta que las condiciones ambientales varían ante ciertos eventos o perturbaciones: si se abre una puerta al entrar y salir, o si el sol se refleja o no sobre una ventana. Esto puede requerir que haya algún tipo de sensor para evaluar si el objetivo –en este caso una temperatura deseada– ha sido alcanzado o no. Para que los ingenieros logren diseñar adecuadamente un sistema de control automático, es necesario comprender el funcionamiento del sistema en cuestión, prever los problemas que puedan surgir y proponer una solución acorde al objetivo deseado. En este capítulo nos introducimos en el abordaje de esta cuestión.<sup>1</sup>

### ¿Qué es “control”?

Cuando alguien se refiere a que debe “controlar” alguna variable, equipo o sistema, comúnmente lo relacionamos con sensar, medir, verificar o leer algún valor. Si queremos controlar cuánto combustible tenemos en el tanque, miramos el tablero. Si necesitamos controlar si el efectivo que tenemos nos alcanza para salir a cenar, contamos cuánto hay en la billetera. Si deseamos controlar la temperatura del agua antes de bañarnos, ponemos la mano bajo la ducha. Todo esto se refiere a un primer paso en un proceso de control, que implica medir –con mayor o menor exactitud– una variable a controlar. En los ejemplos dados, la variable controlada es respectivamente el combustible, el dinero y la temperatura del agua.

Sin embargo, el sólo hecho de medir una variable no alcanza para completar el proceso de control. Si debo recorrer una distancia larga, quizás deba pasar por la estación de servicio para completar el tanque de combustible. O tal vez deba tomar más efectivo antes de salir a cenar. O cambiar la regulación del calefón antes de entrar a la ducha. En cualquiera de estos casos, estoy tomando una acción que me permita modificar la variable que se desea controlar para lograr un objetivo determinado.

En definitiva, un proceso de control implica medir, sensar, verificar o leer una variable para luego decidir qué *acción de control* tomar. Cuando nos referimos a un sistema de control automático, la acción es tomada directamente por un autómata según mecanismos, cálculos o criterios lógicos que

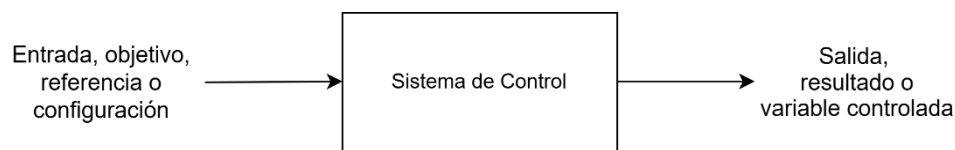
---

<sup>1</sup> Un panorama histórico sobre sistemas de control puede leerse en Ogata (2010, pág. 1), Fusario *et al* (2012, págs. 2-7).

fueron establecidos, programados, configurados o diseñados previamente. Es para notar que, incluso, en el proceso de control es más importante la acción que la medición. De hecho, hay sistemas de control que no toman ninguna medición sino que actúan directamente a partir de información brindada relacionada con el objetivo deseado. Por ejemplo, un temporizador que prende las luces por la noche, caso en el cual no hay ninguna medición.

## Elementos de un sistema de control

En todo sistema de control van a coexistir básicamente dos conjuntos de elementos: por un lado, los objetivos; y por otro, los resultados. Los objetivos pueden ser las entradas o las referencias. Los resultados son las salidas o variables que se desean controlar con el objetivo de que lleguen a sus valores deseados, tal como se muestra en la figura.



**Figura 1.** Esquema simple de un sistema de control

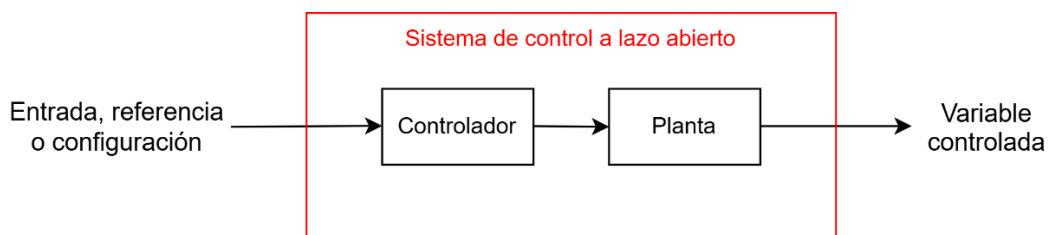
Para profundizar en el análisis de los componentes de un sistema de control definimos:

- **Objetivo, entrada, referencia o configuración.** El objetivo es el punto de partida de un sistema de control: ¿qué se desea hacer? ¿para qué? Luego viene la cuantificación de este objetivo, el establecimiento de una referencia o de una configuración, para cumplir ese objetivo. La referencia o configuración se establece para que la salida del sistema de control adopte el valor deseado, aún a pesar de las perturbaciones presentes en el mismo. Si bien se busca cuantificar con precisión la entrada o referencia, el objetivo puede ser cualitativo. Por ejemplo, más allá de la temperatura configurada en una heladera, su objetivo más general es conservar mejor los alimentos. Esto tiene importancia porque hace a qué tanto conviene simplificar o complejizar un determinado sistema de control.
- **Variable controlada, resultado o salida.** Es la magnitud, variable, cantidad o condición que se desea controlar para cumplir determinado objetivo. Generalmente es la variable que se mide. Por ejemplo, la temperatura interior en el caso de una heladera.
- **Planta.** Se refiere al equipo o sistema cuya salida se desea controlar. En un sistema de control se toma al menos alguna variable de la planta en cuestión, dado que todo sistema físico tiene asociadas innumerables magnitudes. Una incubadora, por ejemplo, podría controlar no sólo la temperatura sino también la humedad.
- **Variable manipulada.** La variable manipulada es la magnitud física que se manipula para actuar sobre la planta, modificar su variable controlada y alcanzar así el objetivo. Por ejemplo, el calor que entrega una estufa para elevar la temperatura de una habitación (nótese que calor y temperatura son magnitudes físicas distintas). Típicamente es una señal de media o alta potencia. Puede ser potencia calórica, eléctrica, mecánica, hidráulica, neumática, etc.
- **Actuador.** El actuador es el equipo o componente que tiene como salida a la variable manipulada. La entrada del actuador es la señal de control que recibe desde el controlador. Es usual considerar al actuador como parte de la planta, porque generalmente sus propias características físicas afectan a la variable controlada. De todos modos, a veces se lo describe como otro bloque para simplificar el esquema funcional, conectado por un lado al controlador como entrada y por el otro a la planta como salida.

- **Controlador y señal de control.** Se refiere a alguna lógica o mecanismo que, a partir de la entrada del sistema y las mediciones que se tomen, determina una señal de control que envía al actuador para actuar sobre la planta y alcanzar el objetivo deseado. Típicamente es una señal de baja potencia.
- **Sistema.** Es el conjunto de componentes, mecanismos, equipos o procesos que interactúan entre sí y pueden dar un resultado concreto frente a una entrada determinada. En el caso de un sistema de control, incluye básicamente el controlador, un sensor, un actuador y la planta. A su vez, la planta a controlar es un subsistema del sistema de control.<sup>2</sup>
- **Perturbación.** Una perturbación es una señal que tiende a afectar negativamente el control del sistema. Por ejemplo, la apertura de la puerta de una heladera que introduce una importante cantidad de masa de aire a temperatura superior a la deseada.
- **Control realimentado.** Se refiere a un sistema cuyo controlador toma en cuenta no sólo la entrada del sistema de control, sino también alguna medición sobre la variable controlada o salida. Así, por medio de conjunto de operaciones o mecanismos tiende a reducir la diferencia entre la salida y la entrada, aún frente a la presencia de perturbaciones.

## Control a lazo abierto

En la figura se muestra un esquema con los componentes internos de un **sistema de control a lazo abierto**. Se llama así porque el controlador sólo actúa a partir de la entrada o referencia, *sin tomar mediciones periódicas sobre la salida* u otra variable que nos brinde información sobre el estado de la salida. Daremos algunos ejemplos.



**Figura 2.** Diagrama en bloques de un sistema de lazo abierto

## Algunos ejemplos

**Calefón a gas.** Cuando una persona se ducha, normalmente controla previamente la temperatura del agua. Si el agua está muy fría o muy caliente, sube o baja el nivel de la llama. En este caso, la variable controlada es la temperatura del agua. La variable manipulada es el calor de la llama, que actúa sobre el agua. Y la entrada es la perilla o botonera del calefón que regula esta llama. Éste sigue siendo hoy el calefón más usado para calefaccionar el agua en un hogar y es un sistema de control que logra una temperatura agradable.

<sup>2</sup> Un sistema no está necesariamente limitado a los sistemas físicos, si bien es lo que abordamos en esta publicación. El comportamiento económico de una sociedad puede definirse también como un sistema, del cual pueden tomarse mediciones (como inflación, producto bruto, utilización de la capacidad industrial, desocupación, etc.) y sobre el cual puede actuarse (creando o quitando impuestos, controlando el tipo cambiario, subsidiando determinadas actividades, modificando relaciones sociales de producción, etc.). Por lo tanto, la definición de sistema puede interpretarse, en un sentido amplio, que comprenda tanto a sistemas físicos como biológicos o sociales.

Sin embargo, éste no es un sistema de control *automático*. Porque el control de la temperatura del agua no es realizado por un equipo autónomo sino por una persona. Es decir, el usuario debe ir ajustando la perilla hasta llevarla al lugar adecuado. Y una vez que entró a ducharse, no podrá seguir ajustándolo.

**Semáforos.** Otro ejemplo es el control de tránsito vehicular con un semáforo en una esquina. Si se debe controlar el tránsito en un cruce de avenidas (proceso a controlar), se podrá hacer mediante al menos un par de semáforos (señal de control) que actuarán de manera tal que regulen el paso de los vehículos. El tiempo de actuación en el que cada semáforo esté en verde o en rojo normalmente es configurado inicialmente por una persona –según estimaciones o criterios previos– sin importar realmente el tráfico presente mientras funciona (variable controlada). De este modo, aún actuando independientemente del flujo de vehículos, logrará en lo fundamental su objetivo.

**Riego con temporizador.** Un sistema de riego automático que no cuente con sensores de lluvia o humedad en la tierra también constituye un sistema de control de lazo abierto. Si se programa al mismo para que actúe una determinada cantidad de tiempo a una hora determinada del día, éste va actuar siempre de la misma forma. Es sencillo, aunque no tendrá en cuenta si hubo mucho sol o llovió en exceso. Siempre regará la misma cantidad de agua. En este caso, el usuario necesitará revisar periódicamente la humedad de las plantas para ajustar el tiempo de regado, por ejemplo.

## Principal desventaja

En todos los ejemplos señalados previamente, hay alguna variable que efectivamente se está controlando; y hay alguna configuración inicial o entrada que determinará la acción de control sobre la planta en cuestión. El sistema posee una entrada que regula una acción de control sobre una planta. Pero *no hay un control realimentado* que tenga en cuenta sus efectos concretos o los de alguna posible perturbación. No hay una corrección automática ante algún cambio no deseado. Es decir, cualquier ajuste que sea necesario deberá ser realizado por una persona, que vuelva a ajustar la entrada para lograr el objetivo deseado.

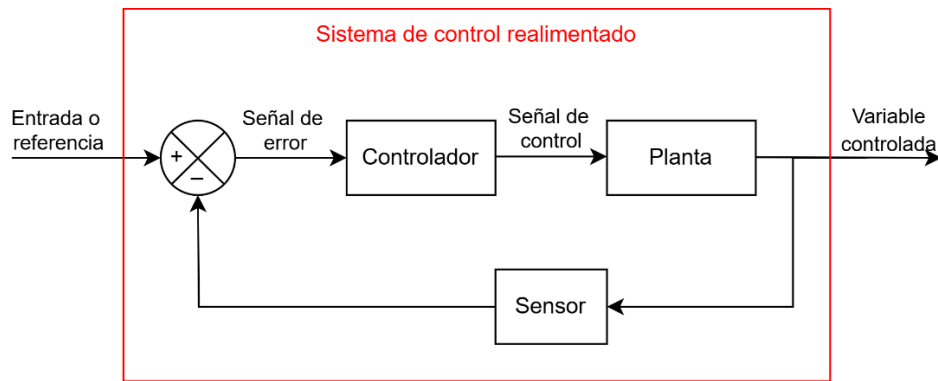
En el caso del calefón, esto se percibe cuando –por ejemplo– alguien abre otra canilla. El calefón seguirá entregando el mismo calor pero para una cantidad mayor de agua que pasa por su serpentina. Por lo tanto, la temperatura del agua bajará. Y empezarán las quejas de quien se esté bañando.

Con los semáforos ocurre muy a menudo que uno debe esperar a que se ponga en verde, aun cuando no pase ningún auto por la otra calle. En estos casos, el semáforo se vuelve en un obstáculo para el tránsito. Una forma que se suele utilizar para resolver esto es programar una luz amarilla intermitente por la noche, cuando se sabe que el tráfico es bajo.

Es decir, el sistema de control de lazo abierto es sencillo y es el motivo por el cual es tan ampliamente utilizado. Pero no corrige la señal de control ante ningún tipo de perturbación o cambio indeseado operado en el sistema.

## Control a lazo cerrado o realimentado

En la Figura 3 podemos ver un ejemplo típico de un sistema de control realimentado, llamado también sistema de control a lazo cerrado. En este tipo de sistema de control, se mide la variable controlada y se la compara con el valor deseado o de referencia. Mediante la diferencia de ambas, se obtiene entonces la señal de error. Luego, el controlador actuará según esta señal y generará una señal de control que será aplicada a la planta para modificar la variable controlada. Si el sistema está bien diseñado, normalmente se espera que la señal de error tienda a cero. Es decir, que la variable controlada tienda a la referencia.



**Figura 3.** Diagrama en bloques de un sistema de control realimentado típico.

Un sistema de este tipo es aquel que mide periódica o continuamente la salida o variable controlada para corregir o no su señal de control, siguiendo el esquema de la figura. La señal de referencia se resta generalmente con la variable controlada y se genera una señal de error. La señal de control termina siendo una función de esta señal de error.

En un diagrama en bloques como el mostrado en la figura, las líneas representan señales analógicas o digitales con información de cada etapa del proceso. Los bloques se corresponden con elementos físicos o funciones lógicas, que se ven afectados por una o varias entradas y que posee una o varias salidas. El círculo con una cruz es un bloque particular denominado *punto de suma*, que suma o resta señales según el signo indicado a la entrada.

### Algunos ejemplos

***Cama caliente de impresora 3D.*** En una impresora 3D se llama cama caliente a la superficie sobre la cual se va construyendo la pieza de tres dimensiones. Su temperatura es de vital importancia, porque tiene como objetivo que las capas de material aplicadas sucesivamente se vayan solidificando a la velocidad adecuada: ni más lento ni más rápido de lo necesario. La temperatura de la cama caliente se mide mediante un termistor (un dispositivo resistivo que varía su valor según la temperatura y entrega una señal de tipo analógica). La temperatura medida analógicamente se convierte a una señal digital mediante un convertidor A/D. La temperatura digital se analiza por un Arduino Mega, que funciona como controlador. El controlador compara esta temperatura digital con la temperatura de entrada programada de referencia. Si hay una discrepancia, la señal de error no será nula y el controlador modificará la señal que envía al calefactor, generalmente a través de un relé electromecánico.

***Control de temperatura del compartimiento del pasajero de un automóvil.***<sup>3</sup> La figura 2 muestra un diagrama funcional del control de temperatura del compartimiento del pasajero de un automóvil. La temperatura deseada es la entrada del controlador. La temperatura real del compartimiento del pasajero es medida por un sensor y alimenta al controlador para que éste la compare con la entrada.

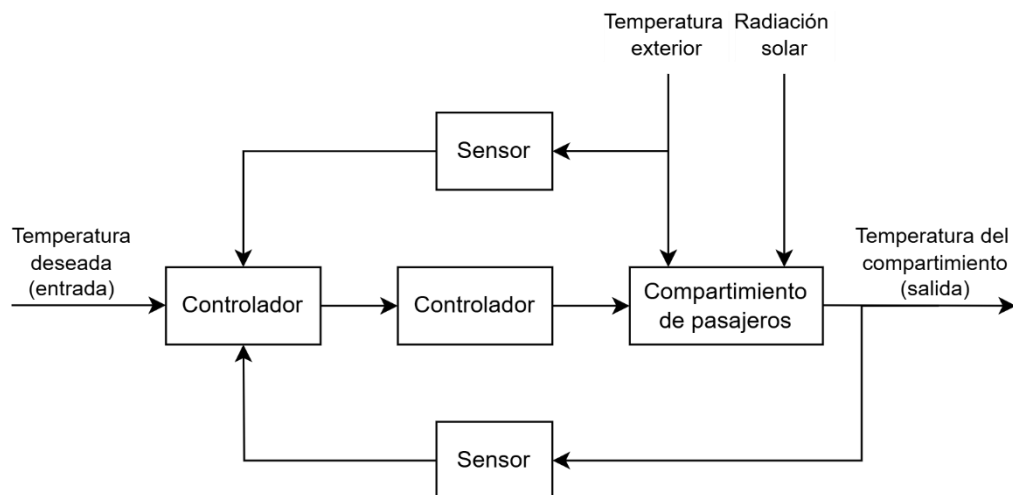
La temperatura ambiente y la transferencia térmica por radiación del sol, que no son constantes conforme se conduce el automóvil, funcionan generalmente como perturbaciones. Sin embargo, si son sensadas, se transforman en otras entradas para el controlador. Este ejemplo emplea tanto un control realimentado como otro de prealimentación a partir de la temperatura exterior sensada. El control prealimentado es de lazo abierto porque establece una acción correctiva antes de que las perturbaciones afecten el resultado, es decir: sin tener en cuenta la medición de la variable controlada.

La temperatura del compartimiento del pasajero de un automóvil puede diferir considerablemente dependiendo del lugar en donde se mida. En lugar de usar sensores múltiples para

<sup>3</sup> Elaboramos una versión simplificada de un ejemplo descrito en la segunda edición de Ogata (1993).

medir la temperatura y promediar los valores, puede ser más simple instalar un pequeño ventilador de succión en el lugar en donde los pasajeros normalmente detectan la temperatura. La temperatura del aire del aspirador es una indicación de la temperatura del compartimiento del pasajero y se considera la salida del sistema.

En el ejemplo de la figura, el controlador recibe la señal de entrada (temperatura deseada), la señal de salida (temperatura medida en el compartimiento) y la señal del sensor de temperatura exterior. El controlador envía una señal de control al aire acondicionado o al calefactor para controlar la cantidad de aire frío o caliente a fin de que la temperatura del compartimiento del pasajero se mantenga al valor deseado. En este ejemplo, el calor de la radiación solar es una perturbación que sólo podrá ser corregida cuando se mida la temperatura del habitáculo.



**Figura 4.** Control de temperatura del compartimiento del pasajero de un automóvil.

## Comparación de control en lazo cerrado y en lazo abierto

Hemos visto sistemas de control realimentado y no realimentado. A los efectos de analizar sus ventajas y desventajas, analizaremos un ejemplo de control que se realizaba como lazo abierto hasta la década de los 90's y pasó a implementarse en forma realimentada luego: el ralentí del motor del automóvil.

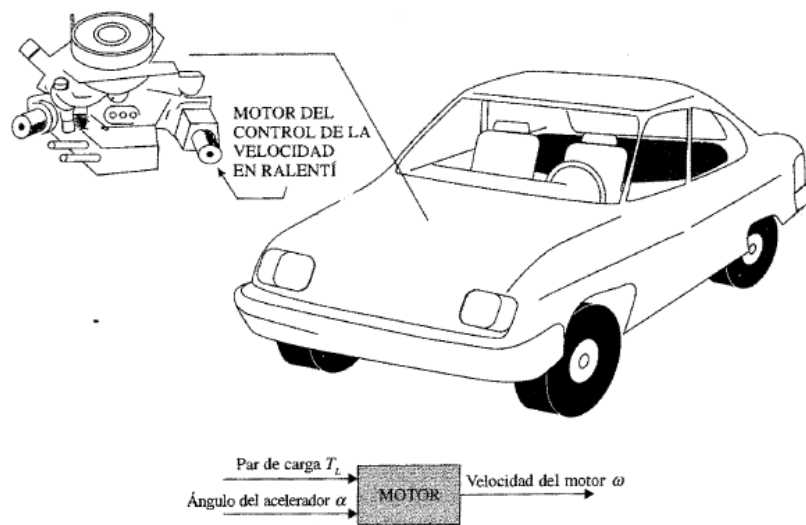
**Control del ralentí de un automóvil.<sup>4</sup>** La velocidad en ralentí del motor de un automóvil es la velocidad cuando el motor está funcionando sin ser acelerado y con el cambio en punto muerto. Normalmente está entre 600 RPM y 900 RPM (vueltas o revoluciones por minuto). El objetivo de tal sistema de control es mantener la velocidad en ralentí del motor en un valor relativamente bajo para economizar combustible, sin importar las cargas aplicadas al motor: luces encendidas, aire acondicionado, etc.

Sin un control realimentado de la velocidad en ralentí, cualquier cambio súbito en la aplicación de la carga del motor causa una caída en la velocidad del motor, que a su vez puede provocar que el motor se apague. Por tanto, los objetivos principales del control de velocidad en ralentí son: 1) eliminar o minimizar las caídas de velocidad cuando se aplica carga al motor; y 2) mantener la velocidad en ralentí del motor en un valor suficiente. La figura 5 muestra el sistema de control de lazo abierto de velocidad en ralentí desde el punto de vista de las entradas y salidas del sistema. En este caso, el ángulo del acelerador y el par de carga  $T_L$  (debido a la aplicación del aire acondicionado, dirección hidráulica,

<sup>4</sup> Ejemplo tomado de Kuo (1996, pág. 3).

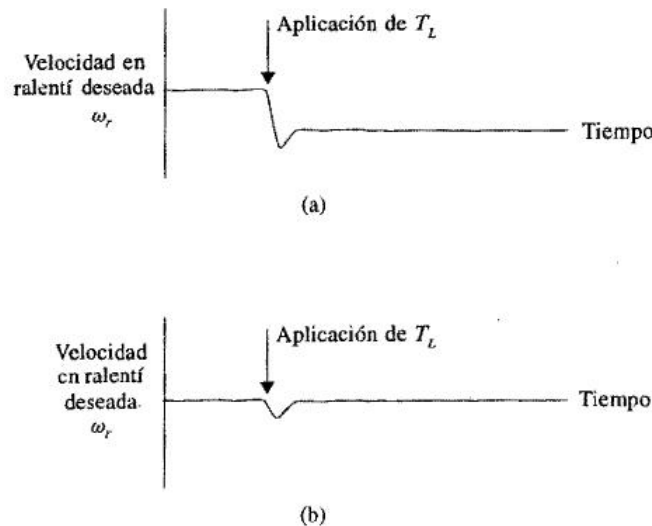


transmisión, etc.) son las entradas; y la velocidad del motor  $\omega$  es la salida. El motor es la planta controlada del sistema.



**Figura 5.** Sistema de control de la velocidad en Ralentí.

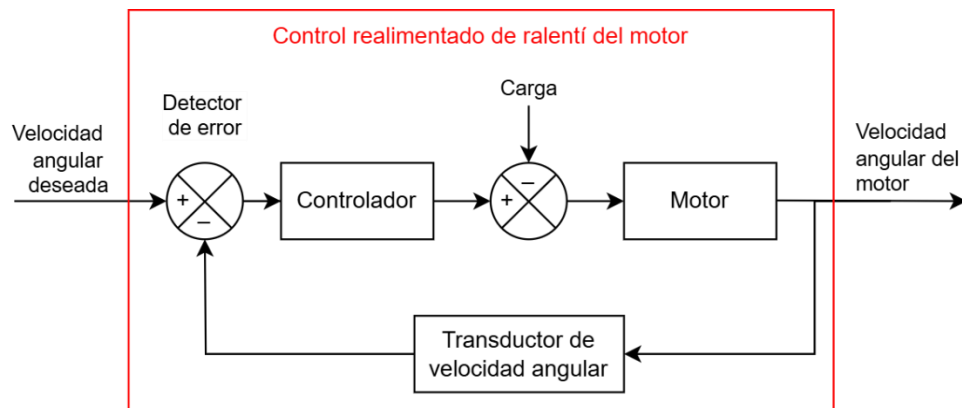
Si retomamos el ejemplo del ralentí de un auto, vale señalar que existen ambas formas de controlarlo. Los autos fabricados hasta la década del '80, casi todos alimentados mediante carburador, poseían un sistema de regulación mecánica para calibrar las revoluciones del motor cuando no era acelerado. Si se prende el aire acondicionado o se gira la dirección hidráulica en este modo de operación, las revoluciones del motor bajan ya que aumenta la carga  $T_L$ , tal como muestra la Figura 6 (a). Esto hace que se deba calibrar en no menos de 900 RPM para evitar que el motor se apague.



**Figura 6.** (a) Respuesta típica del sistema de control de velocidad en ralentí en lazo abierto.  
(b) Respuesta típica del sistema de control de velocidad en ralentí en lazo cerrado.

En la figura 6 (b) se observa cómo reacciona la velocidad en ralentí de un motor con sistema realimentado. El motor naftero de los autos fabricados actualmente es alimentado con una bomba inyectora, un sistema de encendido electrónico de las bujías y una válvula IAC (por *idle air control*) o un motor paso-a-paso que actúa directamente sobre la mariposa de entrada de la admisión de aire. Ante una variación de la carga del motor, hay primero una pequeña baja en las revoluciones que luego es compensada por un sistema de control electrónico. De este modo, en ralentí el motor puede operar

normalmente en 600 RPM ahorrando combustible. En la figura 7 se muestra un diagrama para este caso.



**Figura 7.** Diagrama de bloques de un sistema de control de velocidad en ralentí en lazo cerrado.

Dado que en sistema de control en lazo abierto la salida no se compara con la entrada de referencia, a cada entrada de referencia le corresponde una condición de operación fija. Como resultado de ello, la precisión del sistema depende de la calibración del mismo, para que siempre obtenga la misma salida ante una determinada entrada. No obstante, ante la presencia de perturbaciones, un sistema de control en lazo abierto quizás no pueda realizar la tarea deseada adecuadamente ya que se obtendría una salida distinta para una misma entrada. En la práctica, el control en lazo abierto sólo se usa si se conoce la relación entre la entrada y la salida, y si las perturbaciones internas o externas no son demasiado importantes.

La principal ventaja del sistema de control en lazo cerrado es que el uso de la realimentación permite contrarrestar –completa o parcialmente– los efectos de las perturbaciones externas o de las variaciones internas que puedan ocurrir. Esto permite bajar las revoluciones en ralentí y ahorrar combustible.

Esta realimentación, a su vez, agrega un riesgo de inestabilidad del sistema, cuestión que debe ser rigurosamente tenida en cuenta al momento de su diseño. Una corrección en exceso del error medido (entre la señal de entrada y la señal medida a la salida) puede derivar en oscilaciones de amplitud constante o en aumento, que incluso deriven en la pérdida de capacidad de control o que el motor se apague. En otros casos de sistemas de control, la inestabilidad puede derivar incluso en la rotura del sistema o peor aún: generar daños a personas y el medio ambiente. En el siguiente subtítulo profundizamos sobre la cuestión de la estabilidad.

Algunas de las ventajas que Katsuhiko Ogata (2010, pág. 8) señala sobre los sistemas de control en lazo abierto son las siguientes:

1. Construcción más simple y facilidad de mantenimiento.
2. No hay problemas de estabilidad.
3. Convenientes cuando la salida es difícil de medir o cuando medir la salida de manera precisa no es económicamente viable. Por ejemplo, en el caso de un lavarropas. En este caso sería bastante difícil medir la calidad de su salida, es decir: la limpieza de la ropa lavada.

Las desventajas fundamentales de los sistemas de control en lazo abierto son las siguientes:

1. Las perturbaciones y los cambios en la calibración originan errores, y la salida puede ser diferente de lo que se desea.
2. Para mantener la calidad requerida en la salida, es necesaria la recalibración de vez en cuando.

## El problema de la estabilidad

Benjamin Kuo introduce un **concepto de estabilidad** de un sistema de control como “una noción que describe si un sistema es capaz de seguir el comando de entrada, o en general, si dicho sistema es útil” (1996: 12). Dicho de otro modo, un sistema es o pasa a ser inestable si no se pueden controlar sus salidas.

En el ejemplo anterior del control del ralentí de un motor de un auto, puede ocurrir que un mal funcionamiento del control automático de sus revoluciones termine generando variaciones oscilantes en la velocidad del motor. Esto puede derivar, incluso, en que el motor se apague. El ejemplo vale también para un grupo electrógeno, que debería mantener constante sus revoluciones independientemente de la carga. Si este motor de combustión interna se apaga, el control automático se torna inútil.

Una práctica usual para determinar si un sistema es estable o no, es probar al mismo sometándolo ante una entrada cuyo valor sea acotado. Si la salida del sistema ante cualquier entrada acotada también es acotada, el sistema constituye un **sistema BIBO estable**. BIBO es el acrónimo del inglés *Bounding Input and Bounding Output* (entrada acotada y salida acotada). Ésta es una definición matemáticamente más rigurosa de estabilidad.

Recordemos que una señal –ya sea de entrada o de salida– es acotada si todos sus valores están comprendidos entre dos límites. Por ejemplo, una señal sinusoidal es una señal acotada ya que la misma se encuentra definida entre un valor máximo y un valor mínimo. La señal tipo escalón también es una señal acotada, ya que la misma posee un valor máximo, correspondiente al valor final de la misma; y un valor mínimo que puede ser su valor inicial a  $t=0$ . Un ejemplo de una señal no acotada es la señal de tipo rampa, ya que, a medida que avanza el tiempo, el valor de la salida sigue aumentando indefinidamente.

En definitiva, un sistema cuya entrada es por ejemplo un escalón y su salida es acotada, es un sistema BIBO estable. Como contra ejemplo: si el sistema tiene como entrada una señal de tipo escalón y su salida es una señal de tipo rampa, ese sistema no es estable. Otro caso: si a un sistema se lo somete con una entrada de tipo escalón y como respuesta del mismo obtenemos una señal de tipo sinusoidal, podemos decir que este sistema es BIBO estable. Por último: probar la estabilidad BIBO de un sistema con una señal de tipo rampa, pierde sentido ya que estamos sometiendo al mismo a una entrada no acotada.

El control realimentado ha permitido automatizar un sin fin de procesos. Pero en cada diseño de este tipo existe siempre el riesgo a la inestabilidad, que debe analizarse cuidadosamente.

## Algunas características de los sistemas de control

Hemos distinguido ya entre sistemas de control de lazo abierto y de lazo cerrado (o realimentado). Puntualizaremos algunas otras características importantes para analizar un sistema.

### Linealidad y alinealidad

Las técnicas de diseño más utilizadas parten del supuesto que nuestro sistema es lineal. Esto significa que sobre el mismo se aplica el principio de superposición. Es decir: la salida de la suma de dos variables en la entrada es igual a la suma de las salidas de cada variable de entrada por separado. Esto es válido para variables y para señales. Y vale también cuando la entrada o la salida tiene más de una dimensión. Ésta es una condición necesaria para utilizar las transformadas de Laplace. En la ecuación (1) expresamos matemáticamente el principio de superposición.

**Principio de Superposición:**

$$\begin{aligned}f(a + b) &= f(a) + f(b) \\f(a(t) + b(t)) &= f(a(t)) + f(b(t)) \\\vec{f}(\vec{a} + \vec{b}) &= \vec{f}(\vec{a}) + \vec{f}(\vec{b})\end{aligned}\tag{1}$$

Sin embargo, sobre este punto Kuo escribe: “Estrictamente hablando, los sistemas lineales no existen en la práctica, ya que todos los sistemas físicos son no lineales en algún grado. Los sistemas de control realimentados son modelos ideales fabricados por el analista para simplificar el análisis y diseño. Cuando las magnitudes de las señales en un sistema de control están limitadas en intervalos en los cuales los componentes del sistema exhiben una característica lineal (cuando se aplica el principio de superposición), el sistema es esencialmente lineal. Pero cuando las magnitudes de las señales se extienden más allá del intervalo de porción lineal, dependiendo de la severidad de la no linealidad, el sistema no se debe seguir considerando lineal. Por ejemplo, los amplificadores usados en los sistemas de control a menudo exhiben un efecto de saturación cuando la señal de entrada es muy grande; el campo magnético de un motor normalmente tiene propiedades de saturación. Otros efectos no lineales que se encuentran en sistemas de control son el juego entre dos engranes acoplados, la característica de resorte no lineal, la fuerza de fricción no lineal o par entre dos miembros móviles, etc. Muy a menudo las características no lineales son introducidas en forma intencional en un sistema de control para mejorar su desempeño o proveer un control más efectivo. Por ejemplo, para alcanzar un control de tiempo mínimo, un tipo de controlador prendido-apagado (relevador) se emplea en muchos misiles o sistemas de control de naves espaciales. Típicamente en estos sistemas, los motores de reacción están a los lados del vehículo para producir un par de reacción para control de altitud. Estos motores de reacción son controlados en una forma o totalmente prendidos o totalmente apagados, por lo que una cantidad fija de aire es aplicada desde un motor de reacción dado durante cierto tiempo para controlar la altitud del vehículo espacial.”

“Para sistemas lineales, existe una gran cantidad de técnicas analíticas y gráficas para fines de diseño y análisis. (...) Por otro lado, los sistemas no lineales son difíciles de tratar en forma matemática, y no existen métodos generales disponibles para resolver una gran variedad de clases de sistemas no lineales. En el diseño de sistemas de control, es práctico, primero diseñar el controlador con base en un modelo de un sistema lineal despreciando las no linealidades del sistema. Entonces, el controlador diseñado se aplica al modelo del sistema no lineal para su evaluación o rediseño mediante simulación en computadora.” (Kuo, 1996, pág. 16)

En conclusión: Como regla general buscaremos aproximar nuestro sistema por alguna función lineal. Analizaremos también los límites de este modelo, que podremos comprobar en la práctica.

## Sistema invariante en el tiempo

Otra condición necesaria para poder aprovechar la herramienta de la transformada de Laplace es garantizar o suponer que los parámetros o características del sistema no varían en el tiempo. Sabemos que, en largos períodos, en general todos los parámetros de nuestro sistema serán afectados en algún grado, ya sea por uso, corrosión o envejecimiento del material. Nuestra decisión de diseño debe ser analizar si estas modificaciones son suficientemente importantes para exigir ser consideradas en nuestro diseño. De no ser así, podemos considerar que tenemos un **sistema invariable en el tiempo**, lo cual es el caso más común de diseño de sistemas.

Sin embargo, hay sistemas que van variando sus características físicas a medida que es utilizado. Un ejemplo es el de un cohete, que va consumiendo combustible a medida que se desplaza por el cielo o espacio. Este consumo de combustible hace que su masa total vaya bajando en forma más o menos lenta pero persistente, por lo que debería tenerse en cuenta a la hora de su diseño. Sistemas de este tipo se definen como **sistemas variantes en el tiempo**. El problema de esto es que, estrictamente, no son sistemas lineales, cuestión que hace más complejo su análisis y diseño.

## Sistema de tiempo continuo o discreto

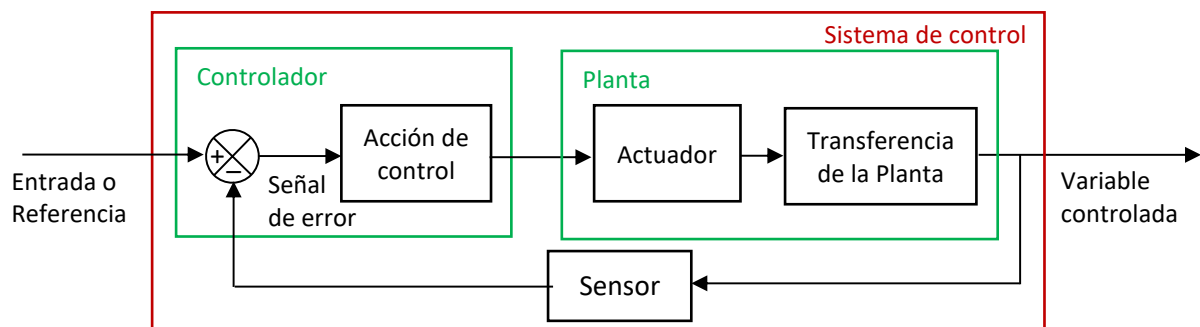
Otro aspecto a tener en cuenta es la forma en que el sistema realiza sus mediciones, procesamiento y control. “Un **sistema en tiempo continuo** es aquel en el que las señales en varias partes del sistema son todas funciones de la variable continua tiempo  $t$ .” (Kuo, 1996, pág. 16) Por ejemplo, sería el caso de una heladera hogareña, que funciona con un termostato electromecánico.

Los **sistemas de control en tiempo discreto** difieren de los sistemas de control en tiempo continuo en que las señales en uno o más puntos del sistema están en la forma de pulsos o de un código digital. Por ejemplo, un sistema de datos muestreados recibe datos o información sólo en forma intermitente en instantes específicos. En este caso, se conoce la señal de error en cada muestreo pero no se recibe información acerca del error durante los periodos entre dos muestras consecutivas.

Existen muchas ventajas al incorporar muestreo en un sistema de control. El control por computadora o microcontroladores se ha pasado a ser muy utilizado porque logran en general menor tamaño y mayor flexibilidad. Otra ventaja es que los datos en la forma digital pueden ser más inmunes al ruido. Además, si el tiempo entre muestras es suficientemente chico, a los efectos del diseño puede considerarse como un sistema en tiempo continuo. Esto es importante porque es también una condición para que podamos utilizar las herramientas de Laplace. De otro modo, deberíamos utilizar la transformada Z.

## Modos básicos de acción de control

En la figura 8 destacamos la señal de error, el bloque Controlador y la variable manipulada. Dentro del bloque Controlador incluimos el punto de suma –que nos entrega la señal de error– y un bloque acción de control, que tiene como salida a la señal de control. El actuador, que recibe la señal de control, transferirá una señal de potencia adecuada a la planta. Nuestro objetivo es que esa señal de error tienda a cero, o por lo menos sea acotada. La forma de lograrlo es a través de la variable manipulada que actúa sobre la planta. Pero... ¿cómo determino esa señal “adecuada” a los fines buscados?



**Figura 8.** Sistema de control realimentado con los componentes internos del Controlador.

La solución a este problema será implementada en el bloque Controlador. Hay varias formas de lograrlo o al menos aproximarnos. Esta transformación de la señal de error en una señal adecuada para actuar sobre la planta se denomina *Acción de control*. Los modos más comunes de acción de control son:

- Encendido-Apagado (en inglés: *on-off*).
- Proporcional.
- Integral o Proporcional-Integral.

- Proporcional-Derivativo.
- Proporcional-Integral-Derivativo (PID).

El modo de acción **Encendido-Apagado** sólo admite la posibilidad de encender completamente el actuador o apagarlo completamente. Es el caso, por ejemplo, de una pava eléctrica: la resistencia calefactora es activada con este modo por un termostato electromecánico o por un controlador digital. También es el modo con que se llena el tanque de agua de un hogar. Su ventaja es la sencillez del actuador. Introduce un funcionamiento no lineal que dificulta la precisión.

El modo **Proporcional** entregará una señal de control que es la multiplicación del error por una constante de proporcionalidad  $K$ . Esto hará que cuanto mayor sea el error, mayor será la potencia del actuador para intentar corregir la variable controlada. Y a medida que nos acerquemos a su valor deseado, la potencia del actuador irá disminuyendo. El límite de este tipo de acción es que, para que haya alguna señal de control distinta de cero, será necesario que la señal de error también sea distinta de cero. La forma de reducir este problema es aumentando la ganancia  $K$ , aunque esto puede traer problemas de estabilidad.

Si integramos el error, estaremos utilizando el modo **Integral**. De este modo, es llevar la señal error a cero. Su desventaja es el tiempo que tarda en alcanzar el valor deseado y el riesgo de inestabilidad. Una mejora es introducir el control **Proporcional-Integral**, que permite aprovechar la velocidad de reacción del control Proporcional y la precisión del control Integral.

El control **PID** utiliza la señal de error, su integral y su derivada para alcanzar un error cero en un tiempo acotado. Las técnicas que estudiaremos para su diseño buscan aprovechar sus posibilidades y evitar las inestabilidades.

La elección del tipo de acción de control es en sí misma una decisión de diseño importante. Para su elección, lo fundamental no es sólo el sistema físico en sí sino también el objetivo buscado. Si se busca simplicidad, probablemente optemos por el modo de dos posiciones. Si se busca precisión, por el tipo Integral. Una forma más avanzada, que permite precisión y velocidad de respuesta, es el PID, de amplia utilización en la industria.

Para determinar los parámetros de la acción de control, es necesario conocer con la mayor precisión posible la forma en que la variable manipulada afecta a la planta. Para esto necesitamos modelizar de alguna forma su funcionamiento físico. Podremos obtener así su transferencia, cuestión que nos ocupará los próximos capítulos.

# Parte II

## Modelización de sistemas físicos





# Capítulo 2.

## Modelización de sistemas físicos en 1º orden

Si se desea controlar un sistema físico, será necesario obtener información del mismo para analizar posibles soluciones al requerimiento. Si no se requiere demasiada exactitud en la variable controlada, bastará con algunos valores o incluso criterios para lograr el objetivo deseado. Por ejemplo, cuando se instala un aire acondicionado en un hogar, suele analizarse tan solo el tamaño de la habitación. Esto puede ser adecuado para muchos casos. Pero si los requerimientos son más exigentes, es necesario elaborar algún modelo de la planta a controlar. El modelo será más complejo cuanto más exigentes sean estos objetivos. Dicho de otro modo: no hay un único modelo posible para una planta determinada. Este modelo no sólo depende de las características físicas de la planta sino también de los objetivos buscados.

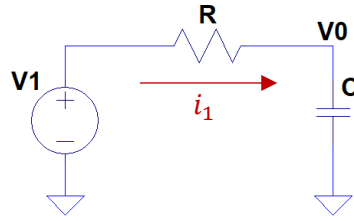
La modelización de un sistema físico como un sistema matemático de 1º orden es una de las más sencillas que permite utilizar las técnicas de control. Suele ser suficiente, por ejemplo, para prever cuánto tiempo se tardará en calentarse el agua dentro de un termotanque. El número de orden del modelo matemático hace referencia al orden de la ecuación diferencial que lo constituye. En nuestra aplicación de control automático, utilizamos ecuaciones lineales para poder utilizar las técnicas de Laplace. Entonces, la ecuación matemática que modeliza mi sistema físico en primer orden deberá tener sólo una derivada. Matemáticamente, esto es equivalente a una ecuación con sólo una integral.

¿Qué modeliza esta integral? Por lo general modeliza algún elemento físico que almacene energía, aunque también puede ser simplemente una aproximación matemática. En el caso del termotanque, la temperatura del agua es la integral del calor que recibe a lo largo de un lapso de tiempo determinado. Utilizar sólo un integrador para este modelo equivale a suponer que la temperatura del agua es homogénea en su interior. Aún sabiendo que difícilmente esto sea así, es un modelo sencillo que puede permitir controlar adecuadamente su temperatura dentro de ciertos márgenes no muy exigentes.

En este capítulo desarrollaremos modelos para ejemplos de sistemas eléctrico, térmico y de nivel de líquido. Partimos del supuesto que el lector conoce las bases de electricidad, física clásica y números complejos.

### Circuito R-C pasabajos

En la figura se muestra un circuito R-C, un clásico sistema de 1º orden constituido por una resistencia y un capacitor. En este ejemplo, la fuente de tensión  $v_1(t)$  representa la entrada y la tensión  $v_0(t) = v_c(t)$ , la salida. La salida también podría ser la corriente del capacitor; o podría utilizar una fuente de corriente como entrada; o podría no haber resistencia. Todos serían un sistema de primer orden porque poseo un sólo integrador: en este caso el capacitor, que almacena energía en forma de carga eléctrica y campo eléctrico.



**Figura 1.** Circuito R-C pasa bajos.

Como sabemos, las ecuaciones que rigen este sistema son:

$$\begin{aligned}
 \frac{dv_C(t)}{dt} &= \frac{1}{C} * i_C(t) \\
 i_1(t) &= i_R(t) = i_C(t) \\
 v_1(t) &= v_R(t) + v_C(t) \\
 v_1(t) &= RC * \frac{dv_0(t)}{dt} + v_0(t)
 \end{aligned} \tag{1}$$

La ecuación 1 es de 1º orden puesto que posee sólo una derivada, que también puede expresarse en forma de integral. En este caso, la integral de la corriente indica la carga total que almacena el capacitor, que a su vez es proporcional a su tensión  $v_C(t)$ . Es decir:

$$\begin{aligned}
 v_0(t) &= \frac{1}{C} * \int i_C(t) * dt \\
 v_0(t) &= \frac{1}{C} * \int \left( \frac{v_1(t) - v_0(t)}{R} \right) * dt
 \end{aligned} \tag{2}$$

Lo que necesitamos es establecer cuál es la relación entre la entrada  $v_1(t)$  de nuestro sistema y la salida  $v_0(t)$ . Definimos a esta relación como la transferencia de nuestro sistema físico.

## Transferencia de un sistema físico

**Definición:** La transferencia de un sistema o planta es la relación entre su entrada y su salida. En términos matemáticos, la transferencia es una función que nos permite predecir la salida a partir de una entrada determinada. Tanto la entrada como la salida pueden ser una variable o un vector, compuesto por varias variables. Para un mismo sistema pueden definirse varias transferencias diferentes dependiendo de qué variables se utilizan como entrada y cuáles como salida. Suponemos condiciones iniciales igual a cero.

Para hallar la transferencia de nuestro sistema necesitamos modelizarlo con un conjunto de ecuaciones. Dado que el sistema en cuestión puede ser mecánico, eléctrico, térmico, económico, biológico, etc., se requiere un conocimiento específico para establecer cuáles son las ecuaciones diferenciales que lo rigen o modelizan.

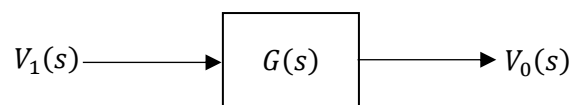
En nuestro ejemplo de circuito R-C, conviene notar que las ecuaciones que rigen el sistema son lineales. Esto nos permite utilizar la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial. Aplicando la transformada en la ecuación 1 queda:<sup>5</sup>

<sup>5</sup> Como suponemos que las condiciones iniciales son cero, la transformada de la derivada de  $v_0(t)$  puede calcularse simplemente multiplicando por  $s$  a su transformada  $V_0(s)$ , tal como quedó escrito en la ecuación 3. Si no fuera así, deberíamos haber escrito:  $\mathcal{L}\left(\frac{dv_0(t)}{dt}\right) = s * \mathcal{L}(v_0(t)) - v_0(0s) = s * V_0(s) - v_0(0s)$ , quedando un término constante que dificulta el procedimiento que sigue.

$$\begin{aligned}
V_1(s) &= RC * s * V_0(s) + V_0(s) \\
V_1(s) &= (RC * s + 1) * V_0(s) \\
G(s) &= \frac{V_0(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{(RC*s+1)}
\end{aligned}
\tag{3}$$

Dado que nuestro ejemplo es lineal, **hemos logrado expresar la transferencia simplemente como la división de la salida sobre la entrada** en el dominio de la variable compleja  $s$ , utilizando las herramientas que nos brinda Laplace. Nuestra transferencia  $G(s)$  nos brinda la información de cómo reacciona el sistema ante cualquier frecuencia y, a la vez, nos permite calcular la salida para cualquier entrada  $v_1(t)$  en el dominio del tiempo o su equivalente  $V_1(s)$  en el dominio  $s$ . En la ecuación 3, el denominador en función de  $s$  se llama **polinomio característico** de  $G(s)$ . Nótese que como nuestro sistema es de primer orden, el polinomio característico es de grado 1.

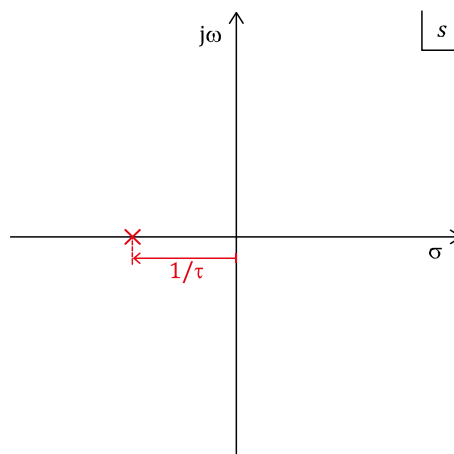
$$V_0(s) = V_1(s) * G(s)$$



**Figura 2.** Diagrama en bloques de una transferencia.

La figura 2 muestra la transferencia escrita como un diagrama en bloques. A la izquierda, la señal de entrada. Dentro del bloque, la transferencia en cuestión. Y a la derecha, la señal de salida. La transformada de Laplace permite escribir directamente a la salida  $V_0(s)$  como la entrada  $V_1(s)$  multiplicada por la transferencia  $G(s)$  del sistema. El sentido de las flechas indica cómo debe realizarse esta multiplicación. Nótese que la figura 2, la ecuación 3 y la figura 1 son tres formas diferentes para expresar el mismo sistema de ecuaciones que modelizan nuestro sistema físico.

En la figura 3 se muestra el diagrama de polos y ceros: en este caso la transferencia tiene sólo un polo. Es decir, el denominador se hace cero cuando  $s = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau} = -\omega_c = -2\pi * f_c$ . Nótese que cuanto más grande es el tiempo  $\tau$ , más se acerca el polo a  $s = 0$  (y viceversa).



**Figura 3.** Diagrama de polos y ceros.

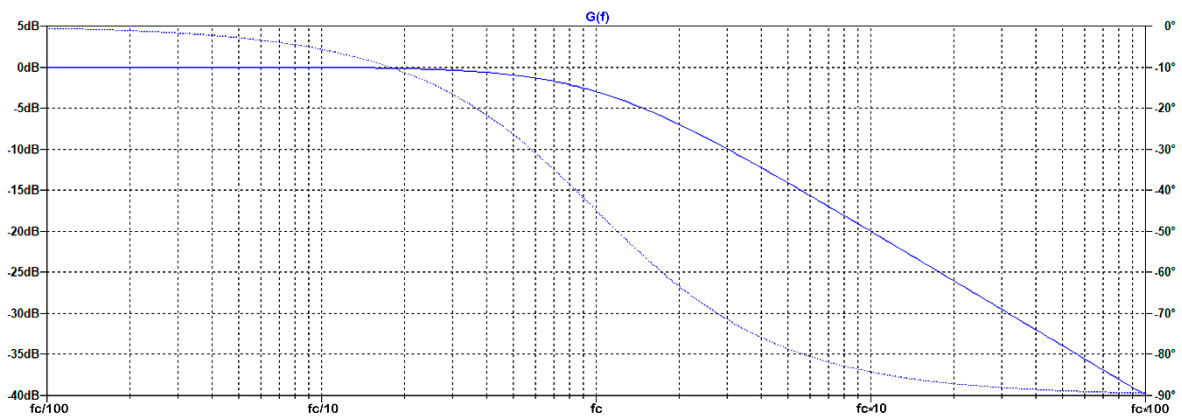
Algunos comentarios sobre la transferencia:

1. La transferencia es una propiedad de un sistema, independiente de la magnitud y forma de la señal de entrada.
2. La función de transferencia hallada es un modelo matemático que resume las ecuaciones diferenciales con las cuales modelizamos nuestro sistema.

3. La función de transferencia incluye las unidades necesarias para relacionar la entrada con la salida. Sin embargo, en sí no proporciona información acerca de la estructura física del sistema. De hecho, las funciones de transferencia de sistemas físicamente diferentes pueden ser idénticas.
4. Si se desconoce la transferencia de un sistema, puede establecerse experimentalmente introduciendo entradas conocidas y estudiando sus salidas.

## Respuesta en frecuencia de un sistema pasabajos

El circuito de la figura 1 constituye un filtro pasa bajos. En la figura 4 mostramos su diagrama de Bode. Este gráfico muestra el módulo y la fase de la transferencia  $G$  en función de la frecuencia. Para evaluarla punto a punto, reemplazamos  $s$  por  $j2\pi * f$  en la ecuación 3. En el gráfico, la línea sólida representa el módulo de  $G(j2\pi * f)$  y la línea punteada representa su argumento.



**Figura 4.** Diagrama de Bode del filtro pasa bajos.

La frecuencia de corte se calcula como:

$$f_c = \frac{1}{2\pi * RC} = \frac{1}{2\pi * \tau} \quad (4)$$

Donde  $\tau$  (la letra griega tau) es el tiempo natural del sistema, que caracteriza su dinámica. De este modo la transferencia  $G(j2\pi * f)$  –que simplificamos como  $G(f)$ – puede escribirse como:

$$G(f) = \frac{1}{(j * \frac{f}{f_c} + 1)} \quad (5)$$

De la ecuación 5 puede verse que cuando la frecuencia  $f$  es mucho menor que la frecuencia de corte  $f_c$ , la transferencia  $G(f)$  es aproximadamente igual a 1. Esto se ve en el gráfico de Bode en la línea azul sólida que tiende a 0 dB y en la línea azul punteada que tiende a 0°.

En la frecuencia de corte, la transferencia queda:

$$G(f_c) = \frac{1}{(j+1)} = 0,5 - j0,5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ = 0,707.. \angle -45^\circ \quad (6)$$

Lo que coincide con el gráfico, resultando  $|G(f_c)| = 0,707..$  que equivale a -3 dB.

Para altas frecuencias, la transferencia baja a razón de -20 dB por cada década y su fase se va acercando cada vez más a -90°. Matemáticamente, esto se justifica en que, a medida que  $f$  se hace

mucho más grande que  $f_c$ , se puede despreciar el 1 que suma en el denominador de la ecuación 5. Entonces la transferencia puede aproximarse como:

$$G(f) \simeq \frac{1}{(j \frac{f}{f_c})} \quad f \gg f_c \Rightarrow \quad (7)$$

A modo de recordatorio, en la tabla 1 calculamos algunos valores de la transferencia  $G$  expresada en decibels.

$ G $	$G_{dB} = 20 * \log( G )$
0,01	-40 dB
0,1	-20 dB
0,5	-6,02 dB
$0,707.. = 1/\sqrt{2}$	-3,01 dB
1	0 dB
10	20 dB
100	40 dB

**Tabla 1.** Decibels de amplitud.

Para obtener la transferencia  $G$  ante cada frecuencia, también podríamos haberla hallado considerando al capacitor  $C$  y a la resistencia  $R$  como dos impedancias excitadas por una señal senoidal. El resultado sería exactamente el mismo. A altas frecuencias, el capacitor se comporta como un circuito cerrado. Es decir, su impedancia tiende a cero y por lo tanto la transferencia también. A bajas frecuencias, el capacitor se comporta como un circuito abierto. Es decir, su impedancia tiende a infinito y por lo tanto la salida tiende a ser igual a la entrada. Dicho de otro modo: la transferencia tiende a 1 para bajas frecuencias.

Hemos descripto la respuesta en frecuencia de la transferencia  $G$  de nuestro sistema de primer orden. Si bien nuestro ejemplo representa un circuito R-C, el análisis es aplicable a otros sistemas físicos de primer orden que funcionen como pasabajos. Nótese que nuestro sistema elegido puede resumirse con sólo un parámetro  $f_c = \frac{1}{2\pi\tau}$ . Es posible que, además, necesite otra constante que contemple el caso en que la transferencia a bajas frecuencias no sea 1, ya sea porque la entrada y la salida poseen diferentes unidades o porque exista alguna caída que abarque todo el rango de frecuencias.

## Respuesta transitoria de un filtro pasa bajos

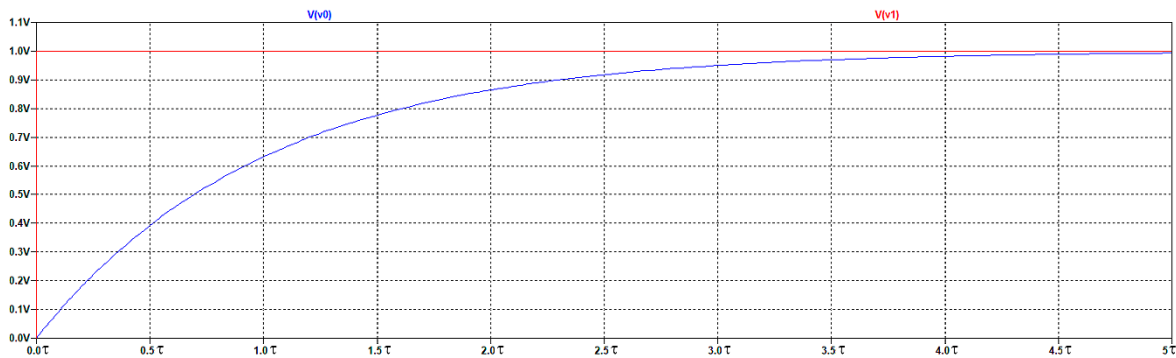
La respuesta en frecuencia nos define completamente la transferencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo. Sin embargo, en la práctica suele ser necesario caracterizarlo a partir de su respuesta ante algunas señales. Analizaremos dos casos típicos: la respuesta ante el escalón, ante la señal impulso y ante la señal rampa.

### Señal escalón

Si excitamos nuestro circuito R-C con un escalón unitario  $v_1(t)$  a la entrada, la salida  $v_0(t)$  corresponderá a una función exponencial decreciente que tiende a 1V cuando  $t$  tiende a infinito. La ecuación 9 expresa la señal de salida  $v_0(t)$  para  $t \geq 0s$ , que a su vez está graficada en la figura 5. Esta solución satisface las ecuaciones 1 y 2 cuando  $v_1(t)$  es un escalón.

$$\begin{aligned} \text{Para } t < 0s: & \quad v_1(t) = 0V \\ \text{Para } t \geq 0s: & \quad v_1(t) = 1V \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{Para } t < 0s: & \quad v_0(t) = 0V \\ \text{Para } t \geq 0s: & \quad v_0(t) = 1V * \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \end{aligned} \quad (9)$$



**Figura 5.** Respuesta transitoria de un sistema de primer orden.

Para hallar esta solución utilizaremos la transferencia y la señal de excitación en el dominio  $s$ . Según esto:

$$\begin{aligned} V_1(s) &= \frac{1}{s} \\ G(s) &= \frac{1}{(\tau s + 1)} \\ V_0(s) &= V_1(s) * G(s) = \frac{1}{s * (\tau s + 1)} \end{aligned} \quad (10)$$

En la ecuación 10, primero tenemos la transformada de Laplace del escalón unitario, luego la transferencia del sistema y finalmente la transformada de Laplace de nuestra señal de salida. Ahora necesitamos obtener la anti transformada de  $V_0(s)$ . Para esto utilizamos fracciones simples:

$$\begin{aligned} V_0(s) &= \frac{1}{s} * \frac{1}{(\tau s + 1)} = \frac{\tau s + 1 - \tau s}{s * (\tau s + 1)} = \frac{(\tau s + 1)}{s * (\tau s + 1)} - \frac{\tau s}{s * (\tau s + 1)} \\ \Rightarrow V_0(s) &= \frac{1}{s} - \frac{\tau}{(\tau s + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{(s + 1/\tau)} \end{aligned} \quad (11)$$

La transformada inversa de la ecuación 11 resulta ser precisamente la ecuación 9 (expresada en voltios).

Recuerde que la relación entre el tiempo  $t$  transcurrido y el valor característico  $\tau$  del sistema nos determina el valor de la señal o su proporción respecto del valor final. En la tabla 2 calculamos estas proporciones para algunos valores de  $t/\tau$ . Cuando  $t \leq 20\% * \tau$ , se cumple aproximadamente que  $1 - e^{-t/\tau} \simeq t/\tau$  (con un error del 10%). Es decir, en este breve lapso que va desde  $t = 0$  hasta un quinto de  $\tau$ , la función crece aproximadamente como una recta. Cuando  $t \geq 5\tau$ , podemos suponer que la señal de salida alcanzó su máximo valor (considerando un error del 1%). Cuando  $t$  está entre un quinto de  $\tau$  y cinco veces  $\tau$ , no tengo más remedio que calcular la exponencial o el logaritmo natural para encontrar la relación buscada.

El valor de  $v_0(t)$  cuando  $t$  tiende a infinito se denomina **estado estacionario o estable**. Nótese que para nuestra señal de entrada escalón unitario, este valor es igual a  $G(0) = 1$ . Si pensamos al escalón como una señal continua a para  $t \geq 0s$ , el valor de  $G(0)$  muestra precisamente su transferencia para  $s = 0$ , es decir: para frecuencia cero o continua.

$t/\tau$	$e^{-t/\tau}$	$1 - e^{-t/\tau}$
0	1	0
0,05 = 5%	0,951	0,049 = 4,9%
0,1 = 10%	0,905	0,095 = 9,5%
0,2 = 20%	0,819	0,181 = 18,1%
0,5 = 50%	0,607	0,393 = 39,3%
0,693 = 69,3%	0,5	50%
1	0,368	0,632 = 63,2%
2	0,135	0,865 = 86,5%
2,30	0,1	90%
3	0,050	0,950 = 95,0%
5	$6,74 * 10^{-3}$	0,993 = 99,3%

**Tabla 2.** La función exponencial.

El hecho que en  $t = 0s^+$  el valor de  $v_0(t)$  sea 0V, tiene que ver con que  $G(\infty) = 0$ . Es decir, la respuesta del sistema para frecuencias muy altas tiende a cero. Y, por lo tanto, ante un cambio abrupto, no hay variación inmediata a la salida sino que para percibir un cambio debe transcurrir un tiempo. Este intervalo de tiempo necesario está relacionado con nuestro parámetro  $\tau$ . Esto no necesariamente es así para todos los sistemas de primer orden sino que es un comportamiento característico de los pasabajos. El tránsito de  $v_0(t)$  para  $t$  entre 0s y un tiempo que está entre cinco o diez veces  $\tau$ , se denomina **estado transitorio o respuesta transitoria**.

## Señal impulso

Si la señal  $V_1(s)$  corresponde a un impulso, la señal de salida  $V_0(s)$  del filtro pasabajos será:

$$\begin{aligned} V_1(s) &= 1 \\ G(s) &= \frac{1}{(\tau*s+1)} \\ V_0(s) &= V_1(s) * G(s) = \frac{1}{(\tau*s+1)} \end{aligned} \quad (12)$$

Ahora necesitamos obtener la anti transformada de  $V_0(s)$ :

$$V_0(s) = \frac{1}{(\tau*s+1)} \Leftrightarrow v_0(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (13)$$

Concluimos que el efecto de aplicar una señal impulso en nuestro filtro pasabajos equivale a establecer una condición inicial distinta de cero. Luego, el capacitor se irá descargando y la señal tenderá asintóticamente a cero. La velocidad con que baja la señal también está determinada por la constante natural  $\tau$  del sistema. De este modo, una señal impulso también puede servir para caracterizar un circuito. Tal es así que la anti-transformada de la señal  $v_0(t)$  resultante es, precisamente, la respuesta en frecuencia del filtro.

Sin embargo, una señal con amplitud infinita no es posible implementar en la práctica concreta. Entonces... ¿cómo hacerlo? Buscaremos hacer lo que más se le parezca. Entonces, escogeremos el máximo valor que pueda tener  $v_1(t)$  sin salir del rango lineal del sistema (por ejemplo, sin romper el capacitor). Además, trataremos que el ancho del pulso sea lo más grande posible, siempre y cuando sea mucho más chico que el  $\tau$  (diez veces más chico o más). Esto nos dará un pulso con una energía lo más grande posible, desde el punto de vista físico. Si esta energía lograda es suficiente o no para ver sus resultados, dependerá del caso particular.

## Señal rampa

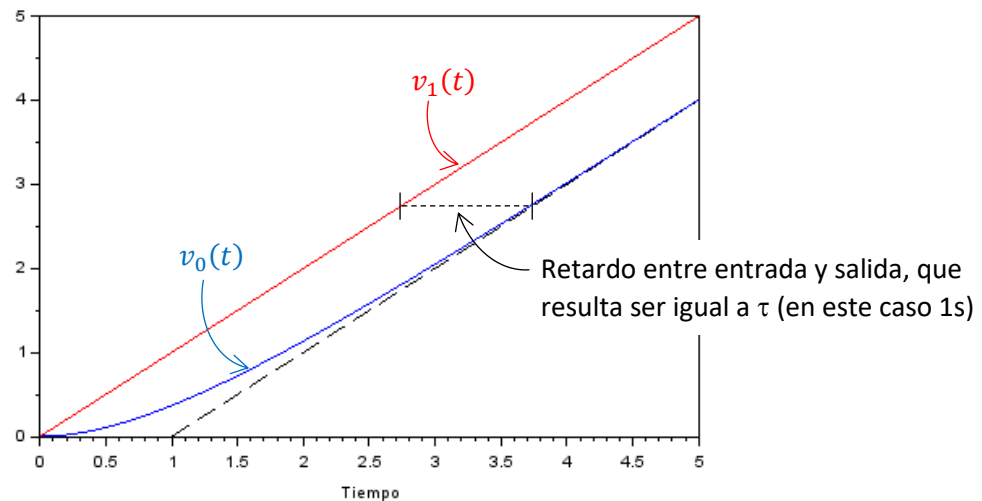
Como la transformada de Laplace de la rampa unitaria es  $\frac{1}{s^2}$ , su salida puede escribirse como:

$$V_0(s) = V_1(s) * G(s) = \frac{1}{s^2*(\tau*s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} + \frac{\tau^2}{(\tau*s+1)} \quad (14)$$

En la ecuación 14 hemos incluido su desarrollo por fracciones simples, que nos permite hallar su anti transformada:

$$v_0(t) = t - \tau + \tau * e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (15)$$

Simulando en Scilab la respuesta ante una rampa unitaria de un pasabajos con  $\tau = 1s$ , obtenemos el siguiente gráfico:

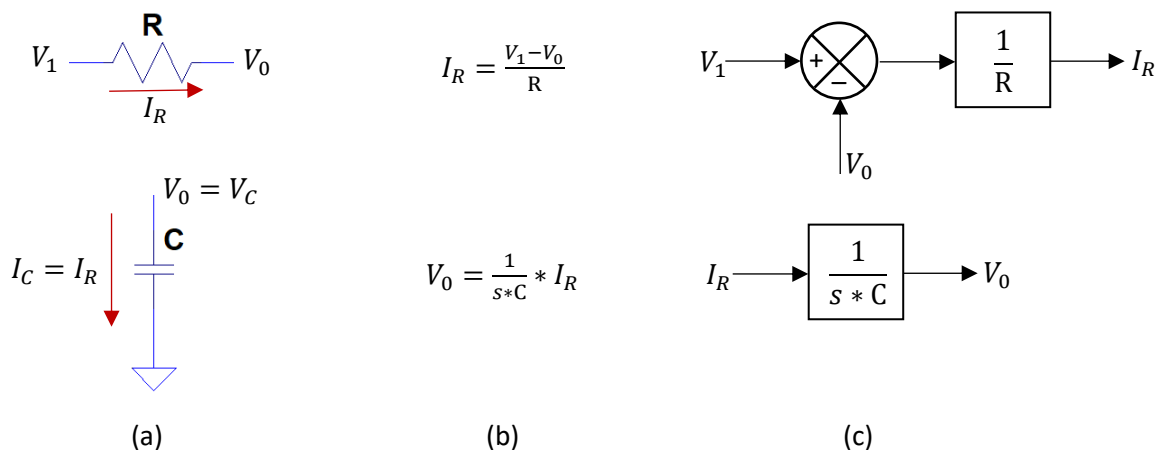


**Figura 6.** Respuesta transitoria de un pasabajas de primer orden a una rampa unitaria.

Como puede apreciarse, la salida del sistema tiene un retardo ante una entrada rampa. Este retardo es precisamente igual al tiempo natural del pasabajas  $\tau$ .

## Diagrama en bloques

La figura 2 muestra un diagrama en bloques simplificado de nuestro sistema. En la transferencia  $G(s)$  hemos resumido todo el comportamiento del sistema tomando a  $V_0$  como salida y  $V_1$  como entrada. Un diagrama en bloques completo o detallado nos permite ver cómo están entrelazados los diversos componentes del sistema. Para confeccionarlo, primero debemos establecer la equivalencia de cada componente con su ecuación que lo modeliza y con su respectivo bloque.

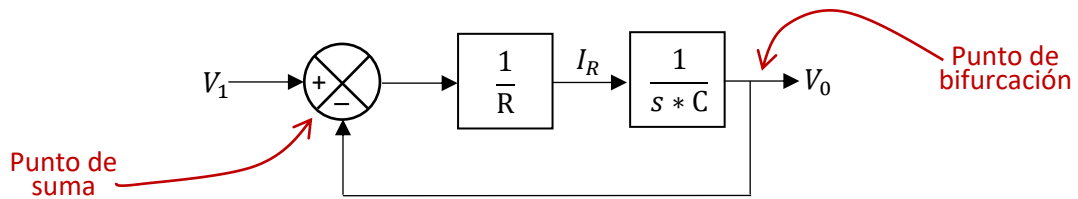


**Figura 7.** Tres formas diferentes de representar el modelo de un componente.

En la figura 7 tenemos a la simbología que representa una resistencia y un capacitor (a), su respectiva ecuación que lo modeliza (b) y un diagrama en bloques equivalente a esa ecuación (c). Las tres nomenclaturas, si bien aparecen diferentes, representan el mismo modelo. La ecuación matemática y el diagrama en bloques ha sido representado con variables en el dominio complejo  $s$ . Sin embargo, también podríamos haberlos representado con variables o señales en el dominio temporal y utilizando un bloque integral en lugar de la inversa de  $1/s$  (utilizada en el capacitor).

Combinando las partes componentes de nuestro sistema mostradas en la figura 7, podemos constituir el diagrama en bloques completo:





**Figura 8.** Diagrama en bloques completo del filtro R-C pasa bajos.

Finalmente, hemos expresado nuestro sistema como un conjunto de bloques simples interconectados entre sí. Del mismo modo que la figura 7 mostraba tres formas de representar cada componente, la figura 6 es otra forma más de representar nuestro sistema. Esta forma, presentada en un diagrama en bloques, es equivalente al esquema de la figura 1 y al sistema de las ecuaciones 1 y 2. Este diagrama completo de la figura 8 también se denomina diagrama de estados.

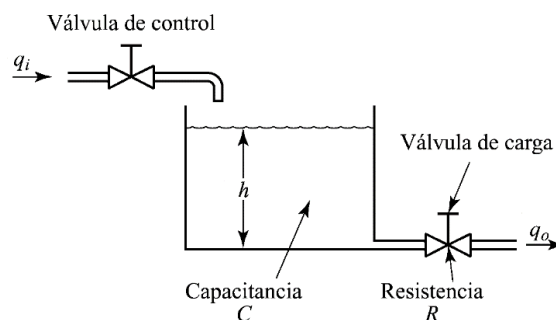
En la figura 8, hemos señalado además el **punto de suma** y el **punto de bifurcación**, dos elementos básicos de los diagramas en bloques. Las flechas indican señales. Cada bloque representa una función o transferencia, tomando como entrada una flecha entrante y como salida una flecha saliente. El punto de suma, suma o restas sus entradas según indica el signo asignado. El punto de bifurcación señala que esa señal será utilizada como entrada de otro bloque o función.

Este diagrama completo nos permite visualizar mejor el comportamiento interno de nuestro sistema de primer orden. En la figura 8 se ve, ahora nítidamente, que nuestro circuito R-C posee una realimentación interna. Como sabemos, ante una señal escalón el pico máximo de corriente  $i_R$  se produce en el instante inicial. En ese momento la salida  $v_0$  es cero y por lo tanto no resta en el punto de suma. Pero a medida que el capacitor se va cargando —y  $v_0$  va subiendo—, la diferencia de tensión sobre la resistencia se va achicando. Por lo tanto, también la corriente se va achicando, como así también la velocidad con que sube la salida  $v_0$ . Todo este funcionamiento habíamos resumido previamente en la transferencia  $G(s)$ .

Otra cuestión importante a notar es que, así como el grado del polinomio característico de  $G(s)$  nos indica el orden del sistema, en el diagrama en bloques el orden del sistema está dado por la cantidad de bloques integradores, asociándose cada integrador a un estado del sistema (habiendo sólo un estado en un sistema de primer orden).

## Sistema de nivel de líquido

En la figura 9 se muestra un sistema de nivel de líquido. Está compuesto por un tanque que almacena el líquido, un caudal de entrada que puede estar controlado por una válvula o una bomba, y una válvula de salida que limita el flujo de salida. Esto podría representar, por ejemplo, el tanque de agua de un edificio.



**Figura 9.** Sistema de nivel de líquido

## Resistencia hídrica

El caudal  $q_i(t)$  irá llenando el tanque de agua. El caudal de salida  $q_o(t)$  dependerá de la **resistencia hídrica** que presente la válvula de salida y de la diferencia de altura  $h(t)$  entre la salida y el nivel de agua. Supondremos a  $q_o(t)$  como proporcional a la altura  $h(t)$  e inversamente proporcional a la resistencia hídrica  $R$ :

$$q_o(t) = \frac{h(t)}{R} \quad (16)$$

La resistencia  $R$  será más grande cuanto más pequeño sea el orificio de la válvula por donde pasa el líquido. Además, podría ser necesario tener en cuenta que un caño angosto genera también una resistencia. Partiendo de la ecuación 16, podemos escribir:

$$R \left[ \frac{s}{m^2} \right] = \frac{h [m]}{q_o [m^3/s]} \quad (17)$$

Entre corchetes señalamos las unidades de cada variable o señal. El caudal también se suele expresar como centímetros cúbicos por segundo, litros por minuto o cualquier unidad de volumen sobre tiempo. Las unidades de  $h(t)$  y de  $R$  deberán siempre mantener coherencia con las unidades de caudal elegidas.

Cuanto mayor sea la altura del nivel  $h(t)$ , mayor será la presión y por lo tanto mayor será el caudal que pasará por  $R$ . Este fenómeno se aprecia en el sistema de agua de un edificio. Los pisos de abajo poseen gran presión de agua porque hay una gran diferencia de altura con el tanque. En cambio, los pisos superiores suelen tener problemas de presión de agua porque la diferencia de altura con el tanque se hace más chica. Nótese que la altura  $h(t)$  considerada no hace referencia simplemente a la altura de agua dentro del tanque sino a la diferencia entre la salida y el nivel superior del agua.

La ecuación 16 modeliza el caudal de agua a través de un caño. Sin embargo, esta aproximación sirve para el caso en que el flujo de líquido sea laminar. Puede ocurrir, en cambio, que el flujo sea lo que se conoce como turbulento, en cuyo caso la relación ya no es lineal. Nos concentraremos en el caso de flujo laminar en que el caudal es proporcional a la altura.<sup>6</sup>

## Capacitancia

El otro parámetro que nos falta precisar para obtener la transferencia de nuestro sistema es la **capacitancia** del tanque de líquido. La capacitancia de un tanque nos indica cuánto líquido es necesario agregar para que su nivel suba una determinada cantidad.

$$C [m^2] = \frac{\text{cambio de líquido almacenado } [m^3]}{\text{cambio en la altura del nivel } [m]} \quad (18)$$

Nótese que la capacitancia de un tanque es la superficie que ocupa el agua en el punto de operación en cuestión. Si el nivel del agua subió un  $\Delta h$ , eso quiere decir que el volumen de líquido almacenado creció ese  $\Delta h$  multiplicado por esa superficie. Lo usual es que la superficie del líquido en un tanque sea constante para cualquier nivel, y por lo tanto su capacitancia  $C$  será una constante. Sin embargo, puede ocurrir que, como una forma de aprovechar espacio –o algún otro motivo de diseño–, la capacitancia varíe con  $h$ . Por ejemplo, éste sería el caso de un tanque de combustible de un vehículo.

No es lo mismo la capacitancia de un tanque que su capacidad. La **capacidad** nos da el máximo volumen de líquido que puede almacenar, pero no su variación de altura por cada litro extra que le cargamos. Si la capacidad del tanque es sobrepasada y el líquido rebalsa, nuestra capacitancia pasará

---

<sup>6</sup> Para más detalles consultar Ogata (2010, pág. 101).

a ser cero debido a que ya no aumentará en nada su nivel  $h$  por más que siga habiendo caudal de entrada. Entonces, en este límite nuestro sistema dejará de ser lineal con toda seguridad.

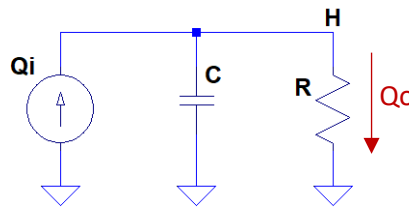
### Analogía con un sistema eléctrico

Podemos expresar nuestro sistema de nivel con el análogo eléctrico de capacitor y resistencia. Para eso reescribimos la ecuación 18 de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{C} \int q_C * dt \\ \frac{dh(t)}{dt} &= \frac{1}{C} * q_C \end{aligned} \quad (19)$$

En la ecuación,  $q_C$  representa el caudal de entrada menos el de salida, que la resultante que efectivamente aporta a cambiar el nivel. De la ecuación se ve la analogía con las ecuaciones de un capacitor eléctrico. En un caso se almacena líquido y en otro, carga eléctrica. Pero ambos se rigen por la misma ecuación.

Si además modelizamos el caudal de entrada como una fuente de corriente, podemos realizar un esquema del equivalente o análogo eléctrico de nuestro sistema:



**Figura 10.** Análogo eléctrico de nuestro sistema de nivel de agua

### Transferencias

Como se puede apreciar, el tiempo natural de crecimiento del sistema es  $\tau = RC$ . Si consideramos a  $q_o$  como salida, la transferencia  $G_1$  de nuestro sistema será exactamente la misma que en el ejemplo de circuito pasa bajos R-C.

$$G_1(s) = \frac{Q_o(s)}{Q_i(s)} = \frac{1}{(\tau*s+1)} \quad (20)$$

Sin embargo, si nuestra salida es la altura  $h$ , la transferencia presentará dos parámetros, tal como se muestra en la ecuación 21. Para este tipo de sistemas, suele usarse esta forma porque nos brinda directamente la energía potencial almacenada en el tanque con el líquido contenido. Y porque suele ser más fácil medir la altura de un nivel que el caudal. Nótese que para frecuencias por debajo de la frecuencia de corte, la transferencia  $G_2$  no es 1 sino  $R$ .

$$G_2(s) = \frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{(\tau*s+1)} \quad (21)$$

### Sistema térmico

Para desarrollar la modelización de un sistema térmico, tomaremos como ejemplo una pava eléctrica como la mostrada en la figura 11. En este caso sólo tendremos en cuenta, en principio, el calentamiento del agua producto de la resistencia calefactora.

Como habrá comprobado, el agua en el interior de una pava tarda cierto tiempo en llegar a la temperatura deseada. Se percibe así que la temperatura del agua tiene el efecto de integrar el calor

que recibe. El tiempo necesario para llegar a una temperatura determinada aumenta si aumentamos la cantidad de agua que contiene; y disminuye si la pava es más potente. Para poder prever cuánto será este tiempo, necesitamos recurrir a los valores de calor específico del agua y de capacidad calorífica de un litro de agua.

### Calor específico

El **calor específico** de un material está definido como la cantidad de calor por unidad de masa necesario para elevar su temperatura en una cantidad determinada. Las unidades más comúnmente utilizadas son: calorías (cal) para el calor; gramo (g) para la masa; y grados centígrados ( $^{\circ}\text{C}$ ) para la temperatura. Todos los materiales tienen un calor específico determinado, que varía según diversas condiciones (según su estado, presión, etc.). Históricamente se ha tomado como referencia el calor específico del agua en estado líquido a aproximadamente  $15^{\circ}\text{C}$  en una presión atmosférica normalizada. Se identifica con letra minúscula:



**Figura 11.** Una pava puede modelizarse como un sistema térmico de primer orden.

$$c_{\text{Agua}} = 1 \frac{\text{cal}}{\text{g } ^{\circ}\text{C}} \quad (20)$$

Como la unidad de energía que solemos utilizar en nuestras aplicaciones no son las calorías sino los Joules, necesitamos su equivalencia. Según esto queda:

$$1 \text{ cal} = 4,184 \text{ J} \\ c_{\text{Agua}} = 1 \frac{\text{cal}}{\text{g } ^{\circ}\text{C}} = 4,184 \frac{\text{J}}{\text{g } ^{\circ}\text{C}} = 4.184 \frac{\text{J}}{\text{kg } ^{\circ}\text{C}} \quad (22)$$

Si en lugar de agua estamos utilizando algún otro material, tendremos que buscar su valor particular de calor específico. O buscar la forma de medirlo. Lo que sigue es calcular o prever cuánto calor necesitaré para calentar una cantidad de materia determinada: en nuestro caso, un litro de agua contenida dentro de la pava.

### Capacidad calorífica o térmica

La **capacidad calorífica o térmica** de un cuerpo se define como el cociente de la energía transferida a dicho cuerpo sobre su variación de temperatura. Una forma de calcularla es simplemente multiplicando el calor específico del material del cuerpo en cuestión por su masa. En nuestro ejemplo de la pava eléctrica, si suponemos que contiene un litro de agua, podemos aproximar su masa a 1kg. Luego resultará:

$$C_L = c_{\text{Agua}} * 1\text{kg} = 4.184 \frac{\text{J}}{\text{kg } ^{\circ}\text{C}} * 1\text{kg} = 4.184 \frac{\text{J}}{^{\circ}\text{C}} \quad (23)$$

Donde L representa un litro de agua y  $C_L$  su capacidad térmica. Esto significa que, si le entregamos 4.184 J en forma de calor, nuestro litro de agua se calentará  $1^{\circ}\text{C}$ .

Si suponemos que nuestra pava no pierde calor y que el agua no supera los 100°C, podremos calcular de forma sencilla cuanta energía necesito para subir su temperatura en una cantidad dada. Y a cuánto tiempo equivale considerando una potencia determinada. Por ejemplo, si deseamos llevar el agua a 80°C pero se encuentra a 22°C, podremos calcular:

$$C_L = \frac{\Delta E}{\Delta T} = \frac{\Delta E}{80^\circ\text{C} - 22^\circ\text{C}} = \frac{\Delta E}{58^\circ\text{C}}$$

$$\Delta E = C_L * \Delta T = 4.184 \frac{\text{J}}{^\circ\text{C}} * 58^\circ\text{C} = 242,7 \text{ kJ} \quad (24)$$

Si nuestra pava posee 1.800 W de potencia, para estimar el tiempo calculamos:

$$\Delta E = P_E * \Delta t = 242,7 \text{ kJ}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta E}{P_E} = \frac{242,7 \text{ kJ}}{1.800 \text{ W}} = 134,8 \text{ s} \quad (25)$$

## Resistencia térmica

Para calcular el calor que pierde la pava, necesitamos definir la **resistencia térmica** de una superficie. En nuestro caso se refiere a toda la superficie a través de la cual el agua pierde calor, especialmente con las paredes de la pava. El calor perdido pasa así del agua a las paredes de la pava, y de las paredes de la pava al ambiente. Si el agua y el ambiente se encontraran a la misma temperatura, no habría transferencia neta de calor. Ésta se produce si hay diferencia de temperatura. Cuanto mayor sea esta diferencia, mayor será la transferencia. La diferencia de temperatura y la transferencia mantienen idealmente una relación lineal. De este modo podemos calcular la resistencia térmica entre el agua y el ambiente como:

$$R_{LA} = \frac{\Delta T}{P_D} = \frac{T_L - T_A}{P_D} \quad (26)$$

Donde  $R_{LA}$  es la resistencia térmica mencionada,  $T_L$  es la temperatura del litro de agua,  $T_A$  del ambiente y  $P_D$  es la potencia que se pierde o disipa en forma de calor al ambiente.

## Analogía con sistema eléctrico

Como habrá notado, la ecuación 26 es la misma que la Ley de Ohm para una resistencia eléctrica. Basta con reemplazar diferencia de tensión por diferencia de temperatura y corriente por potencia transferida. Dicho de otro modo: la temperatura en una región –el ambiente A o el agua L en nuestro ejemplo– funciona de forma análoga a un nodo de tensión (uniforme en toda esa región); el calor transferido a través de una superficie es análogo a la corriente a través de un cable; y esto me permite definir la resistencia térmica de forma similar a como está definida una resistencia eléctrica. Nuestra única salvedad consiste en que estoy suponiendo constante la temperatura en todo el litro de agua y en todo el ambiente. Esta suposición será válida en la gran mayoría de las aplicaciones.

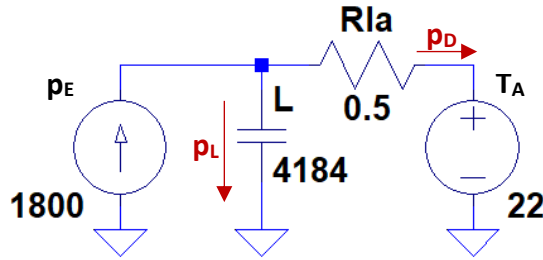
Por otra parte, también debemos considerar a la capacidad térmica como análoga a la capacidad de un capacitor eléctrico. Reescribiendo las ecuaciones 24 y 25, puede quedar:

$$C_L = \frac{\Delta E}{\Delta T} = \frac{P_L * \Delta t}{\Delta T}$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{1}{C_L} * P_L \quad (27)$$

Ahora puede verse mejor la analogía de nuestro sistema térmico con el de un capacitor eléctrico. Hemos llamado  $P_L$  a la potencia calórica que es absorbida por el litro de agua en cuestión, ya que una parte se pierde al ambiente y no se traduce en un aumento de su temperatura. Finalmente,

considerando la capacidad del litro de agua y la pérdida de calor a través de las paredes, la pava puede modelizarse y simularse en LTspice, utilizando el circuito mostrado en la figura 12:



**Figura 12.** Modelo eléctrico de una pava en primer orden.

En la figura hemos utilizado la potencia de la pava (1.800 W), la capacidad calculada de un litro de agua (4.184 J/°C), la temperatura del ambiente (22°C) y debimos suponer un valor de resistencia térmica (0,5°C/W), para el cuál hemos tomado como referencia las mediciones hechas en clase.

Si comparamos nuestro análogo eléctrico de la pava (figura 12) con el análogo eléctrico del tanque de agua (figura 10), notará que en el caso de la pava tenemos no sólo una fuente de corriente sino también una fuente de tensión continua  $T_A$ , que representa la temperatura ambiente. Esto modeliza cómo el ambiente perturba nuestro sistema, generando condiciones iniciales distintas de cero y afectando durante todo el proceso de control.

### Modelizando la temperatura ambiente

Si consideramos a la temperatura del agua  $T_L(t)$  como la variable controlada en nuestro sistema, podemos prever cómo variará en función de la o las entradas. Podemos utilizar la Ley de Kirchhoff de Corriente en la figura 12, según la cual resultará:

$$p_E(t) = p_L(t) + p_D(t)$$

$$p_E(t) = C_L * \frac{dT_L(t)}{dt} + \frac{T_L(t) - T_A(t)}{R_{LA}} \quad (28)$$

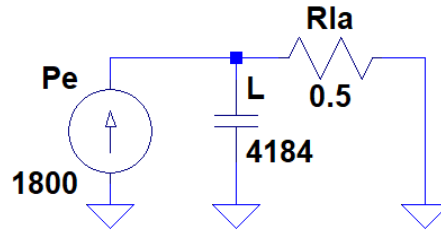
Así obtuvimos una ecuación diferencial, en la cual apreciamos que la temperatura del agua dependerá de la temperatura ambiente y de la potencia eléctrica aplicada. Hay varias formas de resolver este problema. Para simplificar, supondremos que la temperatura ambiente es constante. Lo que puede tornarse engorroso es el problema que una temperatura constante introduce, además, una temperatura inicial distinta de cero.

Una forma de resolver este problema es utilizando el principio de superposición. Así calculamos por separado cuánto afecta cada fuente en la temperatura del agua: el calefactor eléctrico por un lado y la temperatura del ambiente por el otro. Para analizar cómo afecta la temperatura ambiente, pasivamos la fuente de corriente  $p_E$ , reemplazándola por un circuito abierto (ver figura 12). Dado que la fuente de tensión  $T_A$  es continua, y que para este caso el capacitor equivale a un circuito abierto, la contribución de  $T_A$  en la temperatura del agua es simplemente el valor de  $T_A = 22^\circ\text{C}$ . Esto expresamos en la ecuación 29 simbolizado como  $T_L'(t)$  y  $T_L'(s)$ .

$$T_L'(t) = T_A$$

$$T_L'(s) = \frac{T_A}{s} \quad (29)$$

Para calcular la incidencia de  $p_E$ , ahora pasivamos la fuente de tensión  $T_A$  y la reemplazamos por un circuito cerrado. Nuestro circuito resultante será el de la figura 13.



**Figura 13.** Efecto de  $P_E$  sobre  $T_L$  pasivando  $T_A$ .

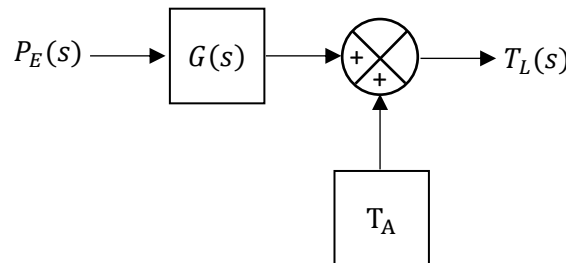
Entonces utilizamos la Ley de Kirchhoff de Corriente, resultando la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 p_E(t) &= p_L(t) + p_D(t) \\
 p_E(t) &= C_L * \frac{dT_L''(t)}{dt} + \frac{T_L''(t)}{R_{LA}} \\
 P_E(s) &= C_L * s * T_L''(s) + \frac{1}{R_{LA}} * T_L''(s) \\
 P_E(s) &= (R_{LA}C_L * s + 1) * \frac{1}{R_{LA}} * T_L''(s) \\
 T_L''(s) &= \frac{R_{LA}}{(R_{LA}C_L * s + 1)} * P_E(s) = G(s) * P_E(s)
 \end{aligned} \tag{30}$$

Llamamos  $T_L''$  a la incidencia de la potencia de la pava  $p_E$  sobre la temperatura del agua. La ecuación 30 se corresponde perfectamente con la definición de transferencia  $G(s)$ . Lo que debe tenerse en cuenta es que la temperatura total es la suma de  $T_L''$  y  $T_L'$ . Es decir:

$$T_L(s) = T_L''(s) + T_L'(s) = G(s) * P_E(s) + \frac{T_A}{s} \tag{33}$$

Ahora podemos hacer un diagrama en bloques de nuestro sistema, incluyendo su temperatura inicial:



**Figura 14.** Diagrama en bloques de nuestro sistema térmico.

En la figura,  $T_A$  corresponde a una constante cuya transformada de Laplace es precisamente  $\frac{T_A}{s}$ . Este diagrama en bloques es especialmente útil para simularlo utilizando la función `xcos` del Scilab. También se puede utilizar el LTspice, especialmente diseñado para la simulación de circuitos eléctricos y que simula las condiciones iniciales en el cálculo del punto de operación inicial. Pero nos obliga a traducir todas las perturbaciones a componentes electrónicos o funciones que incluya este programa. Las posibilidades del Scilab y de otros programas de simulación matemática suelen ser más amplias y permite simular diversas alinealidades.





# Capítulo 3.

## Modelización de sistemas físicos en 2º orden

Hasta aquí hemos modelizado algunos sistemas físicos en un sistema de ecuaciones de 1º orden, el más sencillo ya que incluye sólo un integrador. Sin embargo, este modelo muestra sus límites cuando el sistema físico en cuestión exija ser representado por al menos dos integradores. Esto ocurre, por ejemplo, con un circuito eléctrico que tenga dos capacitores; o un capacitor y una inductancia. Lo mismo ocurre con un sistema mecánico en que deba controlar la posición. En este caso, la fuerza es proporcional a la derivada segunda de la posición. Dicho al revés: la posición es la integral de la velocidad, que a su vez es la integral de la aceleración, que a su vez es proporcional a la fuerza. Tenemos así dos integradores.

En estos casos, la ecuación característica de la transferencia se hace un poco más compleja, como así también el análisis de su respuesta temporal. A su vez, la propia modelización para llegar a nuestro modelo de transferencia también resulta en un nuevo desafío. En este capítulo, presentaremos un procedimiento general de modelización teórica, describiremos algunos ejemplos de sistemas físicos, y analizaremos su transferencia utilizando las herramientas de Laplace.

### Forma estándar de una transferencia de segundo orden

La forma genérica de una transferencias de segundo orden puede escribirse:

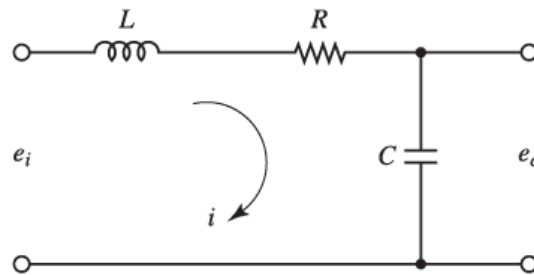
$$G(s) = \frac{\beta \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\beta}{\frac{1}{\omega_n^2} s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1} \quad (1)$$

Esta forma se denomina forma estándar del sistema de segundo orden. El parámetro  $\beta$  es una constante de proporcionalidad. Para una entrada escalón unitario, el sistema entrará en su **estado estacionario** cuando el tiempo tienda a infinito (mientras se trate de un sistema estable). En ese caso, se puede demostrar por el Teorema del Valor Final que la salida del sistema tenderá a  $G(0) = \beta$ .

Los parámetros  $\omega_n$  y  $\zeta$  se denominan **frecuencia natural no amortiguada** y **factor de amortiguamiento relativo**, respectivamente. Estos parámetros determinar el comportamiento dinámico del sistema, es decir durante su **estado transitorio** (recordemos que el estado transitorio incluye el período de tiempo que va desde que se aplica el escalón –u otra excitación en la entrada– hasta que se alcanza el estado estacionario). Dados los valores de estos parámetros  $\zeta$  y  $\omega_n$ , se puede predecir la respuesta del sistema, ya que éstos están relacionados y definidos por los polos de la función de transferencia, cuestión que veremos más adelante.

## Circuito R-L-C

En la figura tenemos un filtro pasabajos de segundo orden. A bajas frecuencias: el capacitor se comporta como un circuito abierto y la inductancia como un circuito cerrado (o cortocircuito). Por lo tanto, la salida  $e_o$  tiende a ser igual a la entrada  $e_i$ . A altas frecuencias: el capacitor se comporta como un cortocircuito y la inductancia como un circuito abierto. Por lo tanto, la inductancia impide el paso de corriente  $i$ ; y el capacitor ocasiona que esa corriente se traduzca en una tensión  $e_o$  cada vez más pequeña a medida que aumenta la frecuencia. Este doble-efecto, del capacitor y de la inductancia sumados, muestra el segundo orden del filtro. Para analizarlo debemos plantear la ecuación diferencial que lo rige.



**Figura 1.** Circuito R-L-C pasa bajos.

El sistema de ecuaciones diferenciales que lo representa es:

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt &= e_i \\ \frac{1}{C} \int i dt &= e_o \end{aligned} \quad (2)$$

Utilizando la transformada de Laplace llegamos a que la función de transferencia es:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} = G(s) \quad (3)$$

### Frecuencia natural no amortiguada

Para este ejemplo, el factor  $\beta$  es 1. Por lo que la ecuación estándar puede escribirse como:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1} \quad (4)$$

La ecuación muestra que el circuito tiene un efecto resonante. Cuando se analiza un circuito resonante como éste, se suele analizar la corriente  $i$  en función de la tensión de entrada  $e_i$ . La diferencia de tomar la corriente como salida es que la corriente tiende a cero tanto para bajas como para altas frecuencias. Pero si analizamos el comportamiento de  $e_o$ , esta tensión se iguala con la entrada para bajas frecuencias. De allí su efecto como pasabajos.

Indistintamente de qué variable tomemos como salida del sistema, podremos calcular la **frecuencia de resonancia**  $\omega_n$ , también llamada **frecuencia natural no amortiguada del sistema**. Comparando las ecuaciones (3) y (4), resulta:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2\pi * f_n \quad (5)$$

En la ecuación,  $\omega_n$  se expresa en radianes y  $f_n$  en hertzios. Como recordará del análisis de un circuito resonante, en esta frecuencia la corriente  $i$  es máxima y corresponde a la frecuencia en que la reactancia inductiva  $L$  es igual a la reactancia capacitiva  $C$ . En el caso de la utilización de este circuito como pasabajos, su frecuencia de corte por lo general será más o menos cercana a esta frecuencia de resonancia.

El efecto de la resonancia es que el capacitor y la inductancia se transferirán su energía mutuamente en cada medio ciclo. Por momentos el capacitor no tendrá energía almacenada y el inductor tendrá su pico de energía, y por momentos será a la inversa. La resistencia cumplirá el rol de ir disipando esa energía, bajando así la amplitud de la oscilación.

### Factor de amortiguamiento relativo

En nuestro circuito R-L-C, el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  resulta:

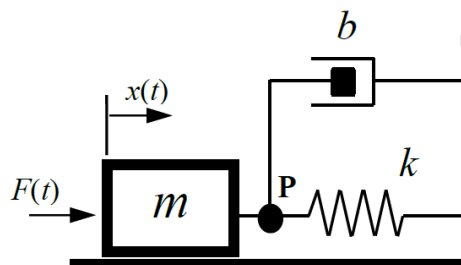
$$\begin{aligned} RC &= \frac{2\zeta}{\omega_n} \\ RC * \frac{1}{\sqrt{LC}} * \frac{1}{2} &= \zeta \\ \zeta &= \frac{R}{2} * \sqrt{\frac{C}{L}} \end{aligned} \quad (6)$$

Dada una frecuencia de resonancia determinada por  $L$  y  $C$ , puedo ajustar el factor de amortiguamiento variando  $R$ . La ecuación es lógica con el efecto de la resistencia de disipar energía. Si no hubiera resistencia (lo que equivale a asumir  $R=0$ ), el circuito resonaría indefinidamente y  $\zeta$  sería cero.

### Sistema mecánico masa-resorte

En la figura tenemos un sistema compuesto por una masa, un resorte y un amortiguador. La masa tiene el efecto de generar inercia. Es decir, deberá aplicarse una fuerza para variar su velocidad. Dicho de otro modo, la masa almacena energía cinética. Basta con conocer la velocidad para calcular esta energía. La velocidad es entonces uno de los integradores a tener en cuenta en nuestro sistema, ya que es la integral de la aceleración.

El resorte entrega una fuerza que es proporcional a la posición  $x$ , resultando en un componente que almacena energía potencial. Esta energía potencial puede calcularse con la posición. Como la posición  $x$  es la integral de la velocidad, constituye el segundo integrador que hace que este sistema deba modelizarse como de segundo orden.



**Figura 2.** Sistema mecánico compuesto por masa, resorte y amortiguador.

Por último, el amortiguador entrega una fuerza proporcional a la velocidad y en sentido contrario a la misma. Si bien en el mundo real la respuesta de un amortiguador es más compleja, este sencillo modelo sirve para analizar el sistema con bastante éxito. Puesto en ecuaciones (analizando sólo la dimensión  $x$ ):

$$\begin{aligned}
F_m(t) &= m * \frac{dv(t)}{dt} \\
F_k(t) &= -k * x(t) \\
F_b(t) &= -b * v(t) \\
F_m(t) &= F_k(t) + F_b(t) + F(t)
\end{aligned} \tag{7}$$

En la ecuación (7) señalamos tres fuerzas distintas: la que ejerce el resorte, el amortiguador y la fuerza aplicada externamente. La sumatoria de estas tres fuerzas da la resultante que hará variar la velocidad de la masa. Juntando todo resulta:

$$\begin{aligned}
m * \frac{dv(t)}{dt} &= -k * x(t) - b * v(t) + F(t) \\
m * \frac{d^2x(t)}{dt^2} + b * \frac{dx(t)}{dt} + k * x(t) &= F(t)
\end{aligned} \tag{8}$$

Utilizando Laplace, resulta:

$$\begin{aligned}
(m * s^2 + b * s + k) * X(s) &= F(s) \\
\frac{X(s)}{F(s)} &= \frac{1}{(m*s^2+b*s+k)} = G(s)
\end{aligned} \tag{9}$$

Como se puede apreciar, la ecuación 9 es similar a la ecuación (3), que representaba un circuito R-L-C. Para frecuencias bajas, la transferencia  $G(s)$  tiene a  $1/k$ . Es decir, la inversa de la constante del resorte. Esta variación de posición en bajas frecuencias o en estado estacionario siempre tendrá un valor distinto de cero que depende de la fuerza aplicada y el resorte. Sin embargo, a altas frecuencias, la transferencia tiende a cero. Es decir, este sistema funciona como un pasabajos de segundo orden.

Podemos reescribir la ecuación 9 tomando la forma estándar de la ecuación 1. Según esto quedará:

$$\begin{aligned}
G(s) &= \frac{1}{k} * \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\
\beta &= \frac{1}{k} \\
\omega_n &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\
\zeta &= \frac{b}{2} * \sqrt{\frac{1}{k*m}}
\end{aligned} \tag{10}$$

Los resultados se parecen bastante al sistema eléctrico analizado previamente. Nuevamente podemos calcular la frecuencia natural no amortiguada, que en este caso depende exclusivamente de la constante del resorte y de la masa. Por otra parte, el factor de amortiguación podrá ajustarse con el parámetro  $b$  del amortiguador.

Físicamente, podemos intuir que si el amortiguador influye poco (con un valor de  $b$  bajo), la masa oscilará alrededor de un punto de una posición de equilibrio. Y que la oscilación durará más cuanto más bajo sea  $b$ . Dicho de otro modo, el componente que logra disipar energía de modo tal que deje de oscilar es el amortiguador. Sin este componente o sin rozamiento, la masa oscilaría indefinidamente. Esto ocurriría cuando  $b = 0 = \zeta$ . Este efecto es el que se ve, por ejemplo, cuando se rompe el amortiguador de un automóvil. En estos casos, ocurre que el vehículo sube y baja prolongadamente cada vez que pasa un pozo o cuneta.

Habíamos dicho previamente que la masa almacena energía cinética; y que el resorte almacena energía potencial. En los ciclos que recorra la masa mientras se mueva, se transferirá energía cinética a energía potencia o viceversa. La disipación de energía sólo se logra con el amortiguador. La similitud entre el circuito R-L-C y el sistema mecánico analizados es tal que incluso podemos establecer una equivalencia entre componentes eléctricos y mecánicos.

## Equivalencia entre componentes eléctricos y mecánicos

Si relacionamos la corriente de la bobina con la velocidad de la masa, podemos comprobar que sus ecuaciones son análogas. Una almacena energía en forma de campo magnético; la otra energía cinética. Del mismo modo, podemos asociar la energía del capacitor con la que almacena el resorte. Y por último, podemos comprobar la analogía entre la energía que disipa un resistor y un amortiguador. Revisando todas sus ecuaciones podemos construir la tabla 1.

**Tabla 1.** Analogía energética entre componentes eléctricos y mecánicos.

Componente eléctrico		Componente mecánico	
L	$E_L = \frac{1}{2} L * i_L^2$ Energía inductiva	m	$E_C = \frac{1}{2} m * v^2$ Energía cinética
C	$E_C = \frac{1}{2} C * v_C^2$ Energía capacitiva	k	$E_P = \frac{1}{2} k * x^2 = \frac{1}{2k} * F_k^2$ Energía potencial
R	$P = R * i_R^2$ Energía disipada	b	$P = b * v^2$ Energía disipada

Como puede observarse, la analogía entre corriente y velocidad sale inmediatamente comparando una inductancia y una masa. Lo mismo ocurre si comparamos una resistencia con un amortiguador.

Luego, podemos relacionar la tensión en un sistema eléctrico con la fuerza en uno mecánico. En el caso de una inductancia: debo aplicar una tensión para variar su corriente. En el caso de su análoga, la masa: debo aplicar una fuerza para variar su velocidad. Entonces podemos concluir que la fuerza en un sistema mecánico es el análogo de la tensión en un sistema eléctrico. Esto también se aprecia comparando la energía capacitiva con la energía potencial, aunque señalando que la capacidad sería el análogo de la inversa de la constante del resorte k.

Podemos confeccionar además otra tabla con estas relaciones de  $v-i$  y de  $F-v$ :

**Tabla 2.** Relaciones de  $v-i$  en componentes eléctricos y de  $F-v$  en componentes mecánicos.

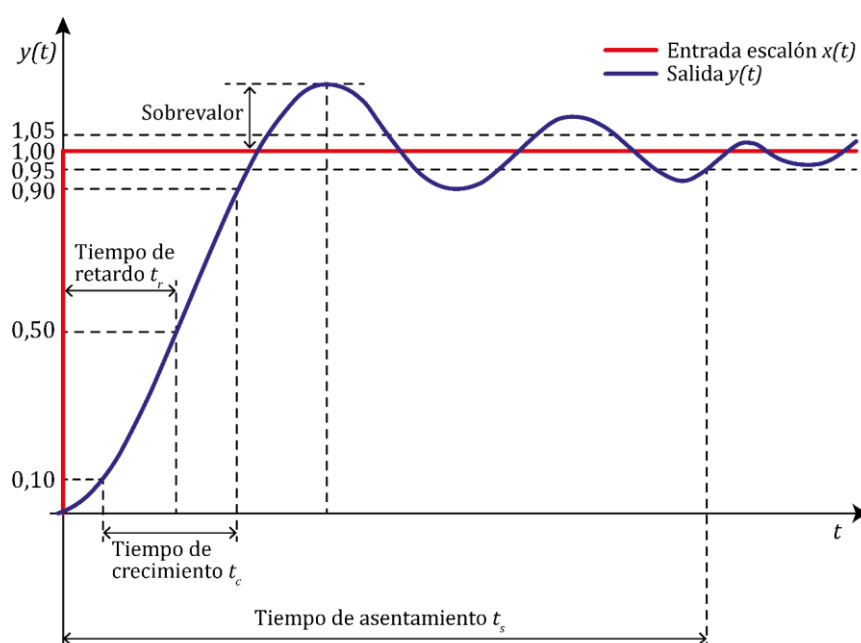
Componente eléctrico		Componente mecánico	
L	$\frac{di_L}{dt} = L * v_L$	m	$\frac{dv}{dt} = m * F_m$
C	$\frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C} * i_C$ $v_C = \frac{1}{C} \int i_C * dt$ $v_C = \frac{1}{C} * q_C$	k	$\frac{dF_k}{dt} = -k * v$ $F_k = -k * \int v * dt$ $F_k = -k * x$
R	$v_R = R * i_R$	b	$F_b = -b * v$

Ahora puede verse plenamente la analogía. La cuestión de los signos negativos en el resorte y en el amortiguador tiene que ver con las referencias establecidas en el sistema.

Si volvemos a comparar los sistemas elegidos, notamos que todos los componentes del circuito eléctrico comparten la misma corriente. De modo análogo, todos los componentes del sistema mecánico comparten la velocidad (y la posición). A la vez, la suma de las tensiones en R, L y C da como resultado la tensión aplicada. Del mismo modo, si analizamos la ecuación 7, concluimos que la fuerza aplicada es igual a la suma de las fuerzas que ejerce el resorte, el amortiguador y la que efectivamente genera un cambio de velocidad de la masa. La analogía es completa y exacta. Conclusión: un sistema mecánico puede representarse como un circuito eléctrico.

## Parámetros característicos de una respuesta en el tiempo

Para analizar la respuesta temporal de un sistema de segundo orden o superior a un escalón, necesitamos primero definir algunos tiempos y amplitudes importantes. Para eso partimos de la figura 3. Como puede apreciarse, esta respuesta tiene algunos elementos adicionales que no tenía una respuesta de primer orden.



**Figura 3.** Una respuesta ante una entrada escalón.

Una a una, se irá definiendo los parámetros de esta respuesta con una breve explicación. Se sobreentiende que nos referimos a señales que tienden a algún valor finito.

### Tiempo de crecimiento

Es el tiempo que transcurre desde el 10% al 90% del valor final de la señal. De este modo, nos cuantifica qué tan rápido crece la señal. Puede definirse también entre el 20% y 80% del valor final, u otro porcentaje especificado. En algunas traducciones se describe como “tiempo de levantamiento”, del inglés *rise time*.

En los sistemas de 1º orden, esta información se cuantifica con el valor del tiempo natural del sistema  $\tau$ . La ventaja del tiempo de crecimiento  $t_c$  para describir la rapidez de un sistema ante una entrada escalón, es que permite describir respuestas con concavidad positiva al inicio de la señal. El modelo de primer orden caracterizado con  $\tau$ , sólo permite describir adecuadamente respuestas con concavidad negativa. Para el caso de una respuesta al escalón de un sistema de primer orden, el tiempo de crecimiento es  $t_c = 2,2 * \tau$ .

En definitiva, el tiempo de crecimiento  $t_c$  es una forma general de cuantificar la velocidad de una señal, independientemente del orden del sistema.

### Tiempo de retardo

Es el tiempo que se demora en alcanzar el 50% del valor final de la señal. De alguna manera cuantifica cuánto tarda el escalón en hacer efecto en la salida del sistema. Por ejemplo en electrónica, este tiempo nos indica cuánto tarda un bit en recorrer toda línea de transmisión analizada. Este valor puede ser más chico o muchas veces mayor al tiempo de crecimiento.

En un modelo de primer orden, el tiempo de retardo  $t_R = 0,693 * \tau$ . Pero, nuevamente,  $t_R$  es un parámetro general para cualquier tipo de sistema. Por otra parte, debe tenerse presente que, a los efectos de modelizar un retardo mediante Maclaurin o Padé, se utiliza otra definición.

### Sobrevalor

Es el porcentaje o cantidad absoluta en que la señal sobrepasa a su valor final. También referenciado como sobrepico o sobrepaso máximo. En un sistema de control, este valor suele especificarse como requerimiento. Usualmente, las estrategias para achicar el sobrevalor implican también cierto enlentecimiento del sistema. Nótese que el modelo de primer orden no tenía sobrevalor.

### Tiempo de asentamiento

El tiempo que tarda la señal a ubicarse dentro de determinado margen respecto del valor final o deseado. Puede interpretarse como el tiempo en que tarda en lograrse el objetivo de control. Por ejemplo, en lograr que la temperatura del agua de la pava alcance el valor deseado  $\pm 2^\circ\text{C}$ . En la figura 3 está indicado con una precisión del 5%. Sin embargo, según sean las exigencias de un sistema de control concreto, puede ser del 10%, 2% o la cifra que se determine a partir del objetivo de control.

## Respuesta transitoria de un sistema de 2º orden

Si la entrada del sistema es un escalón unitario, en el plano complejo su salida se escribe como:

$$Y(s) = X(s) * G(s) = \frac{1}{s} * \frac{\beta}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1} \quad (11)$$

Si suponemos  $\beta = 1$  y además  $-1 < \zeta < 1$ , la respuesta transitoria –que estará dada por la antitransformada de  $Y(s)$ – nos dará:

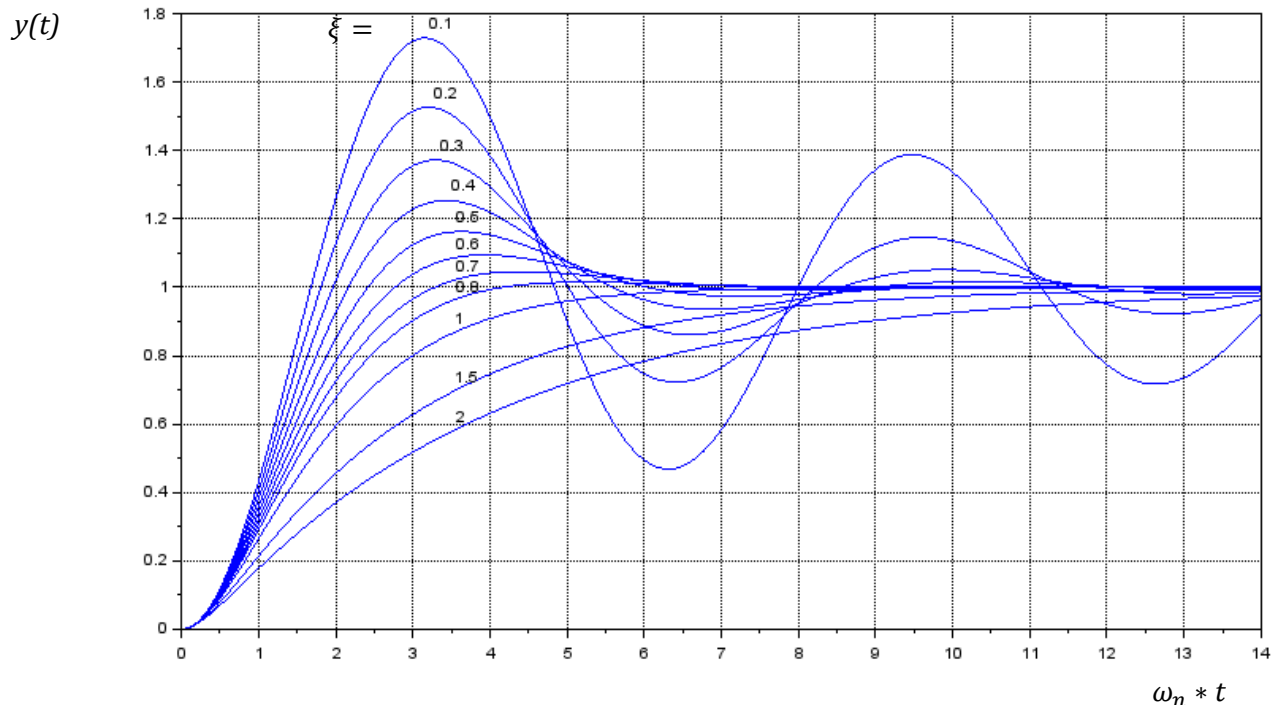
$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen}\left(\omega_n * \sqrt{1-\zeta^2} * t + \cos^{-1}(\zeta)\right) \quad (12)$$

Si analizamos esta expresión, se verán todos los elementos que se aprecian en la figura 3. Para empezar, podemos notar que el factor  $e^{-\zeta\omega_n t}$  impone que el segundo término de la ecuación tienda a cero, siempre y cuando el factor de amortiguamiento  $\zeta > 0$ . Esto explica que la función  $y(t)$  tienda a 1 conforme  $t$  tiende a infinito.

Por otra parte, se puede apreciar que la función  $\operatorname{sen}(\dots)$  describe las oscilaciones de la señal en torno a su valor final. Su **frecuencia de oscilación** es  $\omega_0 = \omega_n * \sqrt{1-\zeta^2}$ . Nótese que existe una sutil diferencia entre la frecuencia de oscilación (en ocasiones llamada frecuencia condicional o frecuencia de amortiguamiento) y la frecuencia natural no amortiguada. Ambas frecuencias serían iguales para  $\zeta = 0$ ; pero ya veremos que éste sería un caso indeseado.

## Variación del factor de amortiguamiento y clasificación

Uno de los parámetros más determinantes de la respuesta transitoria es el factor de amortiguamiento relativo  $\zeta$  y del **factor de amortiguamiento real**  $\alpha = \zeta * \omega_n$ . En la figura 4 graficamos diversas respuestas transitorias.



**Figura 4.** Respuesta al escalón de un sistema de 2º orden para diferentes valores de  $\zeta$ .

En la figura 4 se puede observar que para  $\zeta \geq 1$  no hay sobrevalor. Como contrapartida, el tiempo de crecimiento disminuye a medida que  $\zeta$  aumenta. Por otra parte, cuando  $\zeta$  se va acercando a 0, el tiempo de crecimiento se achica pero va creciendo el sobrevalor incluso a más del 50%.

No está graficado en la figura, pero se verá que para  $\zeta = 0$  la salida es una oscilación senoidal que varía entre 0 y 2. Y si  $\zeta < 0$ , la oscilación va aumentando su amplitud y la salida diverge. Dicho de otro modo, representaría un sistema inestable (porque su salida no sería acotada mientras que su entrada sí).

En función del valor de  $\zeta$ , podemos clasificar los tipos de amortiguamiento de un sistema y analizar su respuesta al escalón unitario:

- **Sobreamortiguado:**  $\zeta > 1$ . No hay sobrevalor. La respuesta transitoria ya no está descrita por la ecuación (12) sino por el equivalente a dos sistemas de primer orden en cascada.
- **Amortiguamiento crítico:**  $\zeta = 1$ . No hay sobrevalor.
- **Sub-amortiguado:**  $0 < \zeta < 1$ . Posee sobrevalor de entre 0% y 100%.
- **No amortiguado:**  $\zeta = 0$ . La respuesta es una señal senoidal que varía entre 0 y 1.
- **Amortiguamiento negativo:**  $\zeta < 0$ . La amplitud de la señal de salida va en aumento y diverge.

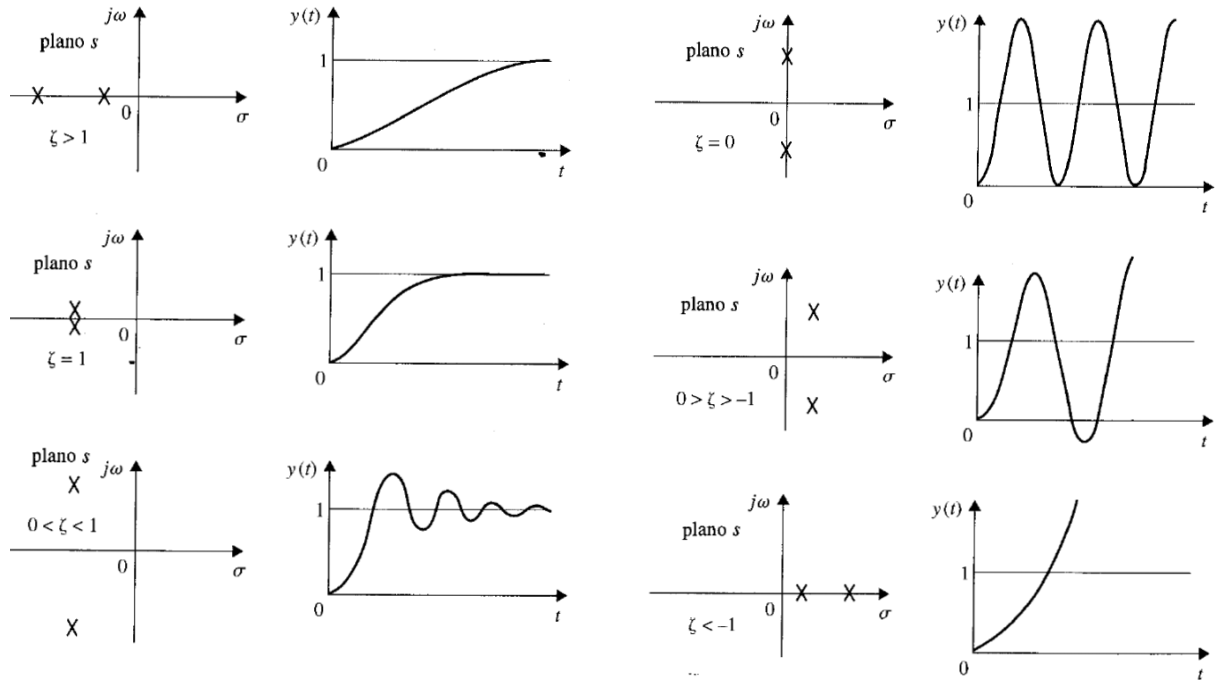
Esta clasificación puede apreciarse mejor analizando el lugar geométrico de las raíces.

## Lugar geométrico de las raíces

Si bien las raíces de la transferencia no nos brindan toda la información sobre el valor final o estado estacionario del sistema ante una entrada escalón, sí nos determinan la respuesta transitoria. Para

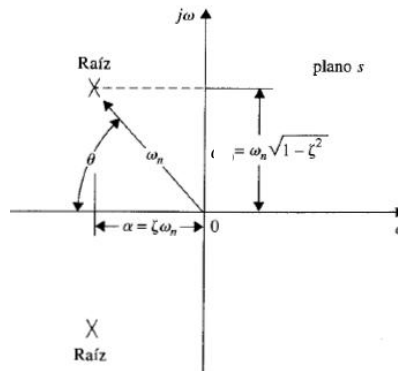


ilustrar esta relación, tomamos de Kuo (1996, pág. 393) una comparación cualitativa que reproducimos en la figura 5.



**Figura 5.** Lugar de las raíces y respuesta al escalón para un sistema sobreamortiguado, críticamente amortiguado, sub-amortiguado, no amortiguado y negativamente amortiguado.

Analizado de forma cuantitativa, la relación entre  $\omega_n$ ,  $\zeta$  y el lugar de las raíces puede apreciarse en la figura 6.



**Figura 6.** Relación entre las raíces de la ecuación característica,  $\omega_n$  y  $\zeta$ .

Expresado en forma matemática, podemos escribir las raíces como:

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (13)$$

De modo que:

$$\alpha = \zeta\omega_n \quad (14)$$

$$\omega_0 = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (15)$$

$$\zeta = \cos \theta \quad (16)$$

Como resultado, podemos precisar:

- El ángulo  $\theta$  indicado en la figura determina el valor del **amortiguamiento relativo**  $\zeta$ . Por lo tanto, determina también el sobrevalor de la respuesta al escalón, tal como mostramos en la figura 4. Como aplicación podemos afirmar que, analizando el rango de sobrevalores deseado, quedará determinado el rango de ángulo  $\theta$  descrito en la figura 6. Por ejemplo, para un sistema sub-amortiguado en el que  $0 < \zeta < 1$ , el ángulo  $\theta$  deberá cumplir:  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ . Un valor típico es para  $\theta = 45^\circ$ , resultando  $\zeta \cong 0,707$ .
- El **factor amortiguamiento real**  $\alpha$  (o simplemente factor de amortiguamiento) expresado en la ecuación (14), se mide en  $s^{-1}$  (inversa de segundos). Si retomamos la ecuación (12), se puede ver que determina la velocidad con que se va achicando la envolvente de la oscilación de la respuesta transitoria. Por este motivo, tiene relación con el tiempo de asentamiento. De la figura 6 podemos apreciar que, cuanto más se alejan los polos del eje imaginario  $j\omega$ , mayor será  $\alpha$  y menor será el tiempo de asentamiento.
- La **frecuencia de oscilación amortiguada**  $\omega_0$  queda determinada por la distancia del polo al eje real  $\sigma$ . Cuanto más se aleje, mayor será esta frecuencia. Nótese la sutil diferencia entre  $\omega_0$  y la frecuencia de oscilación no amortiguada  $\omega_n$  (o frecuencia natural): para  $\omega_n$  constante,  $\omega_0$  irá disminuyendo a medida que  $\zeta$  aumenta (o  $\theta$  disminuye). Esta frecuencia  $\omega_n$  está estrechamente relacionada con el tiempo de crecimiento del sistema.

### Variación del sobrevalor

Para analizar cómo varía el sobrevalor en función del factor de amortiguamiento, partimos de la respuesta temporal descrita por la ecuación (12). Calculamos sus máximos igualando su derivada a cero. Tomando el desarrollo hecho por Kuo (1996, pág. 394) llegamos a que los máximos se producen cuando:

$$n\pi = \left[ \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \right] * t \quad n\pi = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

Si  $0 < \zeta < 1$ , el máximo se dará en el tiempo:

$$t_{\text{máximo}} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (18)$$

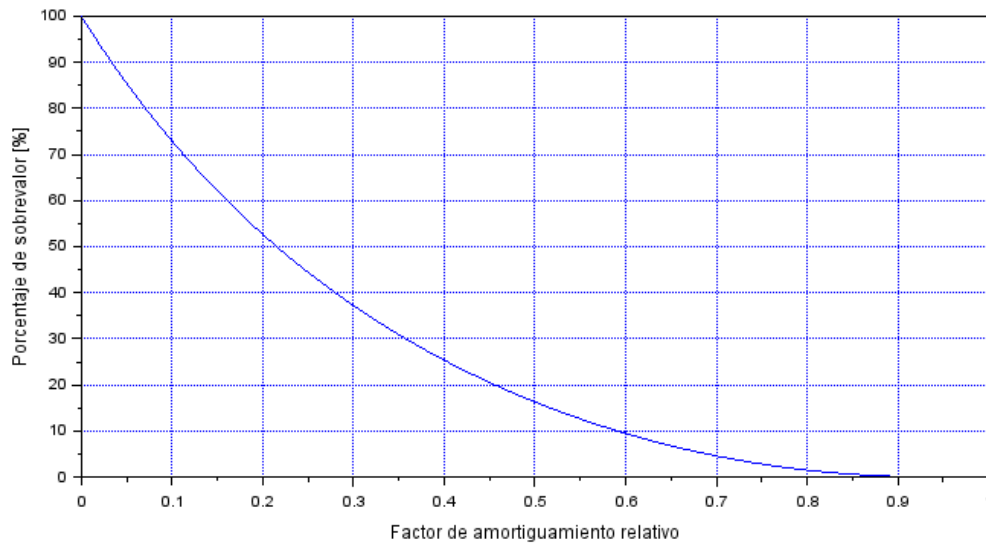
Si evaluamos este valor de tiempo en la ecuación (12), llegamos a que el valor máximo de la señal será:

$$y_{\text{máximo}} = y(t_{\text{máximo}}) = 1 + e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (19)$$

El segundo término de la ecuación (19) nos brinda el sobrevalor o sobrepaso máximo. De modo que el sobrevalor resulta:

$$\text{sobrevalor} = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (20)$$

Si graficamos esta función expresándolo en porcentaje resulta:



**Figura 7.** Sobrevalor en función de  $\zeta$  de una respuesta al escalón, realizada con Scilab.

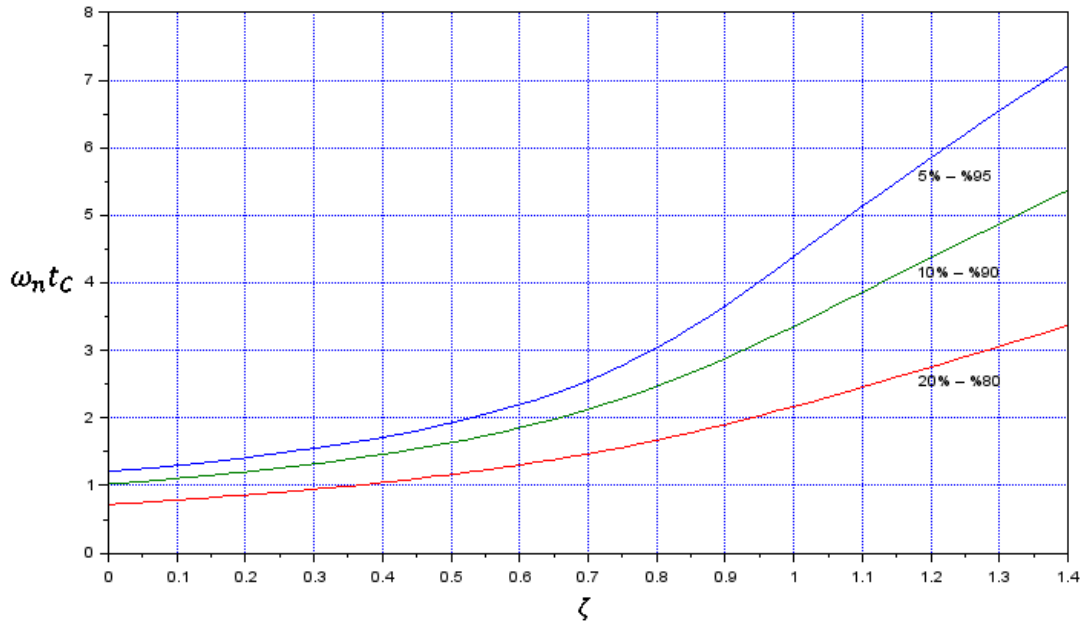
Del gráfico puede obtenerse el valor mínimo requerido para un valor máximo de sobrevalor. Por ejemplo, si deseamos un sobrevalor de 5% o menos, el valor de  $\zeta$  debe ser mayor a 0,69. Esto, a su vez, corresponde a un ángulo  $\theta$  máximo aproximado de 45°. En la tabla 3 destacamos algunos valores.

**Tabla 3.** Valores destacados de sobrevalor y amortiguamiento.

Sobrevalor máximo [%]	Amortiguamiento relativo mínimo $\zeta$	Ángulo $\theta$ máximo de los polos
50%	0,215	77,6°
20%	0,456	62,9°
10%	0,591	53,8°
5%	0,690	46,4°
2%	0,780	38,7°
1%	0,826	34,3°

### Variación del tiempo de crecimiento

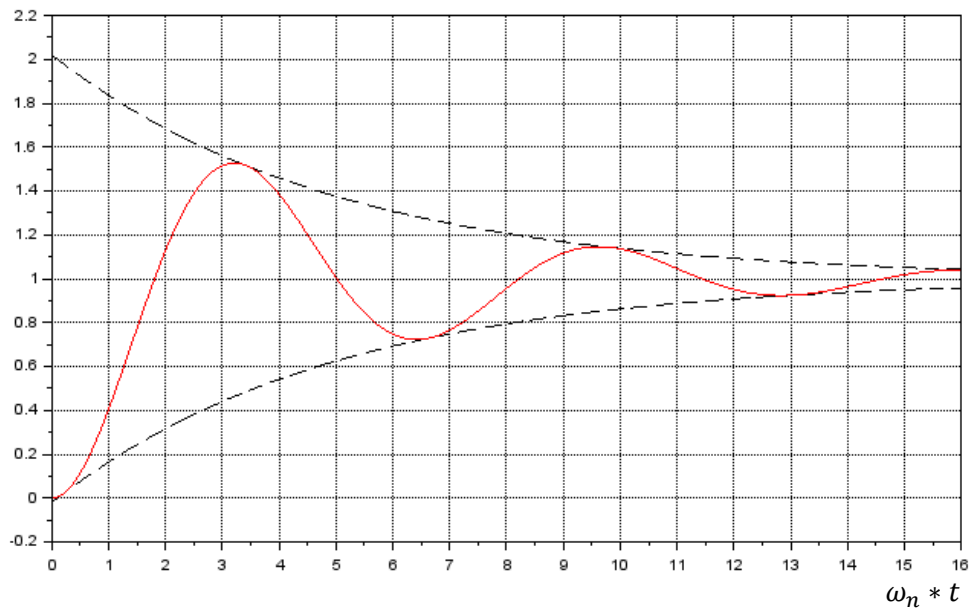
La obtención del tiempo de crecimiento en función de  $\omega_n$  y  $\zeta$  no tiene una solución analítica tan directa, por lo que se ha resuelto de forma numérica utilizando Scilab. El resultado es coincidente con lo analizado por Kuo (1996, pág. 397) para tiempo de crecimiento entre 10% y 90% (se simuló además los tiempos de crecimiento 5% y 20%). El tiempo de crecimiento aumenta con  $\zeta$ ; y especialmente desde  $\zeta > 0,7$ .



**Figura 7.** Tiempo crecimiento en función de  $\zeta$  para  $\omega_n$  constante ante un escalón unitario. Simulado en Scilab.

Este análisis presupone  $\omega_n$  constante a medida que varía  $\zeta$ . Según este supuesto y revisando la figura 6, los polos del sistema se moverían de forma circular con radio  $\omega_n$  (para  $\zeta$  entre 0 y 1). Esto es razonable para analizar el comportamiento de un sistema de control a lazo abierto, en el cual el factor de amortiguamiento pueda configurarse modificando las características de un componente. Por ejemplo, en el caso del sistema masa-resorte, lo usual es que la masa y la constante del resorte (o espiral en el caso de un automóvil) estén dados, y sea factible seleccionar el amortiguador adecuado.

Sin embargo, cuando se analiza la respuesta de un sistema realimentado, el recorrido de los polos puede ser mucho más complejo. En ese caso, es útil registrar que la velocidad de crecimiento aumentará principalmente con el aumento de la frecuencia amortiguada  $\omega_0$ . En la figura 8 mostramos una posible respuesta al escalón con las envolventes de la oscilación amortiguada. Como se aprecia, la pendiente de crecimiento de la señal (marcada en rojo) depende principalmente de la frecuencia de oscilación amortiguada, es decir  $\omega_0$ . Esta frecuencia es la que figura en la ecuación (12) dentro de la función senoidal. Si revisamos la figura 6, notamos que esta frecuencia  $\omega_0$  es la distancia del polo al eje real  $\sigma$ . No quiere decir que el factor de amortiguamiento no influya, pero de forma secundaria mientras  $\zeta < 0,99$  (o lo que es lo mismo,  $\theta > 8^\circ$ ). Para  $\zeta$  mayor, lo determinante pasa a ser la distancia del polo más cercano al origen.

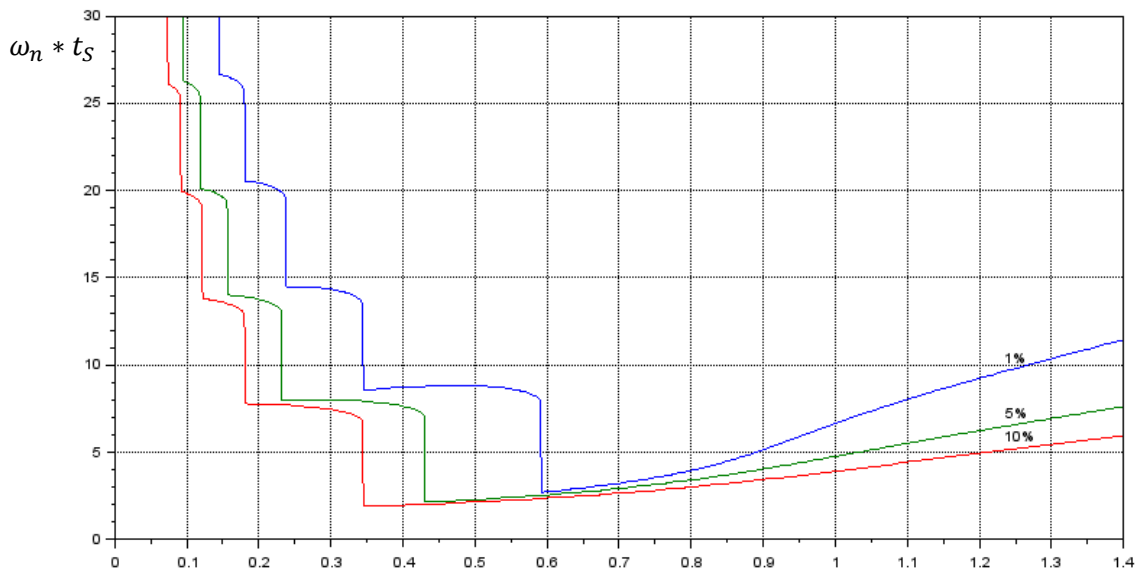


**Figura 8.** Una respuesta indicando las envolventes de la señal.

### Variación del tiempo de asentamiento

Retomando la figura 8 y revisando la ecuación (12), se puede recordar que la envolvente de la señal varía según  $\alpha * t$  (factor de amortiguamiento real por el tiempo). Es decir, cuanto más grande sea el amortiguamiento real  $\alpha$ , más rápido se estabilizará el sistema y más chico será el tiempo de establecimiento. Dicho de otro modo, cuanto más lejos esté el polo del eje imaginario  $j\omega$ , más rápido se estabilizará el sistema.

De todos modos, si analizamos un poco más en detalle el asunto, veremos una fuerte dependencia del tiempo de establecimiento respecto del amortiguamiento relativo  $\zeta$ . Esto se ilustra en la figura 9, donde consideramos  $\omega_n$  constante.



**Figura 9.** Tiempo de establecimiento en función de  $\zeta$  para  $\omega_n$  constante.

En la figura se observan simulaciones para un margen del 1%, 5% y 10% respecto del valor final en estado estacionario. Puede observarse que el tiempo de asentamiento baja como la inversa de  $\zeta$  hasta aproximadamente 0,6 (dependiendo de si se toma el margen del 1%, 5% o 10%). Para un margen del

5%, los valores más bajos están para  $0,45 < \zeta < 0,75$  aproximadamente. Luego, el tiempo de asentamiento aumenta de forma lineal con  $\zeta$ .

Una cuestión importante son los escalones que se ven en la figura 9 para valores de  $\zeta$  menores a 0,6. Estos saltos en el tiempo tienen que ver con la cantidad de crestas de la respuesta que desbordan el margen buscado. Nótese que a partir de  $\zeta > 0,6$ , el tiempo de establecimiento es mínimo para todos los márgenes analizados. Esto indica que a partir de ese valor, el sobrevalor de la respuesta no desborda el margen de amplitud establecido.

## Procedimiento típico para una modelización

Analizadas las características de los sistemas de segundo orden, sigue siendo un desafío cómo aprovechar estas herramientas en casos reales. Para eso, es necesario modelizar nuestro sistema, tanto cualitativa y como cuantitativamente. Es decir: definir un modelo general, describir qué límites tiene ese modelo (como por ejemplo, las alinealidades), y finalmente asignar valores numéricos a los parámetros. Uno de los resultados de este modelo es su función de transferencia. Los pasos que se pueden realizar para llegar a la función de transferencia en una aplicación concreta son:

1. Plantear las **ecuaciones diferenciales del sistema físico**. Para esto es necesario conocer las leyes físicas que rigen el sistema. A nivel de producción industrial, si es necesario precisar un modelo del sistema, la persona que conoce y se ocupa de esta etapa suele denominarse *procesista*.
2. Expresar las ecuaciones diferenciales en el plano de **polinomios de Laplace**. Esto nos facilitará las operaciones de estas ecuaciones y nos permitirá pasar de un conjunto de ecuaciones diferenciales a una función de transferencia.
3. La **función de transferencia** obtenida con su respectivo polinomio característico (el denominador de la transferencia) nos permitirá modelizar el comportamiento del sistema ante diversas entradas. En la práctica podremos comparar permanentemente este modelo con los resultados experimentales. A partir de esta experiencia podremos asignar valores a los parámetros del modelo.

A lo largo del capítulo, se ha ejemplificado con un caso eléctrico y otro mecánico. Luego, para ajustar los parámetros de nuestro modelo a los datos empíricos se pueden utilizar diversos métodos, como cuadrados mínimos o tomar puntos destacados de las curvas medidas.

Por otra parte, es cierto que un modelo de un sistema puede obtenerse de forma plenamente experimental, aproximando las respuestas de un sistema dado a un modelo de primer orden, segundo u orden superior. Este procedimiento también es muy utilizado. Como desventaja, debe considerarse que es un método que llega a una descripción del sistema sin profundizar en sus leyes internas. En cualquier caso, el grado de profundidad del conocimiento del sistema va en relación directa con la exigencia que requiere el sistema de control.

# Parte III

## Control no lineal





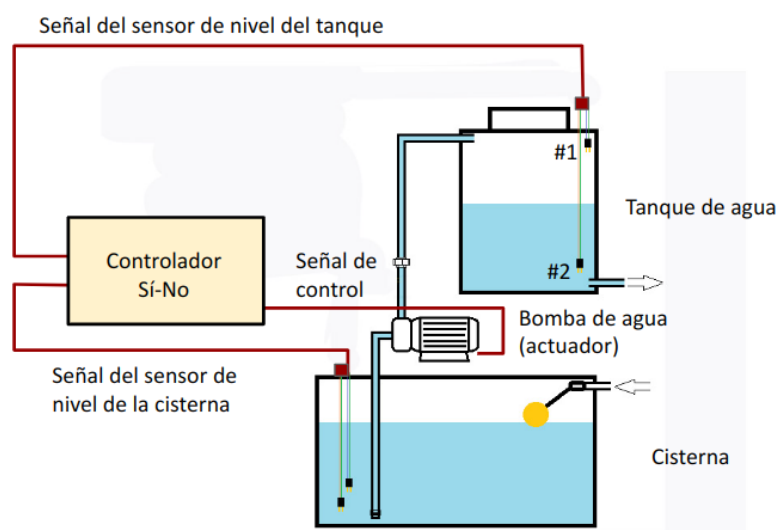
# Capítulo 4.

## Acción de control sí-no

La acción de **control sí-no** (*on-off* en inglés) es el más simple y también uno de los modos de acción de control más utilizados en la industria y en los equipos domésticos. La *acción de control* es la “manera en la cual el controlador automático produce la señal de control” (Ogata, 1993). En el caso del control sí-no, la señal de control puede tomar apenas dos estados: encendido (sí) o apagado (no). En el primer estado, el actuador entregará el máximo de potencia; en el otro estado, el actuador estará completamente apagado.

Un **ejemplo doméstico** típico es la heladera. El motor de la heladera se prende a su máxima potencia durante un tiempo más o menos prolongado hasta que el sensor de temperatura detecta que se alcanzó la temperatura configurada. Luego permanecerá sin encenderse mientras la heladera va perdiendo frío lentamente. En determinado momento, volverá a prenderse para volver a enfriar. Comúnmente, este control lo ejerce un termostato electromecánico con un diseño específico.

Otro ejemplo es la bomba del tanque de agua domiciliario. En el esquema de la figura 1 puede distinguirse la señal de control que enciende la bomba de agua. Estas bombas funcionan con motores de alterna de 220 VCA que no están preparados para admitir una velocidad variable (que nos permita variar el caudal). Por lo tanto, la salida del controlador sólo puede ser 220 VCA o 0 V. Nótese que, en este caso, el controlador posee dos entradas: sensores de los niveles de agua del tanque y de la cisterna, porque no debe encenderse la bomba mientras la cisterna se encuentre vacía. Es decir: es un sistema de control sí-no de dos entradas. Nótese también que, además del control del nivel del tanque, existe otro sistema de control del nivel de la cisterna con una boya (en este caso no es un sistema sí-no, porque el caudal sí puede tomar valores entre cero y su caudal máximo).



**Figura 1.** Esquema de control del nivel de un tanque de agua domiciliario

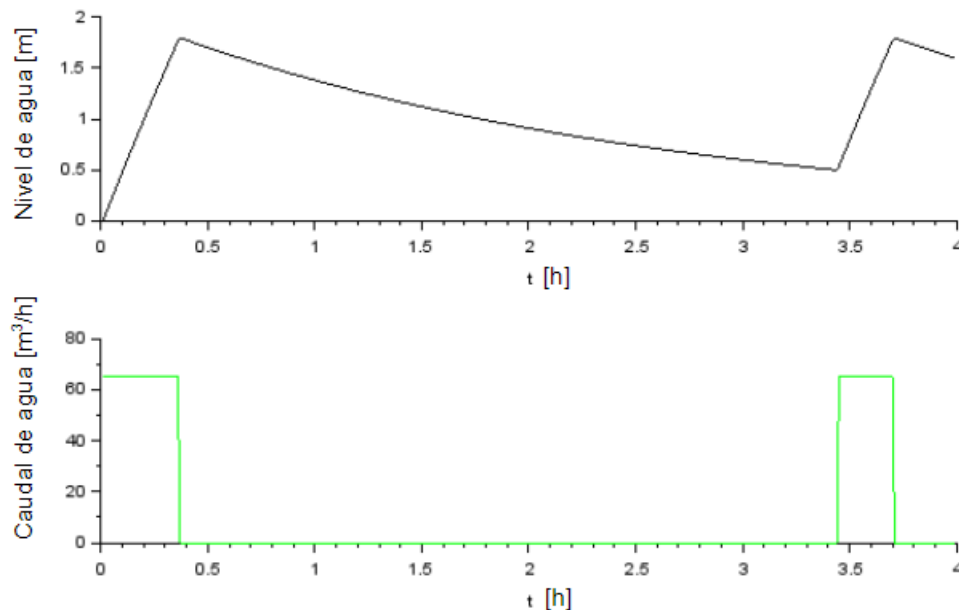
En el ejemplo de la figuras 1 se ha presentado un sistema de control de **lazo cerrado**. Sin embargo, el control sí-no es plenamente aplicable a un **lazo abierto**. Es el caso, por ejemplo, del encendido de la

llama en un calefón a gas: cuando circula agua (señal de entrada al controlador), se activa una válvula generalmente mecánica, se enciende la llama y ésta calienta el agua que circula (el control de la intensidad de la llama va por otra vía independiente porque, salvo en un calefón con control automático de temperatura, no depende del caudal). Otros ejemplos típicos son los sistemas de control que dependen de algún reloj temporizador: riego automático (sin sensor de humedad), temporización de iluminación, etc.

## Histéresis

Un aspecto importante de este tipo de controladores es la ventana de **histéresis**, también llamada *brecha diferencial*. En la figura anterior puede observarse que el sensor del nivel del tanque posee, en verdad, dos sensores: uno justo antes de que se llene y otro un poco antes de que esté completamente vacío (marcados como #1 y #2 respectivamente). Cuando el sensor #2 ya no detecta agua, el controlador enciende la bomba (siempre que la cisterna no esté vacía). Y el motor seguirá encendido hasta que el sensor #1 detecte agua.

La Figura 2 es el resultado de una simulación que ilustra el control sí-no de un tanque de agua. (Para simplificar la simulación hemos supuesto que la cisterna está siempre llena y que el caudal de salida es proporcional a la altura.) Como puede apreciarse, el sistema de control mantiene el nivel entre 0,5 m y 1,8 m de altura aproximadamente. Mientras el nivel se encuentre en este rango o ventana, el actuador no cambiará su estado: seguirá encendido hasta que el nivel supere los 1,8 m; o seguirá apagado hasta que el nivel esté por debajo de los 0,5 m. Por esta tendencia del controlador a mantener su estado de salida, se denomina *ventana de histéresis* o simplemente *histéresis*<sup>7</sup>.

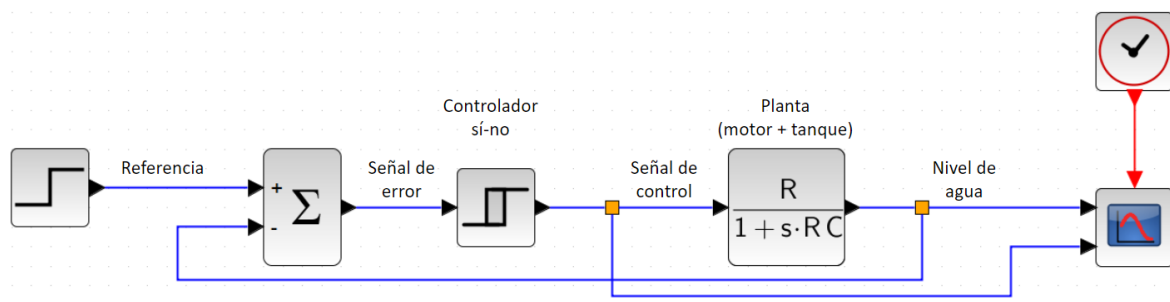


**Figura 2.** Simulación del control sí-no del nivel de un tanque de agua

<sup>7</sup> En las ciencias físicas, el término “histéresis” se utilizó originariamente hacia finales del siglo XIX para hacer referencia a la tendencia de los materiales magnéticos a mantener su estado de magnetismo. Etimológicamente, proviene del griego antiguo que significa “retraso”. En los problemas de control, más que a un fenómeno físico, hace referencia a un intervalo diseñado para lograr artificialmente este retraso de la salida del controlador o tendencia a mantener su estado.

Si por error o mal diseño colocáramos los sensores #1 y #2 (ver Figura 1) en el mismo nivel (o demasiado cercanos), el motor estaría encendiéndose y apagándose constantemente. Esto no sólo sería poco eficiente desde el punto de vista energético, sino que además les quitaría vida útil a la bomba y al contactor que acciona el motor. Por este motivo, los sistemas de control sí-no son diseñados con alguna ventana de histéresis pensada de modo tal que la variable controlada (en nuestro caso, el nivel de agua) esté dentro de esta ventana y que la frecuencia de conmutación (de encendido a apagado y viceversa) no estropee al actuador o acorte demasiado su vida útil. Si deseamos lograr una ventana de histéresis más chica, aumentará esta **frecuencia de conmutación**. La configuración deberá buscar un punto aceptable entre más precisión y más vida útil de sus componentes.

Nótese que la respuesta del controlador a la señal error (ver figura 3 más abajo) no cumple con el principio de superposición. Si la señal de error es 10 o 20, la señal de salida (de control) será la misma: su valor máximo. Por lo tanto, el control sí-no **no es lineal**.



**Figura 3.** Bloques de la simulación utilizando la herramienta xcos de Scilab.

## Ventajas y desventajas

Para hacer la simulación, fue necesario hacer un **modelo** de nuestra planta tanque de agua y hacemos de cuenta que el sensor de nivel de agua da un valor continuo (en la Figura 1 partimos de sensores de nivel que indican si hay o no agua en la altura que han sido colocados). En la Figura 3 se aprecia que utilizamos un modelo de primer orden. Sin embargo, para su utilización en la vida real, su implementación es más sencilla. Por lo general tan sólo es necesario saber que la energía entregada por el actuador sea mayor que la que pierde el sistema. En nuestro caso: el caudal de la bomba debe ser mayor al agua que se consume. Tomando otro ejemplo: si buscáramos comprar un aire acondicionado, por lo general analizaríamos las dimensiones del ambiente, y tal vez la cantidad de personas que podrían compartirlo o si entra demasiado calor del sol por las ventanas. Esta **simpleza del análisis con el cual podemos elegir y configurar un sistema de control sí-no** es también otra de sus ventajas.

Como contrapartida, **no todo sistema físico puede ser controlado mediante este tipo de control**. Imagínese, por ejemplo, la velocidad crucero de un automóvil intentando ser controlada utilizando dos posiciones del acelerador: máxima potencia del motor y potencia cero. Claramente, el resultado sería poco agradable para los ocupantes del automóvil. Otros ejemplos pueden ser: una cinta transportadora de botellas, un brazo robótico, etc.

Como aliciente podemos agregar que, si el sistema resulta ser controlable mediante este tipo de acción de control, en general no vamos a tener problemas de **estabilidad**. Es decir, la configuración de este tipo de control no trae aparejado el riesgo de que el sistema se salga de los márgenes de funcionamiento operativo.

Por último, conviene tener presente que los sistemas sí-no son **menos eficientes** desde el punto de vista energético que otros sistemas que puedan regular la potencia del actuador. El momento de encendido de un motor no sólo exige a los componentes en general, sino que requiere de una corriente

dos o tres veces más grande que su corriente normal de operación. Por un lado, esto hace que la instalación eléctrica deba sobredimensionarse. Y por el otro, que haya más pérdidas por este exceso. Además, en nuestro ejemplo del tanque de agua, no sólo se debe superar la inercia del propio motor al momento de ser encendido, sino que debemos sumarle la energía utilizada en llenar el caño de abastecimiento del tanque antes de que el agua efectivamente comience a entrar al tanque. Por lo general en cualquier sistema de control encontraremos problemas físicos que podrían resolverse de forma más eficiente desde el punto de vista energético.

Por todo esto, la elección o no de un modo de acción de control sí-no debe evaluarse teniendo en cuenta el objetivo y los requerimientos del sistema.

## Obtención de parámetros en un ejemplo real

El control sí-no puede ser utilizado para obtener los parámetros de un sistema. En la figura 4 tomamos el ejemplo de una medición real sobre una pava eléctrica.<sup>8</sup> Una dificultad de este caso es que si el agua alcanza los 100°C, la planta se sale de su rango lineal. Por lo tanto, para lograr una medición adecuada de los parámetros, debe apagarse la señal de control antes de que esto suceda. En esta situación, el control sí-no aparece como una opción para estimular un sistema, medir su respuesta y analizarla.<sup>9</sup>

### Señal de prueba y selección de intervalos

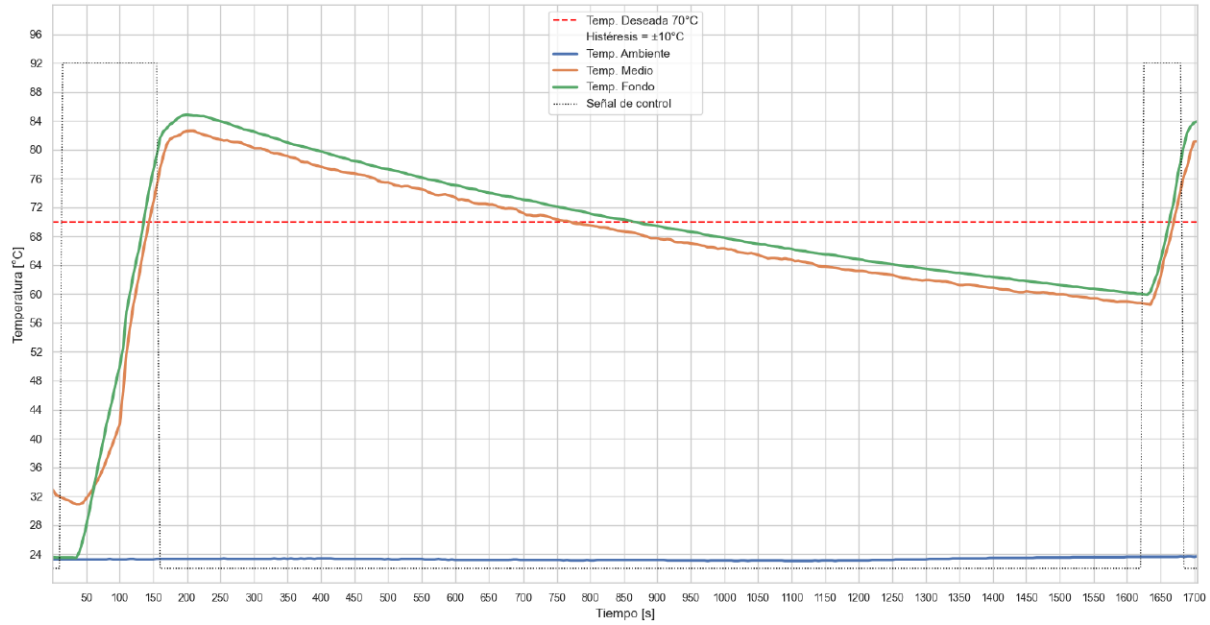
En el ejemplo se busca mantener su temperatura en una histéresis de  $\pm 10$  °C alrededor de los 70 °C. La selección de este amplio intervalo de temperatura tuvo como objetivo disminuir el error de la medición de los parámetros. La señal de entrada resultante son pulsos de máxima potencia y de ancho variable. La temperatura sube con el estado encendido y baja más lentamente con el estado apagado. En la figura 4 se muestra: la temperatura del agua (línea verde en el fondo y línea naranja cerca de la superficie); valor deseado en 70 °C (línea punteada roja); temperatura ambiente (línea azul); y acción de control (línea punteada).

Una vez obtenida la señal medida, e identificados los intervalos de encendido y de apagado del actuador, se eligieron dos intervalos para obtener los parámetros. Se analiza primero un intervalo en estado apagado, durante el cual baja la temperatura y permite calcular el tiempo natural  $\tau$  de un sistema modelizado en 1º orden. Luego se analiza un intervalo en estado encendido, que permite obtener el resto de los parámetros. Un elemento a tener presente es que la señal medida no sigue taxativamente la forma de un sistema de primer orden (como el mostrado en las simulaciones de la figura 2). Por este motivo, debe analizarse con cierto detenimiento desde qué tiempo hasta cuál conviene tomar cada intervalo.

---

<sup>8</sup> La experiencia fue realizada en el curso de Sistemas de Control Automáticos (UNDAV). Pueden consultarse más detalles en el repositorio del curso (Caporaletti & Castellano).

<sup>9</sup> En otros casos es posible dejar el actuador encendido indefinidamente. Un ejemplo es la cama caliente de una impresora 3D, que alcanzará una temperatura máxima a partir de la cual todo el calor recibido lo disipará al ambiente. Es un ejemplo en el cual el modelo seguirá siendo aproximadamente lineal aún en esta condición. En casos así, el estímulo podría ser un escalón a lazo abierto y el análisis se simplificaría.



**Figura 4.** Medición de la temperatura del agua de una pava eléctrica con control sí-no.  
Realizada en el curso de Sistemas de Control Automático (UNDAV), 2024.

### Intervalo en estado apagado

La ecuación general de la respuesta en el tiempo de un sistema de primer orden es:

$$e(t) = (E_i - E_f) * e^{-(t-t_i)/\tau} + E_f \quad (1)$$

La señal  $e(t)$  representa la temperatura del agua, aunque podría representar cualquier otra magnitud.  $E_i$  corresponde al valor inicial  $e(t_i)$  de la señal.  $E_f$  corresponde al valor al que tiende la señal. En el caso en cuestión, tomamos el intervalo que va aproximadamente desde los 200 s hasta los 1600 s aproximadamente. El valor final no aparece en el gráfico en sí, pero deducimos a partir de nuestro modelo teórico que corresponde a los 24 °C del ambiente, que es igual a la temperatura inicial del agua.

Para determinar  $E_i$  debemos precisar el valor del tiempo inicial  $t_i$ . No da lo mismo 160, 200 o 250 segundos. Lo usual es elegir un valor de tiempo en el cual la pendiente de la señal sea máxima. A partir de ese tiempo, esta pendiente irá en descenso tal como ocurre con un sistema de primer orden. Elegimos el tiempo  $t_i = 250$  s, que se corresponde con un valor  $E_i = 83,94$  °C. El otro valor importante es el tiempo  $t_2$ , que constituye el final del intervalo tomado. Podemos elegir el instante preciso en que el actuador cambia de estado apagado a encendido. Según este criterio, tomamos  $t_2 = 1620$  s; y su valor de temperatura resultó ser  $e(t_2) = 58,75$  °C. Estos valores pueden tomarse de forma aproximada desde el gráfico; en este caso se revisó la tabla de valores medidos.

Elegido con precisión el intervalo, podemos calcular  $\tau$  partiendo de la ecuación (1):

$$e(t_2) = (E_i - E_f) * e^{-(t_2-t_i)/\tau} + E_f \quad (2)$$

Dado que la única incógnita de la ecuación (2) es precisamente  $\tau$ , debemos despejarla:

$$\frac{e(t_2)-E_f}{E_i-E_f} = e^{-(t_2-t_i)/\tau}$$

$$\ln\left(\frac{e(t_2)-E_f}{E_i-E_f}\right) = -\frac{(t_2-t_i)}{\tau}$$

$$\ln\left(\frac{E_i - E_f}{e(t_2) - E_f}\right) = \frac{(t_2 - t_i)}{\tau}$$

$$\tau = \frac{(t_2 - t_i)}{\ln\left(\frac{E_i - E_f}{e(t_2) - E_f}\right)} \quad (3)$$

En nuestro ejemplo, este cálculo resultó ser  $\tau = 2.554$  s.

### Intervalo en estado encendido

Como intervalo de calentamiento de la pava se tomó el primero, que tiene el intervalo más grande. De todos modos, también podría ser plausible elegir algún otro intervalo en estado encendido cuyos valores de temperatura rondan entre 60 °C y 80 °C. Esto podría tener el fundamento de minimizar el efecto de las alinealidades no consideradas en nuestro modelo de primer orden (como la radiación térmica o el enfriamiento por evaporación de agua).

En cualquier caso, se nos presenta el problema de que la temperatura no comienza a subir inmediatamente con el cambio al estado encendido. En cambio, existe un retardo de varios segundos. Esto también nos obliga a precisar el tiempo inicial en el cual tomamos nuestro intervalo. Tomamos un tiempo alrededor del cual la derivada ya sea máxima. Elegimos  $t_i = 50$  s; que nos determina  $E_i = e(t_i) = 35,88$  °C. Como tiempo de final de intervalo  $t_2$  tomamos el momento del cambio de estado de encendido a apagado en 150 s. En ese momento, el agua alcanzó los 75,37 °C. Ahora nuestro parámetro desconocido es  $E_f$ . Volvemos a utilizar la ecuación general (2) y despejamos:

$$e(t_2) = E_i * e^{-(t_2 - t_i)/\tau} - E_f * e^{-(t_2 - t_i)/\tau} + E_f$$

$$e(t_2) - E_i * e^{-(t_2 - t_i)/\tau} = E_f * (1 - e^{-(t_2 - t_i)/\tau})$$

$$E_f = \frac{e(t_2) - E_i * e^{-(t_2 - t_i)/\tau}}{(1 - e^{-(t_2 - t_i)/\tau})} \quad (4)$$

Este valor de “temperatura final”  $E_f$  resultó ser 1064 °C. Esto no significa que el agua pueda alcanzar semejante temperatura en algún momento. Es un valor abstracto pero que determina la dinámica del sistema cuando el calefactor está encendido.

Otra forma más simple, aplicable a este caso porque el ciclo de crecimiento se aproxima muy bien a una recta, sería calcular la pendiente del intervalo. Con esta pendiente, y dando por conocida la potencia del actuador, podemos calcular la capacitancia directamente (ver capítulo “Modelización de sistemas en 1º orden”). Siguiendo este criterio, la pendiente resulta:

$$\text{Pendiente} = \frac{e(t_2) - E_i}{t_2 - t_i} = \frac{39,49 \text{ °C}}{100 \text{ s}} = 0,395 \frac{\text{°C}}{\text{s}} \quad (5)$$

### Cálculo final

De las mediciones del gráfico hemos obtenido el tiempo natural  $\tau$  y otros valores. A partir de estos datos, necesitamos obtener la capacidad térmica  $C_{\text{pava}}$  de la pava con un litro de agua y la resistencia térmica  $R_{\text{LA}}$  entre la pava y el ambiente. Partiendo de la ecuación (4) que nos dio  $E_f = 1064$  °C, y sabiendo que éste es el valor teórica en estado estacionario cuando se aplican 1800 W de calor, podemos obtener la resistencia térmica:

$$R_{\text{LA}} = \frac{E_f}{P_{\text{Calefactor}}} = \frac{1064 \text{ °C}}{1800 \text{ W}} = 0,591 \frac{\text{°C}}{\text{W}} \quad (6)$$

Luego, obtenemos la capacidad  $C_{\text{Pava}}$ :

$$\tau = C_{\text{Pava}} * R_{\text{LA}}$$
$$C_{\text{Pava}} = \frac{\tau}{R_{\text{LA}}} = \frac{2554 \text{ s}}{0,591 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{W}}} = 4.321 \frac{\text{J}}{^{\circ}\text{C}} \quad (7)$$

El resultado es consistente con la capacidad térmica de un litro de agua, que es  $4.186 \text{ J}/^{\circ}\text{C}$ . Da un poco más debido a la capacidad térmica de las paredes de la pava y la propia resistencia calefactora.

### Cálculo alternativo

La otra forma señalada previamente, de calcular la capacidad térmica a partir de la pendiente inicial, equivale a desprestigiar la disipación de calor al ambiente cuando la pava está calentando. Según esto resulta:

$$\text{Pendiente} = \frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{P_{\text{Calefactor}}}{C_{\text{Pava}}}$$
$$C_{\text{Pava}} = \frac{P_{\text{Calefactor}}}{\text{Pendiente}} = 4.558 \frac{\text{J}}{^{\circ}\text{C}} \quad (8)$$

Este resultado también es consistente. Es de notar la diferencia de valores entre ambos cálculos. Este cálculo alternativo nos dio un 5% más debido a que hace de cuenta como si el calor perdido al ambiente fuera calor almacenado. Si calculamos la resistencia térmica con este valor de capacidad, resultará:  $R_{\text{LA}} = 0,560 \frac{^{\circ}\text{C}}{\text{W}}$ . Esto nos recuerda que nuestro modelo es una aproximación de la realidad y que, por lo tanto, no podemos pretender mayor precisión que el modelo mismo.





# Parte IV

## Control lineal



# Capítulo 5.

## Acción de control proporcional

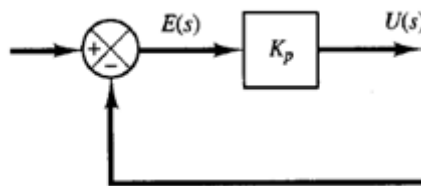
Dentro del control lineal, el modo de acción de control más simple es el control proporcional. Este control consiste en generar una señal de control  $u(t)$  proporcional a la señal de error  $e(t)$ , tal como se muestra en la ecuación (1), donde  $K_p$  es la constante o ganancia de proporcionalidad.

$$u(t) = K_p * e(t) \quad (1)$$

Si la expresamos en el plano complejo  $s$  y utilizamos las herramientas de la transformada de Laplace, puede expresarse como:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \quad (2)$$

Cualquiera que sea el mecanismo real y el tipo de energía utilizada para la variable manipulada, el controlador proporcional es básicamente un amplificador con una ganancia configurable. En la figura se presenta un diagrama de bloques de tal controlador.



**Figura 1.** Diagrama en bloques de un controlador proporcional.

A diferencia del control encendido-apagado, este tipo de controlador permite una **acción de control más suave, gradual o paulatina**. Ésta es una característica del control lineal que es fundamental en determinadas aplicaciones. Por ejemplo: no es adecuado pretender controlar la velocidad cruce de un automóvil con un modo de acción encendido-apagado, en la cual el motor acelere al 100% o se apague completamente. El control proporcional es la forma más simple para resolver este problema.

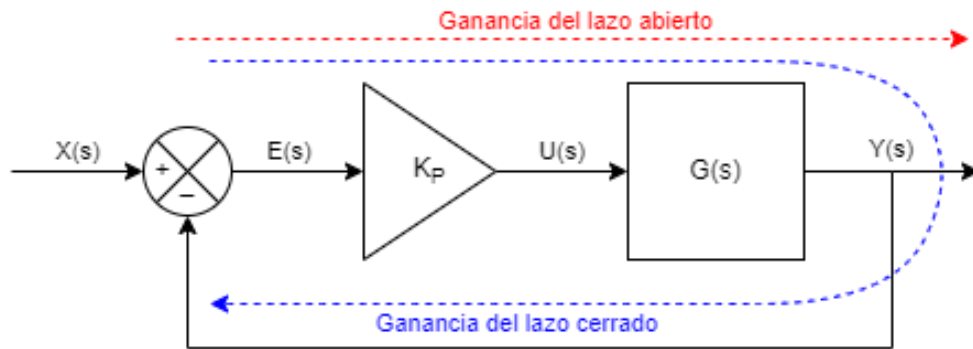
Una **condición fundamental** para su aplicabilidad, que debe tenerse en cuenta, es la necesidad de tener un actuador que admita este tipo de control. Por ejemplo, en el caso de una clásica heladera doméstica, el compresor sólo admite dos estados: encendido o apagado. Si deseamos controlar la temperatura de la heladera con un control lineal, tendremos que buscar un compresor que admita graduar su potencia. (Éste último es el caso de los equipos inverter, que vienen ganando peso en el mercado de los aires acondicionados.) En algunos casos, la electrónica permite transformar un control de dos posiciones en un control lineal utilizando la modulación de ancho de pulso (MAP o PWM, por *Pulse Width Modulation*). De un controlador de dos estados (sí-no) o estados finitos, pasamos a un controlador de estados infinitos.

## Transferencia de un sistema de control proporcional

El efecto buscado de implementar un controlador realimentado es que su salida,  $Y(s)$  en la figura 2, se aproxime lo más posible a la entrada o referencia, señalada como  $X(s)$ . La evaluación de que el

controlador proporcional sea adecuado dependerá de qué tanto la salida se acerque al valor deseado. Esto nos lleva a analizar la transferencia de todo el sistema realimentado.

Esta nueva transferencia de todo el sistema de control difiere de la transferencia de la planta. Idealmente, esta transferencia sería 1, lo cual indicaría que la salida es igual a la entrada. Veremos qué tanto se acerca a este valor y cómo se ve modificada la velocidad del sistema conforme varía  $K_p$ . Para analizar este problema, esquemizamos el sistema en la figura 2.



**Figura 2.** Diagrama de un sistema de control proporcional realimentado.

En la figura pueden observarse el punto de suma y la ganancia  $K_p$ , propias del controlador proporcional, y la transferencia de la planta  $G(s)$ .  $X(s)$  es la entrada o referencia del sistema.  $Y(s)$  es la salida que se desea controlar. En este caso consideramos a la transferencia del actuador como parte de  $G(s)$ , por lo que la señal  $U(s)$  es la señal de control.

Si traducimos el diagrama en bloques a ecuaciones, resulta:

$$\begin{aligned} E(s) &= X(s) - Y(s) \\ Y(s) &= E(s) * K_p * G(s) \end{aligned} \quad (3)$$

De lo cual podemos llegar a:

$$\begin{aligned} Y(s) &= (X(s) - Y(s)) * K_p * G(s) \\ Y(s)(1 + K_p * G(s)) &= X(s) * K_p * G(s) \\ \frac{Y(s)}{X(s)} &= \frac{K_p * G(s)}{1 + K_p * G(s)} = M(s) \end{aligned} \quad (4)$$

De este modo, obtenemos la ganancia  $M(s)$  de todo el sistema de control. Nótese que en el numerador de la ecuación (4) aparece la ganancia del lazo abierto, indicado en línea punteada roja en la figura. Nótese también que en el denominador aparece uno más la ganancia del lazo cerrado, indicada en línea punteada azul. Si el sistema incluyera un bloque modelizando la transferencia del sensor, ésta aparecería en el denominador pero no en el numerador de la ecuación (4).

Analizando la transferencia  $M(s)$  podemos ver que cuando  $K_p$  tiende a infinito (o un valor muy grande), la transferencia  $M(s)$  tiende a 1. Es decir: en este caso ideal, la salida  $Y(s)$  sigue de forma precisa a la entrada  $X(s)$ . Desde ya, existen problemas reales que impiden que esto sea exactamente así. En cualquier caso, es clave registrar esta tendencia: a medida que aumentamos  $K_p$ , la salida tiende a ser igual a la entrada. Esto es precisamente lo que buscábamos.

Esta tendencia, a que la salida iguale a la entrada, también afecta al ancho de banda del sistema o a su velocidad de respuesta. Si partimos de un caso clásico en que la transferencia de la planta  $G(s)$  es un pasabajo, lo que podemos concluir es que a medida que aumentamos  $K_p$  aumenta el ancho de banda de todo el sistema. Dicho de otro modo, la velocidad de respuesta del sistema de control es mayor que la velocidad de respuesta de la planta. De hecho, si  $M(s)$  tiende a 1 conforme  $K_p$  tiende a infinito, su respuesta tiende a ser instantánea y por lo tanto su ancho de banda tiende a ser infinito.

Desde ya, nuevamente, existen problemas reales que impiden que esto sea así en la práctica. Para comprender mejor los alcances y límites del controlador proporcional, daremos un ejemplo.

### Ancho de banda del sistema

El ancho de banda del sistema varía a medida que vamos variando el  $K_p$  del control proporcional. Para verificar esto, analizamos el caso más sencillo posible: el ejemplo de una planta modelizada en primer orden. En este caso, la ecuación general es:

$$G(s) = \frac{\beta}{1+\tau*s} \quad (5)$$

Si incorporamos esta transferencia en la ecuación (4) resulta:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{X(s)} &= \frac{K_p * \frac{\beta}{1+\tau*s}}{1+K_p * \frac{\beta}{1+\tau*s}} = M(s) \\ M(s) &= \frac{K_p * \beta}{(1+\tau*s) * (1+K_p * \frac{\beta}{1+\tau*s})} = \frac{K_p * \beta}{(1+\tau*s+K_p*\beta)} = \frac{K_p*\beta}{1+K_p*\beta+\tau*s} \end{aligned} \quad (6)$$

Como puede apreciarse, la ecuación (6) sigue siendo de orden 1. Sin embargo, el tiempo natural de crecimiento ya no es meramente el  $\tau$  de la planta. Dividimos numerador y denominador por  $1+K_p*\beta$  para que se aprecie de forma más clara:

$$M(s) = \frac{K_p*\beta}{1+K_p*\beta+\tau*s} = \frac{\frac{K_p*\beta}{(1+K_p*\beta)}}{1+\frac{\tau}{(1+K_p*\beta)}*s} \quad (7)$$

Comparando la ecuación (7) con la forma general de primer orden, podemos concluir que el tiempo natural de nuestro sistema realimentado es:

$$\tau_{Realimentado} = \frac{\tau}{(1+K_p*\beta)} \quad (8)$$

De esta forma comprobamos que, en teoría, el tiempo natural de nuestro sistema realimentado siempre es menor que el correspondiente a la planta (controlada a lazo abierto). Dicho de otro modo: el ancho de banda del sistema aumenta. Este análisis matemático se torna más complejo en los casos de sistemas de orden 2 o superior. En esos casos, utilizaremos otras herramientas. De todas formas, una conclusión general es que la realimentación de cualquier sistema modifica su dinámica, partiendo de la dinámica de la planta.

### Error de estado estacionario

El error de estado estacionario es la diferencia entre el valor deseado a la salida del sistema y el valor al que tiende asintóticamente conforme el tiempo tiende a infinito. Es una de las formas de cuantificar qué tanto la variable controlada se acerca al objetivo. Una forma de calcularlo a partir de un modelo de nuestro sistema de control es utilizando el Teorema del Valor Final. Según éste:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s * Y(s) \quad (9)$$

Si como entrada a nuestro sistema tenemos un escalón unitario, nuestra salida  $Y_s$  será:

$$Y(s) = M(s) * X(s) = M(s) * \frac{1}{s} \quad (10)$$

Por lo tanto, la ecuación (10) se convierte en:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s * M(s) * \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} M(s) \quad (11)$$

Si la ecuación (11) no diverge, termina siendo igual a  $M(0)$ . Desde un punto de vista intuitivo, esto equivale a decir que el error de estado estacionario equivale a la transferencia del sistema en la frecuencia 0 Hz. Es decir, su transferencia en continua. Idealmente, esta transferencia en continua sería 1 o 0 dB. Pero en los sistemas de control proporcional es generalmente un poco inferior, verificándose un error.

Si retomamos el ejemplo analizado de 1º orden, la ecuación (11) se convierte en:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} M(s) = \frac{K_P * \beta}{1 + K_P * \beta} \quad (12)$$

El caso evidencia que  $M(0)$  se acercará a 1 cuando  $K_P$  tienda a infinito, pero en general será algo menor. En el caso que se considere conveniente utilizar este tipo de control proporcional, deberá verificarse que este error –entre el valor deseado y el valor final– sea aceptable. Por ejemplo, si consideramos el caso en que podemos tolerar un 5% de error de estado estacionario y si suponemos  $\beta=1$ , resultará (por simplicidad evitamos utilizar unidades):

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} M(s) &= \frac{K_P * 1}{1 + K_P * 1} = (1 - 5\%) = 0,95 \\ K_P &= 0,95 * (1 + K_P) \\ K_P * (1 - 0,95) &= 0,95 \\ K_P &= \frac{0,95}{1 - 0,95} = 19 \end{aligned} \quad (13)$$

Este cálculo teórico nos daría una referencia del valor mínimo de ganancia necesario para lograr un estado estacionario del 5%. En cada caso, deberá precisarse qué error se considera aceptable y se deberá incluir cuidadosamente las unidades físicas. El cálculo en sí no es complejo. El problema es que, por diversos motivos, probablemente no pueda implementarse el valor estimado de  $K_P$  en un caso concreto real deseado.

Analizado de forma cualitativa, el error de estado estacionario en un tipo de controlador proporcional reside en el hecho de que, para que haya alguna acción de control  $U(s)$ , debe haber algún error  $E(s)$ . Podemos achicar hasta cierto punto el error  $E(s)$  si aumentamos  $K_P$ . Pero no lograremos anularlo. Si la señal error no tiende a cero en el estado estacionario, significa que tenemos un error de estado estacionario.

## Problemas reales típicos

Las estimaciones realizadas previamente consideran un sistema de control lineal ideal. Según esto, cuando  $K_P$  tiende a infinito, el error de estado estacionario tiende a cero y su velocidad de respuesta crecería indefinidamente. Es de suponer que esta idealización teórica se encuentra con problemas reales en una aplicación concreta.

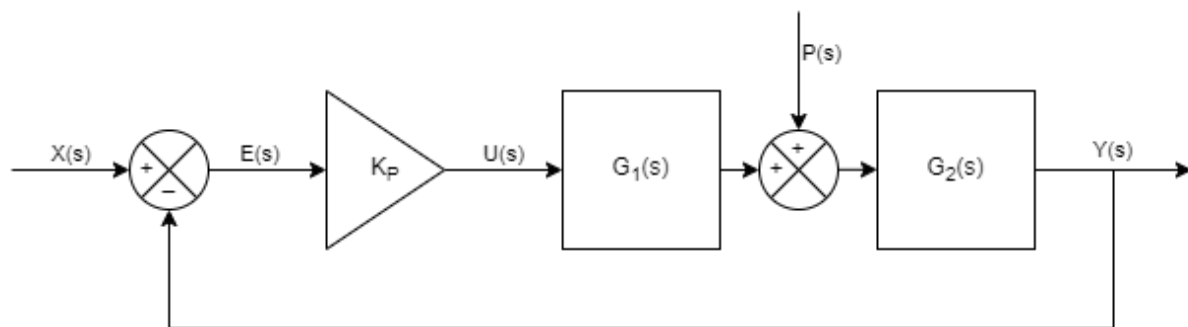
El primer problema a registrar es la saturación de los actuadores. Toda la teoría de control lineal presupone que el sistema funciona dentro del rango dinámico del actuador. Esto es: sin saturar. Pero, por otra parte, sabemos que todo actuador tiene algún nivel a partir del cual satura; simplemente porque ningún actuador puede entregar potencia infinita. Al ir aumentando  $K_P$  indefinidamente, en determinado punto los actuadores llegarán a su máxima potencia. Este punto determinará el límite de tiempo mínimo que requiere la acción de control.

Por ejemplo, no vamos a lograr reducir indefinidamente el tiempo para calentar el agua de una pava eléctrica sólo porque aumentemos el  $K_P$  de su controlador proporcional. Ese tiempo estará limitado fundamentalmente por la cantidad de agua que se deba calentar y la potencia de la resistencia calefactora. El controlador proporcional podrá mejorar la precisión de la temperatura, pero no bajar el tiempo por debajo de lo que imponga la física del sistema.

Otra cuestión clave es que el sistema podría tornarse inestable. Esto no surge del modelo de primer orden. Pero el problema es que nuestro modelo siempre es una aproximación de la realidad. Basta con que exista algún retardo apreciable en nuestro sistema para que haya riesgo de inestabilidad. Esta cuestión deberá verificarse en cada aplicación concreta.

## Rechazo de perturbaciones

La ventaja fundamental de un control realimentado frente al lazo abierto es que tiene la capacidad de contrarrestar, hasta cierto punto, las perturbaciones que puede sufrir el sistema. Para modelizar esta afectación, separamos la transferencia  $G(s)$  en dos,  $G_1(s)$  y  $G_2(s)$ , según podemos observar en la figura 3:



**Figura 3.** Modelizando una perturbación.

La figura muestra una forma genérica de modelizar cómo influye una perturbación  $P(s)$  dentro de la planta. También se puede modelizar sumando la perturbación en un punto de suma a la entrada de la transferencia de la planta o su salida. Todo depende de qué perturbación en concreto deseamos modelizar. Si presuponemos un sistema de lazo abierto, la perturbación  $P(s)$  afectaría a la salida de la siguiente forma:

$$Y(s)' = P(s) * G_2(s) \quad (14)$$

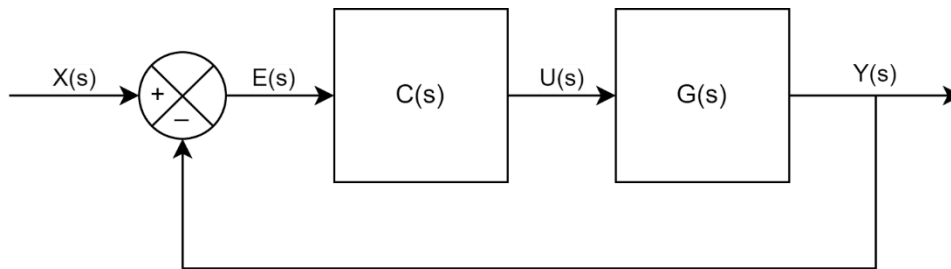
Sin embargo, esta afectación  $Y(s)'$  debido a la perturbación se verá reducida con la realimentación. Supongamos el caso en que nuestro sistema ya haya entrado en el estado estacionario. Si entonces aparece una perturbación  $P(s)$ , la salida  $Y(s)$  se verá afectada en alguna medida. Esta salida se comparará con la entrada  $X(s)$  y, a su vez, podrá dar como resultado algún aumento de la señal error  $E(s)$ . En ese caso, el controlador proporcional aumentará su acción de control, que contrarrestará hasta cierto punto la perturbación recibida. Escrito en forma matemática se expresa de la siguiente forma:

$$Y(s)'' = \frac{P(s) * G_2(s)}{1 + G_2(s) * K_p * G_1(s)} \quad (15)$$

Para arribar a la ecuación (15) realizamos el mismo procedimiento descrito con la figura 2. Como se aprecia, en el control realimentado el efecto de la perturbación se ve reducido por el denominador de la ecuación. Nótese que el aumento de  $K_p$  contribuye a rechazar la perturbación.

## Análisis de estabilidad

Mencionamos que un sistema realimentado puede tornarse inestable para cierto rango de valores de  $K_p$ . Esto no podría ocurrir según un modelo de 1º orden, pero sí puede verificarse en un modelo de orden 2 o superior. En la figura 4 presentamos un esquema general de un sistema realimentado:



**Figura 4.** Sistema realimentado con un controlador genérico.

Si traducimos el diagrama de la figura a una ecuación, siguiendo los pasos descritos en el capítulo, llegamos a que:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{C(s)*G(s)}{1+C(s)*G(s)} = M(s) \quad (16)$$

La pregunta clave para evaluar la estabilidad del sistema modelizada con la ecuación (16) debe ser: ¿hay alguna frecuencia  $s=j$  en la que la transferencia  $M(s)$  diverge? Para que eso ocurra, debiera ocurrir que el denominador se haga cero. O, lo que es lo mismo, que  $C(s)*G(s)=-1$ . En este caso (o en esta frecuencia), la salida será infinita para cualquier entrada finita. Esto contradeciría la definición de sistema BIBO estable (*bounded-input bounded-output*, entrada acotada y salida acotada). Si es así, estaríamos ante un sistema inestable.

¿Por qué es posible que  $C(s)*G(s)$  sea  $-1$ ? Esto sería lo mismo que afirmar que el módulo de  $C(s)*G(s)$  sea 1 y que su argumento sea  $180^\circ$ . Esto es posible que ocurra por el hecho de que, generalmente,  $G(s)$  constituye un sistema pasabajos. Como tal, su ganancia irá bajando para altas frecuencias. Además, generará un desfase entre su entrada y su salida en el rango de banda suprimida. Recordemos que el desfase final podrá sumar  $90^\circ$  por cada orden o polo del sistema. Un sistema de 1º orden a lo sumo podrá alcanzar un desfase de  $90^\circ$ . Pero un sistema de orden 2 o superior puede alcanzar un desfase de  $180^\circ$  o más.

“Por tanto, –dice Kuo al respecto– se debe establecer que la realimentación puede ocasionar que un sistema que es originalmente estable, se convierta en inestable. Evidentemente, la realimentación es un arma de dos filos; cuando no se usa adecuadamente, puede ser dañina.”

Como contrapartida, debemos considerar el caso inverso: existen sistemas que son intrínsecamente inestables que, gracias al control realimentado, pueden convertirse en estables y controlarse adecuadamente. Éste sería el caso de un péndulo invertido; de un bicicleta autoequilibrado o *segway*; o –más complejo aún– de una central nuclear. En estos casos, con la realimentación logramos estabilizar un sistema inestable.

## Efectos de la realimentación

En síntesis, podemos puntualizar algunos de los efectos logrados por la realimentación:

1. Rechazar las **perturbaciones**, al menos parcialmente. Qué tanto se logre este objetivo dependerá del tipo de control, sus parámetros y del tipo de perturbación involucrada.
2. Variación del **ancho de banda** o velocidad del sistema.
3. Lograr la **estabilidad** de un sistema intrínsecamente inestable. Aunque también puede tornar inestable un sistema, si no se analiza adecuadamente.
4. Contrarresta hasta cierto punto las **alinealidades** del sistema.



# Capítulo 6.

## Lugar geométrico de las raíces

La respuesta transitoria de un sistema en lazo cerrado se relaciona estrechamente con la localización de los polos del sistema en lazo cerrado. Si el sistema tiene una ganancia de lazo variable, la localización de los polos en lazo cerrado depende del valor de la ganancia de lazo elegida. Por lo tanto, es importante que el diseñador conozca cómo se mueven los polos en lazo cerrado en el plano  $s$  conforme varía la ganancia de lazo. Desde el punto de vista del diseño, un simple ajuste de la ganancia en algunos sistemas mueve los polos en lazo cerrado a las posiciones deseadas como también poder llegar a desplazar a uno o más polos a una zona de inestabilidad.

Como puede ver en el siguiente ejemplo, para una función de transferencia de la planta  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{0,25}{s + 2}$$

La misma tiene un polo en  $s = -2$ . Si se realiza un sistema de control a lazo cerrado de la misma con una ganancia variable  $K$ , se obtiene como función de transferencia a  $M(s)$ .

$$M(s) = \frac{K * G(s)}{1 + K * G(s)} = \frac{K * 0,25}{s + (2 + 0,25 * K)}$$

En ella se puede comprobar que el polo del sistema a lazo cerrado dependerá estrictamente del valor de  $K$ . Particularmente, si analizamos el denominador de  $M(s)$  observamos que para  $K$  igual a cero el polo del sistema a lazo cerrado será el mismo que el polo del sistema a lazo abierto. No obstante, si se incrementan los valores de  $K$ , el polo se volverá aún más negativo haciendo más rápido al sistema.

En un sistema de primer orden se puede calcular la ubicación de los polos según el valor de  $K$  de forma analítica sin mayores dificultades. Para sistemas más complejos, hallar todas las raíces del denominador por cada variación de  $K$  es un tanto más complicado.

## Evans

Para lograr describir el desplazamiento de los polos de un sistema de orden mayor a 1, Walter R. Evans diseñó un método para encontrar las raíces de la ecuación característica, que se utiliza ampliamente en la ingeniería de control. Éste se denomina Método del Lugar Geométrico de las Raíces (LGR). En éste se representan las raíces de la ecuación característica para todos los valores de un parámetro de ganancia  $K$  del sistema.

Evans postula las siguientes reglas para la obtención del Lugar Geométrico de las Raíces (LGR):

1. **Numero de ramas del LGR.** El LGR tendrá tantas ramas como polos a lazo abierto. Por rama se entiende a toda trayectoria que sigue un determinado polo de lazo cerrado como consecuencia de la variación de ganancia. Habrá tantas ramas como corresponda al grado de la función de transferencia a lazo abierto.

2. **Principio y fin del LGR.** Inicialmente (cuando K tiende a cero), los polos del sistema de lazo cerrado coinciden con los polos del sistema de lazo abierto. Y terminan (cuando K tiende a infinito) en los ceros del lazo abierto. En ausencia de ceros, los lugares geométricos de las raíces del lazo cerrado terminarán en el infinito.
3. **Lugares geométricos en el eje real.** Se analizan en caso de existir polos sobre el eje real. El desplazamiento de los polos que tengan un orden impar es hacia la izquierda, contando como primer polo el que se encuentre más a la derecha del LGR.
4. **Simetría de los lugares geométricos complejos.** En este caso, más que una regla, es una consecuencia lógica del análisis del comportamiento de los números complejos. Dichas raíces complejas implican la presencia del número complejo conjugado de la rama asociada. Por lo cual, siempre que haya un polo complejo, existirá un espejado de las ramas del LGR con respecto al eje horizontal (eje real).
5. **Asíntotas.** Para ganancias elevadas, y en ausencia de ceros, las ramas del lugar geométrico tienden a comportarse como líneas rectas a manera de asíntotas.
6. **Centroide.** El centroide es el punto en el eje real del cual divergen las asíntotas.
7. Cruce del LG con eje imaginario.
8. Angulo de salida  $\emptyset$  y ángulo de llegada  $\emptyset'$ .
9. Punto de salida y punto de llegada.
10. Asignación de escala al LGR.

Para mayor detalle de cada una de las reglas, puede consultar Hernández Gaviño (2010, pág. 255), Adams (2020, pág. 445), Ogata (2010) o Kuo (1996).

## Ejemplo de 3º orden

Si bien el método es sencillo para realizar una aproximación efectiva del lugar de raíces exacto, en esta oportunidad nos centraremos en la realización del lugar de las raíces utilizando el software Scilab. Para ello, en honor al ingeniero que desarrolló el método, la función a utilizar en Scilab es precisamente *evans(H)*, donde H es una función transferencia que deberá estar definida con anterioridad a la línea de código en donde se utiliza *evans()*.

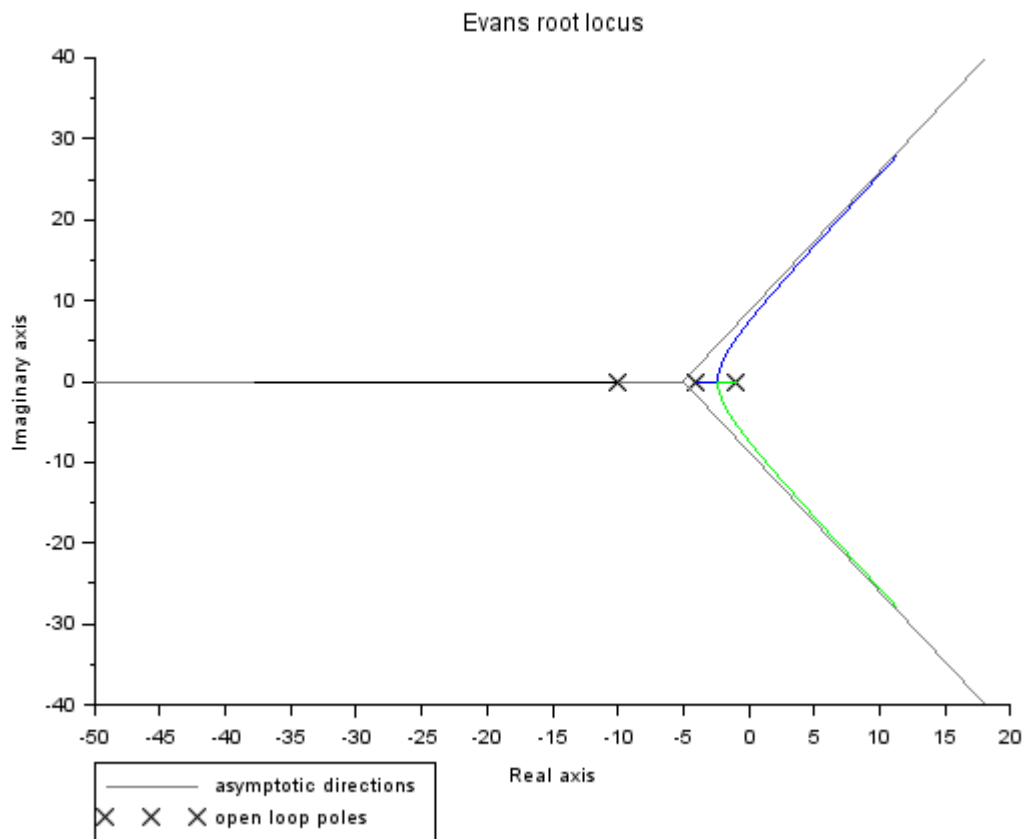
Como ejemplo se toma a una función de transferencia de lazo abierto *G* con polos [-1 -4 -10]:

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 15s^2 + 54s + 40}$$

El código en cuestión sería:

```
s=poly(0,'s');
G=1/(s^3+15*s^2+54*s+40);
evans(G);
```

Al ejecutarlo, produce una ventana como se muestra en la *Figura 1*. Lugar Geométrico de las Raíces de la función de transferencia G. En la misma se ve con líneas negras los trayectos asintóticos (ramas) que adoptaran los polos identificados con las **X**, en caso que la ganancia del sistema cambie. En líneas de colores se ven los trayectos correspondientes a los polos, -1 y -4.



**Figura 1.** Lugar Geométrico de las Raíces de la función de transferencia  $G$ .

Notar, que por el lugar de las raíces obtenido, es indiscutible el hecho que exista una ganancia  $K_1$ , tal que los polos en -1 y -4 se conviertan en un polo doble, que exista otra ganancia  $K_2$  tal que los polos queden ubicados sobre el eje  $j\omega$  dejando al sistema funcionando como un oscilador y también, que toda  $K$  superior a esta ultima hará inestable el sistema, debido a que los polos pasaran a estar ubicados en el semiplano derecho.

Notar que la ecuación característica del sistema a lazo cerrado es  $1 + G * K = 0$ , en tanto que la función de transferencia de lazo abierto corresponde a  $G*K$ . La similitud entre ellas hace posible analizar el comportamiento del sistema en lazo cerrado a partir de la función de transferencia del sistema a lazo abierto.

Para satisfacer la condición de la ecuación característica, basta con que  $G * K = -1$ . Esto representa a un número complejo que, en notación binómica ( $a + jb$ ), su parte imaginaria es igual a 0 y la real a -1. Para que esto se cumpla, se podrá analizar de forma polar donde serán posibles soluciones los vectores cuya magnitud sea 1 y fase  $\pm 180^\circ$ . De forma genérica:

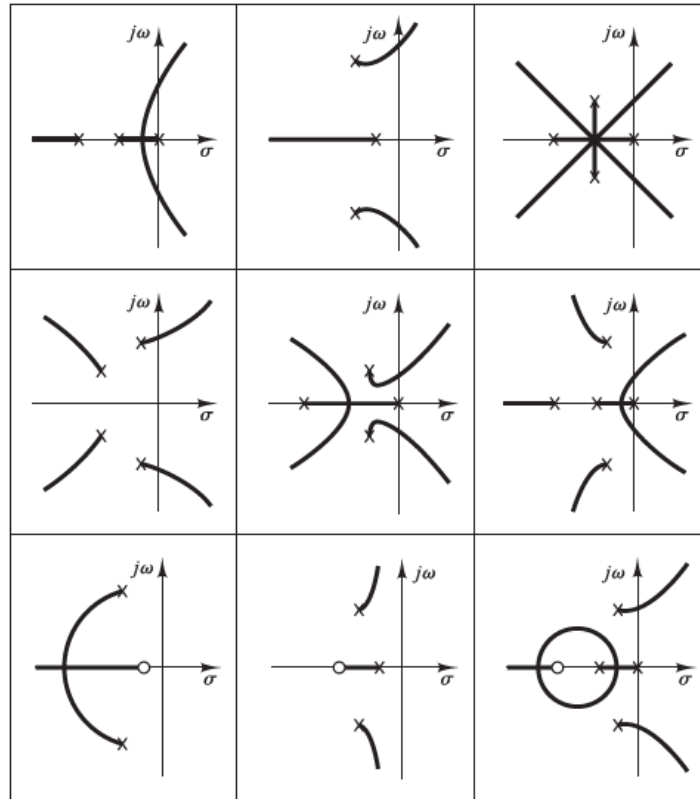
$$G * K = 1 \angle 180^\circ * n$$

para  $n = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm(2n + 1)$

Por lo tanto, todo valor de  $s$  que satisface la condición anterior, dada por la función anterior que corresponde al sistema a lazo abierto, será una raíz del polinomio característico que contiene a los polos de lazo cerrado. En conclusión, la obtención de los polos del sistema a lazo cerrado parte de la representación en el plano  $s$  de los polos y ceros contenidos en lazo abierto.

## Más ejemplos

En la siguiente tabla se pueden distintas configuraciones de polos y ceros y según estas, el lugar de las raíces correspondiente.



**Figura 2.** Algunos ejemplos de Evans.

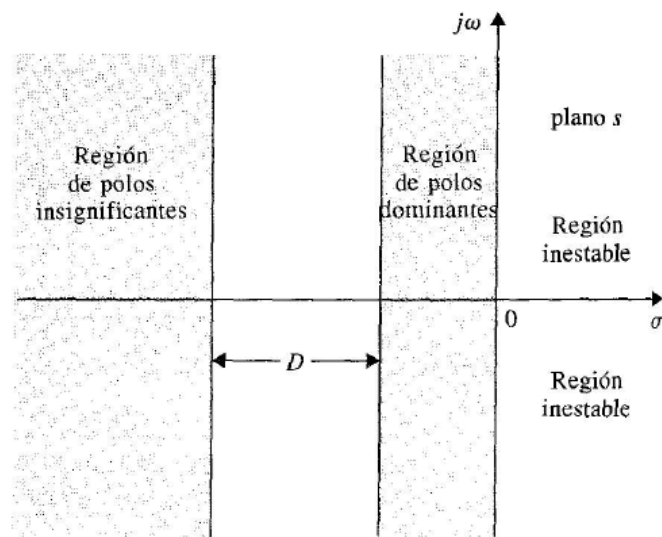
## Polos dominantes

El diagrama de Evans permite ver el recorrido de los polos a medida que varía la constante de proporcionalidad. Sin embargo, esto por sí solo no termina de resolver nuestro objetivo de evaluar la respuesta transitoria del sistema. Básicamente, porque una respuesta con cuatro o más polos no tiene un resultado tan simple de visualizar. Entonces, nos proponemos evaluar la posibilidad de aproximar nuestro sistema por uno o dos polos. Esto implica definir si existen “polos dominantes” que logren describir lo fundamental de la respuesta del sistema. Los polos adicionales, que despreciaremos, serán denominados como “insignificantes”.

En la figura 3 se muestra una situación en la cual podría aplicarse esta estrategia. El concepto reside en que los polos más cercanos al eje  $j\omega$  son los más determinantes en la respuesta transitoria. Esto es plausible ya que, según recordará del capítulo “Modelización en 2º orden”, el tiempo de establecimiento depende fuertemente de la distancia a este eje (es decir, de la parte real de los polos). Como condición para poder despreciar los polos que se encuentran en la región de polos insignificantes es que la distancia  $D$  sea suficientemente grande.

¿Qué tan grande debería ser  $D$ ? Por lo general se asume que la magnitud de la parte real de los polos insignificantes debe ser 10 veces más grande que la magnitud de la parte real de los polos dominantes, aunque Kuo (1996, pág. 422) asume que con 5 veces puede ser suficiente. En cualquier caso, estamos haciendo uso de una aproximación. Si este criterio nos sirvió para determinar algún

parámetro, sería esperable simular el resultado final para evaluar con mayor precisión nuestra decisión.



**Figura 3.** Polos dominantes e insignificantes de una transferencia.



# Capítulo 7.

## Márgenes de ganancia y de fase

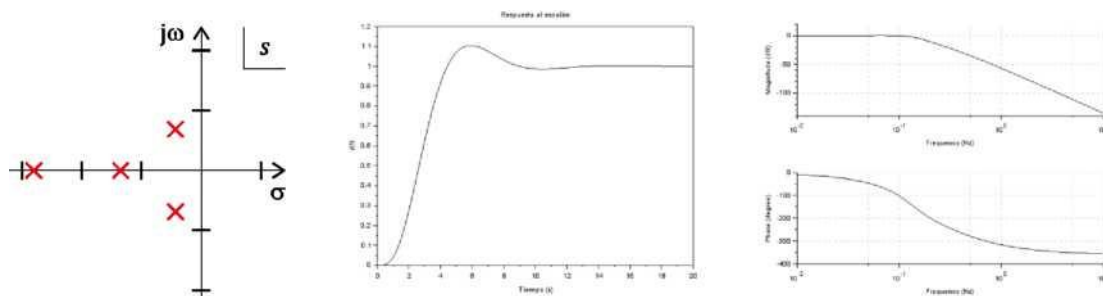
En el presente capítulo, hacemos una breve descripción sobre el margen de ganancia y el margen de fase como herramientas de especificación y diseño de sistemas de control. Para esto, comenzamos definiendo el concepto de estabilidad relativa

### Estabilidad absoluta y relativa

En primer lugar, un sistema de control requiere ser estable para operar y que los actuadores del sistema puedan mantener la variable controlada dentro de los márgenes deseados. Esto es lo que llamamos estabilidad absoluta. Para evaluarla, generalmente se utiliza el criterio de comprobar que para toda entrada acotada su salida sea acotada, conocido como sistema BIBO estable (por sus siglas en inglés: *bounded-input bounded-output*). Sin embargo, esto puede no ser suficiente. Según palabras de Benjamin C. Kuo: "En general, se está interesado no sólo en la estabilidad absoluta de un sistema, sino también en qué tan estable es. Esto último se llama estabilidad relativa." (Kuo, 1996, pág. 605)

Si el modelo de nuestro sistema resulta ser estable, ¿para qué analizar qué tan cerca de la inestabilidad se encuentra? Para empezar, precisamente por eso: porque nuestras simulaciones siempre son a partir de un modelo, que no puede ser con absoluta exactitud nuestro sistema real. Puede ocurrir que nuestro modelo este demasiado simplificado; o que no tengamos suficiente exactitud sobre los parámetros; o que en realidad el rango de parámetros es bastante amplio. La práctica, seguramente, nos dará más motivos para evaluar no sólo si mi modelo resultó estable sino también con cuánto margen será estable.

Entonces, partiendo de la definición, podemos medir la estabilidad relativa con parámetros como el sobrepaso máximo o el factor de amortiguamiento, analizando la respuesta al escalón. Si analizamos la respuesta en frecuencia del lazo cerrado  $M(s)$ , podemos observar si posee sobrepico de frecuencia y qué tan alto es. En la figura 1 mostramos algunos ejemplos que ilustran el diagrama de polos y ceros, la respuesta al escalón y la respuesta en frecuencia para diferente estabilidad relativa.



(a) Estable con amortiguación aceptable.

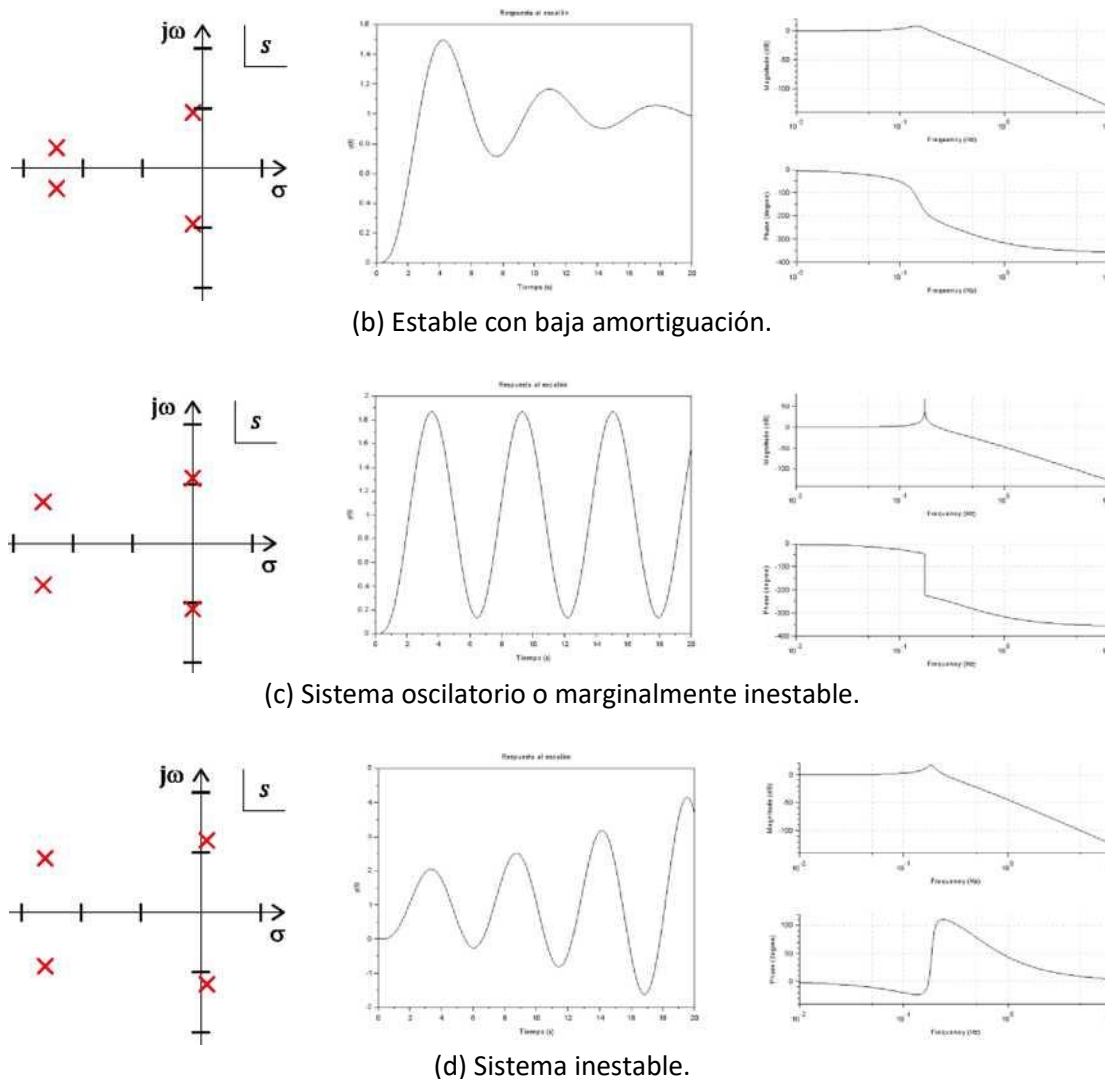


Figura 1. Correlación de diagrama de polos, respuesta al escalón y en frecuencia de diversas transferencias de lazo cerrado  $M(s)$ .

En la figura, los casos (a) y (b) corresponden a sistemas BIBO estables. Sin embargo, sus desempeños son claramente diferentes. Es notorio que el caso (b), con baja amortiguación, se acerca más a la inestabilidad que muestra el caso (d). Los cuatro ejemplos corresponden a un sistema realimentado de cuarto orden pero con diferentes ganancias de lazo abierto. El caso (c), marginalmente inestable, marca el límite de la ganancia de lazo abierto por encima de la cual el sistema se vuelve inestable. La estabilidad relativa puede cuantificarse analizando cuánto le falta a nuestro sistema para llegar a este estado marginalmente inestable. Con este objetivo definiremos el margen de ganancia y el margen de fase.

## Margen de ganancia

Para definir estos márgenes, primero conviene recordar que nuestro sistema se vuelve inestable si existe una frecuencia  $\omega$  para la cual nuestra ganancia de lazo abierto  $L(j\omega)$  es  $-1$ . (La ganancia de lazo abierto  $L(s)$  incluye: la transferencia del sistema con el actuador y la transferencia elegida para el controlador con su ganancia proporcional  $K_p$ .) Cuando esto ocurra, la transferencia de lazo cerrado  $M(j\omega)$  tenderá a infinito ya que:

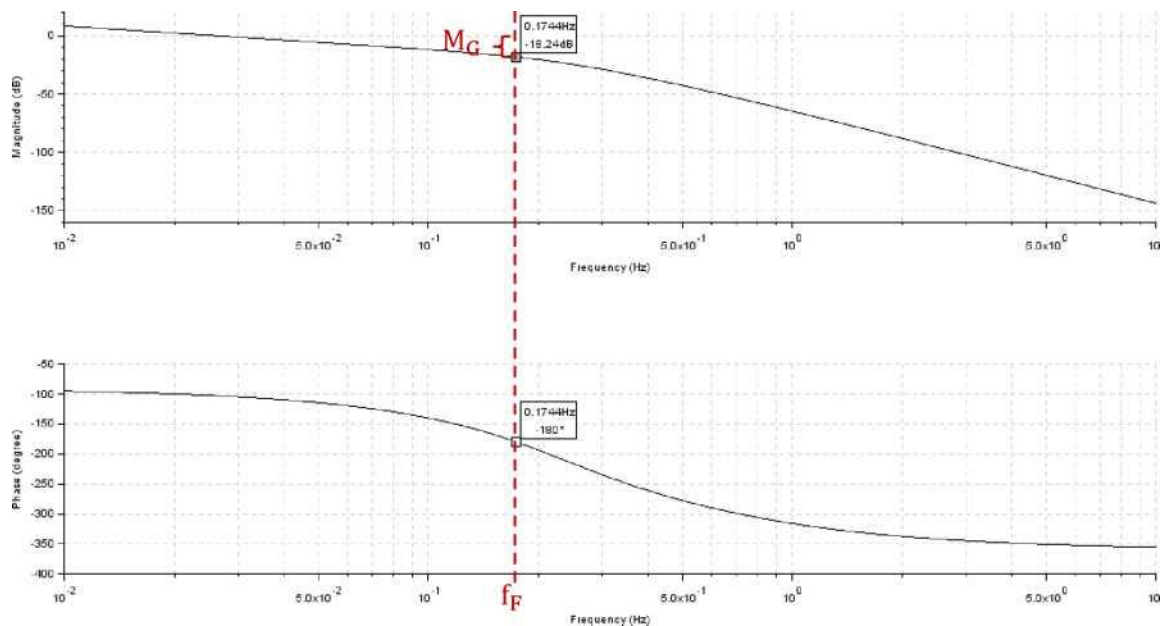


$$M(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (1)$$

Esto es, claramente, lo que ocurre en el caso (c) de la figura 1. Como  $L(s)$  es una función de números complejos, el caso de  $L(s) = -1$  exige dos condiciones: por un lado, que su módulo sea 1 y, por otro, que su argumento sea  $\pm 180^\circ$ . Es decir:

$$L(s) = -1 \Leftrightarrow \{|L(s)| = 1 \wedge \angle L(s) = \pm 180^\circ\} \quad (2)$$

Lo que sigue es analizar por separado estas condiciones de la ecuación 2. Primero, hallamos la frecuencia  $\omega_F$  para la cual  $\angle L(j\omega_F) = \pm 180^\circ$ , a la cual denominamos frecuencia de cruce de fase. Ejemplificamos en la figura 2. Como se logra apreciar en la figura, en este caso la frecuencia de cruce de fase  $f_F$  es igual a 0,1744 Hz, que es cuando el argumento o defasaje de  $L(j2\pi f_F)$  es igual a  $-180^\circ$ .



**Figura 2.** Diagrama de Bode de la transferencia de lazo abierto  $L(j2\pi\omega)$  de un sistema de cuarto orden y su margen de ganancia.

En el ejemplo de la figura 2, el módulo la ganancia de lazo abierto  $L(j2\pi f_F)$  resultó ser  $-18,24$  dB. Para esta frecuencia, si bien se cumple la condición de argumento señalada en la ecuación (2), no se cumple la condición de módulo unitario. Entonces podemos asegurar que es un sistema estable porque  $|L(j2\pi f_F)| < 1$ . En cambio, si este módulo fuera mayor o igual a 1, correspondería a un sistema inestable.

Ahora bien: ¿qué tan cerca o lejos está nuestro sistema de convertirse en inestable? Si aumentamos la ganancia proporcional  $K_p$ , el efecto sería que toda la curva del módulo de  $L(j2\pi f)$  de la figura 2 subiría acorde a los dB que aumento  $K_p$ . Si en la figura 2 nuestra ganancia  $K_p$  era 1 y la aumentamos precisamente en 18,24 dB (o más), nuestro sistema se tornaría inestable. Esto ocurre porque entonces el módulo de  $L(j2\pi f_F)$  pasaría a ser 0 dB o de ganancia unitaria. Dicho de otro modo: lo máximo que puedo aumentar  $K_p$  manteniéndose estable el sistema es 18,24 dB. Precisamente a esto denominamos **margen de ganancia**.

**Definición:** El margen de ganancia de un sistema es el aumento requerido en su ganancia proporcional para llevarlo a inestabilidad marginal. Esto significa que mi sistema se mantendrá estable mientras el aumento de ganancia sea menor.

Identificada su frecuencia de cruce de fase, la forma de calcular el margen de ganancia MG es:

$$M_G = \frac{1}{|L(j2\pi f_F)|}$$

$$M_G[\text{dB}] = 20 * \log\left(\frac{1}{|L(j2\pi f_F)|}\right) = -20 * \log(|L(j2\pi f_F)|) \quad (3)$$

Es para notar que el margen de ganancia puede estar definido para cualquier sistema de cualquier orden, incluya o no ceros dentro de su transferencia. Incluso, aún si no poseo un modelo matemático de mi sistema, puedo medir el margen de ganancia si mido la respuesta en frecuencia del mismo. Estas son algunas ventajas de utilizar el margen de ganancia como forma de cuantificar la estabilidad relativa.

Nótese que el defasaje o argumento de  $L(j2\pi f)$  cuando  $f$  tiende a infinito puede indicarnos el orden del sistema. En nuestro caso de la figura 2, su argumento tiende a  $-360^\circ$  porque corresponde a un sistema de cuarto orden y no posee ceros. Si nuestro sistema fuera un pasabajos de primer orden, el argumento de  $L(j\omega)$  tenderá a  $-90^\circ$  conforme  $\omega$  tienda a infinito. Por lo tanto, en ese caso, nunca se cumplirá la condición del argumento de la ecuación 2. Dicho de otra forma: este sistema de primer orden sería estable para cualquier valor de ganancia de lazo abierto. Lo mismo ocurre con un sistema de segundo orden, cuyo argumento tenderá a  $-180^\circ$  cuando la frecuencia tienda a infinito. En ambos casos, el margen de ganancia sería infinito. Sin embargo, cabe la advertencia de Katsuhiko Ogata: “que los denominados sistemas de primer y segundo orden son sólo aproximaciones, en el sentido de que, al obtener las ecuaciones del sistema, no se consideran los pequeños retardos de tiempo, y, por tanto, no se trata, en realidad, de sistemas de primer o segundo orden. Si se consideran estos retardos pequeños, los supuestos sistemas de primer o segundo orden se vuelven inestables”. (Ogata, 2010, pág. 466)

## Margen de fase

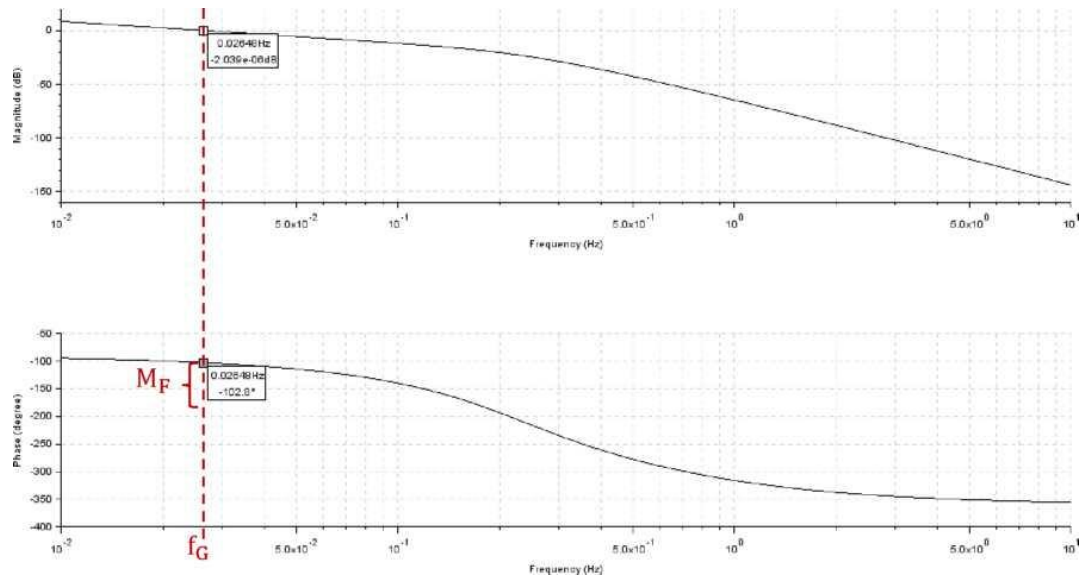
En forma análoga, podemos analizar también cuánto defasaje le resta a la transferencia de lazo abierto para que el sistema se torne inestable. Esto es necesario porque dos sistemas con el mismo margen de ganancia no necesariamente tengan la misma estabilidad relativa. Es posible que uno de los dos se vuelva más fácilmente inestable al introducirse un retardo en el sistema. Entonces, empezamos definiendo la **frecuencia de cruce de ganancia**: que corresponde a la frecuencia  $f_G$  cuando la magnitud de la ganancia de lazo abierto  $L(j2\pi f_G)$  es igual a 1. Luego, definimos el **margen de fase**:

**Definición:** El margen de fase MF es la cantidad de grados que le quedan al defasaje de la ganancia de lazo abierto  $L(j2\pi f_G)$  en la frecuencia de cruce de ganancia hasta llegar a  $-180^\circ$ .

La forma de calcular este margen de fase es:

$$M_F = \angle L(j2\pi f_G) + 180^\circ \quad (4)$$

En la figura 3 señalamos el margen de fase para el mismo ejemplo de la figura 2. Realizando el cálculo de la ecuación 4, resulta  $M_F = -103^\circ + 180^\circ = 77^\circ$ .



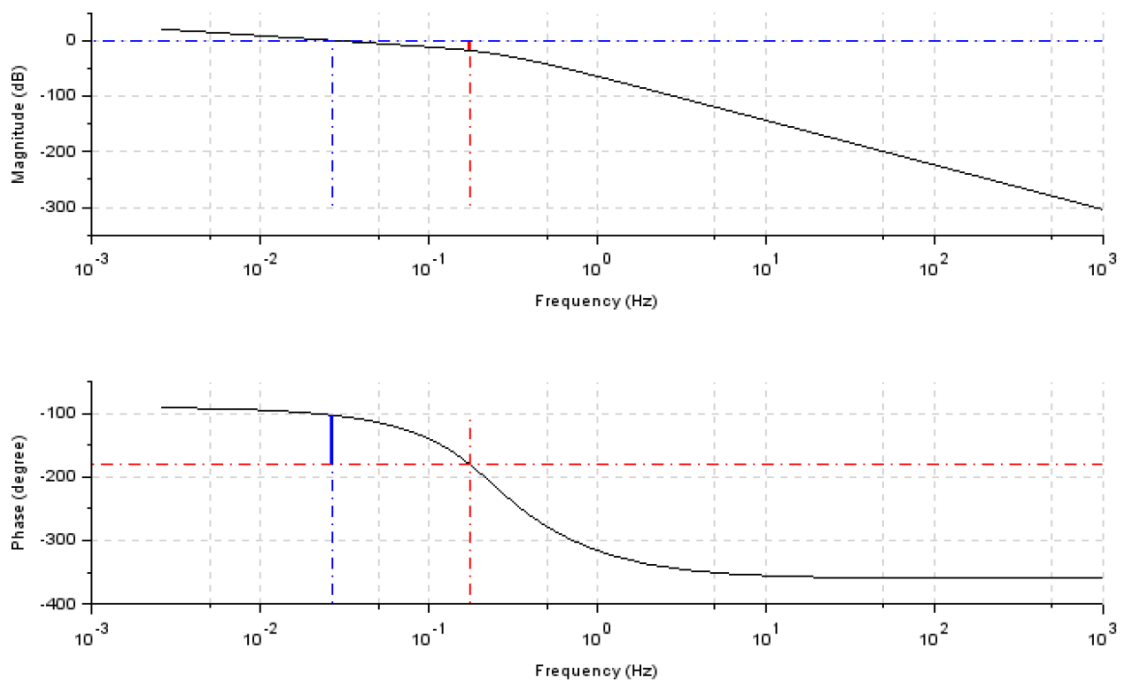
**Figura 3.** Margen de fase.

## Un ejemplo

Consideramos la transferencia de lazo abierto:

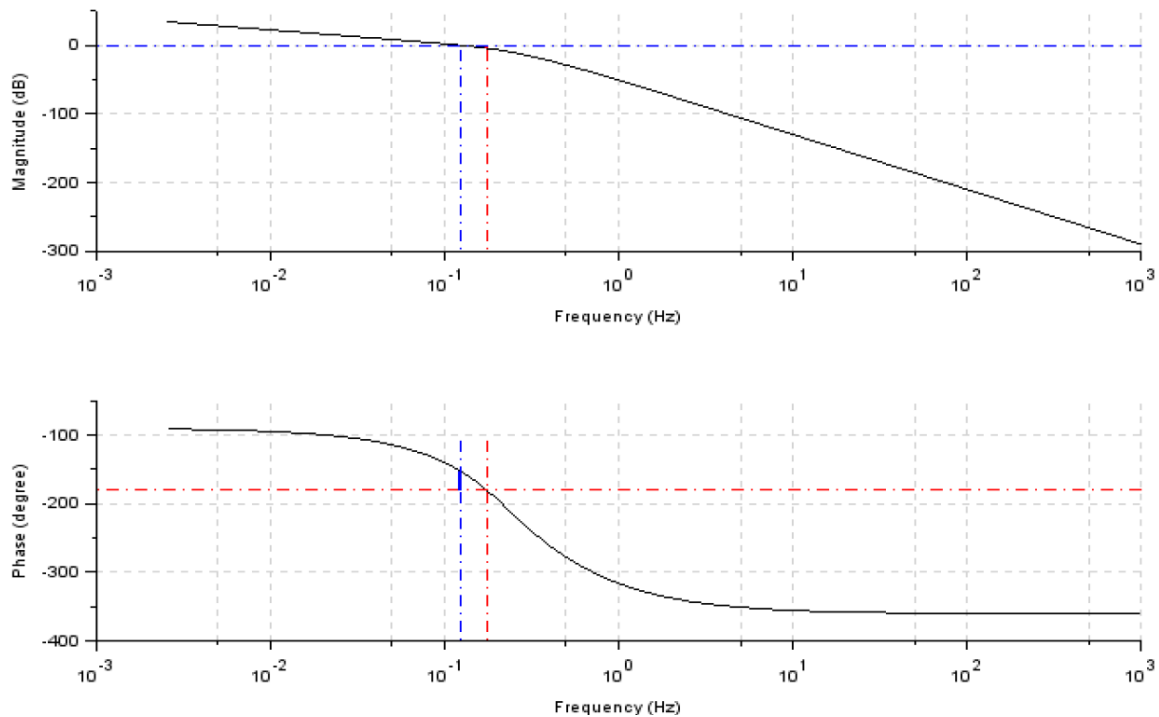
$$L(s) = \frac{K_p}{6s + 8s^2 + 5s^3 + s^4} = \frac{Y(s)}{E(s)} \quad (5)$$

Para  $K_p = 1$ , y utilizando la función `show_margins` de Scilab, obtenemos la figura 4. Podrá verificar que se corresponde con las figuras 2 y 3. Dejamos para el lector comprobar que esta ganancia de lazo abierto se corresponde con la ganancia de lazo cerrado (a) de la figura 1. Según lo calculado previamente, el sistema es estable, su margen de ganancia es 18,2 dB y su margen de fase es 77°. Estos valores están señalados gráficamente. También puede utilizar las funciones `p_margin` y `g_margin` para obtenerlos.



**Figura 4.** Margen de fase y de ganancia de un sistema de cuarto orden.

Ahora le asignaremos a  $K_p$  el valor de 5 veces o su equivalente 14,0 dB. Con las funciones citadas, obtenemos nuevamente el margen de fase y margen de ganancia. Resultaron ser  $M_G=4,3$  dB y  $M_F=28^\circ$ . Lo graficamos en la figura 5.



**Figura 5.** Margen de fase y de ganancia de un sistema de cuarto orden.

Comparando las figuras 4 y 5, se observa que la forma de las transferencias son las mismas salvo por el hecho que el diagrama de amplitud sube 14,0 dB. Por este motivo, se redujo el margen de fase en exactamente 14,0 dB. Esto se debe a que aumentó frecuencia de cruce de ganancia, pasando de 0,026 Hz a 0,123 Hz y acercándose a la frecuencia de cruce de fase. La frecuencia de cruce de fase no varió, porque el diagrama de fase tampoco lo hizo. Queda para el lector comprobar que esta ganancia de lazo abierto corresponde con la transferencia de lazo cerrado (b) de la figura 1.

# Capítulo 8.

## Acción de control PID

El control Proporcional-Integral-Derivativo (PID) es ampliamente utilizado en la industria y, cada vez más, en el hogar. Es un tipo de control lineal más sofisticado que el control proporcional. Puede reducir el error de estado estacionario a la precisión del sensor utilizado y manejar de forma más adecuada tanto el sobrevalor como el tiempo de crecimiento de la señal.

Desde el punto de vista matemático, el controlador PID puede expresarse como la suma de una parte proporcional al error, su integral y su derivada. Según la ecuación (1):

$$u(t) = K_P * e(t) + K_I \int_0^t e(t) * dt + K_D * \frac{de(t)}{dt} \quad (1)$$

O expresado en el dominio de frecuencia con la transformada de Laplace:

$$U(s) = \left( K_P + \frac{K_I}{s} + K_D * s \right) * E(s) \quad (2)$$

Otra forma de expresar lo mismo es redefiniendo las constantes  $K_I$  y  $K_D$ , según la ecuación (3):

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{K_P}{T_i} \\ K_D &= K_P * T_D \\ U(s) &= K_P * \left( 1 + \frac{1}{T_i * s} + T_D * s \right) * E(s) \end{aligned} \quad (3)$$

Ambas definiciones de parámetros de las ecuaciones (2) y (3) son válidas y utilizadas para configurar un controlador PID. A lo largo del capítulo se irán describiendo estos componentes del controlador, para luego integrarlos. Empezaremos con un breve repaso y ejemplo del controlador proporcional.

### Control proporcional

El controlador proporcional consiste en generar una señal de control  $u(t)$  proporcional a la señal de error  $e(t)$ , tal como se muestra en la ecuación (4). Esta ecuación corresponde al primer término de la ecuación (1), haciendo cero a  $K_I$  y  $K_D$ .

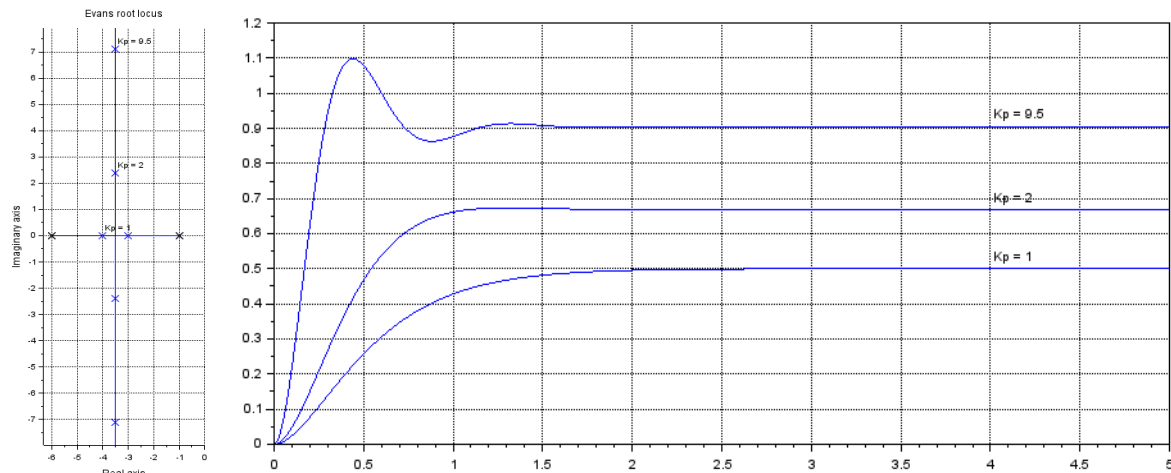
$$u(t) = K_P * e(t) \quad (4)$$

Es el control lineal más simple. Tiene como desventaja el error de estado estacionario. Si se aumenta  $K_P$  puede bajarse este error de estado estacionario, pero el sistema puede aumentar su sobrevalor de forma indeseada o incluso tornarse inestable.

Tomamos como ejemplo ilustrativo a un sistema de segundo orden. Si bien este modelo teórico no puede ser inestable, sí puede presentar un importante sobrevalor en la respuesta al escalón. La transferencia elegida como ejemplo es:

$$G(s) = \frac{6}{(s+1)*(s+6)} \quad (5)$$

En la figura 1 simulamos su respuesta para algunos valores de  $K_p$  y confeccionamos el diagrama de Evans con Scilab.



**Figura 1.** Lugar de las raíces y respuesta transitoria de un sistema de control proporcional arbitrario.

A la izquierda, en la figura, puede observarse el diagrama de Evans del sistema, en el cual se han destacados los valores de respuesta transitoria simuladas. El diagrama de polos muestra que la transferencia a lazo abierto tiene un polo en  $p_1 = -1$  y  $p_2 = -6$ . En el gráfico a la derecha de la figura puede observarse que el tiempo de establecimiento va aproximadamente desde 1,14 s para  $K_p = 1$  hasta 0,61 s para  $K_p = 9,5$  (considerando un margen del 10% respecto de su valor final)<sup>10</sup>. Los valores finales de la respuesta transitoria pueden obtenerse aplicando el Teorema del Valor Final.

El ejemplo muestra un problema típico del control proporcional: suele ocurrir que no se puede achicar todo lo deseado el error de estado estacionario sin que esto repercuta en un sobrevalor excesivo. Si el caso implementado con  $K_p = 9,5$  es adecuado o no para la aplicación en cuestión, debe analizarse en el caso real concreto. De todos modos, muestra el límite propio del controlador proporcional.

## Control integral

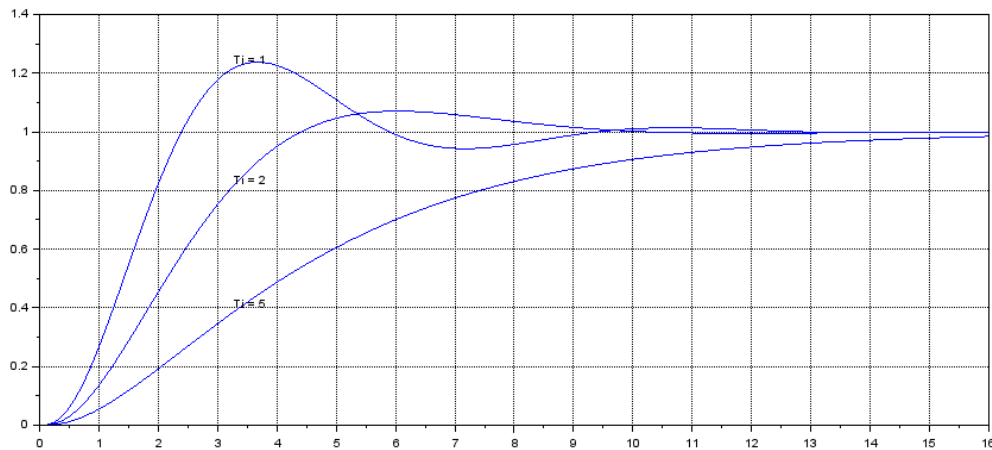
Para eliminar el error de estado estacionario implementaremos un control integral (o al menos para reducir este error a la precisión del sensor). La estrategia es integrar la señal de error. Esto hace que el controlador tenga memoria del estado previo y pueda mantener una acción de control adecuada aún cuando la señal error sea cero. Esto es una mejora respecto del control proporcional, en el cual siempre debe haber un error para que, multiplicado por la constante  $K_p$ , resulte en alguna acción de control.

Para poder comparar, utilizamos la misma transferencia de subtítulo anterior descripto en la ecuación (5). Partiendo de las ecuaciones (1), (2) y (3), el controlador integral puede definirse como:

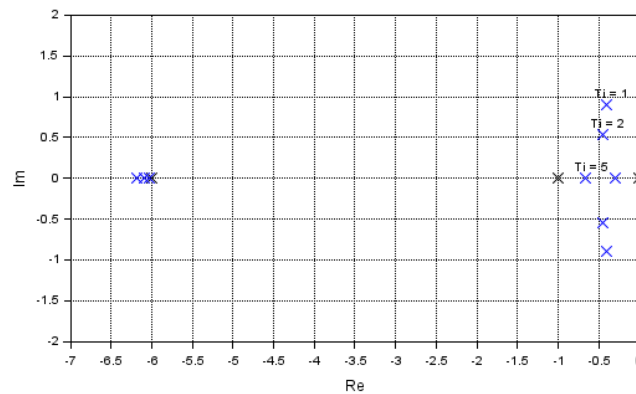
$$U(s) = \frac{K_i}{s} * E(s) = \frac{K_P}{T_i * s} * E(s) \quad (6)$$

<sup>10</sup> Lo usual en una aplicación práctica es que se considere el tiempo de establecimiento respecto de su valor deseado en lugar de su valor final. Esto haría que para algunos valores de  $K_p$ , con error de estado estacionario demasiado grande, el tiempo de establecimiento sea infinito (porque nunca alcanza el objetivo dentro del margen preestablecido). A efectos didácticos, en los cálculos de este capítulo se ha considerado utilizar como referencia el valor final.

Algunas simulaciones pueden verse en las figuras 2 y 3.



**Figura 2.** Ejemplo de respuesta al escalón para varios valores de tiempo de integración.



**Figura 3.** Ubicación de los polos para cada valor de  $T_i$  elegido.

En la figura 2 se ilustran algunos valores del tiempo de integración  $T_i$ , asignando  $K_P = 1$ , según lo definido en la ecuación (6). Lo primero a registrar es que, ahora, todas las respuestas ante un escalón unitario tienden a 1 y por lo tanto terminan sin error de estado estacionario. Esta es la gran ventaja del control integral respecto del proporcional.

Por otra parte, cuando achicamos el tiempo de integración  $T_i$ , el control es más agresivo en su respuesta. Esto significa que actuará de forma más rápida a medida que achicamos  $T_i$ . Sin embargo, notamos un sobrevalor aún más pronunciado que en el ejemplo de control proporcional. Además, el tiempo de establecimiento mínimo resultó ser de 3,68 s para  $T_i = 2$  s frente a 0,61 s con el control proporcional. Es decir, bastante mayor al ejemplo de control proporcional dada la misma transferencia.

En cuanto al recorrido de los polos de la figura 3, lo primero a notar es que apareció un nuevo polo de la transferencia a lazo abierto en el origen (marcado con cruz negra). Este nuevo polo corresponde al integrador del controlador. Esto ha hecho que, con el control integral, los polos se muevan más cerca del eje real a medida que achicamos  $T_i$  (que sería similar a aumentar  $K_P$ ). Dado que el tiempo de establecimiento depende fuertemente de la inversa de la distancia de los polos dominantes al eje real, esto grafica por qué el control integral es más lento. Lo que es peor aún, los polos se van acercando cada vez más a eje real: esto evidencia que el sistema puede tornarse inestable. De hecho, se comprueba en este ejemplo que para  $\frac{K_P}{T_i} > 7$ , el sistema es inestable.

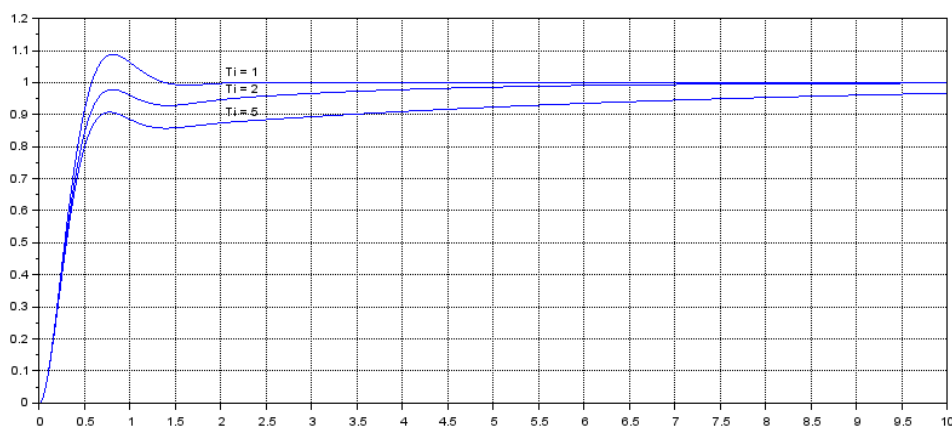
En conclusión, el control integral logra resolver el problema del error de estado estacionario. Sin embargo, suele ser más lento que el control proporcional y puede agravar el riesgo de inestabilidad. Si es adecuado o no, dependerá de un análisis particular en una aplicación concreta.

## Control proporcional-integral

Intentando juntar lo mejor del control proporcional y del control integral, se creó el control proporcional-integral (o simplemente PI). Matemáticamente puede definirse como:

$$U(s) = \left(K_p + \frac{K_i}{s}\right) * E(s) = K_p * \left(1 + \frac{1}{T_i * s}\right) * E(s) \quad (7)$$

Lo complejo de este controlador es que ahora deben configurarse dos parámetros:  $K_p$  y  $T_i$ . Como referencia, podemos tomar algún valor de  $K_p$  menor al 9,5 de la figura 1. Elegimos  $K_p = 4$  y simulamos.

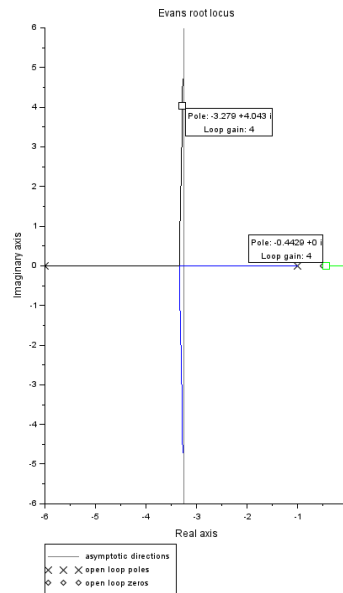


**Figura 4.** Algunas simulaciones con control PI.

Finalmente, logramos una respuesta sin error de estado estacionario y con un tiempo de establecimiento mejor que con el control proporcional. Para  $K_p = 4$  y  $T_i = 1$  s resultó ser de 0,49 s. Este ejemplo particular muestra lo beneficioso que puede ser el control PI.

Para comprender su funcionamiento realizaremos el Evans para  $T_i = 2$  s, tal como se muestra en la figura 5. Dado que el diagrama de Evans grafica cómo se mueven los polos en función de  $K_p$ , podríamos hacer un Evans para cada valor de  $T_i$ .





**Figura 5.** Evans para  $T_i = 2$  s.

Además de los dos polos de la planta, ahora se agregó no sólo un polo en el origen (por el integrador), sino también un cero en  $-0,5 = -1/T_i$ . Como recordará, a medida que se aumenta  $K_p$ , uno de los tres polos se va acercando al cero y los otros dos polos tienden a infinito de forma simétrica. En la figura, el polo del origen *parece* a anularse con el cero y los otros dos polos se alejan sin acercarse al eje real. Esto nos dice que el sistema se ha alejado del riesgo de inestabilidad (al menos en este ejemplo).

Este cero se debe a la combinación del control proporcional con el integral. De hecho, la ecuación (7) puede ser reescrita como:

$$U(s) = K_p * \left( \frac{1+T_i*s}{T_i*s} \right) * E(s) \quad (8)$$

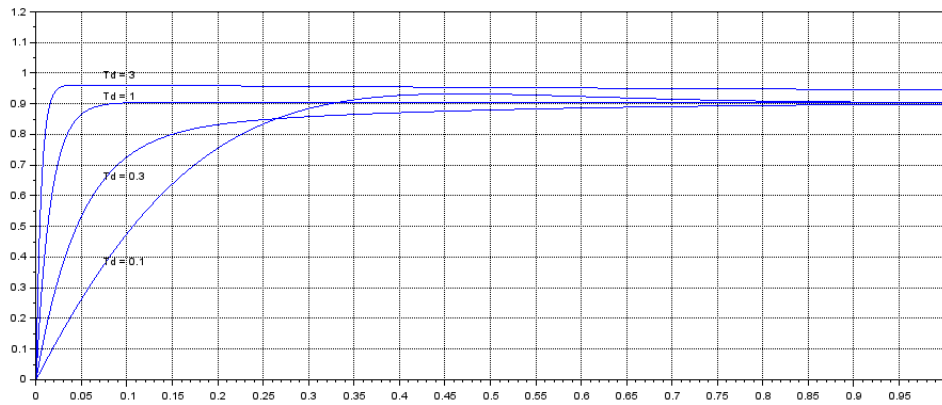
La ecuación (8) demuestra por qué el controlador PI introduce un polo en el origen y un cero en  $-1/T_i$ . Es decir, podemos elegir el lugar de ese cero que aparece en nuestro Evans de la figura 5. Esto determinará el recorrido de los polos. La experiencia y un análisis concreto podrá determinar el lugar más adecuado para una aplicación. Por lo pronto, un  $T_i$  más chico –que habíamos identificado como un integrador más agresivo– hará que el cero se aleje del origen.

## Controlador proporcional-derivativo

Partiendo de las ecuaciones (2) y (3), el controlador proporcional-derivativo o PD puede definirse como:

$$U(s) = (K_p + K_D * s) * E(s) = K_p * (1 + T_D * s) * E(s) \quad (9)$$

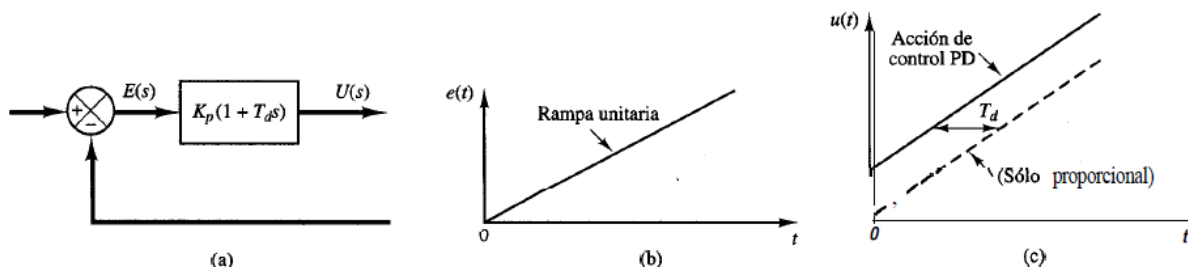
El efecto del controlador PD en el diagrama de polos es introducir un cero en  $-1/T_D$ . Esto puede generar el efecto de limitar el sobrevalor de la respuesta. En la figura 6 se muestran algunas simulaciones, configurando  $K_p = 9,5$ .



**Figura 6.** Algunas simulaciones de control PD.

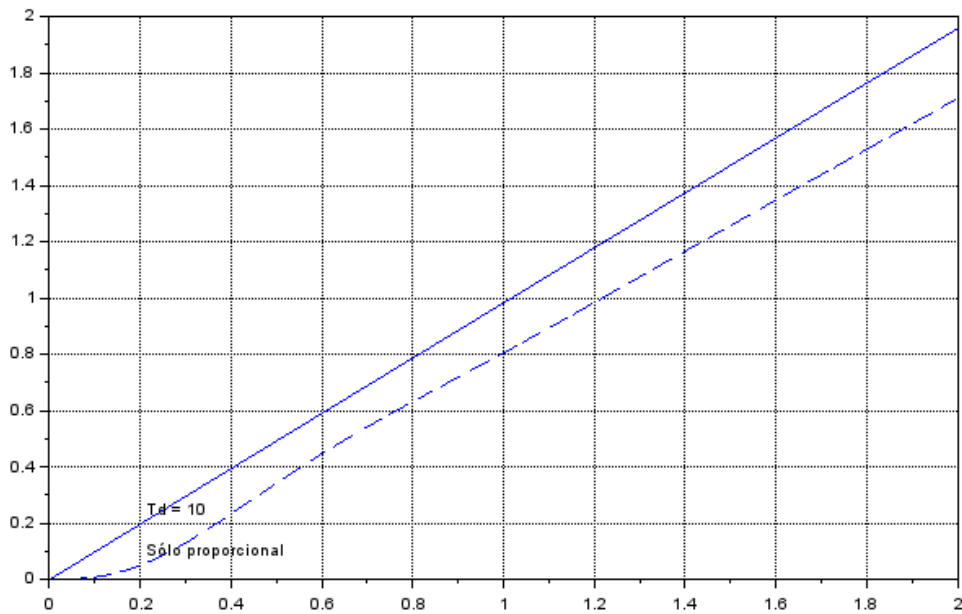
Como puede apreciarse, a medida que aumentamos  $T_D$  la respuesta se hace más rápida. Así, el componente derivativo se hace más agresivo. Por ejemplo, para  $T_D = 1$  s, el tiempo de establecimiento se ha reducido a apenas 36 ms. No sólo eso, incluso se ha reducido o quitado el sobrevalor. Éstas son ventajas que puede tener la parte derivativa del controlador. Desde ya, no elimina el error de estado estacionario propio del controlador proporcional. De hecho, el error del 10% es el mismo que en el caso de control proporcional con  $K_p = 9,5$  de la figura 1. Nótese también el efecto de exagerar con el componente derivativo, como sería el caso de  $T_D = 3$  s. Para este caso, en definitiva el sobrevalor ha sido generado por el propio controlador.

La componente derivativa también se suele llamar *control de velocidad*, porque reacciona frente al cambio de la señal error. Esto puede ser especialmente útil a la hora de ajustar un controlador para ser utilizado con una señal rampa como referencia. La señal rampa se suele utilizar para el control preciso del movimiento de sistemas mecánicos, de modo que la velocidad del mecanismo quede determinado por la pendiente de esa rampa. En la figura 7 se ilustra la ventaja del control derivativo ante una señal rampa.



**Figura 7.** Respuesta a la rampa de un control PD. (Ogata, 1993)

En la figura 7 se muestra: (a) el controlador PD; (b) una señal rampa de entrada al controlador; (c) la acción de control sólo proporcional y proporcional-derivativa. Notar que la componente derivativa le suma una acción de control que logra mayor velocidad de respuesta. En la figura 8 simulamos el sistema analizado ante una señal rampa con y sin componente derivativo. Nótese que, con la componente derivativa, la respuesta se asemeja a la rampa unitaria que el sistema tiene como entrada.

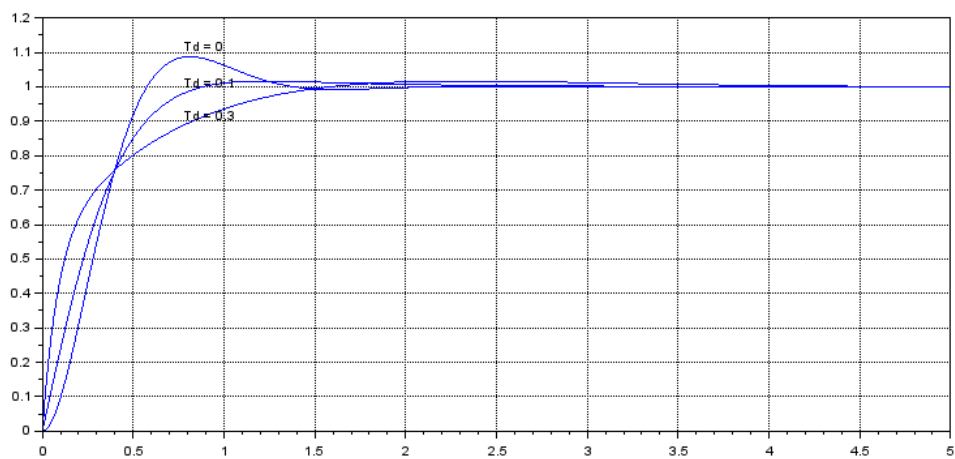


**Figura 8.** Simulación con y sin componente derivativa.

A los efectos de aplicaciones reales, el gran problema que puede afectar el componente derivativo es el ruido del sensor. Esto ocurre porque la derivada amplifica las altas frecuencias. También puede ser muy problemático el ruido de cuantización, en sistemas digitales. Por este motivo, la componente derivativa suele ser implementado con una etapa previa de un filtro pasabajos (análogo o digital). Esto puede hacer difícil su implementación, ya que introduce la transferencia de ese pasabajos en el lazo de realimentación. En cualquier caso, este ruido impone un límite máximo de  $T_D$  posible para cada aplicación específica.

## Controlador proporcional-integral-derivativo

El controlador proporcional-integral-derivativo intenta tomar lo mejor de cada modo de acción de control. El problema es que ahora pasamos a tener tres parámetros para configurar. Esto torna complejo su calibración y, tras un siglo de haber sido creado, el controlador PID sigue dando que hablar. A los efectos ejemplificativos, partiremos del caso del control PI y le agregaremos la parte derivativa, como se muestra en la figura 9.



**Figura 9.** Simulación con y sin componente derivativa.

La primera respuesta corresponde a  $K_p = 4$ ,  $T_i = 1$  y  $T_D = 0$ . Es decir, sin parte derivativa. Es la misma transferencia que la mostrada en la figura 4 con control PI. El efecto de introducir una parte derivativa fue disminuir el sobrevalor. De todas formas, no debe perderse de vista que este es apenas un ejemplo posible. Para un análisis más completo debe analizarse el lugar de las raíces o alguno de los métodos existentes para analizar y configurar un controlador PID. A tal efecto, puede consultarse Ogata (2010, pág. 567).

La complejidad de esta calibración hace que uno de los métodos más utilizados en la industria sea, simplemente, hacer uso de la auto-calibración que poseen los equipos y los controladores programables. Aún así, la comprensión del efecto de cada componente del control PID puede permitir un pequeño ajuste de parámetros en función del objetivo buscado. O resolver el problema cuando la autocalibración no funciona. Para aplicaciones más complejas, puede ser necesario un procesista que modele y conozca de forma consistente el sistema a controlar, y un análisis de control más profundo.

## Limitaciones reales típicas

Sería muy ambicioso señalar todos los problemas que podrían aparecer en una aplicación real de un controlador PID. En cambio, nos proponemos señalar algunas limitaciones usuales que alejan a nuestro sistema real de nuestro modelo ideal lineal invariante en el tiempo y sin ruidos molestos. En este sentido enumeramos algunas situaciones.

### Saturación del actuador

La saturación del actuador es consecuencia de que todo actuador posee una potencia máxima que puede aplicar. Esto es tal vez el limitante más evidente de un modelo ideal de un controlador lineal. En primer lugar, impone un límite físico al mínimo tiempo de crecimiento y de establecimiento para un sistema.

En el caso de un controlador proporcional, además nos obliga a evaluar una cota máxima posible de  $K_p$ . Si aumentáramos indefinidamente este parámetro, no sólo no lograríamos bajar el tiempo de crecimiento de la variable controlada, sino que nuestro controlador proporcional se terminaría convirtiendo en un controlador sí-no.

En el caso de un controlador integral o proporcional-integral, esta saturación introduce un problema extra que se denomina efecto enrole o *wind-up*, que describiremos más adelante.

### Ruido del sensor

El ruido clásico de un sensor consiste en la lectura de valores aleatorios respecto de un valor medio. Si este ruido es muy grande, puede ser otro limitante para el valor máximo de  $K_p$  en un controlador proporcional. En particular, no es deseable que el ruido genere la saturación del actuador. Este problema afecta también la componente derivativa, que amplifica las variaciones de las lecturas.

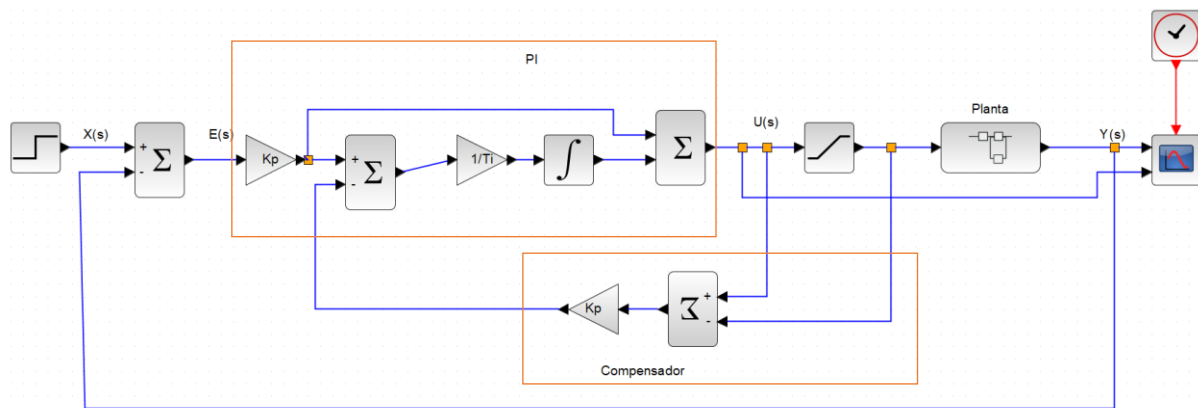
Otra manifestación de error del sensor es su cuantificación debido al proceso de digitalización de la señal. Un sensor de temperatura, por ejemplo, puede poseer baja aleatoriedad. Sin embargo, al momento de pretender implementar un control derivativo, puede ocurrir que sólo detecte cambios en el salto de un nivel de cuantificación a otro. De este modo, una variación lenta puede registrarse como un tren de impulsos. En este caso, la solución también podría ser un filtro pasabajo, aunque haría más complejo al sistema.

Afortunadamente, la componente integral sí puede contrarrestar bastante bien el ruido de un sensor.

## Efecto enrole

Es posible que el modelo lineal de un controlador con componente integral no tenga sobrevalor pero su implementación práctica sí. En ocasiones esto se debe a la saturación del actuador. Resulta que, cuando el actuador satura y esto no es tenido en cuenta, el integrador irá sumando en su cuenta más error pero no más acción de control (ya que el actuador llegó a su límite de potencia). Esto deriva en que la integración tienda a superar el nivel necesario para mantener a la variable controlada en su valor deseado.

Una forma de resolver este problema es restando en la integral la diferencia entre la señal de control sin saturar y el valor de señal de control posible de implementar prácticamente incluyendo su saturación. Este tipo de compensación se esquematiza en la figura 9, utilizando la herramienta xcos de Scilab. Una implementación en C++ puede encontrarse en [https://github.com/sca-undav/Control\\_PID](https://github.com/sca-undav/Control_PID) (Caporaletti & Castellano, 2024).



**Figura 10.** Controlador PI con compensación para evitar efecto enrole.

## Polos y ceros que no se anulan

Especialmente cuando se agregan ceros en el lazo de control –ya sea por un controlador PI, PD o PID–, puede ocurrir que un cero coincida matemáticamente con un polo y se dé la falsa impresión de que se anulan. El efecto en las simulaciones puede ser que el sistema se torne increíblemente rápido. Algo de esto se ve en la figura 6 para  $T_D = 1$ . En ese caso, el cero del control PD coincide exactamente con un polo de la planta.

Sin embargo, para que esta simulación se corresponda con una aplicación real, debe verificarse que la señal no sature en ningún punto del lazo y además que el ruido no afecte a la configuración elegida.

Una forma de verificar esto es utilizando la herramienta `xcos` de Scilab. Otra, complementaria, es simulando la respuesta en la salida del actuador. Si suponemos que la transferencia es 1 en su rango dinámico, resultará:

$$T(s) = \frac{U(s)}{X(s)} = \frac{PID(s)}{1 + PID(s) * G(s)} \quad (10)$$

Donde  $X(s)$  es la señal de entrada,  $PID(s)$  es el controlador configurado y  $G(s)$ , la transferencia de la planta. Esta transferencia permite evaluar la acción de control  $u(t)$  y verificar los valores máximos alcanzados.

## Métodos de sintonización

A modo introductorio, se enumeran algunos de los métodos de ajuste y sintonización más conocidos de un controlador PID:

- **Método de Ziegler-Nichols a lazo abierto:** Se analiza la respuesta de la planta ante un escalón y se miden algunos parámetros característicos. En función de estos parámetros, se configuran los parámetros del tipo de controlador deseado: proporcional, PI o PID. Es aplicable a respuestas al escalón con forma de S, es decir: que no tengan sobrevalor. En situaciones reales, tiene el limitante de que debe ser posible actuar a lazo abierto. Consultar (Ogata, 2010, pág. 567), (AADECA, 1994).
- **Método de Ziegler-Nichols a lazo cerrado:** Se va aumentando la ganancia hasta que el sistema entre en una oscilación permanente. En función del valor de ganancia  $K_p$  en ese punto y del período de esa oscilación se configuran los parámetros del controlador P, PI o PID.
- **Sintonización empírica:** Se ajusta los parámetros del controlador PID de a uno y se va evaluado su resultado. Lo usual es comenzar con  $K_p$ , luego  $T_i$  y finalmente  $T_D$ . Según el tipo de sistema, de aplicación y de objetivo, se puede configurar  $T_D$  antes que  $T_i$ . Este procedimiento se puede realizar de forma iterativa varias veces. La desventaja es el tiempo que requiere y que, sin un modelo del sistema, hasta cierto punto se trabaja a ciegas. Se puede utilizar la configuración de alguno de los métodos de Ziegler-Nichols como punto de partida. Si se tiene un modelo de la planta, primero puede realizarse el procedimiento mediante simulación para luego implementarlo prácticamente. Consultar Kuo (1996, pág. 708).
- **Método del Lugar Geométrico de las Raíces (LGR):** Se analiza la ubicación de los polos del sistema para las diversas configuraciones de  $K_p$ ,  $T_i$  y  $T_D$ . Para esto es imprescindible un modelo de la planta. En parte implica prueba y error como con la sintonización empírica, aunque teniendo más elementos sobre los posibles riesgos que encierra cada configuración. Por otra parte, es siempre más rápido simular teóricamente que medir en forma real. Exige que el modelo represente adecuadamente a la planta y puede requerir una sintonización empírica al momento de su implementación práctica.
- **Análisis a lazo abierto del dominio de frecuencia:** Al igual que el LGR consiste en simulaciones a partir de un modelo, aunque analizando la respuesta en frecuencia del sistema a lazo abierto en lugar de la ubicación de los polos. Incluye el método de compensación por adelanto-atraso (Kuo, 1996, pág. 714). Permite establecer o garantizar márgenes de ganancia y fase.
- **Sintonización automática:** Disponible generalmente en los equipos industriales, a partir de un algoritmo incorporado por el proveedor. Puede ser también el punto de partida para una sintonización empírica posterior.

# Anexos y Bibliografía





# Anexo A:

## Transformada de Laplace

Utilizamos la transformada de Laplace para simplificar la matemática de los problemas de control. “El propósito de usar una transformación es crear un nuevo dominio en el cual sea más fácil manipular el problema investigado” (James, 2013, pág. 98). La transformada de Laplace en particular toma una función  $f(t)$  de variable tiempo  $t$  y la transforma a una función  $F(s)$  de variable frecuencia compleja  $s$ . Este método permite transformar una ecuación diferencial de coeficientes constantes en el dominio de  $t$  en una ecuación algebraica en el dominio de  $s$ . En este anexo puntualizamos algunas de las definiciones y las propiedades más utilizadas.

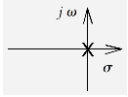
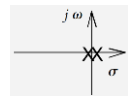
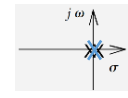
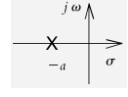

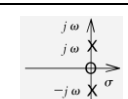
### Definición y ejemplos

La transformada de Laplace se define como:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (\text{A.1})$$

En base a esta definición esto podemos confeccionar la tabla A.1 (Hernández Gaviño, 2010, pág. 27) (James, 2013, pág. 113) (Spiegel, 1971).

**Tabla A.1.** Casos de transformada de Laplace

Función en el tiempo $f(t)$	$\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$	Lugar de polos y ceros
$c * u(t)$ o función escalón	$\frac{c}{s}$	
$t$ o función rampa	$\frac{1}{s^2}$	
$t^n$ , siendo $n$ un entero positivo	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	
$e^{kt}$ , siendo $k$ una constante	$\frac{1}{s - k}$	
$\text{sen}(at)$ , siendo $a$ una constante real	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	
$\text{cos}(at)$ , siendo $a$ una constante real	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	

## Propiedades

Enumeramos algunas propiedades en la tabla. Notar que en algún caso el resultado involucra valores de las condiciones iniciales. Como en las funciones de transferencia de sistemas de control suponemos condiciones iniciales nulas, en general no tendremos en cuenta esos valores.

**Tabla A.2.** Propiedades básicas de la transformada de Laplace

Denominación	Expresión matemática
Linealidad	$\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha F(s) + \beta G(s)$
Transformada de la derivada	$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = sF(s) - f(0)$
Transformada de la integral	$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t)dt\right) = \frac{F(s)}{s}$
Teorema de traslación en $s$	$\mathcal{L}(e^{\alpha t} f(t)) = F(s - \alpha)$
Traslación en $t$ o teorema de retraso	$\mathcal{L}(f(t - \delta) * u(t - \delta)) = e^{-\delta s} F(s)$
Descomposición en fracciones simples	$\frac{D(s)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} = \frac{A}{(s + p_1)} + \frac{B}{(s + p_2)} + \dots + \frac{N}{(s + p_n)}$

## Teorema del valor final

Si  $f(t)$  y su derivada son transformables en Laplace y si existe  $f(t)$  cuando  $t$  tiende a infinito:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (\text{A.2})$$

Este teorema es utilizado comúnmente para averiguar el valor en estado estacionario de una transferencia determinada cuando la entrada es un escalón. Por ejemplo, si nuestra transferencia en cuestión es  $G(s)$ , la respuesta al escalón unitario será:

$$Y(s) = \frac{1}{s} G(s) \quad (\text{A.3})$$

De este modo, aplicando el teorema del valor final llegamos a:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} G(s) = G(0) \quad (\text{A.4})$$

Como resultado, podemos interpretar que el valor de estado estacionario (cuando  $t$  tiende a infinito) ante una entrada escalón unitario equivale a la transferencia  $G(0)$ , en la frecuencia compleja 0 o referenciado también como su valor de continua.

# Anexo B:

## Cuadrados mínimos para la obtención de parámetros

Con el objetivo de obtener valores de parámetros de nuestro sistema, resumimos el método de cuadrados mínimos utilizando códigos de Scilab. Aunque antes, algunos comentarios sobre el procedimiento de medición y análisis de datos:

1. El método de cuadrados mínimos se utiliza generalmente como un **análisis en el dominio del tiempo**. Esto es: se excita el sistema con una señal de prueba, se mide el resultado y se analiza la respuesta en el tiempo.
2. La **selección de la señal de prueba** es una decisión importante del experimento. Típicamente puede ser: un escalón, un impulso, una rampa o un tren de pulsos. La selección de esta señal de prueba se debe adaptar a nuestro sistema, y a veces también al parámetro que deseamos obtener.
3. De la señal resultante, por lo general será necesario **extraer un intervalo de tiempo**. Esto se debe a que es usual que la respuesta presente algunas características que cualitativamente no coincidan con la estimación del modelo. Por ejemplo: la existencia de sobrevalores, retardos u oscilaciones no previstas. Además, la propia señal de prueba puede tener características no ideales. Por este motivo, si persistimos en aproximar nuestro modelo al sistema real, debe elegirse un intervalo adecuado.

Entonces, elegido un intervalo de la señal medida podemos iniciar el procedimiento de aproximarlos a una función del modelo y sus parámetros.

El método de cuadrados mínimos es una técnica utilizada para encontrar la mejor aproximación de un conjunto de datos a un modelo lineal o no lineal, minimizando la suma de los cuadrados de los errores entre los datos observados y los valores predichos por el modelo. Aquí mostramos cómo aplicar el método de cuadrados mínimos lineales en Scilab, y también cómo utilizar la función de cuadrados mínimos no lineales.

### Ejemplo lineal en Scilab

El caso más simple de cuadrados mínimos es ajustar una línea recta (modelo lineal) a un conjunto de puntos, es decir, encontrar los coeficientes  $a$  y  $b$  de la ecuación:

$$y = a * x + b \quad (1)$$

Los pasos para aplicar cuadrados mínimos lineales en Scilab son :

1. **Datos del intervalo:** Se debe tener un conjunto de puntos  $x$  e  $y$  que representan los datos observados. Consideramos  $n$  muestras.
2. **Crear la matriz del sistema:** En cuadrados mínimos, representamos el modelo en forma matricial como  $A\theta = Y$ , donde:
  - $A$  es la matriz de  $n \times 2$  que contiene las variables  $x$  en su primer columna y unos en su segunda columna.
  - $\theta$  es el vector (o matriz de  $2 \times 1$ ) con parámetros a estimar:  $a$  y  $b$ .
  - $Y$  es el vector (o matriz de  $n \times 1$ ) de las observaciones para cada elemento  $x$ .
3. **Utilizar la fórmula de cuadrados mínimos:** La solución por cuadrados mínimos se obtiene utilizando la ecuación:

$$\theta = (A^T A)^{-1} A^T Y \quad (2)$$

Scilab ofrece una función más eficiente para resolver este tipo de problemas, que es  $A \backslash y$ , equivalente a la pseudo-inversa.

---

### Código B.1. Cuadrados mínimos lineales en Scilab

---

```
// Datos del ejemplo
x = [ 50, 60, 70, 80, 100, 120, 140, 165]';
y = [30.19,34.00,38.00,41.94,49.50,57.81,67.31,77.25]';

// Crear la matriz del sistema
// (columna de x y columna de unos para el término independiente)
A = [x, ones(x)]; // A es una matriz con la forma [x 1]

// Resolver el sistema de ecuaciones por cuadrados mínimos
theta = A \ y;

// Extraer los parámetros a y b
a = theta(1); // Pendiente
b = theta(2); // Intercepto

// Mostrar los resultados
disp("Pendiente a = " + string(a));
disp("Intercepto b = " + string(b));

// Graficar los datos
close()
plot(x, y, 'x') // Puntos de datos
xtitle('Ajuste por cuadrados mínimos', 'x', 'y')

// Graficar la línea ajustada
xModel = linspace(min(x)-20, max(x), 100); // Valores de x
yModel = a * xModel + b; // Ecuación de la línea ajustada
plot(xModel, yModel, '-r') // Línea ajustada en rojo
legend('Datos', 'Ajuste Lineal')

// Cálculos extras
C = 1800 / a
t0 = (23.44-b) / a
disp("Capacidad = " + string(C))
disp("Retardo = " + string(t0-15));
```

---

En el ejemplo,  $x$  corresponde al tiempo en segundos e  $y$  a valores de temperatura de una pava eléctrica cuando se está calentando. La pendiente permite calcular la capacidad calorífica del sistema según la ecuación:

$$P = C * \frac{dT}{dt} \quad (3)$$

Donde  $P$  es la potencia,  $C$  es la capacidad térmica,  $T$  la temperatura y  $t$  el tiempo. Esa pendiente corresponde al parámetro  $a$ . En este caso la potencia son 1800 W, por lo que la ecuación se transforma en:

$$C = \frac{1800 \text{ W}}{a} \quad (4)$$

Por otra parte, en el código puesto de ejemplo se calcula un retardo teniendo en cuenta que la pava se encendió en los 15 segundos y tenía una temperatura de 23,44 °C.

## Ejemplo no lineal en Scilab

En Scilab, para resolver problemas de ajuste no lineal se puede usar la función `datafit` o `leastsq`, que implementa la optimización de cuadrados mínimos para modelos no lineales. Si, por ejemplo, se tiene un modelo exponencial:

$$y = C * e^{-\frac{x-x_0}{\tau}} + B \quad (5)$$

Es posible utilizar `leastsq` para encontrar los valores de  $\tau$ . Damos un ejemplo posible:

---

### Código B.2. Cuadrados mínimos no-lineales en Scilab

---

```
// Datos de ejemplo
x = [ 250, 300, 400, 600, 1000, 1400, 1620]'; // Tiempo
y = [83.94, 82.50, 79.75, 75.06, 67.81, 62.38, 60.00]'; // Temperatura
Vi = 83.94;
Vf = 23.27;
t0 = 250;

// Definir la función de error que queremos minimizar
function err=modeloExp1(p, x, y)
    tau = p(1);
    //t0 = p(2);
    yModel = (Vi-Vf) * exp(-(x-t0)/tau) + Vf; // Modelo 1er orden
    err = y - yModel; // Error entre datos reales y modelo
endfunction

// Estimación inicial de los parámetros tau
p0 = [2000];

// Utilizar la función leastsq para minimizar el error
[err, p_opt] = leastsq(list(modeloExp1, x, y), p0);

// Mostrar los parámetros optimizados
disp("Parámetro tau = " + string(p_opt(1)));
//disp("Parámetro t0 = " + string(p_opt(2)));

// Graficar los datos
close()
plot(x, y, 'x'); // Datos
xtitle('Ajuste por cuadrados mínimos', 'Tiempo', 'Temperatura')
```

```
// Graficar el modelo ajustado
xModel = linspace(min(x), max(x), 100);
yModel = (Vi-Vf) * exp(-(xModel-t0)/p_opt(1)) + Vf;
plot(xModel, yModel, '-r'); // Curva ajustada en rojo
legend('Datos', 'Ajuste Exponencial')
```

---

En el código definimos la función de error `modeloExp1` que representa la diferencia entre los datos reales y el modelo. El modelo representa una solución general del estado transitorio de un sistema de primer orden. En `p0` asignamos la estimación inicial. A la función `leastsq()` le pasamos por parámetro: la función error, los valores observados y la estimación inicial. Finalmente se grafican los valores observados y la curva aproximada.

En el ejemplo, se utiliza esta función para ajustar sólo un parámetro. Se ha programado la función `modeloExp1` de modo que los valores en  $t_0=250$  y en infinito sean invariables. Sin embargo, puede modificarse el código para ajustar la cantidad que se quiera de parámetros.

# Bibliografía

- AADECA. (1994). *Performance de lazos de control N° 3* (Vol. 2). Buenos Aires, Argentina.
- Adams, E. J. (2020). *Instrumentación y control de procesos*. Santa Fe, Argentina: Ediciones UNL.
- Baird, D. C. (1991). *Experimentación: Una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos* (Segunda ed.). Naucalpan de Juárez, México: Prentice-Hall Hispanoamericana.
- Caporaletti, G. F., & Castellano, J. M. (2024). *Repositorio del curso de Sistemas de Control Automático (UNDAV)*. Obtenido de <https://github.com/sca-undav>
- Fusario, R. J., Crotti, P. S., Bursztyn, A. P., & Civalé, O. O. (2012). *Teoría de control para informáticos*. Buenos Aires, Argentina: Alfaomega Grupo Editor Argentino.
- Hernández Gaviño, R. (2010). *Introducción a los sistemas de control: conceptos, aplicación y simulación con Matlab*. Naucalpan de Juárez, México: Pearson.
- James, G. (2013). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. Pearson.
- Kuo, B. (1996). *Sistemas de control automático* (Séptima ed.). México, México: Prentice Hall Hispanoamericana.
- Ogata, K. (1993). *Ingeniería de control moderna* (Segunda ed.). México, México: Prentice Hall Hispanoamericana.
- Ogata, K. (2010). *Ingeniería de control moderno* (Quinta ed.). Madrid, España: Pearson.
- Spiegel, M. R. (1971). *Transformada de Laplace*. McGraw Hill.