

Министерство образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

"Московский физико-технический институт (национальный
исследовательский университет)"

Физтех-школа фундаментальной и прикладной физики

Факультет проблем физики и энергетики

Кафедра электродинамики сложных систем и нанопотоники

**Исследование свойств оптических волокон с брэгговскими
решётками для сенсорных применений**

Выпускная квалификационная работа
(бакалаврская работа)

Направление подготовки: 03.03.01 Прикладные математика и физика

Работу выполнил:

студент 685 группы

Барсегян Сергей Симонович

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., член-корр. РАН

Дорофеенко Александр Викторович

Москва, 2020

Содержание

Аннотация	2
Введение	3
1 Эффект Кречмана	4
2 Моды волновода	5
3 Брэгговская решётка	7
4 Наклонная Волоконная Брэгговская Решётка	8
4.1 Собственные оптические свойства наклонной решётки	9
5 Теория Наклонной Брегговской решётки	10
5.1 Влияние угла наклона, длины и силы решётки	10
6 Собственные свойства сенсора	12
7 Заключение	12
Список литературы	14

Аннотация

Введение

Индуктирование плазмонного резонанса в системе с напылением проводящего слоя на диэлектрики различной конфигурации (призма или цилиндр) открывают возможность создать очень чувствительный к внешним параметрам сенсор.

Физическое явление которое легло в основание данной схемы было предложено Кречманом и Отто. Для производства сенсоров наиболее применимой и удобной является схема Кречмана которая является фундаментом для построения схемы рассмотренной в данной работе. Световой пучок падает на сэндвич из диэлектрика с $\epsilon_p > 1$ и слоя с металлическим напылением испытывая полное внутренне отражение. В идеализированной ситуации коэффициент отражения равен единице, однако при некотором угле падения возникает резкое падение коэффициента отражения вызванное скачком интенсивности поля у металла. В литературе это называют нарушенным полным внутренним отражением (НПВО).

Данная конфигурация очень полезна так-как позволяет посчитать ϵ среды граничащей с металлом по расположению скачка коэффициента отражения из-за чувствительности данной схемы к свойствам материала.

В данной же работе будет исследована цилиндрическая конфигурация с наклонной брегговской решёткой.

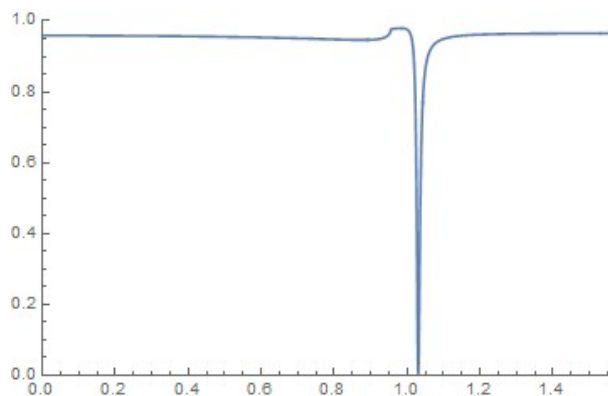
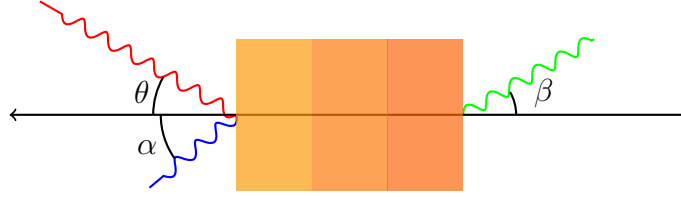


Рис. 1:

Благодарности

В первую очередь, хочется поблагодарить моего научного руководителя А.В. Дорофеевского без которого было бы невозможным написание данной работы и чья неоценимая помощь и руководство помогли её завершить. Автор также признателен А.П. Виноградову за лекции по электродинамике композитов прочтённые им в ИТПЭ, которые помогли сформировать представления автора об этой новой области науки и чьи наставления значительно повлияли на мировоззрение автора. Особенную благодарность заслуживает А.А. Пухов, сыгравший ключевую роль в образовании и становлении автора как учёного, за его лекции по квантовой механике, статистической физике, колебаниям и волнам живая и интересная подача которых возбудила неутолимый интерес автора к теоретической физике. Его вера в автора не давала сдаваться перед лицом трудностей, а благочестивые нравоучения направляли на пути познания. Кроме того, автор благодарен А.М. Мерзликину за очень содержательные и познавательные семинары предмет которых затруднительно вспомнить.

1 Эффект Кречмана



Рассмотрим падение света на слоистую среду под углом θ_1 с коэффициентами диэлектрической проницаемостями $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ соответственно. На границе каждой среды можно записать закон Снеллиуса.

$$\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

$$\frac{\sin \theta_3}{\sin \theta_2} = \frac{n_3}{n_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}}$$

Наша цель посчитать коэффициенты отражения и прохождения для такой слоистой системы. В этой задаче очень полезен метод T -матриц. Обозначим коэффициент отражения через r , и коэффициент прохождения через t .

Тогда на матричном языке можно задать взаимосвязь между этими величинами. А именно распишем амплитуды волн слева и справа.

$$\vec{E} = \vec{E}(x)e^{i(\omega t - \beta z)}$$

$$E(x) = \begin{cases} E_1 e^{ik_1 x} + E_1' e^{-ik_1 x}, & x < 0 \\ E_2 e^{ik_2 x} + E_2' e^{-ik_2 x}, & 0 < x < d \\ E_3 e^{ik_3(x-d)} + E_3' e^{-ik_3(x-d)}, & x > d \end{cases}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} e^{ik_2 d} & 0 \\ 0 & e^{-ik_2 d} \end{pmatrix}$$

$$S_{21} = \frac{1}{2Z_2} \begin{pmatrix} Z_2 + Z_1 & Z_2 - Z_1 \\ Z_2 - Z_1 & Z_2 + Z_1 \end{pmatrix}$$

$$S_{32} = \frac{1}{2Z_3} \begin{pmatrix} Z_3 + Z_2 & Z_3 - Z_2 \\ Z_3 - Z_2 & Z_3 + Z_2 \end{pmatrix}$$

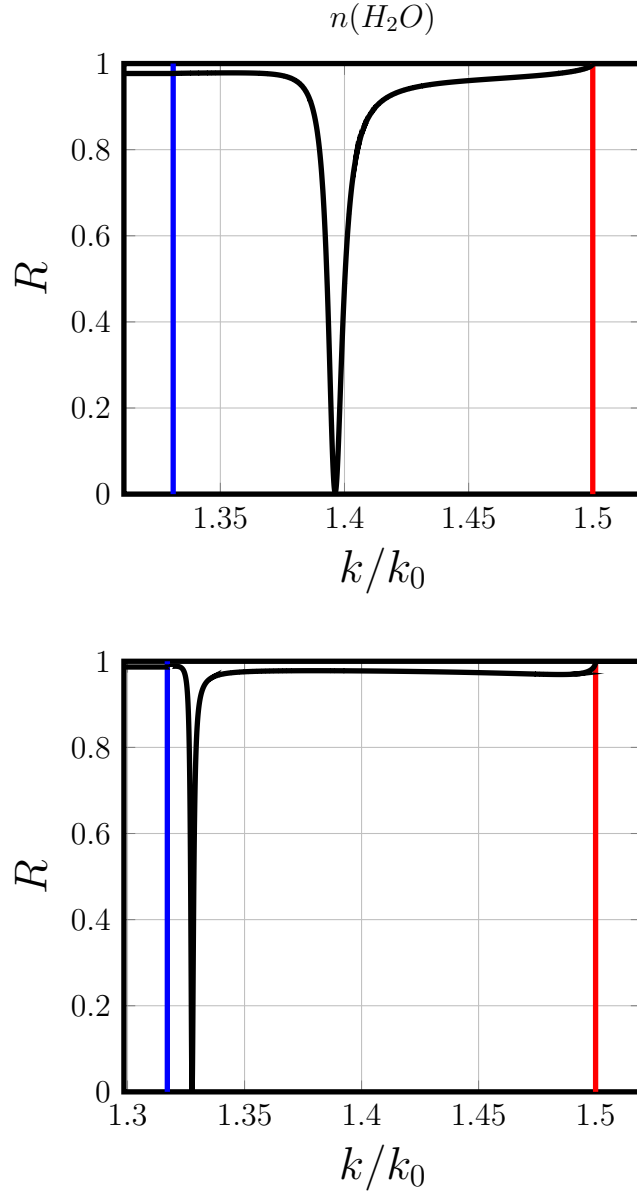
Где $Z_i = \frac{k_{zi}}{k_0}$ для s -поляризации и $Z_i = \frac{k_{zi}}{\varepsilon_i k_0}$ для p -поляризации

$$k_{zi} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_i - k_x^2}$$

$$k_x = k_0 \sin \theta$$

$$S_{32} P_2 S_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решая эту систему уравнений относительно r получаем зависимость коэффициента отражения от угла падающей волны. Для p -поляризации при определённой калибровке толщины металлического слоя (условие на Кречманна???) можно наблюдать, что при некотором угле амплитуда отражённой волны полностью зануляется, что часто называют нарушенным полным отражением или эффектом Кречманна. Данный имеет колоссальный потенциал для приложений.



2 Моды волновода

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial D}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = -i\omega \varepsilon E_r \quad (2)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = -i\omega \varepsilon E_\varphi \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = -i\omega \varepsilon E_z \quad (4)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = i\omega \mu H_r, \quad \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = i\omega \mu H_\varphi \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = i\omega \mu H_z \quad (6)$$

$$E_r = \frac{1}{k^2 - h^2} \left(i\hbar \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{i\omega\mu}{r} \frac{\partial H_3}{\partial \varphi} \right) \quad (7)$$

$$E_\varphi = \frac{1}{k^2 - h^2} \left(\frac{i\hbar}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - i\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \quad (8)$$

$$H_r = \frac{1}{k^2 - h^2} \left(i\hbar \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{i\omega e}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \right) \quad (9)$$

$$H_\varphi = \frac{1}{k^2 - h^2} \left(\frac{i\hbar}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + i\omega e \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + (k^2 - h^2) U = 0 \quad (11)$$

$$U = F(r)e^{im\varphi} \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \left(u^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) F = 0 \quad (13)$$

$$E_z^{(1)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m J_m(ur) \cos m\varphi \exp(ihz - i\omega t) \quad (14)$$

$$H_z^{(1)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m J_m(ur) \cos(m\varphi + \beta_m) \exp(ihz - i\omega t)$$

$$E_z^{(2)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m K_m(vr) \cos m\varphi \exp(thz - i\omega t) \quad (15)$$

$$H_z^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty} D_m K_m(vr) \cos(m\varphi + \beta_m) \exp(ihz - i\omega t) \quad (16)$$

$$v = \sqrt{h^2 - k_2^2}, k_3 \leq h \leq k_1 \quad (17)$$

$$E_\varphi^{(1)} = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[A_m \frac{imh}{u^2 r} J_m(ur) \sin m\varphi - \right. \\ \left. - B_m \frac{i\omega\mu}{u} J'_m(ur) \cos(m\varphi + \beta_m) \right] \quad (18)$$

$$H_\varphi^{(1)} = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[B_m \frac{imh}{u^2 r} J_m(ur) \sin(m\varphi + \beta_m) + \right. \\ \left. + A_m \frac{i\omega e_1}{u} J_m(ur) \cos m\varphi \right] \quad (19)$$

$$E_\varphi^{(2)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[C_m \frac{imh}{v^2 r} K_m(vr) \sin(m\varphi + \beta_m) - \right. \\ \left. - D_m \frac{i\omega\varepsilon_2}{v} K'_m(vr) \cos m\varphi \right] \quad (20)$$

$$H_\varphi^{(2)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[D_m \frac{imh}{v^2 r} K_m(vr) \sin(m\varphi + \beta_m) - \right. \\ \left. - C_m \frac{i\omega\varepsilon_2}{v} K'_m(vr) \cos m\varphi \right] \quad (21)$$

$$-A_m \frac{mh}{p^2} J_m(p) \sin m\varphi - B_m \frac{\omega\mu}{p} J'_m(p) \cos(m\varphi + \beta_m) = \quad (22)$$

$$= C_m \frac{mh}{q^2} K_m(q) \sin m\varphi + D_m \frac{\omega\mu}{q} K'_m(q) \cos(m\varphi + \beta_m) \quad (23)$$

$$A_m J_m(p) = C_m K_m(q)$$

$$-B_m \frac{mh}{p^2} J_m(p) \sin(m\varphi + \beta_m) + A_m \frac{\omega e_1}{p} J'_m(p) \cos m\varphi \quad (24)$$

$$= D_m \frac{mh}{q^2} K_m(q_1) \sin(m\varphi + \beta_m) - C_m \frac{\omega e_9}{q} K'_m(q) \cos m\varphi$$

$$B_m J_m(p) = D_m K_m(q)$$

$$[f_m(p) + g_m(q)] \left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_s} f_m(p) + g_m(q) \right] \quad (25)$$

$$= \frac{m^2 b^2}{k_2^2} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right)$$

$$= \frac{\sin m\varphi \sin(m\varphi + \beta_m)}{\cos m\varphi \cos(m\varphi + \beta_m)}$$

$$f_m = \frac{J'_m(p)}{p J_m(p)}, \quad g_m(q) = \frac{K'_m(q)}{q R_m(q)} \quad (26)$$

$$p^2 + q^2 = a^2 (k_1^2 - k_2^2) \quad (27)$$

$$[f_m(p) + g_m(q)] \left[\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} f_m(p) + g_m(q) \right] = \frac{m^2 h^2}{k_2^2} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right)^2 \quad (28)$$

3 Брэгговская решётка

После открытия способа получения решёток с показателем преломления в оптических волокнах открыло совершенно новый класс светопроводящих устройств с маленькими вносимыми потерями и очень гибким спектральным коэффициентом пропускания. Этому способствовало изобретение процесса внешней записи, где периодический профиль ультрафиолетового света полученный в следствии интерференции двух лучей используется для копирования периодической структуры интерференционной картины в областях волокон, где происходят фотохимические реакции между ультрафиолетовыми фотонами и стеклом.

Эти так называемые Волоконные Брэгговские Решётки получившие своё название из-за сходства с голографической дифракционной решёткой Брега в которой луч направлен в сердцевину волокна. Волоконные Брегговские Решётки широко используются для стабилизации лазерных диодов накачки, температурных сенсорах, акустике, при мультиплексировании длин волн, уплотнения коэффициента усиления, компенсации рассеивания в оптических системах сообщения и всё больше в зеркалах резанаторов волоконных лазеров.

Волоконные брэгговские решётки, кроме всего прочего, представляют ещё и из-за того, что их коэффициент пропускания с высокой точностью очень легко настраиваем для нужд производства с наперёд заданными характеристиками. В данной работе главную роль будет играть частный случай волоконных брегговских решёток а именно наклонные брэгговские решётки в литературе именуемые как TFBG (Tilted Fiber Bragg Gratings).

4 Наклонная Волоконная Брэгговская Решётка

Чтобы понять физику наклонных волокон удобно рассмотреть спектры коэффициентов пропускания и отражения пары идентичных решёток наклонённые относительно друг друга на 10 градусов. Можно выделить два важных случая: случай нормальной волоконной брэгговской решётки у которой только один сильный резонанс. К примеру провал в спектре пропускания соответствует условию Брэгга для периода решётки в этом волокне и тот же резонанс появляется как одиночный пик в спектре отражения. Длина волна λ_B соответствующая брэгговскому резонансу самая большая так эффективный показатель преломления для одной моды направленной вдоль сердцевинки самый большой.

В дополнение к брэгговскому резонансу, спектр наклонной решётки Брэгга имеет большое количество сопутствующих резонансов, но только в спектре пропускания. Эти резонансы возникают из-за взаимодействия мод друг с другом. Оболочечные моды не видны в спектре отражения так как исчезают из-за потерь в оболочке. Когда решётка наклонена, самый существенный эффект это значительное усиление оболочечных мод за счёт основной. Ближайший к брэгговскому резонанс обычно сильнее своего оболочечного соседа со коротковолновой стороны и называется "призрачной" модой так как по своим свойства она очень похожа на брэгговский резонанс, но является суперпозицией нескольких оболочечных мод малого порядка. В спектре пропускания наклонной решётки есть значение около 1530 нм где непрерывность в оболочечной моде теряется после которой (в коротко волновую сторону) наблюдается резкое убывание резонансных амплитуд. Этот эффект объясняется переходом от направленных оболочечных мод к оболочечным модам с потерями.

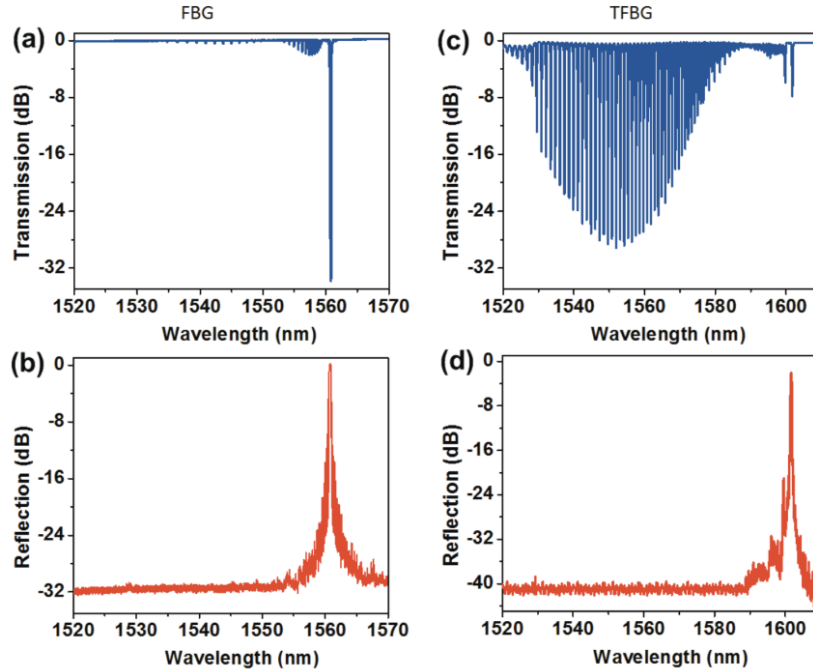


Рис. 2:

Дифракция на решётке проходит эффективно тогда и только тогда удовлетворены два условия: закон сохранения импульса (иначе говоря фазы совпадают)

$$\beta_i \pm \beta_G = \beta_j$$

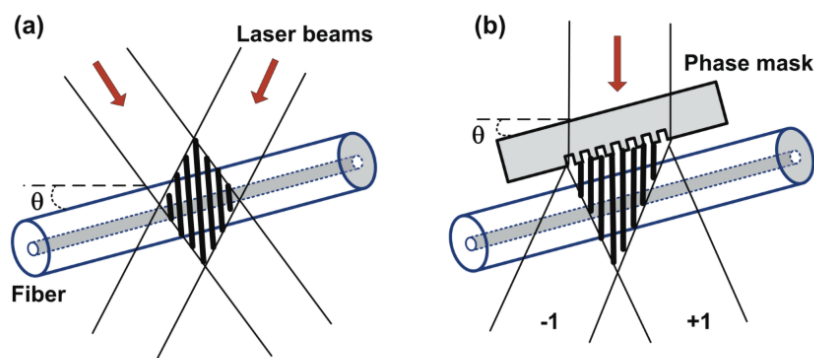


Рис. 3:

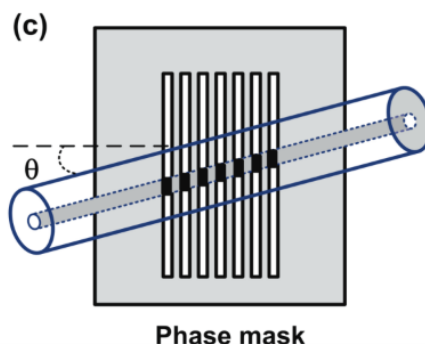


Рис. 4:

4.1 Собственные оптические свойства наклонной решётки

С увеличением угла наклона огибающая взаимодействующих резонансов смещается в коротковолновую сторону. Самая часто используемая и полезная конфигурация удобная для химических сенсоров это угол в 10 градусов так как эффективный коэффициент преломления её преобладающей оболочечной резонансной моды перекрывает очень важную область около значения 1.3.

Очень сильные резонансные взаимодействия (потеря пропускания около 20 dB соответствующая захвату 99% входного света оболочечной модой с определённой частотой) достигается с похожей шириной резонанса что и в нормальной решётке, примерно 0.1 нм для решётки длиной 1 см. Также возможно участить период решётки и тем самым расширить резонансы и даже сделать их полностью перекрывающимися получив гладкий пропускной фильтр. Абсолютные и относительные амплитуды Брэгговского резонанса и призрачная мода значительно изменяются с углом наклона.

Хотя брэгговский резонанс присутствует только в отражении в дальнейшем мы покажем, что отражающая оболочечная мода сенсора может быть имплементирована с помощью разных связующих сред для области сердцевина-оболочка. Другой опцией является использование наклонной решётки в отражающей конфигурации поставив рефлектор дальше от решётки так чтобы свет прошёл бы через наклонную решётку дважды и вернулся бы к источнику. В своём простейшем исполнении, хорошая щель обеспечит широкополостное отражение пары процентов падающего света достаточное для измерения пропускных резонансов оболочечной моды. Для более эффективного использования света, можно накрыть зеркальной прослойкой (золото

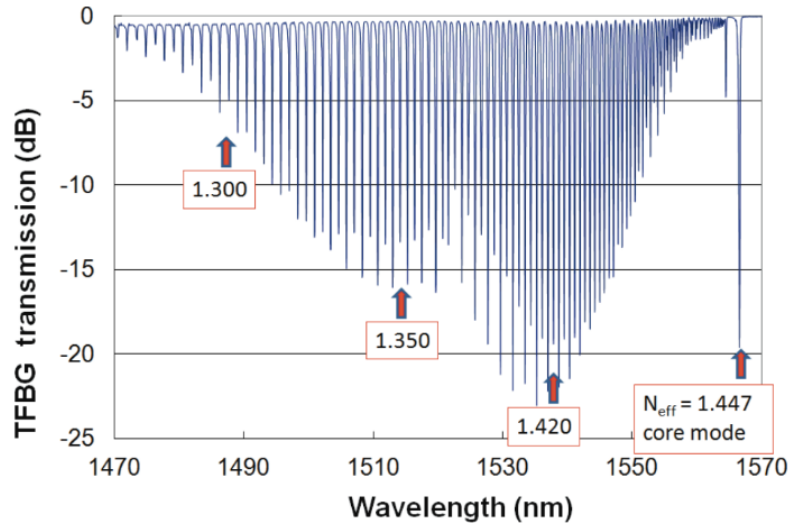


Рис. 5:

или серебро) на последующей выемке для 100% отражения падающего света. Другой вариант для отражателя может быть сделан и обычной прямой брэгговской решётки с подобранным спектром отражения так чтобы желанный волновой диапазон спектра наклонной решётки отражался как показано на рисунке.

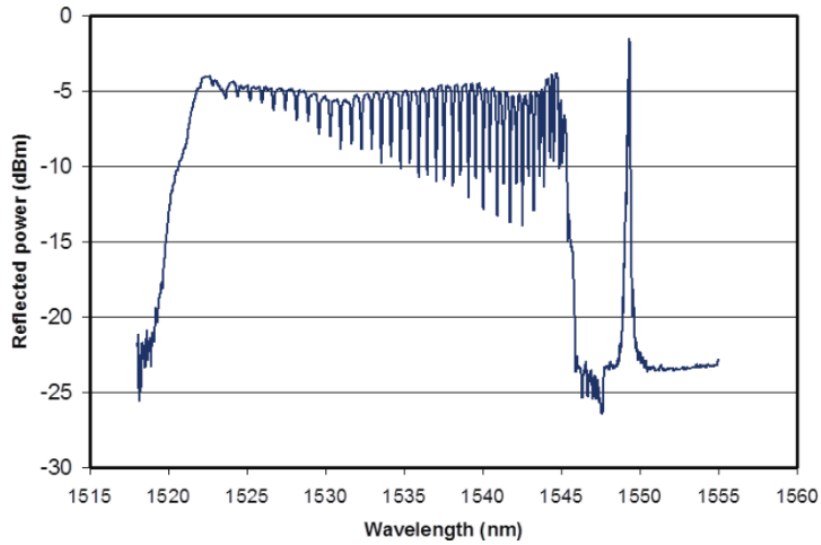


Рис. 6:

Ещё одним важным параметром является поляризация света. Поляризация очень сильно влияет на спектра наклонной решётки

5 Теория Наклонной Брегговской решётки

5.1 Влияние угла наклона, длины и силы решётки

Для начала можно переписать условие совпадения фаз в более удобной форме. Так для длины волны λ_r резонанса решётки между основной моды и другой обозначенной через r

$$\lambda_r = (N_{\text{eff}}^{\text{core}}(\lambda_r) + N_{\text{eff}}^r(\lambda_r)) \Lambda / \cos(\theta)$$

Где Λ период интерференционных полос используемых] для создания решётки, θ угол наклона плоскости решётки относительно плоскости поперечного сечения. $N_{\text{eff}}^{\text{core}}(\lambda_r)$ эффективный коэффициент преломления одной моды направленной через сердцевину на длине волны на которой наблюдается резонанс λ_r b

$$N_{\text{eff}}^r(\lambda_r)$$

эффективный коэффициент преломления моды r на той же длине волне. Важно учитывать дисперсию так как резонансы оболочечной моды возникают на сравнительно широком спектральном промежутке (Более 100 нм в случае угла наклона в 10 градусов).

Сила решёточного резонанса (отражательная мощность R) зависит от коэффициента перекрытия κ между падающей основной модой и той модой которая совпадает с ней по фазе. Так для решётки длиной L Отражательная мощность выражается через

$$R = \tanh^2(\kappa L)$$

$$\kappa = C \iint_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_{\text{core}}^* \cdot \vec{E}_r \Delta n(x, y) dx dy$$

где C коэффициент пропорциональности связанный с нормировкой E_{core} и E_r и $\Delta n(x, y)$ - функция описывающая возмущение коэффициента преломления из-за присутствия решётки в поперечном сечении волокна.

Для большинства обычных решёток, и в частности, для решётки которая рассматривается в этой работе, возмущение показателя преломления для решётки ограничен сердцевиной и равен нулю в остальном пространстве. Поэтому бесконечные пределы в интеграле можно заменить на границу сердцевины. Более того, входная мода линейно поляризована вдоль случайного направления из-за цилиндрической симметрии задачи. Возмущение решётки имеет хорошо определённую ориентацию в пространстве которая нарушает симметрию волокна вдоль направления наклона (назовём эту плоскость плоскостью yz с направлением распространения вдоль z). Поэтому, можно рассматривать отдельно два граничных случая: волна поляризованная вдоль x (S -поляризация) или y (P -поляризация). Наконец, скалярное произведение электрических полей в интеграле редуцируется на обычное произведение к умножению x или y поляризованных полей (в зависимости от входящей волны), так как $\Delta n(x, y)$ не является тензором для стёкл. Заметив, что интегрирование ведётся по xy срезу волокна, решёточное возмущение на области интегрирования является константой для обычной решётки но имеет более сложное поведение для наклонной решётки.

$$\Delta n(x, y) = \Delta n \cos((4\pi/\Lambda)(z \cos(\theta) + y \sin(\theta)))$$

Для ясности картины отметим что когда входная мода поляризована вдоль x интеграл включает только x - компоненту оболочечной моды электрического поля (аналогично для y - поляризованной моды). Эти два случая можно рассматривать отдельно (а все остальные рассматривать как суперпозицию этих двух ортогональных состояний). В итоге, для заданного возмущения показателя преломления решётки, оболочечные моды для которых интеграл даёт сильное взаимодействие будут другими в зависимости от ориентированности поляризации входной моды относительно угла наклона (так как E_x и E_y компоненты поля для заданной оболочечной моды довольно отличаются)

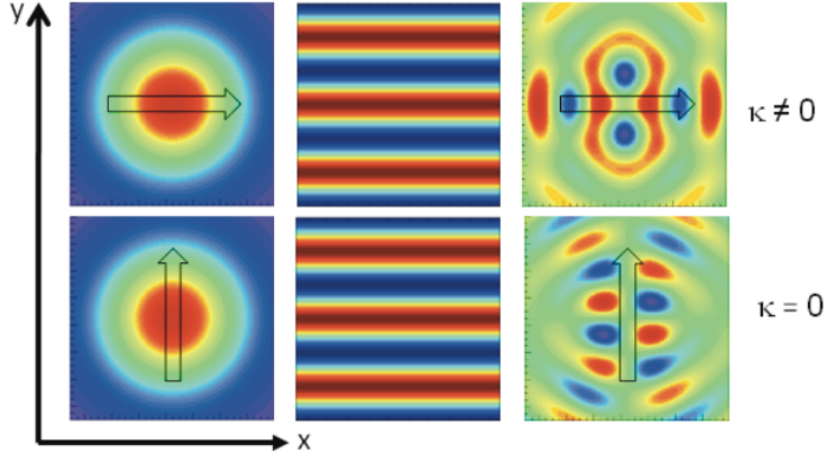


Рис. 7:

6 Собственные свойства сенсора

Для наклонной решётки, длины волн брэгговской и r -ой оболочечной моды вследствие аксиального сжатия $\Delta\varepsilon$ и изменения температуры ΔT и могут быть выведены из следующих уравнений.

$$\begin{aligned}\Delta\lambda_B &= \left(2\frac{N_{\text{eff}}^{\text{core}}}{\cos(\theta)}\frac{d\Lambda}{d\varepsilon} + 2\frac{\Lambda}{\cos(\theta)}\frac{dN_{\text{eff}}^{\text{core}}}{d\varepsilon}\right)\Delta\varepsilon \\ &\quad + \left(2\frac{N_{\text{eff}}^{\text{core}}}{\cos(\theta)}\frac{d\Lambda}{dT} + 2\frac{\Lambda}{\cos(\theta)}\frac{dN_{\text{eff}}^{\text{core}}}{dT}\right)\Delta T \\ \Delta\lambda^r &= \left(\frac{(N_{\text{eff}}^{\text{core}} + N_{\text{eff}}^r)}{\cos(\theta)}\frac{d\Lambda}{d\varepsilon} + \frac{\Lambda}{\cos(\theta)}\frac{d(N_{\text{eff}}^{\text{core}} + N_{\text{eff}}^r)}{d\varepsilon}\right)\Delta\varepsilon \\ &\quad + \left(\frac{(N_{\text{eff}}^{\text{core}} + N_{\text{eff}}^r)}{\cos(\theta)}\frac{d\Lambda}{dT} + \frac{\Lambda}{\cos(\theta)}\frac{d(N_{\text{eff}}^{\text{core}} + N_{\text{eff}}^r)}{dT}\right)\Delta T\end{aligned}$$

Для температурной зависимости доминирует термо-оптическое слагаемое которое мало из-за сравнительно маленького температурного коэффициента расширения кремния ($0.5 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$)

Тогда разность между сдвигами длин волн $\Delta\lambda_B$ и $\Delta\lambda^r$

становится пропорциональной очень маленькому фактору. $\frac{d(N_{\text{eff}}^{\text{core}} - N_{\text{eff}}^r)}{dT}$.

Это очень важный результат означающий что спектр наклонной решётки Брэгга инвариантен относительно температурных изменений

Для аксиального сжатия

$$\Delta\lambda_B - \Delta\lambda^r = \left(\frac{(N_{\text{eff}}^{\text{core}} - N_{\text{eff}}^r)}{\cos(\theta)}\frac{d\Lambda}{d\varepsilon}\right)\Delta\varepsilon \quad (29)$$

В результате относительный сдвиг возрастает с увеличением порядка мод, у которых коэффициент преломления значительно меньше чем у сердцевинных и резонансы оболочечных мод отстают относительно брэгговских когда волокно растягивается.

7 Заключение

В результате проделанной работы были уточнены уравнения движения комплексного скалярного поля в возмущенной метрике Фридмана-Робертсона-Уокера,

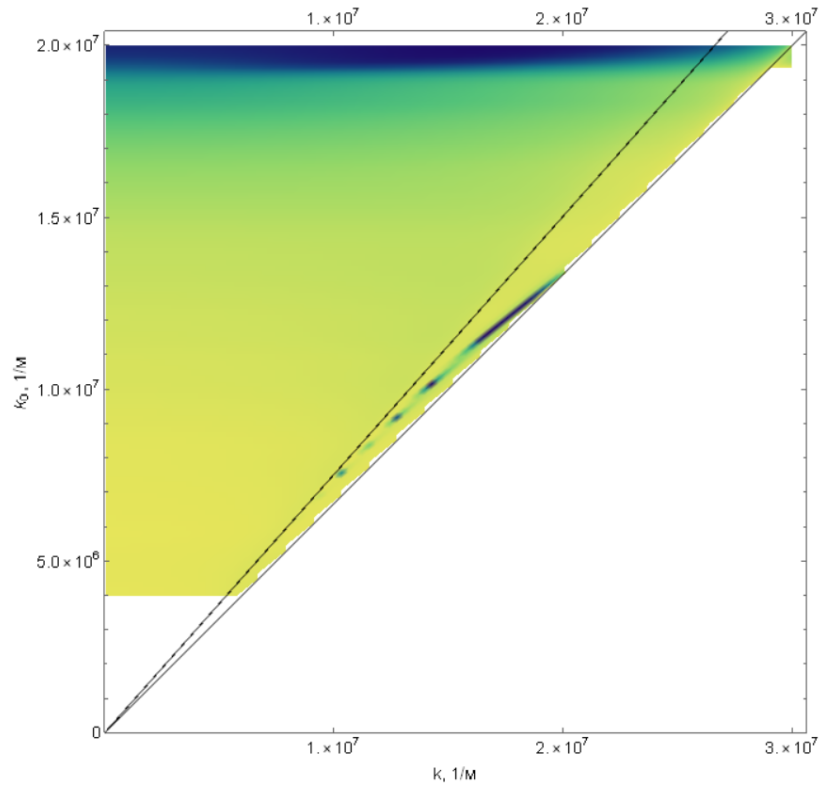


Рис. 8:

полученные в работе L. Arturo Ureña-López [?], найденные поправки будут существенны при рассмотрении ненулевого порядка по H/m , так же были получены аналогичные уравнения для действительного поля. Из этих уравнений получены в предельном переходе уравнения Шредингера-Пуассона. Из анализа уравнений Шредингера-Пуассона получен Гамильтониан, дающий правильную оценку скорости релаксации комплексного и аксионного поля за счет гравитационного взаимодействия $\Gamma \sim \delta\rho$, последний результат опровергает результат полученный в работе Erken, O. and Sikivie, P. and Tam, H. and Yang, Q. [?].

Список литературы