Notes on Quantitative Topics

Sergey Barseghyan

2 октября 2019 г.

Глава 1

Теория Вероятностей

1.1 Функции распределения на $\mathbb{R}$

1.1.1 Вероятностное пространство

Тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ называется вероятностным пространством.

1. Ω - пространство элементарных событий
2. $\mathcal{F}$ - σ-алгебра подмножеств Ω

Определение 1. Произвольны элемент $A \in \mathcal{F}$ называвается *событием*

Определение 2. Система множеств $\mathcal{A}$ называется алгеброй, если

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. если $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$
3. $A{,}B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

Определение 3. Система подмножеств $\mathcal{F}$ называется σ-алгеброй если

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. если $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$
3. $\{A_i\}_{i=0}^{\infty} \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Определение 4. Пара $(\mathcal{F}, \Omega)$ - измеримое пространство

Определение 5. Отображение $P : \mathcal{F} \to [0{,}1]$ - называется вероятностной мерой на $(\mathcal{F}, \Omega)$ если

1. $P(\Omega) = 1$
2. $\forall \{A_i\}_{i=0}^{\infty} : \forall i \neq j A_i \cap A_j = \varnothing \hookrightarrow P\left(\bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)$

Свойства. 1. $P(\varnothing) = 0$

2. $A \cap B = \varnothing \to P(AB) = P(A) \cdot P(B)$
3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. $A \subseteq B \to \mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$

Определение 6. Последовательность событий $\{A_n\}_{n\geq 1}$ убывает к A, $(A_n \downarrow A)$, если

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n \supseteq A_{n+1}$
2. $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

Определение 7. Последовательность событий $\{A_n\}_{n\geq 1}$ возрастает к A, $(A_n \uparrow A)$, если

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad A_n \subseteq A_{n+1}$
2. $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

Теорема 1 (о непрерывности вероятностной меры)**.** *Вероятность* $(\Omega, \mathcal{F})$ *-измеримое пространство а* P *удоволетворяет свойствам*

1. $P(\Omega) = 1$

2. P *– конечно-аддитивна*

Тогда P *- вероятностная мера* $\iff$ P *непрерывна в* 0 $((A_n \downarrow \varnothing)$, *то* $P(A_n) \to 0)$

1.1.2 Веронстноя мера на $\mathbb{R}$

Пусть P вероятностноя мера на $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$

Определение 8. Функция $F(x), \quad x \in \mathbb{R}$ определённая по правилу $F(x) = P((-\infty, x])$ называется функицией распределения вероятностной меры P

Лемма 1 (Свойства функции распределения)**.** *Пусть* $F(x)$ *- функция распределения на* $\mathbb{R}$ *вероятносой меры* P *Тогда*

1. $F(x)$ *-не убывает*

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0 \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$

3. $F(x)$ *непрерывна справа*

Доказательство. 1. Пусть $y \geq x$. Тогда $F(y) - F(x) = P((-\infty, y]) - P(-\infty, x]) = P([x,y]) \geq 0$

2. Пусть $x_n \to -\infty$ при $n \to \infty$. Тогда $((-\infty, x_0] \downarrow \varnothing) \Rightarrow F(x_n) = P(-\infty,x_n) \to P(\varnothing) = 0$
   Аналогично, если $(-\infty, x_n] \uparrow \mathbb{R}$, то $F(x_n) \to 1$
3. Пусть $x_n \downarrow x + 0$, $(-\infty, x_n] \to (-\infty, x) \Rightarrow$ по непрерывности вероятностной меры, $F(x_n) = P((-\infty, x_n) \to P((-\infty, x]) = F(x)$

$\square$

Определение 9. Любая функция $F(x)$ удоволетворяющая свойства **Леммы 1** является функцией распределения

Определение 10 (Кольцо множеств)**.** Непустая система множеств $\mathfrak{R}$ называется *кольцом*, если она обладает тем свойством, что из $A \in \mathfrak{R}$ и $B \in \mathfrak{R}$ следует $A \Delta B \in \mathfrak{R}$ и $A \cap B \in \mathfrak{R}$

Определение 11 (Полукольцо множеств)**.** Система множеств $\mathfrak{S}$ называется *кольцом*, если она содержит пустное множестов $\varnothing$, замкнута по отно- шению к образованию пересечений и обладает тем свойством, что из принадлежности к $\mathfrak{S}$ множествA**и**$A_1 \subset A$ вытекает возможность представления A в виде $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, где A_k попарно непересекающиеся множества из $\mathfrak{S}$, первое из которых есть заданное множество A_1.

Теорема 2 (Теорема Каратеодори)**.** *Пусть* Ω *некоторое множество,* S *-полукольцо на* Ω*.* P_σ *вероятностная мера на* (Ω, S)*. Тогда* $\exists!$ *верояностная мера* P *на* $(\Omega,\sigma(S))$*, является продолжение меры* P_σ $(\forall A \in S, P_\sigma = P)$

Теорема 3 (Теорма о взаимооднозначном соответсвтии функций распределения и вероятностных мер)**.** *Пусть* $F(x)$ *- функция распределения на* $\mathbb{R}$ *Тогда* $\exists!$ *вероятностная мера на* $(\mathbb{R},\mathfrak{B}(\mathbb{R})) : F(x)..F(x) = P((-\infty, x])$

1.1.3 Классификация вероятностных моделей и функций распределения на $(\mathbb{R},\mathfrak{B}(\mathbb{R}))$

1. Дискретное распределение Пусть на $X \subseteq \mathbb{R}$ не более чем счётное множество

   Определение 12. Вероятностная мера P на $(\mathbb{R},\mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ удоволетворяет свойству $P(\mathbb{R}/X) = 0$ называется дискретной мерой на X

2.