

Теоретический минимум , Математика I

10 июля 2019 г.

1 Интегрирование рациональных функций

$$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{M}{2a} \ln(ax^2 + bx + c) + \frac{2aN - Mb}{a\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C \quad (1)$$

$$(4ac - b^2) u_n = \frac{2n - 3}{n - 1} \cdot 2au_{n-1} + \frac{1}{n - 1} \cdot \frac{2ax + b}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}} \quad u_n = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} \quad (2)$$

$$J_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N} \quad J_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left(\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n - 1)J_n \right) \quad (3)$$
$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

В интегралах вида $x^m (ax^n + b)^{-p}$ полезна замена $x^\sigma = t$ где $\sigma = \operatorname{QCD}(m + 1, n)$

Если в знаменатели разлагаются на простые множители первой степени, при разложении дроби на простейшие удобна формула:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{\varphi(a_k)}{\psi'(a_k)} \frac{1}{x - a_k}$$

Где a_1, a_2, \dots, a_n — корни полинома $\psi(x)$.

1.1 Полезные замены:

1. Дробно-линейная подстановка

$$\frac{x - a}{x - b} = t$$

2. Если подынтегральное выражение содержит множители $x^2 - 1$ и $x^2 + 1$, а также возвратные полиномы:

$$x + \frac{1}{x} = u \quad \text{и} \quad x - \frac{1}{x} = v$$

3. Иногда полезно дополнять выражения до уже знакомых, путём представления констант в виде тождественных выражений.

$$1 = \frac{1}{2} (x^3 + 1) - \frac{1}{2} (x^3 - 1), \quad 1 = \frac{1}{2} (x^2 + 1) - \frac{1}{2} (x^2 - 1)$$

Пример 1. $\int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}$

1.2 Некоторые содержательные примеры

1.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1} &= \int \frac{\frac{1}{2}(x^2 + 1) - \frac{1}{2}(x^2 - 1)}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}(x^3 + 1) - \frac{1}{2}(x^3 - 1)} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}(x^3 + 1) - \frac{1}{2}(x^3 - 1)} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}(x^3 + 1) - \frac{1}{2}(x^3 - 1)} \\ &= \left| u = x - \frac{1}{x}, \quad v = x + \frac{1}{x} \quad du = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx \quad dv = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + 3} - \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v^2 - 1} = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{3}} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^n + 1} dx &= -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \log(x - x_k) + C \\ f(x) &= \frac{1}{x^n + 1} \quad f(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k)^{-1} \quad x_k = e^{i(2k-1)\pi/n}, k = 1, \dots, n \\ f(x) &= \sum_{k=1}^n a_k (x - x_k)^{-1} \quad a_k = \frac{-x_k}{n} \quad \int \frac{1}{x^n + 1} dx = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \log(x - x_k) + C \\ \int \frac{1}{x^n + 1} dx &= -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} x_{kr} \log(x^2 - 2x_{kr}x + 1) - x_{ki} \arctan\left(\frac{x - x_{kr}}{x_{ki}}\right) \right) + C' \\ x_{kr} &= \operatorname{Re}(x_k) = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{n}\right) \\ x_{ki} &= \operatorname{Im}(x_k) = \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{n}\right) \end{aligned}$$

2 Задачи с Теорминимума

Найти неопределённый интеграл

$$\int \frac{1}{x^8 + x^4 + 1} dx \quad (4)$$

Для начала разобьём на множители. Легко заметить, что

$$x^8 + x^4 + 1 = (x^4 + x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$$

$$\int \frac{1}{x^8 + x^4 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^4 - x^2 + 1}$$

Первое слагаемое в правой части уже нами найдено ранее.

$$\int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{3}}$$

Найдём теперь второе слагаемое

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x^4 - x^2 + 1} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(x^2 + 1) - \frac{1}{2}(x^2 - 1)}{x^4 - x^2 + 1} dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} dx = \\
 &\quad \frac{1}{2} \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} d\left(x - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} d\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left| x + \frac{1}{x} = u \quad \text{и} \quad x - \frac{1}{x} = v \right| = \\
 &\quad \frac{1}{2} \int \frac{1}{v^2 + 2 - 1} dv - \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2 - 2 - 1} du
 \end{aligned}$$

Посчитав эти табличные интегралы, сделав обратную подстановку и собрав все слагаемые получим значение исходного интеграла.

3 Интегрирование иррациональных функций