Теоретический минимимум , Математика I

10 июля 2019 г.

1 Интегрирование рациональных функций

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx = \frac{M}{2a}\ln\left(ax^2+bx+c\right) + \frac{2aN-Mb}{a\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C \tag{1}$$

$$\left(4ac-b^2\right)u_n = \frac{2n-3}{n-1}\cdot 2au_{n-1} + \frac{1}{n-1}\cdot\frac{2ax+b}{\left(ax^2+bx+c\right)^{n-1}} \quad u_n = \int\frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} J_n = \int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}, \quad n\in N \quad J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + (2n-1)J_n\right) \\ J_1 = \int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C \end{gathered} \tag{3}$$

В интегралах вида $x^m\left(ax^n+b\right)^{-p}$ полезна замена $x^\sigma = t$ где $\sigma = \mathrm{QCD}\left(m+1,n\right)$

Если в знаменатели разлагаются на простые множители первой степени, при разложении дроби на простейшие удобна формула:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi\left(a_k\right)}{\psi'\left(a_k\right)}\frac{1}{x-a_k}$$

Где $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n-$ корни полинома $\psi(x)$.

1.1 Полезные замены:

1. Дробно-линейная подстановка
$$\frac{x-a}{x-b} = t$$

2. Если подынтегральное выражение содержит множители x^2-1 и x^2+1, а также возвратные полиномы:
$$x+\frac{1}{x} = u \quad \text{и} \quad x-\frac{1}{x} = v$$

3. Иногда полезно дополнять выражения до уже знакомых, путём представления констант в виде тождественных выражений.

$$1 = \frac{1}{2}\left(x^3+1\right) - \frac{1}{2}\left(x^3-1\right), \quad 1 = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2}\left(x^2-1\right)$$

Пример 1. $\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}$

1.2 Некоторые содержательные примеры

1.
$$\int \frac{dx}{x^4+x^2+1} = \int \frac{\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)}{x^4+x^2+\frac{1}{2}\left(x^3+1\right)-\frac{1}{2}\left(x^3-1\right)}dx =$$
$$\frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+\frac{1}{2}\left(x^3+1\right)-\frac{1}{2}\left(x^3-1\right)} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+\frac{1}{2}\left(x^3+1\right)-\frac{1}{2}\left(x^3-1\right)}$$
$$= \left| u = x - \frac{1}{x}, \quad v = x + \frac{1}{x} \quad du = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx \quad dv = \left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx \right| =$$
$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+3} + \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^2-1} = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$$

2 Интегрирование иррациональных функций