0. Соглашения

За каждый листок с заданиями из трех дается максимум [100] баллов, которые можно набрать, комбинируя решения задач внутри одного листка произвольным образом. Баллы за все три задания суммируются, нормируются на 10 с округлением вверх, получившееся значение и будет оценкой. Так, для уд(3) нужно набрать минимум 90 баллов за все три задания. Из задач со звездочкой [XX*] для зачета задания **обязательно** решить минимум одну.

1. Классическая теория поля

1. [10] Под действием бесконечно малых преобразований группы Лоренца координаты пространства Минковского x^μ преобразуются как

$$x'^\mu = x^\mu + i\omega^{\rho\sigma}(L_{\rho\sigma})^\mu{}_\nu x^\nu, \tag{1.1}$$

где матрицы $L_{\mu\nu}$ удовлетворяют стандартному коммутационному соотношению для so(1,3)

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = -i\eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} + i\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - i\eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho} + i\eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho}. \tag{1.2}$$

- Показать, что операторы вращений и бустов определенные как $J^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}J_{jk}$, $K^i = J^{0i}$ удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [J^i, J^j] &= i\epsilon^{ijk}J^k, \\ [K^i, K^j] &= -i\epsilon^{ijk}J^k, \\ [J^i, K^j] &= i\epsilon^{ijk}K^k. \end{aligned} \tag{1.3}$$

- Показать, что алгебра Лоренца so(1,3) изоморфна прямой сумме $so(1,3) = su(2) \oplus su(2)$, т.е. что можно определить такие линейные комбинации вращений и бустов $J^i_\pm = \frac{1}{2}(J^i \pm iK^i)$, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [J^i_+, J^j_+] &= i\epsilon^{ijk}J^k_+, \\ [J^i_-, J^j_-] &= i\epsilon^{ijk}J^k_- \\ [J^i_+, J^j_-] &= 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

2. [40*] Лагранжиан массивного комплексного скалярного поля имеет вид $\mathcal{L} = \partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^*\varphi$

- Получить уравнения движения для поля φ и φ^*. Показать, что в нерелятивистском пределе уравнение Клейна-Гордона переходит в уравнение Шредингера. Проследить судьбу решений уравнения КГ с положительной и отрицательной частотами $k^0 = \pm\omega_k = \pm\sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$.
- Получить осцилляторное разложение скалярного поля

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{2\omega_k}\left(e^{ikx}\tilde{a}^+_k + e^{-ikx}\tilde{a}^-_k\right), \tag{1.5}$$

пояснить смысл коэффициентов $\tilde{a}^\pm_k$. Показать, что выражение $d^3k/2\omega_k$ инвариантно относительно преобразований Лоренца.

- Найти канонически сопряженный импульс для (комплексного) скалярного (спинорного, векторного) поля, получить Гамильтониан поля в терминах осцилляторов $a^\pm_k$ и $b^\pm_k$

- Выписать тензор энергии-импульса для скалярного (спинорного, векторного) поля $T^{\mu\nu}$, показать, что соответствующий вектор 4-импульса $P^\mu = \int d^3x T^{0\mu}$ сохраняется, т.е.

$$\dot{P}^\mu = 0. \tag{1.6}$$

  Получить выражение для 4-импульса в осцилляторном разложении.
- Используя теорему Нётер, показать что в теории свободного скалярного поля сохраняющийся ток, соответствующий U(1) симметрии $\varphi' = e^{i\alpha}\varphi$ равен $j_\mu = q(\partial_\mu\varphi^*\varphi - \varphi^*\partial_\mu\varphi)$.

3. [40*] Лагранжиан безмассового векторного поля имеет вид $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.
   - Вывести уравнения Максвелла.
   - Найти канонически сопряженный импульс π_μ для поля A^μ. Чему равна компонента π^0?
   - Показать, что решения уравнения Максвелла $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ имеют две возможные поляризации, которые ортогональны направлению импульса.
   - Для массивного векторного поля с Лагранжианом $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + m^2 A_\mu A^\mu$ показать, что решения уравнений движения имеют три поляризации

4. [15] Дираковское сопряжение определяется как $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$
   - Показать, что выражение $\bar{\psi}\psi$ инвариантно относительно преобразований Лоренца
   - Показать, что выражение $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ преобразуется как вектор при действии группы Лоренца
   - Показать, что выражение $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ преобразуется как псевдоскаляр

5. [15] Используя только свойство $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ и обозначения $\not{p} = p^\mu\gamma_\mu$, $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ показать, что
   - $\not{p}\not{p} = p^2 = p^\mu p_\mu$,
   - $\gamma^\mu\gamma_\mu = 4$, $\mathrm{Tr}[\gamma^\mu] = 0$
   - $\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4\eta^{\mu\nu}$, $\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho] = 0$
   - $\mathrm{Tr}[\not{p}\,\not{q}] = 4p\cdot q$.
   - $\mathrm{Tr}[\not{p}_1\,\not{p}_2\,\not{p}_3\,\not{p}_4] = 4\left[(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4) + (p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3) - (p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_4)\right]$
   - $\mathrm{Tr}[\gamma^5\not{p}_1\,\not{p}_2] = 0$
   - $\mathrm{Tr}[\gamma^5\not{p}_1\,\not{p}_2\,\not{p}_3\,\not{p}_4] = 4i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}p_1^\mu p_2^\nu p_3^\rho p_4^\sigma$
   - $\gamma_\mu\not{p}\gamma^\mu = -2\not{p}$
   - $\gamma_\mu\not{p}_1\,\not{p}_2\gamma^\mu = 4p_1\cdot p_2$
   - $\gamma_\mu\not{p}_1\,\not{p}_2\not{p}_3\gamma^\mu = -2\not{p}_3\not{p}_2\not{p}_1$

6. [10] Показать, что если верно $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$, где $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}[+1, -1, -1, -1]$ – метрика Минковского, то выполняются следующие коммутационные соотношения

$$[\Sigma_{\mu\nu}, \Sigma_{\rho\sigma}] = -i\eta_{\mu\rho}\Sigma_{\nu\sigma} + i\eta_{\nu\rho}\Sigma_{\mu\sigma} - i\eta_{\nu\sigma}\Sigma_{\mu\rho} + i\eta_{\mu\sigma}\Sigma_{\nu\rho}, \tag{1.7}$$

где

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\gamma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu). \tag{1.8}$$

(для произвольного базиса гамма-матриц)

7. [40*] Лагранжиан массивного спинорного поля равен $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi$

- Показать, что в безмассовом случае $m = 0$, Лагранжиан $\mathcal{L} = \bar{\psi} i\partial\!\!\!/ \psi$ инвариантен относительно аксиальных преобразований $\psi' = \exp[i\gamma^5\alpha]\psi$ с некоторым параметром α =const. Убедиться, что массовое слагаемое нарушает эту инвариантность.
- Используя теорему Нётер, найти сохраняющийся ток, соответствующий аксиальной симметрии
- Показать, что сохраняющийся ток, соответствующий U(1) симметрии $\psi' = e^{i\alpha}\psi$, равен $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$

8. [20] В вейлевском базисе гамма-матриц

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

- найти матрицу зарядового сопряжения C, определяемую как $C^{-1}(\gamma^{\mu\nu})^T C = -\gamma_{\mu\nu}$. Получить в явном виде условия на компоненты майорановского спинора ψ_M, определяемого условием $\bar{\psi}_M = \psi_M^T C$.
- найти оператор киральности $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ в явном виде.
- Показать, что комбинации $P_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$ являются проекторами, т.е. удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &P_L P_L = P_L, \quad P_R P_R = P_R, \\ &P_L P_R = 0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

- Показать, что преобразования Лоренца не меняют киральность спинора, т.е. левый спинор остается левым под действием преобразования

$$\psi' = \exp\left[-\frac{1}{4}\omega^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu}\right]\psi \tag{1.11}$$

9. [30] Лагранжиан комплексного скалярного поля инвариантен относительно преобразований $\varphi' = e^{i\alpha}\varphi$, где $\alpha = \text{const}$.

- Переходя к локальным калибровочным преобразованиям $\alpha = \alpha(x) \neq \text{const}$ построить калибровочно инвариантный Лагранжиан для поля φ, взаимодействующего с калибровочным полем A_μ.
- Проверить, что $[D_\mu, D_\nu] = F_{\mu\nu}$, где ковариантная производная $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$
- Показать, что $\tilde{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, где $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$, является полной производной