Quantum Mechanics Seminars

Sergey Barseghyan

12 сентября 2019 г.

1 Семинар 1

Упражнение 1.1. *Покажите, что унитарные матрицы, как и эрмитовы, диагонализуемы. Указание: покажите, что эрмитова и анти-эрмитова часть унитарного оператора диагонализуемы совместно*

Решение.

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I$$

Матрица A диагонализируема если

$$\exists P: \;\; P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$U = A + B = \underbrace{\frac{U+U^\dagger}{2}}_{\text{эрмитова}} + \underbrace{\frac{U-U^\dagger}{2}}_{\text{антиэрмитова}}$$

Две матрицы A и B совместно диагонализируемы $\leftrightarrow [A,B] = 0$

$$[A,B] = \tfrac{1}{4}\left(\left(U+U^\dagger\right)\left(U-U^\dagger\right) + \left(U-U^\dagger\right)\left(U+U^\dagger\right)\right)$$
$$= \tfrac{1}{4}\left(UU + U^\dagger U - UU^\dagger - U^\dagger U^\dagger\right) - \tfrac{1}{4}\left(UU - U^\dagger U + UU^\dagger - U^\dagger U^\dagger\right) = 0$$

Упражнение 1.2. *В квантовой механике замена базиса реализуется унитарными преобразованиями $|\psi'\rangle = \hat{U}|\psi\rangle$*

1. *Покажите, что гамильтониан при этом заменяется на $\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger$*

2. *Последнее утверждение необходимо модифицировать, если унитарное преобразование зависит явно от времени $\hat{U} = \hat{U}(t)$. Покажите, что в таком случае гамильтониан необходимо заменить на $\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger - i\hat{U}\partial_t\hat{U}^\dagger$*

Решение. *1.*

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}^\dagger|\psi'\rangle = \hat{H}\hat{U}^\dagger|\psi'\rangle$$

$$i\hbar\hat{U}\hat{U}^\dagger\frac{\partial}{\partial t}|\psi'\rangle = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger|\psi'\rangle$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi'\right\rangle = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^{\dagger}\left|\psi'\right\rangle$$

$$\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^{\dagger}$$

2. *Если же* $\hat{U} = \hat{U}(t)$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}^{\dagger}(t)\left|\psi'\right\rangle = i\hbar\left(\hat{U}^{\dagger}\partial_t\left|\psi'\right\rangle + \partial_t\hat{U}^{\dagger}\left|\psi'\right\rangle\right)$$

$$i\hbar\hat{U}\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}^{\dagger}(t)\left|\psi'\right\rangle = i\hbar\left(\hat{U}\hat{U}^{\dagger}\partial_t\left|\psi'\right\rangle + \hat{U}\partial_t\hat{U}^{\dagger}\left|\psi'\right\rangle\right)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi'\right\rangle = \left(\hat{U}\hat{H}\hat{U}^{\dagger} - i\hbar\hat{U}\partial_t\hat{U}^{\dagger}\right)\left|\psi'\right\rangle$$

$$\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^{\dagger} - i\hbar\hat{U}\partial_t\hat{U}^{\dagger}$$

.