

0. Соглашения

За каждый листок с заданиями из трех дается максимум [100] баллов, которые можно набрать, комбинируя решения задач внутри одного листка произвольным образом. Баллы за все три задания суммируются, нормируются на 10 с округлением вверх, получившееся значение и будет оценкой. Так, для уд(3) нужно набрать минимум 90 баллов за все три задания. Из задач со звездочкой [XX*] для зачета задания **обязательно** решить минимум одну.

2. Квантованные поля

- [15] Для свободного комплексного массивного скалярного поля показать, что оператор поля в представлении Гейзенберга удовлетворяет уравнению Клейна-Гордона
- [40*] Для квантованного свободного комплексного массивного скалярного поля

- определить вакуумное состояние
- вычислить энергию состояния $|\vec{k}\rangle = a_{\vec{k}}^\dagger|0\rangle$
- получить выражение для оператора заряда, вычислить заряд состояний $a_{\vec{k}}^\dagger|0\rangle$ и $b_{\vec{k}}^\dagger|0\rangle$
- получить выражение для причинного (фeyнмановского) пропагатора в терминах вакуумных средних полей
- явно проверить теорему Вика для случая трех полей, т.е. показать, что

$$T\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3) = : \varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3) : \\ + \varphi(x_1)G_F(x_2 - x_3) + \varphi(x_2)G_F(x_3 - x_1) + \varphi(x_3)G_F(x_1 - x_2)$$

- [40*] Рассмотреть скалярную теорию с юкавским взаимодействием

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi + \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - M^2 \psi^* \psi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - g \psi^* \psi \varphi \quad (2.1)$$

вычислить амплитуды

- аннигиляции “нуклона” и “антинуклона” $\psi + \bar{\psi} \rightarrow \varphi$ в порядке g
 - рассеяния “нуклона” на “мезоне” $\varphi + \psi \rightarrow \varphi + \psi$ в порядке g^2
- [10] Из правила квантования фермионного поля получить (анти)коммутационные соотношения на операторы рождения и уничтожения частиц
 - [30] Рассмотреть скалярное поле, взаимодействующее с источником, т.е. удовлетворяющее уравнению $(\square + m^2)\varphi = j(x)$.

- показать, что гамильтониан системы будет иметь вид

$$H = \int d^3p \, \omega_p \left(a_k^\dagger - \frac{i}{\sqrt{2\omega_p}} \tilde{j}^*(p) \right) \left(a_k + \frac{i}{\sqrt{2\omega_p}} \tilde{j}(p) \right), \quad (2.2)$$

где $\tilde{j}(p)$ – Фурье образ источника.

- вычислить общее число рожденных частиц за время действия включенного источника

6. [40*] Для квантованного свободного спинорного поля

- показать, что для ограниченности энергии поля снизу операторы рождения и уничтожения должны иметь следующие перестановочные соотношения

$$\{a_p^r, a_q^{s\dagger}\} = \{b_p^r, b_q^{s\dagger}\} = \delta(\vec{p} - \vec{q})\delta^{rs} \quad (2.3)$$

- определить вакуумное состояние
- получить выражение для оператора заряда, вычислить заряд состояний $a_k^{r\dagger}|0\rangle$ и $b_k^{r\dagger}|0\rangle$
- пользуясь теоремой Нётер, найти сохраняющийся ток поля соответствующий вращательной симметрии. Показать, что спин $a_k^{r\dagger}|0\rangle$ и $b_k^{r\dagger}|0\rangle$ равен $1/2$.

7. [10] Для комплексного скалярного поля найти такие унитарные операторы P, C, T, определенные в терминах их действия на операторы рождения и уничтожения a_k, b_k , которые дают следующие преобразования поля

$$\begin{aligned} P\varphi(t, \vec{x})P &= \varphi(t, -\vec{x}), \\ T\varphi(t, \vec{x})T &= \varphi(-t, \vec{x}), \\ C\varphi(t, \vec{x})C &= \varphi^*(t, \vec{x}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

8. [15] Показать, что любой эрмитовый скалярный по отношению к преобразованиям Лоренца локальный оператор, построенный из полей ψ, φ и их сопряженных имеет СРТ-четность равную +1. (Действие операторов C,P,T определены в предыдущей задаче).

9. [40] В теории Юкавы ($L_{int} = \lambda\bar{\psi}\psi\varphi$) с массивным скалярным полем рассмотреть сечение рассеяния фермионов

$$i\mathcal{M} = \text{[s-channel diagram]} + \text{[t-channel diagram]} \quad (2.5)$$

Показать, что эффективный потенциал взаимодействия между фермионами в такой теории

$$V(r) \propto \frac{1}{r} e^{-mr} \quad (2.6)$$