

# General Relativity Seminars

11 сентября 2019 г.

## 1 Семинар 1

**Задача 1.1.** *Покажите, что прямой мировой линии отвечает именно минимум (а не максимум) действия  $S[x] = -m \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2}$ , то есть максимум собственного времени  $s = \int_A^B ds$ . Приведите примеры мировых линий, отвечающих наименьшему собственному времени. Чему равно это время?*

**Решение.** *content...*

**Задача 1.2.** *В случае системы нескольких свободных частиц момент импульса равен сумме их моментов:*

$$J^{\mu\nu} = \sum_s (x_s^\mu p_s^\nu - x_s^\nu p_s^\mu)$$

*Покажите, что сохранение компонент  $J^{0i}$  эквивалентно тому, что центр инерции системы*

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_s E_s \mathbf{r}_s}{\sum_s E_s}$$

*движется с постоянной скоростью*

**Решение.**

$$J^{\mu\nu} = \sum_s (x_s^\mu p_s^\nu - p_s^\mu x_s^\nu)$$

$$J^{0i} = \sum_s (t \bar{p}_s - E_s \bar{r}_s) = \text{const}_1$$

$$\sum_s E_s = \text{const}_2$$

$$t \underbrace{\frac{\sum_s \mathbf{p}_s}{\sum_s E_s}}_V - \underbrace{\frac{\sum_s E_s \mathbf{r}_s}{\sum_s E_s}}_R = \text{const}$$

$$t\mathbf{V} - \mathbf{R} = \text{const}$$

**Задача 1.3.** *content...*

**Задача 1.4.** *Выведите уравнение  $m \frac{du^\mu}{ds} = e F_{\mu\nu}$*

**Решение.**

$$\begin{aligned}
S &= \int_{t_1}^{t_2} dt L \\
S &= -m \int dt \sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu} - e A_\mu \dot{x}^\mu dt \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} &= \left( -m \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}_\sigma \dot{x}^\sigma}} - e A_\mu [x(t)] \right) \\
\frac{d}{dt} \left( -m \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}_\sigma \dot{x}^\sigma}} - e A_\mu [x(t)] \right) &= -m \frac{du}{dt} - e \partial_\nu A_\mu \dot{x}^\nu \\
\frac{\partial L}{\partial x^\mu} &= -e \partial_\mu A_\nu [x(t)] \dot{x}^\mu \\
m \frac{du_\mu}{ds} &= e \underbrace{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)}_{F_{\mu\nu}} = e F_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

**Задача 1.5.** Рассмотрите частицу во внешнем скалярном поле, которое описывается зависящей от точки массой  $(x)$  в действии  $S[x] = \int_A^B (-m ds - eA)$ . Напишите гамильтониан и уравнения движения такой частицы. Покажите, что если  $m(x) = m_0 + U(x)$ ,  $U(x) \ll m_0$ , то в нерелятивистском пределе эти уравнения описывают частицу во внешнем потенциальном поле  $U(x)$

**Решение.**

$$\begin{aligned}
S &= \int_A^B -m(x) ds - eA = \int_{t_A}^{t_B} dt \left( -m \sqrt{1 - v^2} + e \mathbf{A} \mathbf{v} - e\varphi \right) \\
\mathbf{p}_H &= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2}} + e \mathbf{A} = \mathbf{p} + e \mathbf{A} \\
\frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2}} &= \mathbf{p}_H - e \mathbf{A} \\
\frac{m^2 v^2}{1 - v^2} &= (\mathbf{p}_H - e \mathbf{A})^2 \\
m^2 v^2 &= (\mathbf{p}_H - e \mathbf{A})^2 (1 - v^2) \\
v^2 &= \frac{(\mathbf{p}_H - e \mathbf{A})^2}{(m^2 + (\mathbf{p}_H - e \mathbf{A})^2)} \\
v &= \frac{(\mathbf{p}_H - e \mathbf{A})}{\sqrt{(m^2 + (\mathbf{p}_H - e \mathbf{A})^2)}} \\
1 - v^2 &= \frac{m^2}{m^2 + (\mathbf{p}_H - e \mathbf{A})^2} \\
H = \mathbf{v} \mathbf{p}_H - L &= \frac{\mathbf{p}_H^2 - 2 \mathbf{p}_H \mathbf{A} + m^2 + e^2 A^2}{\sqrt{(m^2 + (\mathbf{p}_H - e \mathbf{A})^2)}} + e\varphi
\end{aligned}$$

$$H = \sqrt{m^2 + (\mathbf{p}_H - e\mathbf{A})^2} + e\varphi$$

$$m = m_0 + U, U \ll m_0$$

$$v \ll 1, \mathbf{p}_H - e\mathbf{A} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} \approx m_0\mathbf{v}$$

$$\frac{m}{\sqrt{m^2 - (\mathbf{p}_H - e\mathbf{A})^2}} \approx \frac{m_0^2}{\sqrt{m_0^2(1-v^2)}} \approx 1$$

$$p_i = mv_i$$

$$\dot{p}_i = -e(\partial_i\varphi - \partial_0 A_i) - \frac{m_0\partial_i U}{m_0} + v_k e \frac{A_k}{x_k}$$