General Relativity Seminars

27 октября 2019 г.

1 Семинар 1

Задача 1.1. *Покажите, что прямой мировой линии отвечает именно минимум (а не максимум) действия* $S[x] = -m\int_{t_A}^{t_B} dt\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2}$, *то есть максимум собственного времени* $s = \int_A^B ds$ *Приведите примеры мировых линий, отвечающих наименьшему собственному времени. Чему равно это время?*

Решение. *content...*

Задача 1.2. *В случае системы нескольких свободных частиц момент импульса равен сумме их моментов:*

$$J^{\mu\nu} = \sum_s \left(x_s^\mu p_s^\nu - x_s^\nu p_s^\mu\right)$$

Покажите, что сохранение компонент J^{0i} *эквивалентно тому, что центр инерции системы*

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum_s E_s \boldsymbol{r}_s}{\sum_s E_s}$$

движется с постоянной скоростью

Решение.

$$J^{\mu\nu} = \sum_s \left(x_s^\mu p^\nu - p_s^\mu x_s^\nu\right)$$

$$J^{0i} = \sum_s \left(t\overline{p}_s - E_s \overline{r}_s\right) = \mathrm{const}_1$$

$$\sum_s E_s = \mathrm{const}_2$$

$$t\underbrace{\frac{\sum_s \boldsymbol{p}_s}{\sum E_s}}_{\boldsymbol{V}} - \underbrace{\frac{\sum_s E_s \boldsymbol{r_s}}{\sum_s E_s}}_{\boldsymbol{R}} = \mathrm{const}$$

$$t\boldsymbol{V} - \boldsymbol{R} = \mathrm{const}$$

Задача 1.3. *content...*

Задача 1.4. *Выведите уравнение* $m\frac{du_\mu}{ds} = eF_{\mu\nu}u^\nu$

Решение.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L$$

$$S = -m \int dt \sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu} - eA_\mu \dot{x}^\mu dt$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} = \left(-m\frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}_\sigma \dot{x}^\sigma}} - eA_\mu \left[x(t)\right]\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(-m\frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}} - eA_\mu \left[x(t)\right]\right) = -m\frac{du}{dt} - e\partial_\nu A_\mu \dot{x}^\nu$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = -e\partial_\mu A_\nu \left[x(t)\right] \dot{x}^\nu$$

$$m\frac{du_\mu}{ds} = e\underbrace{\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)}_{F_{\mu\nu}} = eF_{\mu\nu}u^\nu$$

Задача 1.5. *Рассмотрите частицу во внешнем скалярном поле, которое описывается зависящей от точки массой (x) в действии $S\left[x\right] = \int_A^B \left(-mds - eA\right)$. Напишите гамильтониан и уравнения движения такой частицы. Покажите, что если $m(x) = m_0 + U(x), U(x) \ll m_0$, то в нерелятивистском пределе эти уравнения описывают частицу во внешнем потенциальном поле $U(x)$*

Решение.

$$S = \int_A^B -m(x)ds - eA = \int_{t_A}^{t_B} dt \left(-m\sqrt{1-v^2} + e\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} - e\varphi\right)$$

$$\boldsymbol{p}_H = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2}} + e\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A}$$

$$\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2}} = \boldsymbol{p}_H - e\boldsymbol{A}$$

$$\frac{m^2v^2}{1-v^2} = \left(\boldsymbol{p}_H - e\boldsymbol{A}\right)^2$$

$$m^2v^2 = \left(\boldsymbol{p}_H - e\boldsymbol{A}\right)^2\left(1-v^2\right)$$

$$v^2 = \frac{\left(\boldsymbol{p}_H - e\boldsymbol{A}\right)^2}{\left(m^2 + \left(\boldsymbol{p}_H - e\boldsymbol{A}\right)^2\right)}$$

$$v = \frac{\left(\boldsymbol{p}_H - e\boldsymbol{A}\right)}{\sqrt{\left(m^2 + \left(\boldsymbol{p}_H - e\boldsymbol{A}\right)^2\right)}}$$

$$1 - v^2 = \frac{m^2}{m^2 + \left(\boldsymbol{p}_H - e\boldsymbol{A}\right)^2}$$

$$H = \boldsymbol{v}\boldsymbol{p}_H - L = \frac{\boldsymbol{p}_H^2 - 2\boldsymbol{p}_H\boldsymbol{A} + m^2 + e^2A^2}{\sqrt{\left(m^2 + \left(\boldsymbol{p}_H - e\boldsymbol{A}\right)^2\right)}} + e\varphi$$

$$H=\sqrt{m^2+(\boldsymbol{p}_H-e\boldsymbol{A})^2}+e\varphi$$

$$\dot{p}_i=-e\left(\partial_i\phi-\partial_0A_i\right)-\frac{m\partial_i m}{\sqrt{m^2+(\boldsymbol{p}_H-e\boldsymbol{A})^2}}+v_ke\frac{A_k}{x_k}$$

$$m=m_0+U,U\ll m_0$$

$$v\ll 1,\boldsymbol{p}_H-e\boldsymbol{A}=\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2}}\approx m_0\boldsymbol{v}$$

$$\frac{m}{\sqrt{m^2-(\boldsymbol{p}_H-e\boldsymbol{A})^2}}\approx\frac{m_0^2}{\sqrt{m_0^2\left(1-v^2\right)}}\approx 1$$

$$p_i=mv_i$$

$$\dot{p}_i=-e\left(\partial_i\varphi-\partial_0A_i\right)-\frac{\cancel{m_0}\partial_i U}{\cancel{m_0}}+v_ke\frac{A_k}{x_k}$$

2 Лекция 2

Задача 2.1. *content...*

Задача 2.2. *content...*

Задача 2.3. $T(a,b)=\nabla_a b-\nabla_b a-[a,b]\quad(\forall a,b\in C(TM))\quad\Leftrightarrow\quad T^\lambda_{\mu\nu}=\Gamma^\lambda_{\nu\mu}-\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$

Решение.

$$\nabla_a b-\nabla_b a-[a,b]=0$$

$$a^\mu\nabla_\mu b-b^\mu\nabla_\mu a-ab+ba$$

$$a^\mu\left(\partial_\mu b^\lambda\right)\partial_\lambda-b^\mu\left(\partial_\mu a^\lambda\right)\partial_\lambda+a^\mu\Gamma^\lambda_{\nu\mu}b^\nu\partial_\lambda-b^\mu\Gamma^\lambda_{\nu\mu}a^\nu\partial_\lambda+a^\mu\partial_\mu b^k\partial_k-b^\mu\partial_\mu a^k\partial_k$$

$$a^\mu\Gamma^\lambda_{\nu\mu}b^\nu\partial_\lambda=b^\mu\Gamma^\lambda_{\nu\mu}a^\nu\partial_\lambda$$

$$a^\mu b^\nu\Gamma^\lambda_{\nu\mu}=a^\mu b^\nu\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\quad\forall a^\mu,b^\nu\in C(TM)$$

$$\boxed{\Gamma^\lambda_{\nu\mu}-\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}$$