Quantum Mechanics Seminars

Sergey Barseghyan

30 октября 2019 г.

1 Семинар 1

Упражнение 1.1. *Покажите, что унитарные матрицы, как и эрмитовы, диагонализуемы. Указание: покажите, что эрмитова и анти-эрмитова часть унитарного оператора диагонализуемы совместно*

Решение.

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I$$

Матрица A диагонализируема если

$$\exists P: \;\; P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$U = A + B = \underbrace{\frac{U+U^\dagger}{2}}_{\text{эрмитова}} + \underbrace{\frac{U-U^\dagger}{2}}_{\text{антиэрмитова}}$$

Две матрицы A и B совместно диагонализируемы $\leftrightarrow [A,B] = 0$

$$[A,B] = \tfrac{1}{4}\left(\left(U+U^\dagger\right)\left(U-U^\dagger\right) + \left(U-U^\dagger\right)\left(U+U^\dagger\right)\right)$$
$$= \tfrac{1}{4}\left(UU + U^\dagger U - UU^\dagger - U^\dagger U^\dagger\right) - \tfrac{1}{4}\left(UU - U^\dagger U + UU^\dagger - U^\dagger U^\dagger\right) = 0$$

Упражнение 1.2. *В квантовой механике замена базиса реализуется унитарными преобразованиями $|\psi'\rangle = \hat{U}|\psi\rangle$*

1. *Покажите, что гамильтониан при этом заменяется на $\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger$*

2. *Последнее утверждение необходимо модифицировать, если унитарное преобразование зависит явно от времени $\hat{U} = \hat{U}(t)$. Покажите, что в таком случае гамильтониан необходимо заменить на $\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger - i\hat{U}\partial_t\hat{U}^\dagger$*

Решение. *1.*

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}^\dagger|\psi'\rangle = \hat{H}\hat{U}^\dagger|\psi'\rangle$$

$$i\hbar\hat{U}\hat{U}^\dagger\frac{\partial}{\partial t}|\psi'\rangle = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger|\psi'\rangle$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi'\rangle = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger|\psi'\rangle$$

$$\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger$$

2. *Если же* $\hat{U} = \hat{U}(t)$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}^\dagger(t)|\psi'\rangle = i\hbar\left(\hat{U}^\dagger\partial_t|\psi'\rangle + \partial_t\hat{U}^\dagger|\psi'\rangle\right)$$

$$i\hbar\hat{U}\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}^\dagger(t)|\psi'\rangle = i\hbar\left(\hat{U}\hat{U}^\dagger\partial_t|\psi'\rangle + \hat{U}\partial_t\hat{U}^\dagger|\psi'\rangle\right)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi'\rangle = \left(\hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger - i\hbar\hat{U}\partial_t\hat{U}^\dagger\right)|\psi'\rangle$$

$$\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger - i\hbar\hat{U}\partial_t\hat{U}^\dagger$$

Упражнение 1.3. *Покажите следующие свойства матриц Паули (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование):*

1. *Они, совместно с единичной матрицей* $\sigma^0 = \hat{\mathbb{I}}_{2\times 2}$, *представляют собой базис в пространстве эрмитовых матриц* 2×2.

2. *Они удовлетворяют следующими правилами перемножения:*

$$\hat{\sigma}^\alpha\hat{\sigma}^\beta = \delta_{\alpha\beta}\hat{\mathbb{I}} + i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\sigma}^\gamma\,(\alpha,\beta,\gamma\in\{x,y,z\}, \epsilon_{\alpha\beta\gamma} - \text{символ Леви-Чевиты })$$

3. *Они удобно экспоненциируются:* $\exp(ian_\alpha\hat{\sigma}^\alpha) = \cos a + in_\alpha\hat{\sigma}^\alpha\sin a$ *(тут* $\boldsymbol{n}$ *— произвольный единичный вектор). Указание: разложите экспоненту в ряд; из-за простого правила произведения матриц Паули, произвольные степени от их линейных комбинаций вычисляются достаточно просто*

Решение. 1. $M \in M_2(\mathbb{C})$ $M = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22}\end{pmatrix}$, *где* $z_{ij}\in\mathbb{C}$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$c_\mu \in \mathbb{C}$$

Докажем линейную независимость

$$c_0\sigma_0 + c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3 = \mathbf{o}$$

$$\begin{pmatrix} c_0 + c_3 & c_1 - ic_2 \\ c_1 + ic_2 & c_0 - c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Это система имеет имеет только тривиальное решение

$$c_0 = c_1 = c_1 = c_3 = 0$$

Теперь покажем что они покрывают всё пространство $M_2(\mathbb{C})$

$$M = c_0 I + c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3$$

$$\begin{pmatrix} c_0 + c_3 & c_1 - ic_2 \\ c_1 + ic_2 & c_0 - c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$$

$$c_0 + c_3 = z_{11}, c_0 - c_3 = z_{22}, c_1 - ic_2 = z_{12}, c_1 + ic_2 = z_{21}$$

$$c_0 = \frac{1}{2}\left(z_{11} + z_{22}\right), c_1 = \frac{1}{2}\left(z_{12} + z_{21}\right), c_2 = \frac{1}{2} i\left(z_{12} - z_{21}\right), c_3 = \frac{1}{2}\left(z_{11} - z_{22}\right)$$

2. Проверим

$$\sigma_x\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\delta_{11} + i\varepsilon_{11\gamma}\hat{\sigma}^{\gamma}$$

$$\sigma_x\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\delta_{12} + i\varepsilon_{123}\hat{\sigma}_3$$

$$\sigma_y\sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\delta_{23} + i\varepsilon_{231}\hat{\sigma}_1$$

$$\sigma_z\sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\delta_{32} + i\varepsilon_{312}\hat{\sigma}_2$$

3.

$$(\vec{a}\vec{\sigma})(\vec{b}\vec{\sigma}) = a_i b_k \sigma_i \sigma_k = a_i b_k\left(\delta_{ik} + ie_{ikl}\sigma_l\right) = (\vec{a}\vec{b}) + i[\vec{a}\times\vec{b}]\vec{\sigma}$$

$$(\vec{a}\vec{\sigma})(\vec{a}\vec{\sigma}) = \vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}X^k$$

$$\begin{aligned} &(\vec{\sigma}\vec{n})^2 = 1 \\ &(\vec{\sigma}\vec{n})^3 = (\vec{\sigma}\vec{n})^2(\vec{\sigma}\vec{n}) = (\vec{\sigma}\vec{n}) \\ &(\vec{\sigma}\vec{n})^4 = (\vec{\sigma}\vec{n})^2(\vec{\sigma}\vec{n})^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\left\{1 + \frac{1}{2!}(a)^2 + \frac{1}{4!}(a)^4 - \ldots\right\} + i(\vec{\sigma}\vec{n})\left\{a - \frac{1}{3!}(a)^3 + \frac{1}{5!}(a)^5 - \ldots\right\}$$

$$\exp\left(ian_\alpha\hat{\sigma}^\alpha\right) = \cos a + in_\alpha\hat{\sigma}^\alpha\sin a$$

Задача 1.1. *Осцилляции Раби* *На двухуровневую систему накладывается периодическое поле, которое может вызывать переходы между этой парой уровней:*

$$\hat{H}(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & Ve^{-i\omega t} \\ Ve^{i\omega t} & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

В начальный момент времени система находилась в состоянии $|\psi(t=0)\rangle = |\uparrow\rangle$. Определите вероятность обнаружить её в состоянии $|\downarrow\rangle$ через произвольное время t. Что происходит при резонансе, когда отстройка частоты $\delta \equiv \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \omega$ обращается в ноль? Указание: покажите, что от зависимости гамильтониана от времени можно избавиться «переходом во вращающуюся систему отсчёта» (rotating wave approximation) — унитарным преобразованием вида $\hat{U}(t) = e^{i\hat{\sigma}_z\omega_0 t}$. Чему равна соответствующая частота ω_0?

Решение. *Для начала преобразуем Гамильтониан.*

$$\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger - i\hbar\hat{U}\partial_t\hat{U}^\dagger$$

$$\hat{U}(t) = e^{i\hat{\sigma}_z\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + i\hat{\sigma}_z \sin\omega_0 t$$

$$\hat{H}' = (\cos\omega_0 t + i\hat{\sigma}_z\sin\omega_0 t)\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & Ve^{-i\omega t} \\ Ve^{i\omega t} & \varepsilon_2 \end{pmatrix}(\cos\omega_0 t - i\hat{\sigma}_z\sin\omega_0 t) +$$

$$+ i\hbar\omega_0 (\cos\omega_0 t + i\hat{\sigma}_z\sin\omega_0 t)(\sin\omega_0 t + i\hat{\sigma}_z\cos\omega_0 t)$$

$$\hat{H}' = \begin{pmatrix} \epsilon_1 - \omega_0 & Ve^{it\omega_0 - it\omega + it\omega_0} \\ Ve^{-it\omega_0 + it\omega - it\omega_0} & \omega_0 + \epsilon_2 \end{pmatrix}$$

$$\omega_0 = \frac{\omega}{2}$$

Задача 1.2. ***Два спина***
Найдите уровни энергии и собственные состояния для следующего гамильтониана, описывающего систему двух взаимодействующих спинов 1/2:

$$\hat{H} = -J\left(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2\right) = -J\left(\sigma_1^x \sigma_2^x + \sigma_1^y \sigma_2^y + \sigma_1^z \sigma_2^z\right)$$

Решение. *Будем решать*

$$\hat{H}\left|\psi\right\rangle = E\left|\psi\right\rangle \qquad \psi \in \mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$$

$$\hat{H}\left|\psi_1\right\rangle\left|\psi_2\right\rangle = E\left|\psi_1\right\rangle\left|\psi_2\right\rangle \qquad \left|\psi\right\rangle \in \mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$$

Выберем базис

$$\left|\uparrow\uparrow\right\rangle, \left|\uparrow\downarrow\right\rangle, \left|\downarrow\uparrow\right\rangle, \left|\downarrow\downarrow\right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} \left|\uparrow\uparrow\right\rangle \\ \left|\uparrow\downarrow\right\rangle \\ \left|\downarrow\uparrow\right\rangle \\ \left|\downarrow\downarrow\right\rangle \end{pmatrix}$$

$$\hat{H} = \sigma_1^x \otimes \sigma_2^x + \sigma_1^y \otimes \sigma_2^y + \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z$$

$$\hat{H} = -J\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= -J\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Собственные состояния

$$-J\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left|\uparrow\uparrow\right\rangle \\ \left|\uparrow\downarrow\right\rangle \\ \left|\downarrow\uparrow\right\rangle \\ \left|\downarrow\downarrow\right\rangle \end{pmatrix}$$

$$\left|1\right\rangle = \frac{\left|\uparrow\downarrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\right\rangle}{\sqrt{2}} \qquad E = -3$$

$$\left|2\right\rangle = \left|\downarrow\downarrow\right\rangle \qquad E = 1$$

$$\left|3\right\rangle = \frac{\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\right\rangle}{\sqrt{2}} \qquad E = 1$$

$$\left|4\right\rangle = \left|\uparrow\uparrow\right\rangle \qquad E = 1$$

2 Семинар 2

Упражнение 2.1. *Вычислите среднее значение спина* $\langle \boldsymbol{S} \rangle$ *и его дисперсию* $\langle (\boldsymbol{S} - \langle \boldsymbol{S} \rangle)^2 \rangle$ *для чистого* $|\chi\rangle = (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ *2 и смешанного* $\hat{\rho} = \left(\hat{\mathbb{P}}_\uparrow + \hat{\mathbb{P}}_\downarrow\right)/2$ *состояний спина 1/2. Комментарий: первая величина — это вектор, а вторая — это скаляр, длина вектора. Указание: Для частицы со спином 1/2 2 (например, электрон) оператор спина а (собственного момента) равен* $\hat{\boldsymbol{S}} = (\hbar/2)\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ *(то есть* $\hat{S}_x = (\hbar/2)\hat{\sigma}_x$ *и т. д.).*

Решение. $\langle \boldsymbol{S} \rangle = \langle \chi | \hat{\boldsymbol{S}} | \chi \rangle = \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_x \\ \hat{\sigma}_y \\ \hat{\sigma}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left\langle (\boldsymbol{S} - \langle \boldsymbol{S} \rangle)^2 \right\rangle = \langle \chi | (\boldsymbol{S} - \langle \boldsymbol{S} \rangle)^2 | \chi \rangle = \frac{\hbar^2}{4 \cdot 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \left((\hat{\sigma}_x - 1)^2 + \hat{\sigma}_y^2 + \hat{\sigma}_z^2 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\hbar^2}{4 \cdot 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} (3\mathbb{I} - 2\hat{\sigma}_x + 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{2}$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Tr} \hat{\rho} \hat{\boldsymbol{S}} = \frac{\hbar}{2} \operatorname{Tr} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_x \\ \hat{\sigma}_y \\ \hat{\sigma}_z \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \\ \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Tr} \hat{\rho} \, (\boldsymbol{S} - \langle \boldsymbol{S} \rangle)^2 = \operatorname{Tr} \hat{\rho} \left((\hat{\sigma}_x - 1)^2 + \hat{\sigma}_y^2 + \hat{\sigma}_z^2 \right) = \operatorname{Tr} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{2}$$

Задача 2.1. *Блоховское представление двухуровневой системы*

1. *Покажите, что матрицу плотности произвольной двухуровневой системы самого общего вида можно разложить по матрицам Паули в следующем виде:*

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbb{I}} + \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{n})$$

2. *При каком условии на* $\boldsymbol{n}$*, эта матрица плотности описывает чистое состояние?*

3. *Вычислите средние значения* $\langle \hat{\sigma}_{x,y,z} \rangle$ *по состоянию, описываемому такой матрицей плотности.*

Решение. *1.*

$$\hat{\rho} = \sum_{\alpha} p_\alpha |\alpha\rangle \langle \alpha|$$

Так как $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$ *тогда* $\hat{\rho}$ *можно раложить по базису* $\hat{\rho} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{n} + n_0 \sigma^0$ $\qquad \operatorname{Tr} \hat{\rho} = 1$

$\operatorname{Tr} \hat{\sigma}^i = 0 \qquad i \in \{1,2,3\}$

$\operatorname{Tr} \hat{\sigma}^0 = 2 \Longrightarrow n_0 = \frac{1}{2}$

$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \left(\hat{\sigma}^0 + n^i \hat{\sigma}_i \right)$

$\langle\psi|\,\hat\rho\,|\psi\rangle \geq 0 \quad \hat\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & 1-n_z \end{pmatrix}$

$\begin{cases} |n_z| \leq 1 \\ 1 - n_z^2 - n_x^2 - n_y^2 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \vec n \in \bar B_1(0)$

2. $\hat\rho^2 = \hat\rho$

   $\hat\rho^2 = \frac{1}{4}\left(\hat\sigma_0 + n_i\hat\sigma_i\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\left(\overline{n\sigma}\right)^2 + 2\left(n_0\sigma_0\right)\left(\overline{n\sigma}\right) + \left(n_0\sigma_0\right)^2\right) = \frac{1}{4}\hat\sigma_0 + \frac{1}{2}n^i\hat\sigma_i + \frac{1}{4}(\vec n)^2\hat\sigma_0 =$

   $= \frac{1}{2}\left(\frac{1+|\vec n^2|}{2}\sigma_0 + n^i\sigma_i\right)$

   $\frac{1+|\vec n^2|}{2} = 1 \Longrightarrow |\vec n|^2 = 1 \Longleftrightarrow \vec n \in \mathbb{S}^2$

3. $\langle\hat\sigma_i\rangle = \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}\left(\hat\sigma_0 + n^k\hat\sigma_k\right)\hat\sigma_i\right)$

   $\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}\left(\hat\sigma_i + n^k\left(\delta_{ki}\hat\sigma_0 + \varepsilon_{kin}\hat\sigma_n\right)\right)\right) = n_i$

   $\langle\hat\sigma\rangle = \vec n$

Задача 2.2. *Термодинамика двухуровневой системы Двухуровневая система описывается гамильтонианом $\hat H = -\boldsymbol{h}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, где $\boldsymbol{h} = (h_x, h_y, h_z)$, и находится при температуре T. Вычислите средние значения $\langle\hat\sigma_{x,y,z}\rangle$.*

Решение. $\hat\rho = \dfrac{1}{Z}e^{-\beta\hat H} = \dfrac{1}{Z}e^{-\frac{1}{T}\hat H} = \dfrac{1}{Z}e^{\frac{1}{T}h_x\hat\sigma_x + h_y\hat\sigma_z + h_z\hat\sigma_z}$

$$Z = \mathrm{Tr} = \frac{1}{Z}e^{\frac{|h|}{T}\left(\frac{h_x\hat\sigma_x}{|h|} + \frac{h_y\hat\sigma_y}{|h|} + \frac{h_z\hat\sigma_z}{|h|}\right)}$$

$$\mathrm{Tr}\left(\cos\left(-i\frac{|\vec h|}{T}\right) + \sin\left(-\frac{-i|\vec h|}{T}\right)\cdot\frac{h_\alpha\hat\sigma^\alpha}{|\vec h|}\right) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{ch}\left(\frac{|\vec h|}{T}\right) + \mathrm{sh}\left(\frac{|\vec h|}{T}\right)\cdot\frac{h_\alpha\sigma^\alpha}{|\vec h|}\right) = 2\,\mathrm{ch}\,\frac{|\vec h|}{T}$$

$$\hat\rho = \frac{e^{\frac{1}{T}(h_\alpha\hat\sigma^\alpha)}}{2\,\mathrm{ch}\,\frac{|\vec h|}{T}} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{ch}\,\frac{|\vec h|}{T}\cdot\mathbb{I} + \mathrm{sh}\,\frac{|\vec h|}{T}\frac{h_\alpha\hat\sigma^\alpha}{|\vec h|}}{\mathrm{ch}\,\frac{|\vec h|}{T}} = \frac{1}{2}\left(\mathbb{I} + \mathrm{th}\,\frac{|\vec h|}{T}\frac{h_\alpha\hat\sigma^\alpha}{|\vec h|}\right)$$

$$\langle\hat\sigma_x\rangle = \mathrm{Tr}\left(\hat\rho\hat\sigma_x\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\left(\mathbb{I} + \mathrm{th}\,\frac{|\vec h|}{T}\frac{h_\alpha\hat\sigma^\alpha}{|\vec h|}\right)\hat\sigma_x\right) = \frac{h_x}{h}\,\mathrm{th}\left(\frac{|\vec h|}{T}\right)$$

Аналогично

$$\langle\hat\sigma_y\rangle = \frac{h_y}{h}\,\mathrm{th}\left(\frac{|\vec h|}{T}\right)\ \langle\hat\sigma_z\rangle = \frac{h_z}{h}\,\mathrm{th}\left(\frac{|\vec h|}{T}\right)$$

Задача 2.3. *Рассмотрите двухуровневую систему, описываемую следующим гамильтонианом*

$$\hat H = \begin{pmatrix} E_0 & -\Delta \\ -\Delta & E_0 \end{pmatrix}$$

В начальный момент система приготовлена в состоянии $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle$. Если бы мы позволилит системе эволюционировать самой по себе, то она совершала бы осцилляции Раби; в частности, через время $T = \frac{\pi\hbar}{2\Delta}$ мы бы обнаружили её в состоятнии $|\downarrow\rangle$, с вероятностью $P_\downarrow(T) = 1$. Однако теперь вместо этого через каждый промежуток времени $\tau \ll T$ мы проводим измерение наблюдаемой $\hat\sigma_z$. Определите вероятность $P_\downarrow(T)$ в таком случае.

Решение. $|\psi(t)\rangle = e^{\frac{-iE_0t}{\hbar}}\left(\cos\frac{\Delta t}{\hbar}\cdot|\uparrow\rangle + i\sin\frac{\Delta t}{\hbar}\cdot|\downarrow\rangle\right)$

$$\hat\rho = \begin{pmatrix} \cos^2\left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right) & -\,i\sin\left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right)\cos\left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right) \\ i\sin\left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right)\cos\left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right) & \sin^2\left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right) \end{pmatrix}$$

После измерения

$$\hat\rho \to \hat\rho' = \begin{pmatrix} \cos^2\left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right) & 0 \\ 0 & \sin^2\left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right) \end{pmatrix}$$

$$\hat{\rho}(t) = |\psi\rangle\langle\psi| = \hat{U}(t,t_0)|\psi(0)\rangle\langle\psi(0)|\hat{U}^\dagger(t,t_0) = \hat{U}(t,t_0)\hat{\rho}(0)\hat{U}^\dagger(t,t_0)$$

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-i\hat{H}t/\hbar\right) = \hat{U}(t) = \exp\left(-i\hat{\mathbb{I}}t/\hbar\right)\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{\sigma}_z t/\hbar) = \exp\left(-iE_0\hat{\mathbb{I}}t/\hbar\right)(\cos\left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right)\mathbb{I}+ i\hat{\sigma}_z\sin\left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right)) = e^{-i\frac{E_0\hat{\mathbb{I}}t}{\hbar}}\begin{pmatrix}\cos\alpha & i\sin\alpha\\ i\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

3 Точно решаемые модели II

Задача 3.1 (Теорема Вика)**.**

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z}e^{-\beta\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}$$

$\langle e^{\alpha_1\hat{a}+\alpha_2\hat{a}^\dagger}\rangle = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\, e^{\alpha_1\hat{a}+\alpha_2\hat{a}^\dagger})$

$$e^{\alpha_1\hat{a}+\alpha_2\hat{a}^\dagger} = e^{\alpha_1\hat{a}}e^{\alpha_2\hat{a}^\dagger}e^{-\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2} = \frac{1}{Z}e^{\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2}\,\mathrm{Tr}\, e^{\alpha_1\hat{a}}e^{\alpha_2\hat{a}^\dagger}e^{\beta\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}}$$

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle\ \hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger\sum_n\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = \sum_n\frac{\alpha^n}{\sqrt{n^2}}\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\ \hat{a}\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle = \alpha\hat{a}^\dagger|\alpha\rangle + |\alpha\rangle$$

$$\hat{I} = \int\frac{d\alpha d\alpha^*}{\pi}e^{-|\alpha|^2}|\alpha\rangle\langle\alpha|\ \langle\rangle = \frac{1}{Z}e^{\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2}\,\mathrm{Tr}(e^{\alpha_1\hat{a}}e^{\alpha_2\hat{a}^\dagger}\int\frac{d\alpha d\alpha^*}{\pi}e^{-|\alpha|^2}|\alpha\rangle\langle\alpha|)A = \int\frac{d\alpha d\alpha^*}{\pi}e^{-|\alpha|^2}e^{\alpha_1\hat{a}}e^{\alpha_2\hat{a}^\dagger}|\alpha\rangle$$

$$\langle\alpha|\, e^{-\beta\omega\hat{a}\hat{a}^\dagger} = \left\langle e^{-\beta\omega\hat{a}\hat{a}^\dagger}\alpha\right|$$

$$e^{-\beta\omega\hat{a}\hat{a}^\dagger}|\alpha\rangle = e^{-\beta\omega\hat{a}\hat{a}^\dagger}\sum_n\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle =$$

$$\sum_n\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{-\beta\omega\hat{a}\hat{a}^\dagger}|n\rangle\ \left\langle e^{-\beta\omega\hat{a}\hat{a}^\dagger}\alpha\right| = \sum_n\frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}}e^{-\beta\omega\hat{a}\hat{a}^\dagger}|n\rangle$$

$$e^{\alpha_2\hat{a}^\dagger}|\alpha\rangle = e^{\alpha_2\hat{a}^\dagger}\sum_n\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle\ e^{\alpha_2\hat{a}^\dagger}|n\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_2^k(\hat{a}^\dagger)^k}{k!}|n\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_2^k}{k!}\sqrt{\frac{(n+k)!}{n!}}|n+k\rangle$$

$$\langle\ldots\rangle = \frac{1}{Z}e^{\frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2}\,\mathrm{Tr}(e^{\alpha_2\hat{a}^\dagger}e^{\alpha_1\hat{a}}\int\frac{d\alpha d\alpha^*}{\pi}e^{-|\alpha|^2}|\alpha\rangle\langle\alpha|\, e^{\beta\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}})$$

$$e^{\alpha_1\hat{a}}|\alpha\rangle = e^{\alpha_1\alpha}|\alpha\rangle$$

$$e^{-\alpha_2\vec{a}^+}e^{\alpha}e^{\alpha_2\hat{a}^\dagger}e^{\alpha_1\hat{a}}|\alpha\rangle =$$

$$e^{\alpha_1\alpha}e^{\alpha_2\hat{a}^\dagger}|\alpha\rangle = e^{\alpha_1\alpha}e^{\alpha_2\hat{a}^\dagger}\sum_n\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle =$$

$$e^{\alpha_1\alpha}\left(\sum_n\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\sum_k\frac{\alpha^n}{\sqrt{n}}\frac{(n+k)!}{n!}|n+k\rangle\right) = e^{\alpha_1\alpha}\sum_n\sum_k\frac{\alpha^n\alpha_2^n\sqrt{(n+k)!}}{n!k!}|n+k\rangle$$

$$\mathrm{Tr}\left(\int \frac{d\alpha d\alpha^*}{\pi} e^{|\alpha|^2} e^{\alpha_1 \alpha} \left(\sum_n \sum_k \frac{\alpha^n \alpha_2^k}{k!n!} \left|n+k\right\rangle\right) \left(\sum_p \frac{(\alpha^*)^p}{\sqrt{p!}} e^{-\beta\omega p} \left\langle p\right|\right)\right)$$

$$\mathrm{Tr}\left(\int \frac{d\alpha d\alpha^*}{\pi} \sum_p \sum_k \sum_n \frac{\alpha^n (\alpha^*)^p \alpha_2^h}{k!n!\sqrt{p!}} \sqrt{(n+k)!} e^{-\beta\omega p} \delta_{pn+k}\right)$$

$$\mathrm{Tr}(\int \frac{d\alpha d\alpha^*}{\pi} e^{-|\alpha|^2} e^{\alpha_1 \alpha_1} \sum_n \sum_k \frac{\alpha^n (\alpha^*)^{n+k} \alpha_2^k}{k!n!} e^{\beta\omega(n+k)}) = \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} e^{\beta\omega n} (\alpha^*)^n \sum_k \frac{(\alpha^*)^k \alpha_2^k}{k} e^{\beta\omega k} =$$

$$\exp\left(\alpha\alpha^* e^{-\beta}\right) \exp\left(\alpha_2 \alpha^* e^{-\beta}\right)$$

$$= \int \frac{d\alpha d\alpha^*}{\pi} e^{-|\alpha|^2} e^{|\alpha|^2 e^{-\beta\omega}} e^{\alpha_1 \alpha} e^{\alpha_2 \alpha^* e^{-\beta\omega}}$$

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dxdy}{\pi} e^{-(1-e^{\beta\omega})(x^2+y^2)} e^{\alpha_1(x+iy)} e^{\alpha_2(x-iy)e^{-\beta\omega}}$$

$$I_2 = \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-(1-e^{\beta\omega})x^2} e^{\alpha_1 x + \alpha_2 x e^{-\beta\omega}} dx$$

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-(1-e^{\beta\omega})y^2} e^{iy(\alpha_1 - \alpha_2 e^{-\beta\omega})} dy$$

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{(1-e^{-\beta\omega})}} \exp\left(\frac{(\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\beta\omega})^2}{4(1-e^{-\beta\omega})}\right)$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{(1-e^{-\beta\omega})}} \exp\left(-\frac{(\alpha_1 - \alpha_2 e^{-\beta\omega})^2}{4(1-e^{-\beta\omega})}\right)$$

$$I_1 I_2 = \frac{1}{1-e^{\beta\omega}} \exp\left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 e^{-\beta\omega}}{1-e^{-\beta\omega}}\right) = \frac{e^{-\beta\omega}}{(1-e^{-\beta\omega})^2}$$

$$\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = \frac{e^{-\beta\omega}}{(1-e^{-\beta\omega})}$$