Differential Geometry

Sergey Barseghyan

16 сентября 2019 г.

1 Линейная алгебра

Определение 1. *Векторное пространство V - множество снабженное двумя операциями:*

1. *сложение*
2. $\forall x \in V$, $\lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda x \in V$

Определение 2. $\dim V = n$, *то* $\exists e_i \in V$, $i = 1, \ldots, n$; *такие, что* $\forall v \in V$: $v = v^i e_i$, $v^i \in \mathbb{R}$

Выбор базиса даёт изоморфизм $V \backsimeq \mathbb{R}^n$ (линейное отображение). Это отображение устроено так: $v = \left(v^i\right) \in V \longmapsto \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, а обратное $\mathbb{R} \backsimeq V$, $\mathbb{R} \ni \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \longmapsto v^i e_i \in V$

$$\forall e \in V \longrightarrow \begin{array}{l} \mathbb{R} \to V \\ \lambda \in \mathbb{R} \to \lambda e \in V \end{array}$$

Определение 3. *$U \subset V$ подмножество векторное пространтсво V называется **подпространством**, если U замкнуто относительно сложения и умножения на $\lambda \in \mathbb{R}$*

Утверждение 1. *Все векторные пространства одинаковой размерности изоморфны.*

Определение 4. *Отображение $\varphi : V \mapsto W$, где V и W векторные пространства, называется линейным, если $\forall v_1, v_2 \in V, \forall \in \mathbb{R}$ выполняется*

$$\begin{array}{l} \varphi\left(v_1 + v_2\right) = \varphi\left(v_1\right) + \varphi\left(v_2\right) \\ \varphi\left(\lambda v_1\right) = \lambda \varphi\left(v_1\right) \end{array}$$

$\mathrm{Hom}(V, W) = \{\varphi | \varphi -$ линейное отображение$\}$-векторное пространтво

Упражнение 1.1. *Пусть $\{e_i\}$ - базис в V, а $\{b_j\}$ - базис в W.*

$\varphi : (v^i) \to (w^j) \quad i = 1, \ldots, \dim V = n \ v \to \varphi(v) = w \quad j = 1, \ldots, \dim w = m$
$\varphi -$ линейно $\Longrightarrow w^i = A^j_i v^i$, где $A^j_i \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{c} \varphi\left(v^i e_i\right) = v^i \varphi\left(e_i\right) \\ W \ni \varphi\left(e_i\right) = A^j_i f_j \end{array}$$

Таким образом

$$\mathrm{Hom}(V, W) \cong \left\{ \begin{array}{ll} A^j_i & i = 1, \cdots \\ & j = 1, \cdots \end{array} \right\} = \mathbb{R}^{n \cdot m} \longleftarrow Mat_{n \times m}(\mathbb{R})$$

Определение 5. *V_1, V_2 - векторные простнаства, тогда* $V_1 \oplus V_2 = \left\{\left(u, u_2\right) | u_i \in V_i\right\}$

1. $(u_1, u_2) + (u_1', u_2') = (u_1 + u_1' \; u_2 + u_2')$,
2. $\lambda (u_1, u_2) = (\lambda u_1, \lambda u_2)$

V_1, V_2 вложены в $V_1 \oplus V_2$ $u \in V_i \longmapsto (u, 0) \in V_1 \oplus V_2$

Определение 6. *Для векторного пространства V , пространство линейных функционалов на V обозначается V^* и называется двойственным пространством.*

$$V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}), \quad \dim V^* = \dim V$$