Лекция 2

Основные понятия дифференциальной геометрии и пространство-время

В специальной теории относительности мир представлял собой плоское (аффинное) пространство, и у нас не было принципиальной необходимости вводить криволинейные координаты на нем. Законы физики удобно было связывать с плоскими координатами, причем временна́я координата отвечала некоторой инерциальной системе отсчета, а пространственные координаты были произвольными координатами в одновременном слое. В общей теории относительности инерциальные системы отсчета никак не выделены. Более того, мир описывается как некоторое многообразие с (псевдоримановой) метрикой, и законы физики должны быть сформулированы так, чтобы их можно было записать в произвольных координатах. В этой и следующей лекции я введу основные геометрические понятия, которые нам будут нужны на протяжении всего курса.

Дадим сначала определения. Пусть на множестве M задано множество его подмножеств $\mathcal{T}$, удовлетворяющее трем условиям:

1. Объединение элементов произвольного подмножества множества $\mathcal{T}$ принадлежит $\mathcal{T}$.

2. Пересечение элементов произвольного *конечного* подмножества $\mathcal{T}$ принадлежит $\mathcal{T}$.

3. $\varnothing, M \in \mathcal{T}$.

Тогда $\mathcal{T}$ называется *топологией* на множестве M, элементы $U \in \mathcal{T}$ — *открытыми* множествами, а пара $(M, \mathcal{T})$ — *топологическим пространством.*

Для пары топологических пространств $(M, \mathcal{T})$ и $(M', \mathcal{T}')$ отображение $f : M \to M'$ называется *непрерывным*, если прообраз любого открытого множества открыт: $f(U) \in \mathcal{T}' \Rightarrow U \in \mathcal{T}$.

Отображение $f : M \to M'$ называется *гомеоморфизмом* топологических пространств, если оно взаимно-однозначно и оба отображения f и f^{-1} непрерывны.

Если любой элемент множества $\mathcal{T}$ можно получить объединением элементов некоторого его подмножества $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, то такое подмножество называется *базой топологии.*

Топологическое пространство $(M, \mathcal{T})$ (для простоты будем писать M) называется *хаусдорфовым* если топология удовлетворяет *сильной аксиоме отделимости*: для любой пары точек имеются непересекающиеся окрестности:

$$\forall x, y \in M,\ x \neq y :\ \exists U, V \in \mathcal{T},\ x \in U,\ y \in V,\ U \cap V = \varnothing.$$

Примером хаусдорфова топологического пространства является пространство $\mathbb{R}^d$, база топологии которого состоит из всех открытых шаров $B_r(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, |x - y| < r \right\}$ $(\forall x, r)$. На самом деле можно построить базу из счетного множества открытых шаров, так что это топологическое пространство со счетной базой.

Если у каждой точки $x_0 \in M$ хаусдорфова топологического пространства M со счетной базой топологии имеется окрестность U, гомеоморфная пространству $\mathbb{R}^d$, то есть существует непрерывное вместе со своим обратным взаимно-однозначное отображение $\phi : U \to \mathbb{R}^d$, то топологическое пространство M будем называть *топологическим многообразием* размерности n. Пару (U, ϕ) называют *картой* на многообразии M. Совокупность функций $\phi^\mu(x)$ дает *систему координат* на открытом множестве U. Если мы изучаем многообразие только в окрестности точки x, то вместо $\phi^\mu(x)$ часто пишут просто x^μ. Мы тоже будем так часто делать, а если у нас будут две системы координат в одной области, то будем обозначать их какими-нибудь дополнительными значками, например, штрихом: $x^\mu = \phi^\mu(x)$, $x'^\mu = \phi'^\mu(x)$.

Отметим, что вместо всего пространства $\mathbb{R}^d$ можно взять некоторое его открытое (в смысле $\mathbb{R}^d$) подмножество, гомеоморфное $\mathbb{R}^d$. Это удобно в практических вычислениях, потому что позволяет брать более «естественные» функции ϕ. Мы всегда будем понимать карты и системы координат в таком более общем виде.

Предположим, что на M имеется множество карт (U_α, ϕ_α), $\alpha \in A$, удовлетворяющее условиям:

1. Карты U_α покрывают все многообразие: $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$.

2. Для любых $\alpha, \beta \in A$, таких что $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, отображение *склейки* $\phi_\alpha^\beta = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ является C^k-гладким во всей области его определения.

Тогда мы будем говорить, что (U_α, ϕ_α) образуют *C^k-гладкий атлас* на M. Два C^k-гладких атласа считаются *эквивалентными*, если их объединение тоже является C^k-гладким атласом. Класс эквивалентности C^k-гладких атласов образует *C^k-гладкую структуру.* Многообразие M с заданной на ней C^k-гладкой структурой называется *C^k-гладким многообразием.*

В дальнейшим мы будем считать k достаточно большим для того, чтобы все выражения, которые мы будем писать были хорошо определены, и просто говорить о «гладком многообразии». Обычно для этого будет достаточно $k = 2$.

Рассмотрим гладкое многообразие M. В этой лекции мы введем два фундаментальных объекта — аффинную связность и метрику. Нас будут интересовать только локальные свойства многообразия, поэтому мы ограничимся одной картой с координатами $x^\mu = \phi^\mu(x)$.

Прежде всего, напомним понятие касательного пространства. Рассмотрим пространство $C(M)$ гладких вещественнозначных функций на M. Пусть $x_0 \in M$. Рассмотрим параметрическую кривую $x = \varphi(\tau)$, такую что $x_0 = \varphi(0)$. Тогда дифференцирование $\dot\varphi(0)$ вдоль кривой в точке $\tau = 0$ представляет собой оператор на $C(M)$:

$$\forall f \in C(M): \ \dot\varphi(0)f = \left.\frac{df(\varphi(\tau))}{d\tau}\right|_{\tau=0} = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu}\right|_{x=\varphi(0)} \left.\frac{d\varphi^\mu(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=0}.$$

Легко понять, что совокупность всех операторов $\dot\varphi$, связанных со всеми возможными кривыми, проходящими через точку x_0, образуют векторное пространство. Действительно, для двух кривых φ и χ операторы $\dot\varphi(0)$ и $\dot\chi(0)$ совпадают, если $(\varphi^\mu)'(0) = (\chi^\mu)'(0)$, так что любой оператор $\dot\varphi(0)$ может быть однозначно записан в виде $a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, где $a^\mu = (\varphi^\mu)'(0)$. С другой стороны, для любого оператора $a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ можно найти такую кривую $\varphi(x)$, что это уравнение будет выполняться. Для любого набора чисел a^μ определим оператор $a = a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Структура линейного пространства задается очевидным равенством

$$\alpha a + \beta b = (\alpha a^\mu + \beta b^\mu)\frac{\partial}{\partial x^\mu}.$$

Легко проверить, что оно не зависит от выбора координат. Линейное пространство $TM_{x_0} = T^1M_{x_0}$ таких операторов называется *касательным пространством* к многообразию M в точке x_0. Совокупность касательных пространств со структурой многообразия на них образует *касательное расслоение* $TM = T^1M$. На языке расслоений векторные поля представляют собой гладкие сечения касательного расслоения. Пространство таких сечений мы будем обозначать $C(TM)$.

Векторы в касательном расслоении можно представлять себе как бесконечно малые сдвиги. Действительно, пусть $a \in TM$, а $f \in C(M)$. В любой системе координат мы можем написать

$$f(x^\bullet + \varepsilon a^\bullet) = f(x) + \varepsilon a^\mu \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} + O(\varepsilon^2) = f(x) + \varepsilon a f(x) + O(\varepsilon^2).$$

Рассмотрим пространство двойственное к TM_{x_0}, то есть пространство линейных форм на TM_{x_0}. Если у нас выбраны координаты x^μ, то с каждой координатой связана форма dx^μ, определенная уравнением

$$dx^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = \delta^\mu_\nu,$$

то есть базис $\{dx^\mu\}$ представляет собой базис, двойственный к базису $\left\{\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right\}$ в касательном пространстве. Это пространство называется *кокасательным пространством* $T^*M_{x_0} = T_1M_{x_0}$, а совокупность кокасательных пространств образует *кокасательное расслоение* $T^*M = T_1M$. Поля 1-форм представляют собой гладкие сечения кокасательного расслоения, образующие пространство $C(T_1M)$. Более обще, тензорное произведение $T^m_nM_{x_0} = TM^{\otimes m}_{x_0} \otimes T^*M^{\otimes n}_{x_0}$ представляет собой пространство тензоров с m верхними и n нижними индексами (у компонент) в точке x_0. Соответствующие тензорные поля определяются как сечения расслоения T^m_nM.

Вместо символа $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ мы часто будем использовать символ ∂_μ. Оба этих символа мы будем применять как для обозначения базисного вектора в касательном пространстве (то есть оператора на пространстве функций на многообразии), так и для обозначения дифференцирования функции нескольких переменных (оператора на пространстве функций в $\mathbb{R}^d$, в том числе отвечающих функциям на многообразии в системе координат $\{x^\bullet\}$. Кроме того, для функции d переменных $f(x^\bullet) = f(x^0, x^1, \dots, x^{d-1})$ мы будем писать $f_{,\mu} = \partial_\mu f$.

Теперь возникает вопрос о том, как «склеить» слои касательного расслоения TM друг с другом. В аффинном пространстве все слои касательного расслоения естественным образом отождествляются с «подлежащим» векторным пространством V и, таким образом, между собой. На произвольном многообразии такого естественного способа не существует. Если мы проведем на многообразии некоторую незамкнутую и несамопересекающуюся кривую, можно отождествить касательные пространства (т.е. построить взаимно-однозначные отображения между ними) в точках кривой каким-нибудь способом. Мы хотим, чтобы

- этот способ был локален, то есть правило было задано в каждой точке многообразия M и зависело только от направления $\dot\varphi(\tau)$, в котором кривая проходит через эту точку;
- этот способ уважал структуру линейного пространства на TM_x, то есть переводил линейную комбинацию векторов в линейную комбинацию перенесенных векторов с теми же коэффициентами;
- этот способ был гладким, то есть компоненты «постоянного» вектора вдоль гладкой кривой являлись гладкими функциями параметра кривой, если она задана так, чтобы координаты были гладкими функциями параметра.

Предположим, мы хотим перенести вектор a из точки x_0 вдоль кривой $\varphi(\tau)$, $\varphi(0) = x_0$. Пусть $a(\tau)$ есть результат такого переноса. Иными словами, $a(\tau)$ есть постоянный по отношению к переносу вектор. Пусть также $b(\tau) = \dot\varphi(\tau)$. Мы хотим построить такой оператор ∇_b, что

$$\nabla_{b(\tau)} a(\tau) = 0. \tag{2.1}$$

Этот оператор мы будем называть *ковариантной производной*, а вектор $a(\tau)$, удовлетворяющий этому условию, — *ковариантно-постоянным* вдоль кривой $\varphi(\tau)$. В силу условия локальности оператор может зависеть только от точки $x = \varphi(\tau)$, но не от самого параметра τ. В частности, это значит, что репараметризация $\tau = p(\lambda)$ не изменит этого условия. Направляющий вектор к этой кривой равен $p'(\lambda) b(p(\lambda))$. Отсюда следует, что условие $\nabla_{\alpha(\tau) b(\tau)} a(\tau) = 0$ должно выполняться для любой функции $\alpha(\tau)$. Очевидно, что для аффинного пространства за оператор ∇_b можно принять сам вектор b. Поэтому постулируем, что оператор ∇_b линеен по b. С другой стороны, потребуем, чтобы, как и оператор дифференцирования b, он удовлетворял правилу Лейбница по a. Более точно, наложим следующие условия:

$$\nabla_{fb} a = f \nabla_b a, \tag{2.2}$$
$$\nabla_b (fa) = (bf) a + f \nabla_b a \qquad (\forall f \in C(M),\ a, b \in C(TM)). \tag{2.3}$$

Последнее условие связывает параллельный перенос вектора с параллельным переносом скаляра и нормирует его. Первое условие означает, что существует оператор (*ковариантный дифференциал*) $\nabla : C(TM) \to C(T^1_1 M)$, такой что $\nabla_b a = b^{\mathbf{1}} \nabla_{\mathbf{1}} a = b^\mu = b^\mu \nabla_\mu a$, где $\nabla_\mu \equiv \nabla_{\partial_\mu}$. Иными словами, $\nabla = dx^\mu \, \nabla_\mu$. Мы будем говорить, что ковариантный дифференциал задает *аффинную связность* на многообразии M.[1] Найдем общий вид оператора ∇ в координатах. Условие (2.3) переписывается в виде

$$\nabla (fa) = df\, a + f \nabla a \tag{2.3a}$$

или, в компонентах,

$$\nabla_\mu (fa) = \partial_\mu f\, a + f \nabla_\mu a. \tag{2.3b}$$

Применим эту формулу к $\nabla_\mu a = \nabla_\mu (a^\nu \partial_\nu)$, подставив вместо f компоненту a^ν, а вместо a базисный вектор ∂_ν:

$$\nabla_\mu (a^\nu \partial_\nu) = (\partial_\mu a^\nu) \partial_\nu + a^\nu \nabla_\mu \partial_\nu. \tag{2.4}$$

[1]Вообще говоря связность задается на *расслоении*. Аффинная связность является связностью на *касательном* расслоении TM, и индуцирует согласованные с ней связности на всех тензорных расслоениях $T^m_n M$, которые также называют аффинными (см. ниже).

Левую часть разложим по базису

$$\nabla_\mu(a^\nu\partial_\nu) = (\nabla_\mu a)^\lambda\partial_\lambda, \tag{2.5}$$

В правой части (2.4) первый член уже разложен по базису, а для второго члена имеем

$$\nabla_\mu\partial_\nu = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}\partial_\lambda. \tag{2.6}$$

Коэффициенты разложения $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ называются *символами Кристоффеля.* Подставляя (2.5) и (2.6) в (2.4), получаем

$$(\nabla_\mu a)^\lambda = \partial_\mu a^\lambda + \Gamma^\lambda_{\nu\mu}a^\nu. \tag{2.7}$$

Набор символов Кристоффеля (как функций точки) однозначно задает связность на данном многообразии. Заметим, что для краткости часто пишут $\partial_\mu a^\lambda = a^\lambda{}_{,\mu}$, $(\nabla_\mu a)^\lambda = a^\lambda{}_{;\mu}$.

Говоря о существовании оператора ∇, я сделал небольшую подмену. Дело в том, что оператор ∇_b в (2.1) не требует, чтобы векторное поле a было определено в некоторой области пространства. Достаточно, чтобы оно было определено на кривой $\varphi(\tau)$. Поэтому следует оговориться, что условие (2.1) может быть определено через ковариантную производную ∇ для произвольного гладкого продолжения $a(\tau)$ на окрестность кривой. В силу того, что $\dot\varphi^\mu\partial_\mu = d/d\tau$, мы можем записать его в виде

$$\dot a^\lambda(\tau) + \Gamma^\lambda_{\nu\mu}\dot\varphi^\mu(\tau)a^\nu(\tau) = 0. \tag{2.8}$$

Аффинная связность может быть легко обобщена на общее тензорное расслоение T^m_nM. Действительно, для функций на многообразии ковариантная производная совпадает с обычной:

$$\nabla_b f = bf, \qquad f\in C(M). \tag{2.9}$$

Тогда легко определить связность на кокасательном расслоении через правило Лейбница:

$$(\nabla_b\omega)(a) + \omega(\nabla_b a) = b\omega(a), \qquad \omega\in C(T^*M),\ a\in C(TM). \tag{2.10}$$

Явно получаем

$$(\nabla_\mu\omega)_\kappa = \partial_\mu\omega_\kappa - \Gamma^\nu_{\kappa\mu}\omega_\nu. \tag{2.11}$$

Наконец, для общего тензорного поля $t\in C(T^m_nM)$ ковариантная производная определяется через правило Лейбница для свертки $t^{\mathbf{1}\ldots\mathbf{m}}{}_{\mathbf{m+1},\ldots,\mathbf{m+n}}\omega^{(1)}_{\mathbf{1}}\cdots\omega^{(m)}_{\mathbf{m}}a^{\mathbf{m+1}}_{(1)}\cdots a^{\mathbf{m+n}}_{(n)}$ тензорного поля с m 1-формами $\omega^{(i)}$ и n векторами $a_{(j)}$. В координатном базисе ковариантная производная тензора t выглядит так

$$(\nabla_\mu t)^{\lambda_1\ldots\lambda_m}{}_{\kappa_1\ldots\kappa_n} = \partial_\mu t^{\lambda_1\ldots\lambda_m}{}_{\kappa_1\ldots\kappa_n} + \sum_{i=1}^m \Gamma^{\lambda_i}_{\nu_i\mu}t^{\lambda_1\ldots\nu_i\ldots\lambda_m}{}_{\kappa_1\ldots\kappa_n} - \sum_{j=1}^n \Gamma^{\nu_j}_{\kappa_j\mu}t^{\lambda_1\ldots\lambda_m}{}_{\kappa_1\ldots\nu_j\ldots\kappa_n}. \tag{2.12}$$

Теперь зададимся вопросом: как переносится касательный к кривой вектор? Вообще говоря, после переноса он перестает быть касательным. Кривые, для которых касательный к ней вектор является вдоль нее ковариантно-постоянным, называются *геодезическими.* Если мы дополнительно потребуем, чтобы семейство векторов $\dot\varphi(\tau)$ было бы постоянным на кривой (это означает специальную параметризацию кривой), то уравнение геодезической примет вид

$$\nabla_{\dot\varphi(\tau)}\dot\varphi(\tau) = 0. \tag{2.13}$$

В силу (2.8) в координатах это уравнение имеет вид

$$\ddot\varphi^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\dot\varphi^\mu\dot\varphi^\nu = 0. \tag{2.14}$$

Геодезические будут играть большую роль. Как мы увидим ниже, они дают мировые линии частиц, свободно падающих в гравитационном поле. Рассмотренная здесь специальная параметризация геодезической отвечает тому, что параметр τ пропорционален собственному времени частицы.

Важно заметить, что символы Кристоффеля $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ не являются компонентами какого-либо тензорного поля. Это легко понять хотя бы из того, что символы Кристоффеля естественной связности в аффинном пространстве тождественно равны нулю в плоских координатах и не равны нулю в криволинейных координатах, в то время как тензор не может обращаться или не обращаться в нуль в зависимости от базиса. Нетрудно показать, что при преобразовании координат $x^\mu = x^\mu(x'^\bullet)$ символы Кристоффеля преобразуются по закону

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma'^\kappa_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 x'^\kappa}{\partial x^\mu\, \partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\kappa}. \tag{2.15}$$

В то же время *разность* двух связностей является тензором. Пусть $\nabla, \tilde\nabla$ — две связности, а $\Gamma, \tilde\Gamma$ — соответствующие символы Кристоффеля. Тогда, очевидно, разности $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \tilde\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ преобразуются как компоненты тензора. По-другому: из определения (2.2), (2.3) немедленно следует, что

$$(\nabla_{fb} - \tilde\nabla_{fb})a = f(\nabla_b - \tilde\nabla_b)a,$$
$$(\nabla_b - \tilde\nabla_b)(fa) = f(\nabla_b - \tilde\nabla_b)a,$$

то есть разность связностей в точке x является линейным отображением $TM_x \otimes TM_x \to TM_x$, то есть тензором из $T^1_2 M$.

Другая тензорная величина, связанная со связностью, это *кручение*:

$$T(a,b) = \nabla_a b - \nabla_b a - [a,b] \quad (\forall a, b \in C(TM)) \quad \Leftrightarrow \quad T^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \tag{2.16}$$

Легко видеть, что для $T^\lambda_{\mu\nu}$ второе слагаемое в (2.15) сокращается и, таким образом, кручение является тензором.

До сих пор мы вводили аффинную связность чисто аксиоматически. В общей теории относительности возникает связность специального вида: связность, определяемая метрикой, или связность Ле́ви-Чиви́ты. Во-первых, введем метрику на многообразии M. Многообразие M называется *псевдоримановым многообразием*, если на нем задано поле симметричной невырожденной формы $g \in C(T_2 M)$, $g_x(a,b) = g_x(b,a)$. Такая форма называется *метрикой*. В силу непрерывности и невырожденности сигнатура метрики на псевдоримановом многообразии постоянна. В дальнейшем мы будем рассматривать многообразия с метрикой, которая может вырождаться на подмногообразиях меньшей размерности, однако в интересующих нас случаях такое вырождение будет иметь место только на границах многообразия. В рамках ОТО нас будут интересовать многообразия с сигнатурой $(1,3)$ (или иногда $(1, d-1)$).

Связность ∇ называется *согласованной с метрикой*, если она ковариантно-постоянна:

$$\nabla_c g = 0 \ (\forall c \in C(TM)) \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0. \tag{2.17}$$

Связность ∇ называется *связностью без кручения*, если она удовлетворяет условию

$$T^\bullet_{\bullet\bullet} = 0. \tag{2.18}$$

Имеется единственная связность без кручения, согласованная с метрикой. Такая связность называется *связностью Леви-Чивиты*. Явно символы Кристоффеля для связности Леви-Чивиты записываются как

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} (\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu}). \tag{2.19}$$

Метрика позволяет связывать объекты разной тензорной природы, попросту говоря, поднимать и опускать индексы. Например, вектору $a = a^\mu \partial_\mu$ можно сопоставить форму $\overline{g}(a) = g_{\mu\nu} a^\nu\, dx^\mu = a_\mu\, dx^\mu$. Наоборот, форме $\omega = \omega_\mu\, dx^\mu$ можно сопоставить вектор $\overline{g}^*(\omega) = g^{\mu\nu}\omega_\nu \partial_\mu = \omega^\mu \partial_\mu$.

Задачи

1. Рассмотрим две системы координат $\{x^\bullet\}$ и $\{x'^\bullet = f^\bullet(x^\bullet)\}$ в некоторой области многообразия M. Пусть $a = a^\mu \partial_\mu = a'^\mu \partial'_\mu \in TM_{x_0}$. Получите закон преобразования компонент вектора

$$a'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} a^\nu. \tag{2.20}$$

Частные производные здесь понимаются в следующем смысле: $\partial_\nu x'^\mu = f^\mu{}_{,\nu}(x^\bullet)|_{x^\bullet = x^\bullet_0}$.

Пусть $\omega = \omega_\mu \, dx^\mu = \omega'_\mu \, dx'^\mu \in T^* M_{x_0}$. Получите закон преобразования компонент формы

$$\omega'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \omega_\nu. \tag{2.21}$$

Частные производные здесь понимаются в смысле $\partial'_\mu x^\nu = (f^{-1})^\nu{}_{,\mu}(f^\bullet(x^\bullet))|_{x^\bullet = x_0^\bullet}$. Наконец, напишите закон преобразования компонент произвольного тензора $a \in T^m_n M_{x_0}$.

2. Рассмотрим двумерное аффинное пространство. На этом пространстве имеется естественная связность, в которой $\nabla_\mu = \partial_\mu$ в линейных координатах. Найдите символы Кристоффеля этой связности в полярных координатах r, φ: $x^1 = r \cos\varphi$, $x^2 = r \sin\varphi$.

3. Проверьте эквивалентность определений в (2.16).

4. Получите символы Кристоффеля для связности Леви-Чивиты (2.19).

5*. Выведите закон преобразования символов Кристоффеля (2.15).

Семинар 2

Физическая интерпретация метрики

Системы отсчета в общей теории относительности существуют только локально, поэтому каждой системе координат соответствует семейство систем отсчета в каждой точке. Мы будем разбирать физическую интерпретацию геометрических данных.

Измерить расстояние между двумя близко расположенными частицами можно следующим образом. На одной частице расположим источник сигнала, распространяющегося со скоростью света, а на другой — зеркало. Испустим из первой частицы сигнал в сторону второй частицы. Сигнал отразится от второй частицы и вернется к первой. На первой частице произведем измерение времени испускания t_1 и приема t_2 сигнала, а на второй — момента отражения t'_0. Тогда за расстояние между частицами примем величину $l = \frac{1}{2}(t_2 - t_1)$, а за момент времени на первой частицы, синхронный с t'_0 на второй частице — момент $t_0 = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$.

Мы покажем, что:

1. Интервалы времени в системе отсчета даются формулой $d\tau = \sqrt{g_{00}} \, dt$.

2. Пространственные расстояния между близкими точками даются метрикой

$$dl^2 = \gamma_{ik} \, dx^i \, dx^k, \qquad \gamma_{ik} = -g_{ik} + \frac{g_{0i} g_{0k}}{g_{00}} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma^{ik} = -g^{ik}. \tag{2.22}$$

3. События в расположенных поблизости точках одновременны в локальной системе отсчета, связанной с данной системой координат, если

$$dx^0 = -\frac{g_{0i}}{g_{00}} \, dx^i. \tag{2.23}$$

4. На римановом многообразии на достаточно малой карте можно ввести *синхронную систему координат* с метрикой

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{ik} \, dx^i \, dx^k. \tag{2.24}$$

   Временные линии в этой системе координат являются геодезическими, а пространственные слои ортогональны им в каждой точке. Локальную систему координат можно построить, решая некоторое уравнение Гамильтона—Якоби.