Quantum Mechanics Seminars

Sergey Barseghyan

14 сентября 2019 г.

1 Семинар 1

Упражнение 1.1. *Покажите, что унитарные матрицы, как и эрмитовы, диагонализуемы. Указание: покажите, что эрмитова и анти-эрмитова часть унитарного оператора диагонализуемы совместно*

Решение.

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I$$

Матрица A диагонализируема если

$$\exists P: \;\; P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$U = A + B = \underbrace{\frac{U+U^\dagger}{2}}_{\text{эрмитова}} + \underbrace{\frac{U-U^\dagger}{2}}_{\text{антиэрмитова}}$$

Две матрицы A и B совместно диагонализируемы $\leftrightarrow [A,B] = 0$

$$[A,B] = \tfrac{1}{4}\left(\left(U+U^\dagger\right)\left(U-U^\dagger\right) + \left(U-U^\dagger\right)\left(U+U^\dagger\right)\right)$$
$$= \tfrac{1}{4}\left(UU + U^\dagger U - UU^\dagger - U^\dagger U^\dagger\right) - \tfrac{1}{4}\left(UU - U^\dagger U + UU^\dagger - U^\dagger U^\dagger\right) = 0$$

Упражнение 1.2. *В квантовой механике замена базиса реализуется унитарными преобразованиями* $|\psi'\rangle = \hat{U}|\psi\rangle$

1. *Покажите, что гамильтониан при этом заменяется на* $\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger$

2. *Последнее утверждение необходимо модифицировать, если унитарное преобразование зависит явно от времени* $\hat{U} = \hat{U}(t)$. *Покажите, что в таком случае гамильтониан необходимо заменить на* $\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger - i\hat{U}\partial_t\hat{U}^\dagger$

Решение. *1.*

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}^\dagger|\psi'\rangle = \hat{H}\hat{U}^\dagger|\psi'\rangle$$

$$i\hbar\hat{U}\hat{U}^\dagger\frac{\partial}{\partial t}|\psi'\rangle = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger|\psi'\rangle$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi'\rangle = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^{\dagger}|\psi'\rangle$$

$$\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^{\dagger}$$

2. *Если же* $\hat{U} = \hat{U}(t)$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}^{\dagger}(t)|\psi'\rangle = i\hbar\left(\hat{U}^{\dagger}\partial_t|\psi'\rangle + \partial_t\hat{U}^{\dagger}|\psi'\rangle\right)$$

$$i\hbar\hat{U}\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}^{\dagger}(t)|\psi'\rangle = i\hbar\left(\hat{U}\hat{U}^{\dagger}\partial_t|\psi'\rangle + \hat{U}\partial_t\hat{U}^{\dagger}|\psi'\rangle\right)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi'\rangle = \left(\hat{U}\hat{H}\hat{U}^{\dagger} - i\hbar\hat{U}\partial_t\hat{U}^{\dagger}\right)|\psi'\rangle$$

$$\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^{\dagger} - i\hbar\hat{U}\partial_t\hat{U}^{\dagger}$$

Упражнение 1.3. *Покажите следующие свойства матриц Паули (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование):*

1. *Они, совместно с единичной матрицей* $\sigma^0 = \hat{\mathbb{I}}_{2\times 2}$, *представляют собой базис в пространстве эрмитовых матриц* 2×2.

2. *Они удовлетворяют следующими правилами перемножения:*

$$\hat{\sigma}^{\alpha}\hat{\sigma}^{\beta} = \delta_{\alpha\beta}\hat{\mathbb{I}} + i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\sigma}^{\gamma}\,(\alpha,\beta,\gamma\in\{x,y,z\}, \epsilon_{\alpha\beta\gamma} - \text{символ Леви-Чевиты })$$

3. *Они удобно экспоненциируются:* $\exp(ian_{\alpha}\hat{\sigma}^{\alpha}) = \cos a + in_{\alpha}\hat{\sigma}^{\alpha}\sin a$ *(тут* $\boldsymbol{n}$ *— произвольный единичный вектор). Указание: разложите экспоненту в ряд; из-за простого правила произведения матриц Паули, произвольные степени от их линейных комбинаций вычисляются достаточно просто*

Решение. 1. $M \in M_2(\mathbb{C})$ $M = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$, *где* $z_{ij}\in\mathbb{C}$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c_{\mu}\in\mathbb{C}$$

Докажем линейную независимость

$$c_0\sigma_0 + c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3 = \mathbf{o}$$

$$\begin{pmatrix} c_0 + c_3 & c_1 - ic_2 \\ c_1 + ic_2 & c_0 - c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Это система имеет имеет только тривиальное решение

$$c_0 = c_1 = c_1 = c_3 = 0$$

Теперь покажем что они покрывают всё пространство $M_2(\mathbb{C})$

$$M = c_0 I + c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3$$

$$\begin{pmatrix} c_0 + c_3 & c_1 - ic_2 \\ c_1 + ic_2 & c_0 - c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$$

$$c_0 + c_3 = z_{11}, c_0 - c_3 = z_{22}, c_1 - ic_2 = z_{12}, c_1 + ic_2 = z_{21}$$

$$c_0 = \frac{1}{2}\left(z_{11} + z_{22}\right), c_1 = \frac{1}{2}\left(z_{12} + z_{21}\right), c_2 = \frac{1}{2} i\left(z_{12} - z_{21}\right), c_3 = \frac{1}{2}\left(z_{11} - z_{22}\right)$$

2. Проверим

$$\sigma_x\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\delta_{11} + i\varepsilon_{11\gamma}\hat{\sigma}^{\gamma}$$

$$\sigma_x\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\delta_{12} + i\varepsilon_{123}\hat{\sigma}_3$$

$$\sigma_y\sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\delta_{23} + i\varepsilon_{231}\hat{\sigma}_1$$

$$\sigma_z\sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\delta_{32} + i\varepsilon_{312}\hat{\sigma}_2$$

3.

$$(\vec{a}\vec{\sigma})(\vec{b}\vec{\sigma}) = a_i b_k \sigma_i \sigma_k = a_i b_k\left(\delta_{ik} + ie_{ikl}\sigma_l\right) = (\vec{a}\vec{b}) + i[\vec{a}\times\vec{b}]\vec{\sigma}$$

$$(\vec{a}\vec{\sigma})(\vec{a}\vec{\sigma}) = \vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}X^k$$

$$\begin{aligned} &(\vec{\sigma}\vec{n})^2 = 1 \\ &(\vec{\sigma}\vec{n})^3 = (\vec{\sigma}\vec{n})^2(\vec{\sigma}\vec{n}) = (\vec{\sigma}\vec{n}) \\ &(\vec{\sigma}\vec{n})^4 = (\vec{\sigma}\vec{n})^2(\vec{\sigma}\vec{n})^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\left\{1 + \frac{1}{2!}\left(a\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(a\right)^4 - \ldots\right\} + i(\vec{\sigma}\vec{n})\left\{a - \frac{1}{3!}\left(a\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(a\right)^5 - \ldots\right\}$$

$$\exp\left(ian_\alpha\hat{\sigma}^\alpha\right) = \cos a + in_\alpha\hat{\sigma}^\alpha\sin a$$