

Quantum Mechanics Seminars

Sergey Barseghyan

18 октября 2019 г.

1 Семинар 1

Упражнение 1.1. *Покажите, что унитарные матрицы, как и эрмитовы, диагонализуемы. Указание: покажите, что эрмитова и анти-эрмитова часть унитарного оператора диагонализуемы совместно*

Решение.

$$U^\dagger U = U U^\dagger = I$$

Матрица A диагонализуема если

$$\exists P : P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$U = A + B = \underbrace{\frac{U + U^\dagger}{2}}_{\text{эрмитова}} + \underbrace{\frac{U - U^\dagger}{2}}_{\text{антиэрмитова}}$$

Две матрицы A и B совместно диагонализуемы $\leftrightarrow [A, B] = 0$

$$\begin{aligned} [A, B] &= \frac{1}{4} ((U + U^\dagger)(U - U^\dagger) + (U - U^\dagger)(U + U^\dagger)) \\ &= \frac{1}{4} (UU + U^\dagger U - UU^\dagger - U^\dagger U^\dagger) - \frac{1}{4} (UU - U^\dagger U + UU^\dagger - U^\dagger U^\dagger) = 0 \end{aligned}$$

Упражнение 1.2. *В квантовой механике замена базиса реализуется унитарными преобразованиями $|\psi'\rangle = \hat{U} |\psi\rangle$*

1. *Покажите, что гамильтониан при этом заменяется на $\hat{H}' = \hat{U} \hat{H} \hat{U}^\dagger$*
2. *Последнее утверждение необходимо модифицировать, если унитарное преобразование зависит явно от времени $\hat{U} = \hat{U}(t)$. Покажите, что в таком случае гамильтониан необходимо заменить на $\hat{H}' = \hat{U} \hat{H} \hat{U}^\dagger - i \hat{U} \partial_t \hat{U}^\dagger$*

Решение. 1.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}^\dagger |\psi'\rangle = \hat{H} \hat{U}^\dagger |\psi'\rangle$$

$$i\hbar \hat{U} \hat{U}^\dagger \frac{\partial}{\partial t} |\psi'\rangle = \hat{U} \hat{H} \hat{U}^\dagger |\psi'\rangle$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi'\rangle = \hat{U} \hat{H} \hat{U}^\dagger |\psi'\rangle$$

$$\hat{H}' = \hat{U} \hat{H} \hat{U}^\dagger$$

2. Если же $\hat{U} = \hat{U}(t)$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}^\dagger(t) |\psi'\rangle = i\hbar \left(\hat{U}^\dagger \partial_t |\psi'\rangle + \partial_t \hat{U}^\dagger |\psi'\rangle \right)$$

$$i\hbar \hat{U} \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}^\dagger(t) |\psi'\rangle = i\hbar \left(\hat{U} \hat{U}^\dagger \partial_t |\psi'\rangle + \hat{U} \partial_t \hat{U}^\dagger |\psi'\rangle \right)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi'\rangle = \left(\hat{U} \hat{H} \hat{U}^\dagger - i\hbar \hat{U} \partial_t \hat{U}^\dagger \right) |\psi'\rangle$$

$$\hat{H}' = \hat{U} \hat{H} \hat{U}^\dagger - i\hbar \hat{U} \partial_t \hat{U}^\dagger$$

Упражнение 1.3. Покажите следующие свойства матриц Паули (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование):

1. Они, совместно с единичной матрицей $\sigma^0 = \hat{\mathbb{I}}_{2 \times 2}$, представляют собой базис в пространстве эрмитовых матриц 2×2 .
2. Они удовлетворяют следующими правилами перемножения:

$$\hat{\sigma}^\alpha \hat{\sigma}^\beta = \delta_{\alpha\beta} \hat{\mathbb{I}} + i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\sigma}^\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \{x, y, z\}, \epsilon_{\alpha\beta\gamma} - \text{символ Леви-Чевиты})$$

3. Они удобно экспоненцируются: $\exp(in_\alpha \hat{\sigma}^\alpha) = \cos a + in_\alpha \hat{\sigma}^\alpha \sin a$ (здесь \mathbf{n} — произвольный единичный вектор). Указание: разложите экспоненту в ряд; из-за простого правила произведения матриц Паули, произвольные степени от их линейных комбинаций вычисляются достаточно просто

Решение. 1. $M \in M_2(\mathbb{C})$ $M = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$, где $z_{ij} \in \mathbb{C}$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c_\mu \in \mathbb{C}$$

Докажем линейную независимость

$$c_0 \sigma_0 + c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2 + c_3 \sigma_3 = \mathbf{0}$$

$$\begin{pmatrix} c_0 + c_3 & c_1 - ic_2 \\ c_1 + ic_2 & c_0 - c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Это система имеет только тривиальное решение

$$c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

Теперь покажем что они покрывают всё пространство $M_2(\mathbb{C})$

$$M = c_0 I + c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2 + c_3 \sigma_3$$

$$\begin{pmatrix} c_0 + c_3 & c_1 - ic_2 \\ c_1 + ic_2 & c_0 - c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$$

$$c_0 + c_3 = z_{11}, c_0 - c_3 = z_{22}, c_1 - ic_2 = z_{12}, c_1 + ic_2 = z_{21}$$

$$c_0 = \frac{1}{2}(z_{11} + z_{22}), c_1 = \frac{1}{2}(z_{12} + z_{21}), c_2 = \frac{1}{2}i(z_{12} - z_{21}), c_3 = \frac{1}{2}(z_{11} - z_{22})$$

2. Проверим

$$\sigma_x \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta_{11} + i\varepsilon_{11\gamma} \hat{\sigma}^\gamma$$

$$\sigma_x \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta_{12} + i\varepsilon_{123} \hat{\sigma}_3$$

$$\sigma_y \sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta_{23} + i\varepsilon_{231} \hat{\sigma}_1$$

$$\sigma_z \sigma_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta_{32} + i\varepsilon_{312} \hat{\sigma}_2$$

3.

$$(\vec{a}\vec{\sigma})(\vec{b}\vec{\sigma}) = a_i b_k \sigma_i \sigma_k = a_i b_k (\delta_{ik} + ie_{ikl} \sigma_l) = (\vec{a}\vec{b}) + i[\vec{a} \times \vec{b}] \vec{\sigma}$$

$$(\vec{a}\vec{\sigma})(\vec{a}\vec{\sigma}) = \vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k$$

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma}\vec{n})^2 &= 1 \\ (\vec{\sigma}\vec{n})^3 &= (\vec{\sigma}\vec{n})^2(\vec{\sigma}\vec{n}) = (\vec{\sigma}\vec{n}) \\ (\vec{\sigma}\vec{n})^4 &= (\vec{\sigma}\vec{n})^2(\vec{\sigma}\vec{n})^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\left\{ 1 + \frac{1}{2!} (a)^2 + \frac{1}{4!} (a)^4 - \dots \right\} + i(\vec{\sigma}\vec{n}) \left\{ a - \frac{1}{3!} (a)^3 + \frac{1}{5!} (a)^5 - \dots \right\}$$

$$\exp(in_\alpha \hat{\sigma}^\alpha) = \cos a + in_\alpha \hat{\sigma}^\alpha \sin a$$

Задача 1.1. Осцилляции Раби На двухуровневую систему накладывается периодическое поле, которое может вызывать переходы между этой парой уровней:

$$\hat{H}(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & V e^{-i\omega t} \\ V e^{i\omega t} & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

В начальный момент времени система находилась в состоянии $|\psi(t=0)\rangle = |\uparrow\rangle$. Определите вероятность обнаружить её в состоянии $|\downarrow\rangle$ через произвольное время t . Что происходит при резонансе, когда отстройка частоты $\delta \equiv \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \omega$ обращается в ноль? Указание: покажите, что от зависимости гамильтониана от времени можно избавиться «переходом во вращающуюся систему отсчёта» (rotating wave approximation) — унитарным преобразованием вида $\hat{U}(t) = e^{i\hat{\sigma}_z \omega_0 t}$. Чему равна соответствующая частота ω_0 ?

Решение. Для начала преобразуем Гамильтониан.

$$\hat{H}' = \hat{U} \hat{H} \hat{U}^\dagger - i\hbar \hat{U} \partial_t \hat{U}^\dagger$$

$$\hat{U}(t) = e^{i\hat{\sigma}_z \omega_0 t} = \cos \omega_0 t + i\hat{\sigma}_z \sin \omega_0 t$$

$$\begin{aligned} \hat{H}' &= (\cos \omega_0 t + i\hat{\sigma}_z \sin \omega_0 t) \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & V e^{-i\omega t} \\ V e^{i\omega t} & \varepsilon_2 \end{pmatrix} (\cos \omega_0 t - i\hat{\sigma}_z \sin \omega_0 t) + \\ &+ i\hbar \omega_0 (\cos \omega_0 t + i\hat{\sigma}_z \sin \omega_0 t) (\sin \omega_0 t + i\hat{\sigma}_z \cos \omega_0 t) \end{aligned}$$

$$\hat{H}' = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \omega_0 & V e^{it\omega_0 - it\omega + it\omega_0} \\ V e^{-it\omega_0 + it\omega - it\omega_0} & \omega_0 + \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

$$\omega_0 = \frac{\omega}{2}$$

Задача 1.2. Два спина

Найдите уровни энергии и собственные состояния для следующего гамильтониана, описывающего систему двух взаимодействующих спинов $1/2$:

$$\hat{H} = -J(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) = -J(\sigma_1^x \sigma_2^x + \sigma_1^y \sigma_2^y + \sigma_1^z \sigma_2^z)$$

Решение. Будем решать

$$\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle \quad \psi \in \mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$$

$$\hat{H} |\psi_1\rangle |\psi_2\rangle = E |\psi_1\rangle |\psi_2\rangle \quad |\psi\rangle \in \mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \otimes \mathbb{H}_2$$

Выберем базис

$$|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$$

$$\begin{pmatrix} |\uparrow\uparrow\rangle \\ |\uparrow\downarrow\rangle \\ |\downarrow\uparrow\rangle \\ |\downarrow\downarrow\rangle \end{pmatrix}$$

$$\hat{H} = \sigma_1^x \otimes \sigma_2^x + \sigma_1^y \otimes \sigma_2^y + \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z$$

$$\begin{aligned} \hat{H} &= -J \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \\ &= -J \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Собственные состояния

$$-J \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\uparrow\uparrow\rangle \\ |\uparrow\downarrow\rangle \\ |\downarrow\uparrow\rangle \\ |\downarrow\downarrow\rangle \end{pmatrix}$$

$$|1\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad E = -3$$

$$|2\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \quad E = 1$$

$$|3\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad E = 1$$

$$|4\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle \quad E = 1$$

2 Семинар 2

Упражнение 2.1. Вычислите среднее значение спина $\langle \mathbf{S} \rangle$ и его дисперсию $\langle (\mathbf{S} - \langle \mathbf{S} \rangle)^2 \rangle$ для чистого $|\chi\rangle = (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ и смешанного $\hat{\rho} = (\hat{\mathbb{P}}_{\uparrow} + \hat{\mathbb{P}}_{\downarrow})/2$ состояний спина $1/2$. Комментарий: первая величина — это вектор, а вторая — это скаляр, длина вектора. Указание: Для частицы со спином $1/2$ (например, электрон) оператор спина $\hat{\mathbf{S}}$ (собственного момента) равен $\hat{\mathbf{S}} = (\hbar/2)\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ (то есть $\hat{S}_x = (\hbar/2)\hat{\sigma}_x$ и т. д.).

Решение. $\langle \mathbf{S} \rangle = \langle \chi | \hat{\mathbf{S}} | \chi \rangle = \frac{\hbar}{2} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_x \\ \hat{\sigma}_y \\ \hat{\sigma}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\langle (\mathbf{S} - \langle \mathbf{S} \rangle)^2 \rangle = \langle \chi | (\mathbf{S} - \langle \mathbf{S} \rangle)^2 | \chi \rangle = \frac{\hbar^2}{4 \cdot 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} ((\hat{\sigma}_x - 1)^2 + \hat{\sigma}_y^2 + \hat{\sigma}_z^2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\hbar^2}{4 \cdot 2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} (3\mathbb{I} - 2\hat{\sigma}_x + 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{2}$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr } \hat{\rho} \hat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2} \text{Tr } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_x \\ \hat{\sigma}_y \\ \hat{\sigma}_z \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \text{Tr} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \text{Tr} \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \\ \text{Tr} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr } \hat{\rho} (\mathbf{S} - \langle \mathbf{S} \rangle)^2 = \text{Tr } \hat{\rho} ((\hat{\sigma}_x - 1)^2 + \hat{\sigma}_y^2 + \hat{\sigma}_z^2) = \text{Tr } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{2}$$

Задача 2.1. Блоховское представление двухуровневой системы

1. Покажите, что матрицу плотности произвольной двухуровневой системы самого общего вида можно разложить по матрицам Паули в следующем виде:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbb{I}} + \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n})$$

2. При каком условии на \mathbf{n} , эта матрица плотности описывает чистое состояние?
3. Вычислите средние значения $\langle \hat{\sigma}_{x,y,z} \rangle$ по состоянию, описываемому такой матрицей плотности.

Решение. 1.

$$\hat{\rho} = \sum_{\alpha} p_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha|$$

$$\text{Так как } \hat{\rho} = \hat{\rho}^{\dagger} \text{ тогда } \hat{\rho} \text{ можно разложить по базису } \hat{\rho} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} + n_0 \sigma^0 \quad \text{Tr } \hat{\rho} = 1$$

$$\text{Tr } \hat{\sigma}^i = 0 \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

$$\text{Tr } \hat{\sigma}^0 = 2 \implies n_0 = \frac{1}{2}$$

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (\hat{\sigma}^0 + n^i \hat{\sigma}_i)$$

$$\langle \psi | \hat{\rho} | \psi \rangle \geq 0 \quad \hat{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + n_z & n_x - in_y \\ n_x + in_y & 1 - n_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} |n_z| \leq 1 \\ 1 - n_z^2 - n_x^2 - n_y^2 \geq 0 \end{cases} \implies \vec{n} \in \bar{B}_1(0)$$

$$2. \hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$$

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^2 &= \frac{1}{4} (\hat{\sigma}_0 + n_i \hat{\sigma}_i)^2 = \frac{1}{4} ((\bar{n}\sigma)^2 + 2(n_0\sigma_0)(\bar{n}\sigma) + (n_0\sigma_0)^2) = \frac{1}{4} \hat{\sigma}_0 + \frac{1}{2} n^i \hat{\sigma}_i + \frac{1}{4} (\vec{n})^2 \hat{\sigma}_0 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1+|\vec{n}|^2}{2} \sigma_0 + n^i \sigma_i \right) \\ \frac{1+|\vec{n}|^2}{2} &= 1 \implies |\vec{n}|^2 = 1 \iff \vec{n} \in \mathbb{S}^2 \end{aligned}$$

$$3. \langle \hat{\sigma}_i \rangle = \text{Tr} \left(\frac{1}{2} (\hat{\sigma}_0 + n^k \hat{\sigma}_k) \hat{\sigma}_i \right)$$

$$\text{Tr} \left(\frac{1}{2} (\hat{\sigma}_i + n^k (\delta_{ki} \hat{\sigma}_0 + \varepsilon_{kin} \hat{\sigma}_n)) \right) = n_i$$

$$\langle \hat{\sigma} \rangle = \vec{n}$$

Задача 2.2. Термодинамика двухуровневой системы Двухуровневая система описывается гамильтонианом $\hat{H} = -\mathbf{h} \cdot \hat{\sigma}$, где $\mathbf{h} = (h_x, h_y, h_z)$, и находится при температуре T . Вычислите средние значения $\langle \hat{\sigma}_{x,y,z} \rangle$.

Решение. $\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\beta \hat{H}} = \frac{1}{Z} e^{-\frac{1}{T} \hat{H}} = \frac{1}{Z} e^{\frac{1}{T} h_x \hat{\sigma}_x + h_y \hat{\sigma}_y + h_z \hat{\sigma}_z}$

$$Z = \text{Tr} = \frac{1}{Z} e^{\frac{|h|}{T} \left(\frac{h_x \hat{\sigma}_x}{|h|} + \frac{h_y \hat{\sigma}_y}{|h|} + \frac{h_z \hat{\sigma}_z}{|h|} \right)}$$

$$\text{Tr} \left(\cos \left(-i \frac{|\vec{h}|}{T} \right) + \sin \left(-\frac{i|\vec{h}|}{T} \right) \cdot \frac{h_\alpha \hat{\sigma}^\alpha}{|\vec{h}|} \right) = \text{Tr} \left(\text{ch} \left(\frac{|\vec{h}|}{T} \right) + \text{sh} \left(\frac{|\vec{h}|}{T} \right) \cdot \frac{h_\alpha \sigma^\alpha}{|\vec{h}|} \right) = 2 \text{ch} \frac{|\vec{h}|}{T}$$

$$\hat{\rho} = \frac{e^{\frac{1}{T} (h_\alpha \hat{\sigma}^\alpha)}}{2 \text{ch} \frac{|\vec{h}|}{T}} = \frac{1}{2} \frac{\text{ch} \frac{|\vec{h}|}{T} \cdot \mathbb{I} + \text{sh} \frac{|\vec{h}|}{T} \frac{h_\alpha \hat{\sigma}^\alpha}{|\vec{h}|}}{\text{ch} \frac{|\vec{h}|}{T}} = \frac{1}{2} \left(\mathbb{I} + \text{th} \frac{|\vec{h}|}{T} \frac{h_\alpha \hat{\sigma}^\alpha}{|\vec{h}|} \right)$$

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle = \text{Tr} (\hat{\rho} \hat{\sigma}_x) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\left(\mathbb{I} + \text{th} \frac{|\vec{h}|}{T} \frac{h_\alpha \hat{\sigma}^\alpha}{|\vec{h}|} \right) \hat{\sigma}_x \right) = \frac{h_x}{h} \text{th} \left(\frac{|\vec{h}|}{T} \right)$$

Аналогично

$$\langle \hat{\sigma}_y \rangle = \frac{h_y}{h} \text{th} \left(\frac{|\vec{h}|}{T} \right) \quad \langle \hat{\sigma}_z \rangle = \frac{h_z}{h} \text{th} \left(\frac{|\vec{h}|}{T} \right)$$

Задача 2.3. Рассмотрите двухуровневую систему, описываемую следующим гамильтонианом

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_0 & -\Delta \\ -\Delta & E_0 \end{pmatrix}$$

В начальный момент система приготовлена в состоянии $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle$. Если бы мы позволили системе эволюционировать самой по себе, то она совершала бы осцилляции Раби; в частности, через время $T = \frac{\pi \hbar}{2\Delta}$ мы бы обнаружили её в состоянии $|\downarrow\rangle$, с вероятностью $P_\downarrow(T) = 1$. Однако теперь вместо этого через каждый промежуток времени $\tau \ll T$ мы проводим измерение наблюдаемой $\hat{\sigma}_z$. Определите вероятность $P_\downarrow(T)$ в таком случае.

Решение. $|\psi(t)\rangle = e^{\frac{-iE_0 t}{\hbar}} \left(\cos \frac{\Delta t}{\hbar} \cdot |\uparrow\rangle + i \sin \frac{\Delta t}{\hbar} \cdot |\downarrow\rangle \right)$

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \cos^2 \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right) & -i \sin \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right) \cos \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right) \\ i \sin \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right) \cos \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right) & \sin^2 \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right) \end{pmatrix}$$

После измерения

$$\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}' = \begin{pmatrix} \cos^2 \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right) & 0 \\ 0 & \sin^2 \left(\frac{\Delta t}{\hbar} \right) \end{pmatrix}$$

$$\hat{\rho}(t) = |\psi\rangle \langle\psi| = \hat{U}(t, t_0) |\psi(0)\rangle \langle\psi(0)| \hat{U}^\dagger(t, t_0) = \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger(t, t_0)$$

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) &= \exp(-i\hat{H}t/\hbar) = \hat{U}(t) = \exp(-i\hat{\mathbb{I}}t/\hbar) \hat{U}(t) = \exp(-i\hat{\sigma}_z t/\hbar) = \exp(-iE_0\hat{\mathbb{I}}t/\hbar) \left(\cos\left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right) \mathbb{I} + \right. \\ &\left. i\hat{\sigma}_z \sin\left(\frac{\Delta t}{\hbar}\right) \right) = e^{-i\frac{E_0\hat{\mathbb{I}}t}{\hbar}} \begin{pmatrix} \cos \alpha & i \sin \alpha \\ i \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$