Теоретический минимимум , Математика I

20 августа 2019 г.

1 Интегрирование рациональных функций

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx = \frac{M}{2a}\ln\left(ax^2+bx+c\right) + \frac{2aN-Mb}{a\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C \tag{1}$$

$$\left(4ac-b^2\right)u_n = \frac{2n-3}{n-1}\cdot 2au_{n-1} + \frac{1}{n-1}\cdot\frac{2ax+b}{\left(ax^2+bx+c\right)^{n-1}} \quad u_n = \int\frac{dx}{\left(ax^2+bx+c\right)^n} \tag{2}$$

$$\begin{gathered} J_n = \int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}, \quad n\in N \quad J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n} + (2n-1)J_n\right) \\ J_1 = \int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \end{gathered} \tag{3}$$

В интегралах вида $x^m\left(ax^n+b\right)^{-p}$ полезна замена $x^\sigma = t$ где $\sigma = \mathrm{QCD}\left(m+1,n\right)$

Если в знаменатели разлагаются на простые множители первой степени, при разложении дроби на простейшие удобна формула:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi\left(a_k\right)}{\psi'\left(a_k\right)}\frac{1}{x-a_k}$$

Где $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n-$ корни полинома $\psi(x)$.

1.1 Полезные замены:

1. Дробно-линейная подстановка
$$\frac{x-a}{x-b} = t$$

2. Если подынтегральное выражение содержит множители x^2-1 и x^2+1, а также возвратные полиномы:
$$x+\frac{1}{x} = u \quad \text{и} \quad x-\frac{1}{x} = v$$

3. Иногда полезно дополнять выражения до уже знакомых, путём представления констант в виде тождественных выражений.
$$1 = \frac{1}{2}\left(x^3+1\right) - \frac{1}{2}\left(x^3-1\right), \quad 1 = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2}\left(x^2-1\right)$$

Пример 1. $\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}$

1.2 Некоторые содержательные примеры

1.
$$\int \frac{dx}{x^4+x^2+1} = \int \frac{\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)-\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)}{x^4+x^2+\frac{1}{2}\left(x^3+1\right)-\frac{1}{2}\left(x^3-1\right)}dx =$$
$$\frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+\frac{1}{2}\left(x^3+1\right)-\frac{1}{2}\left(x^3-1\right)} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+\frac{1}{2}\left(x^3+1\right)-\frac{1}{2}\left(x^3-1\right)}$$
$$= \left| u = x - \frac{1}{x}, \quad v = x + \frac{1}{x} \quad du = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx \quad dv = \left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx \right| =$$
$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+3} - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^2-1} = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$$

2.
$$\int \frac{1}{x^n+1}dx = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \log\left(x-x_k\right) + C$$
$$f(x) = \frac{1}{x^n+1} \quad f(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(x-x_k\right)^{-1} \quad x_k = e^{i(2k-1)\pi/n}, k=1,\cdots,n$$
$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\left(x-x_k\right)^{-1} \quad a_k = \frac{-x_k}{n} \quad \int \frac{1}{x^n+1}dx = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \log\left(x-x_k\right) + C$$
$$\int \frac{1}{x^n+1}dx = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}x_{kr}\log\left(x^2-2x_{kr}x+1\right) - x_{ki}\arctan\left(\frac{x-x_{kr}}{x_{ki}}\right)\right) + C'$$
$$x_{kr} = \operatorname{Re}\left(x_k\right) = \cos\left(\tfrac{(2k-1)\pi}{n}\right)$$
$$x_{ki} = \operatorname{Im}\left(x_k\right) = \sin\left(\tfrac{(2k-1)\pi}{n}\right)$$

2 Задачи с Теорминимума

Найти неопределённый интеграл
$$\int \frac{1}{x^8+x^4+1}\mathrm{d}x \tag{4}$$

Для начала разобьём на множители. Легко заметить, что
$$x^8+x^4+1 = \left(x^4+x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)$$

$$\int \frac{1}{x^8+x^4+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^4+x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^4-x^2+1}$$
Первое слагаемое в правой части уже нами найдено ранее.
$$\int \frac{dx}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$$

Найдём теперь второе слагаемое

$$\int \frac{1}{x^4 - x^2 + 1} \mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{2}\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2}\left(x^2-1\right)}{x^4 - x^2 + 1} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1}{x^4 - x^2 + 1} \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2-1}{x^4 - x^2 + 1} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} \mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} \mathrm{d}\left(x - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 1} \mathrm{d}\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left| x + \frac{1}{x} = u \quad \text{и} \quad x - \frac{1}{x} = v \right| =$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{v^2 + 2 - 1} \mathrm{d}v - \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2 - 2 - 1} \mathrm{d}u$$

Посчитав эти табличные интегралы, сделав обратную подстановку и собрав все слагаемые получим значение исходного интеграла.

3 Интегрирование иррациональных функций

Если в подынтегральной функции содержится корень какой- нибудь степени из дробно-линейной функции $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$, то от этой иррациональности можно избавиться подстановкой: $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = t^n$ где n - соответственно выбранный показатель.