Определение 1. Пусть R — произвольное кольцо. Если существует такое целое положительное число n, что $\forall r \in R$ выполняется равенство

$$n \cdot r = \underbrace{r + \cdots + r}_{n} = 0$$

то наименьшее из таких чисел n называвается характеристикой поля и обозначается $\mathrm{char} R$ Если такого числа не существует то $\mathrm{char} R = 0$

Теорема 1 ([1, BA II §3.4]). *Линейный оператор A с простым спектром диагонализируем*

Теорема 2 ([1, BA II §3.4]). *Пусть A линейный оператор на конечномерном векторном пространстве V на полем $\mathfrak{K}$. Для диагонализируемости $\mathcal{A}$ необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

- *все корни характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ лежат в $\mathfrak{K}$*
- *геометрическая кратность каждого собственного значения λ совпадает с его алгебраической кратностью.*

1 Комбинаторика

Лемма 1 (Полиномиальная формула).

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_m) \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_m) \ldots (x_1 + x_2 + \ldots + x_m)$$

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$$

2 Анализ: Задачи

Задача 1 (ШАД Экзамен 27 мая 2012). *Вычислите интеграл* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx$

Решение. *Сделаем замену* $t = \sqrt{1+e^x}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \int \frac{2dt}{t^2-1} = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \ln \frac{|t-1|}{|t+1|} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \ln \frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C$$

3 Линейная Алгебра: Задачи

Задача 2. *Существуют ли матрицы A и B такие что $AB - BA = I$*

Решение. *Нет.* $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ $\mathrm{tr}(AB - BA) = 0$ *тогда как* $\mathrm{tr}(I) \neq 0$

Задача 3 (ШАД Экзамен 25 мая 2019). *Матрицы A и B таковы, что $A^2 = A$ и $B^2 = B$ и матрица $E - (A + B)$ обратима. Докажите, что* $\mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\, B$

Решение. $C = E - (A+B)$. *Домножим на* $AC = A\,(E - (A+B)) = A - (A^2 + AB) = -AB$. $CB = (E - (A+B))\,B = -AB$, *Получаем* $AC = CB \to A = CBC^{-1}$

Решение. $\operatorname{rk}(A+B) \leqslant \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$

$$\begin{cases} \operatorname{rk}(E-(A+B)) \leqslant \operatorname{rk}(E-A) + \operatorname{rk} B \\ \operatorname{rk}(E-(A+B)) \leqslant \operatorname{rk}(E-B) + \operatorname{rk} A \end{cases}$$

$$\operatorname{rk}(A) = n_1, \quad \operatorname{rk}(B) = n_2$$

По свойству проекционных операторов $\operatorname{rk}(E-A) = n - n_1, \operatorname{rk}(E-B) = n - n_2$

$$\begin{cases} n \leqslant n - n_1 + n_2 \\ n \leqslant n - n_2 + n_1 \end{cases} \Longrightarrow n_1 = n_2$$

Задача 4 (ШАД Экзамен 1 июня 2019)**.** *При каком значении параметра* $a \in \mathbb{R}$ *матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4-a-a^2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -a-1 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

могут быть матрицами одной и той же билинейной формы $V \times V \to \mathbb{R}$ *в различных базисах*

Решение.

$$A = C^T B C \Longrightarrow \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} B$$

$$\begin{cases} \det A \neq 0 \\ \det B \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & a \neq \tfrac{4}{5} \\ & a \neq \tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{19}) \\ & a \neq \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{19}) \end{aligned}$$

Заметим, что $B^T = B \Longrightarrow A^T = A, 4-a-a^2 = 2, a = 1, a = -2$

Задача 5 (ШАД Экзамен 9 июня 2018)**.** *Пусть* A *и* B *– ортогональные матрицы. Докажите что* $\det\left(A^{\mathrm{T}}B - B^{\mathrm{T}}A\right) = \det(A+B) \cdot \det(A-B)$

Решение. $\det(A+B) = \det(A+B)^T = \det\left(A^T + B^T\right)$
$\det\left(A^T+B^T\right) \cdot \det(A-B) = \det(\left(A^T+B^T\right)(A-B)) = \det\left(A^TA - A^TB + B^TA - B^TB\right) = \det\left(E - A^TB + B^TA - E\right) = \det\left(B^TA - A^TB\right) = \det\left(B^TA - A^TB\right)^T = \det\left(A^TB - B^TA\right)$

Задача 6 (ШАД Экзамен 2 июня 2018)**.** *Линейный оператор* $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *таков, что это* A^3 *- оператор проекции Какие собственные значения может иметь* A*? Верно ли, что* A *будет иметь диагональную матрицу в каком-либо базисе* $\mathbb{R}^n$*?*

Решение. $A^3 = P$
$P^2 = P$ *- проектор,* $(A^3)^2 = A^3$*. Пусть* $\boldsymbol{v}$ *- собственный вектор матрицы* A*.*

Тогда $A^6\boldsymbol{v} = \lambda^6\boldsymbol{v} = A^3\boldsymbol{v} = \lambda^3\boldsymbol{v}$*. Так как* $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ $\left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda^3 = 1 \end{array}\right.$

$\lambda_1 = e^{\frac{i2\pi}{3}}$
$\lambda_2 = e^{\frac{i4\pi}{3}}$ *- простые корни характеристического многочлена* $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ *, к тому же* $\in \mathbb{C}$
$\lambda_3 = e^{i2\pi}$
а корень $\lambda = 0$ *вырожден трёхкратно*

Тогда по теореме Критерий диагонализируемости следует что оператор A *не диагонализируем*

Задача 7. *Существуют ли ортогональные кососимметричные матрицы* 2019×2019*? А* 2018×2018*?*

Решение. $A^T A = E$ *- ортогональность* $A^T = -A$ *- кососимметричность*

$\det A^T A = detE$ $\det(-1)A \cdot \det A = (-1)^n \det(A)^2 = \det E = 1$

Если n *- нечётное уравнение не имеет рещений Если* n *- чётное то решение существует.*

Ответ: При $n = 2019$ *- нет, при* $n = 2018$ *- да.*

4 Теория вероятностей: Задачи

Задача 8. *(ФКН ВШЭ: Теория вероятностей: Листок 3) Пусть* ξ *некоторая случайная величина. При каком* $a \in \mathbb{R}$ *достигается минимальное значение* $f(a) = \mathbb{E}\left[(\xi - a)^2\right]$

Решение. *Раскроем по линейности матожидание.* $\mathbb{E}\left[(\xi - a)^2\right] = \mathbb{E}\left[\xi^2\right] - 2a\mathbb{E}[\xi] + a^2$. *Прибавим и отнимем* $(\mathbb{E}(\xi))^2$

$f(a) = (a - \mathbb{E}[\xi])^2 + \mathbb{E}\left[\xi^2\right] - (\mathbb{E}[\xi])^2 = (a - \mathbb{E}[\xi])^2 + \mathbb{D}[\xi]$ *Так как дисперисия не зависит от параметра* $a \Rightarrow$ *минимум достигается при* $(a - \mathbb{E}[\xi])^2 = 0$ *т.е* $a = \mathbb{E}[\xi]$

Задача 9. *(ФКН ВШЭ: Теория вероятностей: Листок 3) Вычислить* $\mathbb{E}[\xi], \mathbb{D}[\xi]$*и*$\mathbb{E}\left[3^{\xi}\right]$*, если* ξ *- это*

1. *пуассоновская случайная величина с параметром* $\lambda \geq 0$
2. *геометрическая случайная величина с параметром* $p \in (0{,}1)$

Решение. *(a)* $\mathbb{P}[\xi = k] = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k \in \mathbb{N}$

$\mathbb{E}[\xi] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda}{e^\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{\lambda}{e^\lambda} \cdot e^\lambda = \lambda$

(b) $\mathbb{D}[\xi] = \mathbb{E}\left[\xi^2\right] - (\mathbb{E}[\xi])^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} - \lambda^2 = \frac{1}{e^\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\lambda^k}{(k-1)!} - \lambda^2$

$\frac{1}{e^\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)\lambda^{k+1}}{k!} - \lambda^2 = \frac{\lambda^2}{e^\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{\lambda}{e^\lambda}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}}_{=e^\lambda} - \lambda^2 = \lambda$

(c) $\mathbb{E}\left[3^\xi\right] = \sum_{k=1}^{\infty} 3^k \cdot \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(3\lambda)^k}{k!}}_{=e^{3\lambda}} = e^{2\lambda}$

$\mathbb{P}[\xi = k] = p(1-p)^{k-1}, k \in \mathbb{N}$ $\mathbb{E}[\xi] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q} \quad q \in (0{,}1)$$

$$\frac{\partial}{\partial q}\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}$$

$q = 1 - p$

$$\mathbb{E}[\xi] = p\left(\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{q}{1-q}\right)|q = 1-p\right) = p\left(\frac{1-q+q}{(1-q)^2}|q = 1-p\right) = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

(b)

$$\mathbb{D}[\xi] = \mathbb{E}\left[\xi^2\right] - (\mathbb{E}[\xi])^2 = \mathbb{E}\left[\xi^2 - \xi + \xi\right] - (\mathbb{E}[\xi])^2 = \mathbb{E}[\xi(\xi-1)] + \mathbb{E}[\xi] - (\mathbb{E}[\xi])^2$$

$$\mathbb{E}[\xi(\xi-1)] = p\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-1} = p\cdot\frac{\partial}{\partial q}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)q^k\right) = p\cdot\frac{\partial}{\partial q}\left(q^2\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)q^{k-2}\right) =$$

$$= p\cdot\frac{\partial}{\partial q}\left(q^2\cdot\frac{\partial}{\partial q}\sum_{k=2}^{\infty}q^{k-1}\right) =$$

$$= p\cdot\frac{\partial}{\partial q}\left(q^2\cdot\frac{\partial}{\partial q}\sum_{k=1}^{\infty}q^{k}\right) = p\cdot\frac{\partial}{\partial q}\left(q^2\cdot\frac{\partial}{\partial q}\right)\right) = p\cdot\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{q^2}{(1-q)^2}\right) = p\left(\frac{-2q}{(q-1)^3}\right) =$$

$$= \{p = 1-q\} = p\left(\frac{-2+2p}{-p^3}\right) = \frac{2(p-1)}{-p^2} = \frac{2(1-p)}{p^2}$$

$$\mathbb{D}[\xi] = \mathbb{E}[\xi(\xi-1)] + \mathbb{E}[\xi] - (\mathbb{E}[\xi])^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2-2p+p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

(c)

$$\mathbb{E}\left[3^{\xi}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} 3^k\cdot p(1-p)^{k-1} = 3p\sum_{k=1}^{\infty}3^{k-1}\cdot(1-p)^{k-1}$$

Для сходимости необходимо, чтобы $3(1-p) < 1$

$$\mathbb{E}\left[3^{\xi}\right] = \frac{3p}{1-3(1-p)}$$

Задача 10. *(ФКН ВШЭ: Теория Вероятностей: Листок 3) Множество из k шаров случайно раскладывают по m ящикам. Случайная величина ξ равна количеству пустых ящиков при таком случайном размещении. Найдите $\mathbb{E}\xi$ и $\mathbb{D}\xi$, если (a) шары неразличимы, (b) различимы.*

Решение. *1. Для начала посчитаем сколько случайных размещений k шаров по m ящикам. Пусть ящики стоят в ряд и мы раскладываем по ним шары. m ящикам соответствуют $m-1$ перегородка.(Две перегородки по краям никак не двигаются). Перемешав шары и внутренние перегородки (шары неразличимы) получим C_{k+m-1}^{k} - различных способой расставить шары по ящикам. Теперь выберем $\xi = i$ ящиков которые будут пустыми. Это можно сделать C_m^i способами. У нас осталось $m-i$ непустых ящиков. Это приводит нас к такому уравнению*

$$y_1 + \cdots + y_{m-i} = k$$

,где все $\forall j \quad y_j \geq 0$ Вычтем из каждого y_j единицу, что соответвует тому, что никакой из ящиков не может опустеть в результате случайного рассকладывания шаров по ящикам. Получаем уравнение

$$x_1 + \cdots + x_{m-i} = k - (m-i)$$

Количество целочисленных решений этого уравнения равно расстановке $k-(m-i)$ шаров по $m-i$ ящику. Эта задача уже нами решена.

$$C_{k-(m-i)+((m-i)-1)}^{(m-i)} = C_{k-1}^{m-i}$$

Отсюда получаем

$$P(\xi = i) = \frac{C_m^i C_{k-1}^{m-i}}{C_{k+m-1}^k}$$

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{i=0}^{m} i \cdot \frac{C_m^i C_{k-1}^{m-1-i}}{C_{k+m-1}^{m-1}}$$

$P(\xi = i)$ *Ни что иное как гипергеометрическая функция с параметрами* $N = k+m-1$, $D = m$, $l = i, n = m-1$

$$f(k; N, D, n) = \frac{C_D^l C_{N-D}^{n-l}}{C_N^n}$$

Выведем матожидание для гипергеометрической функции

$$l \cdot C_D^l = \frac{D!}{(l-1)!(D-l)!} = \frac{D(D-1)!}{(l-1)!((D-1)-(l-1))!} = DC_{D-1}^{l-1}$$

$$lf(l; N, D, n) = \frac{DC_{D-1}^{l-1} C_{(N-1)-(D-1)}^{(n-1)-(l-1)}.}{\frac{N}{n} C_{N-1}^{n-1}}$$

$$\mathbb{E}\xi = \frac{Dn}{N} \sum_{l} \frac{C_{D-1}^{l-1} C_{(N-1)-(D-1)}^{(n-1)-(l-1)}.}{C_{N-1}^{n-1}}$$

Выражение под знаком суммы равно 1

$$\mathbb{E}\xi = \frac{Dn}{N} = \frac{m(m-1)}{(k+m-1)}$$

5 Комбинаторика: Задачи

Задача 11. *Вычислите коэффициент при* x^{100} *многочлене* $(1 + x + x^2 + \ldots + x^{100})^3$ *после приведения всехподобных членов.*

Список литературы

[1] Кострикин А.И. - Введение в алгебру. Линейная алгебра. Часть 2-ФМЛ (2000).