

Определение 1. Пусть R — произвольное кольцо. Если существует такое целое положительное число n , что $\forall r \in R$ выполняется равенство

$$n \cdot r = \underbrace{r + \dots + r}_n = 0$$

то наименьшее из таких чисел n называется характеристикой поля и обозначается $\text{char} R$. Если такого числа не существует то $\text{char} R = 0$

1 Комбинаторика

Лемма 1 (Полиномиальная формула).

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = (x_1 + x_2 + \dots + x_m) \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_m) \dots (x_1 + x_2 + \dots + x_m)$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$$

2 Линейная Алгебра: Задачи

Задача 1. Существуют ли матрицы A и B такие что $AB - BA = I$

Решение. Нет. $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ $\text{tr}(AB - BA) = 0$ тогда как $\text{tr}(I) \neq 0$

Задача 2 (ШАД Экзамен 25 мая 2019). Матрицы A и B таковы, что $A^2 = A$ и $B^2 = B$ и матрица $E - (A + B)$ обратима. Докажите, что $\text{rk } A = \text{rk } B$

Решение. $C = E - (A + B)$. Домножим на $AC = A(E - (A + B)) = A - (A^2 + AB) = -AB$. $CB = (E - (A + B))B = -AB$, Получаем $AC = CB \rightarrow A = CBC^{-1}$

Решение. $\text{rk}(A + B) \leq \text{rk } A + \text{rk } B$

$$\begin{cases} \text{rk}(E - (A + B)) \leq \text{rk}(E - A) + \text{rk } B \\ \text{rk}(E - (A + B)) \leq \text{rk}(E - B) + \text{rk } A \end{cases}$$

$$\text{rk}(A) = n_1, \quad \text{rk}(B) = n_2$$

По свойству проекционных операторов $\text{rk}(E - A) = n - n_1, \text{rk}(E - B) = n - n_2$

$$\begin{cases} n \leq n - n_1 + n_2 \\ n \leq n - n_2 + n_1 \end{cases} \implies n_1 = n_2$$

Задача 3 (ШАД Экзамен 1 июня 2019). При каком значении параметра $a \in \mathbb{R}$ матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 - a - a^2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -a - 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

могут быть матрицами одной и той же билинейной формы $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ в различных базисах

Решение.

$$A = C^T B C \implies \text{rk } A = \text{rk } B$$

$$\begin{cases} \det A \neq 0 \\ \det B \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a &\neq \frac{4}{5} \\ a &\neq \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{19}) \\ a &\neq \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{19}) \end{aligned}$$

Заметим, что $B^T = B \implies A^T = A, 4 - a - a^2 = 2, a = 1, a = -2$

Задача 4. Пусть A и B – ортогональные матрицы. Докажите что $\det(A^T B - B^T A) = \det(A + B) \cdot \det(A - B)$

Решение. $\det(A + B) = \det(A + B)^T = \det(A^T + B^T)$
 $\det(A^T + B^T) \cdot \det(A - B) = \det((A^T + B^T)(A - B)) = \det(A^T A - A^T B + B^T A - B^T B) =$
 $\det(E - A^T B + B^T A - E) = \det(B^T A - A^T B) = \det(B^T A - A^T B)^T = \det(A^T B - B^T A)$

3 Теория вероятностей: Задачи

Задача 5. (ФКН ВШЭ: Теория вероятностей: Листок 3) Пусть ξ некоторая случайная величина. При каком $a \in \mathbb{R}$ достигается минимальное значение $f(a) = \mathbb{E}[(\xi - a)^2]$

Решение. Раскроем по линейности матожидание. $\mathbb{E}[(\xi - a)^2] = \mathbb{E}[\xi^2] - 2a\mathbb{E}[\xi] + a^2$.
 Прибавим и отнимем $(\mathbb{E}(\xi))^2$

$f(a) = (a - \mathbb{E}[\xi])^2 + \mathbb{E}[\xi^2] - (\mathbb{E}[\xi])^2 = (a - \mathbb{E}[\xi])^2 + \mathbb{D}[\xi]$ Так как дисперсия не зависит от параметра $a \Rightarrow$ минимум достигается при $(a - \mathbb{E}[\xi])^2 = 0$ т.е $a = \mathbb{E}[\xi]$

Задача 6. (ФКН ВШЭ: Теория вероятностей: Листок 3) Вычислить $\mathbb{E}[\xi], \mathbb{D}[\xi]$ и $\mathbb{E}[3^\xi]$, если ξ - это

1. пуассоновская случайная величина с параметром $\lambda \geq 0$
2. геометрическая случайная величина с параметром $p \in (0, 1)$

Решение. (a) $\mathbb{P}[\xi = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k \in \mathbb{N}$
 $\mathbb{E}[\xi] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda}{e^\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{\lambda}{e^\lambda} \cdot e^\lambda = \lambda$

$$\begin{aligned} (b) \quad \mathbb{D}[\xi] &= \mathbb{E}[\xi^2] - (\mathbb{E}[\xi])^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2 = \frac{1}{e^\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \lambda^k}{(k-1)!} - \lambda^2 \\ \frac{1}{e^\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1) \lambda^{k+1}}{k!} - \lambda^2 &= \frac{\lambda^2}{e^\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \underbrace{\frac{\lambda}{e^\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{=e^\lambda} - \lambda^2 = \lambda \end{aligned}$$

$$(c) \quad \mathbb{E}[3^\xi] = \sum_{k=1}^{\infty} 3^k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3\lambda)^k}{k!}}_{=e^{3\lambda}} = e^{2\lambda}$$

$$\mathbb{P}[\xi = k] = p(1-p)^{k-1}, k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}[\xi] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q} \quad q \in (0, 1)$$

$$\frac{\partial}{\partial q} \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1}$$

$$q = 1 - p$$

$$\mathbb{E}[\xi] = p \left(\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{q}{1-q} \right) \Big|_{q=1-p} \right) = p \left(\frac{1-q+q}{(1-q)^2} \Big|_{q=1-p} \right) = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

(b)

$$\mathbb{D}[\xi] = \mathbb{E}[\xi^2] - (\mathbb{E}[\xi])^2 = \mathbb{E}[\xi^2 - \xi + \xi] - (\mathbb{E}[\xi])^2 = \mathbb{E}[\xi(\xi - 1)] + \mathbb{E}[\xi] - (\mathbb{E}[\xi])^2$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi(\xi - 1)] &= p \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-1} = p \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (k-1)q^k \right) = p \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left(q^2 \sum_{k=2}^{\infty} (k-1)q^{k-2} \right) = \\ &= p \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left(q^2 \cdot \frac{\partial}{\partial q} \sum_{k=2}^{\infty} q^{k-1} \right) = \\ &= p \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left(q^2 \cdot \frac{\partial}{\partial q} \sum_{k=1}^{\infty} q^k \right) = p \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left(q^2 \cdot \frac{\partial}{\partial q} \right) = p \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{q^2}{(1-q)^2} \right) = p \left(\frac{-2q}{(q-1)^3} \right) = \\ &= \{p = 1 - q\} = p \left(\frac{-2 + 2p}{-p^3} \right) = \frac{2(p-1)}{-p^2} = \frac{2(1-p)}{p^2} \end{aligned}$$

$$\mathbb{D}[\xi] = \mathbb{E}[\xi(\xi - 1)] + \mathbb{E}[\xi] - (\mathbb{E}[\xi])^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2 - 2p + p - 1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

(c)

$$\mathbb{E}[3^\xi] = \sum_{k=1}^{\infty} 3^k \cdot p(1-p)^{k-1} = 3p \sum_{k=1}^{\infty} 3^{k-1} \cdot (1-p)^{k-1}$$

Для сходимости необходимо, чтобы $3(1-p) < 1$

$$\mathbb{E}[3^\xi] = \frac{3p}{1 - 3(1-p)}$$

Задача 7. (ФКН ВШЭ: Теория Вероятностей: Листок 3) Множество из k шаров случайно раскладывают по m ящикам. Случайная величина ξ равна количеству пустых ящиков при таком случайном размещении. Найдите $\mathbb{E}\xi$ и $\mathbb{D}\xi$, если (a) шары неразличимы, (b) различимы.

Решение. 1. Для начала посчитаем сколько случайных размещений k шаров по m ящикам. Пусть ящики стоят в ряд и мы раскладываем по ним шары. m ящикам соответствуют $m - 1$ перегородка. (Две перегородки по краям никак не двигаются). Перемешав шары и внутренние перегородки (шары неразличимы) получим C_{k+m-1}^k - различных способов расставить шары по ящикам. Теперь выберем $\xi = i$ ящиков которые будут пустыми. Это можно сделать C_m^i способами. У нас осталось $m - i$ непустых ящиков. Это приводит нас к такому уравнению

$$y_1 + \dots + y_{m-i} = k$$

, где все $\forall j \quad y_j \geq 0$ Вычтем из каждого y_j единицу, что соответствует тому, что никакой из ящиков не может опустеть в результате случайного раскладывания шаров по ящикам. Получаем уравнение

$$x_1 + \dots + x_{m-i} = k - (m - i)$$

Количество целочисленных решений этого уравнения равно расстановке $k - (m - i)$ шаров по $m - i$ ящику. Эта задача уже нами решена.

$$C_{k-(m-i)+((m-i)-1)}^{(m-i)} = C_{k-1}^{m-i}$$

Отсюда получаем

$$P(\xi = i) = \frac{C_m^i C_{k-1}^{m-i}}{C_{k+m-1}^k}$$

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{i=0}^m i \cdot \frac{C_m^i C_{k-1}^{m-1-i}}{C_{k+m-1}^{m-1}}$$

$P(\xi = i)$ Ни что иное как гипергеометрическая функция с параметрами $N = k + m - 1$, $D = m$, $l = i$, $n = m - 1$

$$f(k; N, D, n) = \frac{C_D^l C_{N-D}^{m-l}}{C_N^n}$$

Выведем матожидание для гипергеометрической функции

$$l \cdot C_D^l = \frac{D!}{(l-1)!(D-l)!} = \frac{D(D-1)!}{(l-1)!((D-1)-(l-1))!} = DC_{D-1}^{l-1}$$

$$lf(l; N, D, n) = \frac{DC_{D-1}^{l-1} C_{(N-1)-(D-1)}^{(n-1)-(l-1)}}{\frac{N}{n} C_{N-1}^{n-1}}$$

$$\mathbb{E}\xi = \frac{Dn}{N} \sum_l \frac{C_{D-1}^{l-1} C_{(N-1)-(D-1)}^{(n-1)-(l-1)}}{C_{N-1}^{n-1}}$$

Выражение под знаком суммы равно 1

$$\mathbb{E}\xi = \frac{Dn}{N} = \frac{m(m-1)}{(k+m-1)}$$

4 Комбинаторика: Задачи

Задача 8. Вычислите коэффициент при x^{100} многочлене $(1 + x + x^2 + \dots + x^{100})^3$ после приведения всеподобных членов.