Определение 1. Пусть R — произвольное кольцо. Если существует такое целое положительное число n, что $\forall r \in R$ выполняется равенство

$$n \cdot r = \underbrace{r + \cdots + r}_{n} = 0$$

то наименьшее из таких чисел n называвается характеристикой поля и обозначается $\mathrm{char} R$ Если такого числа не существует то $\mathrm{char} R = 0$

1 Комбинаторика

Лемма 1 (Полиномиальная формула)**.**

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_m) \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_m) \ldots (x_1 + x_2 + \ldots + x_m)$$

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$$

2 Линейная Алгебра: Задачи

Задача 1. *Существуют ли матрицы A b B такие что $AB - BA = I$*

Решение. *Нет.* $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ $\mathrm{tr}(AB - BA) = 0$ *тогда как* $\mathrm{tr}(I) \neq 0$

Задача 2 (ШАД Экзамен 25 мая 2019)**.** *Матрицы A и B таковы, что $A^2 = A$ и $B^2 = B$ и матрица $E - (A + B)$ обратима. Докажите, что* $\mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\, B$

Решение. *$C = E - (A + B)$. Домножим на $AC = A\,(E - (A + B)) = A - (A^2 + AB) = -AB$. $CB = (E - (A + B))\,B = -AB$, Получаем $AC = CB \to A = CBC^{-1}$*

Решение. $\mathrm{rk}(A + B) \leqslant \mathrm{rk}\, A + \mathrm{rk}\, B$

$$\begin{cases} \mathrm{rk}(E - (A + B)) \leqslant \mathrm{rk}(E - A) + \mathrm{rk}\, B \\ \mathrm{rk}(E - (A + B)) \leqslant \mathrm{rk}(E - B) + \mathrm{rk}\, A \end{cases}$$

$$\mathrm{rk}(A) = n_1, \quad \mathrm{rk}(B) = n_2$$

По свойству проекционных операторов $\mathrm{rk}(E - A) = n - n_1, \mathrm{rk}(E - B) = n - n_2$

$$\begin{cases} n \leqslant n - n_1 + n_2 \\ n \leqslant n - n_2 + n_1 \end{cases} \Longrightarrow n_1 = n_2$$

Задача 3 (ШАД Экзамен 1 июня 2019)**.** *При каком значении параметра $a \in \mathbb{R}$ матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 - a - a^2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -a - 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

могут быть матрицами одной и той же билинейной формы $V \times V \to \mathbb{R}$ в различных базисах

Решение.

$$A = C^T BC \Longrightarrow \mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\, B$$

$$\begin{cases} \det A \neq 0 \\ \det B \neq 0 \end{cases}$$

$$a \neq \tfrac{4}{5}$$
$$a \neq \tfrac{1}{2}(-1 - \sqrt{19})$$
$$a \neq \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{19})$$

Заметим, что $B^T = B \Longrightarrow A^T = A, 4 - a - a^2 = 2, a = 1, a = -2$

3 Теория вероятностей: Задачи

Задача 4. *(ФКН ВШЭ: Теория вероятностей: Листок 3) Пусть ξ некоторая случайная величина. При каком $a \in \mathbb{R}$ достигается минимальное значение $f(a) = \mathbb{E}\left[(\xi - a)^2\right]$*

Решение. *Раскроем по линейности матожидание.* $\mathbb{E}\left[(\xi - a)^2\right] = \mathbb{E}\left[\xi^2\right] - 2a\mathbb{E}[\xi] + a^2$. *Прибавим и отнимем* $(\mathbb{E}(\xi))^2$

$f(a) = (a - \mathbb{E}[\xi])^2 + \mathbb{E}\left[\xi^2\right] - (\mathbb{E}[\xi])^2 = (a - \mathbb{E}[\xi])^2 + \mathbb{D}[\xi]$ *Так как дисперисия не зависит от параметра $a \Rightarrow$ минимум достигается при $(a - \mathbb{E}[\xi])^2 = 0$ т.е $a = \mathbb{E}[\xi]$*

Задача 5. *(ФКН ВШЭ: Теория вероятностей: Листок 3) Вычислить* $\mathbb{E}[\xi], \mathbb{D}[\xi]$*и*$\mathbb{E}\left[3^{\xi}\right]$*, если ξ - это*

1. *пуассоновская случайная величина с параметром $\lambda \geq 0$*
2. *геометрическая случайная величина с параметром $p \in (0,1)$*

Решение. *(a)* $\mathbb{P}[\xi = k] = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k \in \mathbb{N}$

$\mathbb{E}[\xi] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda}{e^\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{\lambda}{e^\lambda} \cdot e^\lambda = \lambda$

(b) $\mathbb{D}[\xi] = \mathbb{E}\left[\xi^2\right] - (\mathbb{E}[\xi])^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} - \lambda^2 = \frac{1}{e^\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\lambda^k}{(k-1)!} - \lambda^2$

$\frac{1}{e^\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)\lambda^{k+1}}{k!} - \lambda^2 = \frac{\lambda^2}{e^\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{\lambda}{e^\lambda}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}}_{=e^\lambda} - \lambda^2 = \lambda$

(c) $\mathbb{E}\left[3^{\xi}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} 3^k \cdot \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(3\lambda)^k}{k!}}_{=e^{3\lambda}} = e^{2\lambda}$

$\mathbb{P}[\xi = k] = p(1-p)^{k-1}, k \in \mathbb{N}$ $\mathbb{E}[\xi] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q} \quad q \in (0,1)$$

$$\frac{\partial}{\partial q}\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}$$

$q = 1 - p$

$$\mathbb{E}[\xi] = p\left(\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{q}{1-q}\right)|q = 1-p\right) = p\left(\frac{1-q+q}{(1-q)^2}|q = 1-p\right) = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

(b)

$$\mathbb{D}[\xi] = \mathbb{E}\left[\xi^2\right] - (\mathbb{E}[\xi])^2 = \mathbb{E}\left[\xi^2 - \xi + \xi\right] - (\mathbb{E}[\xi])^2 = \mathbb{E}[\xi(\xi-1)] + \mathbb{E}[\xi] - (\mathbb{E}[\xi])^2$$

$$\mathbb{E}[\xi(\xi-1)] = p\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-1} = p\cdot\frac{\partial}{\partial q}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)q^k\right) = p\cdot\frac{\partial}{\partial q}\left(q^2\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)q^{k-2}\right) =$$
$$= p\cdot\frac{\partial}{\partial q}\left(q^2\cdot\frac{\partial}{\partial q}\sum_{k=2}^{\infty}q^{k-1}\right) =$$
$$= p\cdot\frac{\partial}{\partial q}\left(q^2\cdot\frac{\partial}{\partial q}\sum_{k=1}^{\infty}q^{k}\right) = p\cdot\frac{\partial}{\partial q}\left(q^2\cdot\frac{\partial}{\partial q}\right)\right) = p\cdot\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{q^2}{(1-q)^2}\right) = p\left(\frac{-2q}{(q-1)^3}\right) =$$
$$= \{p = 1-q\} = p\left(\frac{-2+2p}{-p^3}\right) = \frac{2(p-1)}{-p^2} = \frac{2(1-p)}{p^2}$$

$$\mathbb{D}[\xi] = \mathbb{E}[\xi(\xi-1)] + \mathbb{E}[\xi] - (\mathbb{E}[\xi])^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2-2p+p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

(c)

$$\mathbb{E}\left[3^{\xi}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}3^k\cdot p(1-p)^{k-1} = 3p\sum_{k=1}^{\infty}3^{k-1}\cdot(1-p)^{k-1}$$

Для сходимости необходимо, чтобы $3(1-p) < 1$

$$\mathbb{E}\left[3^{\xi}\right] = \frac{3p}{1-3(1-p)}$$

Задача 6. *(ФКН ВШЭ: Теория Вероятностей: Листок 3) Множество из k шаров случайно раскладывают по m ящикам. Случайная величина ξ равна количеству пустых ящиков при таком случайном размещении. Найдите $\mathbb{E}\xi$ и $\mathbb{D}\xi$, если (a) шары неразличимы, (b) различимы.*

Решение. 1. *Для начала посчитаем сколько случайных размещений k шаров по m ящикам. Пусть ящики стоят в ряд и мы раскладываем по ним шары. m ящикам соответствуют $m-1$ перегородка.(Две перегородки по краям никак не двигаются). Перемешав шары и внутренние перегородки (шары неразличимы) получим C_{k+m-1}^{k} - различных способой расставить шары по ящикам. Теперь выберем $\xi = i$ ящиков которые будут пустыми. Это можно сделать C_m^i способами. У нас осталось $m-i$ непустых ящиков. Это приводит нас к такому уравнению*

$$y_1 + \dots + y_{m-i} = k$$

,где все $\forall j \quad y_j \geq 0$ Вычтем из каждого y_j единицу, что соответвует тому, что никакой из ящиков не может опустеть в результате случайного рассcкладывания шаров по ящикам. Получаем уравнение

$$x_1 + \dots + x_{m-i} = k-(m-i)$$

Количество целочисленных решений этого уравнения равно расстановке $k-(m-i)$ шаров по $m-i$ ящику. Эта задача уже нами решена.

$$C_{k-(m-i)+((m-i)-1)}^{(m-i)} = C_{k-1}^{m-i}$$

Отсюда получаем

$$P(\xi = i) = \frac{C_m^i C_{k-1}^{m-i}}{C_{k+m-1}^{k}}$$

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{i=0}^{m} i \cdot \frac{C_m^i C_{k-1}^{m-1-i}}{C_{k+m-1}^{m-1}}$$

$P(\xi = i)$ Ни что иное как гипергеометрическая функция с параметрами $N = k+m-1$, $D = m$, $l = i, n = m-1$

$$f(k; N, D, n) = \frac{C_D^l C_{N-D}^{n-l}}{C_N^n}$$

Выведем матожидание для гипергеометрической функции

$$l \cdot C_D^l = \frac{D!}{(l-1)!(D-l)!} = \frac{D(D-1)!}{(l-1)!((D-1)-(l-1))!} = DC_{D-1}^{l-1}$$

$$lf(l; N, D, n) = \frac{DC_{D-1}^{l-1} C_{(N-1)-(D-1)}^{(n-1)-(l-1)} \cdot}{\frac{N}{n} C_{N-1}^{n-1}}$$

$$\mathbb{E}\xi = \frac{Dn}{N} \sum_l \frac{C_{D-1}^{l-1} C_{(N-1)-(D-1)}^{(n-1)-(l-1)} \cdot}{C_{N-1}^{n-1}}$$

Сумма равна 1

$$\frac{Dn}{N} = \frac{m(m-1)}{(k+m-1)}$$

4 Комбинаторика: Задачи

Задача 7. *Вычислите коэффициент при x^{100} многочлене $(1 + x + x^2 + \ldots + x^{100})^3$ после приведения всехподобных членов.*