Определение 1. Пусть R — произвольное кольцо. Если существует такое целое положительное число n, что $\forall r \in R$ выполняется равенство

$$n \cdot r = \underbrace{r + \cdots + r}_{n} = 0$$

то наименьшее из таких чисел n называвается характеристикой поля и обозначается $\mathrm{char} R$ Если такого числа не существует то $\mathrm{char} R = 0$

1 Линейная Алгебра: Задачи

Задача 1. *Существуют ли матрицы A b B такие что $AB - BA = I$*

Решение. *Нет.* $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ $\mathrm{tr}(AB - BA) = 0$ *тогда как* $\mathrm{tr}(I) \neq 0$

2 Теория вероятностей: Задачи

Задача 2. *(ФКН ВШЭ: Теория вероятностей: Листок 3) Пусть ξ некоторая случайная величина. При каком $a \in \mathbb{R}$ достигается минимальное значение $f(a) = \mathbb{E}\left[(\xi - a)^2\right]$*

Решение. *Раскроем по линейности матожидание.* $\mathbb{E}\left[(\xi - a)^2\right] = \mathbb{E}\left[\xi^2\right] - 2a\mathbb{E}[\xi] + a^2$. *Прибавим и отнимем* $(\mathbb{E}(\xi))^2$

$f(a) = (a - \mathbb{E}[\xi])^2 + \mathbb{E}\left[\xi^2\right] - (\mathbb{E}[\xi])^2 = (a - \mathbb{E}[\xi])^2 + \mathbb{D}[\xi]$ *Так как дисперисия не зависит от параметра $a \Rightarrow$ минимум достигается при $(a - \mathbb{E}[\xi])^2 = 0$ т.е $a = \mathbb{E}[\xi]$*

Задача 3. *(ФКН ВШЭ: Теория вероятностей: Листок 3) Вычислить $\mathbb{E}[\xi], \mathbb{D}[\xi] и \mathbb{E}\left[3^{\xi}\right]$, если ξ - это*

1. *пуассоновская случайная величина с параметром $\lambda \geq 0$*
2. *геометрическая случайная величина с параметром $p \in (0{,}1)$*

Решение. *(a)* $\mathbb{P}[\xi = k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k \in \mathbb{N}$
$\mathbb{E}[\xi] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda}{e^{\lambda}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{\lambda}{e^{\lambda}} \cdot e^{\lambda} = \lambda$

(b) $\mathbb{D}[\xi] = \mathbb{E}\left[\xi^2\right] - (\mathbb{E}[\xi])^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} - \lambda^2 = \frac{1}{e^{\lambda}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\lambda^k}{(k-1)!} - \lambda^2$

$\frac{1}{e^{\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)\lambda^{k+1}}{k!} - \lambda^2 = \frac{\lambda^2}{e^{\lambda}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{\lambda}{e^{\lambda}} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{=e^{\lambda}} - \lambda^2 = \lambda$

(c) $\mathbb{E}\left[3^{\xi}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} 3^k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3\lambda)^k}{k!}}_{=e^{3\lambda}} = e^{2\lambda}$

$\mathbb{P}[\xi = k] = p(1-p)^{k-1}, k \in \mathbb{N}$ $\mathbb{E}[\xi] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q} \quad q \in (0{,}1)$$

$$\frac{\partial}{\partial q} \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1}$$

$q = 1 - p$

$$\mathbb{E}[\xi] = p\left(\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{q}{1-q}\right)|q = 1-p\right) = p\left(\frac{1-q+q}{(1-q)^2}|q = 1-p\right) = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

(b)

$$\mathbb{D}[\xi] = \mathbb{E}\left[\xi^2\right] - (\mathbb{E}[\xi])^2 = \mathbb{E}\left[\xi^2 - \xi + \xi\right] - (\mathbb{E}[\xi])^2 = \mathbb{E}[\xi(\xi-1)] + \mathbb{E}[\xi] - (\mathbb{E}[\xi])^2$$

$$\mathbb{E}[\xi(\xi-1)] = p\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)q^{k-1} = p \cdot \frac{\partial}{\partial q}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)q^k\right) = p \cdot \frac{\partial}{\partial q}\left(q^2\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)q^{k-2}\right) =$$

$$= p \cdot \frac{\partial}{\partial q}\left(q^2 \cdot \frac{\partial}{\partial q}\sum_{k=2}^{\infty} q^{k-1}\right) =$$

$$= p \cdot \frac{\partial}{\partial q}\left(q^2 \cdot \frac{\partial}{\partial q}\sum_{k=1}^{\infty} q^{k}\right) = p \cdot \frac{\partial}{\partial q}\left(q^2 \cdot \frac{\partial}{\partial q}\right)\Bigg) = p \cdot \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{q^2}{(1-q)^2}\right) = p\left(\frac{-2q}{(q-1)^3}\right) =$$

$$= \{p = 1-q\} = p\left(\frac{-2+2p}{-p^3}\right) = \frac{2(p-1)}{-p^2} = \frac{2(1-p)}{p^2}$$

$$\mathbb{D}[\xi] = \mathbb{E}[\xi(\xi-1)] + \mathbb{E}[\xi] - (\mathbb{E}[\xi])^2 = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2-2p+p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

(c)

$$\mathbb{E}\left[3^{\xi}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} 3^k \cdot p(1-p)^{k-1} = 3p\sum_{k=1}^{\infty} 3^{k-1} \cdot (1-p)^{k-1}$$

Для сходимости необходимо, чтобы $3(1-p) < 1$

$$\mathbb{E}\left[3^{\xi}\right] = \frac{3p}{1-3(1-p)}$$