

Вероятность

1 Производящие функции

Задача 1.0.1 (Закон распределения и линейное преобразование).

1. Найти закон распределения с.п.ф. $G(s) = c(1 + 2s)^3$
2. Найти п.ф. случайной величины $2X + 3$, если X случайная величина п.ф. $G(s)$

Решение 1.0.1. Воспользуемся следующим свойством производящей функции:

$$G(0) = \mathbb{P}(X = 0) = c(1 + 2s)^3 \Big|_{s=0} = c \quad G(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1 \rightarrow c(1 + 2s)^3 \Big|_{s=1} = 1 \rightarrow c = \frac{1}{27} \quad (1)$$

Теперь вспомнив, что п.ф. это степенной ряд воспользуемся тем, что закон распределения можно однозначно восстановить проинфериенцировав п.ф., а именно

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \frac{G^{(k)}(0)}{k!} & \mathbb{P}(X = 1) &= \frac{12c(2s+1)^2}{1!} \Big|_{s=0} = \frac{12}{27} \\ \mathbb{P}(X = 2) &= \frac{48c(1+2s)}{2!} \Big|_{s=0} = \frac{6}{27} & \mathbb{P}(X = 3) &= \frac{96c}{3!} \Big|_{s=0} = \frac{8}{27} \end{aligned}$$

Теперь зададимся вопросом как меняется п.ф. при произвольных преобразованиях случайной величины $Y = H(X)$.

$$G_Y(s) = G_{H(k)}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) s^{H(k)} \quad (2)$$

Если $H(X)$ достаточно просто то $G_Y(s)$ можно выразить через $G_X(s)$. Рассмотрим простейший пример $Y = a + bX$

$$G_Y(s) = \mathbb{E}(s^Y) = \mathbb{E}(s^{a+bX}) = s^a \mathbb{E}(s^{bX}) = s^a G_X(s^b) \quad (3)$$

Для случая из задачи имеем $a = 1, b = 2$

$$G_{2X+1}(s) = s G_X(s^2) \quad (4)$$

Задача 1.0.2. Выразить $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$ как интеграл от п.ф. X и найти его для $X \sim \text{Geom}(p)$ $X \sim \text{Poiss}(\lambda)$.

Решение 1.0.2. Попробуем проинтегрировать $G_X(s)$

$$\operatorname{Re} \int_0^1 ds G_X(s) = \int_0^1 ds \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \mathbb{P}(X = k) s^{k+1} \Big|_0^1 = \mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) \quad (5)$$

$$\operatorname{Re} \int_0^1 ds G_{X_{\text{Geom}}}(s) = \operatorname{Re} \int_0^1 ds \frac{1-p}{1-ps} = \frac{(p-1) \log(1-p)}{p} \quad (6)$$

$$\operatorname{Re} \int_0^1 ds G_{X_{\text{Poiss}}}(s) = \operatorname{Re} \int_0^1 ds e^{-\lambda(1-s)} = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \quad (7)$$