Вероятность

1 Производящие функции

Задача 1.0.1 (Закон распределения и линейное преобразование)**.**

1. *Найти закон распределения с п.ф.* $G(s) = c(1+2s)^3$
2. *Найти п.ф. случайной величины* $2X+3$*, если* X *случайная величина п.ф.* $G(s)$

Решение 1.0.1. *Воспользуемся следующим свойством производящей функции:*

$$G(0) = \mathsf{P}(X=0) = c(1+2s)^3\Big|_{s=0} = c \quad G(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(X=k) = 1 \to c(1+2s)^3\Big|_{s=1} = 1 \to c = \frac{1}{27} \tag{1}$$

Теперь вспомвнив, что п.ф. это степенной ряд воспользуемся тем, что закон распреления можно однозначно восстановить продифференцировав п.ф., а именно

$$\mathsf{P}(X=k) = \frac{G^{(k)}(0)}{k!} \qquad \mathsf{P}(X=1) = \frac{12c(2s+1)^2}{1!}\Big|_{s=0} = \frac{12}{27}$$
$$\mathsf{P}(X=2) = \frac{48c(1+2s)}{2!}\Big|_{s=0} = \frac{6}{27} \qquad \mathsf{P}(X=3) = \frac{96c}{3!}\Big|_{s=0} = \frac{8}{27}$$

Теперь зададимся вопросом как меняется п.ф. при произвольных преобразованиях случайной величины $Y = H(X)$.

$$G_Y(s) = G_{H(k)}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(X=k) s^{H(k)} \tag{2}$$

Если $H(X)$ *достаточно просто то* $G_Y(s)$ *можно выразить черзе* $G_X(s)$*. Рассмотрим простейщий пример* $Y = a + bX$

$$G_Y(s) = \mathbb{E}(s^Y) = \mathbb{E}(s^{a+bX}) = s^a \mathbb{E}(s^{bX}) = s^a G_X(s^b) \tag{3}$$

Для случая из задачи имеем $a = 3, \quad b = 2$

$$G_{2X+1}(s) = s^3 G_X(s^2) \tag{4}$$

Задача 1.0.2. *Выразить* $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$ *как интеграл от п.ф.* X *и найти его для* $X \sim Geom(p)$ $X \sim Poiss(\lambda)$.

Решение 1.0.2. *Попробуем проинтегрировать* $G_X(s)$

$$\mathrm{Re}\int_0^1 \mathrm{d}s\, G_X(s) = \int_0^1 \mathrm{d}s \sum_{k=0}^{\infty} \mathsf{P}(X=k) s^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \mathsf{P}(X=k) s^{k+1}\Big|_0^1 = \mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) \tag{5}$$

$$\mathrm{Re}\int_0^1 \mathrm{d}s\, G_{X_{Geom}}(s) = \mathrm{Re}\int_0^1 \mathrm{d}s\, \frac{1-p}{1-ps} = \frac{(p-1)\log(1-p)}{p} \tag{6}$$

$$\mathrm{Re}\int_0^1 \mathrm{d}s\, G_{X_{Poiss}}(s) = \mathrm{Re}\int_0^1 \mathrm{d}s\, e^{-\lambda(1-s)} = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \tag{7}$$