Cheatsheet di Algoritmi e Strutture Dati

Giacomo Scampini

10 luglio 2025

1 Complessità

1.1 Notazioni di Complessità Asintotica in Elenco

- $f(n) = O(g(n))$ - **O grande** - Limite asintotico superiore
- $f(n) = \Omega(g(n))$ - **Omega grande** - Limite asintotico inferiore
- $f(n) = \Theta(g(n))$ - **Theta grande** - Limite asintotico sia superiore che inferiore

1.2 Confronto Tramite Limiti

Dato il limite $L = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$:

- Se $L = 0$, allora $\Theta(f(n)) < \Theta(g(n))$.
- Se $L = c$ (con $c \neq 0, \infty$), allora $\Theta(f(n)) = \Theta(g(n))$.
- Se $L = \infty$, allora $\Theta(f(n)) > \Theta(g(n))$.

1.3 Gerarchia Fondamentale degli Ordini di Grandezza

Per costanti $k, h \in \mathbb{R}^+$ e $a > 1$:

$$\Theta(1) < \Theta((\log n)^k) < \Theta(n^h) < \Theta(a^n) < \Theta(n!) < \Theta(n^n)$$

1.4 Complessità degli Automi

- **DFSA (Automa a Stati Finiti Deterministico)**
  - Complessità Temporale: $T_A(n) = \Theta(n)$
  - Complessità Spaziale: $S_A(n) = \Theta(1)$
- **DPDA (Automa a Pila Deterministico)**
  - Complessità Temporale: $T_A(n) = \Theta(n)$
  - Complessità Spaziale: $\Theta(0) \leq \Theta(S_A(n)) \leq \Theta(n)$
- **k-DTM (Macchina di Turing Deterministica a k-nastri)**
  - Complessità Temporale: Nessun limite generale.
  - Complessità Spaziale: $\Theta(S_M(n)) \leq \Theta(T_M(n))$
- **SDTM (Macchina di Turing Deterministica a nastro singolo)**
  - Complessità Temporale: Nessun limite generale.
  - Complessità Spaziale: $S_M(n) = \Omega(n)$

1.5 Complessità delle RAM

1.5.1 Criteri di Costo

- **Costo Costante:** Ogni istruzione ha costo 1. Ogni cella di memoria ha costo 1, indipendentemente dal valore contenuto.
- **Costo Logaritmico:** Il costo di un'operazione e dello spazio occupato dipende dalla dimensione (logaritmo) dei valori numerici coinvolti.

$$l(x) := \begin{cases} \lfloor \log_2 x \rfloor + 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{N.B.: } l(x) = \Theta(\log x)$$

- **Quando sceglierli:** I due criteri sono equivalenti se la dimensione degli operandi è limitata da una costante. Se i numeri possono diventare arbitrariamente grandi, il criterio logaritmico è più realistico.

1.5.2 Calcolo del Costo Logaritmico (caso semplificato)

Sotto l'ipotesi di usare un numero costante di celle di memoria:

- **Costo Spaziale:** Lo spazio totale è la somma della "lunghezza" (logaritmo) di tutti i numeri più grandi salvati in ogni cella di memoria utilizzata.
- **Gestione di un intero i** (es. `LOAD, STORE, READ, WRITE, JZ`)
  - Costo Temporale: $\Theta(\log i)$
- **Operazioni Aritmetiche** (su operandi n_1, n_2)
  - Addizione (+), Sottrazione (-): $\Theta(\log n_1 + \log n_2)$
  - Moltiplicazione (*), Divisione (/): $\Theta(\log n_1 \cdot \log n_2)$

1.6 Classi di Complessità Comuni

- $\mathcal{O}(1)$: Costante (es. accesso a un elemento di un array)
- $\mathcal{O}(\log n)$: Logaritmica (es. ricerca binaria)
- $\mathcal{O}(n)$: Lineare (es. scansione di una lista)
- $\mathcal{O}(n \log n)$: Lineare-logaritmica (es. merge sort, heapsort)
- $\mathcal{O}(n^2)$: Quadratica (es. bubble sort, selection sort)
- $\mathcal{O}(2^n)$: Esponenziale (es. problemi risolti con la forza bruta)
- $\mathcal{O}(n!)$: Fattoriale (es. problema del commesso viaggiatore con forza bruta)

2 Strutture Dati

2.1 Vettori (Array)

- Un array A è una sequenza di elementi.
- `A.length` = lunghezza dell'array.
- L'accesso a un elemento avviene tramite indice: $A[j]$, con $j \in \{1, \dots, A.\texttt{length}\}$.
- Un sottoarray si indica con $A[i..j]$.
- La **dimensione dell'input** per un array A è definita come $n := A.\texttt{length}$.

2.2 Matrici

- Una matrice M è una griglia di elementi.
- `M.height` = numero di righe.
- `M.width` = numero di colonne.
- `M[i][j]` = accesso a riga i colonna j.
- La **dimensione dell'input** per una matrice M è il numero totale di elementi, ovvero $M.\texttt{height} \times M.\texttt{width}$.
- Per una matrice quadrata, la dimensione può anche essere indicata con $n := M.\texttt{size}$, dove `size` è il numero di righe (o colonne).

2.3 Liste Concatenate

- `L.head` = puntatore alla testa della lista.
- `x_f.next = NIL`, dove `x_f` è l'ultimo elemento della lista.

2.3.1 Liste Singolarmente Concatenate

- `x.key` = dato contenuto nell'elemento x.
- `x.next` = puntatore all'elemento successivo.

2.3.2 Liste Doppiamente Concatenate

- `x.key` = dato contenuto nell'elemento x.
- `x.next` = puntatore all'elemento successivo.
- `x.prev` = puntatore all'elemento precedente.
- `L.head.prev = NIL`

3 Algoritmi di Ordinamento

3.1 Algoritmi comuni

Algoritmo	**Complessità temporale**	**Complessità spaziale**
Insertion sort	$\Theta(n^2)$	$\Theta(1)$
Merge sort	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n)$
Heapsort	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(1)$
Quicksort	$\Theta(n^2)$	$\Theta(1)$
Counting sort	$\Theta(n + k)$	$\Theta(k)$

4 Confronto SDTM, KTM e RAM

5 Organizza Dati con Strutture Dati

6 Equazioni di Ricorrenza

6.1 Algoritmo Divide et Impera

Un algoritmo che segue la strategia *divide et impera* si articola in tre fasi:

- **Dividi:** Il problema è scomposto in sottoproblemi più semplici della stessa forma.
- **Impera:** I sottoproblemi vengono risolti ricorsivamente.
- **Combina:** Le soluzioni dei sottoproblemi sono combinate per ottenere la soluzione del problema originale.

La sua complessità temporale $T(n)$ è descritta da un'equazione di ricorrenza, tipicamente nella forma $T(n) = a \cdot T(n/b) + f(n)$.

6.2 Metodi di Risoluzione delle Ricorrenze

6.2.1 Risoluzione Diretta Esplicita

Consiste nello sviluppare iterativamente la ricorrenza fino a individuare un modello generale per esprimerne l'ordine di grandezza.

6.2.2 Metodo di Sostituzione

Consiste nel formulare un'ipotesi per la soluzione e nel verificarla rigorosamente tramite dimostrazione per induzione.

6.2.3 Metodo dell'Albero di Ricorsione

È una tecnica visuale per sviluppare le chiamate ricorsive e sommarne i costi livello per livello. È utile per formulare un'ipotesi di soluzione, da verificare poi con il metodo di sostituzione. Esempio di albero:

6.2.4 Metodo per Ricorrenze Lineari

Si applica a ricorrenze della forma $T(n) = \sum_{i=1}^{h} a_i T(n-i) + cn^k$. Posto $a := \sum a_i$, la soluzione (come limite superiore) è:

- $T(n) = O(n^{k+1})$ se $a = 1$.
- $T(n) = O(n^k a^n)$ se $a \geq 2$.

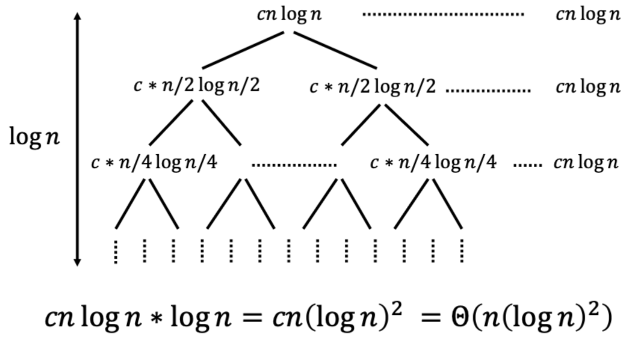

Figura 1: Esempio di un albero di ricorsione.

6.2.5 Teorema Master

Fornisce una soluzione "pronta" per ricorrenze della forma $T(n) = a \cdot T(n/b) + f(n)$ (con $a \geq 1, b > 1$). Si confronta $f(n)$ con $n^{\log_b a}$:

- **Caso 1:** Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ per qualche $\epsilon > 0$, allora $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
- **Caso 2:** Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, allora $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$.
- **Caso 3:** Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ per qualche $\epsilon > 0$ e se $f(n)$ soddisfa una condizione di regolarità, allora $T(n) = \Theta(f(n))$.

Corollario del Teorema Master (Caso Polinomiale)

Una versione semplificata del teorema si applica quando $f(n)$ è un polinomio della forma $\Theta(n^k)$. Data la ricorrenza $T(n) = a \cdot T(n/b) + \Theta(n^k)$:

- **Caso 1:** Se $k < \log_b a$, allora $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
- **Caso 2:** Se $k = \log_b a$, allora $T(n) = \Theta(n^k \log n)$.
- **Caso 3:** Se $k > \log_b a$, allora $T(n) = \Theta(n^k)$.