```matlab
% Método de mínimos cuadrados
% Desarrollado por:
%
% Federico Banoy restrepo
% Juan David Rengifo
% Salomón Cardeño Luján


% Parámetros del modelo ARX(na,nb,nk)
na = 1;
nb = 2;
nk = 1;
d = nk-1;% nk CM (retardo d = nk-1)
canta = true; % ¿Corregir singularidad?

% Datos [t, u, y]
t = 0:7; % Tiempo
n = length(t); % Número de observaciones
u = ones(1, n); % Entrada
y = [0.0090, 1.1278, 1.2867, 1.3367, 1.3554, 1.3625, 1.3662, 1.3635]; % Salida
datos = [t; u; y]' % Visualizar datos
```

```
datos = 8×3
         0    1.0000    0.0090
    1.0000    1.0000    1.1278
    2.0000    1.0000    1.2867
    3.0000    1.0000    1.3367
    4.0000    1.0000    1.3554
    5.0000    1.0000    1.3625
    6.0000    1.0000    1.3662
    7.0000    1.0000    1.3635
```

```matlab

% Mínimo necesito Q = max(na, nd+d) datos
Q = max(na, nb+d);
if n > Q
    % Corrige problemas de singularidad añadiendo más datos a la entrada al
    % agregar ceros para para el pasado.
    if canta
        aux = pexcit(iddata(y',u',1)); % ¿Cuántos ceros se ponen?
        u = [zeros(1, aux), u];
        Q = Q - aux;
    end

    % Número de datos empleados para la estimación.
    N = n - Q;
    % Prealocación.
    PHI = zeros(N, na+nb);
    % Recorto los primeros Q datos de la salida.
    Y = y((Q+1):end)';

    % Llenar la matriz PHI siguiendo el orden de las notas de clase de
    % Daniel.
    for i = 1:length(PHI)
        if canta % Caso en el que se corrige la singularidad
```

```
            PHI(i,:) = [-y((i+d+na-1):-1:(i+d)), u((i+nb-1):-1:i)];
        else % Caso en el que no se corrige
            PHI(i,:) = [-y((i+d+na):-1:(i+d+1)), u((i+nb-1):-1:i)];
        end
    end
    PHI
    % Estimación de parámetros
    theta = (PHI'*PHI)\PHI'*Y
    % Ecuación del ARX_{na, nb, nk} estimada
    modelo = str2sym(eq_arx(theta, na, nb, nk))
```

Sabemos que un modelo ARX(na, nb, nk) es de la forma

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t)$$
$$A(q) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \ldots + a_{na}q^{-na},\ B(q) = \left(b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \ldots + b_{nb}q^{-nb}\right)q^{-nk}, nk \geq 0$$

Entonces la función de transferencia de un modelo ARX(na, nb, nk) asumiendo que el error $e(t) = 0$ es

$$G = \frac{Y}{U} = \frac{B(q)}{A(q)} = \frac{\left(b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \ldots + b_{nb}q^{-nb}\right)q^{-nk}}{1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \ldots + a_{na}q^{-na}}$$

En este caso se tiene un ARX($1, 2, 1$) entonces su función de transferencia es

$$G = \frac{\left(b_1q^{-1} + b_2q^{-2}\right)q^{-1}}{1 + a_1q^{-1}} = \frac{(1.1248q^{-1} - 0.21296q^{-2})q^{-1}}{1 - 0.33181q^{-1}}$$

```
    % Salida estimada
    y_est = PHI*theta;
    % Residuales
    res = Y - y_est;

    % Verificar que la media es cero, pues es un supuesto
    media = mean(res)

    % Varianza
    % lambda2 = sum(res.^2 - mean(res)) / (N - (na+nb));
    lambda2 = sum(res.^2) / (N - (na+nb))
    covarianza = lambda2*inv(PHI'*PHI)

    % Desviación estándar de los parámetros
    sd = sqrt(diag(covarianza))
    ci = [theta-sd, theta+sd]
```

Los intervalos de confianza de los parámetros son de la forma $\hat{\theta} \pm \mathrm{sd}$, donde $\hat{\theta}$ es el vector de parámetros estimados y sd es su respectiva desviación estándar. En este caso se tiene:

$$\hat{\theta} \pm \mathrm{sd} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} \mathrm{sd}_{a_1} \\ \mathrm{sd}_{b_1} \\ \mathrm{sd}_{b_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3318 \\ 1.1248 \\ -0.2130 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 0.0089 \\ 0.0018 \\ 0.0117 \end{bmatrix}$$

```
    % Validar
    t_plot = t(1+Q:end);
    plot(t_plot, Y, 'k', t_plot, y_est, 'or')
    grid on
    xlabel('Tiempo (t)'); ylabel('Salida (y)');
    legend({'Observación', 'Estimación'}, 'Location', 'best')
    title('MC - Validación visual de la resupuesta temporal')

else
    'Se requieren más datos.'
end
```

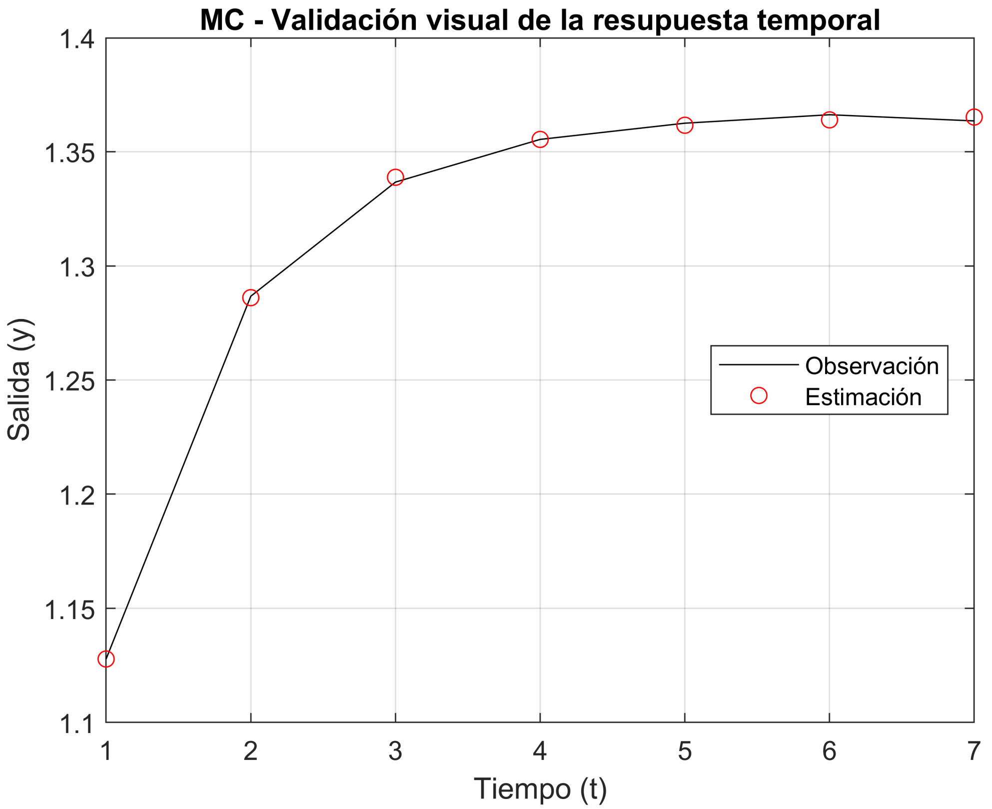
```
PHI = 7×3
   -0.0090    1.0000         0
   -1.1278    1.0000    1.0000
   -1.2867    1.0000    1.0000
   -1.3367    1.0000    1.0000
   -1.3554    1.0000    1.0000
   -1.3625    1.0000    1.0000
   -1.3662    1.0000    1.0000
theta = 3×1
   -0.3318
    1.1248
   -0.2130
```

modelo = $y(t) - 0.33181\, y(t-1) = 1.1248\, u(t-2) - 0.21296\, u(t-3)$

```
media = -2.5377e-16
lambda2 = 3.3736e-06
covarianza = 3×3
```

10^{-3} ×

```
    0.0797    0.0007    0.1034
    0.0007    0.0034   -0.0024
    0.1034   -0.0024    0.1380
sd = 3×1
    0.0089
    0.0018
    0.0117
ci = 3×2
   -0.3407   -0.3229
    1.1230    1.1267
   -0.2247   -0.2012
```



Al graficar la respuesta temporal a partir del modelo obtenido y la respuesta temporal experimental, se observa que los resultados han sido validados, pues la estimación se ajusta adecuadamente a la respuesta experimental observada.

```
function estimation = eq_arx(params, na, nb, nk)
% Entradas:
%   params: vector con de parámetros
%   na, nb, d: parámetros del ARX(na, nb, nk=d+1)
% Salida:
%   estimation: string con el modelo resultante
    estimation = 'y(t)';
    for i = 1:na
        estimation = [estimation, ' + ', num2str(params(i)), '*y(t-', num2str(i),')'];
    end
    estimation = [estimation, ' = '];
    for i = 1:nb
       estimation = [estimation, ' + ', num2str(params(i+na)), '*u(t-',num2str(nk),'-',...
                    num2str(i),')'];
    end
    estimation = replace(replace(estimation, '+ -', '- '), '=  +', '=');
end
```