Übung 02a: `sympy` - Symbolisch rechnen mit Python

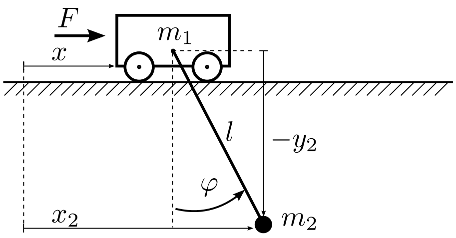
Ziel der Übung ist das Kennenlernen des Paketes `sympy` am Beispiel der Herleitung der Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems („Euler-Lagrange-Gleichungen“).

Voraussetzungen

`sympy`: Symbole, Funktionen, Differenzieren, Substituieren, Gleichungen lösen
Python: Schleifen, Listen und Tupel, Dictionaries

Betrachtetes System: 2D Kran mit fester Seillänge

Die Bewegungsgleichungen sind ein System von Differentialgleichungen und beschreiben (für das abgebildete mechanische System) den Zusammenhang zwischen den zeitabhängigen Größen $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$, $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$ und $\ddot{\varphi}(t)$. Sie können durch Auswertung der sog. Euler-Lagrange-Gleichungen hergeleitet werden. Die dazu notwendigen Rechenschritte sollen mit `sympy` ausgeführt werden. Die Parameter m_1, m_2, l und g werden als konstant und bekannt angenommen.



Koordinaten: $q_1(t) = x(t),\ \ q_2(t) = \varphi(t)$
Geometrische Hilfsgrößen:
$x_2(t) := x(t) + l\sin\varphi(t),\ y_2(t) := -l\cos\varphi(t)$
konstante Parameter: m_1, m_2, l, g
kin. Energie: $T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2(t)^2 + \dot{y}_2(t)^2\right)$
pot. Energie: $U = m_2 g y_2(t)$
Lagrange-Funktion: $L(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = T - U$

Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = Q_1 \tag{1a}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = Q_2 \tag{1b}$$

Äußere Kräfte u. Momente: $Q_1 = F,\ \ Q_2 = 0$

Hinweise:

- Physikalisches Verständnis der Aufgabe hilfreich aber nicht zwingend notwendig.
  Die Teilaufgaben geben Lösungsweg vor.
- An vorgegebem Skript und Kommentaren orientieren.
- `sys.exit()` beachten und schrittweise nach unten verschieben (Der Quelltex danach ist zunächst noch unvollständig.).
- Möglichst aussagekräftige Variablennamen wählen.
- Bei Bedarf eingebette IPython-Shell zum Debuggen benutzen:
  ```
  from ipydex import IPS
  IPS()
  ```

Aufgaben

1. Legen Sie alle benötigten Symbole für die konstanten Parameter (m_1, ...) an.
2. Legen Sie Zeitfunktionen für $x(t)$ und $\varphi(t)$ an.

3. Bilden Sie die Zeitableitungen $\dot{x}(t), \dot{\varphi}(t), \ddot{x}(t)$ und $\ddot{\varphi}(t)$.
4. Berechnen Sie die geometrischen Hilfsgrößen $x_2(t), y_2(t)$ (Formeln: siehe oben).
5. Berechnen Sie T, U und L (Formeln: siehe oben).
6. Erzeugen Sie die folgenden vier Hilfsterme: $\frac{\partial L}{\partial q_1(t)}$ und $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1(t)}$ sowie $\frac{\partial L}{\partial q_2(t)}$ und $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2(t)}$.
7. Berechnen Sie $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ (je ein Term für $i = 1$ und $i = 2$).
8. Stellen Sie nun die beiden Bewegungs-Gleichungen

   $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = F \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

   auf.

   Hinweis: Diese beiden Gleichungen bilden ein lineares algebraisches Gleichungssystem bezüglich der Beschleunigungen $\ddot{x}$ und $\ddot{\varphi}$.
9. Lösen Sie mit `res = sp.solve(...)` das lineare Gleichungssystem nach den Beschleunigungen auf, sodass zwei Gleichungen $\ddot{x} = \ldots$ und $\ddot{\varphi} = \ldots$ resultieren (bzw. die rechten Seiten dieser Gleichungen).
10. Zeigen Sie den Datentyp von `res` und die erhaltenen Ausdrücke für $\ddot{x}$ und $\ddot{\varphi}$ z.B. mittels `sp.pprint(...)` an.
11. Erzeugen Sie für beide Ausdrücke mittels `sp.lambdify(...)` eine Funktion zur Berechnung der jeweiligen Beschleunigung.

    Hinweise: Substituieren Sie dafür zunächst

    - die Zeitfunktionen und ihre Ableitungen durch entsprechend benannte Symbole (beginnend mit der höchsten Ableitungsordnung, siehe Kurs-Folien bzw. Beispiel-Notebook)
    - die System-Parameter mit folgenden numerischen Werten: `[(m1, 0.8), (m2, 0.3), (l, 0.5), (g, 9.81)]`.

    → Die Ausdrücke hängen dann nur noch von folgenden fünf Symbolen ab: der Kraft F, den Koordinaten (x, φ) und den Geschwindigkeiten $(\dot{x}, \dot{\varphi})$. Die durch `lambdify` erstellten Python-Funktionen werden in der nächsten Übung für die Simulation des Systems benötigt.