1 插值法

1.1 引言

定义 1 设函数$f(x)$在$[a,b]$上有定义，且已知$a \le x_0 < x_1 \cdots < x_n \le b$点上的值$y_0, y_1, \cdots, y_n$，若存在以简单函数$\phi(x)$，使得

$$\phi(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, 2, \cdots n. \tag{2.1}$$

成立，则称$\phi(x)$ 为$f(x)$ 的插值函数。式2.1称为插值条件， $f(x)$ 称为被插值函数，$[a,b]$ 称为插值区间，$x_0, x_1, \cdots, x_n$ 称为插值节点，求$\phi(x)$ 的方法就是插值法。

研究问题

1. $\phi(x)$ 是否存在，是否唯一
2. 若存在，如何构造$\phi(x)$
3. 如何估计$\phi(x)$的误差

1.2 Lagrange插值多项式

当$n = 1$ 时，要构造通过两点(x_0, y_0) 和(x_1, y_1) 的不超过一次的多项式$L_1(x)$，使得

$$\begin{cases} L_1(x_0) = y_0 \\ L_1(x_1) = y_1 \end{cases}.$$

$L_1(x)$ 的表达式为

$$L_1(x) = \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1.$$

$L_1(x)$ 表达式可以看作是函数值y_0 和y_1 的线性组合，组合的系数记为$l_0(x)$和$l_1(x)$，即

$$\begin{cases} l_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \\ l_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \end{cases}.$$

系数$l_0(x)$和$l_1(x)$不是常数，而是一次多项式，因此，组合后的结果也是一次多项式。$l_0(x)$和$l_1(x)$称为节点x_0, x_1 上的线性插值基函数。线性插值基函数还需要满足插值条件（见表1)。

根据基函数的表达式可以得知，基函数的构造与函数值无关。

将上述公式推广到一般情形。通过$n+1$ 个节点的n次插值多项式$L_n(x)$，设$L_n(n) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_x(n)$满足插值条件$L_n(x_j) = y_j$， $j = 0, 1, \cdots, n$。

表 1: interpolate condition

	x_0	x_1
$l_0(x)$	0	1
$l_1(x)$	1	0

定义 2 若n 次多项式$l_k(x)(k=0,1,\cdots,n$在各节点$x_0<x_1<\cdots<x_n$ 上满足条件，

$$l_k(x_i)=\delta_{ki}=\begin{cases}1 & k=i\\ 0 & k\neq i\end{cases}\quad i,k=0,1,\cdots,n. \tag{2.2}$$

就称这$n+1$ 个n 次多项式$l_0(x),l_1(x),\cdots,l_n(x)$ 为节点$x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的n次插值基函数。

用类推的方式可以得到n 次插值基函数为

$$l_k(x)=\prod_{k=1,k\neq j}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}.$$

于是，插值多项式函数可以表示为

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_kl_k(x). \tag{2.3}$$

形如式2.3的插值多项式$L_n(x)$ 称为Lagrange插值多项式。引入记号

$$w_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

可知

$$w'_{n+1}(x)=(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n).$$

于是式2.3 可以改写为

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k\frac{w_{n+1}(x)}{(x-x_k)w'_{n+1}(x_k)}.$$

1.3 逐次线性插值法

1.4 Newton插值多项式

1.5 Hermite插值多项式

1.6 分段低次插值

1.7 三次样条插值