Stochastik für Informatiker

– 1. Vorlesung –

Prof. Dr. Holger Kösters

Institut für Mathematik, MNF, Universität Rostock

17. Oktober 2019

Organisatorisches: Leistungspunkte

Alle Angaben ohne Gewähr!
Verbindlich ist allein die Prüfungs- und Studienordnung!

- „Stochastik“ umfasst Vorlesung (2 SWS) und Übungen (1 SWS)
- Prüfungsvorleistungen: ($\rightsquigarrow$ Klausurzulassung)
  $\to$ erfolgreiches Bearbeiten der Übungsaufgaben (i.d.R. 50% der Punkte)
  $\to$ aktive Teilnahme an den Übungen (idealerweise $1 \times$ Vorrechnen)
- Prüfungsleistungen:
  $\to$ Bestehen der Klausur zum Modul „Mathematik für Informatik 3“ (zusammen mit „Diskrete Strukturen und Optimierung“)
  $\to$ voraussichtlicher Klausurtermin: Di, 03.03.2020, xx:xx – xx:xx

Ohne Klausurzulassung ist die Klausurteilnahme <u>nicht möglich!</u>
Frühere Klausurzulassungen werden anerkannt ($\rightsquigarrow$ Prüfungsamt), ABER ...

Organisatorisches: Termine etc.

- Ausgabe der Übungszettel: donnerstags unter stud.ip
- Abgabe der Übungszettel: donnerstags vor der Vorlesung (13:10)

  Einzelabgabe (?)
- Rückgabe der Übungszettel: mittwochs in der Übung
- Arten von Übungsaufgaben:
  - *Vorübungen*: einfache Übungen „zum Aufwärmen“, keine Abgabe
    - Besprechung im Tutorium
    - Lösungen unter stud.ip (vor der Abgabe)
  - *Übungen:* eigentliche Übungen, Abgabe & Bewertung
    - (vollständige) Besprechung nicht vorgesehen
    - Lösungen unter stud.ip (nach der Abgabe)
- die Klausuraufgaben orientieren sich an den Übungsaufgaben

  → Inhalte der Vorlesung und der Übungen

  → Mischung von Modellierungs-, Rechen- und Beweisaufgaben

  → Hilfsmittel:
  - *Abfrageteil:* „NICHTS“ (wichtige Definitionen, Rechenregeln, Sätze)
  - *Rechenteil:* „ALLES“, ABER NICHT Taschenrechner / Mobiltelefon / ...

Typische Klausuraufgabe Stochastik:

Bei einem Glücksspiel muss man

1. eine Kugel aus einer Urne mit 5 Kugeln ziehen, die von 1 bis 5 durchnummeriert sind,
2. einen gewöhnlichen Würfel mit 6 Seiten werfen, die von 1 bis 6 durchnummeriert sind.

Man gewinnt, wenn die gezogene Zahl mit der gewürfelten Zahl übereinstimmt; in diesem Fall erhält man eine Auszahlung in Höhe der gewürfelten Zahl (in €).

(a) Beschreiben Sie das Zufallsexperiment durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum. Geben Sie dabei an, welche Annahmen Sie treffen. ($\rightarrow$ Modellierungsaufgabe)

(b) Beschreiben Sie die Situation, dass man gewinnt, durch ein formales Ereignis A, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von A. ($\rightarrow$ Modellierungs-/Rechenaufgabe)

(c) Beschreiben Sie die Auszahlung (in €) durch eine formale Zufallsgröße X, und berechnen Sie den Erwartungswert von X. ($\rightarrow$ Modellierungs-/Rechenaufgabe)

Inhalte

- Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und die math. Statistik
- Vorkenntnisse: Grundkenntnisse in Mathematik, insbesondere Analysis

  zum Beispiel Mengen, Tupel, Abbildungen / Funktionen,
  Konvergenz von Folgen und Reihen,
  Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion,
  Differenziation und Integration (u.a. Kettenregel + Substitutionsregel),
  Vektorräume, lineare Abbildungen, Skalarprodukte, ...

  Hausaufgabe: Kapitel A im Skript durchlesen!
- es gibt zur Vorlesung ein Skript (unter stud.ip), allerdings
  ohne vollständige Erläuterungen, Rechnungen, Beweise usw.
  Verwendung des Skripts kann Besuch der Vorlesung nicht ersetzen!
- das Skript und die Folien stimmen im Wesentlichen überein,
  so dass Sie i. d. R. nur das Skript auszudrucken brauchen!
  Widersprüche bitte unbedingt melden!

Inhalte

Geplante Gliederung

Literatur (Auswahl)

- N. Henze (2017): *Stochastik für Einsteiger: eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls.* 11. Auflage. Springer Spektrum.
- H. Knöpfel, M. Löwe (2007): *Stochastik – Struktur im Zufall.* Oldenbourg.
- A. Rooch (2014): *Statistik für Ingenieure : Wahrscheinlichkeitsrechnung und Datenauswertung endlich verständlich erklärt.* Springer Spektrum.
- A. Steland (2016): *Basiswissen Statistik – Kompaktkurs für Anwender aus Wirtschaft, Informatik und Technik.* 4. Auflage. Springer Spektrum.
- G. Hübner (2009): *Stochastik – eine anwendungsorientierte Einführung für Informatiker, Ingenieure und Mathematiker.* 5. Auflage. Vieweg.
- U. Krengel (2005): *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.* 8. Auflage. Vieweg.
- H.-O. Georgii (2009): *Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.* 4. Auflage. De Gruyter.

Kapitel 0

Einführung (Was ist Stochastik?)

Begriff „Stochastik“

Begriff „Stochastik“

- altgriechisch $\sigma\tau\acute{o}\chi o\varsigma$ Ziel / Vermutung;
  altgriechisch $\sigma\tau o\chi\alpha\sigma\tau\iota\kappa\grave{\eta}\ \tau\acute{\epsilon}\chi\nu\eta$ „Kunst des Vermutens“

Begriff „Stochastik“

- altgriechisch $\sigma\tau\acute{o}\chi o\varsigma$ Ziel / Vermutung;
  altgriechisch $\sigma\tau o\chi\alpha\sigma\tau\iota\kappa\grave{\eta}\ \tau\acute{\epsilon}\chi\nu\eta$ „Kunst des Vermutens“
- Teilgebiet der Mathematik, das sich mit der math. Beschreibung, Unter- suchung und Auswertung von zufallsabhängigen Vorgängen befasst
  $\rightarrow$ Wahrscheinlichkeitstheorie
  $\rightarrow$ mathematische Statistik

Begriff „Stochastik“

- altgriechisch $\sigma\tau\acute{o}\chi o\varsigma$ Ziel / Vermutung;
  altgriechisch $\sigma\tau o\chi\alpha\sigma\tau\iota\kappa\grave{\eta}\ \tau\acute{\epsilon}\chi\nu\eta$ „Kunst des Vermutens“
- Teilgebiet der Mathematik, das sich mit der math. Beschreibung, Unter- suchung und Auswertung von zufallsabhängigen Vorgängen befasst
  $\to$ Wahrscheinlichkeitstheorie
  $\to$ mathematische Statistik

- *typische Frage in der Wahrscheinlichkeitstheorie:*
  Eine „faire“ Münze wird 100mal geworfen.
  Wie groß ist die W., dass dabei (genau) 70mal Kopf fällt?
- *typische Frage in der mathematischen Statistik:*
  Eine Münze wird 100mal geworfen; dabei fällt (genau) 70mal Kopf.
  Lässt dies den Schluss zu, dass die Münze nicht „fair“ ist?

Begriff „Stochastik“

- altgriechisch $\sigma\tau\acute{o}\chi o\varsigma$ Ziel / Vermutung;
  altgriechisch $\sigma\tau o\chi\alpha\sigma\tau\iota\kappa\grave{\eta}\ \tau\acute{\epsilon}\chi\nu\eta$ „Kunst des Vermutens“
- Teilgebiet der Mathematik, das sich mit der math. Beschreibung, Unter- suchung und Auswertung von zufallsabhängigen Vorgängen befasst
  $\rightarrow$ Wahrscheinlichkeitstheorie
  $\rightarrow$ mathematische Statistik

- *typische Frage in der Wahrscheinlichkeitstheorie:*
  Eine „faire“ Münze wird 100mal geworfen.
  Wie groß ist die W., dass dabei (genau) 70mal Kopf fällt?
- *typische Frage in der mathematischen Statistik:*
  Eine Münze wird 100mal geworfen; dabei fällt (genau) 70mal Kopf.
  Lässt dies den Schluss zu, dass die Münze nicht „fair“ ist?

- Lehre von den Gesetzmäßigkeiten des Zufalls (*Widerspruch?*)

Warum „Stochastik“?

Viele Beobachtungen hängen (zumindest teilweise) vom Zufall ab
oder können vereinfachend als zufällig angesehen werden:

- Ergebnisse bei Glücksspielen (Würfel, Münzen, Kugeln, ...)
- Anzahl von Geburten / Sterbefällen
- Anzahl von Erdbeben / Unfällen / radioaktiven Zerfällen / Rechnerabstürzen / Server-Aufrufen / defekten Produkten / verkauften Produkten / ...
- Niederschlags-W./-dauer/-menge am nächsten Tag / im nächsten Monat
- Aktienkurs am nächsten Tag / im nächsten Jahr
- Laufzeit eines Algorithmus
- Reaktionszeit eines IT-Systems
- Beschaffenheit (z. B. Zusammensetzung) eines Materials
- Messfehler bei physikalischen oder technischen Experimenten

Um hier „gute“ Entscheidungen treffen zu können, ist es häufig notwendig,
die vorliegenden Unsicherheiten quantitativ zu beschreiben und zu untersuchen;
dazu benötigt man die Sprache der <u>Mathematik</u> bzw. insbesondere der <u>Stochastik</u>.

Warum „Stochastik“?

Viele Beobachtungen hängen (zumindest teilweise) vom Zufall ab
oder können vereinfachend als zufällig angesehen werden:

- Ergebnisse bei Glücksspielen (Würfel, Münzen, Kugeln, ...)
- Anzahl von Geburten / Sterbefällen
- Anzahl von Erdbeben / Unfällen / radioaktiven Zerfällen / Rechnerabstürzen / Server-Aufrufen / defekten Produkten / verkauften Produkten / ...
- Niederschlags-W./-dauer/-menge am nächsten Tag / im nächsten Monat
- Aktienkurs am nächsten Tag / im nächsten Jahr
- Laufzeit eines Algorithmus
- Reaktionszeit eines IT-Systems
- Beschaffenheit (z. B. Zusammensetzung) eines Materials
- Messfehler bei physikalischen oder technischen Experimenten

Um hier „gute“ Entscheidungen treffen zu können, ist es häufig notwendig,
die vorliegenden Unsicherheiten quantitativ zu beschreiben und zu untersuchen;
dazu benötigt man die Sprache der Mathematik bzw. insbesondere der Stochastik.

weiteres Stichwort: Data Science

Eigenschaften (idealer) zufallsabhängiger Vorgänge

- es gibt mehrere mögliche Versuchsausgänge (Ergebnisse)
- jede Durchführung liefert ein eindeutiges Ergebnis
- es ist nicht vorhersagbar, welches Ergebnis eintritt
- das Experiment kann (zumindest im Prinzip) unter den gleichen Bedingungen wiederholt werden
- ob der Vorgang echt zufällig ist ($\leftarrow$ *Indeterminiertheit*) oder nur zufällig erscheint ($\leftarrow$ *Unkenntnis*), bleibt dabei ungeklärt

Eigenschaften (idealer) zufallsabhängiger Vorgänge

- es gibt mehrere mögliche Versuchsausgänge (Ergebnisse)
- jede Durchführung liefert ein eindeutiges Ergebnis
- es ist nicht vorhersagbar, welches Ergebnis eintritt
- das Experiment kann (zumindest im Prinzip) unter den gleichen Bedingungen wiederholt werden
- ob der Vorgang echt zufällig ist ($\leftarrow$ *Indeterminiertheit*) oder nur zufällig erscheint ($\leftarrow$ *Unkenntnis*), bleibt dabei ungeklärt

Math. Beschreibung (einfacher) zufallsabhängiger Vorgänge

Math. Beschreibung (einfacher) zufallsabhängiger Vorgänge

- zufallsabhängige Vorgänge sind dadurch gekennzeichnet, dass (zunächst) keine erkennbaren Gesetzmäßigkeiten vorliegen

Math. Beschreibung (einfacher) zufallsabhängiger Vorgänge

- zufallsabhängige Vorgänge sind dadurch gekennzeichnet, dass (zunächst) keine erkennbaren Gesetzmäßigkeiten vorliegen
- wiederholt man denselben zufallsabhängigen Vorgang mehrmals (und unabhängig voneinander), so treten erfahrungsgemäß Regelmäßigkeiten auf

Math. Beschreibung (einfacher) zufallsabhängiger Vorgänge

- zufallsabhängige Vorgänge sind dadurch gekennzeichnet, dass (zunächst) keine erkennbaren Gesetzmäßigkeiten vorliegen
- wiederholt man denselben zufallsabhängigen Vorgang mehrmals (und unabhängig voneinander), so treten erfahrungsgemäß Regelmäßigkeiten auf

Wirft man eine Münze (mit den Seiten „Kopf“ und „Zahl“) n mal, so lassen sich die einzelnen Ergebnisse nicht vorhersagen – die Erfahrung lehrt uns allerdings, dass für großes n
– die Anzahl (=: absolute Häufigkeit) von „Kopf“ etwa np
– der Anteil (=: relative Häufigkeit) von „Kopf“ etwa $\frac{np}{n} = p$
beträgt, wobei $p \in [0,1]$ eine Konstante ist, die nur von der Münze abhängt.

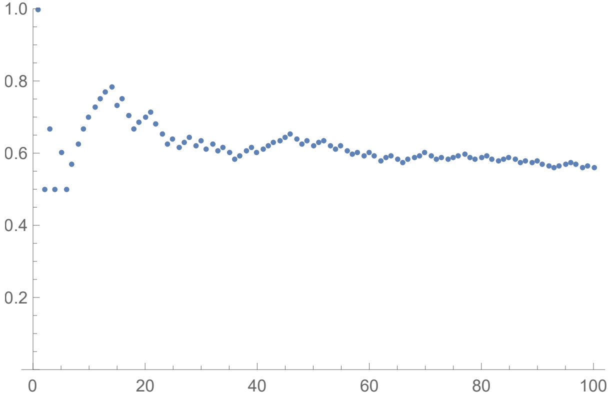
Math. Beschreibung (einfacher) zufallsabhängiger Vorgänge

- zufallsabhängige Vorgänge sind dadurch gekennzeichnet, dass (zunächst) keine erkennbaren Gesetzmäßigkeiten vorliegen
- wiederholt man denselben zufallsabhängigen Vorgang mehrmals (und unabhängig voneinander), so treten erfahrungsgemäß Regelmäßigkeiten auf

Wirft man eine Münze (mit den Seiten „Kopf“ und „Zahl“) n mal, so lassen sich die einzelnen Ergebnisse nicht vorhersagen – die Erfahrung lehrt uns allerdings, dass für großes n
– die Anzahl (=: absolute Häufigkeit) von „Kopf“ etwa np
– der Anteil (=: relative Häufigkeit) von „Kopf“ etwa $\frac{np}{n} = p$
beträgt, wobei $p \in [0, 1]$ eine Konstante ist, die nur von der Münze abhängt.

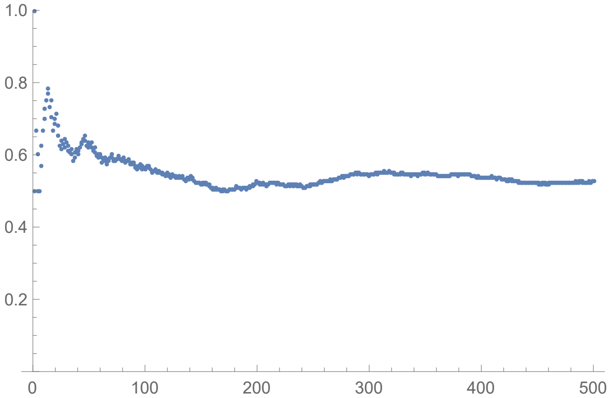
$\rightsquigarrow$ es lässt sich eine Stabilisierung von relativen Häufigkeiten beobachten! (*Empirisches Gesetz der großen Zahlen*)

$\rightsquigarrow$ diese Gesetzmäßigkeiten sollen genauer beschrieben und untersucht werden

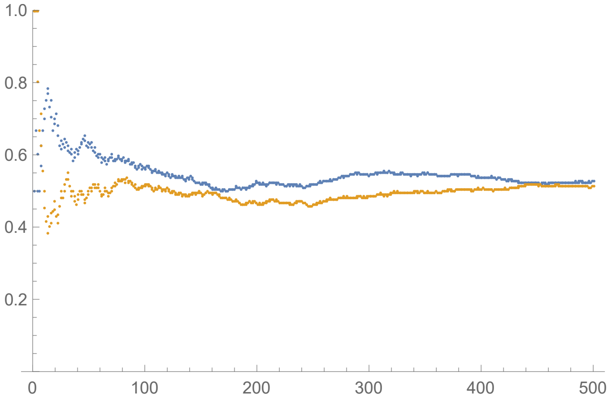


Entwicklung der relativen Häufigkeit von Kopf beim Münzwurf

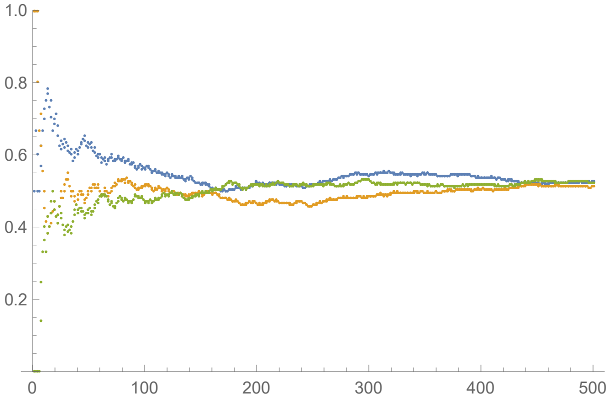
Math. Beschreibung (einfacher) zufallsabhängiger Vorgänge



Entwicklung der relativen Häufigkeit von Kopf beim Münzwurf



Entwicklung der relativen Häufigkeit von Kopf beim Münzwurf



Entwicklung der relativen Häufigkeit von Kopf beim Münzwurf

Math. Beschreibung (einfacher) zufallsabhängiger Vorgänge

- Menge Ω der möglichen Versuchsausgänge (*Ergebnisse*)
- Zahlen $f(\omega)$, $\omega \in \Omega$, die die „Chance des Eintretens“ der einzelnen Ergebnisse beschreiben (*Wahrscheinlichkeiten*);

Math. Beschreibung (einfacher) zufallsabhängiger Vorgänge

- Menge Ω der möglichen Versuchsausgänge (*Ergebnisse*)
- Zahlen $f(\omega)$, $\omega \in \Omega$, die die „Chance des Eintretens“ der einzelnen Ergebnisse beschreiben (*Wahrscheinlichkeiten*);

Erläuterung:

- Idee: Wahrscheinlichkeit $\approx$ relative Häufigkeit
- Wird der zufallsabhängige Vorgang n mal wiederholt
  und tritt dabei k mal das Ergebnis $\omega \in \Omega$ auf,
  so heißt $H_n(\omega) = k$ *absolute Häufigkeit von* ω
  und $h_n(\omega) = k/n$ *relative Häufigkeit von* ω .
- $f(\omega) = p$ bedeutet, dass $h_n(\omega)$ für großes n „etwa“ bei p liegt.
- Aus den Eigenschaften von relativen Häufigkeiten ergeben sich die Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten:
  $f(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$, $\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$. (Dabei sei Ω zunächst endlich.)

Math. Beschreibung (einfacher) zufallsabhängiger Vorgänge

- Menge Ω der möglichen Versuchsausgänge (*Ergebnisse*)
- Zahlen $f(\omega)$, $\omega \in \Omega$, die die „Chance des Eintretens“ der einzelnen Ergebnisse beschreiben (*Wahrscheinlichkeiten*);

Erläuterung:

- Idee: Wahrscheinlichkeit $\approx$ relative Häufigkeit
- Wird der zufallsabhängige Vorgang n mal wiederholt und tritt dabei k mal das Ergebnis $\omega \in \Omega$ auf, so heißt $H_n(\omega) = k$ *absolute Häufigkeit von* ω und $h_n(\omega) = k/n$ *relative Häufigkeit von* ω.
- $f(\omega) = p$ bedeutet, dass $h_n(\omega)$ für großes n „etwa“ bei p liegt.
- Aus den Eigenschaften von relativen Häufigkeiten ergeben sich die Eigenschaften von Wahrscheinlichkeiten: $f(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$, $\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$. (Dabei sei Ω zunächst endlich.)

Bemerkung:

- frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Beispiel 1

Eine Münze (mit den Seiten „Kopf“ und „Zahl“) wird geworfen.
Mit welcher W. erscheint „Kopf“ ?

Beispiel 1

Eine Münze (mit den Seiten „Kopf“ und „Zahl“) wird geworfen.
Mit welcher W. erscheint „Kopf“?

Ansatz 1: Wir unterstellen, dass die Münze „symmetrisch“ / „fair“ ist.

Beispiel 1

Eine Münze (mit den Seiten „Kopf“ und „Zahl“) wird geworfen.
Mit welcher W. erscheint „Kopf“?

Ansatz 1: Wir unterstellen, dass die Münze „symmetrisch“ / „fair“ ist.
• $\Omega = \{K, Z\}$, wobei $K \triangleq$ „Kopf“, $Z \triangleq$ „Zahl“

Beispiel 1

Eine Münze (mit den Seiten „Kopf“ und „Zahl“) wird geworfen.
Mit welcher W. erscheint „Kopf“?

Ansatz 1: Wir unterstellen, dass die Münze „symmetrisch“ / „fair“ ist.
- $\Omega = \{K, Z\}$, wobei $K \triangleq$ „Kopf“, $Z \triangleq$ „Zahl“
- $f(K) = 1/2$, $f(Z) = 1/2$ $\;$ (*wegen Symmetrie / Fairness*)

Beispiel 1

Eine Münze (mit den Seiten „Kopf“ und „Zahl“) wird geworfen.
Mit welcher W. erscheint „Kopf“?

Ansatz 1: Wir unterstellen, dass die Münze „symmetrisch“ / „fair“ ist.
• $\Omega = \{K, Z\}$, wobei $K \triangleq$ „Kopf“, $Z \triangleq$ „Zahl“
• $f(K) = 1/2$, $f(Z) = 1/2$ (*wegen Symmetrie / Fairness*)
$\rightsquigarrow$ „Kopf“ erscheint mit W. $f(K) = 1/2$.

Beispiel 1

Eine Münze (mit den Seiten „Kopf“ und „Zahl“) wird geworfen.
Mit welcher W. erscheint „Kopf“?

Ansatz 1: Wir unterstellen, dass die Münze „symmetrisch“ / „fair“ ist.
• $\Omega = \{K, Z\}$, wobei $K \triangleq$ „Kopf“, $Z \triangleq$ „Zahl“
• $f(K) = 1/2$, $f(Z) = 1/2$ (*wegen Symmetrie / Fairness*)
$\rightsquigarrow$ „Kopf“ erscheint mit W. $f(K) = 1/2$.

Ansatz 2: Wir unterstellen, dass die Münze „gefälscht“ / „gezinkt“ / „unfair“ ist.

Beispiel 1

Eine Münze (mit den Seiten „Kopf“ und „Zahl“) wird geworfen.
Mit welcher W. erscheint „Kopf“?

Ansatz 1: Wir unterstellen, dass die Münze „symmetrisch“ / „fair“ ist.
• $\Omega = \{K, Z\}$, wobei $K \triangleq$ „Kopf“, $Z \triangleq$ „Zahl“
• $f(K) = 1/2$, $f(Z) = 1/2$ (*wegen Symmetrie / Fairness*)
$\rightsquigarrow$ „Kopf“ erscheint mit W. $f(K) = 1/2$.

Ansatz 2: Wir unterstellen, dass die Münze „gefälscht“ / „gezinkt“ / „unfair“ ist.
• $\Omega = \{K, Z\}$, wobei $K \triangleq$ „Kopf“, $Z \triangleq$ „Zahl“

Beispiel 1

Eine Münze (mit den Seiten „Kopf“ und „Zahl“) wird geworfen.
Mit welcher W. erscheint „Kopf“?

Ansatz 1: Wir unterstellen, dass die Münze „symmetrisch“ / „fair“ ist.
• $\Omega = \{K, Z\}$, wobei $K \triangleq$ „Kopf“, $Z \triangleq$ „Zahl“
• $f(K) = 1/2$, $f(Z) = 1/2$ (*wegen Symmetrie / Fairness*)
$\rightsquigarrow$ „Kopf“ erscheint mit W. $f(K) = 1/2$.

Ansatz 2: Wir unterstellen, dass die Münze „gefälscht“ / „gezinkt“ / „unfair“ ist.
• $\Omega = \{K, Z\}$, wobei $K \triangleq$ „Kopf“, $Z \triangleq$ „Zahl“
• $f(K) = p$, $f(Z) = 1 - p$ (*wobei* $p \in [0, 1]$ *unbekannter Parameter*)

Beispiel 1

Eine Münze (mit den Seiten „Kopf“ und „Zahl“) wird geworfen.
Mit welcher W. erscheint „Kopf“?

Ansatz 1: Wir unterstellen, dass die Münze „symmetrisch“ / „fair“ ist.
• $\Omega = \{K, Z\}$, wobei $K \triangleq$ „Kopf“, $Z \triangleq$ „Zahl“
• $f(K) = 1/2$, $f(Z) = 1/2$ (*wegen Symmetrie / Fairness*)
$\rightsquigarrow$ „Kopf“ erscheint mit W. $f(K) = 1/2$.

Ansatz 2: Wir unterstellen, dass die Münze „gefälscht“ / „gezinkt“ / „unfair“ ist.
• $\Omega = \{K, Z\}$, wobei $K \triangleq$ „Kopf“, $Z \triangleq$ „Zahl“
• $f(K) = p$, $f(Z) = 1 - p$ (*wobei* $p \in [0, 1]$ *unbekannter Parameter*)
$\rightsquigarrow$ „Kopf“ erscheint mit W. $f(K) = p$.

Beispiel 1

Eine Münze (mit den Seiten „Kopf" und „Zahl") wird geworfen.
Mit welcher W. erscheint „Kopf"?

Ansatz 1: Wir unterstellen, dass die Münze „symmetrisch" / „fair" ist.
- $\Omega = \{K, Z\}$, wobei $K \triangleq$ „Kopf", $Z \triangleq$ „Zahl"
- $f(K) = 1/2$, $f(Z) = 1/2$ (*wegen Symmetrie / Fairness*)

$\rightsquigarrow$ „Kopf" erscheint mit W. $f(K) = 1/2$.

Ansatz 2: Wir unterstellen, dass die Münze „gefälscht" / „gezinkt" / „unfair" ist.
- $\Omega = \{K, Z\}$, wobei $K \triangleq$ „Kopf", $Z \triangleq$ „Zahl"
- $f(K) = p$, $f(Z) = 1 - p$ (*wobei* $p \in [0, 1]$ *unbekannter Parameter*)

$\rightsquigarrow$ „Kopf" erscheint mit W. $f(K) = p$.

Bemerkung: Alternativ können wir hier natürlich auch $\Omega = \{0, 1\}$ wählen, wobei $0 \triangleq$ „Zahl", $1 \triangleq$ „Kopf".

Beispiel 2

Drei faire Münzen werden in der Hand geschüttelt und dann gleichzeitig geworfen. Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf“?

Beispiel 2

Drei faire Münzen werden in der Hand geschüttelt und dann gleichzeitig geworfen. Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf"?

Ansatz 1: Münzen nicht unterscheidbar

Beispiel 2

Drei faire Münzen werden in der Hand geschüttelt und dann gleichzeitig geworfen. Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf“?

Ansatz 1: Münzen nicht unterscheidbar

- $\Omega = \{(K, K, K), (K, K, Z), (K, Z, Z), (Z, Z, Z)\}$, wobei Teilergebnisse „sortiert“

Beispiel 2

Drei faire Münzen werden in der Hand geschüttelt und dann gleichzeitig geworfen. Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf"?

Ansatz 1: Münzen nicht unterscheidbar
- $\Omega = \{(K,K,K),(K,K,Z),(K,Z,Z),(Z,Z,Z)\}$, wobei Teilergebnisse „sortiert"
- $f(K,K,K) = ???$, $f(K,K,Z) = ???$, $f(K,Z,Z) = ???$, $f(Z,Z,Z) = ???$

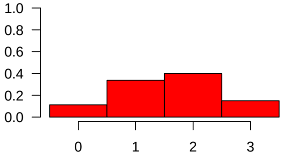
Beispiel 2

Drei faire Münzen werden in der Hand geschüttelt und dann gleichzeitig geworfen. Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf“?

Ansatz 1: Münzen nicht unterscheidbar

- $\Omega = \{(K,K,K),(K,K,Z),(K,Z,Z),(Z,Z,Z)\}$, wobei Teilergebnisse „sortiert“
- $f(K,K,K) = ???$, $f(K,K,Z) = ???$, $f(K,Z,Z) = ???$, $f(Z,Z,Z) = ???$

Die Annahme, dass die einzelnen Ergebnisse die gleiche Chance besitzen, erscheint hier nicht angemessen: Führt man das Experiment wiederholt durch, so erhält man nämlich z. B. das folgende Diagramm:



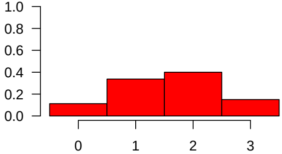
Beispiel 2

Drei faire Münzen werden in der Hand geschüttelt und dann gleichzeitig geworfen. Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf"?

Ansatz 1: Münzen nicht unterscheidbar

- $\Omega = \{(K,K,K),(K,K,Z),(K,Z,Z),(Z,Z,Z)\}$, wobei Teilergebnisse „sortiert"
- $f(K,K,K) = ???$, $f(K,K,Z) = ???$, $f(K,Z,Z) = ???$, $f(Z,Z,Z) = ???$

Die Annahme, dass die einzelnen Ergebnisse die gleiche Chance besitzen, erscheint hier nicht angemessen: Führt man das Experiment wiederholt durch, so erhält man nämlich z. B. das folgende Diagramm:



Die relativen Häufigkeiten von (K,K,Z) und (K,Z,Z) liegen etwa bei $\frac{3}{8}$, die relativen Häufigkeiten von (K,K,K) und (Z,Z,Z) dagegen etwa bei $\frac{1}{8}$.

Um dies zu erklären, versehen wir die Münzen gedanklich mit Nummern ...

Beispiel 2

Drei faire Münzen werden in der Hand geschüttelt und dann gleichzeitig geworfen. Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf"?

Ansatz 1: Münzen nicht unterscheidbar

• $\Omega = \{(K, K, K), (K, K, Z), (K, Z, Z), (Z, Z, Z)\}$, wobei Teilergebnisse „sortiert"

• $f(K, K, K) = \frac{1}{8}$, $f(K, K, Z) = \frac{3}{8}$, $f(K, Z, Z) = \frac{3}{8}$, $f(Z, Z, Z) = \frac{1}{8}$

(*wegen Symmetrie auf der Ebene der Mögl., wie die Ergebnisse zustande kommen*)

Beispiel 2

Drei faire Münzen werden in der Hand geschüttelt und dann gleichzeitig geworfen. Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf"?

Ansatz 1: Münzen nicht unterscheidbar

- $\Omega = \{(K, K, K), (K, K, Z), (K, Z, Z), (Z, Z, Z)\}$, wobei Teilergebnisse „sortiert"
- $f(K, K, K) = \frac{1}{8}$, $f(K, K, Z) = \frac{3}{8}$, $f(K, Z, Z) = \frac{3}{8}$, $f(Z, Z, Z) = \frac{1}{8}$

(*wegen Symmetrie auf der Ebene der Mögl., wie die Ergebnisse zustande kommen*)

- A : „genau einmal Kopf", $A = \{(K, Z, Z)\}$

Beispiel 2

Drei faire Münzen werden in der Hand geschüttelt und dann gleichzeitig geworfen. Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf“?

Ansatz 1: Münzen nicht unterscheidbar

- $\Omega = \{(K, K, K), (K, K, Z), (K, Z, Z), (Z, Z, Z)\}$, wobei Teilergebnisse „sortiert“
- $f(K, K, K) = \frac{1}{8}$, $f(K, K, Z) = \frac{3}{8}$, $f(K, Z, Z) = \frac{3}{8}$, $f(Z, Z, Z) = \frac{1}{8}$

(*wegen Symmetrie auf der Ebene der Mögl., wie die Ergebnisse zustande kommen*)

- A : „genau einmal Kopf“, $A = \{(K, Z, Z)\}$
- $\mathbb{P}(A) = f(K, Z, Z) = \frac{3}{8}$

Beispiel 2

Drei faire Münzen werden in der Hand geschüttelt und dann gleichzeitig geworfen. Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf“?

Ansatz 1: Münzen nicht unterscheidbar

• $\Omega = \{(K,K,K),(K,K,Z),(K,Z,Z),(Z,Z,Z)\}$, wobei Teilergebnisse „sortiert“
• $f(K,K,K) = \frac{1}{8}$, $f(K,K,Z) = \frac{3}{8}$, $f(K,Z,Z) = \frac{3}{8}$, $f(Z,Z,Z) = \frac{1}{8}$
(*wegen Symmetrie auf der Ebene der Mögl., wie die Ergebnisse zustande kommen*)
• A : „genau einmal Kopf“, $A = \{(K,Z,Z)\}$
• $\mathbb{P}(A) = f(K,Z,Z) = \frac{3}{8}$
$\rightsquigarrow$ „Genau einmal Kopf“ erscheint mit W. $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}$.

Beispiel 2

Drei faire Münzen werden in der Hand geschüttelt und dann gleichzeitig geworfen. Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf"?

Ansatz 1: Münzen nicht unterscheidbar

- $\Omega = \{(K,K,K),(K,K,Z),(K,Z,Z),(Z,Z,Z)\}$, wobei Teilergebnisse „sortiert"
- $f(K,K,K) = \frac{1}{8}$, $f(K,K,Z) = \frac{3}{8}$, $f(K,Z,Z) = \frac{3}{8}$, $f(Z,Z,Z) = \frac{1}{8}$

(*wegen Symmetrie auf der Ebene der Mögl., wie die Ergebnisse zustande kommen*)

- A : „genau einmal Kopf", $A = \{(K,Z,Z)\}$
- $\mathbb{P}(A) = f(K,Z,Z) = \frac{3}{8}$

$\rightsquigarrow$ „Genau einmal Kopf" erscheint mit W. $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}$.

Ansatz 2: Münzen unterscheidbar

Beispiel 2

Drei faire Münzen werden in der Hand geschüttelt und dann gleichzeitig geworfen. Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf“?

Ansatz 1: Münzen nicht unterscheidbar

- $\Omega = \{(K, K, K), (K, K, Z), (K, Z, Z), (Z, Z, Z)\}$, wobei Teilergebnisse „sortiert“
- $f(K, K, K) = \frac{1}{8}$, $f(K, K, Z) = \frac{3}{8}$, $f(K, Z, Z) = \frac{3}{8}$, $f(Z, Z, Z) = \frac{1}{8}$

(*wegen Symmetrie auf der Ebene der Mögl., wie die Ergebnisse zustande kommen*)

- A : „genau einmal Kopf“, $A = \{(K, Z, Z)\}$
- $\mathbb{P}(A) = f(K, Z, Z) = \frac{3}{8}$

$\rightsquigarrow$ „Genau einmal Kopf“ erscheint mit W. $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}$.

Ansatz 2: Münzen unterscheidbar

- $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{K, Z\}\ \forall\, i = 1, 2, 3\}$, $\omega_i \triangleq$ (Teil-)Ergebnis i-te Münze

Beispiel 2

Drei faire Münzen werden in der Hand geschüttelt und dann gleichzeitig geworfen. Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf"?

Ansatz 1: Münzen nicht unterscheidbar

- $\Omega = \{(K,K,K),(K,K,Z),(K,Z,Z),(Z,Z,Z)\}$, wobei Teilergebnisse „sortiert"
- $f(K,K,K) = \frac{1}{8}$, $f(K,K,Z) = \frac{3}{8}$, $f(K,Z,Z) = \frac{3}{8}$, $f(Z,Z,Z) = \frac{1}{8}$

(*wegen Symmetrie auf der Ebene der Mögl., wie die Ergebnisse zustande kommen*)

- A : „genau einmal Kopf", $A = \{(K,Z,Z)\}$
- $\mathbb{P}(A) = f(K,Z,Z) = \frac{3}{8}$

$\rightsquigarrow$ „Genau einmal Kopf" erscheint mit W. $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}$.

Ansatz 2: Münzen unterscheidbar

- $\Omega = \{(\omega_1,\omega_2,\omega_3) : \omega_i \in \{K,Z\} \;\forall\, i = 1,2,3\}$, $\omega_i \triangleq$ (Teil-)Ergebnis i-te Münze
- $f(\omega) = \frac{1}{8}$ für alle $\omega \in \Omega$ (*wegen Symmetrie*)

Beispiel 2

Drei faire Münzen werden in der Hand geschüttelt und dann gleichzeitig geworfen. Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf"?

Ansatz 1: Münzen nicht unterscheidbar

- $\Omega = \{(K,K,K),(K,K,Z),(K,Z,Z),(Z,Z,Z)\}$, wobei Teilergebnisse „sortiert"
- $f(K,K,K) = \frac{1}{8}$, $f(K,K,Z) = \frac{3}{8}$, $f(K,Z,Z) = \frac{3}{8}$, $f(Z,Z,Z) = \frac{1}{8}$

(*wegen Symmetrie auf der Ebene der Mögl., wie die Ergebnisse zustande kommen*)

- A : „genau einmal Kopf", $A = \{(K,Z,Z)\}$
- $\mathbb{P}(A) = f(K,Z,Z) = \frac{3}{8}$

$\rightsquigarrow$ „Genau einmal Kopf" erscheint mit W. $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}$.

Ansatz 2: Münzen unterscheidbar

- $\Omega = \{(\omega_1,\omega_2,\omega_3) : \omega_i \in \{K,Z\}\ \forall\, i = 1,2,3\}$, $\omega_i \triangleq$ (Teil-)Ergebnis i-te Münze
- $f(\omega) = \frac{1}{8}$ für alle $\omega \in \Omega$ (*wegen Symmetrie*)
- A : „genau einmal Kopf", $A = \{(K,Z,Z),(Z,K,Z),(Z,Z,K)\}$

Beispiel 2

Drei faire Münzen werden in der Hand geschüttelt und dann gleichzeitig geworfen. Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf"?

Ansatz 1: Münzen nicht unterscheidbar

- $\Omega = \{(K,K,K),(K,K,Z),(K,Z,Z),(Z,Z,Z)\}$, wobei Teilergebnisse „sortiert"
- $f(K,K,K) = \frac{1}{8}$, $f(K,K,Z) = \frac{3}{8}$, $f(K,Z,Z) = \frac{3}{8}$, $f(Z,Z,Z) = \frac{1}{8}$

(*wegen Symmetrie auf der Ebene der Mögl., wie die Ergebnisse zustande kommen*)

- A : „genau einmal Kopf", $A = \{(K,Z,Z)\}$
- $\mathbb{P}(A) = f(K,Z,Z) = \frac{3}{8}$

$\rightsquigarrow$ „Genau einmal Kopf" erscheint mit W. $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}$.

Ansatz 2: Münzen unterscheidbar

- $\Omega = \{(\omega_1,\omega_2,\omega_3) : \omega_i \in \{K,Z\}\ \forall\, i = 1,2,3\}$, $\omega_i \triangleq$ (Teil-)Ergebnis i-te Münze
- $f(\omega) = \frac{1}{8}$ für alle $\omega \in \Omega$ (*wegen Symmetrie*)
- A : „genau einmal Kopf", $A = \{(K,Z,Z),(Z,K,Z),(Z,Z,K)\}$
- $\mathbb{P}(A) = f(K,Z,Z) + f(Z,K,Z) + f(Z,Z,K) = \frac{3}{8}$

Beispiel 2

Drei faire Münzen werden in der Hand geschüttelt und dann gleichzeitig geworfen. Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf"?

Ansatz 1: Münzen nicht unterscheidbar

- $\Omega = \{(K,K,K),(K,K,Z),(K,Z,Z),(Z,Z,Z)\}$, wobei Teilergebnisse „sortiert"
- $f(K,K,K) = \frac{1}{8}$, $f(K,K,Z) = \frac{3}{8}$, $f(K,Z,Z) = \frac{3}{8}$, $f(Z,Z,Z) = \frac{1}{8}$

(*wegen Symmetrie auf der Ebene der Mögl., wie die Ergebnisse zustande kommen*)

- A : „genau einmal Kopf", $A = \{(K,Z,Z)\}$
- $\mathbb{P}(A) = f(K,Z,Z) = \frac{3}{8}$

$\rightsquigarrow$ „Genau einmal Kopf" erscheint mit W. $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}$.

Ansatz 2: Münzen unterscheidbar

- $\Omega = \{(\omega_1,\omega_2,\omega_3) : \omega_i \in \{K,Z\}\ \forall\, i = 1,2,3\}$, $\omega_i \triangleq$ (Teil-)Ergebnis i-te Münze
- $f(\omega) = \frac{1}{8}$ für alle $\omega \in \Omega$ (*wegen Symmetrie*)
- A : „genau einmal Kopf", $A = \{(K,Z,Z),(Z,K,Z),(Z,Z,K)\}$
- $\mathbb{P}(A) = f(K,Z,Z) + f(Z,K,Z) + f(Z,Z,K) = \frac{3}{8}$

$\rightsquigarrow$ „Genau einmal Kopf" erscheint mit W. $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}$.

Beispiel 2

Drei faire Münzen werden in der Hand geschüttelt und dann gleichzeitig geworfen. Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf"?

Ansatz 1: Münzen nicht unterscheidbar

- $\Omega = \{(K,K,K),(K,K,Z),(K,Z,Z),(Z,Z,Z)\}$, wobei Teilergebnisse „sortiert"
- $f(K,K,K) = \frac{1}{8}$, $f(K,K,Z) = \frac{3}{8}$, $f(K,Z,Z) = \frac{3}{8}$, $f(Z,Z,Z) = \frac{1}{8}$

(*wegen Symmetrie auf der Ebene der Mögl., wie die Ergebnisse zustande kommen*)

- A : „genau einmal Kopf", $A = \{(K,Z,Z)\}$
- $\mathbb{P}(A) = f(K,Z,Z) = \frac{3}{8}$

$\rightsquigarrow$ „Genau einmal Kopf" erscheint mit W. $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}$.

Ansatz 2: Münzen unterscheidbar

- $\Omega = \{(\omega_1,\omega_2,\omega_3) : \omega_i \in \{K,Z\}\ \forall\, i = 1,2,3\}$, $\omega_i \triangleq$ (Teil-)Ergebnis i-te Münze
- $f(\omega) = \frac{1}{8}$ für alle $\omega \in \Omega$ (*wegen Symmetrie*)
- A : „genau einmal Kopf", $A = \{(K,Z,Z),(Z,K,Z),(Z,Z,K)\}$
- $\mathbb{P}(A) = f(K,Z,Z) + f(Z,K,Z) + f(Z,Z,K) = \frac{3}{8}$

$\rightsquigarrow$ „Genau einmal Kopf" erscheint mit W. $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}$.

Merkregel: *Umfasst ein Ereignis mehrere Ergebnisse, so erhalten wir die W. des Ereignisses, indem wir die W.en der zugehörigen Ergebnisse addieren.*

Beispiel 3

Eine verbogene Münze wird dreimal nacheinander geworfen.
Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf“?

Beispiel 3

Eine verbogene Münze wird dreimal nacheinander geworfen.
Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf“?

Ansatz:

Beispiel 3

Eine verbogene Münze wird dreimal nacheinander geworfen.
Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf"?

Ansatz:

- $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{K, Z\} \; \forall\, i = 1, 2, 3\}$, $\omega_i \triangleq$ (Teil-)Ergebnis i-ter Wurf

Beispiel 3

Eine verbogene Münze wird dreimal nacheinander geworfen.
Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf"?

Ansatz:
• $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{K, Z\} \; \forall\, i = 1, 2, 3\}$, $\omega_i \triangleq$ (Teil-)Ergebnis i-ter Wurf
• $f(\omega) = p_{\omega_1} p_{\omega_2} p_{\omega_3}$ für alle $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$, wobei $p_K := p$, $p_Z := 1 - p$
und $p \in [0, 1]$ ein unbekannter Parameter ist, der die W. für Kopf
beim einmaligen Münzwurf angibt (*wegen Unabhängigkeit*)

Beispiel 3

Eine verbogene Münze wird dreimal nacheinander geworfen.
Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf"?

Ansatz:
• $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{K, Z\} \; \forall \, i = 1, 2, 3\}$, $\omega_i \triangleq$ (Teil-)Ergebnis i-ter Wurf
• $f(\omega) = p_{\omega_1} p_{\omega_2} p_{\omega_3}$ für alle $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$, wobei $p_K := p$, $p_Z := 1 - p$ und $p \in [0, 1]$ ein unbekannter Parameter ist, der die W. für Kopf beim einmaligen Münzwurf angibt (*wegen Unabhängigkeit*)

ausführliche Begründung: über relative Häufigkeiten
Angenommen, der Versuch (d.h. der 3-malige Münzwurf) wird n mal wiederholt.
Von diesen n Versuchen liefern etwa np_{ω_1} Versuche ω_1 im 1. Wurf.
Von diesen np_{ω_1} Versuchen liefern etwa $np_{\omega_1} p_{\omega_2}$ Versuche ω_2 im 2. Wurf.
Von diesen $np_{\omega_1} p_{\omega_2}$ Versuchen liefern etwa $np_{\omega_1} p_{\omega_2} p_{\omega_3}$ Versuche ω_3 im 3. Wurf.
Damit ist die Festlegung $f(\omega) := p_{\omega_1} p_{\omega_2} p_{\omega_3}$ nahe liegend.

Dabei haben wir angenommen, dass die einzelnen (Teil-)Ergebnisse *unabhängig voneinander* sind, also z. B. das (Nicht-)Erscheinen von Kopf im 1. Wurf keinen Einfluss auf das (Nicht-)Erscheinen von Kopf im 2. Wurf hat.

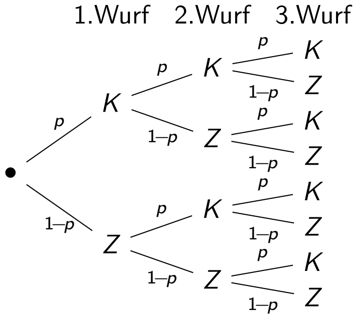
Beispiel 3

Eine verbogene Münze wird dreimal nacheinander geworfen.
Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf“?

Ansatz:

• $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{K, Z\} \ \forall\, i = 1, 2, 3\}$, $\omega_i \triangleq$ (Teil-)Ergebnis i-ter Wurf
• $f(\omega) = p_{\omega_1} p_{\omega_2} p_{\omega_3}$ für alle $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$, wobei $p_K := p$, $p_Z := 1 - p$
und $p \in [0, 1]$ ein unbekannter Parameter ist, der die W. für Kopf
beim einmaligen Münzwurf angibt (*wegen Unabhängigkeit*)

Wahrscheinlichkeitsbaum:



Ergebnis	W.
(K, K, K)	p^3
(K, K, Z)	$p^2(1-p)$
(K, Z, K)	$p^2(1-p)$
(K, Z, Z)	$p(1-p)^2$
(Z, K, K)	$p^2(1-p)$
(Z, K, Z)	$p(1-p)^2$
(Z, Z, K)	$p(1-p)^2$
(Z, Z, Z)	$(1-p)^3$

Beispiel 3

Eine verbogene Münze wird dreimal nacheinander geworfen.
Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf"?

Ansatz:

• $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{K, Z\} \; \forall\, i = 1, 2, 3\}$, $\omega_i \triangleq$ (Teil-)Ergebnis i-ter Wurf
• $f(\omega) = p_{\omega_1} p_{\omega_2} p_{\omega_3}$ für alle $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$, wobei $p_K := p$, $p_Z := 1 - p$ und $p \in [0, 1]$ ein unbekannter Parameter ist, der die W. für Kopf beim einmaligen Münzwurf angibt (*wegen Unabhängigkeit*)

• A : „genau einmal Kopf", $A = \{(K, Z, Z), (Z, K, Z), (Z, Z, K)\}$

Beispiel 3

Eine verbogene Münze wird dreimal nacheinander geworfen.
Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf"?

Ansatz:

- $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{K, Z\} \ \forall\, i = 1, 2, 3\}$, $\omega_i \triangleq$ (Teil-)Ergebnis i-ter Wurf
- $f(\omega) = p_{\omega_1} p_{\omega_2} p_{\omega_3}$ für alle $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$, wobei $p_K := p$, $p_Z := 1 - p$ und $p \in [0, 1]$ ein unbekannter Parameter ist, der die W. für Kopf beim einmaligen Münzwurf angibt (*wegen Unabhängigkeit*)

- A : „genau einmal Kopf", $A = \{(K, Z, Z), (Z, K, Z), (Z, Z, K)\}$
- $\mathbb{P}(A) = f(K, Z, Z) + f(Z, K, Z) + f(Z, Z, K) = 3p(1 - p)^2$

Beispiel 3

Eine verbogene Münze wird dreimal nacheinander geworfen.
Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf"?

Ansatz:

- $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{K, Z\}\ \forall\, i = 1, 2, 3\}$, $\omega_i \triangleq$ (Teil-)Ergebnis i-ter Wurf
- $f(\omega) = p_{\omega_1} p_{\omega_2} p_{\omega_3}$ für alle $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$, wobei $p_K := p$, $p_Z := 1 - p$ und $p \in [0, 1]$ ein unbekannter Parameter ist, der die W. für Kopf beim einmaligen Münzwurf angibt (*wegen Unabhängigkeit*)

- A : „genau einmal Kopf", $A = \{(K, Z, Z), (Z, K, Z), (Z, Z, K)\}$
- $\mathbb{P}(A) = f(K, Z, Z) + f(Z, K, Z) + f(Z, Z, K) = 3p(1 - p)^2$

$\rightsquigarrow$ „Genau einmal Kopf" erscheint mit W. $3p(1-p)^2$.

Beispiel 3

Eine verbogene Münze wird dreimal nacheinander geworfen.
Mit welcher W. erscheint „genau einmal Kopf“?

Ansatz:
• $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{K, Z\} \; \forall\, i = 1, 2, 3\}$, $\omega_i \triangleq$ (Teil-)Ergebnis i-ter Wurf
• $f(\omega) = p_{\omega_1} p_{\omega_2} p_{\omega_3}$ für alle $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$, wobei $p_K := p$, $p_Z := 1 - p$
und $p \in [0, 1]$ ein unbekannter Parameter ist, der die W. für Kopf
beim einmaligen Münzwurf angibt (*wegen Unabhängigkeit*)

• A : „genau einmal Kopf“, $A = \{(K, Z, Z), (Z, K, Z), (Z, Z, K)\}$
• $\mathbb{P}(A) = f(K, Z, Z) + f(Z, K, Z) + f(Z, Z, K) = 3p(1 - p)^2$
$\rightsquigarrow$ „Genau einmal Kopf“ erscheint mit W. $3p(1-p)^2$.

Merkregel: *Ist ein Gesamtexperiment aus mehreren Teilexperimenten zusammengesetzt, die unabhängig voneinander durchgeführt werden, so erhalten wir die W.en für die „Gesamtergebnisse“, indem wir die W.en für die zugehörigen „Teilergebnisse“ multiplizieren.*

Beispiel 4

Wie oft muss man eine verbogene Münze werfen, bis das erste Mal „Kopf" auftritt?

Beispiel 4

Wie oft muss man eine verbogene Münze werfen, bis das erste Mal „Kopf" auftritt?

Ansatz:

Beispiel 4

Wie oft muss man eine verbogene Münze werfen, bis das erste Mal „Kopf“ auftritt?

Ansatz:

- $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, wobei $\omega \triangleq$ Anzahl der Versuche

Beispiel 4

Wie oft muss man eine verbogene Münze werfen, bis das erste Mal „Kopf" auftritt?

Ansatz:

- $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, wobei $\omega \triangleq$ Anzahl der Versuche
- $f(\omega) = (1-p)^{\omega-1} p$, $\omega \in \Omega$

Dabei ist $p \in]0, 1]$ wieder ein unbekannter Parameter.

Beispiel 4

Wie oft muss man eine verbogene Münze werfen, bis das erste Mal „Kopf“ auftritt?

Ansatz:

- $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, wobei $\omega \triangleq$ Anzahl der Versuche
- $f(\omega) = (1-p)^{\omega-1}p$, $\omega \in \Omega$

Dabei ist $p \in]0, 1]$ wieder ein unbekannter Parameter.

ausführliche Begründung: über Hilfsexperiment
Betrachte den n-maligen Münzwurf. Dieses Experiment lässt sich durch

$$\widetilde{\Omega} := \{(\widetilde{\omega}_1, \cdots, \widetilde{\omega}_n) : \widetilde{\omega}_i \in \{K, Z\} \ \forall\, i = 1, \ldots, n\}$$

und

$$\widetilde{f}(\widetilde{\omega}_1 \cdots \widetilde{\omega}_n) := p_{\widetilde{\omega}_1} \cdots p_{\widetilde{\omega}_n}$$

beschreiben, wobei p_K und p_Z wie in Beispiel 3 gewählt seien.

$\rightsquigarrow$ Die W., dass „Kopf“ erstmalig im n-ten Versuch auftritt, beträgt $\widetilde{f}(\underbrace{Z, \cdots, Z}_{(n-1)\text{-mal}}, K) = (1-p)^{n-1}p$.

Beispiel 4

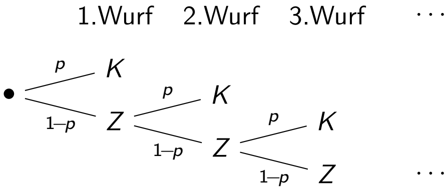
Wie oft muss man eine verbogene Münze werfen, bis das erste Mal „Kopf“ auftritt?

Ansatz:

- $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, wobei $\omega \triangleq$ Anzahl der Versuche
- $f(\omega) = (1-p)^{\omega-1}p$, $\omega \in \Omega$

Dabei ist $p \in\,]0, 1]$ wieder ein unbekannter Parameter.

Wahrscheinlichkeitsbaum:



Ergebnis	W.
1	$(1-p)^0 p$
2	$(1-p)^1 p$
3	$(1-p)^2 p$
$\vdots$	$\vdots$

Beispiel 4

Wie oft muss man eine verbogene Münze werfen, bis das erste Mal „Kopf“ auftritt?

Ansatz:

- $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, wobei $\omega \triangleq$ Anzahl der Versuche
- $f(\omega) = (1-p)^{\omega-1} p$, $\omega \in \Omega$

Dabei ist $p \in \,]0, 1]$ wieder ein unbekannter Parameter.

Wir überprüfen zur Sicherheit, dass die gewählten W.en $f(\omega)$ sich zu 1 addieren:

$$\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} = p \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1}$$

Beispiel 4

Wie oft muss man eine verbogene Münze werfen, bis das erste Mal „Kopf“ auftritt?

Ansatz:
- $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, wobei $\omega \triangleq$ Anzahl der Versuche
- $f(\omega) = (1-p)^{\omega-1} p$, $\omega \in \Omega$

Dabei ist $p \in \,]0, 1]$ wieder ein unbekannter Parameter.

Wir überprüfen zur Sicherheit, dass die gewählten W.en $f(\omega)$ sich zu 1 addieren:

$$\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} = p \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1}$$

Geometrische Reihe

Für alle $x \in (-1, +1)$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Beispiel 4

Wie oft muss man eine verbogene Münze werfen, bis das erste Mal „Kopf" auftritt?

Ansatz:

- $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, wobei $\omega \triangleq$ Anzahl der Versuche
- $f(\omega) = (1-p)^{\omega-1} p$, $\omega \in \Omega$

Dabei ist $p \in \,]0,1]$ wieder ein unbekannter Parameter.

Wir überprüfen zur Sicherheit, dass die gewählten W.en $f(\omega)$ sich zu 1 addieren:

$$\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} = p \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} \underset{\text{geom. Reihe}}{=} p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1\,.$$

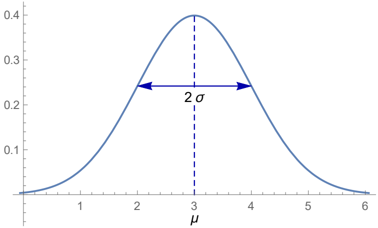
Geometrische Reihe

$$\text{Für alle } x \in (-1,+1) \text{ gilt } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten.

Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten.

1. theoretische Argumente
   – Symmetrie
   – Unabhängigkeit
   – Verteilungsfamilien, *Beispiel:* „Gauß'sche Glockenkurve“



Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten.

1. theoretische Argumente
   – Symmetrie
   – Unabhängigkeit
   – Verteilungsfamilien, *Beispiel:* „Gauß'sche Glockenkurve“
2. statistische Experimente
   – unbekannte W.en / Parameter anhand von Beobachtungen schätzen

   Beispiel: Münzwurf mit einer verbogenen Münze

   die Münze wird n mal geworfen, die unbekannte W. p für Kopf soll auf der Grundlage der dabei entstehenden n Ergebnisse geschätzt werden

$$\begin{array}{ccccc} \text{Schätzung für } p & = & \text{rel. Häufigkeit von Kopf} & = & \dfrac{\text{abs. Häufigkeit von Kopf}}{\text{Anzahl der Münzwürfe}} \\ \widehat{p} & = & h_n(\text{Kopf}) & = & \dfrac{H_n(\text{Kopf})}{n} \end{array}$$

(*Ist das eine vernünftige Schätzung?*)

Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten.

1. theoretische Argumente
   – Symmetrie
   – Unabhängigkeit
   – Verteilungsfamilien, *Beispiel:* „Gauß'sche Glockenkurve"
2. statistische Experimente
   – unbekannte W.en / Parameter anhand von Beobachtungen schätzen
3. subjektive Wahrscheinlichkeiten
   – persönliche Einschätzungen / Überzeugungen

   Hier lassen sich (wie im Alltag) auch Vorgängen Wahrscheinlichkeiten zuordnen, die nur einmal stattfinden oder die schon stattgefunden haben! (*Beispiele:* Wird Deutschland Fußball-Weltmeister? War Herr X der Mörder?)

Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten.

1. theoretische Argumente
   – Symmetrie
   – Unabhängigkeit
   – Verteilungsfamilien, *Beispiel:* „Gauß'sche Glockenkurve“
2. statistische Experimente
   – unbekannte W.en / Parameter anhand von Beobachtungen schätzen
3. subjektive Wahrscheinlichkeiten
   – persönliche Einschätzungen / Überzeugungen
4. Kombination der vorherigen Methoden, z. B. von 1. + 2.
   – theoretische Argumente $\to$ Reduktion auf eine Verteilungsfamilie
   – statistische Experimente $\to$ Schätzung von unbekannten Parametern

Modellbildungsprozess

Realität		**Mathematik**
reales Problem	Modellbildung – – – – – – – – – – ⟶	mathematisches Problem

- wesentliche Elemente?
- wesentliche Zusammenhänge?
- *hier:* Wahrscheinlichkeitsraum
  Ereignisse / Zufallsgrößen

↑ Überprüfung (Plausibilität)	math. Methoden (Berechnungen) ↓

reale „Lösung“	⟵ – – – – – – – – – – Interpretation	mathematische Lösung

Modellbildungsprozess

Realität		**Mathematik**
reales Problem	Modellbildung $- - - - - - - - - - \longrightarrow$	mathematisches Problem
		• wesentliche Elemente? • wesentliche Zusammenhänge? • *hier:* Wahrscheinlichkeitsraum Ereignisse / Zufallsgrößen
$\uparrow$ Überprüfung (Plausibilität)		math. Methoden (Berechnungen) $\downarrow$
reale „Lösung“	$\longleftarrow - - - - - - - - - -$ Interpretation	mathematische Lösung

- Beschreibung der Wirklichkeit durch ein *mathematisches Modell*
- jedes Modell beruht auf vereinfachenden Annahmen
- die Wahl des Modells lässt sich nicht „rein mathematisch“ begründen
- die Wahl des Modells ist i. d. R. nicht eindeutig (vgl. Beispiel 2)

Zusammenfassung:

- *Wir beschreiben (einfache) zufallsabhängige Vorgänge, indem wir die Menge Ω der möglichen Ergebnisse sowie die W.en $f(\omega)$ der einzelnen Ergebnisse $\omega \in \Omega$ angeben.*
- *Wir wollen darauf achten, die Wahl von Ω und $f(\omega)$ kurz zu begründen.*
- *Die W.en von Ereignissen lassen sich dann durch Addition der W.en der zugehörigen Ergebnisse bestimmen.*
- *Wir interpretieren Wahrscheinlichkeiten als relative Häufigkeiten bei sehr vielen Versuchswiederholungen.*
  ($\rightsquigarrow$ frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff)
- *Die Wahl des Modells hängt von den getroffenen Annahmen ab und ist i. d. R. nicht eindeutig.*

Zusammenfassung:

- *Wir beschreiben (einfache) zufallsabhängige Vorgänge, indem wir die Menge Ω der möglichen Ergebnisse sowie die W.en $f(\omega)$ der einzelnen Ergebnisse $\omega \in \Omega$ angeben.*
- *Wir wollen darauf achten, die Wahl von Ω und $f(\omega)$ kurz zu begründen.*
- *Die W.en von Ereignissen lassen sich dann durch Addition der W.en der zugehörigen Ergebnisse bestimmen.*
- *Wir interpretieren Wahrscheinlichkeiten als relative Häufigkeiten bei sehr vielen Versuchswiederholungen. ($\rightsquigarrow$ frequentistischer Wahrscheinlichkeitsbegriff)*
- *Die Wahl des Modells hängt von den getroffenen Annahmen ab und ist i. d. R. nicht eindeutig.*

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!