Stochastik für Informatiker

– 2. Vorlesung –

Prof. Dr. Holger Kösters

Institut für Mathematik, MNF, Universität Rostock

24. Oktober 2019

Organisatorisches (Ergänzungen)

- Vorübungen
  - Lösungen werden in der Übung besprochen und daher nur in Ausnahmefällen unter stud.ip bereitgestellt
- Übungen
  - Einzelabgabe
  - Abgabe auf Papier, NICHT per E-Mail
  - 1. Abgabe: ausnahmsweise schon Mittwoch, 30.10.2019, 13:00
- Klausurbedingungen
  - alle Unterlagen dürfen verwendet werden, ABER ...
  - Taschenrechner, Mobiltelefone, Computer etc. sind verboten!
- Klausurbedingungen
  - Mindestpunktzahl insgesamt
  - Mindestpunktzahl im Teil „Diskrete Strukturen und Optimierung"
  - Mindestpunktzahl im Teil „Stochastik"

(UND-Verknüpfung!)

Modellbildungsprozess

Realität		**Mathematik**
reales Problem	$\xrightarrow{\text{Modellbildung}}$	mathematisches Problem • wesentliche Elemente? • wesentliche Zusammenhänge? • *hier:* Wahrscheinlichkeitsraum Ereignisse / Zufallsgrößen
$\uparrow$ Überprüfung (Plausibilität)		math. Methoden (Berechnungen) $\downarrow$
reale „Lösung“	$\xleftarrow[\text{Interpretation}]{}$	mathematische Lösung

Modellbildungsprozess

Realität		**Mathematik**
reales Problem	Modellbildung $\dashrightarrow$	mathematisches Problem
↑ Überprüfung (Plausibilität)		math. Methoden (Berechnungen) ↓
reale „Lösung“	$\dashleftarrow$ Interpretation	mathematische Lösung

Zum mathematischen Problem:

- wesentliche Elemente?
- wesentliche Zusammenhänge?
- *hier:* Wahrscheinlichkeitsraum
  Ereignisse / Zufallsgrößen

- Beschreibung der Wirklichkeit durch ein *mathematisches Modell*
- jedes Modell beruht auf vereinfachenden Annahmen
- die Wahl des Modells lässt sich nicht „rein mathematisch“ begründen
- die Wahl des Modells ist i. d. R. nicht eindeutig (vgl. Beispiel 2)

Kapitel 1.1
Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Mit diskreten W.räumen lassen sich einfache zufallsabhängige Vorgänge beschreiben, bei denen die Menge der Versuchsausgänge *abzählbar* (d. h. endlich oder abzählbar-unendlich) ist.

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Mit diskreten W.räumen lassen sich einfache zufallsabhängige Vorgänge beschreiben, bei denen die Menge der Versuchsausgänge *abzählbar* (d. h. endlich oder abzählbar-unendlich) ist.

Dabei heißt eine Menge Ω *abzählbar-unendlich*, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \Omega$ gibt, d. h. wenn sie sich in der Form $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ schreiben lässt, wobei jedes Element von Ω genau einmal vorkommt.

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Mit diskreten W.räumen lassen sich einfache zufallsabhängige Vorgänge beschreiben, bei denen die Menge der Versuchsausgänge *abzählbar* (d. h. endlich oder abzählbar-unendlich) ist.

Dabei heißt eine Menge Ω *abzählbar-unendlich*, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \Omega$ gibt, d. h. wenn sie sich in der Form $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ schreiben lässt, wobei jedes Element von Ω genau einmal vorkommt.

Ist Ω eine beliebige Menge, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}(\Omega)$ die *Potenzmenge*, d. h. die Menge aller Teilmengen $A \subseteq \Omega$ (einschließlich der leeren Menge $\emptyset$ und der Menge Ω selbst).

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Mit diskreten W.räumen lassen sich einfache zufallsabhängige Vorgänge beschreiben, bei denen die Menge der Versuchsausgänge *abzählbar* (d. h. endlich oder abzählbar-unendlich) ist.

Dabei heißt eine Menge Ω *abzählbar-unendlich*, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \Omega$ gibt, d. h. wenn sie sich in der Form $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ schreiben lässt, wobei jedes Element von Ω genau einmal vorkommt.

Ist Ω eine beliebige Menge, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}(\Omega)$ die *Potenzmenge*, d. h. die Menge aller Teilmengen $A \subseteq \Omega$ (einschließlich der leeren Menge $\emptyset$ und der Menge Ω selbst).

Definition 1.1 (Diskreter W.raum)

Es seien $\Omega \neq \emptyset$ eine abzählbare Menge und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften $f(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$ und $\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$. Dann heißt das Tripel $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ mit der Abbildung $\mathbb{P} : \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(A) := \sum_{\omega \in A} f(\omega)$ *diskreter W.raum* (zu (Ω, f)).

Bemerkung 1.2 (Umgang mit Summen)

Eine Summe der Form $\sum_{\omega \in A} f(\omega)$ (A abzählbar) berechnen wir, indem wir eine beliebige Reihenfolge $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ (für endliches A) bzw. $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ (für abzählbar-unendliches A) der Elemente von A wählen und die Summe

$$\sum_{i=1}^{n} f(\omega_i) \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^{\infty} f(\omega_i) := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\omega_i)$$

bilden. Dabei hängt der Wert der Summe nicht von der Wahl der Reihenfolge ab, da man Summen mit nicht-negativen Summanden beliebig umordnen kann, ohne den Wert der Summe zu verändern (vgl. Kapitel A.4).

Bemerkung 1.2 (Umgang mit Summen)

Eine Summe der Form $\sum_{\omega \in A} f(\omega)$ (A abzählbar) berechnen wir, indem wir eine beliebige Reihenfolge $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ (für endliches A) bzw. $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ (für abzählbar-unendliches A) der Elemente von A wählen und die Summe

$$\sum_{i=1}^{n} f(\omega_i) \quad \textit{bzw.} \quad \sum_{i=1}^{\infty} f(\omega_i) := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\omega_i)$$

bilden. Dabei hängt der Wert der Summe nicht von der Wahl der Reihenfolge ab, da man Summen mit nicht-negativen Summanden beliebig umordnen kann, ohne den Wert der Summe zu verändern (vgl. Kapitel A.4).

Ähnliche Umordnungen werden im Folgenden stillschweigend verwendet. Ist etwa $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, wobei I eine abzählbare Indexmenge ist und jedes Element von A in genau einer Teilmenge A_i liegt, so gilt

$$\sum_{i \in A} f(\omega) \overset{\textit{Umordnen}}{=} \sum_{i \in I} \sum_{\omega \in A_i} f(\omega) .$$

Bezeichnungen

Im Folgenden seien (Ω, f) und $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ wie in Definition 1.1.

Bemerkung 1.3 (Bezeichnungen)

Es seien $\omega \in \Omega$ und $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$.

Ω	*Ergebnismenge / Grundraum / Stichprobenraum*
ω	*Ergebnis*
$f(\omega)$	*W. des Ergebnisses ω*
f	*W.dichte / W.funktion (gibt die W.en der Ergebnisse an)*
A	*Ereignis*
$\mathbb{P}(A)$	*W. des Ereignisses A*
$\mathbb{P}$	*W.maß / W.verteilung (gibt die W.en der Ereignisse an)*
A	*Ereignis*
$\{\omega\}$	*Elementarereignis*
$\mathbb{P}(\{\omega\}) = f(\omega)$	*Elementar-W.*
Ω	*sicheres Ereignis*
$\emptyset$	*unmögliches Ereignis*
A tritt ein.	*Es erscheint ein Ergebnis $\omega \in A$.*
A tritt nicht ein.	*Es erscheint ein Ergebnis $\omega \notin A$.*

Laplace-Experimente

Ein wichtiger Spezialfall liegt vor, wenn der W.raum endlich ist und jedes Ergebnis die gleiche Chance des Eintretens besitzt:

Bemerkung 1.4 (Gleichverteilung)

Ist $\Omega \neq \emptyset$ endlich und gilt $f(\omega) = 1/|\Omega|$ für alle $\omega \in \Omega$, so heißt die zugehörige W.verteilung $\mathbb{P}$ (diskrete) Gleichverteilung auf Ω, kurz $\mathcal{U}_\Omega$. In diesem Fall gilt

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} \qquad \forall\, A \in \mathfrak{P}(\Omega)\,,$$

d. h. die Bestimmung von W.en lässt sich auf die Bestimmung von Anzahlen zurückführen.

Laplace-Experimente

Ein wichtiger Spezialfall liegt vor, wenn der W.raum endlich ist und jedes Ergebnis die gleiche Chance des Eintretens besitzt:

Bemerkung 1.4 (Gleichverteilung)

Ist $\Omega \neq \emptyset$ endlich und gilt $f(\omega) = 1/|\Omega|$ für alle $\omega \in \Omega$, so heißt die zugehörige W.verteilung $\mathbb{P}$ (diskrete) Gleichverteilung auf Ω, kurz $\mathcal{U}_\Omega$. In diesem Fall gilt

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\textit{Anzahl der für } A \textit{ günstigen Fälle}}{\textit{Anzahl der möglichen Fälle}} \qquad \forall\, A \in \mathfrak{P}(\Omega)\,,$$

d. h. die Bestimmung von W.en lässt sich auf die Bestimmung von Anzahlen zurückführen.

Beachte, dass die Formel in Bem. 1.4 nur anwendbar ist, wenn eine Gleichverteilung vorliegt. Manchmal erweist es sich daher als nützlich, den W.raum geschickt zu wählen, so dass man mit der Gleichverteilung arbeiten kann.

Laplace-Experimente

Ein wichtiger Spezialfall liegt vor, wenn der W.raum endlich ist und jedes Ergebnis die gleiche Chance des Eintretens besitzt:

Bemerkung 1.4 (Gleichverteilung)

Ist $\Omega \neq \emptyset$ endlich und gilt $f(\omega) = 1/|\Omega|$ für alle $\omega \in \Omega$, so heißt die zugehörige W.verteilung $\mathbb{P}$ (diskrete) Gleichverteilung auf Ω, kurz $\mathcal{U}_\Omega$. In diesem Fall gilt

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\textit{Anzahl der für A günstigen Fälle}}{\textit{Anzahl der möglichen Fälle}} \qquad \forall\, A \in \mathfrak{P}(\Omega)\,,$$

d. h. die Bestimmung von W.en lässt sich auf die Bestimmung von Anzahlen zurückführen.

In der Situation von Bem. 1.4 spricht man auch von *Laplace-Experimenten*. Wir werden diese Bezeichnung allerdings vermeiden, weil für uns *Experimente* die realen Vorgänge sind, während wir die math. Modelle *W.räume* nennen.

Bemerkung 1.5

Da Ereignisse formal Teilmengen von Ω sind, können wir mit Hilfe mengentheoretischer Operationen aus gegebenen Ereignissen A, B, C_n $(n \in \mathbb{N})$ neue Ereignisse konstruieren:

Modell	*Bezeichnung*	*Interpretation*
A^c	*Komplement / Gegenereignis*	*A tritt nicht ein.*
$A \cap B$	*Durchschnitt*	*A und B treten ein.*
$A \cup B$	*Vereinigung*	*A oder B treten ein.*
$A \,\Delta\, B$	*symmetrische Differenz*	*Entweder A oder B tritt ein.*
$A \setminus B$	*mengentheoretische Differenz*	*A tritt ein, B tritt nicht ein.*
$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$	*(abzählbarer) Durchschnitt*	*Alle Ereignisse C_n treten ein.*
$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$	*(abzählbare) Vereinigung*	*Mindestens ein Ereignis C_n tritt ein.*
$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} C_m$	*limes superior*	*Unendlich viele Ereignisse C_n treten ein.*
$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} C_m$	*limes inferior*	*Fast alle Ereignisse C_n treten ein.*

Rechenoperationen und Rechenregeln für Mengen

Es gelten dann die üblichen Rechenregeln:

$(A^c)^c = A$ (Involution)

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (de Morgan'sche Regel)

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (de Morgan'sche Regel)

$A \cup B = B \cup A$ (Kommutativgesetz)

$A \cap B = B \cap A$ (Kommutativgesetz)

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Assoziativgesetz)

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Assoziativgesetz)

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Distributivgesetz)

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Distributivgesetz)

$(A \cup B) \cap A = A$ (Absorptionsgesetz)

$(A \cap B) \cup A = A$ (Absorptionsgesetz)

Ähnliches gilt für Durchschnitte und Vereinigungen von mehr als zwei Mengen:

$(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n^c$ (de Morgan'sche Regel)

$(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n^c$ (de Morgan'sche Regel)

$A \cup (\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(A \cup C_n)$ (Distributivgesetz)

$A \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap C_n)$ (Distributivgesetz)

Satz 1.6 (Eigenschaften von W.maßen)

Für jede diskreten W.raum $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *gilt:*

(1) $\forall A \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mathbb{P}(A) \geq 0$ *(Nicht-Negativität)*

(2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *(Normiertheit)*

(3) $\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{P}(\Omega)$ *:* $A_1, \ldots, A_n$ *paarweise disjunkt*
$\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ *(Additivität)*

(3') $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{P}(\Omega)$ *:* $A_1, A_2, \ldots$ *paarweise disjunkt*
$\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}(A_i)$ *(σ-Additivität)*

Satz 1.6 (Eigenschaften von W.maßen)

Für jede diskreten W.raum $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *gilt:*

(1) $\forall A \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mathbb{P}(A) \geq 0$ *(Nicht-Negativität)*

(2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *(Normiertheit)*

(3) $\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{P}(\Omega)$ *:* $A_1, \ldots, A_n$ *paarweise disjunkt*
$\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ *(Additivität)*

(3') $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{P}(\Omega)$ *:* $A_1, A_2, \ldots$ *paarweise disjunkt*
$\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}(A_i)$ *(σ-Additivität)*

(4) $\forall A \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ *(Regel von der Gegen-W.)*

(5) $\forall A \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mathbb{P}(A) \leq 1$

(6) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

(7) $\forall A, B \in \mathfrak{P}(\Omega) : A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ *(Monotonie)*

(8) $\forall A, B \in \mathfrak{P}(\Omega) : A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ *(Subtraktivität)*

(9) $\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ *(Subadditivität)*

(9') $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}(A_i)$ *(σ-Subadditivität)*

(10) $\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$

(Siebformel von Sylvester-Poincaré / Einschluss-Ausschluss-Prinzip)

Siebformel von Sylvester-Poincaré / Einschluss-Ausschluss-Prinzip

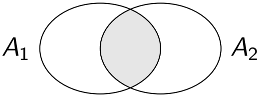
$$\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

Siebformel von Sylvester-Poincaré / Einschluss-Ausschluss-Prinzip

$$\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

Spezialfall $n = 2$:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$$

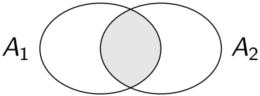


Siebformel von Sylvester-Poincaré / Einschluss-Ausschluss-Prinzip

$$\forall A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

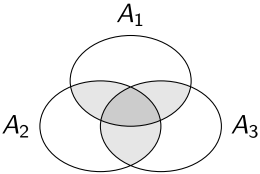
Spezialfall $n = 2$:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$$



Spezialfall $n = 3$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) \\ &\quad - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) \\ &\quad + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\end{aligned}$$



Beispiele für diskrete W.räume

Beispiel 1.7 (Würfelwurf)

Ein 'fairer' Würfel wird 4-mal geworfen.

(a) *Mit welcher W. fällt mindestens einmal die Sechs?*

(b) *Mit welcher W. fällt genau einmal die Sechs?*

(c) *Mit welcher W. ist das größte Ergebnis eine Vier?*

Beispiel 1.7 (Würfelwurf)

Ein 'fairer' Würfel wird 4-mal geworfen.

- $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) : \omega_i \in \{1, \ldots, 6\}$ *für* $i = 1, 2, 3, 4\}$ (*wobei* $\omega_i \triangleq$ *Augenzahl im* i*-ten Wurf*)
- $f(\omega) := 1/|\Omega| \ \forall\, \omega \in \Omega$ *oder* $\mathbb{P} :=$ *Gleichvtlg. auf* Ω (*Begründung: Symmetrie*)

(a) *Mit welcher W. fällt mindestens einmal die Sechs?*

(b) *Mit welcher W. fällt genau einmal die Sechs?*

(c) *Mit welcher W. ist das größte Ergebnis eine Vier?*

Beispiel 1.7 (Würfelwurf)

Ein 'fairer' Würfel wird 4-mal geworfen.

- $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) : \omega_i \in \{1, \ldots, 6\}$ *für* $i = 1, 2, 3, 4\}$
  (*wobei* $\omega_i \triangleq$ *Augenzahl im i-ten Wurf*)
- $f(\omega) := 1/|\Omega| \; \forall \omega \in \Omega$ *oder* $\mathbb{P} :=$ *Gleichvtlg. auf* Ω
  (*Begründung: Symmetrie*)

(a) *Mit welcher W. fällt mindestens einmal die Sechs?*

- A : *„mindestens einmal die Sechs"*, $A = \{\omega \in \Omega : \exists\, i \in \{1, 2, 3, 4\} : \omega_i = 6\}$
- *Idee: Übergang zum Komplement*
- A^c : *„nie die Sechs"*, $A^c = \{\omega \in \Omega : \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} : \omega_i \neq 6\}$
- $\mathbb{P}(A^c) = \frac{|A^c|}{|\Omega|} = \frac{5^4}{6^4} = \frac{625}{1296}$
- $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}$ $[\approx 0.518]$

(b) *Mit welcher W. fällt genau einmal die Sechs?*

(c) *Mit welcher W. ist das größte Ergebnis eine Vier?*

Beispiele für diskrete W.räume

Beispiel 1.7 (Würfelwurf)

Ein 'fairer' Würfel wird 4-mal geworfen.

- $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) : \omega_i \in \{1, \dots, 6\}$ *für* $i = 1, 2, 3, 4\}$
  (*wobei* $\omega_i \triangleq$ *Augenzahl im i-ten Wurf*)
- $f(\omega) := 1/|\Omega| \ \forall \omega \in \Omega$ *oder* $\mathbb{P} :=$ *Gleichvtlg. auf* Ω
  (*Begründung: Symmetrie*)

(a) *Mit welcher W. fällt mindestens einmal die Sechs?*

(b) *Mit welcher W. fällt genau einmal die Sechs?*

- B : *„genau einmal die Sechs"*, $B = \{\omega \in \Omega : \exists!\, j \in \{1, 2, 3, 4\} : \omega_j = 6\}$
- *Idee: geschickte Zerlegung*
- B_i : *„die Sechs genau im i-ten Wurf"*, $B_i = \{\omega \in B : \omega_i = 6\}$
- $\mathbb{P}(B_i) = \frac{|B_i|}{|\Omega|} = \frac{5^3}{6^4} = \frac{125}{1296}$
- $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B_1 \cup \dots \cup B_4) \underset{Add.}{=} \mathbb{P}(B_1) + \dots + \mathbb{P}(B_4) = \frac{500}{1296}$ $[\approx 0.386]$

(c) *Mit welcher W. ist das größte Ergebnis eine Vier?*

Beispiele für diskrete W.räume

Beispiel 1.7 (Würfelwurf)

Ein 'fairer' Würfel wird 4-mal geworfen.

- $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) : \omega_i \in \{1, \dots, 6\}$ *für* $i = 1, 2, 3, 4\}$
  (*wobei* $\omega_i \triangleq$ *Augenzahl im i-ten Wurf*)
- $f(\omega) := 1/|\Omega| \ \forall\, \omega \in \Omega$ *oder* $\mathbb{P} :=$ *Gleichvtlg. auf* Ω
  (*Begründung: Symmetrie*)

(a) *Mit welcher W. fällt mindestens einmal die Sechs?*

(b) *Mit welcher W. fällt genau einmal die Sechs?*

(c) *Mit welcher W. ist das größte Ergebnis eine Vier?*

- C : *„größte Augenzahl* $= 4$*"*, $C = \{\omega \in \Omega : \max_{i=1,\dots,4} \omega_i = 4\}$
- *Idee: geschickte Zurückführung auf einfachere Ereignisse*
- C_i : *„größte Augenzahl* $\leq i$*"*, $C_i = \{\omega \in \Omega : (\forall j : \omega_j \leq i)\}$
- $\mathbb{P}(C_i) = \frac{|C_i|}{|\Omega|} = \frac{i^4}{6^4}$
- $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C_4 \setminus C_3) \underset{\textit{Subtrakt.}}{=} \mathbb{P}(C_4) - \mathbb{P}(C_3) = \frac{256}{1296} - \frac{81}{1296} = \frac{175}{1296}$ [≈ 0.135]

(1) $\forall A \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mathbb{P}(A) \geq 0$

(2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(3) $\forall A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{P}(\Omega) : A_1, \dots, A_n$ paarweise disjunkt
$\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ (*Additivität*)

Lemma 1.8 (Charakterisierung der σ-Additivität)

Es sei $\Omega \neq \emptyset$ eine nicht-leere Menge und $\mathbb{P} : \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit den obigen Eigenschaften (1) – (3). Dann sind äquivalent:

(a) *(σ-Additivität) Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{P}(\Omega)$ gilt $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n)$.*

(b) *(Stetigkeit von unten) Für jede aufsteigende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{P}(\Omega)$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)$.*

(c) *(Stetigkeit von oben) Für jede absteigende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{P}(\Omega)$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^\infty A_n)$.*

Dabei heißt eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ *aufsteigend* bzw. *absteigend*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ $A_n \subseteq A_{n+1}$ bzw. $A_n \supseteq A_{n+1}$ gilt.

Lemma 1.8 (Charakterisierung der σ-Additivität)

Es sei $\Omega \neq \emptyset$ eine nicht-leere Menge und $\mathbb{P} : \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit den obigen Eigenschaften (1) – (3). Dann sind äquivalent:

(a) *(σ-Additivität) Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{P}(\Omega)$ gilt $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$.*

(b) *(Stetigkeit von unten) Für jede aufsteigende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{P}(\Omega)$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$.*

(c) *(Stetigkeit von oben) Für jede absteigende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{P}(\Omega)$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$.*

Dabei heißt eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ *aufsteigend* bzw. *absteigend*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ $A_n \subseteq A_{n+1}$ bzw. $A_n \supseteq A_{n+1}$ gilt.

Bemerkung: Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ eine aufsteigende bzw. absteigende Folge und $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ bzw. $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, so schreibt man auch $A_n \uparrow A$ bzw. $A_n \downarrow A$. Damit kann man die Eigenschaften (b) und (c) auch wie folgt formulieren:

$$\Big[A_n \uparrow A \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(A_n) \uparrow \mathbb{P}(A)\Big] \qquad \text{bzw.} \qquad \Big[A_n \downarrow A \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(A_n) \downarrow \mathbb{P}(A)\Big]$$

Idee: Approximation von innen bzw. außen (vgl. Volumen-Bestimmung in der Geometrie)

Kombinatorik (Satz 1.9)

Problemstellung: Aus einer Menge mit n Elementen (o. E. $\{1, \ldots, n\}$) wird k-mal ein Element ausgewählt. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

	mit Wiederholung	ohne Wiederholung
geordnete Stichproben	Fall I	Fall II
ungeordnete Stichproben	Fall IV	Fall III

Problemstellung: Aus einer Menge mit n Elementen (o. E. $\{1, \ldots, n\}$) wird k-mal ein Element ausgewählt. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

	mit Wiederholung	ohne Wiederholung
geordnete Stichproben	Fall I	Fall II
ungeordnete Stichproben	Fall IV	Fall III

Fall I (**Geordnete Stichproben mit Wiederholung**)
$\Omega_{\text{I}} = \{(\omega_1, \ldots, \omega_k) : \omega_i \in \{1, \ldots, n\} \text{ für } i = 1, \ldots, k\} =: \{1, \ldots, n\}^k$
$|\Omega_{\text{I}}| = n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$

Fall II (**Geordnete Stichproben ohne Wiederholung**)
$\Omega_{\text{II}} = \{(\omega_1, \ldots, \omega_k) : \omega_i \in \{1, \ldots, n\} \text{ für } i = 1, \ldots, k \ \underline{\text{und}} \ \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\}$
$|\Omega_{\text{II}}| = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Fall III (**Ungeordnete Stichproben ohne Wiederholung**)
$\Omega_{\text{III}} = \{(\omega_1, \ldots, \omega_k) : \omega_i \in \{1, \ldots, n\} \text{ für } i = 1, \ldots, k \ \underline{\text{und}} \ \omega_1 < \ldots < \omega_k\}$
$|\Omega_{\text{III}}| = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$

Fall IV (**Ungeordnete Stichproben mit Wiederholung**)
$\Omega_{\text{IV}} = \{(\omega_1, \ldots, \omega_k) : \omega_i \in \{1, \ldots, n\} \text{ für } i = 1, \ldots, k \ \underline{\text{und}} \ \omega_1 \leq \ldots \leq \omega_k\}$
$|\Omega_{\text{IV}}| = \binom{n+k-1}{k}$

Bemerkung 1.10

In Fall II ist der Fall $n = k$ von besonderem Interesse; hier ist Ω_{II} die Menge der Permutationen (Umordnungen) der n Elemente, und es gilt $|\Omega_{II}| = n!$.

Bemerkung 1.11

Um die Größe von $n!$ (für großes n) bzw. von $\binom{n}{k}$ (für großes k und $n-k$) abzuschätzen, kann man die Stirling-Formel verwenden:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n \quad (n \to \infty) \quad \left[\iff \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n} = 1 \right].$$

Bemerkung 1.12

Die obige Problemstellung lässt sich unterschiedlich interpretieren:

1. **Urnenmodell**
   Aus einer Urne mit n Kugeln (mit den Nummern $1 - n$) wird k-mal gezogen.
   – mit / ohne Zurücklegen $\triangleq$ mit / ohne Wiederholung
   – mit / ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
   $\triangleq$ geordnete / ungeordnete Stichproben

2. **Teilchen-Fächer-Modell**
   k Teilchen werden auf n Fächer (mit den Nummern $1 - n$) verteilt.
   – mit / ohne Mehrfachbelegung $\triangleq$ mit / ohne Wiederholung
   – unterscheidbare / nicht-unterscheidbare Teilchen
   $\triangleq$ geordnete / ungeordnete Stichproben

Bemerkung 1.12

Die obige Problemstellung lässt sich unterschiedlich interpretieren:

1. **Urnenmodell**
   Aus einer Urne mit n Kugeln (mit den Nummern $1 - n$) wird k-mal gezogen.
   – mit / ohne Zurücklegen $\triangleq$ mit / ohne Wiederholung
   – mit / ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
   $\triangleq$ geordnete / ungeordnete Stichproben

2. **Teilchen-Fächer-Modell**
   k Teilchen werden auf n Fächer (mit den Nummern $1 - n$) verteilt.
   – mit / ohne Mehrfachbelegung $\triangleq$ mit / ohne Wiederholung
   – unterscheidbare / nicht-unterscheidbare Teilchen
   $\triangleq$ geordnete / ungeordnete Stichproben

Zusammenhang:
Wähle für jedes Teilchen das Fach, in welches das Teilchen gelegt wird.

Beispiele zur Kombinatorik I

Beispiele 1.13

(a) *(Wörter) Aus einem Alphabet mit n „Buchstaben" werden „Wörter" der Länge n gebildet, wobei Buchstaben mehrfach verwendet werden dürfen. Mit welcher W. enthält ein rein zufälliges Wort keinen Buchstaben doppelt?*

(b) *(Murmeln) 6 nicht unterscheidbare Murmeln werden auf 3 unterscheidbare Dosen verteilt. Wie viele Möglichkeiten gibt es?*

(c) *(Murmeln) 6 nicht unterscheidbare Murmeln werden auf 3 nicht unterscheidbare Dosen verteilt. Wie viele Möglichkeiten gibt es?*

(d) *(Wörter) Aus den Buchstaben des Wortes ANANAS werden „Wörter" der Länge 6 gebidet, wobei jeder Buchstabe genau so oft verwendet werden muss, wie er in ANANAS vorkommt. Wie viele Möglichkeiten gibt es?*

(e) *(Lotto) Sie geben beim Lotto „6 aus 49" (mit Superzahl) einen Tipp ab. Wie groß ist die W. für die Gewinnklassen I, II, III, . . . ?*

(f) *(Münzwurf) Es werden n faire Münzen gleichzeitig geworfen. Mit welcher W. erhalten wir (genau) k-mal „Kopf", $k = 0, \dots, n$?*

Beispiel 1.13(e): Lotto

(e) *(Lotto) Sie geben beim Lotto „6 aus 49“ (mit Superzahl) einen Tipp ab. Wie groß ist die W. für die Gewinnklassen I, II, III, . . . ?*

Gewinnklasse	Beschreibung	Wahrscheinlichkeit
I	6 Richtige mit Superzahl	$\frac{1}{139838160} \approx 1 : 139.838.160$
II	6 Richtige (ohne Superzahl)	$\frac{9}{139838160} \approx 1 : 15.537.573$
III	5 Richtige mit Superzahl	$\frac{258}{139838160} \approx 1 : 542.008$
IV	5 Richtige (ohne Superzahl)	$\frac{2322}{139838160} \approx 1 : 60.223$
V	4 Richtige mit Superzahl	$\frac{13545}{139838160} \approx 1 : 10.324$
VI	4 Richtige (ohne Superzahl)	$\frac{121905}{139838160} \approx 1 : 1.147$
VII	3 Richtige mit Superzahl	$\frac{246820}{139838160} \approx 1 : 567$
VIII	3 Richtige (ohne Superzahl)	$\frac{2221380}{139838160} \approx 1 : 63$
IX	2 Richtige mit Superzahl	$\frac{1851150}{139838160} \approx 1 : 76$

Beispiel 1.13(f): Münzwurf

(f) *(Münzwurf) Es werden n faire Münzen gleichzeitig geworfen. Mit welcher W. erhalten wir (genau) k-mal „Kopf“, $k = 0, \ldots, n$?*

Die Ereignisse $A_0, \ldots, A_n$ bilden eine Zerlegung von Ω (d. h. $A_0, \ldots, A_n$ sind nicht-leer, und jedes $\omega \in \Omega$ ist in genau einer Menge A_k enthalten).

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k) \underset{\text{Additivität}}{=} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1\,.$$

Wir können die Werte $\widetilde{f}(k) := \mathbb{P}(A_k)$ verwenden, um einen neuen W.raum mit der Grundmenge $\widetilde{\Omega} := \{0, \ldots, n\}$ zu konstruieren.

Zusammenfassung:

- *Zufallabhängige Vorgänge, bei denen die Menge der möglichen Ergebnisse abzählbar ist, lassen sich durch diskrete W.räume beschreiben.*
- *Wir geben diskrete W.räume an, indem wir die Menge Ω der möglichen Ergebnisse sowie die W.dichte $f : \Omega \to [0,1]$ angeben.*
- *Mit Hilfe der Rechenregeln für W.maße lassen sich die W.en von komplizierteren Ereignissen häufig auf die W.en von einfacheren Ereignissen zurückführen.*
- *Liegt eine diskrete Gleichverteilung vor, so lässt sich die Berechnung von W.en auf die Berechnung von Anzahlen zurückführen. ($\rightsquigarrow$ Kombinatorik)*

Zusammenfassung:

- *Zufallabhängige Vorgänge, bei denen die Menge der möglichen Ergebnisse abzählbar ist, lassen sich durch diskrete W.räume beschreiben.*
- *Wir geben diskrete W.räume an, indem wir die Menge Ω der möglichen Ergebnisse sowie die W.dichte $f : \Omega \to [0, 1]$ angeben.*
- *Mit Hilfe der Rechenregeln für W.maße lassen sich die W.en von komplizierteren Ereignissen häufig auf die W.en von einfacheren Ereignissen zurückführen.*
- *Liegt eine diskrete Gleichverteilung vor, so lässt sich die Berechnung von W.en auf die Berechnung von Anzahlen zurückführen. ($\rightsquigarrow$ Kombinatorik)*

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!