Serie 5

Tobias Reincke
Matrikelnummer: 218203884

January 9, 2020

Aufgabe 15:

a)

$\Omega = \{(w1, w2, w3) | w1, w2, w3 \in \{1, .., 6\}\}$
$\mathbb{P} := \mathbb{U}_\Omega$
$W_1, W_2, W_3 \in \mathbb{A}$ mit $W_i = $ x bedeutet, dass im i-ten Wurf wurde x gewürfelt.

b)

Die insgesamte Anzahl an Kombinationen ist: 6^3

Die Mächtigkeit von A beträgt für 6 * jede valide Kombination von w1 und w2 (da w3 beliebig gewählt werden kann. Die Anzahl von validen Kombinationen lässt sich durch folgende Summe darstellen. (1 2 ; 1 3 , .. , 2 3, .., 5 6)

$$\frac{|A|}{6} = \sum_{i=0}^{6} 6 - i = \sum_{i=1}^{5} i = \frac{5 * (5+1)}{2} = \frac{30}{2} = 15 \to P(A) = \frac{|A|}{6^3} = \frac{90}{6^3}$$

Dasselbe analog für B und $P(B)$ indem man w2 und w3 tauscht. Zum Durchschnitt von A und B:
{(1,2,2),(1,2,3),(1,3,2), ...}

Habe es hier einfach ausgerechnet:
$w1 < w2 < w3$ & $w1 < w3 < w2$ sind equivalent in Größe, da einfach w2 und w3 vertauschen zum jeweils anderen Ergebnis führt..

$$|A \cap B| = |\{(w1, w2, w3) | w1 < w2 < w3 \wedge w1 < w3 < w2 \wedge w1 < w2 = w3\}|$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{6} (k-1) * (6-k) + \sum_{k=1}^{6} 6 - k = 2 \sum_{k=1}^{6} k * (5-k) + \sum_{k=1}^{5} k$$

$$= 2\sum_{k=1}^{5}(k*5) - k*k \quad +15 = 2*(5*(\frac{5*(5+1)}{2}) - \frac{5(5+1)(2*5+1)}{6}) + 15 = 2(15*5 - 5*11) + 15$$

$$= 2(75-55) + 15 = 2*20 + 15 = 45$$

Wird auch durch nachzählen erreicht

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{45}{6^3}}{\frac{90}{6^3}} = \frac{1}{2} \neq P(A)$$

$\rightarrow$ $P(A)$und $P(B)$ sind nicht von einander unabhängig. Das Ergebnis bedeutet, dass sich A und B in der Hälfte der Ergebnisse schneiden, was auch logisch erklingt, da genauso viele Kombinationen wie in A zu $A \cap B$ gehören wie auch nicht.

c)

x=W1
6 * 1/6 mal da jedes w2 und w3 funktioniert
P(X=x) = $\frac{1}{6} * \frac{6}{6} * \frac{6}{6} = \frac{1}{6}$
Y=W2
6 * 1/6 mal da jedes w1 und w3 funktioniert
P(Y=y) = $\frac{6}{6} * \frac{1}{6} * \frac{6}{6} = \frac{1}{6}$
Irgendwie sehr offentsichtlicht.
X $\cap$ Y = (w1,w2,w3 — w1 = x , w2 = y)
P (X=x, Y = y) = $\frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{6}{6} = \frac{1}{36}$ = P (X $\cap$ Y)
P(X | Y)= $\frac{P(X\cap Y)}{X} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{36}} = \frac{1}{6} = P(X)$ $\rightarrow$ X und Y sind unabhängig.
Wer hätte es gedacht.

d)

S=w1 + w2 + w3 $\wedge$ (w1,w2,w3) $\in \Omega \rightarrow S \in \{3, ..., 18\}$

S =	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\#K_S$	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

$\#K_S$= Anzahl Kombinationen
P(S=x)= $\frac{\#K_S(x)}{6^3}$

$M =$	1	2	3	4	5	6
$\#K_M =$	1	7	19	37	61	91

$\#K_M$ = Anzahl Kombinationen
P(M=x)= $\frac{\#K_M(x)}{6^3}$ P (S=3 $\cap$ M=1)= P({1,1,1}) = $\frac{1}{216} \neq$ P(M=1)P(S=3)

Aufgabe 16:

a)

$\frac{F(Y>s+t) \wedge F(Y>s)}{F(Y>s)} = \frac{F(Y>s+t)}{F(Y>s)}$
$= \begin{cases} \frac{e^{-\mu(s+t)y}}{e^{-\mu sy}} & s+t>0 \wedge s>0 \\ 0 & s+t \leq 0 \wedge s \leq 0 \end{cases}$
$= \begin{cases} e^{-\mu ty} & s+t>0 \wedge s>0 \\ 0 & s+t \leq 0 \wedge s \leq 0 \end{cases}$
$= F(Y > t)$

b)

min $X_i > t$ $\to$ min$(X_i, ..., X_n) > t \to \overline{F}_X = \mathbb{P}(min(X_1, ..., X_n) > t5) =$
$\mathbb{P}(X_1 > x, ..., X_n > x)$
$= \mathbb{P}(X_1 > x)\mathbb{P}(X_2 > t)..\mathbb{P}(X_n > n)$
$= \overline{F}_1 \cdot \overline{F}_1 \cdot ... \cdot \overline{F}_n$

0.1 c)

$Y = min\{X_1, ..., X_n\} = F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = 1 - P(Y > x)$
Identität Aufgabe b
$= 1 - \coprod_{i \in \{1,...,n\}} \mathbb{P}(X_i)$
$\mathbb{P}(X_i > x) = 1 - \mathbb{P}(X_i \leq x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$
$\to 1 - \coprod_{i \in \{1,...,n\}} \mathbb{P}(X_i) = 1 - \coprod_{i \in \{1,...,n\}} e^{-\lambda x}$
$\to F_Y(x) = 1 - e^{-\lambda x n} \mathbf{1}_{(0,\inf)(x)}$

Aufgabe 17

a) Poissonverteilung

Sei $\mathbb{R}$

$$E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} xP(X = x) = x\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \sum_0^\infty xe^{-\lambda}\lambda^x \frac{1}{x!} = \sum_1^\infty xe^{-\lambda}\lambda^x \frac{1}{x!}$$

Ersetze x durch y:=x-1

$$= \sum_0^\infty (y+1)e^{-\lambda}\lambda^{y+1}\frac{1}{y+1!} = \sum_0^\infty (y+1)e^{-\lambda}\lambda^y\lambda\frac{1}{y+1!} = \sum_0^\infty (y+1)e^{-\lambda}\lambda^y\lambda\frac{1}{(y+1)y!}$$

$$= \lambda\sum_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^y\frac{1}{y!} = \lambda\sum_0^\infty P(Y = y) = \lambda$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \to E(X^2) = Var(X) - E(X)^2 = \lambda + \lambda^2$$

b) Exponentialverteilung

Die Verteilung ist immer null für Werte kleiner 0, daher das Intergral über 0 bis ∞ Normaler Erwartungswert für stetige Funktionen mit Dichte $f_X(x) = x\lambda^{-\lambda x}$

$$\int_0^\infty x f_X(x) dx = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx$$

Es gilt: (partielle Integration)
$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx \wedge u(x) = x \wedge v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
Außerdem: $e^{\lambda x} = e^{x^\lambda}$
Setze ein :

$$[-xe^{-x\lambda}]_0^\infty + \int_0^\infty 1e^{-\lambda x} dx = (0-0) + [-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}]_0^\infty = 0 + (0 - -\frac{e^0}{\lambda}) = 0 + (0 + \frac{1}{\lambda}) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X) \rightarrow E(X^2) = Var(X) + E(X) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}$$

c) diskrete Gleichverteilung

$$E(X) = \sum_i x_i * P(X = x_i)$$

n sei die Mächtigkeit der Ergebnismenge($\Omega = \{1, ..., n\}$) bzw. die Menge aller x_i

$$= \sum_i x_i * \frac{1}{n} = \frac{1}{n} * \sum_i x_i = \frac{1}{n} * \frac{n*(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{n}P(X^2 = x^2) = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

0.2 d) stetige Gleichverteilung

$$E(X) = \int_{-\infty}^\infty x f(x) = \int_a^b x\frac{1}{b-a}$$

Da f(x) außerhalb [a,b] 0 ergbt.

$$= \frac{1}{b-a}[\frac{1}{2}x^2]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^\infty x^2 f(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 = \frac{1}{b-a}[\frac{1}{3}x^3]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$$