Übungen zur Stochastik für Informatik

Blatt 3 (Zufallsgrößen / Stetige Wahrscheinlichkeitsmaße)

Vorübung 7 (Würfel : keine Abgabe)
Ein „fairer“ Würfel, auf dessen Seitenflächen die Zahlen $1, 1, 2, 2, 3, 3$ stehen, wird zweimal geworfen.

(a) Beschreiben Sie die Situation durch einen geeigneten W.raum sowie durch zwei Zufallsgrößen S und P für die Summe bzw. das Produkt.

(b) Geben Sie die Verteilungen von S und von P an

(c) Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle, so dass sie die *gemeinsame Verteilung* von S und P angibt:

$\mathbb{P}(S = s, P = p)$	$p =$	$p =$	$p =$	$p =$	$p =$	$p =$	
$s =$							
$s =$							
$s =$							
$s =$							
$s =$							

(d) Erläutern Sie, wie Sie die Verteilungen von S und von P aus der Tabelle zurückerhalten.

(e) Es wird jetzt das folgende Glücksspiel betrachtet: Man gewinnt, wenn die Summe (echt) größer als das Produkt ist. Beschreiben Sie das Ereignis A, dass man gewinnt, mit Hilfe der Zufallsgrößen S und P, und bestimmen Sie anschließend $\mathbb{P}(A)$.

Vorübung 8 (Fluggesellschaft : keine Abgabe)
Eine Fluggesellschaft hat für einen Flug mit 300 Sitzplätzen 305 Reservierungen entgegengenommen, von denen erfahrungsgemäß $2\,\%$ storniert werden.

(a) Mit welcher W. müssen Fluggäste trotz Reservierung auf andere Flüge verwiesen werden? Beschreiben Sie die vorliegende Situation durch eine geeignete Zufallsgröße X (möglichst *ohne* einen W.raum anzugeben), beschreiben Sie das interessierende Ereignis formal, und berechnen Sie die gesuchte W. (ggf. mit Hilfe einer geeigneten Approximation).

(b) Wie viele Reservierungen kann die Fluggesellschaft entgegennehmen, damit die W. dafür, dass Fluggäste trotz Reservierung abgewiesen werden müssen (und unzufrieden sind) höchtens $5\,\%$ beträgt?

Vorübung 9 (Diskrete W.maße vs. Stetige W.maße : keine Abgabe)

(a) Gegeben sei die Funktion $f(x) := C\cos(\pi x)$ auf der Menge $\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, +\frac{1}{3}, +\frac{1}{2}\}$. Wie muss $C > 0$ gewählt sein, damit f eine W.dichte ist? Um welche Art von W.dichte handelt es sich? Berechnen Sie für das zugehörige W.maß $\mathbb{P}$ die W. $\mathbb{P}(A)$, wobei $A = [0, \frac{1}{3}]$. Veranschaulichen Sie die Dichte f sowie die W. $\mathbb{P}(A)$ anhand einer geeigneten Graphik.

Hinweis: Es gilt $\cos(0) = 1$, $\cos(\pm\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\cos(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$.

(b) Gegeben sei die Funktion $f(x) := C\cos(\pi x)$ auf der Menge $[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$. Wie muss $C > 0$ gewählt sein, damit f eine W.dichte ist? Um welche Art von W.dichte handelt es sich? Berechnen Sie für das zugehörige W.maß $\mathbb{P}$ die W. $\mathbb{P}(A)$, wobei $A = [0, \frac{1}{3}]$. Veranschaulichen Sie die Dichte f sowie die W. $\mathbb{P}(A)$ anhand einer geeigneten Graphik.

Hinweis: Es gilt $\sin(0) = 0$, $\sin(\pm\frac{\pi}{3}) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\sin(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm 1$.

(c) Wie ändern sich die W.en in Teil (a) bzw. (b), wenn man anstelle des abgeschlossenen Intervalls $A = [0, \frac{1}{3}]$ das offene Intervall $A = (0, \frac{1}{3})$ betrachtet?

Übung 8 (Wichtige Wahrscheinlichkeitsverteilungen : jeweils 2 = 10 Punkte)
Beschreiben Sie die vorliegende Situation durch eine geeignete Zufallsgröße X (möglichst *ohne* einen W.raum anzugeben), beschreiben Sie das interessierende Ereignis formal, und berechnen Sie die gesuchte W. (ggf. mit Hilfe einer geeigneten Approximation):

(a) Ein fairer Würfel wird 10 mal geworfen. Mit welcher W. fällt genau zweimal die Sechs?

(b) Aus einer Lieferung von 50 Produkten, von denen 20% (also 10 Produkte) defekt sind, wird (ohne Zurücklegen) eine Stichprobe von 10 Produkten entnommen und überprüft. Mit welcher W. sind genau 4 Produkte in der Stichprobe defekt?

(c) Aus einer Lieferung von 5000 Produkten, von denen 20% (also 1000 Produkte) defekt sind, wird (ohne Zurücklegen) eine Stichprobe von 10 Produkten entnommen und überprüft. Mit welcher W. sind genau 4 Produkte in der Stichprobe defekt?

(d) Auf einem Server gehen normalerweise 4 Aufrufe pro Sekunde ein. Mit welcher W. gehen in der nächsten Sekunde 8 oder mehr Aufrufe ein?

(e) Anton und Bernd werfen abwechselnd eine (nicht notwendigerweise faire) Münze, bis erstmalig Kopf erscheint, wobei Anton anfängt. Es gewinnt derjenige Spieler, der zuerst Kopf wirft. (Wenn also Anton gleich im ersten Versuch Kopf wirft, so hat Anton gewonnen.) Mit welcher W. gewinnt Anton?

Übung 9 (Stetige W.maße : 7 Punkte)
Welche der folgenden Funktionen f sind W.dichten von W.maßen $\mathbb{P}$ auf $\mathbb{R}$? Berechnen Sie ggf. die W. des Intervalls $A := (0, \frac{\pi}{2})$. Fertigen Sie jeweils zunächst eine Skizze an!

(i) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(x)\,\mathbf{1}_{(0,\pi)}(x)$

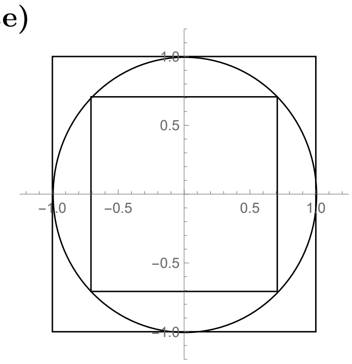
(ii) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(x)\,\mathbf{1}_{(0,3\pi)}(x)$

(iii) $f(x) = xe^{-x}\,\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$

(iv) $f(x) = x^2e^{-x}\,\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$

Die folgenden Übungen können ab der 5. Vorlesung (am 21.11.2019) bearbeitet werden.

Übung 10 (Geometrische Wahrscheinlichkeiten : 4 Punkte)
Wir betrachten die rechts abgebildeten Mengen. Es wird „rein zufällig“ ein Punkt aus dem äußeren Quadrat gewählt. Mit welcher W. liegt dieser Punkt im Kreis?



Beschreiben Sie die Situation durch einen formalen W.raum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sowie durch ein formales Ereignis A und berechnen Sie anschließend die gesuchte W. $\mathbb{P}(A)$, wobei Sie die elementargeometrischen Formeln für den Flächeninhalt aus der Schule (und *nicht* das iterierte Riemann-Integral) verwenden.

Übung 11 (Verteilungsfunktionen : 4 Punkte)
Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion ...

(i) der diskreten Gleichverteilung auf der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$,

(ii) der stetigen Gleichverteilung auf der Menge $[1, 4]$.

Skizzieren Sie jeweils die W.dichte und die Verteilungsfunktion!

Abgabe: 28.11.2019 um 13:10 vor der Vorlesung