Serie 5

Tobias Reincke 218203884

December 28, 2019

Aufgabe 16:

a)

$\frac{F(Y>s+t) \wedge F(Y>s)}{F(Y>s)} = \frac{F(Y>s+t)}{F(Y>s)}$
$= \begin{cases} \frac{e^{-\mu(s+t)y}}{e^{-\mu s y}} & s+t>0 \wedge s>0 \\ 0 & s+t \leq 0 \wedge s \leq 0 \end{cases}$
$= \begin{cases} e^{-\mu t y} & s+t>0 \wedge s>0 \\ 0 & s+t \leq 0 \wedge s \leq 0 \end{cases}$
$=F(Y>t)$

Aufgabe 17

a) Poissonverteilung

Sei $\mathbb{R}$

$$E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} xP(X=x) = x\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \sum_0^\infty xe^{-\lambda}\lambda^x \frac{1}{x!} = \sum_1^\infty xe^{-\lambda}\lambda^x \frac{1}{x!}$$

Ersetze x durch y:=x-1

$$= \sum_0^\infty (y+1)e^{-\lambda}\lambda^{y+1}\frac{1}{y+1!} = \sum_0^\infty (y+1)e^{-\lambda}\lambda^y\lambda\frac{1}{y+1!} = \sum_0^\infty (y+1)e^{-\lambda}\lambda^y\lambda\frac{1}{(y+1)y!}$$

$$= \lambda\sum_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^y\frac{1}{y!} = \lambda\sum_0^\infty P(Y=y) = \lambda$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \to E(X^2) = Var(X) - E(X)^2 = \lambda + \lambda^2$$

b) Exponentialverteilung

Die Verteilung ist immer null für Werte kleiner 0, daher das Intergral über 0 bis ∞
Normaler Erwartungswert für stetige Funktionen mit Dichte $f_X(x) = x\lambda^{-\lambda x}$

$$\int_0^\infty x f_X(x)dx = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx$$

Es gilt: (partielle Integration)
$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx \wedge u(x) = x \wedge v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
Außerdem: $e^{\lambda x} = e^{x^\lambda}$
Setze ein :

$$[-xe^{-x\lambda}]_0^\infty + \int_0^\infty 1e^{-\lambda x}dx = (0-0) + [-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}]_0^\infty = 0 + (0 - -\frac{e^0}{\lambda}) = 0 + (0 + \frac{1}{\lambda}) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X) \to E(X^2) = Var(X) + E(X) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}$$

c) diskrete Gleichverteilung

$$E(X) = \sum_i x_i * P(X = x_i)$$

n sei die Mächtigkeit der Ergebnismenge($\Omega = \{1, ..., n\}$) bzw. die Menge aller x_i

$$= \sum_i x_i * \frac{1}{n} = \frac{1}{n} * \sum_i x_i = \frac{1}{n} * \frac{n*(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{n}P(X^2 = x^2) = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

0.1 d) stetige Gleichverteilung

$$E(X) = \int_{-\infty}^\infty x f(x) = \int_a^b x\frac{1}{b-a}$$

Da f(x) außerhalb [a,b] 0 ergbt.

$$= \frac{1}{b-a}[\frac{1}{2}x^2]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^\infty x^2 f(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 = \frac{1}{b-a}[\frac{1}{3}x^3]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)$$