Serie 5

Tobias Reincke 218203884

January 2, 2020

Aufgabe 15:

a)

b)

Die insgesamte Anzahl an Wahrscheinlichkeiten ist: 6^3 Die Mächtigkeit von A beträgt für 6 * jede valide Kombination von w1 und w2 (da w2 beliebig gewählt werden kann. Die Anzahl von validen Kombinationen lässt sich durch folgende Summe darstellen. (1 2 ; 1 3 , .. , 2 3, .., 5 6)

$$\frac{|A|}{6} = \sum_{i=0}^{6} 6 - i = \sum_{i=1}^{5} i = \frac{5 * (5+1)}{2} = \frac{30}{2} = 15 \to P(A) = \frac{|A|}{6^3} = \frac{90}{6^3}$$

Dasselbe analog für B und $P(B)$ indem man w2 und w3 tauscht. Zum Durchschnitt von A und B:
{(1,2,2),(1,2,3),(1,3,2), ...}
Für jede Zahl i von 1 bis 6 6-i Möglichkeiten (Einfach dargestellt als doppelte Schleife/Summe)
Habe es hier einfach ausgerechnet: $A \cap B = \{(w1, w2, w3) | w1 < w2 < w3 \wedge w1 < w3 < w2 \wedge w1 < w2 = w3\}$
$= 2 * \sum_{k=1}^{6} \sum_{i=k+1}^{6} = 2 * 17 + \sum_{i=1}^{6} i = +15$

c)

d)

Aufgabe 16:

a)

$\frac{F(Y>s+t) \wedge F(Y>s)}{F(Y>s)} = \frac{F(Y>s+t)}{F(Y>s)}$
$= \begin{cases} \frac{e^{-\mu(s+t)y}}{e^{-\mu s y}} & s+t > 0 \wedge s > 0 \\ 0 & s+t \leq 0 \wedge s \leq 0 \end{cases}$

$$= \begin{cases} e^{-\mu t y} & s+t > 0 \land s > 0 \\ 0 & s+t \leq 0 \land s \leq 0 \end{cases}$$
$=F(Y > t)$

Aufgabe 17

a) Poissonverteilung

Sei $\mathbb{R}$

$$E(X) = \sum_{x\in\mathbb{R}} xP(X=x) = x\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \sum_0^\infty xe^{-\lambda}\lambda^x\frac{1}{x!} = \sum_1^\infty xe^{-\lambda}\lambda^x\frac{1}{x!}$$

Ersetze x durch y:=x-1

$$= \sum_0^\infty (y+1)e^{-\lambda}\lambda^{y+1}\frac{1}{y+1!} = \sum_0^\infty (y+1)e^{-\lambda}\lambda^y\lambda\frac{1}{y+1!} = \sum_0^\infty (y+1)e^{-\lambda}\lambda^y\lambda\frac{1}{(y+1)y!}$$

$$= \lambda\sum_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^y\frac{1}{y!} = \lambda\sum_0^\infty P(Y=y) = \lambda$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \to E(X^2) = Var(X) - E(X)^2 = \lambda + \lambda^2$$

b) Exponentialverteilung

Die Verteilung ist immer null für Werte kleiner 0, daher das Intergral über 0 bis ∞ Normaler Erwartungswert für stetige Funktionen mit Dichte $f_X(x) = x\lambda^{-\lambda x}$

$$\int_0^\infty xf_X(x)dx = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx$$

Es gilt: (partielle Integration)
$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx \land u(x) = x \land v'(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
Außerdem: $e^{\lambda x} = e^{x^\lambda}$
Setze ein :

$$[-xe^{-x\lambda}]_0^\infty + \int_0^\infty 1e^{-\lambda x}dx = (0-0) + [-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}]_0^\infty = 0 + (0 - -\frac{e^0}{\lambda}) = 0 + (0 + \frac{1}{\lambda}) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X) \to E(X^2) = Var(X) + E(X) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}$$

c) diskrete Gleichverteilung

$$E(X) = \sum_i x_i * P(X = x_i)$$

n sei die Mächtigkeit der Ergebnismenge($\Omega = \{1, ..., n\}$) bzw. die Menge aller x_i

$$= \sum_i x_i * \frac{1}{n} = \frac{1}{n} * \sum_i x_i = \frac{1}{n} * \frac{n * (n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{n} P(X^2 = x^2) = \frac{1}{n} \sum_1^n x_i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

0.1 d) stetige Gleichverteilung

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) = \int_a^b x \frac{1}{b-a}$$

Da f(x) außerhalb [a,b] 0 ergbt.

$$= \frac{1}{b-a} [\frac{1}{2} x^2]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 = \frac{1}{b-a} [\frac{1}{3} x^3]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$$