

- 4.1** Sei $H = (\mathbb{Q}, \circ)$, wobei $a \circ b := a + b - ab$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Zeigen Sie, dass H eine Halbgruppe ist, und bestimmen Sie (falls vorhanden) ein neutrales Element und alle invertierbaren Elemente von H . Ist H eine Gruppe?
- 4.2** Man stelle die Verknüpfungstafel für die Gruppe (P_{12}, \cdot) der primen Restklassen modulo 12 auf! Welche Klasse ist zu derjenigen Klasse invers, die die 5 enthält?
- 4.3** Sei M die Menge der Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, c \neq 0$.
Man zeige: M bildet mit der gewöhnlichen Multiplikation von Matrizen eine Gruppe.
(**Hinweis:** Es kann als bekannt angesehen werden, dass die Matrixmultiplikation assoziativ ist.)
- 4.4** Bestimmen Sie in der Gruppe (P_7, \cdot) der primen Restklassen modulo 7 eine Untergruppe aus genau 3 Elementen und begründen Sie, dass es sich tatsächlich um eine Untergruppe handelt!
- 4.5** Untersuchen Sie, welche der folgenden Abbildungen Homomorphismen sind:
- (a) $f_1: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ mit $\forall z \in \mathbb{Z}: f_1(z) = 1$
 - (b) $f_2: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$ mit $\forall x \in \mathbb{R}: f_2(x) = 2x$
 - (c) $f_3: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ mit $\forall x \in \mathbb{R}: f_3(x) = \lfloor x \rfloor$, wobei $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl bezeichnet, die kleiner oder gleich x ist, z.B. $\lfloor 2,3 \rfloor = 2$, $\lfloor 5 \rfloor = 5$, $\lfloor -1,2 \rfloor = -2$.