Stochastik - Aufgabe 4

Tobias Reincke
Matrikelnummer: 218203884

December 10, 2019

1 12 - Pareto-Verteilung

1.1 a

$$\int f(x) = -\frac{C}{\alpha x^\alpha}$$

$$\int_s^\infty f(x) = \lim_{n\to\infty} -\frac{C}{\alpha n^\alpha} + \frac{C}{\alpha s^\alpha} = \frac{C}{\alpha s^\alpha}$$

$$\frac{C}{\alpha s^\alpha} = 1 \Leftrightarrow C = \alpha s^\alpha$$

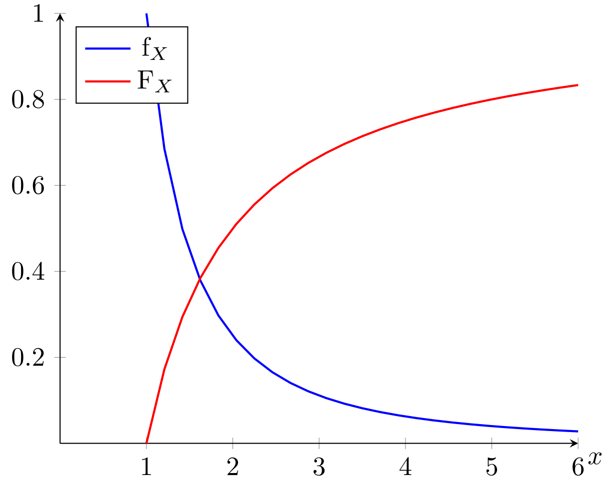
1.2 b

$$\int_s^\infty f(x) = -\frac{\alpha s^\alpha}{\alpha x^\alpha} = -(\frac{s}{x})^\alpha$$

$$\int_s^x f(x)dx = -(\frac{s}{x})^\alpha + (\frac{s}{s})^\alpha = 1 - (\frac{s}{x})^\alpha$$

$$F(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^s f(x) = 0 & x < s \\ \int_s^x f(x) = 1 - (\frac{s}{x})^\alpha & x \geq s \end{cases}$$

1.3 c



1.4 d

$$\mathbb{P}(0 \leq X \leq 2) = \mathbb{P}(0 \leq X \leq s = 1) + \mathbb{P}(s = 1 \leq X \leq 2) = 0 + \int_1^2 f(x) = -(\frac{1}{2}) + \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(0 \leq X \leq 2) = \mathbb{P}(0 \leq X \leq s = 1) + (s = 1 \leq X \leq 2) = F(1) + F(2) = 0 + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(5 \leq X \leq 8) = \int_5^8 f(x) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{5} = \frac{3}{40}$$

$$\mathbb{P}(5 \leq X \leq 8) = F(8) - F(5) = 1 - \frac{1}{8} - (1 - \frac{1}{5}) = \frac{1}{5} - \frac{1}{8} = \frac{3}{40}$$

Note: Bei der Dichtefunktion hätte man definitiv auch mit $\int_0^8 f(x)dx - \int_2^5 f(x)dx$ die Wahrscheinlichtkeit berechnen können

1.5 e

$$\frac{\alpha}{x}(\frac{s}{x})^\alpha$$

$$f(x)^4 = (\frac{1}{x^2})^4 = \frac{1}{x^8} = \frac{1}{x^(1+7)} = \frac{7}{x}(\frac{s}{x})^7$$

$$\rightarrow s^7 = 1/7 \Leftrightarrow s = \sqrt[7]{\frac{1}{7}}$$

Wenn $s = \sqrt[7]{\frac{1}{7}}$ dann muss

2 Satz von Bayes

Ich definiere folgende Ereignisse wie folgt:
A, eine 1 wird gesendet
B, eine 0 wird gesendet
C, eine 1 wird empfangen
D, eine 0 wird empfangen

$$P(A) = \frac{7}{13}\ ,\ P(B) = \frac{6}{13}\ ,\ P(C) = P(A|C) * P(A) + P(B) * P(B|C)$$
$$P(D) = P(A)P(A|D) + P(B)P(B|D)$$

$P(A|D) = \frac{1}{5}$, $\overline{P}(A|D) = P(A|C) \Rightarrow P(A|C) = \frac{4}{5}$
$P(B|C) = \frac{1}{4}$, $\overline{P}(B|C) = P(B|D) \Rightarrow P(B|D) = \frac{3}{4}$

Gefragt wird nach dem Ereigniss $P(C|A)$, d.h in Worten ausgedrückt, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 1 gesendet wurde, wenn eine 1 empfangen wurde.
Nach dem Satz von Bayes gilt:

$$P(C|A) = \frac{P(A|C) * P(C)}{P(A)}$$

$$P(C) = \frac{7}{13} * \frac{4}{5} + \frac{6}{13} * \frac{1}{4} = \frac{71}{650}$$
$$P(C|A) = \frac{\frac{4}{5} * \frac{71}{650}}{\frac{7}{13}}$$

Man dividiert 28/65 durch 7/13

$$P(C|A) = \frac{4 * 71}{5 * 650} = \frac{355}{3250} = 0.1092307692307$$

3 Wochentage

3.1 a)

Wochentage sind Ereignisse: A steht für Montag, B steht für Dienstag, C steht für Mittwoch, D steht für Donnerstag, E steht für Freitag X steht für defekt. $\overline{X}$ steht dementsprechend für X ist korrekt. Es gilt dementsprechend auch: $P(\overline{X}) = \overline{P(X)}$

$P(A) = 0.15$ $P(B) = 0.25$ $P(C) = 0.2$ $P(D) = 0.25$ $P(E) = 0.15$

P(A — X) = 0.04 P(B — X) = 0.01 P(C — X) = 0.01 P(D — X) = 0.02 P(E — X) = 0.03

3.2 b)

$P(X) = \sum_F P(F|X) = P(A|X){+}P(B|X){+}P(C|X){+}P(D|X){+}P(E|X) = 0.11$

3.3 c)

$P(X|A) = \frac{P(X)*P(A|X)}{P(A)} = \frac{0.11*0.04}{0.15}b = \frac{22}{750}$

3.4 d)

Da die Mengen D und E disjunkt sind, aka ein Gerät kann nicht freitags und donnerstags produziert worden sein, gilt:

$$P((D \cup E)|\overline{X}) = \frac{P(\overline{X}|(D \cup E)) * P(D \cup E)}{P(\overline{X})}$$

$P(\overline{X}|(D \cup E))$ wird in e) berechnet. Daher werde ich einfach das Ergebniss nehmen. $P(\overline{X}) = 0.89$
$P(D \cup E) = 0.25 + 0.15 = 0.4$
$P((D \cup E)|\overline{X}) = \frac{0.02375*0.4}{0.89} = 0.0106741573033$

3.5 e)

$$P(\overline{X}|D \cup E) = \frac{P(\overline{X}) * P(D \cup E|\overline{X})}{P(D \cup E)} = \frac{\overline{P}(X) * (\frac{P((D \cup E) \cap \overline{X})}{P(\overline{X})})}{P(D \cup E)}$$

$$= \frac{P((D \cup E) \cap \overline{X})}{P(D \cup E)}) = \frac{P(D \cap \overline{X}) + P(E \cap \overline{X})}{P(D \cup E)} = \frac{P(D) * P(X|D) + P(E) * P(X|E)}{P(D \cup E)}$$

$$= \frac{0.25 * 0.02 + 0.15 * 0.03}{0.4} = 0.02375$$