Übungsaufgaben — Mathematik für Informatik III

SERIE 6 — Termin: 14.01.20/21.01.20

6.1 Es sei

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und C der Hamming-Code, der aus den Löungen des linearen Gleichungssystems $H\mathbf{c} = \mathbf{0}$ über dem Körper $K = \mathbb{Z}/2$ besteht. Nach dem Absenden eines Codewortes $\mathbf{c}$ hat ein Empfänger das Wort $\mathbf{d} = (1,0,0,0,1,1,1)^{\mathbf{T}}$ erhalten. Es sei bekannt, dass $\mathbf{d}$ an höchstens einer Stelle einen Fehler hat. Begründen Sie, dass $\mathbf{d}$ tatsächlich fehlerhaft ist und geben Sie das korrigierte Wort $\mathbf{c}$ an.

6.2 Ein Diätkoch bereitet eine Mahlzeit aus zwei Speisen A und B vor. Eine Einheit von A enthält eine Einheit Eisen und zwei Einheiten Vitamin D, während eine Einheit von B zwei Einheiten Eisen und zwei Einheiten Vitamin D enthält. Der Kaloriengehalt der Speisen A und B beträgt 300 bzw. 400 kcal. Der Diätplan verlangt, dass die Mahlzeit mindestens 8 Einheiten Eisen und 10 Einheiten Vitamin D aufweist. Wie viele Einheiten der Speisen A und B muss die Mahlzeit enthalten, damit die Anzahl der Kalorien minimal wird? Wie groß ist diese minimale Kalorienanzahl? Lösen Sie das Problem graphisch!

6.3 Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, falls für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 \le \lambda \le 1$ der Punkt $\lambda\boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}$ ebenfalls zu M gehört. Beweisen Sie für das LOP

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &\ge \mathbf{0} \\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} &\longrightarrow \max\,. \end{aligned}$$

(a) Der zulässige Bereich des LOPs ist konvex.

(b) Die Menge der optimalen Lösungen des LOPs ist konvex.

6.4 Man überführe das folgende LOP in die Normalform:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \le & 4 \\ & & x_2 & + & x_3 & \le & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & \to & \max\,. \end{array}$$

6.5 Gegeben seien die Optimierungsprobleme

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 7x_3 &\le 1 \\ |3x_1 - 5x_2 - 20| &\le 4 \\ \boldsymbol{x} &\ge 0 \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 &\to \min \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 7x_3 &\le 1 \\ |x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 30| &\ge 5 \\ \boldsymbol{x} &\ge 0 \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 &\to \min\,. \end{aligned}$$

(a) Man formuliere das 1. Problem als LOP in Normalform!

(b) Man zeige, wie man eine optimale Lösung des 2. Problems durch Lösung zweier LOPs erhalten kann!