Universität Rostock
Prof. Dr. H. Kösters Wintersemester 2019/2020

Übungen zur Stochastik für Informatik

Blatt 5 (Bedingte Wahrscheinlichkeiten / Unabhängigkeit)

Vorübung 13 (Bedingte Wahrscheinlichkeiten : keine Abgabe / 0 Punkte)
Aus den 32 Karten beim Skatspiel wird dreimal ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist …

(a) die erste Karte ein As?

(b) die dritte Karte ein As?

(c) die dritte Karte das erste As?

(d) die dritte Karte das zweite As?

(e) die dritte Karte ein As, wenn die zweite Karte ein Bube ist?

(f) die zweite Karte ein Bube, wenn die dritte Karte ein As ist?

Sind die Ereignisse „zweite Karte Bube“ und „dritte Karte As“ stochastisch unabhängig? Argumentieren Sie sowohl rechnerisch als auch anschaulich!

Vorübung 14 (Unabhängigkeit von Zufallsgrößen)
Die Verteilung der „zusammengesetzten“ Zufallsgröße (X, Y) sei durch die folgende Dichte gegeben:

(a) $f(x, y) = \frac{x+y}{36}$, $(x, y) \in \{1, 2, 3\}^2$.

(b) $f(x, y) = \frac{xy}{16}$, $(x, y) \in [1, 3]^2$.

Zeigen Sie jeweils, dass die Dichte eines W.maße vorliegt, und untersuchen Sie anschließend, ob die Zufallsgrößen X und Y unabhängig sind.

Die folgenden Übungen können ab der 8. Vorlesung (am 12.12.2019) bearbeitet werden.

Übung 15 (Wiederholung / Unabhängigkeit : 2 + 3 + 3 + 3 = 11 Punkte)
Ein fairer Würfel wird dreimal nacheinander geworfen, und es werden die auftretenden Augenzahlen notiert.

(a) Beschreiben Sie die Situation durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Geben Sie an, wie ein Ergebnis in Ihrem Wahrscheinlichkeitsraum zu interpretieren ist.

(b) Es interessieren die Ereignisse A : „1. Zahl $<$ 2. Zahl“ und B : „1. Zahl $<$ 3. Zahl“. Definieren Sie diese Ereignisse formal (auf dem W.raum aus Teil (a)), und untersuchen Sie sie rechnerisch auf Unabhängigkeit. Versuchen Sie, das Ergebnis Ihrer Untersuchung anschaulich zu erklären. $(1-2$ Sätze)

(c) Es interessieren die Zufallsgrößen X : „1. Ergebnis“ und Y : „2. Ergebnis“. Definieren Sie diese Zufallsgrößen formal (auf dem W.raum aus Teil (a)), und untersuchen Sie sie rechnerisch auf Unabhängigkeit. Versuchen Sie, das Ergebnis Ihrer Untersuchung anschaulich zu erklären. $(1-2$ Sätze)

(d) Es interessieren die Zufallsgrößen S : „Summe der Augenzahlen“ und M : „Maximum der Augenzahlen“. Definieren Sie diese Zufallsgrößen formal (auf dem W.raum aus Teil (a)), und untersuchen Sie sie rechnerisch auf Unabhängigkeit. Versuchen Sie, das Ergebnis Ihrer Untersuchung anschaulich zu erklären. $(1-2$ Sätze)

Übung 16 (Rund um die Exponentialverteilung : 2 + 2 + 2 + 2* = 6 + 2* Punkte)
Ist X eine reellwertige Zufallsgröße, so heißt $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$ *Verteilungsfunktion* von X und $\overline{F}_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\overline{F}_X(x) := \mathbb{P}(X > x)$ *Überlebensfunktion* von X. Es sei daran erinnert, dass für eine exponentialverteilte Zufallsgröße X zum Parameter $\lambda > 0$

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

und damit (wegen $\overline{F}_X = 1 - F_X$)

$$\overline{F}_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad F(x) = \begin{cases} e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

gilt.

(a) Zeigen Sie: Ist Y exponentialverteilt zum Parameter $\mu > 0$, so gilt $\mathbb{P}(Y > s + t \mid Y > s) = \mathbb{P}(Y > t)$ für alle $s, t > 0$. Diese Eigenschaft wird als *Gedächtnislosigkeit* der Exponentialverteilung bezeichnet.

Anmerkung: Es gilt auch die Umkehrung: Ist Z eine reellwertige Zufallsgröße mit $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$ und $\mathbb{P}(Z > s + t \mid Z > s) = \mathbb{P}(Z > t)$ für alle $s, t > 0$ mit $\mathbb{P}(Z > s) > 0$, so ist Z exponentialverteilt zum Parameter $\nu := -\log P(Z > 1) > 0$. Dies ist aber schwieriger zu zeigen und soll hier nicht gezeigt werden.

(b) Zeigen Sie: Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige reellwertige Zufallsgrößen mit den Überlebensfunktionen $\overline{F}_1, \ldots, \overline{F}_n$, so ist die Überlebensfunktion von $\min\{X_1, \ldots, X_n\}$ durch

$$\overline{F}_{\min}(x) = \overline{F}_1(x) \cdot \overline{F}_2(x) \cdot \ldots \cdot \overline{F}_n(x)$$

gegeben.

Hinweis: Wie kann man das Ereignis $\{\min X_i > t\}$ anders darstellen, um die Unabhängigkeit der Zufallsgrößen X_i ins Spiel zu bringen?

(c) Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige exponentialverteilte Zufallsgrößen zu den Parametern $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$. Bestimmen Sie die Verteilung von $\min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Anwendung: Beschreiben $X_1, \ldots, X_n$ die „Lebensdauern" von technischen Geräten, so ist $\min\{X_1, \ldots, X_n\}$ der Zeitpunkt, zu dem das erste technische Gerät ausfällt.

(d) Es seien X und Y unabhängige exponentialverteilte Zufallsgrößen zum Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie mit Hilfe von Lemma 3.24 die Verteilung von $X + Y$.

Die folgenden Übungen können ab der 9. Vorlesung (am 19.12.2019) bearbeitet werden.

Übung 17 (Erwartungswert : jeweils 2 = 8 Punkte)
Bestimmen Sie für die folgenden Zufallsgrößen jeweils $\mathbb{E}(X)$ <u>und</u> $\mathbb{E}(X^2)$:

(a) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (Poisson-Verteilung, $\lambda > 0$)

Hinweis: Orientieren Sie sich an der rechnerischen Bestimmung des Erwartungswertes für die Binomialverteilung.

(b) $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ (Exponentialverteilung, $\lambda > 0$)

Hinweis: partielle Integration.

(c) $X \sim \mathcal{U}_{\{1,\ldots,n\}}$ (diskrete Gleichverteilung, $n \in \mathbb{N}$)

Hinweis: Summenformeln $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ und $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

(d) $X \sim \mathcal{U}_{(a,b)}$ (stetige Gleichverteilung, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$)

Abgabe: 09.01.2020 um 13:10 vor der Vorlesung