Stochastik für Informatiker

– 4. Vorlesung –

Prof. Dr. Holger Kösters

Institut für Mathematik, MNF, Universität Rostock

14. November 2019

Kapitel 1.2
Zufallsgrößen auf diskreten W.räumen

Motivation: Übergang von einem „umfangreicheren“ W.raum zu einem „einfacheren“ W.raum (vgl. letztes Beispiel)

Zufallsgrößen auf diskreten W.räumen I

Motivation: Übergang von einem „umfangreicheren" W.raum zu einem „einfacheren" W.raum (vgl. letztes Beispiel)

Bezeichnung: Sei $X : \Omega \to \mathcal{X}$ eine Abbildung.

- Für $B \subseteq \mathcal{X}$ heißt $\{X \in B\} := X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ das *Urbild* von B unter X.
- Für $x \in \mathcal{X}$ heißt $\{X = x\} := X^{-1}(\{x\}) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ das *Urbild* von x unter X.

Zufallsgrößen auf diskreten W.räumen I

Motivation: Übergang von einem „umfangreicheren" W.raum zu einem „einfacheren" W.raum (vgl. letztes Beispiel)

Bezeichnung: Sei $X : \Omega \to \mathcal{X}$ eine Abbildung.

- Für $B \subseteq \mathcal{X}$ heißt $\{X \in B\} := X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ das *Urbild* von B unter X.
- Für $x \in \mathcal{X}$ heißt $\{X = x\} := X^{-1}(\{x\}) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ das *Urbild* von x unter X.

Definition 1.14 (Zufallsgröße)

Es seien $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter W.raum und $X : \Omega \to \mathcal{X}$ eine Abbildung mit Werten in einer abzählbaren Menge $\mathcal{X}$.
Dann heißt X *Zufallsgröße* oder *Zufallsvariable* (mit Werten in $\mathcal{X}$), und die Abbildung $\mathbb{P}_X : \mathfrak{P}(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B)$ heißt *induzierte Verteilung* (oder auch nur *Verteilung*) von X unter $\mathbb{P}$.

Zufallsgrößen auf diskreten W.räumen I

Motivation: Übergang von einem „umfangreicheren“ W.raum zu einem „einfacheren“ W.raum (vgl. letztes Beispiel)

Bezeichnung: Sei $X : \Omega \to \mathcal{X}$ eine Abbildung.

- Für $B \subseteq \mathcal{X}$ heißt $\{X \in B\} := X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ das *Urbild* von B unter X.
- Für $x \in \mathcal{X}$ heißt $\{X = x\} := X^{-1}(\{x\}) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ das *Urbild* von x unter X.

Definition 1.14 (Zufallsgröße)

Es seien $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter W.raum und $X : \Omega \to \mathcal{X}$ eine Abbildung mit Werten in einer abzählbaren Menge $\mathcal{X}$.
Dann heißt X *Zufallsgröße* oder *Zufallsvariable* (mit Werten in $\mathcal{X}$), und die Abbildung $\mathbb{P}_X : \mathfrak{P}(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B)$ heißt *induzierte Verteilung* (oder auch nur *Verteilung*) von X unter $\mathbb{P}$.

Interpretation: Zufallsgrößen „verarbeiten“ / „verdichten“ / „filtern“ die Information über den Ausgang eines Zufallsexperimentes.

Beispiele 1.15 (Beispiele für Zufallsgrößen)

Beispiele 1.15 (Beispiele für Zufallsgrößen)

(a) *In Bsp. 1.13 (f) beschreibt die Zufallsgröße* $X : \Omega \to \mathcal{X} := \{0, \ldots, n\}$ *mit* $X(\omega) := \sum_{i=1}^{n} \omega_i$ *die Anzahl von Kopf; die induzierte Verteilung ist wegen*

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(\bigcup_{k \in B} \{X = k\}) = \sum_{k \in B} \binom{n}{k}/2^n \qquad \forall\, B \subseteq \mathcal{X}$$

die diskrete W.verteilung zum Paar $(\mathcal{X}, f_X)$ *mit* $\mathcal{X} := \{0, \ldots, n\}$ *und* $f_X(k) := \binom{n}{k}/2^n$, $k = 0, \ldots, n$.

Zufallsgrößen auf diskreten W.räumen II

Beispiele 1.15 (Beispiele für Zufallsgrößen)

(a) *In Bsp. 1.13 (f) beschreibt die Zufallsgröße* $X : \Omega \to \mathcal{X} := \{0, \ldots, n\}$ *mit* $X(\omega) := \sum_{i=1}^{n} \omega_i$ *die Anzahl von Kopf; die induzierte Verteilung ist wegen*

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k \in B} \{X = k\}\Big) = \sum_{k \in B} \tbinom{n}{k}/2^n \qquad \forall\, B \subseteq \mathcal{X}$$

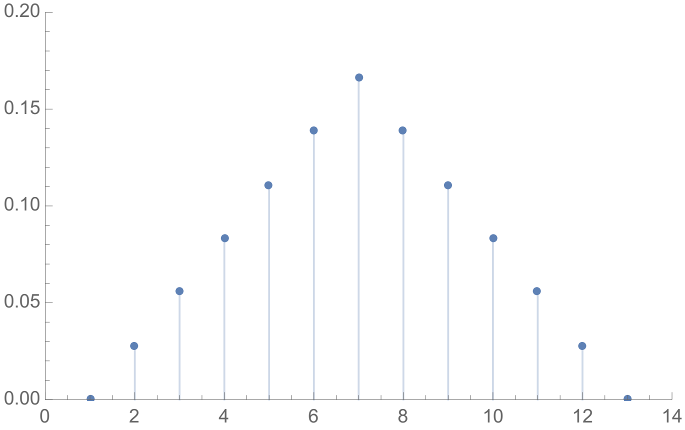
die diskrete W.verteilung zum Paar $(\mathcal{X}, f_X)$ *mit* $\mathcal{X} := \{0, \ldots, n\}$ *und* $f_X(k) := \binom{n}{k}/2^n$, $k = 0, \ldots, n$.

(b) *Ist* (Ω, f) *mit* $\Omega := \{1, \ldots, 6\}^2$ *und* $f(\omega) := \frac{1}{36}\ \forall \omega \in \Omega$ *das Modell für den gleichzeitigen Wurf zweier fairer Würfel, so beschreibt die Zufallsgröße* $S : \Omega \to \mathcal{S} := \{2, \ldots, 12\}$ *mit* $S(\omega_1, \omega_2) := \omega_1 + \omega_2$ *die Augensumme; die induzierte Verteilung ist wegen*

$$\mathbb{P}_S(B) = \mathbb{P}(S \in B) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k \in B} \{S = k\}\Big) = \sum_{k \in B} \tfrac{6-|k-7|}{36} \qquad \forall\, B \subseteq \mathcal{S}$$

die diskrete W.verteilung zum Paar $(\mathcal{S}, f_S)$ *mit* $\mathcal{S} := \{2, \ldots, 12\}$ *und* $f_S(k) := \frac{6-|k-7|}{36}$, $k = 2, \ldots, 12$.

Veranschaulichung der W.dichte von S:



„diskrete Dreiecksverteilung“

Zufallsgrößen auf diskreten W.räumen IV

Definition 1.14 (Zufallsgröße)

Es seien $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter W.raum und $X : \Omega \to \mathcal{X}$ eine Abbildung mit Werten in einer abzählbaren Menge $\mathcal{X}$.
Dann heißt X *Zufallsgröße* oder *Zufallsvariable* (mit Werten in $\mathcal{X}$), und die Abbildung $\mathbb{P}_X : \mathfrak{P}(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B)$ heißt *induzierte Verteilung* (oder auch nur *Verteilung*) von X unter $\mathbb{P}$.

Lemma 1.16

In Definition 1.14 ist $\mathbb{P}_X$ eine diskrete W.verteilung auf $\mathcal{X}$, nämlich die diskrete W.verteilung zur Dichte $f_X(x) := \mathbb{P}(X = x)$, $x \in \mathcal{X}$.

Definition 1.14 (Zufallsgröße)

Es seien $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter W.raum und $X : \Omega \to \mathcal{X}$ eine Abbildung mit Werten in einer abzählbaren Menge $\mathcal{X}$.
Dann heißt X *Zufallsgröße* oder *Zufallsvariable* (mit Werten in $\mathcal{X}$), und die Abbildung $\mathbb{P}_X : \mathfrak{P}(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B)$ heißt *induzierte Verteilung* (oder auch nur *Verteilung*) von X unter $\mathbb{P}$.

Lemma 1.16

In Definition 1.14 ist $\mathbb{P}_X$ eine diskrete W.verteilung auf $\mathcal{X}$, nämlich die diskrete W.verteilung zur Dichte $f_X(x) := \mathbb{P}(X = x)$, $x \in \mathcal{X}$.

Merkregel:
Die Verteilung einer Zufallsgröße auf einem diskreten W.raum bestimmen wir, indem wir die zugehörigen Elementar-W.en berechnen.

Bestimmung von Verteilungen von Zufallsgrößen

Lemma 1.17

Sind $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *ein diskreter W.raum,* $X : \Omega \to \mathcal{X}$ *eine Zufallsgröße und* $h : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *eine Abbildung (wobei* $\mathcal{X}$ *und* $\mathcal{Y}$ *abzählbar), so ist auch* $h(X) := h \circ X : \Omega \to \mathcal{Y}$ *eine Zufallsgröße, und es gilt* $\mathbb{P}_{h(X)} = (\mathbb{P}_X)_h$.

Bestimmung von Verteilungen von Zufallsgrößen

Lemma 1.17

Sind $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter W.raum, $X : \Omega \to \mathcal{X}$ eine Zufallsgröße und $h : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ eine Abbildung (wobei $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ abzählbar), so ist auch $h(X) := h \circ X : \Omega \to \mathcal{Y}$ eine Zufallsgröße, und es gilt $\mathbb{P}_{h(X)} = (\mathbb{P}_X)_h$.

Beispiel 1.18 (Bestimmung von Verteilungen von Zufallsgrößen)

Bei einem Glücksspiel werden zwei faire Würfel gleichzeitig geworfen. Es interessiert allein die Summe S der geworfenen Augenzahlen. Der Gewinn G bestimmt sich nach der folgenden Regel:

$$\begin{array}{lcl} S = 12 & \Rightarrow & G = 12 \\ S = 9, 10, 11 & \Rightarrow & G = 2 \\ S < 9 & \Rightarrow & G = 0 \end{array}$$

Gesucht sind die Verteilungen von S und von G.

Beispiel 1.18 (Bestimmung von Verteilungen von Zufallsgrößen)

[...]

Seien dazu (Ω, f) *und* $S : \Omega \to \mathcal{S}$ *wie in Beispiel 1.15 (b). Dann wird der Gewinn durch die Zufallsgröße* $G = h \circ S : \Omega \to \{0, 2, 12\}$ *mit*

$$h : \mathcal{S} \to \{0, 2, 12\}, \qquad h(s) := \begin{cases} 12, & s = 12 \\ 2, & 9 \leq s \leq 11 \\ 0, & s < 9 \end{cases}$$

beschrieben.

Beispiel 1.18 (Bestimmung von Verteilungen von Zufallsgrößen)

[...]

Seien dazu (Ω, f) *und* $S : \Omega \to \mathcal{S}$ *wie in Beispiel 1.15 (b). Dann wird der Gewinn durch die Zufallsgröße* $G = h \circ S : \Omega \to \{0, 2, 12\}$ *mit*

$$h : \mathcal{S} \to \{0, 2, 12\}, \qquad h(s) := \begin{cases} 12, & s = 12 \\ 2, & 9 \leq s \leq 11 \\ 0, & s < 9 \end{cases}$$

beschrieben. Die Verteilung von G *ergibt sich aus der Verteilung von* S*:*

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_S(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

y	0	2	12
$f_G(y)$	$\frac{26}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{1}{36}$

Beispiel 1.18 (Bestimmung von Verteilungen von Zufallsgrößen)

[. . .]

Seien dazu (Ω, f) *und* $S : \Omega \to \mathcal{S}$ *wie in Beispiel 1.15 (b). Dann wird der Gewinn durch die Zufallsgröße* $G = h \circ S : \Omega \to \{0, 2, 12\}$ *mit*

$$h : \mathcal{S} \to \{0, 2, 12\}, \qquad h(s) := \begin{cases} 12, & s = 12 \\ 2, & 9 \leq s \leq 11 \\ 0, & s < 9 \end{cases}$$

beschrieben. Die Verteilung von G *ergibt sich aus der Verteilung von* S*:*

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_S(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

y	0	2	12
$f_G(y)$	$\frac{26}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{1}{36}$

Beispielsweise gilt $f_G(2) = \mathbb{P}(G = 2) = \mathbb{P}(S \in \{9, 10, 11\})$
$= f_S(9) + f_S(10) + f_S(11) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. $\square$

Bestimmung von Randverteilungen

Seien $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter W.raum und X und Y Zufallsgrößen mit Werten in abzählbaren Mengen $\mathcal{X}$ bzw. $\mathcal{Y}$. Dann kann man die „zusammengesetzte" Zufallsgröße (X, Y) mit Werten in der abzählbaren Menge $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ betrachten. Also ist $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ eine Verteilung auf $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, und die Elementar-W.en sind von der Form $\mathbb{P}((X, Y) = (x, y)) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$, wobei $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$ und $\{X = x, Y = y\} := \{X \in x\} \cap \{Y = y\}$.

Bestimmung von Randverteilungen

Seien $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter W.raum und X und Y Zufallsgrößen mit Werten in abzählbaren Mengen $\mathcal{X}$ bzw. $\mathcal{Y}$. Dann kann man die „zusammengesetzte“ Zufallsgröße (X, Y) mit Werten in der abzählbaren Menge $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ betrachten. Also ist $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ eine Verteilung auf $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, und die Elementar-W.en sind von der Form $\mathbb{P}((X, Y) = (x, y)) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$, wobei $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$ und $\{X = x, Y = y\} := \{X \in x\} \cap \{Y = y\}$.

Wenn die Verteilung von (X, Y) bereits bekannt ist, lassen sich die Verteilungen von X und von Y (die sog. *Randverteilungen*) wie folgt bestimmen:

Lemma 1.19 (Bestimmung von Randverteilungen)

Sind $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter W.raum und $(X, Y) : \Omega \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ eine zusammengesetzte Zufallsgröße (wobei $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ abzählbar), so gilt

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

für alle $x \in \mathcal{X}$.

Eine analoge Aussage gilt natürlich für Y statt X.

Allgemeiner kann man die Situation betrachten, dass die W.dichte einer Zufallsgröße $(X_1, \dots, X_n)$ mit Werten in einer abzählbaren Menge $\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ gegeben ist und eine *Randverteilung* $\mathbb{P}_{X_i}$ $(i = 1, \dots, n)$ bzw. sogar eine *mehrdimensionale Randverteilung* $\mathbb{P}_{(X_{i_1}, \dots, X_{i_m})}$ $(1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n)$ gesucht ist. Hier gilt:

Merkregel:
Ist die W.dichte einer zusammengesetzten Zufallsgröße $(X_1, \dots, X_n)$ *mit Werten in einer abzählbaren Menge* $\mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ *gegeben, so erhalten wir die W.dichten der Randverteilungen, indem wir über die „freien" Variablen aufsummieren.*

Bestimmung von Randverteilungen

Beispiel 1.20 (Bestimmung von Randverteilungen)

Zwei faire Münzen, auf deren Seiten die Zahlen 0 *und* 1 *stehen, werden gleichzeitig geworfen; es interessieren die Summe X und das Produkt Y der Einzelergebnisse.*
Wenn die gemeinsame Verteilung von X und Y bereits gegeben ist, erhält man die Randverteilungen von X bzw. Y, indem man die Zeilensummen bzw. die Spaltensummen bildet:

$\mathbb{P}(X = x, Y = y)$	$y = 0$	$y = 1$	
$x = 0$	$1/4$	0	
$x = 1$	$1/2$	0	
$x = 2$	0	$1/4$	

□

Beispiel 1.20 (Bestimmung von Randverteilungen)

Zwei faire Münzen, auf deren Seiten die Zahlen 0 *und* 1 *stehen, werden gleichzeitig geworfen; es interessieren die Summe* X *und das Produkt* Y *der Einzelergebnisse.*
Wenn die gemeinsame Verteilung von X *und* Y *bereits gegeben ist, erhält man die Randverteilungen von* X *bzw.* Y*, indem man die Zeilensummen bzw. die Spaltensummen bildet:*

$\mathbb{P}(X = x, Y = y)$	$y = 0$	$y = 1$	$\mathbb{P}(X = x)$
$x = 0$	$1/4$	0	$1/4$
$x = 1$	$1/2$	0	$1/2$
$x = 2$	0	$1/4$	$1/4$

□

Bestimmung von Randverteilungen

Beispiel 1.20 (Bestimmung von Randverteilungen)

Zwei faire Münzen, auf deren Seiten die Zahlen 0 *und* 1 *stehen, werden gleichzeitig geworfen; es interessieren die Summe* X *und das Produkt* Y *der Einzelergebnisse.*
Wenn die gemeinsame Verteilung von X *und* Y *bereits gegeben ist, erhält man die Randverteilungen von* X *bzw.* Y*, indem man die Zeilensummen bzw. die Spaltensummen bildet:*

$\mathbb{P}(X = x, Y = y)$	$y = 0$	$y = 1$	$\mathbb{P}(X = x)$
$x = 0$	$1/4$	0	$1/4$
$x = 1$	$1/2$	0	$1/2$
$x = 2$	0	$1/4$	$1/4$
$\mathbb{P}(Y = y)$	$3/4$	$1/4$	

$\square$

Bestimmung von Randverteilungen

Beispiel 1.20 (Bestimmung von Randverteilungen)

Zwei faire Münzen, auf deren Seiten die Zahlen 0 *und* 1 *stehen, werden gleichzeitig geworfen; es interessieren die Summe* X *und das Produkt* Y *der Einzelergebnisse.*
Wenn die gemeinsame Verteilung von X *und* Y *bereits gegeben ist, erhält man die Randverteilungen von* X *bzw.* Y*, indem man die Zeilensummen bzw. die Spaltensummen bildet:*

$\mathbb{P}(X = x, Y = y)$	$y = 0$	$y = 1$	$\mathbb{P}(X = x)$
$x = 0$	$1/4$	0	$1/4$
$x = 1$	$1/2$	0	$1/2$
$x = 2$	0	$1/4$	$1/4$
$\mathbb{P}(Y = y)$	$3/4$	$1/4$	1

(*Die Eins unten rechts dient nur der Kontrolle, da sich die W.'en* $\mathbb{P}(X = x)$ *bzw.* $\mathbb{P}(Y = y)$ *jeweils zu Eins addieren müssen.*) □

Anmerkung zum Auftreten von Zufallsgrößen

??? Zufallsgrößen ohne Wahrscheinlichkeitsräume ???

Bemerkung 1.21

In einigen Fällen – etwa wenn man W.en der Form $\mathbb{P}_X(B)$ berechnen will / muss – ist es ausreichend, den „induzierten" W.raum $(\mathcal{X}, \mathfrak{P}(\mathcal{X}), \mathbb{P}_X)$ zu kennen.

Oft verzichtet man dann darauf, den zugrunde liegenden W.raum $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ oder die Abbildung $X : \Omega \to \mathcal{X}$ genauer anzugeben, und gibt nur die Verteilung von X an: „Sei X eine Zufallsgröße mit der Verteilung P . . . ". [. . .]

Es gibt also zwei Arten, wie Zufallsgrößen typischerweise auftreten:

1. *Es sind der zugrunde liegende W.raum $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ und die Abbildung $X : \Omega \to \mathcal{X}$ gegeben, und die (teilweise) Bestimmung der Verteilung von X ist i. d. R. das erste Problem, mit dem man sich befassen muss.*
2. *Es ist „nur" die Verteilung P der Zufallsgröße X angegeben (oder eine anschauliche Beschreibung, aus der sich die Verteilung P ergibt), und man muss / kann ausgehend von P „weiterrechnen".* (vgl. Bsp. 1.18 / 1.20)

Kapitel 1.2
Zufallsgrößen auf diskreten W.räumen

Beispiele für diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiele für diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wir wollen weitere Beispiele für Zufallsgrößen betrachten und in diesem Zusammenhang eine Reihe wichtiger W.verteilungen kennen lernen. Dabei bezeichnen wir die Grundmenge und die W.dichte der induzierten W.verteilung oft mit $\widetilde{\Omega}$ und $\widetilde{f}$ statt mit $\mathcal{X}$ und f_X.

Bernoulli-Verteilung

Es wird ein (u. U. komplexes) Zufallsexperiment durchgeführt, und es interessiert (nur) die Frage, ob dabei ein bestimmtes Ereignis $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ eintritt oder nicht.

Bernoulli-Verteilung

Es wird ein (u. U. komplexes) Zufallsexperiment durchgeführt, und es interessiert (nur) die Frage, ob dabei ein bestimmtes Ereignis $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ eintritt oder nicht. Ist der W.raum $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ gegeben, so lässt sich die Situation durch die Zgr.

$$\mathbf{1}_A : \Omega \to \{0, 1\} \qquad \mathbf{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1 & ; \omega \in A \\ 0 & ; \omega \notin A \end{cases}$$

(*Indikatorfunktion von* A) beschreiben;

Bernoulli-Verteilung

Es wird ein (u. U. komplexes) Zufallsexperiment durchgeführt, und es interessiert (nur) die Frage, ob dabei ein bestimmtes Ereignis $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ eintritt oder nicht. Ist der W.raum $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ gegeben, so lässt sich die Situation durch die Zgr.

$$\mathbf{1}_A : \Omega \to \{0,1\} \qquad \mathbf{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1 & ; \omega \in A \\ 0 & ; \omega \notin A \end{cases}$$

(*Indikatorfunktion von A*) beschreiben; ihre Verteilung ist durch $\widetilde{\Omega} := \{0,1\}$ und $\widetilde{f}(1) = \mathbb{P}(A)$, $\widetilde{f}(0) = 1 - \mathbb{P}(A)$ gegeben.

Bernoulli-Verteilung

Es wird ein (u. U. komplexes) Zufallsexperiment durchgeführt, und es interessiert (nur) die Frage, ob dabei ein bestimmtes Ereignis $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ eintritt oder nicht. Ist der W.raum $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ gegeben, so lässt sich die Situation durch die Zgr.

$$\mathbf{1}_A : \Omega \to \{0,1\} \qquad \mathbf{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1 & ; \omega \in A \\ 0 & ; \omega \notin A \end{cases}$$

(*Indikatorfunktion von A*) beschreiben; ihre Verteilung ist durch $\widetilde{\Omega} := \{0,1\}$ und $\widetilde{f}(1) = \mathbb{P}(A)$, $\widetilde{f}(0) = 1 - \mathbb{P}(A)$ gegeben.

Definition 1.22 (Bernoulli-Verteilung)

Sei $p \in [0,1]$. Die diskrete W.-verteilung zu $\Omega = \{0,1\}$ und $f(1) = p$, $f(0) = 1 - p$ heißt *Bernoulli-Verteilung* zum Parameter p.

Bernoulli-Verteilung

Es wird ein (u. U. komplexes) Zufallsexperiment durchgeführt, und es interessiert (nur) die Frage, ob dabei ein bestimmtes Ereignis $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ eintritt oder nicht. Ist der W.raum $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ gegeben, so lässt sich die Situation durch die Zgr.

$$\mathbf{1}_A : \Omega \to \{0,1\} \qquad \mathbf{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1 & ; \omega \in A \\ 0 & ; \omega \notin A \end{cases}$$

(*Indikatorfunktion von A*) beschreiben; ihre Verteilung ist durch $\widetilde{\Omega} := \{0,1\}$ und $\widetilde{f}(1) = \mathbb{P}(A)$, $\widetilde{f}(0) = 1 - \mathbb{P}(A)$ gegeben.

Definition 1.22 (Bernoulli-Verteilung)

Sei $p \in [0,1]$. Die diskrete W.-verteilung zu $\Omega = \{0,1\}$ und $f(1) = p$, $f(0) = 1 - p$ heißt *Bernoulli-Verteilung* zum Parameter p.

Interpretation: $1 \triangleq$ Ereignis tritt ein / „Erfolg“
$0 \triangleq$ Ereignis tritt nicht ein / „Misserfolg“
$p \triangleq$ Erfolgs-W.

Frage: Ein Bernoulli-Experiment wird n-mal „unabhängig voneinander" wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten genau k Erfolge auf?

Binomialverteilung

Frage: Ein Bernoulli-Experiment wird n-mal „unabhängig voneinander“ wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten genau k Erfolge auf?
Antwort: Das n-stufige Bernoulli-Experiment lässt sich durch $\Omega = \{0, 1\}^n$ und $f(\omega) = f(\omega_1, \ldots, \omega_n) = p^{\omega_1}(1-p)^{1-\omega_1} \cdots p^{\omega_n}(1-p)^{1-\omega_n} = p^{k(\omega)}(1-p)^{n-k(\omega)}$ beschreiben (vgl. Beispiel 3 in Kapitel 0), wobei $k(\omega) := \sum_{i=1}^n \omega_i$ gesetzt sei.

Frage: Ein Bernoulli-Experiment wird n-mal „unabhängig voneinander“ wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten genau k Erfolge auf?
Antwort: Das n-stufige Bernoulli-Experiment lässt sich durch $\Omega = \{0,1\}^n$ und $f(\omega) = f(\omega_1, \dots, \omega_n) = p^{\omega_1}(1-p)^{1-\omega_1} \cdots p^{\omega_n}(1-p)^{1-\omega_n} = p^{k(\omega)}(1-p)^{n-k(\omega)}$ beschreiben (vgl. Beispiel 3 in Kapitel 0), wobei $k(\omega) := \sum_{i=1}^n \omega_i$ gesetzt sei.
Die Anzahl der Erfolge wird dann durch die Zufallsgröße

$$X : \Omega \to \{0, \dots, n\} \qquad X(\omega) := \sum_{i=1}^n \omega_i$$

beschrieben;

Binomialverteilung

Frage: Ein Bernoulli-Experiment wird n-mal „unabhängig voneinander" wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten genau k Erfolge auf?
Antwort: Das n-stufige Bernoulli-Experiment lässt sich durch $\Omega = \{0, 1\}^n$ und $f(\omega) = f(\omega_1, \dots, \omega_n) = p^{\omega_1}(1-p)^{1-\omega_1} \cdots p^{\omega_n}(1-p)^{1-\omega_n} = p^{k(\omega)}(1-p)^{n-k(\omega)}$ beschreiben (vgl. Beispiel 3 in Kapitel 0), wobei $k(\omega) := \sum_{i=1}^n \omega_i$ gesetzt sei.
Die Anzahl der Erfolge wird dann durch die Zufallsgröße

$$X : \Omega \to \{0, \dots, n\} \qquad X(\omega) := \sum_{i=1}^n \omega_i$$

beschrieben; ihre Vtlg. ist durch $\widetilde{\Omega} := \{0, \dots, n\}$ und $\widetilde{f}(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $(k = 0, \dots, n)$ gegeben.

Binomialverteilung

Frage: Ein Bernoulli-Experiment wird n-mal „unabhängig voneinander" wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten genau k Erfolge auf?

Antwort: Das n-stufige Bernoulli-Experiment lässt sich durch $\Omega = \{0,1\}^n$ und $f(\omega) = f(\omega_1, \ldots, \omega_n) = p^{\omega_1}(1-p)^{1-\omega_1} \cdots p^{\omega_n}(1-p)^{1-\omega_n} = p^{k(\omega)}(1-p)^{n-k(\omega)}$ beschreiben (vgl. Beispiel 3 in Kapitel 0), wobei $k(\omega) := \sum_{i=1}^n \omega_i$ gesetzt sei. Die Anzahl der Erfolge wird dann durch die Zufallsgröße

$$X : \Omega \to \{0, \ldots, n\} \qquad X(\omega) := \sum_{i=1}^n \omega_i$$

beschrieben; ihre Vtlg. ist durch $\widetilde{\Omega} := \{0, \ldots, n\}$ und $\widetilde{f}(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $(k = 0, \ldots, n)$ gegeben.

Definition 1.23 (Binomialverteilung)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$. Die durch $f(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $(k = 0, \ldots, n)$ gegebene diskrete W.verteilung auf $\{0, \ldots, n\}$ heißt *Binomialverteilung* mit den Parametern n und p, kurz $\mathcal{B}(n,p) = \mathcal{B}_{n,p}$.

Binomialverteilung

Frage: Ein Bernoulli-Experiment wird n-mal „unabhängig voneinander" wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten genau k Erfolge auf?
Antwort: Das n-stufige Bernoulli-Experiment lässt sich durch $\Omega = \{0,1\}^n$ und $f(\omega) = f(\omega_1, \dots, \omega_n) = p^{\omega_1}(1-p)^{1-\omega_1} \cdots p^{\omega_n}(1-p)^{1-\omega_n} = p^{k(\omega)}(1-p)^{n-k(\omega)}$ beschreiben (vgl. Beispiel 3 in Kapitel 0), wobei $k(\omega) := \sum_{i=1}^n \omega_i$ gesetzt sei.
Die Anzahl der Erfolge wird dann durch die Zufallsgröße

$$X : \Omega \to \{0, \dots, n\} \qquad X(\omega) := \sum_{i=1}^n \omega_i$$

beschrieben; ihre Vtlg. ist durch $\widetilde{\Omega} := \{0, \dots, n\}$ und $\widetilde{f}(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $(k = 0, \dots, n)$ gegeben.

Definition 1.23 (Binomialverteilung)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$. Die durch $f(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $(k = 0, \dots, n)$ gegebene diskrete W.verteilung auf $\{0, \dots, n\}$ heißt *Binomialverteilung* mit den Parametern n und p, kurz $\mathcal{B}(n,p) = \mathcal{B}_{n,p}$.

Interpretation: Die Binomialverteilung beschreibt die Anzahl der „Erfolge" bei unabhängigen Versuchswiederholungen.

Beispiel zur Binomialverteilung

Frage: Aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln wird n-mal mit Zurücklegen gezogen. Mit welcher W. wird genau k-mal rot gezogen?

Beispiel zur Binomialverteilung

Frage: Aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln wird n-mal mit Zurücklegen gezogen. Mit welcher W. wird genau k-mal rot gezogen?

Antwort 1: (*mittels Rechnung*) Wir nehmen an, dass die roten Kugeln von 1 bis r, die schwarzen Kugeln von $r+1$ bis $r+s$ nummeriert sind, und wählen $\Omega = \{1, \dots, r+s\}^n$, $\mathbb{P} = \mathcal{U}_\Omega$ (wegen Symmetrie) sowie $A_k = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega : |\{i : \omega_i \leq r\}| = k\}$. Es gilt dann

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n}{k} r^k s^{n-k}}{(r+s)^n} = \binom{n}{k} \left(\tfrac{r}{r+s}\right)^k \left(\tfrac{s}{r+s}\right)^{n-k} \Big[= \mathcal{B}_{n,r/(r+s)}(\{k\}) \Big] .$$

Beispiel zur Binomialverteilung

Frage: Aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln wird n-mal mit Zurücklegen gezogen. Mit welcher W. wird genau k-mal rot gezogen?

Antwort 1: (*mittels Rechnung*) Wir nehmen an, dass die roten Kugeln von 1 bis r, die schwarzen Kugeln von $r+1$ bis $r+s$ nummeriert sind, und wählen $\Omega = \{1, \dots, r+s\}^n$, $\mathbb{P} = \mathcal{U}_\Omega$ (wegen Symmetrie) sowie $A_k = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega : |\{i : \omega_i \le r\}| = k\}$. Es gilt dann

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n}{k} r^k s^{n-k}}{(r+s)^n} = \binom{n}{k} \left(\tfrac{r}{r+s}\right)^k \left(\tfrac{s}{r+s}\right)^{n-k} \Big[= \mathcal{B}_{n,r/(r+s)}(\{k\}) \Big] .$$

Antwort 2: (*mittels Begründung*) Die Zufallsgröße X gebe an, wie oft rot gezogen wird. Da mit Zurücklegen gezogen wird, ist X $\mathcal{B}_{n,r/(r+s)}$-verteilt (als Anzahl der Erfolge bei n unabh. Versuchswiederholungen mit Erfolgs-W. $\frac{r}{r+s}$).
Die gesuchte W. ist also $\mathbb{P}_X(\{k\}) = \mathcal{B}_{n,r/(r+s)}(\{k\}) = \binom{n}{k} \left(\tfrac{r}{r+s}\right)^k \left(\tfrac{s}{r+s}\right)^{n-k}$.

Beispiel zur Binomialverteilung

Frage: Aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln wird n-mal mit Zurücklegen gezogen. Mit welcher W. wird genau k-mal rot gezogen?

Antwort 1: (*mittels Rechnung*) Wir nehmen an, dass die roten Kugeln von 1 bis r, die schwarzen Kugeln von $r+1$ bis $r+s$ nummeriert sind, und wählen $\Omega = \{1, \ldots, r+s\}^n$, $\mathbb{P} = \mathcal{U}_\Omega$ (wegen Symmetrie) sowie $A_k = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega : |\{i : \omega_i \leq r\}| = k\}$. Es gilt dann

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n}{k} r^k s^{n-k}}{(r+s)^n} = \binom{n}{k} \left(\tfrac{r}{r+s}\right)^k \left(\tfrac{s}{r+s}\right)^{n-k} \left[= \mathcal{B}_{n,r/(r+s)}(\{k\}) \right].$$

Antwort 2: (*mittels Begründung*) Die Zufallsgröße X gebe an, wie oft rot gezogen wird. Da mit Zurücklegen gezogen wird, ist X $\mathcal{B}_{n,r/(r+s)}$-verteilt (als Anzahl der Erfolge bei n unabh. Versuchswiederholungen mit Erfolgs-W. $\frac{r}{r+s}$).
Die gesuchte W. ist also $\mathbb{P}_X(\{k\}) = \mathcal{B}_{n,r/(r+s)}(\{k\}) = \binom{n}{k} \left(\tfrac{r}{r+s}\right)^k \left(\tfrac{s}{r+s}\right)^{n-k}$.

(Beachte, dass dies ein Beispiel zu Bem. 1.21 bildet, wie Zufallsgrößen auftreten !)

Hypergeometrische Verteilung

Frage: Aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln wird n-mal ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher W. wird genau k-mal rot gezogen?

Hypergeometrische Verteilung

Frage: Aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln wird n-mal ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher W. wird genau k-mal rot gezogen?
Antwort: Wir nehmen wieder an, dass die roten Kugeln von 1 bis r, die schwarzen Kugeln von $r+1$ bis $r+s$ nummeriert sind, und wählen $\Omega = \{\omega \subseteq \{1, \ldots, r+s\} : |\omega| = n\}$ und $\mathbb{P} = \mathcal{U}_\Omega$ (wegen Symmetrie).

Hypergeometrische Verteilung

Frage: Aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln wird n-mal ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher W. wird genau k-mal rot gezogen?
Antwort: Wir nehmen wieder an, dass die roten Kugeln von 1 bis r, die schwarzen Kugeln von $r+1$ bis $r+s$ nummeriert sind, und wählen $\Omega = \{\omega \subseteq \{1, \dots, r+s\} : |\omega| = n\}$ und $\mathbb{P} = \mathcal{U}_\Omega$ (wegen Symmetrie).
Die Anzahl der roten Kugeln wird dann durch die Zufallsgröße

$$X : \Omega \to \{0, \dots, n\} \qquad X(\omega) := |\,\omega \cap \{1, \dots, r\}\,|$$

beschrieben;

Frage: Aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln wird n-mal ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher W. wird genau k-mal rot gezogen?
Antwort: Wir nehmen wieder an, dass die roten Kugeln von 1 bis r, die schwarzen Kugeln von $r+1$ bis $r+s$ nummeriert sind, und wählen $\Omega = \{\omega \subseteq \{1, \ldots, r+s\} : |\omega| = n\}$ und $\mathbb{P} = \mathcal{U}_\Omega$ (wegen Symmetrie).
Die Anzahl der roten Kugeln wird dann durch die Zufallsgröße

$$X : \Omega \to \{0, \ldots, n\} \qquad X(\omega) := |\,\omega \cap \{1, \ldots, r\}\,|$$

beschrieben; ihre Vtlg. ist durch $\widetilde{\Omega} := \{0, \ldots, n\}$ und $\widetilde{f}(k) := \binom{r}{k}\binom{s}{n-k}/\binom{r+s}{n}$ $(k = 0, \ldots, n)$ gegeben.

Hypergeometrische Verteilung

Frage: Aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln wird n-mal ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher W. wird genau k-mal rot gezogen?
Antwort: Wir nehmen wieder an, dass die roten Kugeln von 1 bis r, die schwarzen Kugeln von $r+1$ bis $r+s$ nummeriert sind, und wählen $\Omega = \{\omega \subseteq \{1, \dots, r+s\} : |\omega| = n\}$ und $\mathbb{P} = \mathcal{U}_\Omega$ (wegen Symmetrie).
Die Anzahl der roten Kugeln wird dann durch die Zufallsgröße

$$X : \Omega \to \{0, \dots, n\} \qquad X(\omega) := |\,\omega \cap \{1, \dots, r\}\,|$$

beschrieben; ihre Vtlg. ist durch $\widetilde{\Omega} := \{0, \dots, n\}$ und $\widetilde{f}(k) := \binom{r}{k}\binom{s}{n-k}/\binom{r+s}{n}$ $(k = 0, \dots, n)$ gegeben.

Definition 1.24 (Hypergeometrische Verteilung)

Seien $r, s \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq r+s$. Die durch $f(k) := \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}$ $(k = 0, \dots, n)$ gegebene diskrete W.verteilung auf $\{0, \dots, n\}$ heißt *hypergeometrische Verteilung* mit den Parametern n, r, s, kurz $\mathcal{H}(n, r, s) = \mathcal{H}_{n,r,s}$.

Beachte, dass hier die Wahl der Parameter in der Literatur nicht einheitlich ist.

Merkregel:
Wird aus einer Urne mit r roten Kugeln und s schwarzen Kugeln n-mal gezogen und interessiert die Anzahl X der Ziehungen, bei denen rot gezogen wird, so ist X $\mathcal{B}(n, \frac{r}{r+s})$- bzw. $\mathcal{H}(n, r, s)$-verteilt, wenn mit bzw. ohne Zurücklegen gezogen wird.

Approximation der hypergeometrischen Verteilung durch die Binomialverteilung.

Sind in der obigen Situation r und s „sehr groß“ im Vergleich zu n, so sollte es keine Rolle spielen, ob mit oder ohne Zurücklegen gezogen wird.

Approximation der hypergeometrischen Verteilung durch die Binomialverteilung.

Sind in der obigen Situation r und s „sehr groß“ im Vergleich zu n, so sollte es keine Rolle spielen, ob mit oder ohne Zurücklegen gezogen wird.

Satz 1.25

Sind $(r_N)_{N\in\mathbb{N}}$, $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ Folgen natürlicher Zahlen mit $\lim_{N\to\infty} r_N = \infty$, $\lim_{N\to\infty} s_N = \infty$ und $\lim_{N\to\infty} r_N/(r_N+s_N) = p$ und ist $n \in \mathbb{N}$ fest, so gilt $\lim_{N\to\infty} \mathcal{H}(n, r_N, s_N)(\{k\}) = \mathcal{B}(n,p)(\{k\})$ für alle $k = 0, \ldots, n$.

Beweis:

Approximation der hypergeometrischen Verteilung durch die Binomialverteilung.

Sind in der obigen Situation r und s „sehr groß“ im Vergleich zu n, so sollte es keine Rolle spielen, ob mit oder ohne Zurücklegen gezogen wird.

Satz 1.25

Sind $(r_N)_{N\in\mathbb{N}}$, $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ Folgen natürlicher Zahlen mit $\lim_{N\to\infty} r_N = \infty$, $\lim_{N\to\infty} s_N = \infty$ und $\lim_{N\to\infty} r_N/(r_N+s_N) = p$ und ist $n \in \mathbb{N}$ fest, so gilt $\lim_{N\to\infty} \mathcal{H}(n, r_N, s_N)(\{k\}) = \mathcal{B}(n,p)(\{k\})$ für alle $k = 0, \ldots, n$.

Beweis:

Für festes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\frac{1}{N^k}\binom{N}{k} = \frac{1}{N^k}\frac{N!}{(N-k)!\,k!} = \frac{N}{N} \cdot \frac{N-1}{N} \cdot \ldots \cdot \frac{N-k+1}{N}\frac{1}{k!} \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{k!}$.

Approximation der hypergeometrischen Verteilung durch die Binomialverteilung.

Sind in der obigen Situation r und s „sehr groß“ im Vergleich zu n, so sollte es keine Rolle spielen, ob mit oder ohne Zurücklegen gezogen wird.

Satz 1.25

Sind $(r_N)_{N\in\mathbb{N}}$, $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *Folgen natürlicher Zahlen mit* $\lim_{N\to\infty} r_N = \infty$, $\lim_{N\to\infty} s_N = \infty$ *und* $\lim_{N\to\infty} r_N/(r_N+s_N) = p$ *und ist* $n \in \mathbb{N}$ *fest, so gilt* $\lim_{N\to\infty} \mathcal{H}(n, r_N, s_N)(\{k\}) = \mathcal{B}(n,p)(\{k\})$ *für alle* $k = 0, \ldots, n$.

Beweis:

Für festes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\frac{1}{N^k}\binom{N}{k} = \frac{1}{N^k}\frac{N!}{(N-k)!\,k!} = \frac{N}{N}\cdot\frac{N-1}{N}\cdot\ldots\cdot\frac{N-k+1}{N}\frac{1}{k!} \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{k!}$.
Damit folgt für alle $k = 0, \ldots, n$

$$\frac{\binom{r_N}{k}\binom{s_N}{n-k}}{\binom{r_N+s_N}{n}} = \frac{\frac{1}{r_N^k}\binom{r_N}{k}\frac{1}{s_N^{n-k}}\binom{s_N}{n-k}}{\frac{1}{(r_N+s_N)^n}\binom{r_N+s_N}{n}}\frac{r_N^k}{(r_N+s_N)^k}\frac{s_N^{n-k}}{(r_N+s_N)^{n-k}} \xrightarrow{N\to\infty} \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Poisson-Verteilung I

Frage: Wie verhält sich bei der Binomialverteilung die W. für (genau) k Erfolge, wenn man die Anzahl n der unabhängigen Versuchswiederholungen vergrößert und zugleich die Erfolgs-W. p_n verkleinert, so dass $\lim_{n\to\infty}(np_n) = \lambda \in [0,\infty[$?

Poisson-Verteilung I

Frage: Wie verhält sich bei der Binomialverteilung die W. für (genau) k Erfolge, wenn man die Anzahl n der unabhängigen Versuchswiederholungen vergrößert und zugleich die Erfolgs-W. p_n verkleinert, so dass $\lim_{n\to\infty}(np_n) = \lambda \in [0,\infty[$?

Antwort: Für jedes feste $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}$.

Poisson-Verteilung I

Frage: Wie verhält sich bei der Binomialverteilung die W. für (genau) k Erfolge, wenn man die Anzahl n der unabhängigen Versuchswiederholungen vergrößert und zugleich die Erfolgs-W. p_n verkleinert, so dass $\lim_{n\to\infty}(np_n) = \lambda \in [0,\infty[$?

Antwort: Für jedes feste $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}$.

Exponentialfunktion:

$f(x) = e^x$ wobei $e = 2.718\ldots$ $\qquad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad x_n \to x \;\Rightarrow\; \left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n \to e^x$

Poisson-Verteilung I

Frage: Wie verhält sich bei der Binomialverteilung die W. für (genau) k Erfolge, wenn man die Anzahl n der unabhängigen Versuchswiederholungen vergrößert und zugleich die Erfolgs-W. p_n verkleinert, so dass $\lim_{n\to\infty}(np_n) = \lambda \in [0,\infty[$?

Antwort: Für jedes feste $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}$.

Exponentialfunktion:

$f(x) = e^x$ wobei $e = 2.718\ldots$ $\qquad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad x_n \to x \;\Rightarrow\; \left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n \to e^x$

denn:

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}(np_n)^k(1-\tfrac{np_n}{n})^{n-k} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda} .$$

Poisson-Verteilung I

Frage: Wie verhält sich bei der Binomialverteilung die W. für (genau) k Erfolge, wenn man die Anzahl n der unabhängigen Versuchswiederholungen vergrößert und zugleich die Erfolgs-W. p_n verkleinert, so dass $\lim_{n\to\infty}(np_n) = \lambda \in [0,\infty[$?

Antwort: Für jedes feste $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}$.

Exponentialfunktion:

$f(x) = e^x$ wobei $e = 2.718...$ $\qquad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad x_n \to x \;\Rightarrow\; \left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n \to e^x$

denn:

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}(np_n)^k(1-\tfrac{np_n}{n})^{n-k} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda} .$$

Die erhaltenen Werte definieren wegen

$$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \geq 0 \;\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{+\lambda} = 1$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{N}_0$.

Poisson-Verteilung I

Frage: Wie verhält sich bei der Binomialverteilung die W. für (genau) k Erfolge, wenn man die Anzahl n der unabhängigen Versuchswiederholungen vergrößert und zugleich die Erfolgs-W. p_n verkleinert, so dass $\lim_{n\to\infty}(np_n) = \lambda \in [0,\infty[$?

Antwort: Für jedes feste $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}$.

Definition 1.26 (Poisson-Verteilung)

Sei $\lambda \in [0,\infty[$. Die durch $f(k) := e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ gegebene diskrete W.verteilung auf $\mathbb{N}_0$ heißt *Poisson-Verteilung* mit dem Parameter λ, kurz $\mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{P}_\lambda$.

Poisson-Verteilung I

Frage: Wie verhält sich bei der Binomialverteilung die W. für (genau) k Erfolge, wenn man die Anzahl n der unabhängigen Versuchswiederholungen vergrößert und zugleich die Erfolgs-W. p_n verkleinert, so dass $\lim_{n\to\infty}(np_n) = \lambda \in [0, \infty[$?

Antwort: Für jedes feste $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}$.

Definition 1.26 (Poisson-Verteilung)

Sei $\lambda \in [0, \infty[$. Die durch $f(k) := e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ gegebene diskrete W.verteilung auf $\mathbb{N}_0$ heißt *Poisson-Verteilung* mit dem Parameter λ, kurz $\mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{P}_\lambda$.

Satz 1.27 (Poisson'scher Grenzwertsatz)

Ist $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[0,1]$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}(np_n) = \lambda \in [0, \infty[$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{B}(n, p_n)(\{k\}) = \mathcal{P}(\lambda)(\{k\})$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Poisson-Verteilung II

Bemerkung 1.28

Die Poisson-Verteilung liefert ein einfaches Modell zur Beschreibung der Anzahl der Ereignisse (Erdbeben, Unfälle, Telefonanrufe, E-Mails, Druckaufträge, Rechnerabstürze, ...) in einem festen Zeitraum.

Poisson-Verteilung II

Bemerkung 1.28

Die Poisson-Verteilung liefert ein einfaches Modell zur Beschreibung der Anzahl der Ereignisse (Erdbeben, Unfälle, Telefonanrufe, E-Mails, Druckaufträge, Rechnerabstürze, ...) in einem festen Zeitraum.

Begründung:
Sei $t > 0$ fest. Wir zerlegen das Intervall $I =]0, t]$ für großes $n \in \mathbb{N}$ in n Teilintervalle $I_k =]\frac{(k-1)t}{n}, \frac{kt}{n}]$, $k = 1, \ldots, n$,

Poisson-Verteilung II

Bemerkung 1.28

Die Poisson-Verteilung liefert ein einfaches Modell zur Beschreibung der Anzahl der Ereignisse (Erdbeben, Unfälle, Telefonanrufe, E-Mails, Druckaufträge, Rechnerabstürze, ...) in einem festen Zeitraum.

Begründung:

Sei $t > 0$ fest. Wir zerlegen das Intervall $I =]0, t]$ für großes $n \in \mathbb{N}$ in n Teilintervalle $I_k =]\frac{(k-1)t}{n}, \frac{kt}{n}]$, $k = 1, \ldots, n$, und treffen die folgenden Annahmen:

(i) In jedem Teilintervall tritt höchstens 1 Ereignis auf.

(ii) Die W. p hierfür ist proportional zur Intervalllänge, also $p = \lambda t/n$.
($\lambda \triangleq$ *Intensität*)

(iii) Ereignisse in verschiedenen Intervallen sind „unabhängig voneinander".

Poisson-Verteilung II

Bemerkung 1.28

Die Poisson-Verteilung liefert ein einfaches Modell zur Beschreibung der Anzahl der Ereignisse (Erdbeben, Unfälle, Telefonanrufe, E-Mails, Druckaufträge, Rechnerabstürze, ...) in einem festen Zeitraum.

Begründung:
Sei $t > 0$ fest. Wir zerlegen das Intervall $I =]0, t]$ für großes $n \in \mathbb{N}$ in n Teilintervalle $I_k =]\frac{(k-1)t}{n}, \frac{kt}{n}]$, $k = 1, \dots, n$, und treffen die folgenden Annahmen:

(i) In jedem Teilintervall tritt höchstens 1 Ereignis auf.
(ii) Die W. p hierfür ist proportional zur Intervalllänge, also $p = \lambda t/n$. ($\lambda \triangleq$ *Intensität*)
(iii) Ereignisse in verschiedenen Intervallen sind „unabhängig voneinander".

Dann ist die Anzahl der Ereignisse im Intervall $I =]0, t]$
(als Anzahl der „Erfolge" bei unabhängigen Versuchswiederholungen)
näherungsweise $\mathcal{B}_{n,\lambda t/n}$-verteilt bzw. $\mathcal{P}_{\lambda t}$-verteilt.

Geometrische Verteilung

Frage: Ein Bernoulli-Experiment wird „unabhängig voneinander“ wiederholt, bis der erste Erfolg eintritt. Mit welcher W. geschieht dies im k-ten Versuch?

Geometrische Verteilung

Frage: Ein Bernoulli-Experiment wird „unabhängig voneinander" wiederholt, bis der erste Erfolg eintritt. Mit welcher W. geschieht dies im k-ten Versuch?
Antwort: Das k-stufige Bernoulli-Experiment lässt sich durch $\Omega = \{0,1\}^k$ und $f(\omega) = f(\omega_1, \dots, \omega_k) = p^{\omega_1}(1-p)^{1-\omega_1} \cdots p^{\omega_k}(1-p)^{1-\omega_k}$ beschreiben.

Geometrische Verteilung

Frage: Ein Bernoulli-Experiment wird „unabhängig voneinander" wiederholt, bis der erste Erfolg eintritt. Mit welcher W. geschieht dies im k-ten Versuch?
Antwort: Das k-stufige Bernoulli-Experiment lässt sich durch $\Omega = \{0,1\}^k$ und $f(\omega) = f(\omega_1, \dots, \omega_k) = p^{\omega_1}(1-p)^{1-\omega_1} \cdots p^{\omega_k}(1-p)^{1-\omega_k}$ beschreiben.
Es interessiert das Ereignis $A_k := \{(0, \dots, 0, 1)\}$; die W. ist $\mathbb{P}(A_k) = (1-p)^{k-1} p$.

Geometrische Verteilung

Frage: Ein Bernoulli-Experiment wird „unabhängig voneinander" wiederholt, bis der erste Erfolg eintritt. Mit welcher W. geschieht dies im k-ten Versuch?
Antwort: Das k-stufige Bernoulli-Experiment lässt sich durch $\Omega = \{0,1\}^k$ und $f(\omega) = f(\omega_1, \ldots, \omega_k) = p^{\omega_1}(1-p)^{1-\omega_1} \cdots p^{\omega_k}(1-p)^{1-\omega_k}$ beschreiben.
Es interessiert das Ereignis $A_k := \{(0, \ldots, 0, 1)\}$; die W. ist $\mathbb{P}(A_k) = (1-p)^{k-1}p$.

Definition 1.29 (Geometrische Verteilung)

Sei $p \in]0,1]$. Die durch $f(k) := (1-p)^{k-1}p$ ($k \in \mathbb{N}$) gegebene diskrete W.verteilung auf $\mathbb{N}$ heißt *geometrische Verteilung* mit dem Parameter p, kurz $\mathcal{G}(p) = \mathcal{G}_p$.

Geometrische Verteilung

Frage: Ein Bernoulli-Experiment wird „unabhängig voneinander“ wiederholt, bis der erste Erfolg eintritt. Mit welcher W. geschieht dies im k-ten Versuch?
Antwort: Das k-stufige Bernoulli-Experiment lässt sich durch $\Omega = \{0,1\}^k$ und $f(\omega) = f(\omega_1, \ldots, \omega_k) = p^{\omega_1}(1-p)^{1-\omega_1} \cdots p^{\omega_k}(1-p)^{1-\omega_k}$ beschreiben.
Es interessiert das Ereignis $A_k := \{(0, \ldots, 0, 1)\}$; die W. ist $\mathbb{P}(A_k) = (1-p)^{k-1}p$.

Definition 1.29 (Geometrische Verteilung)

Sei $p \in \,]0,1]$. Die durch $f(k) := (1-p)^{k-1}p$ ($k \in \mathbb{N}$) gegebene diskrete W.verteilung auf $\mathbb{N}$ heißt *geometrische Verteilung* mit dem Parameter p, kurz $\mathcal{G}(p) = \mathcal{G}_p$.

Interpretation: Die geometrische Verteilung beschreibt die Anzahl der Versuche bis zum ersten „Erfolg“ bei unabhängigen Versuchswiederholungen.

Beachte, dass auch hier die Literatur nicht einheitlich ist – oft wird auch die um 1 verschobene Verteilung auf $\mathbb{N}_0$ als geom. Verteilung bezeichnet.

Zusammenfassung:

- *Interessieren wir uns bei einem gegebenen* (diskreten) *W.raum nur für einen speziellen Aspekt, so können wir mit Hilfe einer Zufallsgröße ($\approx$ Filter) zu einem neuen, in der Regel einfacheren* (diskreten) *W.raum übergehen.*
- *Eine Zufallsgröße auf einem diskreten W.raum ist eine Abbildung $X : \Omega \to \mathcal{X}$ (mit Werten in einer abzählbaren Menge $\mathcal{X}$).*
- *Die Verteilung einer solchen Zufallsgröße bestimmen wir, indem wir die zugehörigen Elementar-W.en $\mathbb{P}(X = x)$, $x \in \mathcal{X}$, bestimmen.*
- *Auf diese Weise lassen sich aus gegegeben W.verteilungen (z. B. aus diskreten Gleichverteilungen $\rightsquigarrow$ Kombinatorik) weitere W.verteilungen „erzeugen".*
- *Wir haben einige wichtige diskrete W.verteilungen kennengelernt (Binomialverteilung, hypergeometrische Verteilung, Poisson-Verteilung, geometrische Verteilung).*

Kapitel 2
Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume

Kapitel 2.1
Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume

Motivation

Wir wollen uns nun zufallsabhängigen Vorgängen zuwenden, bei denen sich die Menge der möglichen Versuchsausgänge durch ein Intervall $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$, also durch eine überabzählbare Menge beschreiben lässt.
Diese Situation tritt häufig dann auf, wenn kontinuierliche Größen (Zeiten, Längen, ...) gemessen werden, die vom Zufall beeinflusst sind.

Motivation

Wir wollen uns nun zufallsabhängigen Vorgängen zuwenden, bei denen sich die Menge der möglichen Versuchsausgänge durch ein Intervall $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$, also durch eine überabzählbare Menge beschreiben lässt. Diese Situation tritt häufig dann auf, wenn kontinuierliche Größen (Zeiten, Längen, ...) gemessen werden, die vom Zufall beeinflusst sind.

Ansatz: Diskretisierung

kontinuierliches Problem	$\rightsquigarrow$	diskretes Problem	$\rightsquigarrow$	diskretes Modell	$\rightsquigarrow$	kontinuierliches Modell

Motivation

Wir wollen uns nun zufallsabhängigen Vorgängen zuwenden, bei denen sich die Menge der möglichen Versuchsausgänge durch ein Intervall $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$, also durch eine überabzählbare Menge beschreiben lässt. Diese Situation tritt häufig dann auf, wenn kontinuierliche Größen (Zeiten, Längen, ...) gemessen werden, die vom Zufall beeinflusst sind.

Ansatz: Diskretisierung

kontinuierliches Problem	$\rightsquigarrow$	diskretes Problem	$\rightsquigarrow$	diskretes Modell	$\rightsquigarrow$	kontinuierliches Modell

(*Bemerkung:* Dieser Ansatz dient hier nur der Motivation. Anschließend werden wir immer „direkt“ ein kontinuierliches Modell wählen.)

Beispiel 2.1 (a) : Zufälliger Punkt

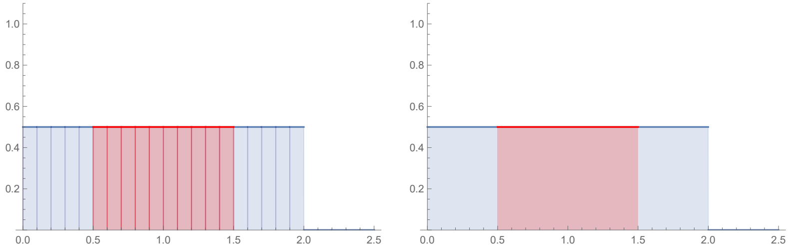
Es soll ein zufälliger Punkt aus dem Intervall $]0, T]$ ausgewählt werden, wobei $T \in \mathbb{N}$ fest und Intervalle $I \subseteq]0, T]$ derselben Länge dieselbe W. besitzen sollen.

Beispiel 2.1 (a) : Zufälliger Punkt

Es soll ein zufälliger Punkt aus dem Intervall $]0, T]$ ausgewählt werden, wobei $T \in \mathbb{N}$ fest und Intervalle $I \subseteq]0, T]$ derselben Länge dieselbe W. besitzen sollen. Wir unterteilen das Intervall $]0, T]$ (für großes $n \in \mathbb{N}$) in Abschnitte der Länge $\frac{1}{n}$. Dann bietet sich zur Beschreibung der diskrete W.raum $(\Omega_n, \mathfrak{P}(\Omega_n), \mathbb{P}_n)$ mit $\Omega_n := \{1, \ldots, Tn\}$ und $\mathbb{P}_n := \mathcal{U}(\Omega_n)$ (d.h. $f_n(k) := \frac{1}{Tn}\ \forall\, k \in \Omega_n$) an.

Beispiel 2.1 (a) : Zufälliger Punkt

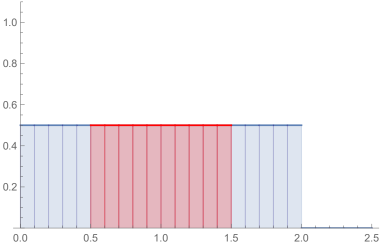
Es soll ein zufälliger Punkt aus dem Intervall $]0, T]$ ausgewählt werden, wobei $T \in \mathbb{N}$ fest und Intervalle $I \subseteq]0, T]$ derselben Länge dieselbe W. besitzen sollen.
Wir unterteilen das Intervall $]0, T]$ (für großes $n \in \mathbb{N}$) in Abschnitte der Länge $\frac{1}{n}$.
Dann bietet sich zur Beschreibung der diskrete W.raum $(\Omega_n, \mathfrak{P}(\Omega_n), \mathbb{P}_n)$ mit $\Omega_n := \{1, \dots, Tn\}$ und $\mathbb{P}_n := \mathcal{U}(\Omega_n)$ (d.h. $f_n(k) := \frac{1}{Tn}\ \forall\, k \in \Omega_n$) an.
Die W. eines Intervalls $I \subseteq]0, T]$ entspricht dann *näherungsweise* der Summe $\sum_{k \in \Omega_n : k/n \in I} f_n(k)$ bzw. (für $n \to \infty$) dem Integral $\int_I \frac{1}{T}\, dx$:

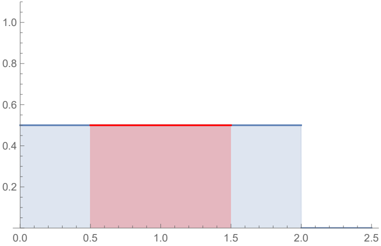


Veranschaulichung der Approximation für $T = 2,\ n = 10,\ I =]0.5, 1.5]$

Beispiel 2.1 (a) : Zufälliger Punkt

Es soll ein zufälliger Punkt aus dem Intervall $]0, T]$ ausgewählt werden, wobei $T \in \mathbb{N}$ fest und Intervalle $I \subseteq]0, T]$ derselben Länge dieselbe W. besitzen sollen.
Wir unterteilen das Intervall $]0, T]$ (für großes $n \in \mathbb{N}$) in Abschnitte der Länge $\frac{1}{n}$.
Dann bietet sich zur Beschreibung der diskrete W.raum $(\Omega_n, \mathfrak{P}(\Omega_n), \mathbb{P}_n)$ mit $\Omega_n := \{1, \ldots, Tn\}$ und $\mathbb{P}_n := \mathcal{U}(\Omega_n)$ (d.h. $f_n(k) := \frac{1}{Tn}\ \forall\, k \in \Omega_n$) an.
Die W. eines Intervalls $I \subseteq]0, T]$ entspricht dann *näherungsweise* der Summe $\sum_{k \in \Omega_n : k/n \in I} f_n(k)$ bzw. (für $n \to \infty$) dem Integral $\int_I \frac{1}{T}\, dx$:





Veranschaulichung der Approximation für $T = 2,\ n = 10,\ I =]0.5, 1.5]$

Damit können wir für $n \to \infty$ die Grundmenge $\Omega =]0, T]$ und die Funktion $f(x) = \frac{1}{T}$ wählen und die W. von I durch Integration von f über I berechnen.

Beispiel 2.1 (b) : Wartezeitproblem

Wir warten an einer (wenig befahrenen) Straße auf das nächste Auto, wobei wir die Zeit in Stunden messen.

Beispiel 2.1 (b) : Wartezeitproblem

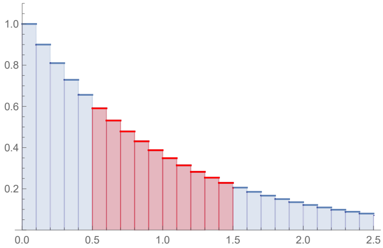
Wir warten an einer (wenig befahrenen) Straße auf das nächste Auto, wobei wir die Zeit in Stunden messen. Wir unterteilen das Intervall $(0, \infty)$ (für großes $n \in \mathbb{N}$) in Abschnitte der Länge $\frac{1}{n}$.

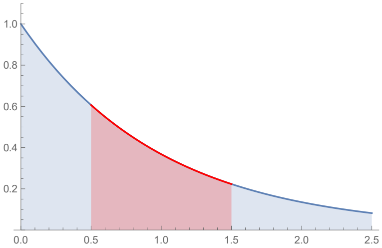
Beispiel 2.1 (b) : Wartezeitproblem

Wir warten an einer (wenig befahrenen) Straße auf das nächste Auto, wobei wir die Zeit in Stunden messen. Wir unterteilen das Intervall $(0, \infty)$ (für großes $n \in \mathbb{N}$) in Abschnitte der Länge $\frac{1}{n}$. Dann bietet sich zur Beschreibung (unter den Annahmen aus Bem. 1.28) der diskrete W.raum $(\Omega_n, \mathfrak{P}(\Omega_n), \mathbb{P}_n)$ mit $\Omega_n := \{1, 2, 3, \ldots\}$ und $\mathbb{P}_n := \mathcal{G}(\frac{\lambda}{n})$ (d.h. $f_n(k) = (1 - \frac{\lambda}{n})^{k-1} \frac{\lambda}{n} \; \forall\, k \in \Omega_n$) an.

Beispiel 2.1 (b) : Wartezeitproblem

Wir warten an einer (wenig befahrenen) Straße auf das nächste Auto, wobei wir die Zeit in Stunden messen. Wir unterteilen das Intervall $(0, \infty)$ (für großes $n \in \mathbb{N}$) in Abschnitte der Länge $\frac{1}{n}$. Dann bietet sich zur Beschreibung (unter den Annahmen aus Bem. 1.28) der diskrete W.raum $(\Omega_n, \mathfrak{P}(\Omega_n), \mathbb{P}_n)$ mit $\Omega_n := \{1, 2, 3, \ldots\}$ und $\mathbb{P}_n := \mathcal{G}(\frac{\lambda}{n})$ (d.h. $f_n(k) = (1 - \frac{\lambda}{n})^{k-1} \frac{\lambda}{n} \; \forall\, k \in \Omega_n$) an. Die W. eines Intervalls $I \subseteq (0, \infty)$ entspricht dann *näherungsweise* der Summe $\sum_{k \in \Omega_n : k/n \in I} f_n(k)$ bzw. (für $n \to \infty$) dem Integral $\int_I \lambda e^{-\lambda x}\, dx$:

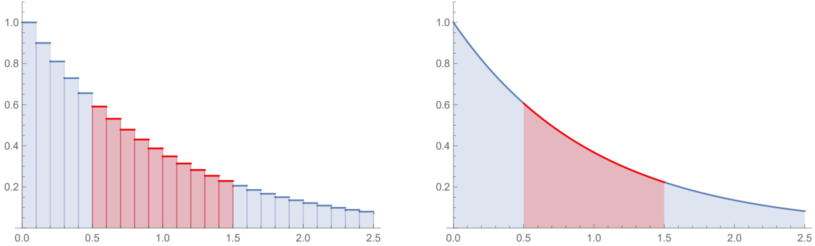




Veranschaulichung der Approximation für $\lambda = 1$, $n = 10$, $I =]0.5, 1.5]$

Beispiel 2.1 (b) : Wartezeitproblem

Wir warten an einer (wenig befahrenen) Straße auf das nächste Auto, wobei wir die Zeit in Stunden messen. Wir unterteilen das Intervall $(0, \infty)$ (für großes $n \in \mathbb{N}$) in Abschnitte der Länge $\frac{1}{n}$. Dann bietet sich zur Beschreibung (unter den Annahmen aus Bem. 1.28) der diskrete W.raum $(\Omega_n, \mathfrak{P}(\Omega_n), \mathbb{P}_n)$ mit $\Omega_n := \{1, 2, 3, \ldots\}$ und $\mathbb{P}_n := \mathcal{G}(\frac{\lambda}{n})$ (d.h. $f_n(k) = (1 - \frac{\lambda}{n})^{k-1} \frac{\lambda}{n} \ \forall\, k \in \Omega_n$) an. Die W. eines Intervalls $I \subseteq (0, \infty)$ entspricht dann *näherungsweise* der Summe $\sum_{k \in \Omega_n : k/n \in I} f_n(k)$ bzw. (für $n \to \infty$) dem Integral $\int_I \lambda e^{-\lambda x}\, dx$:



Veranschaulichung der Approximation für $\lambda = 1,\ n = 10,\ I =]0.5, 1.5]$

Damit können wir für $n \to \infty$ die Grundmenge $\Omega = (0, \infty)$ und die Funktion $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ wählen und die W. von I durch Integration von f über I berechnen.

Beziehung zwischen Riemann-Integralen und Summen:
Ist f auf $]a,b]$ Riemann-integrierbar, so gilt für großes $n \in \mathbb{N}$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k\in\mathbb{Z}\,:\,\frac{k}{n}\in]a,b]} f\left(\tfrac{k}{n}\right)\tfrac{1}{n}\,.$$

Beziehung zwischen Riemann-Integralen und Summen:
Ist f auf $]a, b]$ Riemann-integrierbar, so gilt für großes $n \in \mathbb{N}$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k \in \mathbb{Z} :\, \frac{k}{n} \in]a,b]} f\left(\tfrac{k}{n}\right) \tfrac{1}{n} \,.$$

Da sich mit Integralen i. d. R. einfacher rechnen lässt als mit Summen, wollen wir von nun an immer direkt ein kontinuierliches Modell wählen.

Stetige W.maße

Merkregel:
Gegeben ein Intervall $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \Omega \quad \text{und} \quad \int_\Omega f(x)\, dx = 1$$

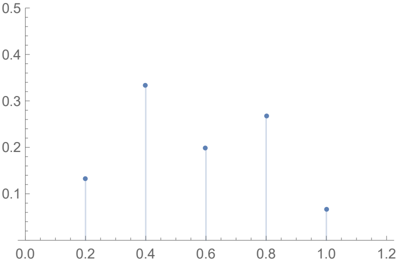
(wobei die Existenz des Riemann-Integrals vorauszusetzen ist) können wir das stetige W.maß $\mathbb{P}$ betrachten, das jedem Intervall $I \subseteq \Omega$ die W.

$$\mathbb{P}(I) = \int_I f(x)\, dx$$

zuordnet. Die Funktion f wird auch als W.dichte von $\mathbb{P}$ bezeichnet.

Diskrete Modelle vs. Stetige Modelle

Diskrete Modelle

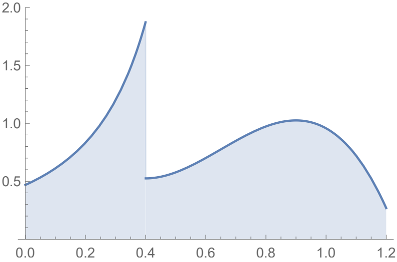


Ω abzählbar, $f : \Omega \to \mathbb{R}$,
$f(\omega) \geq 0 \; \forall \omega \in \Omega$, $\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$.

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{\omega \in A} f(\omega) \quad (A \subseteq \Omega \text{ abzählbar})$$

diskretes W.maß (mit der W.dichte f)

Stetige Modelle



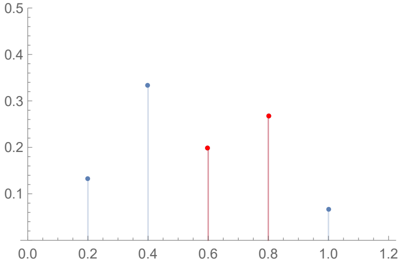
Ω Intervall, $f : \Omega \to \mathbb{R}$,
$f(x) \geq 0 \; \forall x \in \Omega$, $\int_\Omega f(x)\,dx = 1$.

$$\mathbb{P}(A) := \int_A f(x)\,dx \quad (A \subseteq \Omega \text{ Intervall})$$

stetiges W.maß (mit der W.dichte f)

Diskrete Modelle vs. Stetige Modelle

Diskrete Modelle

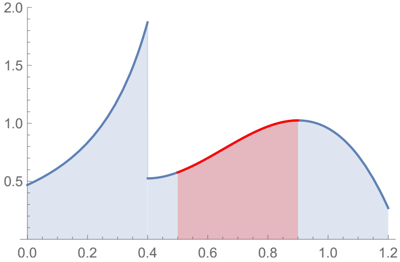


Ω abzählbar, $f : \Omega \to \mathbb{R}$,
$f(\omega) \geq 0 \ \forall \omega \in \Omega$, $\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$.

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{\omega \in A} f(\omega) \quad (A \subseteq \Omega \text{ abzählbar})$$

diskretes W.maß (mit der W.dichte f)

Stetige Modelle



Ω Intervall, $f : \Omega \to \mathbb{R}$,
$f(x) \geq 0 \ \forall x \in \Omega$, $\int_\Omega f(x)\,dx = 1$.

$$\mathbb{P}(A) := \int_A f(x)\,dx \quad (A \subseteq \Omega \text{ Intervall})$$

stetiges W.maß (mit der W.dichte f)

Stetige W.maße

Merkregel:
Gegeben ein Intervall $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \Omega \quad \text{und} \quad \int_\Omega f(x)\,dx = 1$$

(wobei die Existenz des Riemann-Integrals vorauszusetzen ist) können wir das <u>stetige W.maß</u> $\mathbb{P}$ betrachten, das jedem Intervall $I \subseteq \Omega$ die W.

$$\mathbb{P}(I) = \int_I f(x)\,dx$$

zuordnet. Die Funktion f wird auch als <u>W.dichte</u> von $\mathbb{P}$ bezeichnet.

Wichtige Anmerkungen:

- Das Riemann-Integral „misst“ den Flächeninhalt unter dem Graphen von f.
- Die Werte $f(x)$ dürfen hier <u>nicht</u> als Elementar-W.'en interpretiert werden: Für jede Einpunktmenge $\{x\} \subseteq \Omega$ gilt nämlich $\mathbb{P}(\{x\}) = \int_{\{x\}} f(y)\,dy = 0$, was i. d. R. $\neq f(x)$ ist. Es kann sogar $f(x) > 1$ gelten, vgl. obiges Beispiel!
- Man muss hier „in Intervallen“ statt „in Einpunktmengen“ denken: Für jedes Intervall $I \subseteq \Omega$ gilt $\mathbb{P}(I) = \int_I f(y)\,dy$.

Dichte	Name der W.verteilung	Parameter
$f(x) = \frac{1}{b-a}\,\mathbf{1}_{\langle a,b\rangle}(x)$	*Gleichverteilung auf* $\langle a, b\rangle$ $\mathcal{U}(a, b)$	$-\infty < a < b < +\infty$
$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\,\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$	*Exponentialverteilung* $\mathcal{E}(\lambda)$	$\lambda > 0$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$	*Normalverteilung* $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$\mu \in \mathbb{R},\ \sigma \in (0, \infty)$

Beispiele 2.2: Stetige W.verteilungen auf $\mathbb{R}$

Dichte	**Name der W.verteilung**	**Parameter**
$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{\langle a,b \rangle}(x)$	*Gleichverteilung auf* $\langle a, b \rangle$ $\mathcal{U}(a, b)$	$-\infty < a < b < +\infty$
$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$	*Exponentialverteilung* $\mathcal{E}(\lambda)$	$\lambda > 0$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$	*Normalverteilung* $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	$\mu \in \mathbb{R}, \ \sigma \in (0, \infty)$

Beachte, dass wir hier als Grundmenge stets $\Omega = \mathbb{R}$ wählen und die Dichte bei Bedarf mit einer Indikatorfunktion $\mathbf{1}_I$ multiplizieren; alternativ könnten wir als Grundmenge $\Omega = I$ wählen und die Indikatorfunktion in der Dichte weglassen. Gleichverteilung und Exponentialverteilung sind uns schon in Bsp. 2.1 (a) + (b) begegnet; die Exponentialverteilung eignet sich zur Modellierung von Wartezeiten.

Bemerkung 2.3

Frage: Welchen Mengen können wir Wahrscheinlichkeiten zuordnen?

Bemerkung 2.3

Frage: Welchen Mengen können wir Wahrscheinlichkeiten zuordnen?

In Beispiel 2.1 (a) speziell für $T = 1$ wählen wir als Grundmenge $\Omega =]0, 1]$.

Bemerkung 2.3

Frage: Welchen Mengen können wir Wahrscheinlichkeiten zuordnen?

In Beispiel 2.1 (a) speziell für $T = 1$ wählen wir als Grundmenge $\Omega =]0, 1]$.

Als W.maß hätten wir gern eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$, so dass gilt:

(i) $\forall A \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mathbb{P}(A) \geq 0$ (*Nicht-Negativität*)

(ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (*Normiertheit*)

(iii) $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{P}(\Omega) : A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkt
$\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ (*σ-Additivität*)

(iv) $\forall A \in \mathfrak{P}(\Omega) \; \forall t \in \Omega : A \subseteq (0, 1) \wedge A + t \subseteq (0, 1)$
$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A + t)$ (*„Symmetrie“*)

Bemerkung 2.3

Frage: Welchen Mengen können wir Wahrscheinlichkeiten zuordnen?

In Beispiel 2.1 (a) speziell für $T = 1$ wählen wir als Grundmenge $\Omega =]0, 1]$.
Als W.maß hätten wir gern eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$, so dass gilt:

(i) $\forall A \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mathbb{P}(A) \geq 0$ (*Nicht-Negativität*)

(ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (*Normiertheit*)

(iii) $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{P}(\Omega) : A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkt
$\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ (σ-*Additivität*)

(iv) $\forall A \in \mathfrak{P}(\Omega)\ \forall t \in \Omega : A \subseteq (0, 1) \wedge A + t \subseteq (0, 1)$
$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A + t)$ (*„Symmetrie“*)

Problem:

Es lässt sich (mit Hilfe des Auswahlaxioms) zeigen, dass eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (i) – (iv) nicht existiert!

Bemerkung 2.3

Frage: Welchen Mengen können wir Wahrscheinlichkeiten zuordnen?

In Beispiel 2.1 (a) speziell für $T = 1$ wählen wir als Grundmenge $\Omega =]0, 1]$.
Als W.maß hätten wir gern eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$, so dass gilt:

(i) $\forall A \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mathbb{P}(A) \geq 0$ (*Nicht-Negativität*)

(ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (*Normiertheit*)

(iii) $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{P}(\Omega)$: $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkt
$\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ (*σ-Additivität*)

(iv) $\forall A \in \mathfrak{P}(\Omega)\ \forall t \in \Omega : A \subseteq (0, 1) \wedge A + t \subseteq (0, 1)$
$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A + t)$ (*„Symmetrie“*)

Problem:

Es lässt sich (mit Hilfe des Auswahlaxioms) zeigen, dass eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (i) – (iv) nicht existiert!

Lösung:

Wir ersetzen den Def.bereich $\mathfrak{P}(\Omega)$ durch ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ und suchen eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, so dass die Eigenschaften (i) – (iv) für alle Mengen aus $\mathcal{A}$ gelten.

σ-Algebren

Definition 2.4

Sei $\Omega \neq \emptyset$. Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt *σ-Algebra* über Ω, falls gilt:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall A \in \mathcal{A} : A^c \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} : \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

σ-Algebren

Definition 2.4

Sei $\Omega \neq \emptyset$. Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt *σ-Algebra* über Ω, falls gilt:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall A \in \mathcal{A} : A^c \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} : \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

Bemerkung 2.5

Jede σ-Algebra ist abg. unter den Operationen ^{c}, $\cup$, $\cap$, $\setminus$, Δ, $\bigcup_{n=1}^{\infty}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty}$.

$\boldsymbol{\sigma}$-Algebren

Definition 2.4

Sei $\Omega \neq \emptyset$. Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ heißt *σ-Algebra* über Ω, falls gilt:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall A \in \mathcal{A} : A^c \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} : \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$

Bemerkung 2.5

Jede σ-Algebra ist abg. unter den Operationen ^{c}, $\cup$, $\cap$, $\setminus$, Δ, $\bigcup_{n=1}^{\infty}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty}$.

Bemerkung 2.6

σ-Algebren werden i. d. R. angegeben, indem man ein System $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ vorgibt und dann die kleinste σ-Algebra über Ω betrachtet, die $\mathcal{E}$ enthält; diese σ-Algebra wird mit $\sigma(\mathcal{E})$ bzw. als die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra bezeichnet.

Definition 2.7

Sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß* auf $\mathcal{A}$, falls gilt:

(i) $\forall A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A) \geq 0$ (*Nicht-Negativität*)

(ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (*Normiertheit*)

(iii) $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$: $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkt $\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$ (*σ-Additivität*)

Wahrscheinlichkeitsmaße

Definition 2.7

Sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß* auf $\mathcal{A}$, falls gilt:

(i) $\forall A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A) \geq 0$ (*Nicht-Negativität*)

(ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (*Normiertheit*)

(iii) $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} : A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkt
$\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$ (σ-*Additivität*)

Bemerkung 2.8

Sei $\Omega \neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω und $\mathbb{P}$ ein W.maß auf $\mathcal{A}$. Satz 1.6 (Rechenregeln für W.maße) und Lemma 1.8 (Charakterisierung der σ-Additivität) gelten entsprechend, sofern man überall nur Mengen aus $\mathcal{A}$ zulässt.

Bemerkung 2.9

Wahrscheinlichkeitsmaße

Definition 2.7

Sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω. Eine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß* auf $\mathcal{A}$, falls gilt:

(i) $\forall A \in \mathcal{A} : \mathbb{P}(A) \geq 0$ (*Nicht-Negativität*)

(ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (*Normiertheit*)

(iii) $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} : A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkt
$\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$ (σ*-Additivität*)

Bemerkung 2.8

Bemerkung 2.9

W.maße werden i. d. R. dadurch konstruiert, dass man ihre Werte auf einem (geeigneten) Erzeuger $\mathcal{E}$ von $\mathcal{A}$ vorschreibt und sich überlegt, dass genau eine Fortsetzung zu einem W.maß auf $\mathcal{A}$ existiert.

Definition 2.10 (Kolmogorov 1933)

Ein *W.raum* ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, wobei $\Omega \neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ σ-Algebra über Ω und $\mathbb{P}$ W.maß auf $\mathcal{A}$.

Definition 2.10 (Kolmogorov 1933)

Ein *W.raum* ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, wobei $\Omega \neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ σ-Algebra über Ω und $\mathbb{P}$ W.maß auf $\mathcal{A}$.

Wir bezeichnen die Elemente von Ω als *Ergebnisse*, die Elemente von $\mathcal{A}$ (und nur diese!) als *Ereignisse* (oder *messbare Mengen*) und die Werte von $\mathbb{P}$ als *Wahrscheinlichkeiten*.

Definition 2.10 (Kolmogorov 1933)

Ein *W.raum* ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, wobei $\Omega \neq \emptyset$, $\mathcal{A}$ σ-Algebra über Ω und $\mathbb{P}$ W.maß auf $\mathcal{A}$.

Wir bezeichnen die Elemente von Ω als *Ergebnisse*, die Elemente von $\mathcal{A}$ (und nur diese!) als *Ereignisse* (oder *messbare Mengen*) und die Werte von $\mathbb{P}$ als *Wahrscheinlichkeiten*.

Beispiele für Wahrscheinlichkeitsräume:

- **diskrete W.räume:** Ω abzählbar
  $\mathcal{A} = \sigma(\{\text{ Einpunktmengen }\}) = \mathfrak{P}(\Omega)$
  $\mathbb{P} =$ diskretes W.maß über Ω
- **stetige W.räume:** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
  $\mathcal{A} = \sigma(\{\text{ Intervalle}|_\Omega \}) =: \mathbb{B}^n|_\Omega$
  $\mathbb{P} =$ stetiges W.maß über Ω

Beispiele für W.räume I

(Diskrete W.räume)

$\Omega \neq \emptyset$ *abzählbar*

$\mathcal{A}$ = *kleinste* σ*-Algebra über* Ω*, die alle Einpunktmengen enthält* $= \mathfrak{P}(\Omega)$ (*Potenzmenge über* Ω)

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ *mit* $f(\omega) \geq 0$ *für alle* $\omega \in \Omega$ *und* $\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$
$\rightsquigarrow$ *Es exist. genau ein W.maß* $\mathbb{P}$ *auf* $\mathcal{A}$ *mit* $\mathbb{P}(\{x\}) = f(x)$ *für alle* $x \in \Omega$*, nämlich das W.maß aus Definition 1.1.*

$\mathbb{P}$ *heißt diskretes W.maß mit der (W.-)Dichte* f.

Genauer ist jedes W.maß auf $\mathcal{A}$ von dieser Gestalt. (*Übung!*)

Beispiele für W.räume II

(Stetige W.räume über $\mathbb{R}$)

$\Omega = \mathbb{R}$

$\mathcal{A}$ = *kleinste* σ*-Algebra über* $\mathbb{R}$, *die alle Intervalle enthält* $=: \mathbb{B}$ $[\neq \mathfrak{P}(\Omega)]$
(*Borel-*σ*-algebra über* $\mathbb{R}$)
Es ist nicht möglich (aber auch nicht nötig), $\mathbb{B}$ *explizit anzugeben.*

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) \geq 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *und* $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$
$\rightsquigarrow$ *Es ex. genau ein W.maß* $\mathbb{P}$ *auf* $\mathcal{A}$ *mit* $\mathbb{P}(]a,b]) = \int_{]a,b]} f(x)\,dx \;\forall\,]a,b]$.

$\mathbb{P}$ *heißt* *<u>stetiges W.maß mit der (W.-)Dichte f</u>*.

Allerdings ist nicht jedes W.maß auf $\mathcal{A}$ von dieser Gestalt. (*Übung!*)

Beispiele für W.räume II

Bemerkung 2.11

Sei $\mathbb{P}$ *ein stetiges W.maß mit der Dichte* f.

Beispiele für W.räume II

Bemerkung 2.11

Sei $\mathbb{P}$ *ein stetiges W.maß mit der Dichte* f.

(i) *Es gilt* $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 2.11

Sei $\mathbb{P}$ ein stetiges W.maß mit der Dichte f.

(i) *Es gilt $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

(ii) *Weiter gilt damit wegen der Additivität / σ-Additivität von $\mathbb{P}$ auch $\mathbb{P}(A) = 0$ für jede endliche / abzählbare Teilmenge A von $\mathbb{R}$; insbesondere kann $\mathbb{P}$ also kein diskretes W.maß sein!*

Bemerkung 2.11

Sei $\mathbb{P}$ ein stetiges W.maß mit der Dichte f.

(i) *Es gilt $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

(ii) *Weiter gilt damit wegen der Additivität / σ-Additivität von $\mathbb{P}$ auch $\mathbb{P}(A) = 0$ für jede endliche / abzählbare Teilmenge A von $\mathbb{R}$; insbesondere kann $\mathbb{P}$ also kein diskretes W.maß sein!*

(iii) *$f(x)$ lässt sich hier nicht als (Elementar-)Wahrscheinlichkeit interpretieren; es kann sogar $f(x) > 1$ gelten!*

Beispiele für W.räume II

Bemerkung 2.11

Sei $\mathbb{P}$ *ein stetiges W.maß mit der Dichte* f.

(i) *Es gilt* $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

(ii) *Weiter gilt damit wegen der Additivität / σ-Additivität von* $\mathbb{P}$ *auch* $\mathbb{P}(A) = 0$ *für jede endliche / abzählbare Teilmenge* A *von* $\mathbb{R}$*; insbesondere kann* $\mathbb{P}$ *also kein diskretes W.maß sein!*

(iii) $f(x)$ *lässt sich hier nicht als (Elementar-)Wahrscheinlichkeit interpretieren; es kann sogar* $f(x) > 1$ *gelten!*

(iv) *Man kann* f *(z. B. an endlich vielen Stellen) abändern, ohne* $\mathbb{P}$ *zu verändern. Die Dichte* f *ist also durch das W.maß* $\mathbb{P}$ *nicht (ganz) eindeutig bestimmt.*

Beispiele für W.räume II

Bemerkung 2.11

Sei $\mathbb{P}$ ein stetiges W.maß mit der Dichte f.

(i) *Es gilt $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

(ii) *Weiter gilt damit wegen der Additivität / σ-Additivität von $\mathbb{P}$ auch $\mathbb{P}(A) = 0$ für jede endliche / abzählbare Teilmenge A von $\mathbb{R}$; insbesondere kann $\mathbb{P}$ also kein diskretes W.maß sein!*

(iii) *$f(x)$ lässt sich hier nicht als (Elementar-)Wahrscheinlichkeit interpretieren; es kann sogar $f(x) > 1$ gelten!*

(iv) *Man kann f (z. B. an endlich vielen Stellen) abändern, ohne $\mathbb{P}$ zu verändern. Die Dichte f ist also durch das W.maß $\mathbb{P}$ nicht (ganz) eindeutig bestimmt.*

(v) *Es ist im Allgemeinen schwierig zu entscheiden, ob eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{B}$ liegt oder ob für eine Menge $A \in \mathbb{B}$ die W. $\mathbb{P}(A)$ durch Integration bestimmt werden kann. Da dies bei den in Anwendungen auftretenden Mengen i. d. R. der Fall ist, wollen wir dies immer stillschweigend voraussetzen:*

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x)\,f(x)\,dx}$$

Bemerkung 2.11

Sei $\mathbb{P}$ ein stetiges W.maß mit der Dichte f.

(i) *Es gilt $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

(ii) *Weiter gilt damit wegen der Additivität / σ-Additivität von $\mathbb{P}$ auch $\mathbb{P}(A) = 0$ für jede endliche / abzählbare Teilmenge A von $\mathbb{R}$; insbesondere kann $\mathbb{P}$ also kein diskretes W.maß sein!*

(iii) *$f(x)$ lässt sich hier nicht als (Elementar-)Wahrscheinlichkeit interpretieren; es kann sogar $f(x) > 1$ gelten!*

(iv) *Man kann f (z. B. an endlich vielen Stellen) abändern, ohne $\mathbb{P}$ zu verändern. Die Dichte f ist also durch das W.maß $\mathbb{P}$ nicht (ganz) eindeutig bestimmt.*

(v) *Es ist im Allgemeinen schwierig zu entscheiden, ob eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{B}$ liegt oder ob für eine Menge $A \in \mathbb{B}$ die W. $\mathbb{P}(A)$ durch Integration bestimmt werden kann. Da dies bei den in Anwendungen auftretenden Mengen i. d. R. der Fall ist, wollen wir dies immer stillschweigend voraussetzen:*

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A(x)\, f(x)\,dx}$$

(vi) *Man kann auch stetige W.maße über Teilmengen $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ einführen.*

Beispiele für W.räume II (Beispiel 2.12)

Beispiele für W.räume II (Beispiel 2.12)

Bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ist es gelegentlich nützlich, zuerst die Rechenregeln für W.maße anzuwenden und anschließend die Wahrscheinlichkeiten der verbleibenden (einfacheren) Mengen durch Integration zu bestimmen:

Wir betrachten Beispiel 2.1 (b). Mit welcher W. fährt das erste Auto innerhalb der ersten Stunde oder nach der vierten Stunde vorbei?

Beispiele für W.räume II (Beispiel 2.12)

Bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten ist es gelegentlich nützlich, zuerst die Rechenregeln für W.maße anzuwenden und anschließend die Wahrscheinlichkeiten der verbleibenden (einfacheren) Mengen durch Integration zu bestimmen:

Wir betrachten Beispiel 2.1 (b). Mit welcher W. fährt das erste Auto innerhalb der ersten Stunde oder nach der vierten Stunde vorbei?

Lösung:
Wir wählen $\Omega := \mathbb{R}$, $\mathcal{A} := \mathbb{B}$, $\mathbb{P} :=$ stetiges W.maß über $\mathbb{R}$ mit der Dichte $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ und $A := (0,1) \cup (4,\infty)$. Damit ergibt sich wegen $A = (0,\infty) \setminus [1,4]$

$$\mathbb{P}(A) \underset{\text{Subtraktivität}}{=} \mathbb{P}((0,\infty)) - \mathbb{P}([1,4]) = 1 - \int_1^4 \lambda e^{-\lambda x}\, dx = 1 - e^{-\lambda} + e^{-4\lambda}\,.$$

(Alternative: $\Omega := (0,\infty)$, $\mathcal{A} := \mathbb{B}|_\Omega$, $\mathbb{P} :=$ stetiges W.maß über $(0,\infty)$ mit der Dichte $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.)

Beispiele für W.räume III

(Stetige W.räume über $\mathbb{R}^n$)

$\Omega = \mathbb{R}^n$

$\mathcal{A}$ = *kleinste* σ*-Algebra über* $\mathbb{R}^n$*, die alle n-dimensionalen Intervalle* $]a, b] =]a_1, b_1] \times \cdots \times]a_n, b_n]$ *enthält* $=: \mathbb{B}^n$ (*Borel-*σ*-algebra über* $\mathbb{R}^n$)

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *mit* $f(x) \geq 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$ *und* $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = 1$
$\rightsquigarrow$ *Es ex. genau ein W.maß* $\mathbb{P}$ *auf* $\mathcal{A}$ *mit* $\mathbb{P}(]a, b]) = \int_{]a,b]} f(x)\, dx \ \forall\,]a, b]$.

$\mathbb{P}$ *heißt* <u>*stetiges W.maß mit der (W.-)Dichte f*</u>.

Erläuterung:
Dabei wollen wir eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ als „integrierbar“ bezeichnen, wenn für jedes n-dim. Intervall $]a, b]$ das iterierte Riemann-Integral exist. und jede Integrationsreihenfolge dasselbe Ergebnis liefert, z. B. für $n = 2$:

$$\int_{]a,b]} f(x)\, dx = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2)\, dx_2\, dx_1 = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \,.$$

Beispiele für W.räume III

Beispiel 2.13 (Stetige Gleichverteilung)

Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine Menge mit* $\operatorname{vol}(B) := \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_B(x)\,dx \in (0,\infty)$

(d. h. insbesondere muss $\mathbf{1}_B$ *integrierbar sein).*

Beispiele für W.räume III

Beispiel 2.13 (Stetige Gleichverteilung)

Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine Menge mit* $\operatorname{vol}(B) := \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_B(x)\,dx \in (0,\infty)$

(d. h. insbesondere muss $\mathbf{1}_B$ *integrierbar sein).*

Dann heißt das stetige W.maß $\mathbb{P}$ *auf* $\mathbb{B}^n$ *mit der Dichte* $f(x) := \frac{1}{\operatorname{vol}(B)}\,\mathbf{1}_B(x)$

(stetige) Gleichverteilung auf B*, kurz* $\mathcal{U}_B$*,*

Beispiele für W.räume III

Beispiel 2.13 (Stetige Gleichverteilung)

Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine Menge mit* $\operatorname{vol}(B) := \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_B(x)\,dx \in (0,\infty)$

(d. h. insbesondere muss $\mathbf{1}_B$ *integrierbar sein).*

Dann heißt das stetige W.maß $\mathbb{P}$ *auf* $\mathbb{B}^n$ *mit der Dichte* $f(x) := \frac{1}{\operatorname{vol}(B)}\,\mathbf{1}_B(x)$

(stetige) Gleichverteilung auf B*, kurz* $\mathcal{U}_B$*,*

und es gilt

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\operatorname{vol}(A \cap B)}{\operatorname{vol}(B)}$$

für jedes n-dimensionale Intervall $A = \,]a,b]$

(bzw. allgemeiner sogar für jede Menge $A \in \mathbb{B}^n$*, so dass* $\operatorname{vol}(A \cap B)$ *definiert ist).*

Beispiele für W.räume III

Beispiel 2.13 (Stetige Gleichverteilung)

Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine Menge mit* $\operatorname{vol}(B) := \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_B(x)\,dx \in (0,\infty)$

(d. h. insbesondere muss $\mathbf{1}_B$ *integrierbar sein).*

Dann heißt das stetige W.maß $\mathbb{P}$ *auf* $\mathbb{B}^n$ *mit der Dichte* $f(x) := \frac{1}{\operatorname{vol}(B)}\mathbf{1}_B(x)$

(stetige) Gleichverteilung auf B*, kurz* $\mathcal{U}_B$*,*

und es gilt

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\operatorname{vol}(A \cap B)}{\operatorname{vol}(B)}$$

für jedes n-dimensionale Intervall $A = \,]a,b]$

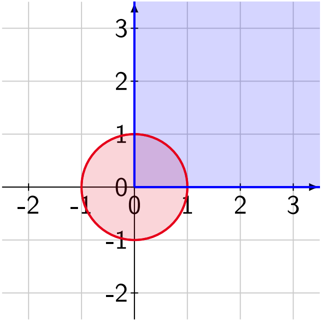
(bzw. allgemeiner sogar für jede Menge $A \in \mathbb{B}^n$*, so dass* $\operatorname{vol}(A \cap B)$ *definiert ist).*

Damit lässt sich die Bestimmung von W.en auf die Bestimmung von Volumina zurückführen.

Für $n = 1$, $B = (a,b)$ erhalten wir gerade die Gleichverteilung auf (a,b) zurück.
Für einfache geometrische Figuren ist es i. d. R. einfacher, die Volumina mit den Formeln aus der Schule als mit dem Integral zu bestimmen.

Beispiele für W.räume III (Beispiel 2.14)

Mit welcher W. liegt ein „rein zufällig" gewählter Punkt im Einheitskreis $K := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2^2 \leq 1\}$ *im 1. Quadranten (d.h. in* $A := (0,\infty)^2$*) ?*

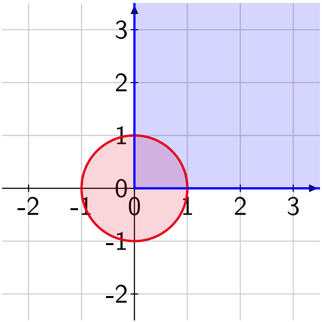


Skizze

Beispiele für W.räume III (Beispiel 2.14)

Mit welcher W. liegt ein „rein zufällig" gewählter Punkt im Einheitskreis $K := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2^2 \le 1\}$ im 1. Quadranten (d.h. in $A := (0,\infty)^2$) ?

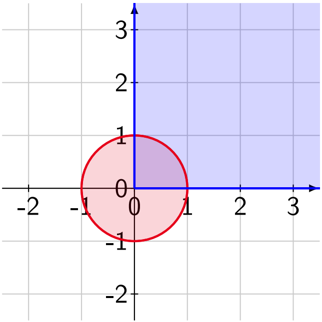
$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) := (\mathbb{R}^2, \mathbb{B}^2, \mathcal{U}_K)$ (da „rein zufällig")



Skizze

Mit welcher W. liegt ein „rein zufällig“ gewählter Punkt im Einheitskreis $K := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2^2 \leq 1\}$ im 1. Quadranten (d.h. in $A := (0,\infty)^2$) ?

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) := (\mathbb{R}^2, \mathbb{B}^2, \mathcal{U}_K)$ (da „rein zufällig“)



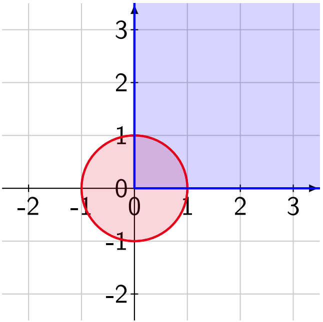
Skizze

Lösung Nr. 1:

$$\mathbb{P}(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gleichvtlg.}}}{=} \frac{\mathrm{vol}(A \cap K)}{\mathrm{vol}(K)} = \frac{\frac{1}{4}\,\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{vol}(K)} = \frac{1}{4}\,.$$

Beispiele für W.räume III (Beispiel 2.14)

Mit welcher W. liegt ein „rein zufällig" gewählter Punkt im Einheitskreis $K := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2^2 \leq 1\}$ im 1. Quadranten (d.h. in $A := (0,\infty)^2$) ?



Skizze

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) := (\mathbb{R}^2, \mathbb{B}^2, \mathcal{U}_K)$ (da „rein zufällig")

Lösung Nr. 1:

$$\mathbb{P}(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gleichvtlg.}}}{=} \frac{\mathrm{vol}(A \cap K)}{\mathrm{vol}(K)} = \frac{\frac{1}{4}\,\mathrm{vol}(K)}{\mathrm{vol}(K)} = \frac{1}{4}\,.$$

Lösung Nr. 2:

$$\mathbb{P}(A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dichte}}}{=} \int_A \frac{1}{\pi}\,\mathbf{1}_K(x)\,dx$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{iteriertes} \\ \text{Integral}}}{=} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x_1^2}} \frac{1}{\pi}\,dx_2\,dx_1 = \cdots = \frac{1}{4}\,.$$

Zusammenfassung:
Gegeben eine Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *und eine Funktion* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \Omega \quad \text{und} \quad \int_\Omega f(x)\,dx = 1$$

(wobei die Existenz des Riemann-Integrals vorauszusetzen ist)
können wir das stetige W.maß $\mathbb{P}$ *auf* $\mathbb{B}^n|_\Omega$ *mit der W.dichte* f *betrachten.*
Für die in Anwendungen auftretenden Mengen $A \subseteq \Omega$ *können wir dann die W.* $\mathbb{P}(A)$ *bestimmen, indem wir die Dichte* f *über die Menge* A *integrieren:*

$$\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)\,dx$$

Stetige W.verteilungen

Zusammenfassung:
Gegeben eine Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *und eine Funktion* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x) \geq 0 \text{ für alle } x \in \Omega \quad \text{und} \quad \int_\Omega f(x)\,dx = 1$$

(wobei die Existenz des Riemann-Integrals vorauszusetzen ist)
können wir das stetige W.maß $\mathbb{P}$ *auf* $\mathbb{B}^n|_\Omega$ *mit der W.dichte* f *betrachten.*
Für die in Anwendungen auftretenden Mengen $A \subseteq \Omega$ *können wir dann die W.* $\mathbb{P}(A)$ *bestimmen, indem wir die Dichte* f *über die Menge* A *integrieren:*

$$\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)\,dx$$

Warnungen:

- Wir verwenden die Bezeichnung „Dichte“ sowohl bei diskreten als auch bei stetigen W.maßen.
- Der Begriff „Gleichverteilung“ kann entweder ein diskretes oder ein stetiges W.maß bezeichnen.

Kapitel 1.3
Allgemeine W.räume

Beschreibung aller W.maße auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$

Satz 2.15

Ist $\mathbb{P}$ *ein W.maß auf* $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, *so ist* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) := \mathbb{P}(]-\infty, x])$ *eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) *F ist monoton wachsend.*

(ii) *F ist rechtsseitig stetig.*

(iii) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

(iv) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Umgekehrt gibt es zu jeder solchen Abbildung F (genau) ein W.maß $\mathbb{P}$ *auf* $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, *so dass* $\mathbb{P}(]-\infty, x]) = F(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt.*

Definition 2.16 (Verteilungsfunktion)

Eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (i) – (iv) in Satz 2.15 heißt *Verteilungsfunktion* auf $\mathbb{R}$.

Verteilungsfunktionen

Satz 2.15

Ist $\mathbb{P}$ *ein W.maß auf* $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$*, so ist* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit* $F(x) := \mathbb{P}(]-\infty, x])$ *eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) monoton wachsend (ii) rechtsseitig stetig (iii) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *(iv)* $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Umgekehrt gibt es zu jeder solchen Abbildung F (genau) ein W.maß $\mathbb{P}$ *auf* $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$*, so dass* $\mathbb{P}(]-\infty, x]) = F(x)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt.*

Definition 2.16 (Verteilungsfunktion)

Eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (i) – (iv) in Satz 2.15 heißt *Verteilungsfunktion* auf $\mathbb{R}$.

Genauer heißt bei gegebenem W.maß $\mathbb{P}$ auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \mathbb{P}(]-\infty, x])$ für alle $x \in \mathbb{R}$ die Verteilungsfunktion zum W.maß $\mathbb{P}$ (oder Verteilungsfunktion von $\mathbb{P}$) und umgekehrt bei gegebener Verteilungsfunktion F auf $\mathbb{R}$ das W.maß $\mathbb{P}$ auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ mit $\mathbb{P}(]a, b]) = F(b) - F(a)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ das W.maß zur Verteilungsfunktion F.

Beschreibung aller W.maße auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$

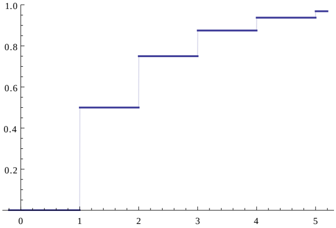
Bemerkungen 2.17

(i) *Nach Satz 2.15 besteht eine 1:1-Beziehung zwischen W.maßen auf* $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ *und Verteilungsfunktionen auf* $\mathbb{R}$.

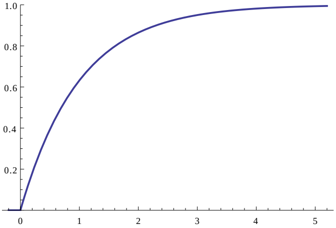
(ii) *Die diskreten W.maße entsprechen den „Sprung-Verteilungsfunktionen".*
(Bemerkung: Die Menge der Sprungstellen ist abzählbar, kann aber dicht in $\mathbb{R}$ *liegen.)*

(iii) *Die stetigen W.maße mit (stückweise) stetigen Dichten entsprechen den stetigen und (stückweise) stetig differenzierbaren Verteilungsfunktionen.*

(iv) *Es gibt weitere Typen, z. B. „Mischtypen" oder die Cantor-Verteilung.*

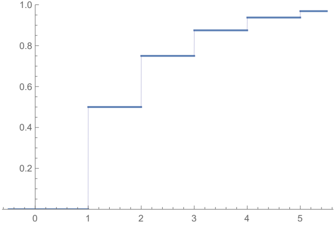


geometrische Verteilung ($p = 0.5$)

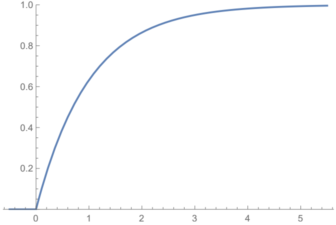


Exponentialverteilung ($\lambda = 1$)

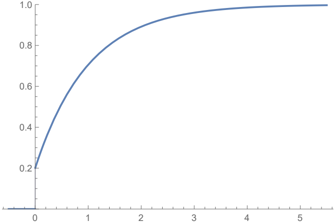
Beschreibung aller W.maße auf $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$



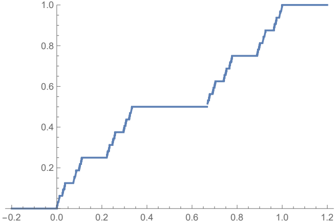
Verteilungsfunktion der $\mathcal{G}(\frac{1}{2})$-Vtlg.



Verteilungsfunktion der $\mathcal{E}(1)$-Vtlg.

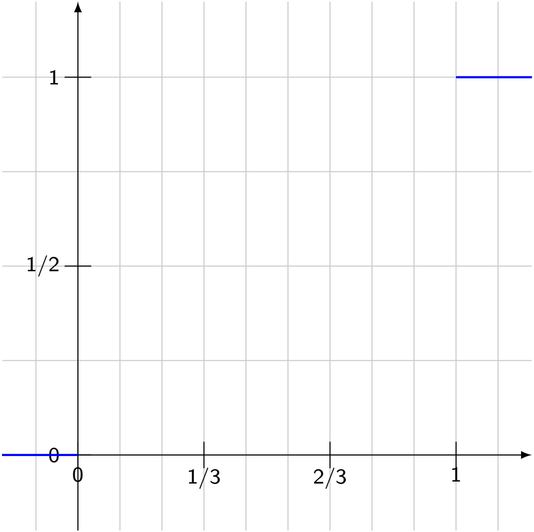


Verteilungsfunktion einer „Mischung“

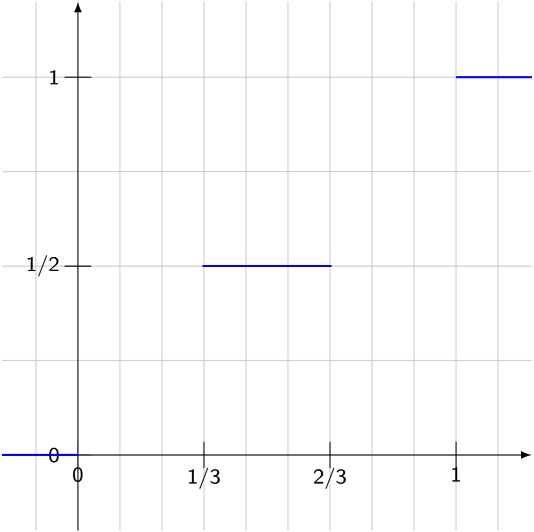


Verteilungsfunktion der Cantor-Vtlg.

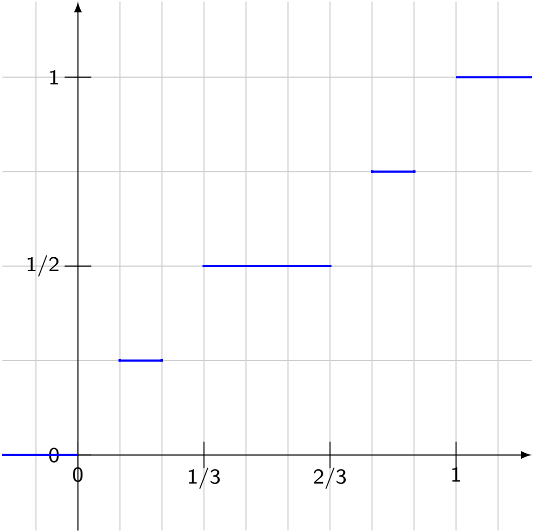
Konstruktion der Cantor-Funktion



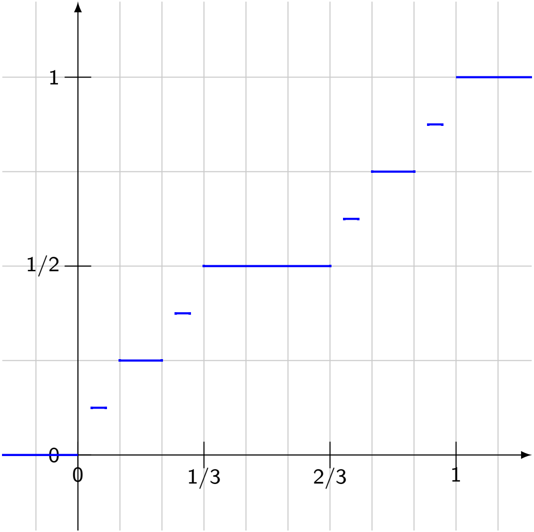
Konstruktion der Cantor-Funktion



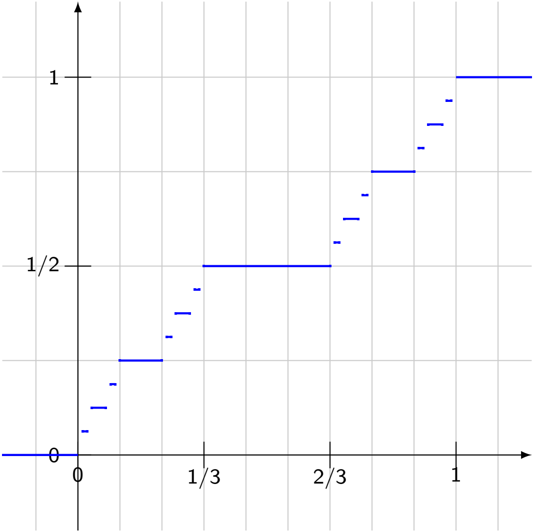
Konstruktion der Cantor-Funktion



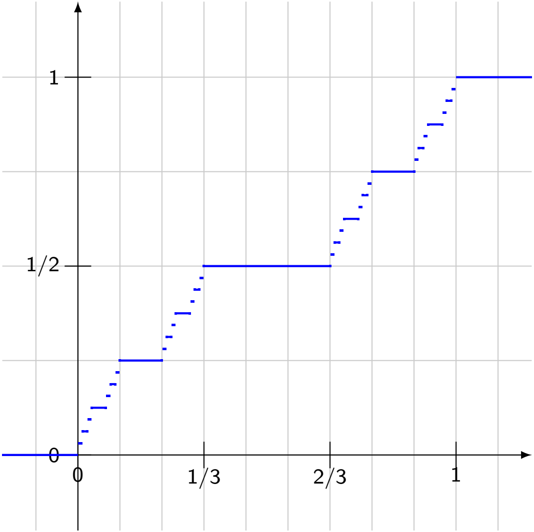
Konstruktion der Cantor-Funktion



Konstruktion der Cantor-Funktion



Konstruktion der Cantor-Funktion



Konstruktion der Cantor-Funktion