

Übungen zur Stochastik für Informatik

Blatt 4 (Zufallsgrößen auf allgemeinen W.räumen / Bedingte W.en)

WICHTIG: Drucken Sie Tabelle 4 aus dem Skript aus und bringen Sie sie zur Übung mit!

Vorübung 10 (Stetige W.maße über \mathbb{R}^2 : keine Abgabe)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = Cxy \mathbf{1}_S(x, y)$, wobei $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 1\}$ und $C > 0$ so gewählt sei, dass f eine W.dichte ist. Es sei (X, Y) eine zweidimensionale Zufallsgröße mit der Dichte f und $R := [0, 1] \times [0, \frac{1}{2}]$.

- (a) Bestimmen Sie den Wert von C . (*Skizze von S !*)
- (b) Berechnen Sie $\mathbb{P}((X, Y) \in R)$. (*Skizze von R !*)
- (c) Bestimmen Sie die Verteilungen von X und von Y .

Vorübung 11 (Normalverteilung : keine Abgabe)

Es seien $\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ ($x \in \mathbb{R}$) die Riemann-Dichte und $\Phi(x) := \int_{-\infty}^x \varphi(y) dy$ ($x \in \mathbb{R}$) die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Die Funktion Φ lässt sich leider nicht elementar angeben. Allerdings lassen sich ihre Werte näherungsweise mit Hilfe von Tabellen (vgl. Tabelle 4 im Skript) oder mit Hilfe des Computers bestimmen.

- (a) Zeigen Sie: Es gilt $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\Phi(\frac{1}{2}) = 1$.
- (b) Es sei $X \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilt. Zeigen Sie, dass $\frac{X-\mu}{\sigma}$ standardnormalverteilt ist.
- (c) Es sei $X \mathcal{N}(10, 10)$ -verteilt. Berechnen Sie $\mathbb{P}(X \leq 5)$.
- (d) Es sei $X \mathcal{N}(5, 1)$ -verteilt. Berechnen Sie $\mathbb{P}(3 \leq X \leq 6)$.
- (e) Es sei $X \mathcal{N}(0, 2)$ -verteilt. Berechnen Sie $\mathbb{P}(e^X \geq \frac{1}{2})$, wobei e^x die natürliche Exponentialfunktion bezeichnet.

Vorübung 12 (Weibull-Verteilung : keine Abgabe)

Sei X exponentialverteilt zum Parameter λ und $Y := X^{1/\alpha}$, wobei $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}_Y = \mathcal{W}(\alpha, \lambda^{1/\alpha})$, wobei $\mathcal{W}(\alpha, \beta)$ das stetige W.maß auf \mathbb{R} mit der Dichte $f_{\alpha, \beta}(x) = \alpha\beta(\beta x)^{\alpha-1} e^{-(\beta x)^\alpha} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x)$ bezeichnet, die sog. *Weibull-Verteilung* mit den Parametern $\alpha > 0$ und $\beta > 0$.

Die folgenden Übungen können ab der 6. Vorlesung (am 28.11.2019) bearbeitet werden.

Übung 12 (Pareto-Verteilung : 2 + 2 + 1 + 3 + 3 = 11 Punkte)

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} auf \mathbb{R} heißt *Pareto-Verteilung* (mit den Parametern α und s), wenn es eine Dichte f der Form

$$f(x) = C x^{-(1+\alpha)} \mathbf{1}_{(s, \infty)}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

mit $\alpha > 0$, $s > 0$ und $C > 0$ besitzt.

- (a) Zeigen Sie, dass man (bei gegebenem $\alpha > 0$ und $s > 0$) $C := \alpha s^\alpha$ wählen muss, um eine W.dichte zu erhalten.
- (b) Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion F von \mathbb{P} durch

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq s \\ 1 - (s/x)^\alpha & x > s \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R})$$

gegeben ist.

Im Folgenden sei X eine reellwertige Zufallsgröße, die pareto-verteilt mit den Parametern $\alpha = 1$ und $s = 1$ ist.

- (c) Skizzieren Sie die Dichte(funktion) f_X von X sowie die Verteilungsfunktion F_X von X .
- (d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 2 \text{ oder } 5 \leq X \leq 8)$ einmal mit Hilfe der Dichte(funktion) und einmal mit Hilfe der Verteilungsfunktion.
- (e) Zeigen Sie, dass die Zufallsgröße $Z := X^4$ wieder pareto-verteilt ist, und bestimmen Sie die zugehörigen Parameter.

Die Pareto-Verteilung wird z. B. zur Modellierung von Einkommensverteilungen verwendet.

Die folgenden Übungen können ab der 7. Vorlesung (am 05.12.2019) bearbeitet werden.

Übung 13 (Nachrichtenübertragung : 4 Punkte)

Eine mit Nullen und Einsen kodierte Nachricht wird übertragen. Im Mittel ist das Verhältnis von zu übertragenden Nullen zu zu übertragenden Einsen 6 : 7. Leider ist das Übertragungsverfahren fehleranfällig: Es wird mit W. $1/4$ eine gesendete Null als Eins empfangen und umgekehrt mit W. $1/5$ eine gesendete Eins als Null empfangen. – Sie empfangen eine Eins. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich eine Eins gesendet wurde.

Übung 14 (Wochentage : jeweils 2 = 10 Punkte)

In einem Betrieb werden technische Geräte zusammengesetzt:

montags: 15% der Geräte, davon 4% fehlerhaft
dienstags: 25% der Geräte, davon 1% fehlerhaft
mittwochs: 20% der Geräte, davon 1% fehlerhaft
donnerstags: 25% der Geräte, davon 2% fehlerhaft
freitags: 15% der Geräte, davon 3% fehlerhaft

- (a) Beschreiben Sie die Situation (ähnlich wie der Vorlesung) durch geeignete Ereignisse sowie geeignete (unbedingte bzw. bedingte) Wahrscheinlichkeiten.
- (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein (zufällig ausgewähltes) Gerät fehlerhaft?
- (c) Ein Kunde schickt ein Gerät zurück, weil es fehlerhaft ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich dabei um ein „Montagsgerät“?
- (d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein einwandfreies Gerät donnerstags oder freitags gebaut worden?
- (e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Gerät, das donnerstags oder freitags gebaut worden ist, einwandfrei?

Geben Sie in Teil (b) – (e) jeweils einen formalen Ausdruck für die (unbedingte bzw. bedingte) Wahrscheinlichkeit an, die Sie berechnen!

Abgabe: 12.12.2019 um 13:10 vor der Vorlesung