Universität Rostock
Prof. Dr. H. Kösters

Wintersemester 2019/2020

Übungen zur Stochastik für Informatik

Blatt 6 (Erwartungswert und Varianz / Approximationen)

Vorübung 15 (Erwartungswert und Varianz : keine Abgabe / 0 Punkte)

(a) Die Zufallsgröße X besitze die Riemann-Dichte $f(x) = \alpha x^{-(1+\alpha)} \mathbf{1}_{(1,\infty)}(x)$, wobei $\alpha > 2$. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von X (falls existent).

(b) Gegeben sei die Zufallsgröße $Y := e^{-Z}$, wobei $Z \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von Y (falls existent).

Vorübung 16 (Standardisierung : keine Abgabe / 0 Punkte)
Beweisen Sie Bemerkung 4.24 im Skript: Ist X eine Zufallsgröße mit $\mathbb{E}X^2 < \infty$ und $\mathbb{V}\mathrm{ar}\, X > 0$, so besitzt die Zufallsgröße $X^* := (X - \mathbb{E}X)/\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}$ Erwartungswert 0 und Varianz 1. X^* heißt *Standardisierung* von X.

Vorübung 17 (Wie gehen Sie vor? : keine Abgabe / 0 Punkte)
Im Folgenden werden Ihnen einige Szenarien präsentiert, wie sie in Übungs- oder Klausuraufgaben in der Stochastik nicht unüblich sind. Anders als sonst besteht Ihre Aufgabe jedoch in diesem Fall darin, Ihr Vorgehen unter Zuhilfenahme von prosaischen Charakterisierungen und Formeln zu beschreiben. Idealerweise systematisieren Sie Ihre Ausarbeitungen derart, dass sie sich gut für die Vorbereitung auf die und den Rückgriff während der Klausur eignen. Beachten Sie jedoch, dass die hier beschriebenen Situationen natürlich nur einen Teil dessen widerspiegeln, was in Vorlesung und Übung behandelt wurde bzw. noch zu behandeln ist.

(a) Es ist ein einfaches Zufallsexperiment gegeben, bei dem die Anzahl möglicher Versuchsausgänge endlich ist. Sie sollen dieses Experiment mit Hilfe eines geeigneten W.Raumes beschreiben. Wie gehen Sie vor?

(b) Passend zum Experiment aus Teil (a) wird ein Ereignis A vorgegeben, das Sie zunächst formal beschreiben und dessen W. Sie anschließend berechnen sollen. Wie gehen Sie vor?

(c) Eine Zufallsgröße X modelliere den Ausgang eines im Vorfeld beschriebenen Zufallsexperiments mit der Menge möglicher Versuchsausgänge $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$. Sie sollen die Verteilung von X bestimmen und sowohl die W.Dichte f_X als auch die Verteilungsfunktion F_X skizzieren. Wie gehen Sie vor?

(d) Es seien X die Zufallsgröße aus Aufgabenteil (c) und $n = 10$. Gegeben sind die Ereignisse $\{X \in (5, 8]\}$ sowie $\{(X - 2)^2 \geq 8\}$, deren W. Sie bestimmen wollen. Wie gehen Sie vor? Wie würden Sie vorgehen, wenn Sie demonstrieren sollen, wie Sie diese W. mit Hilfe von F_X aus (c) bestimmen?

(e) Für eine zusammengesetzte Zufallsgröße (X, Y) mit Werten in der Menge $\{x_1, \ldots, x_n\} \times \{y_1, \ldots, y_m\}$ ist die gemeinsame Verteilung $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ angegeben. Sie sollen die Verteilungen $\mathbb{P}_X$ und $\mathbb{P}_Y$ bestimmen. Wie gehen Sie vor?

(f) Sie haben eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben, wobei $D \subset \mathbb{R}$. Sie sollen zeigen, dass es sich dabei um die W.Dichte einer W.Verteilung handelt. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen nach vorherigem Eingehen auf die beiden unterschiedlichen Typen von W.Dichten.

(g) Sei $\mathbb{P}$ das stetige W.Maß über $\mathbb{R}$ zur W.Dichte f. Gegeben sei das Ereignis $A = (-1, 0] \cap [1, 2)$, dessen W. Sie bestimmen wollen. Wie gehen Sie vor?

(h) Sie haben die stetige W.Dichte $f_{(X,Y)}$ einer zusammengesetzten Zufallsgröße (X, Y) gegeben und sollen untersuchen, ob X und Y stochastisch unabhängig sind. Wie gehen Sie vor?

(i) Sei X eine Zufallsgröße mit stetiger Verteilung $\mathbb{P}_X$. Man gibt Ihnen die Verteilungsfunktion F_X vor und trägt Ihnen auf, die W.Dichten f_X sowie $f_{\exp(X)}$ zu bestimmen. Wie gehen Sie vor?

(j) Zwei Ereignisse A und B sollen auf stochastische Unabhängigkeit untersucht werden. Wie gehen Sie vor?

(k) Sie führen das Zufallsexperiment aus Aufgabenteil (a) zweimal durch und wollen die W. dafür berechnen, dass bei beiden Durchführungen dasselbe (Teil-)Ergebnis eintritt. Wie gehen Sie vor?

(l) Seien X und Y Zufallsgrößen zur diskreten Verteilung $\mathbb{P}_X$ bzw. zur stetigen Verteilung $\mathbb{P}_Y$, für die die entsprechenden Erwartungswerte endlich seien. Man fragt Sie jeweils nach der Berechnung von Erwartungswert und Varianz. Wie gehen Sie vor?

Lesen Sie zuerst den Rest von Kapitel 4, den wir in der Vorlesung noch nicht gemacht haben. Anschließend können Sie die folgenden Übungen bearbeiten:

Übung 18 (Varianz : jeweils 1 = 4 Punkte)
Bestimmen Sie die Varianz der folgenden Zufallsgrößen:

(a) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (Poisson-Verteilung, $\lambda > 0$)

(b) $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ (Exponentialverteilung, $\lambda > 0$)

(c) $X \sim \mathcal{U}_{\{1,\dots,n\}}$ (diskrete Gleichverteilung, $n \in \mathbb{N}$)

(d) $X \sim \mathcal{U}_{(a,b)}$ (stetige Gleichverteilung, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$)

Wichtiger Hinweis: Verwenden Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 17 (vgl. Lösungen zu Blatt 5).

Übung 19 (Glücksspiel I : 3 + 3 + 3 = 9 Punkte)
In einer Urne befinden sich sechs Kugeln, auf denen die Zahlen 1, 1, 2, 2, 3, 3 stehen. Man darf zweimal ohne Zurücklegen ziehen. Wenn man zweimal die gleiche Zahl i zieht, erhält man eine Auszahlung von i €, ansonsten nichts.

(a) Beschreiben Sie die Situation durch einen geeigneten W.raum sowie eine formale Zufallsgröße X, die die Auszahlung in € angibt.

(b) Bestimmen Sie die Verteilung, den Erwartungswert sowie die Varianz von X. Wie hoch ist der faire Einsatz in €?

(c) Die Zufallsgrößen Y und Z mögen die gezogene Zahl in der ersten bzw. zweiten Ziehung angeben. Geben Sie die *gemeinsame* Verteilung von Y und Z sowie die dazugehörigen Randverteilungen an. Untersuchen Sie Y und Z anschließend auf Unkorreliertheit und auf Unabhängigkeit. Sind die Ergebnisse plausibel?

Die folgenden Übungen können ab der 11. Vorlesung am 16. Januar 2020 bearbeitet werden.

Übung 20 (Hotel : 3 + 3 + 3 = 9 Punkte)
Ein Hotel hat 120 Zimmer. Erfahrungsgemäß wird eine Reservierung mit W. 1/10 storniert. Wir wollen vereinfachend annehmen, dass Stornierungen einzeln und unabhängig voneinander erfolgen.

(a) Es seien alle Zimmer reserviert, und es sei Z die (zufällige) Anzahl der belegten Zimmer (die nicht vor Anreise storniert werden). Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Z < 115)$ näherungsweise.

(b) Um die Auslastung des Hotels zu erhöhen, sollen in Zukunft auch mehr als 120 Zimmerreservierungen vorgenommen werden dürfen. Allerdings soll die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Hotel überbelegt ist (und abgewiesene Gäste unzufrieden sind), maximal 1 % betragen. Bestimmen Sie die maximal mögliche Anzahl an Reservierungen näherungsweise.

(c) Während des Stadtfestes wird eine Reservierung erfahrungsgemäß nur mit W. $1/40$ storniert. Bestimmen Sie in der Situation von Teil (a) die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Z < 115)$ näherungsweise.

Verwenden Sie jeweils eine *geeignete* Approximation.

Übung 21 (Glücksspiel II : 4 Punkte)
Sie nehmen 100mal an dem Glücksspiel aus Übung 19 teil. Geben Sie ein möglichst kleines Intervall an, in dem Ihre Gesamtauszahlung mit einer W. von mindestens 95% enthalten ist. Verwenden Sie dazu eine geeignete Approximation.

Abgabe: 23.01.2020 um 13:10 vor der Vorlesung