Universität Rostock Wintersemester 2019/2020
Prof. Dr. H. Kösters

Übungen zur Stochastik für Informatik

Blatt 4 (Zufallsgrößen auf allgemeinen W.räumen / Bedingte W.en)

WICHTIG: Drucken Sie Tabelle 4 aus dem Skript aus und bringen Sie sie zur Übung mit!

Vorübung 10 (Stetige W.maße über $\mathbb{R}^2$: keine Abgabe)
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = Cxy\,\mathbf{1}_S(x,y)$, wobei $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 1\}$ und $C > 0$ so gewählt sei, dass f eine W.dichte ist. Es sei (X,Y) eine zweidimensionale Zufallsgröße mit der Dichte f und $R := [0,1] \times [0, \frac{1}{2}]$.

(a) Bestimmen Sie den Wert von C. (*Skizze von S!*)

(b) Berechnen Sie $\mathbb{P}((X,Y) \in R)$. (*Skizze von R!*)

(c) Bestimmen Sie die Verteilungen von X und von Y.

Vorübung 11 (Normalverteilung : keine Abgabe)
Es seien $\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ $(x \in \mathbb{R})$ die Riemann-Dichte und $\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\,dy$ $(x \in \mathbb{R})$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Die Funktion Φ lässt sich leider nicht elementar angeben. Allerdings lassen sich ihre Werte näherungsweise mit Hilfe von Tabellen (vgl. Tabelle 4 im Skript) oder mit Hilfe des Computers bestimmen.

(a) Zeigen Sie: Es gilt $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.

(b) Es sei X $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt. Zeigen Sie, dass $\frac{X-\mu}{\sigma}$ standardnormalverteilt ist.

(c) Es sei X $\mathcal{N}(10, 10)$-verteilt. Berechnen Sie $\mathbb{P}(X \leq 5)$.

(d) Es sei X $\mathcal{N}(5, 1)$-verteilt. Berechnen Sie $\mathbb{P}(3 \leq X \leq 6)$.

(e) Es sei X $\mathcal{N}(0, 2)$-verteilt. Berechnen Sie $\mathbb{P}(e^X \geq \frac{1}{2})$, wobei e^x die natürliche Exponentialfunktion bezeichnet.

Vorübung 12 (Weibull-Verteilung : keine Abgabe)
Sei X exponentialverteilt zum Parameter λ und $Y := X^{1/\alpha}$, wobei $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}_Y = \mathcal{W}(\alpha, \lambda^{1/\alpha})$, wobei $\mathcal{W}(\alpha, \beta)$ das stetige W.maß auf $\mathbb{R}$ mit der Dichte $f_{\alpha,\beta}(x) = \alpha\beta(\beta x)^{\alpha-1} e^{-(\beta x)^\alpha} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ bezeichnet, die sog. *Weibull-Verteilung* mit den Parametern $\alpha > 0$ und $\beta > 0$.

Lösung zu Vorübung 12:
Da X m. W. 1 Werte in der Menge $(0,\infty)$ annimmt, nimmt Y m. W. 1 Werte in der Menge $(0,\infty)$ an. Auf dem Intervall $(0,\infty)$ besitzt Y die Verteilungsfunktion

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X^{1/\alpha} \leq y) = \mathbb{P}(X \leq y^\alpha) = F_X(y^\alpha) \underset{\text{Vorlesung}}{=} 1 - e^{-\lambda y^\alpha} \quad (y \in (0,\infty))$$

(da $x \mapsto x^{1/\alpha}$ auf $(0,\infty)$ streng monoton wachsend ist) und damit die Riemann-Dichte

$$f_Y(y) = F_Y'(y) \underset{\text{Kettenregel}}{=} e^{-\lambda y^\alpha}\, \alpha\lambda y^{\alpha-1} = (\alpha\lambda^{1/\alpha})(\lambda^{1/\alpha} y)^{\alpha-1} e^{-(\lambda^{1/\alpha} y)^\alpha} \quad (y \in (0,\infty))$$

(da F_Y auf $(0,\infty)$ stetig differenzierbar ist). Im letzten Schritt haben wir die Dichte so umgeschrieben, dass man die Weibull-Form erkennt. $\rightsquigarrow$ Y ist $\mathcal{W}(\alpha, \lambda^{1/\alpha})$-verteilt.

Die folgenden Übungen können ab der 6. Vorlesung (am 28.11.2019) bearbeitet werden.

Übung 12 (Pareto-Verteilung : 2 + 2 + 1 + 3 + 3 = 11 Punkte)
Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\mathbb{R}$ heißt *Pareto-Verteilung* (*mit den Parametern α und s*), wenn es eine Dichte f der Form

$$f(x) = C\, x^{-(1+\alpha)}\, \mathbf{1}_{(s,\infty)}(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

mit $\alpha > 0$, $s > 0$ und $C > 0$ besitzt.

(a) Zeigen Sie, dass man (bei gegebenem $\alpha > 0$ und $s > 0$) $C := \alpha s^\alpha$ wählen muss, um eine W.dichte zu erhalten.

(b) Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion F von $\mathbb{P}$ durch

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le s \\ 1 - (s/x)^\alpha & x > s \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

gegeben ist.

Im Folgenden sei X eine reellwertige Zufallsgröße, die pareto-verteilt mit den Parametern $\alpha = 1$ und $s = 1$ ist.

(c) Skizzieren Sie die Dichte(funktion) f_X von X sowie die Verteilungsfunktion F_X von X.

(d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(0 \le X \le 2 \text{ oder } 5 \le X \le 8)$ einmal mit Hilfe der Dichte(funktion) und einmal mit Hilfe der Verteilungsfunktion.

(e) Zeigen Sie, dass die Zufallsgröße $Z := X^4$ wieder pareto-verteilt ist, und bestimmen Sie die zugehörigen Parameter.

Die Pareto-Verteilung wird z. B. zur Modellierung von Einkommensverteilungen verwendet.

Die folgenden Übungen können ab der 7. Vorlesung (am 05.12.2019) bearbeitet werden.

Übung 13 (Nachrichtenübertragung : 4 Punkte)
Eine mit Nullen und Einsen kodierte Nachricht wird übertragen. Im Mittel ist das Verhältnis von zu übertragenden Nullen zu zu übertragenden Einsen 6 : 7. Leider ist das Übertragungsverfahren fehleranfällig: Es wird mit W. 1/4 eine gesendete Null als Eins empfangen und umgekehrt mit W. 1/5 eine gesendete Eins als Null empfangen. – Sie empfangen eine Eins. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich eine Eins gesendet wurde.

Übung 14 (Wochentage : jeweils 2 = 10 Punkte)
In einem Betrieb werden technische Geräte zusammengesetzt:

montags:	15% der Geräte, davon 4% fehlerhaft
dienstags:	25% der Geräte, davon 1% fehlerhaft
mittwochs:	20% der Geräte, davon 1% fehlerhaft
donnerstags:	25% der Geräte, davon 2% fehlerhaft
freitags:	15% der Geräte, davon 3% fehlerhaft

(a) Beschreiben Sie die Situation (ähnlich wie der Vorlesung) durch geeignete Ereignisse sowie geeignete (unbedingte bzw. bedingte) Wahrscheinlichkeiten.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein (zufällig ausgewähltes) Gerät fehlerhaft?

(c) Ein Kunde schickt ein Gerät zurück, weil es fehlerhaft ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich dabei um ein „Montagsgerät“?

(d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein einwandfreies Gerät donnerstags oder freitags gebaut worden?

(e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Gerät, das donnerstags oder freitags gebaut worden ist, einwandfrei?

Geben Sie in Teil (b) – (e) jeweils einen formalen Ausdruck für die (unbedingte bzw. bedingte) Wahrscheinlichkeit an, die Sie berechnen!

Abgabe: 12.12.2019 um 13:10 vor der Vorlesung