Stochastik für Informatiker

– 3. Vorlesung –

Prof. Dr. Holger Kösters

Institut für Mathematik, MNF, Universität Rostock

7. November 2019

Kapitel 1.1
Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Mit diskreten W.räumen lassen sich einfache zufallsabhängige Vorgänge beschreiben, bei denen die Menge der Versuchsausgänge *abzählbar* (d. h. endlich oder abzählbar-unendlich) ist.

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Mit diskreten W.räumen lassen sich einfache zufallsabhängige Vorgänge beschreiben, bei denen die Menge der Versuchsausgänge *abzählbar* (d. h. endlich oder abzählbar-unendlich) ist.

Dabei heißt eine Menge Ω *abzählbar-unendlich*, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \Omega$ gibt, d. h. wenn sie sich in der Form $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ schreiben lässt, wobei jedes Element von Ω genau einmal vorkommt.

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Mit diskreten W.räumen lassen sich einfache zufallsabhängige Vorgänge beschreiben, bei denen die Menge der Versuchsausgänge *abzählbar* (d. h. endlich oder abzählbar-unendlich) ist.

Dabei heißt eine Menge Ω *abzählbar-unendlich*, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \Omega$ gibt, d. h. wenn sie sich in der Form $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ schreiben lässt, wobei jedes Element von Ω genau einmal vorkommt.

Ist Ω eine beliebige Menge, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}(\Omega)$ die *Potenzmenge*, d. h. die Menge aller Teilmengen $A \subseteq \Omega$ (einschließlich der leeren Menge $\emptyset$ und der Menge Ω selbst).

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Mit diskreten W.räumen lassen sich einfache zufallsabhängige Vorgänge beschreiben, bei denen die Menge der Versuchsausgänge *abzählbar* (d. h. endlich oder abzählbar-unendlich) ist.

Dabei heißt eine Menge Ω *abzählbar-unendlich*, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \Omega$ gibt, d. h. wenn sie sich in der Form $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ schreiben lässt, wobei jedes Element von Ω genau einmal vorkommt.

Ist Ω eine beliebige Menge, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}(\Omega)$ die *Potenzmenge*, d. h. die Menge aller Teilmengen $A \subseteq \Omega$ (einschließlich der leeren Menge $\emptyset$ und der Menge Ω selbst).

Definition 1.1 (Diskreter W.raum)

Es seien $\Omega \neq \emptyset$ eine abzählbare Menge und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften $f(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$ und $\sum_{\omega \in \Omega} f(\omega) = 1$. Dann heißt das Tripel $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ mit der Abbildung $\mathbb{P} : \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(A) := \sum_{\omega \in A} f(\omega)$ *diskreter W.raum* (zu (Ω, f)).

Bemerkung 1.2 (Umgang mit Summen)

Eine Summe der Form $\sum_{\omega \in A} f(\omega)$ (A abzählbar) berechnen wir, indem wir eine beliebige Reihenfolge $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ (für endliches A) bzw. $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ (für abzählbar-unendliches A) der Elemente von A wählen und die Summe

$$\sum_{i=1}^{n} f(\omega_i) \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^{\infty} f(\omega_i) := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\omega_i)$$

bilden. Dabei hängt der Wert der Summe nicht von der Wahl der Reihenfolge ab, da man Summen mit nicht-negativen Summanden beliebig umordnen kann, ohne den Wert der Summe zu verändern (vgl. Kapitel A.4).

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

Bemerkung 1.2 (Umgang mit Summen)

Eine Summe der Form $\sum_{\omega \in A} f(\omega)$ (A abzählbar) berechnen wir, indem wir eine beliebige Reihenfolge $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ (für endliches A) bzw. $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ (für abzählbar-unendliches A) der Elemente von A wählen und die Summe

$$\sum_{i=1}^{n} f(\omega_i) \quad \text{bzw.} \quad \sum_{i=1}^{\infty} f(\omega_i) := \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\omega_i)$$

bilden. Dabei hängt der Wert der Summe nicht von der Wahl der Reihenfolge ab, da man Summen mit nicht-negativen Summanden beliebig umordnen kann, ohne den Wert der Summe zu verändern (vgl. Kapitel A.4).

Ähnliche Umordnungen werden im Folgenden stillschweigend verwendet. Ist etwa $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, wobei I eine abzählbare Indexmenge ist und jedes Element von A in genau einer Teilmenge A_i liegt, so gilt

$$\sum_{\omega \in A} f(\omega) \overset{\text{Umordnen}}{=} \sum_{i \in I} \sum_{\omega \in A_i} f(\omega) .$$

Bezeichnungen

Im Folgenden seien (Ω, f) und $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ wie in Definition 1.1.

Bemerkung 1.3 (Bezeichnungen)

Es seien $\omega \in \Omega$ und $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$.

Ω	*Ergebnismenge / Grundraum / Stichprobenraum*
ω	*Ergebnis*
$f(\omega)$	*W. des Ergebnisses ω*
f	*W.dichte / W.funktion (gibt die W.en der Ergebnisse an)*
A	*Ereignis*
$\mathbb{P}(A)$	*W. des Ereignisses A*
$\mathbb{P}$	*W.maß / W.verteilung (gibt die W.en der Ereignisse an)*
A	*Ereignis*
$\{\omega\}$	*Elementarereignis*
$\mathbb{P}(\{\omega\}) = f(\omega)$	*Elementar-W.*
Ω	*sicheres Ereignis*
$\emptyset$	*unmögliches Ereignis*
A tritt ein.	*Es erscheint ein Ergebnis $\omega \in A$.*
A tritt nicht ein.	*Es erscheint ein Ergebnis $\omega \notin A$.*

Laplace-Experimente

Ein wichtiger Spezialfall liegt vor, wenn der W.raum endlich ist und jedes Ergebnis die gleiche Chance des Eintretens besitzt:

Bemerkung 1.4 (Gleichverteilung)

Ist $\Omega \neq \emptyset$ endlich und gilt $f(\omega) = 1/|\Omega|$ für alle $\omega \in \Omega$, so heißt die zugehörige W.verteilung $\mathbb{P}$ (diskrete) Gleichverteilung auf Ω, kurz $\mathcal{U}_\Omega$. In diesem Fall gilt

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\textit{Anzahl der für } A \textit{ günstigen Fälle}}{\textit{Anzahl der möglichen Fälle}} \qquad \forall\, A \in \mathfrak{P}(\Omega)\,,$$

d. h. die Bestimmung von W.en lässt sich auf die Bestimmung von Anzahlen zurückführen.

Laplace-Experimente

Ein wichtiger Spezialfall liegt vor, wenn der W.raum endlich ist und jedes Ergebnis die gleiche Chance des Eintretens besitzt:

Bemerkung 1.4 (Gleichverteilung)

Ist $\Omega \neq \emptyset$ endlich und gilt $f(\omega) = 1/|\Omega|$ für alle $\omega \in \Omega$, so heißt die zugehörige W.verteilung $\mathbb{P}$ (diskrete) Gleichverteilung auf Ω, kurz $\mathcal{U}_\Omega$. In diesem Fall gilt

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\textit{Anzahl der für A günstigen Fälle}}{\textit{Anzahl der möglichen Fälle}} \qquad \forall\, A \in \mathfrak{P}(\Omega)\,,$$

d. h. die Bestimmung von W.en lässt sich auf die Bestimmung von Anzahlen zurückführen.

Beachte, dass die Formel in Bem. 1.4 nur anwendbar ist, wenn eine Gleichverteilung vorliegt. Manchmal erweist es sich daher als nützlich, den W.raum geschickt zu wählen, so dass man mit der Gleichverteilung arbeiten kann.

Laplace-Experimente

Ein wichtiger Spezialfall liegt vor, wenn der W.raum endlich ist und jedes Ergebnis die gleiche Chance des Eintretens besitzt:

Bemerkung 1.4 (Gleichverteilung)

Ist $\Omega \neq \emptyset$ endlich und gilt $f(\omega) = 1/|\Omega|$ für alle $\omega \in \Omega$, so heißt die zugehörige W.verteilung $\mathbb{P}$ (diskrete) Gleichverteilung auf Ω, kurz $\mathcal{U}_\Omega$. In diesem Fall gilt

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\textit{Anzahl der für } A \textit{ günstigen Fälle}}{\textit{Anzahl der möglichen Fälle}} \qquad \forall\, A \in \mathfrak{P}(\Omega)\,,$$

d. h. die Bestimmung von W.en lässt sich auf die Bestimmung von Anzahlen zurückführen.

In der Situation von Bem. 1.4 spricht man auch von *Laplace-Experimenten*. Wir werden diese Bezeichnung allerdings vermeiden, weil für uns *Experimente* die realen Vorgänge sind, während wir die math. Modelle *W.räume* nennen.

Rechenoperationen und Rechenregeln für Mengen

Bemerkung 1.5

Da Ereignisse formal Teilmengen von Ω sind, können wir mit Hilfe mengentheoretischer Operationen aus gegebenen Ereignissen A, B, C_n $(n \in \mathbb{N})$ neue Ereignisse konstruieren:

Modell	*Bezeichnung*	*Interpretation*
A^c	*Komplement / Gegenereignis*	*A tritt nicht ein.*
$A \cap B$	*Durchschnitt*	*A und B treten ein.*
$A \cup B$	*Vereinigung*	*A oder B treten ein.*
$A \,\Delta\, B$	*symmetrische Differenz*	*Entweder A oder B tritt ein.*
$A \setminus B$	*mengentheoretische Differenz*	*A tritt ein, B tritt nicht ein.*
$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$	*(abzählbarer) Durchschnitt*	*Alle Ereignisse C_n treten ein.*
$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$	*(abzählbare) Vereinigung*	*Mindestens ein Ereignis C_n tritt ein.*
$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} C_m$	*limes superior*	*Unendlich viele Ereignisse C_n treten ein.*
$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} C_m$	*limes inferior*	*Fast alle Ereignisse C_n treten ein.*

Rechenoperationen und Rechenregeln für Mengen

Es gelten dann die üblichen Rechenregeln:

$(A^c)^c = A$ (Involution)

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (de Morgan'sche Regel)

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (de Morgan'sche Regel)

$A \cup B = B \cup A$ (Kommutativgesetz)

$A \cap B = B \cap A$ (Kommutativgesetz)

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Assoziativgesetz)

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Assoziativgesetz)

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Distributivgesetz)

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (Distributivgesetz)

$(A \cup B) \cap A = A$ (Absorptionsgesetz)

$(A \cap B) \cup A = A$ (Absorptionsgesetz)

Ähnliches gilt für Durchschnitte und Vereinigungen von mehr als zwei Mengen:

$(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n^c$ (de Morgan'sche Regel)

$(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n^c$ (de Morgan'sche Regel)

$A \cup (\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A \cup C_n)$ (Distributivgesetz)

$A \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap C_n)$ (Distributivgesetz)

Satz 1.6 (Eigenschaften von W.maßen)

Für jede diskreten W.raum $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *gilt:*

(1) $\forall A \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mathbb{P}(A) \geq 0$ *(Nicht-Negativität)*

(2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *(Normiertheit)*

(3) $\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{P}(\Omega)$ *:* $A_1, \ldots, A_n$ *paarweise disjunkt*
$\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ *(Additivität)*

(3') $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{P}(\Omega)$ *:* $A_1, A_2, \ldots$ *paarweise disjunkt*
$\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}(A_i)$ *(σ-Additivität)*

Satz 1.6 (Eigenschaften von W.maßen)

Für jede diskreten W.raum $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *gilt:*

(1) $\forall A \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mathbb{P}(A) \geq 0$ *(Nicht-Negativität)*

(2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ *(Normiertheit)*

(3) $\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{P}(\Omega)$ *:* $A_1, \ldots, A_n$ *paarweise disjunkt*
$\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ *(Additivität)*

(3') $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{P}(\Omega)$ *:* $A_1, A_2, \ldots$ *paarweise disjunkt*
$\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}(A_i)$ *(σ-Additivität)*

(4) $\forall A \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ *(Regel von der Gegen-W.)*

(5) $\forall A \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mathbb{P}(A) \leq 1$

(6) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

(7) $\forall A, B \in \mathfrak{P}(\Omega) : A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ *(Monotonie)*

(8) $\forall A, B \in \mathfrak{P}(\Omega) : A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ *(Subtraktivität)*

(9) $\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ *(Subadditivität)*

(9') $\forall A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}(A_i)$ *(σ-Subadditivität)*

(10) $\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$
(Siebformel von Sylvester-Poincaré / Einschluss-Ausschluss-Prinzip)

Siebformel von Sylvester-Poincaré / Einschluss-Ausschluss-Prinzip

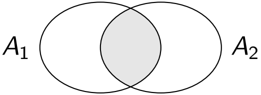
$$\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

Siebformel von Sylvester-Poincaré / Einschluss-Ausschluss-Prinzip

$$\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

Spezialfall $n = 2$:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$$

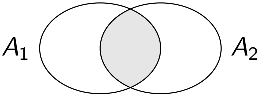


Siebformel von Sylvester-Poincaré / Einschluss-Ausschluss-Prinzip

$$\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

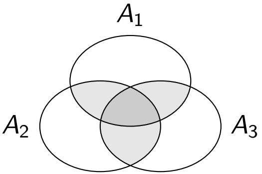
Spezialfall $n = 2$:

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$$



Spezialfall $n = 3$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) \\ &\quad - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) \\ &\quad + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\end{aligned}$$



Beispiel 1.7 (Würfelwurf)

Ein 'fairer' Würfel wird 4-mal geworfen.

(a) *Mit welcher W. fällt mindestens einmal die Sechs?*

(b) *Mit welcher W. fällt genau einmal die Sechs?*

(c) *Mit welcher W. ist das größte Ergebnis eine Vier?*

Beispiele für diskrete W.räume

Beispiel 1.7 (Würfelwurf)

Ein ‘fairer’ Würfel wird 4-mal geworfen.

- $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) : \omega_i \in \{1, \ldots, 6\}$ *für* $i = 1, 2, 3, 4\}$
  (*wobei* $\omega_i \triangleq$ *Augenzahl im* i*-ten Wurf*)
- $f(\omega) := 1/|\Omega| \ \forall\, \omega \in \Omega$ *oder* $\mathbb{P} :=$ *Gleichvtlg. auf* Ω
  (*Begründung: Symmetrie*)

(a) *Mit welcher W. fällt mindestens einmal die Sechs?*

(b) *Mit welcher W. fällt genau einmal die Sechs?*

(c) *Mit welcher W. ist das größte Ergebnis eine Vier?*

Beispiele für diskrete W.räume

Beispiel 1.7 (Würfelwurf)

Ein 'fairer' Würfel wird 4-mal geworfen.

- $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) : \omega_i \in \{1, \dots, 6\} \text{ für } i = 1, 2, 3, 4\}$
  ($\text{wobei } \omega_i \triangleq \text{Augenzahl im } i\text{-ten Wurf}$)
- $f(\omega) := 1/|\Omega| \ \forall \omega \in \Omega$ *oder* $\mathbb{P} :=$ *Gleichvtlg. auf* Ω
  (*Begründung: Symmetrie*)

(a) *Mit welcher W. fällt mindestens einmal die Sechs?*

- A : „*mindestens einmal die Sechs*", $A = \{\omega \in \Omega : \exists\, i \in \{1, 2, 3, 4\} : \omega_i = 6\}$
- *Idee: Übergang zum Komplement*
- A^c : „*nie die Sechs*", $A^c = \{\omega \in \Omega : \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} : \omega_i \neq 6\}$
- $\mathbb{P}(A^c) = \frac{|A^c|}{|\Omega|} = \frac{5^4}{6^4} = \frac{625}{1296}$
- $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}$ $[\approx 0.518]$

(b) *Mit welcher W. fällt genau einmal die Sechs?*

(c) *Mit welcher W. ist das größte Ergebnis eine Vier?*

Beispiel 1.7 (Würfelwurf)

Ein 'fairer' Würfel wird 4-mal geworfen.

- $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) : \omega_i \in \{1, \dots, 6\} \text{ für } i = 1, 2, 3, 4\}$ (*wobei* $\omega_i \triangleq$ *Augenzahl im i-ten Wurf*)
- $f(\omega) := 1/|\Omega| \; \forall \omega \in \Omega$ *oder* $\mathbb{P} :=$ *Gleichvtlg. auf* Ω (*Begründung: Symmetrie*)

(a) *Mit welcher W. fällt mindestens einmal die Sechs?*

(b) *Mit welcher W. fällt genau einmal die Sechs?*

- B : *„genau einmal die Sechs"*, $B = \{\omega \in \Omega : \exists! \, j \in \{1, 2, 3, 4\} : \omega_j = 6\}$
- *Idee: geschickte Zerlegung*
- B_i : *„die Sechs genau im i-ten Wurf"*, $B_i = \{\omega \in B : \omega_i = 6\}$
- $\mathbb{P}(B_i) = \frac{|B_i|}{|\Omega|} = \frac{5^3}{6^4} = \frac{125}{1296}$
- $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B_1 \cup \dots \cup B_4) \underset{Add.}{=} \mathbb{P}(B_1) + \dots + \mathbb{P}(B_4) = \frac{500}{1296}$ $[\approx 0.386]$

(c) *Mit welcher W. ist das größte Ergebnis eine Vier?*

Beispiele für diskrete W.räume

Beispiel 1.7 (Würfelwurf)

Ein 'fairer' Würfel wird 4-mal geworfen.

- $\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) : \omega_i \in \{1, \ldots, 6\}$ *für* $i = 1, 2, 3, 4\}$ (*wobei* $\omega_i \triangleq$ *Augenzahl im i-ten Wurf*)
- $f(\omega) := 1/|\Omega| \;\forall\, \omega \in \Omega$ *oder* $\mathbb{P} :=$ *Gleichvtlg. auf* Ω (*Begründung: Symmetrie*)

(a) *Mit welcher W. fällt mindestens einmal die Sechs?*

(b) *Mit welcher W. fällt genau einmal die Sechs?*

(c) *Mit welcher W. ist das größte Ergebnis eine Vier?*

- C : *„größte Augenzahl = 4"*, $C = \{\omega \in \Omega : \max_{i=1,\ldots,4} \omega_i = 4\}$
- *Idee: geschickte Zurückführung auf einfachere Ereignisse*
- C_i : *„größte Augenzahl $\leq i$"*, $C_i = \{\omega \in \Omega : (\forall j : \omega_j \leq i)\}$
- $\mathbb{P}(C_i) = \frac{|C_i|}{|\Omega|} = \frac{i^4}{6^4}$
- $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C_4 \setminus C_3) \underset{\textit{Subtrakt.}}{=} \mathbb{P}(C_4) - \mathbb{P}(C_3) = \frac{256}{1296} - \frac{81}{1296} = \frac{175}{1296}$ $[\approx 0.135]$

(1) $\forall A \in \mathfrak{P}(\Omega) : \mathbb{P}(A) \geq 0$

(2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(3) $\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{P}(\Omega)$: $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkt
$\Rightarrow \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ *(Additivität)*

Lemma 1.8 (Charakterisierung der σ-Additivität)

Es sei $\Omega \neq \emptyset$ eine nicht-leere Menge und $\mathbb{P} : \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit den obigen Eigenschaften (1) – (3). Dann sind äquivalent:

(a) *(σ-Additivität) Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Mengen in $\mathfrak{P}(\Omega)$ gilt $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n)$.*

(b) *(Stetigkeit von unten) Für jede aufsteigende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{P}(\Omega)$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)$.*

(c) *(Stetigkeit von oben) Für jede absteigende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathfrak{P}(\Omega)$ gilt $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^\infty A_n)$.*

Dabei heißt eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ *aufsteigend* bzw. *absteigend*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ $A_n \subseteq A_{n+1}$ bzw. $A_n \supseteq A_{n+1}$ gilt.

Lemma 1.8 (Charakterisierung der σ-Additivität)

Es sei $\Omega \neq \emptyset$ *eine nicht-leere Menge und* $\mathbb{P} : \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *eine Abbildung mit den obigen Eigenschaften (1) – (3). Dann sind äquivalent:*

(a) *(σ-Additivität) Für jede Folge* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *paarweise disjunkter Mengen in* $\mathfrak{P}(\Omega)$ *gilt* $\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n)$.

(b) *(Stetigkeit von unten) Für jede aufsteigende Folge* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathfrak{P}(\Omega)$ *gilt* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^\infty A_n)$.

(c) *(Stetigkeit von oben) Für jede absteigende Folge* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathfrak{P}(\Omega)$ *gilt* $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^\infty A_n)$.

Dabei heißt eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ *aufsteigend* bzw. *absteigend*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ $A_n \subseteq A_{n+1}$ bzw. $A_n \supseteq A_{n+1}$ gilt.

Bemerkung: Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ eine aufsteigende bzw. absteigende Folge und $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ bzw. $A = \bigcap_{n=1}^\infty A_n$, so schreibt man auch $A_n \uparrow A$ bzw. $A_n \downarrow A$. Damit kann man die Eigenschaften (b) und (c) auch wie folgt formulieren:

$$\Big[A_n \uparrow A \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(A_n) \uparrow \mathbb{P}(A)\Big] \qquad \text{bzw.} \qquad \Big[A_n \downarrow A \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(A_n) \downarrow \mathbb{P}(A)\Big]$$

Idee: Approximation von innen bzw. außen (vgl. Volumen-Bestimmung in der Geometrie)

Kombinatorik (Satz 1.9)

Problemstellung: Aus einer Menge mit n Elementen (o. E. $\{1, \ldots, n\}$) wird k-mal ein Element ausgewählt. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

	mit Wiederholung	ohne Wiederholung
geordnete Stichproben	Fall I	Fall II
ungeordnete Stichproben	Fall IV	Fall III

Problemstellung: Aus einer Menge mit n Elementen (o. E. $\{1, \dots, n\}$) wird k-mal ein Element ausgewählt. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

	mit Wiederholung	ohne Wiederholung
geordnete Stichproben	Fall I	Fall II
ungeordnete Stichproben	Fall IV	Fall III

Fall I (**Geordnete Stichproben mit Wiederholung**)
$\Omega_{\mathrm{I}} = \{(\omega_1, \dots, \omega_k) : \omega_i \in \{1, \dots, n\} \text{ für } i = 1, \dots, k\} =: \{1, \dots, n\}^k$
$|\Omega_{\mathrm{I}}| = n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$

Fall II (**Geordnete Stichproben ohne Wiederholung**)
$\Omega_{\mathrm{II}} = \{(\omega_1, \dots, \omega_k) : \omega_i \in \{1, \dots, n\} \text{ für } i = 1, \dots, k \ \underline{\text{und}}\ \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\}$
$|\Omega_{\mathrm{II}}| = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Fall III (**Ungeordnete Stichproben ohne Wiederholung**)
$\Omega_{\mathrm{III}} = \{(\omega_1, \dots, \omega_k) : \omega_i \in \{1, \dots, n\} \text{ für } i = 1, \dots, k \ \underline{\text{und}}\ \omega_1 < \ldots < \omega_k\}$
$|\Omega_{\mathrm{III}}| = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$

Fall IV (**Ungeordnete Stichproben mit Wiederholung**)
$\Omega_{\mathrm{IV}} = \{(\omega_1, \dots, \omega_k) : \omega_i \in \{1, \dots, n\} \text{ für } i = 1, \dots, k \ \underline{\text{und}}\ \omega_1 \leq \ldots \leq \omega_k\}$
$|\Omega_{\mathrm{IV}}| = \binom{n+k-1}{k}$

Bemerkung 1.10

In Fall II ist der Fall $n = k$ *von besonderem Interesse; hier ist* Ω_{II} *die Menge der Permutationen (Umordnungen) der* n *Elemente, und es gilt* $|\Omega_{II}| = n!$.

Bemerkung 1.11

Um die Größe von $n!$ *(für großes* n*) bzw. von* $\binom{n}{k}$ *(für großes* k *und* $n - k$*) abzuschätzen, kann man die Stirling-Formel verwenden:*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n \quad (n \to \infty) \quad \left[\iff \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n} = 1 \right].$$

Bemerkung 1.12

Die obige Problemstellung lässt sich unterschiedlich interpretieren:

1. **Urnenmodell**
   Aus einer Urne mit n Kugeln (mit den Nummern $1 - n$) wird k-mal gezogen.
   – mit / ohne Zurücklegen $\triangleq$ mit / ohne Wiederholung
   – mit / ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
   $\triangleq$ geordnete / ungeordnete Stichproben

2. **Teilchen-Fächer-Modell**
   k Teilchen werden auf n Fächer (mit den Nummern $1 - n$) verteilt.
   – mit / ohne Mehrfachbelegung $\triangleq$ mit / ohne Wiederholung
   – unterscheidbare / nicht-unterscheidbare Teilchen
   $\triangleq$ geordnete / ungeordnete Stichproben

Bemerkung 1.12

Die obige Problemstellung lässt sich unterschiedlich interpretieren:

1. **Urnenmodell**
   Aus einer Urne mit n Kugeln (mit den Nummern $1 - n$) wird k-mal gezogen.
   – mit / ohne Zurücklegen $\triangleq$ mit / ohne Wiederholung
   – mit / ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
   $\triangleq$ geordnete / ungeordnete Stichproben

2. **Teilchen-Fächer-Modell**
   k Teilchen werden auf n Fächer (mit den Nummern $1 - n$) verteilt.
   – mit / ohne Mehrfachbelegung $\triangleq$ mit / ohne Wiederholung
   – unterscheidbare / nicht-unterscheidbare Teilchen
   $\triangleq$ geordnete / ungeordnete Stichproben

Zusammenhang:
Wähle für jedes Teilchen das Fach, in welches das Teilchen gelegt wird.

Beispiele zur Kombinatorik I

Beispiele 1.13

(a) *(Wörter) Aus einem Alphabet mit n „Buchstaben" werden „Wörter" der Länge n gebildet, wobei Buchstaben mehrfach verwendet werden dürfen. Mit welcher W. enthält ein rein zufälliges Wort keinen Buchstaben doppelt?*

(b) *(Murmeln) 6 nicht unterscheidbare Murmeln werden auf 3 unterscheidbare Dosen verteilt. Wie viele Möglichkeiten gibt es?*

(c) *(Murmeln) 6 nicht unterscheidbare Murmeln werden auf 3 nicht unterscheidbare Dosen verteilt. Wie viele Möglichkeiten gibt es?*

(d) *(Wörter) Aus den Buchstaben des Wortes ANANAS werden „Wörter" der Länge 6 gebidet, wobei jeder Buchstabe genau so oft verwendet werden muss, wie er in ANANAS vorkommt. Wie viele Möglichkeiten gibt es?*

(e) *(Lotto) Sie geben beim Lotto „6 aus 49" (mit Superzahl) einen Tipp ab. Wie groß ist die W. für die Gewinnklassen I, II, III, ...?*

(f) *(Münzwurf) Es werden n faire Münzen gleichzeitig geworfen. Mit welcher W. erhalten wir (genau) k-mal „Kopf", $k = 0, \dots, n$?*

Beispiel 1.13(e): Lotto

(e) *(Lotto) Sie geben beim Lotto „6 aus 49“ (mit Superzahl) einen Tipp ab. Wie groß ist die W. für die Gewinnklassen I, II, III, . . . ?*

Gewinnklasse	Beschreibung	Wahrscheinlichkeit
I	6 Richtige mit Superzahl	$\frac{1}{139838160} \approx 1 : 139.838.160$
II	6 Richtige (ohne Superzahl)	$\frac{9}{139838160} \approx 1 : 15.537.573$
III	5 Richtige mit Superzahl	$\frac{258}{139838160} \approx 1 : 542.008$
IV	5 Richtige (ohne Superzahl)	$\frac{2322}{139838160} \approx 1 : 60.223$
V	4 Richtige mit Superzahl	$\frac{13545}{139838160} \approx 1 : 10.324$
VI	4 Richtige (ohne Superzahl)	$\frac{121905}{139838160} \approx 1 : 1.147$
VII	3 Richtige mit Superzahl	$\frac{246820}{139838160} \approx 1 : 567$
VIII	3 Richtige (ohne Superzahl)	$\frac{2221380}{139838160} \approx 1 : 63$
IX	2 Richtige mit Superzahl	$\frac{1851150}{139838160} \approx 1 : 76$

Beispiel 1.13(f): Münzwurf

(f) *(Münzwurf) Es werden n faire Münzen gleichzeitig geworfen. Mit welcher W. erhalten wir (genau) k-mal „Kopf“, $k = 0, \ldots, n$?*

Für die Ereignisse A_k : „(genau) k-mal Kopf“ gilt $\mathbb{P}(A_k) \geq 0$ für alle $k = 0, \ldots, n$ sowie

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k) \underset{\text{Additivität}}{=} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) = \mathbb{P}(\Omega) = 1\,,$$

da die Mengen $A_0, \ldots, A_n$ paarweise disjunkt mit $\bigcup_{k=0}^{n} A_k = \Omega$ sind.

Wir können daher die Werte $\widetilde{f}(k) := \mathbb{P}(A_k)$ verwenden, um einen neuen diskreten W.raum mit der Grundmenge $\widetilde{\Omega} := \{0, \ldots, n\}$ zu konstruieren.

Zusammenfassung:

- *Zufallabhängige Vorgänge, bei denen die Menge der möglichen Ergebnisse abzählbar ist, lassen sich durch diskrete W.räume beschreiben.*
- *Wir geben diskrete W.räume an, indem wir die Menge Ω der möglichen Ergebnisse sowie die W.dichte $f : \Omega \to [0, 1]$ angeben.*
- *Mit Hilfe der Rechenregeln für W.maße lassen sich die W.en von komplizierteren Ereignissen häufig auf die W.en von einfacheren Ereignissen zurückführen.*
- *Liegt eine diskrete Gleichverteilung vor, so lässt sich die Berechnung von W.en auf die Berechnung von Anzahlen zurückführen. ($\rightsquigarrow$ Kombinatorik)*

Kapitel 1.2
Zufallsgrößen auf diskreten W.räumen

Zufallsgrößen auf diskreten W.räumen I

Motivation: Übergang von einem „umfangreicheren“ W.raum zu einem „einfacheren“ W.raum (vgl. letztes Beispiel)

Zufallsgrößen auf diskreten W.räumen I

Motivation: Übergang von einem „umfangreicheren" W.raum zu einem „einfacheren" W.raum (vgl. letztes Beispiel)

Bezeichnung: Sei $X : \Omega \to \mathcal{X}$ eine Abbildung.

- Für $B \subseteq \mathcal{X}$ heißt $\{X \in B\} := X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ das *Urbild* von B unter X.
- Für $x \in \mathcal{X}$ heißt $\{X = x\} := X^{-1}(\{x\}) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ das *Urbild* von x unter X.

Zufallsgrößen auf diskreten W.räumen I

Motivation: Übergang von einem „umfangreicheren“ W.raum zu einem „einfacheren“ W.raum (vgl. letztes Beispiel)

Bezeichnung: Sei $X : \Omega \to \mathcal{X}$ eine Abbildung.

- Für $B \subseteq \mathcal{X}$ heißt $\{X \in B\} := X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ das *Urbild* von B unter X.
- Für $x \in \mathcal{X}$ heißt $\{X = x\} := X^{-1}(\{x\}) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ das *Urbild* von x unter X.

Definition 1.14 (Zufallsgröße)

Es seien $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter W.raum und $X : \Omega \to \mathcal{X}$ eine Abbildung mit Werten in einer abzählbaren Menge $\mathcal{X}$.
Dann heißt X *Zufallsgröße* oder *Zufallsvariable* (mit Werten in $\mathcal{X}$), und die Abbildung $\mathbb{P}_X : \mathfrak{P}(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B)$ heißt *induzierte Verteilung* (oder auch nur *Verteilung*) von X unter $\mathbb{P}$.

Zufallsgrößen auf diskreten W.räumen I

Motivation: Übergang von einem „umfangreicheren" W.raum zu einem „einfacheren" W.raum (vgl. letztes Beispiel)

Bezeichnung: Sei $X : \Omega \to \mathcal{X}$ eine Abbildung.

- Für $B \subseteq \mathcal{X}$ heißt $\{X \in B\} := X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ das *Urbild* von B unter X.
- Für $x \in \mathcal{X}$ heißt $\{X = x\} := X^{-1}(\{x\}) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ das *Urbild* von x unter X.

Definition 1.14 (Zufallsgröße)

Es seien $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter W.raum und $X : \Omega \to \mathcal{X}$ eine Abbildung mit Werten in einer abzählbaren Menge $\mathcal{X}$.
Dann heißt X *Zufallsgröße* oder *Zufallsvariable* (mit Werten in $\mathcal{X}$), und die Abbildung $\mathbb{P}_X : \mathfrak{P}(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B)$ heißt *induzierte Verteilung* (oder auch nur *Verteilung*) von X unter $\mathbb{P}$.

Interpretation: Zufallsgrößen „verarbeiten" / „verdichten" / „filtern" die Information über den Ausgang eines Zufallsexperimentes.

Zufallsgrößen auf diskreten W.räumen II

Beispiele 1.15 (Beispiele für Zufallsgrößen)

Beispiele 1.15 (Beispiele für Zufallsgrößen)

(a) *In Bsp. 1.13 (f) beschreibt die Zufallsgröße* $X : \Omega \to \mathcal{X} := \{0, \ldots, n\}$ *mit* $X(\omega) := \sum_{i=1}^n \omega_i$ *die Anzahl von Kopf; die induzierte Verteilung ist wegen*

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(\bigcup_{k \in B} \{X = k\}) = \sum_{k \in B} \binom{n}{k}/2^n \qquad \forall\, B \subseteq \mathcal{X}$$

die diskrete W.verteilung zum Paar $(\mathcal{X}, f_X)$ *mit* $\mathcal{X} := \{0, \ldots, n\}$ *und* $f_X(k) := \binom{n}{k}/2^n$, $k = 0, \ldots, n$.

Beispiele 1.15 (Beispiele für Zufallsgrößen)

(a) *In Bsp. 1.13 (f) beschreibt die Zufallsgröße* $X : \Omega \to \mathcal{X} := \{0, \dots, n\}$ *mit* $X(\omega) := \sum_{i=1}^n \omega_i$ *die Anzahl von Kopf; die induzierte Verteilung ist wegen*

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k \in B} \{X = k\}\Big) = \sum_{k \in B} \tbinom{n}{k}/2^n \qquad \forall\, B \subseteq \mathcal{X}$$

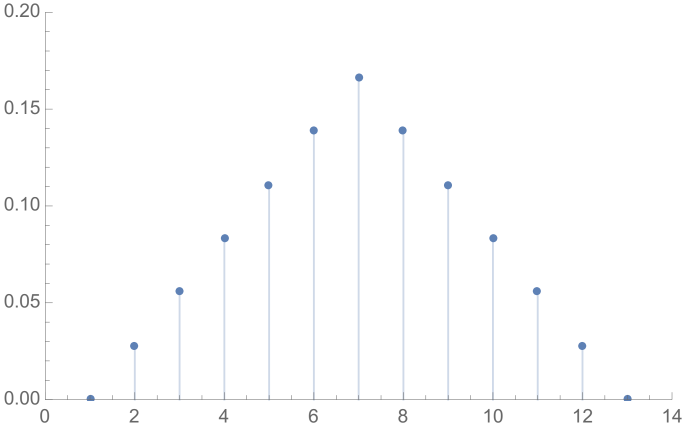
die diskrete W.verteilung zum Paar $(\mathcal{X}, f_X)$ *mit* $\mathcal{X} := \{0, \dots, n\}$ *und* $f_X(k) := \binom{n}{k}/2^n$, $k = 0, \dots, n$.

(b) *Ist* (Ω, f) *mit* $\Omega := \{1, \dots, 6\}^2$ *und* $f(\omega) := \frac{1}{36}\ \forall \omega \in \Omega$ *das Modell für den gleichzeitigen Wurf zweier fairer Würfel, so beschreibt die Zufallsgröße* $S : \Omega \to \mathcal{S} := \{2, \dots, 12\}$ *mit* $S(\omega_1, \omega_2) := \omega_1 + \omega_2$ *die Augensumme; die induzierte Verteilung ist wegen*

$$\mathbb{P}_S(B) = \mathbb{P}(S \in B) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k \in B} \{S = k\}\Big) = \sum_{k \in B} \tfrac{6 - |k-7|}{36} \qquad \forall\, B \subseteq \mathcal{S}$$

die diskrete W.verteilung zum Paar $(\mathcal{S}, f_S)$ *mit* $\mathcal{S} := \{2, \dots, 12\}$ *und* $f_S(k) := \frac{6 - |k-7|}{36}$, $k = 2, \dots, 12$.

Veranschaulichung der W.dichte von S:



„diskrete Dreiecksverteilung“

Definition 1.14 (Zufallsgröße)

Es seien $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter W.raum und $X : \Omega \to \mathcal{X}$ eine Abbildung mit Werten in einer abzählbaren Menge $\mathcal{X}$.
Dann heißt X *Zufallsgröße* oder *Zufallsvariable* (mit Werten in $\mathcal{X}$), und die Abbildung $\mathbb{P}_X : \mathfrak{P}(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B)$ heißt *induzierte Verteilung* (oder auch nur *Verteilung*) von X unter $\mathbb{P}$.

Lemma 1.16

In Definition 1.14 ist $\mathbb{P}_X$ eine diskrete W.verteilung auf $\mathcal{X}$, nämlich die diskrete W.verteilung zur Dichte $f_X(x) := \mathbb{P}(X = x)$, $x \in \mathcal{X}$.

Definition 1.14 (Zufallsgröße)

Es seien $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter W.raum und $X : \Omega \to \mathcal{X}$ eine Abbildung mit Werten in einer abzählbaren Menge $\mathcal{X}$.
Dann heißt X *Zufallsgröße* oder *Zufallsvariable* (mit Werten in $\mathcal{X}$), und die Abbildung $\mathbb{P}_X : \mathfrak{P}(\mathcal{X}) \to \mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B)$ heißt *induzierte Verteilung* (oder auch nur *Verteilung*) von X unter $\mathbb{P}$.

Lemma 1.16

In Definition 1.14 ist $\mathbb{P}_X$ eine diskrete W.verteilung auf $\mathcal{X}$, nämlich die diskrete W.verteilung zur Dichte $f_X(x) := \mathbb{P}(X = x)$, $x \in \mathcal{X}$.

Merkregel:
Die Verteilung einer Zufallsgröße auf einem diskreten W.raum bestimmen wir, indem wir die zugehörigen Elementar-W.en berechnen.

Bestimmung von Verteilungen von Zufallsgrößen

Lemma 1.17

Sind $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *ein diskreter W.raum,* $X : \Omega \to \mathcal{X}$ *eine Zufallsgröße und* $h : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *eine Abbildung (wobei* $\mathcal{X}$ *und* $\mathcal{Y}$ *abzählbar), so ist auch* $h(X) := h \circ X : \Omega \to \mathcal{Y}$ *eine Zufallsgröße, und es gilt* $\mathbb{P}_{h(X)} = (\mathbb{P}_X)_h$.

Lemma 1.17

Sind $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ *ein diskreter W.raum,* $X : \Omega \to \mathcal{X}$ *eine Zufallsgröße und* $h : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ *eine Abbildung (wobei* $\mathcal{X}$ *und* $\mathcal{Y}$ *abzählbar), so ist auch* $h(X) := h \circ X : \Omega \to \mathcal{Y}$ *eine Zufallsgröße, und es gilt* $\mathbb{P}_{h(X)} = (\mathbb{P}_X)_h$.

Beispiel 1.18 (Bestimmung von Verteilungen von Zufallsgrößen)

Bei einem Glücksspiel werden zwei faire Würfel gleichzeitig geworfen.
Es interessiert allein die Summe S *der geworfenen Augenzahlen.*
Der Gewinn G *bestimmt sich nach der folgenden Regel:*

$$\begin{array}{lcl} S = 12 & \Rightarrow & G = 12 \\ S = 9, 10, 11 & \Rightarrow & G = 2 \\ S < 9 & \Rightarrow & G = 0 \end{array}$$

Gesucht sind die Verteilungen von S *und von* G.

Bestimmung von Verteilungen von Zufallsgrößen

Beispiel 1.18 (Bestimmung von Verteilungen von Zufallsgrößen)

[...]

Seien dazu (Ω, f) *und* $S : \Omega \to \mathcal{S}$ *wie in Beispiel 1.15 (b). Dann wird der Gewinn durch die Zufallsgröße* $G = h \circ S : \Omega \to \{0, 2, 12\}$ *mit*

$$h : \mathcal{S} \to \{0, 2, 12\}, \qquad h(s) := \begin{cases} 12, & s = 12 \\ 2, & 9 \leq s \leq 11 \\ 0, & s < 9 \end{cases}$$

beschrieben.

Beispiel 1.18 (Bestimmung von Verteilungen von Zufallsgrößen)

[...]

Seien dazu (Ω, f) *und* $S : \Omega \to \mathcal{S}$ *wie in Beispiel 1.15 (b). Dann wird der Gewinn durch die Zufallsgröße* $G = h \circ S : \Omega \to \{0, 2, 12\}$ *mit*

$$h : \mathcal{S} \to \{0, 2, 12\}, \qquad h(s) := \begin{cases} 12, & s = 12 \\ 2, & 9 \le s \le 11 \\ 0, & s < 9 \end{cases}$$

beschrieben. Die Verteilung von G *ergibt sich aus der Verteilung von* S*:*

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_S(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

y	0	2	12
$f_G(y)$	$\frac{26}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{1}{36}$

Bestimmung von Verteilungen von Zufallsgrößen

Beispiel 1.18 (Bestimmung von Verteilungen von Zufallsgrößen)

[. . .]

Seien dazu (Ω, f) *und* $S : \Omega \to \mathcal{S}$ *wie in Beispiel 1.15 (b). Dann wird der Gewinn durch die Zufallsgröße* $G = h \circ S : \Omega \to \{0, 2, 12\}$ *mit*

$$h : \mathcal{S} \to \{0, 2, 12\}\,, \qquad h(s) := \begin{cases} 12, & s = 12 \\ 2, & 9 \leq s \leq 11 \\ 0, & s < 9 \end{cases}$$

beschrieben. Die Verteilung von G *ergibt sich aus der Verteilung von* S*:*

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_S(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

y	0	2	12
$f_G(y)$	$\frac{26}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{1}{36}$

Beispielsweise gilt $f_G(2) = \mathbb{P}(G = 2) = \mathbb{P}(S \in \{9, 10, 11\})$
$= f_S(9) + f_S(10) + f_S(11) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. □

Bestimmung von Randverteilungen

Seien $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter W.raum und X und Y Zufallsgrößen mit Werten in abzählbaren Mengen $\mathcal{X}$ bzw. $\mathcal{Y}$. Dann kann man die „zusammengesetzte" Zufallsgröße (X, Y) mit Werten in der abzählbaren Menge $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ betrachten. Also ist $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ eine Verteilung auf $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, und die Elementar-W.en sind von der Form $\mathbb{P}((X, Y) = (x, y)) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$, wobei $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$ und $\{X = x, Y = y\} := \{X \in x\} \cap \{Y = y\}$.

Bestimmung von Randverteilungen

Seien $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter W.raum und X und Y Zufallsgrößen mit Werten in abzählbaren Mengen $\mathcal{X}$ bzw. $\mathcal{Y}$. Dann kann man die „zusammengesetzte“ Zufallsgröße (X, Y) mit Werten in der abzählbaren Menge $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ betrachten. Also ist $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ eine Verteilung auf $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, und die Elementar-W.en sind von der Form $\mathbb{P}((X, Y) = (x, y)) = \mathbb{P}(X = x, Y = y)$, wobei $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$ und $\{X = x, Y = y\} := \{X \in x\} \cap \{Y = y\}$.

Wenn die Verteilung von (X, Y) bereits bekannt ist, lassen sich die Verteilungen von X und von Y (die sog. *Randverteilungen*) wie folgt bestimmen:

Lemma 1.19 (Bestimmung von Randverteilungen)

Sind $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter W.raum und $(X, Y) : \Omega \to \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ eine zusammengesetzte Zufallsgröße (wobei $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ abzählbar), so gilt

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

für alle $x \in \mathcal{X}$.

Eine analoge Aussage gilt natürlich für Y statt X.

Allgemeiner kann man die Situation betrachten, dass die W.dichte einer Zufallsgröße $(X_1, \dots, X_n)$ mit Werten in einer abzählbaren Menge $\mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_n$ gegeben ist und eine *Randverteilung* $\mathbb{P}_{X_i}$ $(i = 1, \dots, n)$ bzw. sogar eine *mehrdimensionale Randverteilung* $\mathbb{P}_{(X_{i_1}, \dots, X_{i_m})}$ $(1 \le i_1 < \dots < i_m \le n)$ gesucht ist. Hier gilt:

Merkregel:
Ist die W.dichte einer zusammengesetzten Zufallsgröße $(X_1, \dots, X_n)$ *mit Werten in einer abzählbaren Menge* $\mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_n$ *gegeben, so erhalten wir die W.dichten der Randverteilungen, indem wir über die „freien“ Variablen aufsummieren.*

Bestimmung von Randverteilungen

Beispiel 1.20 (Bestimmung von Randverteilungen)

Zwei faire Münzen, auf deren Seiten die Zahlen 0 *und* 1 *stehen, werden gleichzeitig geworfen; es interessieren die Summe* X *und das Produkt* Y *der Einzelergebnisse.*
Wenn die gemeinsame Verteilung von X *und* Y *bereits gegeben ist, erhält man die Randverteilungen von* X *bzw.* Y*, indem man die Zeilensummen bzw. die Spaltensummen bildet:*

$\mathbb{P}(X = x, Y = y)$	$y = 0$	$y = 1$	
$x = 0$	$1/4$	0	
$x = 1$	$1/2$	0	
$x = 2$	0	$1/4$	

□

Bestimmung von Randverteilungen

Beispiel 1.20 (Bestimmung von Randverteilungen)

Zwei faire Münzen, auf deren Seiten die Zahlen 0 *und* 1 *stehen, werden gleichzeitig geworfen; es interessieren die Summe* X *und das Produkt* Y *der Einzelergebnisse.*
Wenn die gemeinsame Verteilung von X *und* Y *bereits gegeben ist, erhält man die Randverteilungen von* X *bzw.* Y*, indem man die Zeilensummen bzw. die Spaltensummen bildet:*

$\mathbb{P}(X = x, Y = y)$	$y = 0$	$y = 1$	$\mathbb{P}(X = x)$
$x = 0$	$1/4$	0	$1/4$
$x = 1$	$1/2$	0	$1/2$
$x = 2$	0	$1/4$	$1/4$

□

Beispiel 1.20 (Bestimmung von Randverteilungen)

Zwei faire Münzen, auf deren Seiten die Zahlen 0 *und* 1 *stehen, werden gleichzeitig geworfen; es interessieren die Summe* X *und das Produkt* Y *der Einzelergebnisse.*
Wenn die gemeinsame Verteilung von X *und* Y *bereits gegeben ist, erhält man die Randverteilungen von* X *bzw.* Y*, indem man die Zeilensummen bzw. die Spaltensummen bildet:*

$\mathbb{P}(X = x, Y = y)$	$y = 0$	$y = 1$	$\mathbb{P}(X = x)$
$x = 0$	$1/4$	0	$1/4$
$x = 1$	$1/2$	0	$1/2$
$x = 2$	0	$1/4$	$1/4$
$\mathbb{P}(Y = y)$	$3/4$	$1/4$	

□

Bestimmung von Randverteilungen

Beispiel 1.20 (Bestimmung von Randverteilungen)

Zwei faire Münzen, auf deren Seiten die Zahlen 0 und 1 stehen, werden gleichzeitig geworfen; es interessieren die Summe X und das Produkt Y der Einzelergebnisse.
Wenn die gemeinsame Verteilung von X und Y bereits gegeben ist, erhält man die Randverteilungen von X bzw. Y, indem man die Zeilensummen bzw. die Spaltensummen bildet:

$\mathbb{P}(X = x, Y = y)$	$y = 0$	$y = 1$	$\mathbb{P}(X = x)$
$x = 0$	$1/4$	0	$1/4$
$x = 1$	$1/2$	0	$1/2$
$x = 2$	0	$1/4$	$1/4$
$\mathbb{P}(Y = y)$	$3/4$	$1/4$	1

(*Die Eins unten rechts dient nur der Kontrolle, da sich die W.'en $\mathbb{P}(X = x)$ bzw. $\mathbb{P}(Y = y)$ jeweils zu Eins addieren müssen.*) □

Anmerkung zum Auftreten von Zufallsgrößen

??? Zufallsgrößen ohne Wahrscheinlichkeitsräume ???

Bemerkung 1.21

In einigen Fällen – etwa wenn man W.en der Form $\mathbb{P}_X(B)$ berechnen will / muss – ist es ausreichend, den „induzierten" W.raum $(\mathcal{X}, \mathfrak{P}(\mathcal{X}), \mathbb{P}_X)$ zu kennen.

Oft verzichtet man dann darauf, den zugrunde liegenden W.raum $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ oder die Abbildung $X : \Omega \to \mathcal{X}$ genauer anzugeben, und gibt nur die Verteilung von X an: „Sei X eine Zufallsgröße mit der Verteilung P ...". [...]

Es gibt also zwei Arten, wie Zufallsgrößen typischerweise auftreten:

1. *Es sind der zugrunde liegende W.raum $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ und die Abbildung $X : \Omega \to \mathcal{X}$ gegeben, und die (teilweise) Bestimmung der Verteilung von X ist i. d. R. das erste Problem, mit dem man sich befassen muss.*
2. *Es ist „nur" die Verteilung P der Zufallsgröße X angegeben (oder eine anschauliche Beschreibung, aus der sich die Verteilung P ergibt), und man muss / kann ausgehend von P „weiterrechnen".* (vgl. Bsp. 1.18 / 1.20)

Kapitel 1.2
Zufallsgrößen auf diskreten W.räumen

Beispiele für diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Beispiele für diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Wir wollen weitere Beispiele für Zufallsgrößen betrachten und in diesem Zusammenhang eine Reihe wichtiger W.verteilungen kennen lernen. Dabei bezeichnen wir die Grundmenge und die W.dichte der induzierten W.verteilung oft mit $\widetilde{\Omega}$ und $\widetilde{f}$ statt mit $\mathcal{X}$ und f_X.

Bernoulli-Verteilung

Es wird ein (u. U. komplexes) Zufallsexperiment durchgeführt, und es interessiert (nur) die Frage, ob dabei ein bestimmtes Ereignis $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ eintritt oder nicht.

Bernoulli-Verteilung

Es wird ein (u. U. komplexes) Zufallsexperiment durchgeführt, und es interessiert (nur) die Frage, ob dabei ein bestimmtes Ereignis $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ eintritt oder nicht. Ist der W.raum $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ gegeben, so lässt sich die Situation durch die Zgr.

$$\mathbf{1}_A : \Omega \to \{0,1\} \qquad \mathbf{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1 & ; \omega \in A \\ 0 & ; \omega \notin A \end{cases}$$

(*Indikatorfunktion von A*) beschreiben;

Bernoulli-Verteilung

Es wird ein (u. U. komplexes) Zufallsexperiment durchgeführt, und es interessiert (nur) die Frage, ob dabei ein bestimmtes Ereignis $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ eintritt oder nicht. Ist der W.raum $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ gegeben, so lässt sich die Situation durch die Zgr.

$$\mathbf{1}_A : \Omega \to \{0,1\} \qquad \mathbf{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1 & ; \omega \in A \\ 0 & ; \omega \notin A \end{cases}$$

(*Indikatorfunktion von A*) beschreiben; ihre Verteilung ist durch $\widetilde{\Omega} := \{0,1\}$ und $\widetilde{f}(1) = \mathbb{P}(A)$, $\widetilde{f}(0) = 1 - \mathbb{P}(A)$ gegeben.

Bernoulli-Verteilung

Es wird ein (u. U. komplexes) Zufallsexperiment durchgeführt, und es interessiert (nur) die Frage, ob dabei ein bestimmtes Ereignis $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ eintritt oder nicht. Ist der W.raum $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ gegeben, so lässt sich die Situation durch die Zgr.

$$\mathbf{1}_A : \Omega \to \{0,1\} \qquad \mathbf{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1 & ; \omega \in A \\ 0 & ; \omega \notin A \end{cases}$$

(*Indikatorfunktion von A*) beschreiben; ihre Verteilung ist durch $\widetilde{\Omega} := \{0,1\}$ und $\widetilde{f}(1) = \mathbb{P}(A)$, $\widetilde{f}(0) = 1 - \mathbb{P}(A)$ gegeben.

Definition 1.22 (Bernoulli-Verteilung)

Sei $p \in [0,1]$. Die diskrete W.-verteilung zu $\Omega = \{0,1\}$ und $f(1) = p$, $f(0) = 1 - p$ heißt *Bernoulli-Verteilung* zum Parameter p.

Bernoulli-Verteilung

Es wird ein (u. U. komplexes) Zufallsexperiment durchgeführt, und es interessiert (nur) die Frage, ob dabei ein bestimmtes Ereignis $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ eintritt oder nicht. Ist der W.raum $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), \mathbb{P})$ gegeben, so lässt sich die Situation durch die Zgr.

$$\mathbf{1}_A : \Omega \to \{0, 1\} \qquad \mathbf{1}_A(\omega) := \begin{cases} 1 & ; \omega \in A \\ 0 & ; \omega \notin A \end{cases}$$

(*Indikatorfunktion von A*) beschreiben; ihre Verteilung ist durch $\widetilde{\Omega} := \{0, 1\}$ und $\widetilde{f}(1) = \mathbb{P}(A)$, $\widetilde{f}(0) = 1 - \mathbb{P}(A)$ gegeben.

Definition 1.22 (Bernoulli-Verteilung)

Sei $p \in [0, 1]$. Die diskrete W.-verteilung zu $\Omega = \{0, 1\}$ und $f(1) = p$, $f(0) = 1 - p$ heißt *Bernoulli-Verteilung* zum Parameter p.

Interpretation: $1 \triangleq$ Ereignis tritt ein / „Erfolg“
$0 \triangleq$ Ereignis tritt nicht ein / „Misserfolg“
$p \triangleq$ Erfolgs-W.

Binomialverteilung

Frage: Ein Bernoulli-Experiment wird n-mal „unabhängig voneinander“ wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten genau k Erfolge auf?

Binomialverteilung

Frage: Ein Bernoulli-Experiment wird n-mal „unabhängig voneinander" wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten genau k Erfolge auf?
Antwort: Das n-stufige Bernoulli-Experiment lässt sich durch $\Omega = \{0,1\}^n$ und $f(\omega) = f(\omega_1, \dots, \omega_n) = p^{\omega_1}(1-p)^{1-\omega_1} \cdots p^{\omega_n}(1-p)^{1-\omega_n} = p^{k(\omega)}(1-p)^{n-k(\omega)}$ beschreiben (vgl. Beispiel 3 in Kapitel 0), wobei $k(\omega) := \sum_{i=1}^n \omega_i$ gesetzt sei.

Frage: Ein Bernoulli-Experiment wird n-mal „unabhängig voneinander" wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten genau k Erfolge auf?
Antwort: Das n-stufige Bernoulli-Experiment lässt sich durch $\Omega = \{0,1\}^n$ und $f(\omega) = f(\omega_1, \ldots, \omega_n) = p^{\omega_1}(1-p)^{1-\omega_1} \cdots p^{\omega_n}(1-p)^{1-\omega_n} = p^{k(\omega)}(1-p)^{n-k(\omega)}$ beschreiben (vgl. Beispiel 3 in Kapitel 0), wobei $k(\omega) := \sum_{i=1}^n \omega_i$ gesetzt sei.
Die Anzahl der Erfolge wird dann durch die Zufallsgröße

$$X : \Omega \to \{0, \ldots, n\} \qquad X(\omega) := \sum_{i=1}^n \omega_i$$

beschrieben;

Binomialverteilung

Frage: Ein Bernoulli-Experiment wird n-mal „unabhängig voneinander“ wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten genau k Erfolge auf?

Antwort: Das n-stufige Bernoulli-Experiment lässt sich durch $\Omega = \{0,1\}^n$ und $f(\omega) = f(\omega_1, \dots, \omega_n) = p^{\omega_1}(1-p)^{1-\omega_1} \cdots p^{\omega_n}(1-p)^{1-\omega_n} = p^{k(\omega)}(1-p)^{n-k(\omega)}$ beschreiben (vgl. Beispiel 3 in Kapitel 0), wobei $k(\omega) := \sum_{i=1}^n \omega_i$ gesetzt sei.
Die Anzahl der Erfolge wird dann durch die Zufallsgröße

$$X : \Omega \to \{0, \dots, n\} \qquad X(\omega) := \sum_{i=1}^n \omega_i$$

beschrieben; ihre Vtlg. ist durch $\widetilde{\Omega} := \{0, \dots, n\}$ und $\widetilde{f}(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $(k = 0, \dots, n)$ gegeben.

Frage: Ein Bernoulli-Experiment wird n-mal „unabhängig voneinander“ wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten genau k Erfolge auf?
Antwort: Das n-stufige Bernoulli-Experiment lässt sich durch $\Omega = \{0,1\}^n$ und $f(\omega) = f(\omega_1, \dots, \omega_n) = p^{\omega_1}(1-p)^{1-\omega_1} \cdots p^{\omega_n}(1-p)^{1-\omega_n} = p^{k(\omega)}(1-p)^{n-k(\omega)}$ beschreiben (vgl. Beispiel 3 in Kapitel 0), wobei $k(\omega) := \sum_{i=1}^n \omega_i$ gesetzt sei. Die Anzahl der Erfolge wird dann durch die Zufallsgröße

$$X : \Omega \to \{0, \dots, n\} \qquad X(\omega) := \sum_{i=1}^n \omega_i$$

beschrieben; ihre Vtlg. ist durch $\widetilde{\Omega} := \{0, \dots, n\}$ und $\widetilde{f}(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $(k = 0, \dots, n)$ gegeben.

Definition 1.23 (Binomialverteilung)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$. Die durch $f(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $(k = 0, \dots, n)$ gegebene diskrete W.verteilung auf $\{0, \dots, n\}$ heißt *Binomialverteilung* mit den Parametern n und p, kurz $\mathcal{B}(n,p) = \mathcal{B}_{n,p}$.

Binomialverteilung

Frage: Ein Bernoulli-Experiment wird n-mal „unabhängig voneinander“ wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten genau k Erfolge auf?
Antwort: Das n-stufige Bernoulli-Experiment lässt sich durch $\Omega = \{0,1\}^n$ und $f(\omega) = f(\omega_1, \dots, \omega_n) = p^{\omega_1}(1-p)^{1-\omega_1} \cdots p^{\omega_n}(1-p)^{1-\omega_n} = p^{k(\omega)}(1-p)^{n-k(\omega)}$ beschreiben (vgl. Beispiel 3 in Kapitel 0), wobei $k(\omega) := \sum_{i=1}^n \omega_i$ gesetzt sei.
Die Anzahl der Erfolge wird dann durch die Zufallsgröße

$$X : \Omega \to \{0, \dots, n\} \qquad X(\omega) := \sum_{i=1}^n \omega_i$$

beschrieben; ihre Vtlg. ist durch $\widetilde{\Omega} := \{0, \dots, n\}$ und $\widetilde{f}(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $(k = 0, \dots, n)$ gegeben.

Definition 1.23 (Binomialverteilung)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0,1]$. Die durch $f(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $(k = 0, \dots, n)$ gegebene diskrete W.verteilung auf $\{0, \dots, n\}$ heißt *Binomialverteilung* mit den Parametern n und p, kurz $\mathcal{B}(n,p) = \mathcal{B}_{n,p}$.

Interpretation: Die Binomialverteilung beschreibt die Anzahl der „Erfolge“ bei unabhängigen Versuchswiederholungen.

Beispiel zur Binomialverteilung

Frage: Aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln wird n-mal mit Zurücklegen gezogen. Mit welcher W. wird genau k-mal rot gezogen?

Beispiel zur Binomialverteilung

Frage: Aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln wird n-mal mit Zurücklegen gezogen. Mit welcher W. wird genau k-mal rot gezogen?

Antwort 1: (*mittels Rechnung*) Wir nehmen an, dass die roten Kugeln von 1 bis r, die schwarzen Kugeln von $r+1$ bis $r+s$ nummeriert sind, und wählen $\Omega = \{1, \ldots, r+s\}^n$, $\mathbb{P} = \mathcal{U}_\Omega$ (wegen Symmetrie) sowie $A_k = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega : |\{i : \omega_i \leq r\}| = k\}$. Es gilt dann

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n}{k} r^k s^{n-k}}{(r+s)^n} = \binom{n}{k} \left(\tfrac{r}{r+s}\right)^k \left(\tfrac{s}{r+s}\right)^{n-k} \Big[= \mathcal{B}_{n,r/(r+s)}(\{k\}) \Big] .$$

Beispiel zur Binomialverteilung

Frage: Aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln wird n-mal mit Zurücklegen gezogen. Mit welcher W. wird genau k-mal rot gezogen?

Antwort 1: (*mittels Rechnung*) Wir nehmen an, dass die roten Kugeln von 1 bis r, die schwarzen Kugeln von $r+1$ bis $r+s$ nummeriert sind, und wählen $\Omega = \{1, \ldots, r+s\}^n$, $\mathbb{P} = \mathcal{U}_\Omega$ (wegen Symmetrie) sowie $A_k = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega : |\{i : \omega_i \leq r\}| = k\}$. Es gilt dann

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n}{k} r^k s^{n-k}}{(r+s)^n} = \binom{n}{k} \left(\tfrac{r}{r+s}\right)^k \left(\tfrac{s}{r+s}\right)^{n-k} \left[= \mathcal{B}_{n,r/(r+s)}(\{k\}) \right].$$

Antwort 2: (*mittels Begründung*) Die Zufallsgröße X gebe an, wie oft rot gezogen wird. Da mit Zurücklegen gezogen wird, ist X $\mathcal{B}_{n,r/(r+s)}$-verteilt (als Anzahl der Erfolge bei n unabh. Versuchswiederholungen mit Erfolgs-W. $\frac{r}{r+s}$).
Die gesuchte W. ist also $\mathbb{P}_X(\{k\}) = \mathcal{B}_{n,r/(r+s)}(\{k\}) = \binom{n}{k} \left(\tfrac{r}{r+s}\right)^k \left(\tfrac{s}{r+s}\right)^{n-k}$.

Beispiel zur Binomialverteilung

Frage: Aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln wird n-mal mit Zurücklegen gezogen. Mit welcher W. wird genau k-mal rot gezogen?

Antwort 1: (*mittels Rechnung*) Wir nehmen an, dass die roten Kugeln von 1 bis r, die schwarzen Kugeln von $r+1$ bis $r+s$ nummeriert sind, und wählen $\Omega = \{1, \dots, r+s\}^n$, $\mathbb{P} = \mathcal{U}_\Omega$ (wegen Symmetrie) sowie $A_k = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega : |\{i : \omega_i \leq r\}| = k\}$. Es gilt dann

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n}{k} r^k s^{n-k}}{(r+s)^n} = \binom{n}{k} \left(\tfrac{r}{r+s}\right)^k \left(\tfrac{s}{r+s}\right)^{n-k} \Big[= \mathcal{B}_{n,r/(r+s)}(\{k\}) \Big] .$$

Antwort 2: (*mittels Begründung*) Die Zufallsgröße X gebe an, wie oft rot gezogen wird. Da mit Zurücklegen gezogen wird, ist X $\mathcal{B}_{n,r/(r+s)}$-verteilt (als Anzahl der Erfolge bei n unabh. Versuchswiederholungen mit Erfolgs-W. $\frac{r}{r+s}$). Die gesuchte W. ist also $\mathbb{P}_X(\{k\}) = \mathcal{B}_{n,r/(r+s)}(\{k\}) = \binom{n}{k} \left(\tfrac{r}{r+s}\right)^k \left(\tfrac{s}{r+s}\right)^{n-k}$.

(Beachte, dass dies ein Beispiel zu Bem. 1.21 bildet, wie Zufallsgrößen auftreten !)

Hypergeometrische Verteilung

Frage: Aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln wird n-mal ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher W. wird genau k-mal rot gezogen?

Hypergeometrische Verteilung

Frage: Aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln wird n-mal ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher W. wird genau k-mal rot gezogen?
Antwort: Wir nehmen wieder an, dass die roten Kugeln von 1 bis r, die schwarzen Kugeln von $r+1$ bis $r+s$ nummeriert sind, und wählen $\Omega = \{\omega \subseteq \{1, \ldots, r+s\} : |\omega| = n\}$ und $\mathbb{P} = \mathcal{U}_\Omega$ (wegen Symmetrie).

Hypergeometrische Verteilung

Frage: Aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln wird n-mal ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher W. wird genau k-mal rot gezogen?
Antwort: Wir nehmen wieder an, dass die roten Kugeln von 1 bis r, die schwarzen Kugeln von $r+1$ bis $r+s$ nummeriert sind, und wählen $\Omega = \{\omega \subseteq \{1, \dots, r+s\} : |\omega| = n\}$ und $\mathbb{P} = \mathcal{U}_\Omega$ (wegen Symmetrie).
Die Anzahl der roten Kugeln wird dann durch die Zufallsgröße

$$X : \Omega \to \{0, \dots, n\} \qquad X(\omega) := |\,\omega \cap \{1, \dots, r\}\,|$$

beschrieben;

Hypergeometrische Verteilung

Frage: Aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln wird n-mal ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher W. wird genau k-mal rot gezogen?
Antwort: Wir nehmen wieder an, dass die roten Kugeln von 1 bis r, die schwarzen Kugeln von $r+1$ bis $r+s$ nummeriert sind, und wählen $\Omega = \{\omega \subseteq \{1, \dots, r+s\} : |\omega| = n\}$ und $\mathbb{P} = \mathcal{U}_\Omega$ (wegen Symmetrie).
Die Anzahl der roten Kugeln wird dann durch die Zufallsgröße

$$X : \Omega \to \{0, \dots, n\} \qquad X(\omega) := |\,\omega \cap \{1, \dots, r\}\,|$$

beschrieben; ihre Vtlg. ist durch $\widetilde{\Omega} := \{0, \dots, n\}$ und $\widetilde{f}(k) := \binom{r}{k}\binom{s}{n-k}/\binom{r+s}{n}$ $(k = 0, \dots, n)$ gegeben.

Frage: Aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln wird n-mal ohne Zurücklegen gezogen. Mit welcher W. wird genau k-mal rot gezogen?
Antwort: Wir nehmen wieder an, dass die roten Kugeln von 1 bis r, die schwarzen Kugeln von $r+1$ bis $r+s$ nummeriert sind, und wählen $\Omega = \{\omega \subseteq \{1, \dots, r+s\} : |\omega| = n\}$ und $\mathbb{P} = \mathcal{U}_\Omega$ (wegen Symmetrie).
Die Anzahl der roten Kugeln wird dann durch die Zufallsgröße

$$X : \Omega \to \{0, \dots, n\} \qquad X(\omega) := |\,\omega \cap \{1, \dots, r\}\,|$$

beschrieben; ihre Vtlg. ist durch $\widetilde{\Omega} := \{0, \dots, n\}$ und $\widetilde{f}(k) := \binom{r}{k}\binom{s}{n-k}/\binom{r+s}{n}$ $(k = 0, \dots, n)$ gegeben.

Definition 1.24 (Hypergeometrische Verteilung)

Seien $r, s \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq r+s$. Die durch $f(k) := \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}$ $(k = 0, \dots, n)$ gegebene diskrete W.verteilung auf $\{0, \dots, n\}$ heißt *hypergeometrische Verteilung* mit den Parametern n, r, s, kurz $\mathcal{H}(n, r, s) = \mathcal{H}_{n,r,s}$.

Beachte, dass hier die Wahl der Parameter in der Literatur nicht einheitlich ist.

Merkregel:
Wird aus einer Urne mit r *roten Kugeln und* s *schwarzen Kugeln* n*-mal gezogen und interessiert die Anzahl* X *der Ziehungen, bei denen rot gezogen wird, so ist* X $\mathcal{B}(n, \frac{r}{r+s})$*- bzw.* $\mathcal{H}(n, r, s)$*-verteilt, wenn mit bzw. ohne Zurücklegen gezogen wird.*

Approximation der hypergeometrischen Verteilung durch die Binomialverteilung.

Sind in der obigen Situation r und s „sehr groß“ im Vergleich zu n, so sollte es keine Rolle spielen, ob mit oder ohne Zurücklegen gezogen wird.

Approximation der hypergeometrischen Verteilung durch die Binomialverteilung.

Sind in der obigen Situation r und s „sehr groß" im Vergleich zu n, so sollte es keine Rolle spielen, ob mit oder ohne Zurücklegen gezogen wird.

Satz 1.25

Sind $(r_N)_{N\in\mathbb{N}}$, $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *Folgen natürlicher Zahlen mit* $\lim_{N\to\infty} r_N = \infty$, $\lim_{N\to\infty} s_N = \infty$ *und* $\lim_{N\to\infty} r_N/(r_N+s_N) = p$ *und ist* $n \in \mathbb{N}$ *fest, so gilt* $\lim_{N\to\infty} \mathcal{H}(n, r_N, s_N)(\{k\}) = \mathcal{B}(n, p)(\{k\})$ *für alle* $k = 0, \ldots, n$.

Beweis:

Approximation der hypergeometrischen Verteilung durch die Binomialverteilung.

Sind in der obigen Situation r und s „sehr groß“ im Vergleich zu n, so sollte es keine Rolle spielen, ob mit oder ohne Zurücklegen gezogen wird.

Satz 1.25

Sind $(r_N)_{N\in\mathbb{N}}$, $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ Folgen natürlicher Zahlen mit $\lim_{N\to\infty} r_N = \infty$, $\lim_{N\to\infty} s_N = \infty$ und $\lim_{N\to\infty} r_N/(r_N+s_N) = p$ und ist $n \in \mathbb{N}$ fest, so gilt $\lim_{N\to\infty} \mathcal{H}(n, r_N, s_N)(\{k\}) = \mathcal{B}(n,p)(\{k\})$ für alle $k = 0, \dots, n$.

Beweis:

Für festes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\frac{1}{N^k}\binom{N}{k} = \frac{1}{N^k}\frac{N!}{(N-k)!\,k!} = \frac{N}{N} \cdot \frac{N-1}{N} \cdot \ldots \cdot \frac{N-k+1}{N}\frac{1}{k!} \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{k!}$.

Approximation der hypergeometrischen Verteilung durch die Binomialverteilung.

Sind in der obigen Situation r und s „sehr groß“ im Vergleich zu n, so sollte es keine Rolle spielen, ob mit oder ohne Zurücklegen gezogen wird.

Satz 1.25

Sind $(r_N)_{N\in\mathbb{N}}$, $(s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ Folgen natürlicher Zahlen mit $\lim_{N\to\infty} r_N = \infty$, $\lim_{N\to\infty} s_N = \infty$ und $\lim_{N\to\infty} r_N/(r_N+s_N) = p$ und ist $n \in \mathbb{N}$ fest, so gilt $\lim_{N\to\infty} \mathcal{H}(n, r_N, s_N)(\{k\}) = \mathcal{B}(n,p)(\{k\})$ für alle $k = 0, \dots, n$.

Beweis:

Für festes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\frac{1}{N^k}\binom{N}{k} = \frac{1}{N^k}\frac{N!}{(N-k)!\,k!} = \frac{N}{N} \cdot \frac{N-1}{N} \cdot \ldots \cdot \frac{N-k+1}{N}\frac{1}{k!} \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{k!}$.
Damit folgt für alle $k = 0, \dots, n$

$$\frac{\binom{r_N}{k}\binom{s_N}{n-k}}{\binom{r_N+s_N}{n}} = \frac{\frac{1}{r_N^k}\binom{r_N}{k}\frac{1}{s_N^{n-k}}\binom{s_N}{n-k}}{\frac{1}{(r_N+s_N)^n}\binom{r_N+s_N}{n}} \frac{r_N^k}{(r_N+s_N)^k} \frac{s_N^{n-k}}{(r_N+s_N)^{n-k}} \xrightarrow{N\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Poisson-Verteilung I

Frage: Wie verhält sich bei der Binomialverteilung die W. für (genau) k Erfolge, wenn man die Anzahl n der unabhängigen Versuchswiederholungen vergrößert und zugleich die Erfolgs-W. p_n verkleinert, so dass $\lim_{n\to\infty}(np_n) = \lambda \in [0, \infty[$?

Poisson-Verteilung I

Frage: Wie verhält sich bei der Binomialverteilung die W. für (genau) k Erfolge, wenn man die Anzahl n der unabhängigen Versuchswiederholungen vergrößert und zugleich die Erfolgs-W. p_n verkleinert, so dass $\lim_{n\to\infty}(np_n) = \lambda \in [0,\infty[$?

Antwort: Für jedes feste $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}$.

Poisson-Verteilung I

Frage: Wie verhält sich bei der Binomialverteilung die W. für (genau) k Erfolge, wenn man die Anzahl n der unabhängigen Versuchswiederholungen vergrößert und zugleich die Erfolgs-W. p_n verkleinert, so dass $\lim_{n\to\infty}(np_n) = \lambda \in [0,\infty[\,$?

Antwort: Für jedes feste $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}$.

Exponentialfunktion:

$f(x) = e^x$ wobei $e = 2.718\ldots$ $\qquad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad x_n \to x \;\Rightarrow\; \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n \to e^x$

Poisson-Verteilung I

Frage: Wie verhält sich bei der Binomialverteilung die W. für (genau) k Erfolge, wenn man die Anzahl n der unabhängigen Versuchswiederholungen vergrößert und zugleich die Erfolgs-W. p_n verkleinert, so dass $\lim_{n\to\infty}(np_n) = \lambda \in [0,\infty[$?

Antwort: Für jedes feste $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}$.

Exponentialfunktion:

$$f(x) = e^x \text{ wobei } e = 2.718\ldots \qquad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad x_n \to x \;\Rightarrow\; \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n \to e^x$$

denn:

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}(np_n)^k\left(1 - \tfrac{np_n}{n}\right)^{n-k} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}\,.$$

Poisson-Verteilung I

Frage: Wie verhält sich bei der Binomialverteilung die W. für (genau) k Erfolge, wenn man die Anzahl n der unabhängigen Versuchswiederholungen vergrößert und zugleich die Erfolgs-W. p_n verkleinert, so dass $\lim_{n\to\infty}(np_n) = \lambda \in [0,\infty[\,$?

Antwort: Für jedes feste $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}$.

Exponentialfunktion:

$f(x) = e^x$ wobei $e = 2.718\ldots$ $\qquad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad x_n \to x \;\Rightarrow\; \left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n \to e^x$

denn:

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}(np_n)^k(1-\tfrac{np_n}{n})^{n-k} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}.$$

Die erhaltenen Werte definieren wegen

$$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \geq 0 \;\forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{+\lambda} = 1$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{N}_0$.

Poisson-Verteilung I

Frage: Wie verhält sich bei der Binomialverteilung die W. für (genau) k Erfolge, wenn man die Anzahl n der unabhängigen Versuchswiederholungen vergrößert und zugleich die Erfolgs-W. p_n verkleinert, so dass $\lim_{n\to\infty}(np_n) = \lambda \in [0, \infty[$?

Antwort: Für jedes feste $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}$.

Definition 1.26 (Poisson-Verteilung)

Sei $\lambda \in [0, \infty[$. Die durch $f(k) := e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ gegebene diskrete W.verteilung auf $\mathbb{N}_0$ heißt *Poisson-Verteilung* mit dem Parameter λ, kurz $\mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{P}_\lambda$.

Poisson-Verteilung I

Frage: Wie verhält sich bei der Binomialverteilung die W. für (genau) k Erfolge, wenn man die Anzahl n der unabhängigen Versuchswiederholungen vergrößert und zugleich die Erfolgs-W. p_n verkleinert, so dass $\lim_{n\to\infty}(np_n) = \lambda \in [0, \infty[$?

Antwort: Für jedes feste $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}$.

Definition 1.26 (Poisson-Verteilung)

Sei $\lambda \in [0, \infty[$. Die durch $f(k) := e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ gegebene diskrete W.verteilung auf $\mathbb{N}_0$ heißt *Poisson-Verteilung* mit dem Parameter λ, kurz $\mathcal{P}(\lambda) = \mathcal{P}_\lambda$.

Satz 1.27 (Poisson'scher Grenzwertsatz)

Ist $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $[0,1]$ *mit* $\lim\limits_{n\to\infty}(np_n) = \lambda \in [0, \infty[$, *so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{B}(n, p_n)(\{k\}) = \mathcal{P}(\lambda)(\{k\})$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Poisson-Verteilung II

Bemerkung 1.28

Die Poisson-Verteilung liefert ein einfaches Modell zur Beschreibung der Anzahl der Ereignisse (Erdbeben, Unfälle, Telefonanrufe, E-Mails, Druckaufträge, Rechnerabstürze, ...) in einem festen Zeitraum.

Poisson-Verteilung II

Bemerkung 1.28

Die Poisson-Verteilung liefert ein einfaches Modell zur Beschreibung der Anzahl der Ereignisse (Erdbeben, Unfälle, Telefonanrufe, E-Mails, Druckaufträge, Rechnerabstürze, ...) in einem festen Zeitraum.

Begründung:
Sei $t > 0$ fest. Wir zerlegen das Intervall $I =]0, t]$ für großes $n \in \mathbb{N}$ in n Teilintervalle $I_k =]\frac{(k-1)t}{n}, \frac{kt}{n}]$, $k = 1, \dots, n$,

Bemerkung 1.28

Die Poisson-Verteilung liefert ein einfaches Modell zur Beschreibung der Anzahl der Ereignisse (Erdbeben, Unfälle, Telefonanrufe, E-Mails, Druckaufträge, Rechnerabstürze, ...) in einem festen Zeitraum.

Begründung:
Sei $t > 0$ fest. Wir zerlegen das Intervall $I =]0, t]$ für großes $n \in \mathbb{N}$ in n Teilintervalle $I_k =]\frac{(k-1)t}{n}, \frac{kt}{n}]$, $k = 1, \dots, n$, und treffen die folgenden Annahmen:

(i) In jedem Teilintervall tritt höchstens 1 Ereignis auf.

(ii) Die W. p hierfür ist proportional zur Intervalllänge, also $p = \lambda t/n$.
($\lambda \triangleq$ *Intensität*)

(iii) Ereignisse in verschiedenen Intervallen sind „unabhängig voneinander“.

Poisson-Verteilung II

Bemerkung 1.28

Die Poisson-Verteilung liefert ein einfaches Modell zur Beschreibung der Anzahl der Ereignisse (Erdbeben, Unfälle, Telefonanrufe, E-Mails, Druckaufträge, Rechnerabstürze, ...) in einem festen Zeitraum.

Begründung:
Sei $t > 0$ fest. Wir zerlegen das Intervall $I =]0, t]$ für großes $n \in \mathbb{N}$ in n Teilintervalle $I_k =]\frac{(k-1)t}{n}, \frac{kt}{n}]$, $k = 1, \dots, n$, und treffen die folgenden Annahmen:

(i) In jedem Teilintervall tritt höchstens 1 Ereignis auf.
(ii) Die W. p hierfür ist proportional zur Intervalllänge, also $p = \lambda t/n$. ($\lambda \triangleq$ *Intensität*)
(iii) Ereignisse in verschiedenen Intervallen sind „unabhängig voneinander“.

Dann ist die Anzahl der Ereignisse im Intervall $I =]0, t]$
(als Anzahl der „Erfolge“ bei unabhängigen Versuchswiederholungen)
näherungsweise $\mathcal{B}_{n,\lambda t/n}$-verteilt bzw. $\mathcal{P}_{\lambda t}$-verteilt.

Geometrische Verteilung

Frage: Ein Bernoulli-Experiment wird „unabhängig voneinander“ wiederholt, bis der erste Erfolg eintritt. Mit welcher W. geschieht dies im k-ten Versuch?

Geometrische Verteilung

Frage: Ein Bernoulli-Experiment wird „unabhängig voneinander" wiederholt, bis der erste Erfolg eintritt. Mit welcher W. geschieht dies im k-ten Versuch?
Antwort: Das k-stufige Bernoulli-Experiment lässt sich durch $\Omega = \{0,1\}^k$ und $f(\omega) = f(\omega_1, \ldots, \omega_k) = p^{\omega_1}(1-p)^{1-\omega_1} \cdots p^{\omega_k}(1-p)^{1-\omega_k}$ beschreiben.

Geometrische Verteilung

Frage: Ein Bernoulli-Experiment wird „unabhängig voneinander" wiederholt, bis der erste Erfolg eintritt. Mit welcher W. geschieht dies im k-ten Versuch?
Antwort: Das k-stufige Bernoulli-Experiment lässt sich durch $\Omega = \{0, 1\}^k$ und $f(\omega) = f(\omega_1, \dots, \omega_k) = p^{\omega_1}(1-p)^{1-\omega_1} \cdots p^{\omega_k}(1-p)^{1-\omega_k}$ beschreiben.
Es interessiert das Ereignis $A_k := \{(0, \dots, 0, 1)\}$; die W. ist $\mathbb{P}(A_k) = (1-p)^{k-1}p$.

Geometrische Verteilung

Frage: Ein Bernoulli-Experiment wird „unabhängig voneinander“ wiederholt, bis der erste Erfolg eintritt. Mit welcher W. geschieht dies im k-ten Versuch?
Antwort: Das k-stufige Bernoulli-Experiment lässt sich durch $\Omega = \{0,1\}^k$ und $f(\omega) = f(\omega_1, \ldots, \omega_k) = p^{\omega_1}(1-p)^{1-\omega_1} \cdots p^{\omega_k}(1-p)^{1-\omega_k}$ beschreiben.
Es interessiert das Ereignis $A_k := \{(0, \ldots, 0, 1)\}$; die W. ist $\mathbb{P}(A_k) = (1-p)^{k-1}p$.

Definition 1.29 (Geometrische Verteilung)

Sei $p \in]0,1]$. Die durch $f(k) := (1-p)^{k-1}p$ ($k \in \mathbb{N}$) gegebene diskrete W.verteilung auf $\mathbb{N}$ heißt *geometrische Verteilung* mit dem Parameter p, kurz $\mathcal{G}(p) = \mathcal{G}_p$.

Geometrische Verteilung

Frage: Ein Bernoulli-Experiment wird „unabhängig voneinander“ wiederholt, bis der erste Erfolg eintritt. Mit welcher W. geschieht dies im k-ten Versuch?
Antwort: Das k-stufige Bernoulli-Experiment lässt sich durch $\Omega = \{0,1\}^k$ und $f(\omega) = f(\omega_1, \ldots, \omega_k) = p^{\omega_1}(1-p)^{1-\omega_1} \cdots p^{\omega_k}(1-p)^{1-\omega_k}$ beschreiben.
Es interessiert das Ereignis $A_k := \{(0, \ldots, 0, 1)\}$; die W. ist $\mathbb{P}(A_k) = (1-p)^{k-1}p$.

Definition 1.29 (Geometrische Verteilung)

Sei $p \in]0,1]$. Die durch $f(k) := (1-p)^{k-1}p$ ($k \in \mathbb{N}$) gegebene diskrete W.verteilung auf $\mathbb{N}$ heißt *geometrische Verteilung* mit dem Parameter p, kurz $\mathcal{G}(p) = \mathcal{G}_p$.

Interpretation: Die geometrische Verteilung beschreibt die Anzahl der Versuche bis zum ersten „Erfolg“ bei unabhängigen Versuchswiederholungen.

Beachte, dass auch hier die Literatur nicht einheitlich ist – oft wird auch die um 1 verschobene Verteilung auf $\mathbb{N}_0$ als geom. Verteilung bezeichnet.

Zusammenfassung:

- *Interessieren wir uns bei einem gegebenen (diskreten) W.raum nur für einen speziellen Aspekt, so können wir mit Hilfe einer Zufallsgröße (≈ Filter) zu einem neuen, in der Regel einfacheren (diskreten) W.raum übergehen.*
- *Eine Zufallsgröße auf einem diskreten W.raum ist eine Abbildung* $X : \Omega \to \mathcal{X}$ *(mit Werten in einer abzählbaren Menge* $\mathcal{X}$*).*
- *Die Verteilung einer solchen Zufallsgröße bestimmen wir, indem wir die zugehörigen Elementar-W.en* $\mathbb{P}(X = x)$, $x \in \mathcal{X}$, *bestimmen.*
- *Auf diese Weise lassen sich aus gegegeben W.verteilungen (z. B. aus diskreten Gleichverteilungen* $\rightsquigarrow$ *Kombinatorik) weitere W.verteilungen „erzeugen“.*
- *Wir haben einige wichtige diskrete W.verteilungen kennengelernt (Binomialverteilung, hypergeometrische Verteilung, Poisson-Verteilung, geometrische Verteilung).*