Kapitel 1

Kombinatorik

1.1 Grundformeln

Seien A, B endliche Mengen.
Summenregel: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$
Produktregel: $|A \times B| = |A||B|$
Gleichheitsregel: $\exists$ bijektive Abbildung $f : A \to B \Rightarrow |A| = |B|$

Sei $n := |A|$ und $k := |B|$.

Variationen mit Wiederholung:
Anzahl aller Abbildungen von A in $B = k^n$

Variationen ohne Wiederholung:
Anzahl aller injektiven Abbildungen von A in $B = (k)_n := k(k-1)\dots(k-n+1)$ (fallende Faktorielle)

Permutationen ohne Wiederholung:
Anzahl aller bijektiven Abbildungen von A auf $A = n!$

Permutationen mit Wiederholung:
Sei $i_1 + \dots + i_k = n$. Anzahl aller Abbildungen $f : A \to \{b_1, \dots, b_k\}$, bei denen i_j Elemente von A auf b_j abgebildet werden $= \binom{n}{i_1,\dots,i_k} := \frac{n!}{i_1!\dots i_k!}$

Kombinationen ohne Wiederholung:
Anzahl aller k–elementigen Teilmengen von $A = \binom{n}{k}$

Kombinationen mit Wiederholung:
Anzahl aller Abbildungen $f : \{a_1, \dots, a_n\} \to \mathbb{N}$ mit $f(a_1) + \dots + f(a_n) = k$ $= \binom{n+k-1}{k}$

Satz 1.2.4. *Sei* $(y_n^{(s)})$ *eine spezielle Lösung der inhomogenen LRGL (1.3).* $(y_n^{(a)})$ *ist Lösung von (1.3)* $\Leftrightarrow \exists$ *Lösung* $(y_n^{(H)})$ *von (1.4), sodass* $y_n^{(a)} = y_n^{(s)} + y_n^{(H)}$ *für alle* n *ist, d.h., die allgemeine Lösung der inhomogenen LRGL ist Summe aus einer speziellen Lösung der inhomogenen LRGL und einer beliebigen Lösung der zugehörigen homogenen LRGL.*

Ähnlich wie bei DGL kann man spezielle Lösungen mittels Variation der Konstanten bestimmen, was wir hier nicht im Einzelnen behandeln.

Außerdem kann man wie bei DGL bei speziellen rechten Seiten spezielle Lösungen durch analoge Ansätze erhalten, hier nur zwei Beispiele:

1. b_n ist Polynom in n. Dann Ansatz $(y_n^{(s)})$ als Polynom in n mit unbekannten Koeffizienten, die man aus Koeffizientenvergleich durch Einsetzen in (1.3) erhält.

2. b_n ist Potenz in n, deren Basis nicht Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Dann Ansatz $(y_n^{(s)})$ als gleiche Potenz in n mit unbekanntem Faktor, den man aus Einsetzen in (1.3) erhält.

1.3 Das Prinzip von Inklusion und Exklusion

Satz 1.3.1 (Prinzip von Inklusion und Exklusion)**.** *Seien* $A_1, \dots, A_n$ *endliche Mengen. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \dots + \\ (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| \pm \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|\end{aligned}$$

Folgerung 1.3.1. *Seien die Mengen* $A_1, \dots, A_n$ *alle in einer endlichen Menge* Ω *enthalten. Sind die Mächtigkeiten der Durchschnitte von beliebigen* k *Mengen immer gleich einer festen Zahl* $w(k)$, $k = 1, \dots, n$, *und setzt man* $w(0) := |\Omega|$, *so gilt*

$$|\Omega \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} w(k).$$

Folgerung 1.3.2. *Für die Anzahl* D_n *aller fixpunktfreien Permutationen von* $\{1, \dots, n\}$ *gilt*

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

1 Lineare Rekursionsgleichungen

Derangementzahl: $D_n = (n-1) \cdot (D_{(n-1)} + D_{(n-2)}) \forall n \geq 2$
$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n \forall n \geq 1$
$D_0 := 1$
Charakteristische Gleichung: $p(\lambda) = a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + a_{k-2}\lambda^{k-2} + ... + a_0 = 0$
$c_1 y_n^{(1)} + c_2 y_n^{(2)} + c_3 y_n^{(3)} + ... + c_k y_n^{(k)} \rightarrow$ c ausrechnen

1.1 inhomogene

Störfunktion der Form: $\sum_{k=1}^{n} x_k f_k = y$
$f_{partikular,n} = c_{n+2} * n^k + \cdots + c_0$, k der Grad der Störfunktion (normalerweise 1 oder 2)
$\rightarrow$die Partikularformeln mit dem entsprechenden n in der Störfunktion einfügen.
`https://de.wikipedia.org/wiki/Lineare_Differenzengleichung#Beispiel_2` $\rightarrow$ nach den Konstanten auflösen. Anzahl aller surjektiven Abbildungen von A (n) auf B (k)
$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n}{k} (k-i)^n$

2 Körper und Strukturen

R reflexiv: ∀ a aRa
R symmetrisch: ∀ a,b ∈ A aRb ⇒ bRa
R transitiv: ∀ a,b,c ∈ A aRb ∧ bRc ⇒ aRc
R Aquivalenzrelation: ⇔ R reflexiv, transitiv, symmetrisch
Stirling-Zahlen 2. Art (Anzahl der n-elemtigen Mengen in k Klassen):
$S_{0,0} = 1, S_{n,0} = S_{0,k} = 0, n, k \neq 0$ $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$ für n,k ≥ 1
$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-1)^n$

2.1 Halb- und Gruppen

(H,⊙) ist Halbgruppe: ⇔ $\forall a, b, c \in H : a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$
abelsch: ⇔ ∀ a,b ∈ H: a ⊙ b = b ⊙ a
Neutrales Element e : ⇔ ∀ a ∈ H: a ⊙ e = e ⊙ = a
(H, ⊙) Monoid: ⇔ Halbgruppe mit neutralem Element
(H, ⊙) Gruppe: ⇔ Monoid und alle Elemente invertierbar:
∀ a ∈ H ∃ a' ∈ H : a ⊙ a' = e
∀ a,b ∈ H: (a ⊙ b $)^{-1}$ = b^{-1}⊙a^{-1}
a^i = a ⊙ · · · ⊙ a → Potenzgesetze
isomorph: (G1, $\circ_1$) zu (G2, $\circ_2$) seinen Gruppen
∃ f∀a,b ∈ G_1 : f(a $\circ_1$ b) = f(a) $\circ_2$ f(b)

2.2 Ringe & Körper

(R, + , ·) Ring: ⇔

- (R,+) ist abelsche Gruppe
- (R, ·) ist Halbgruppe

- $\forall$a,b,c: a $\cdot$ (b + c) = a $\cdot$ b + a $\cdot$ c und (a+b) $\cdot$ c = a $\cdot$ c + b $\cdot$ c

Kommutativ: Halbgruppe ist abelsch sec

3 Algorithmen

3.1 RSA

Absender A, Empfänger E
E: wählen p,q Primzahlen, n: = p*q
E: m:= ϕ(n) =(p-1)*(q-1), ermitteln g teilerfremd m, 1<g<m, wählt kg = 1 mod m
E: sendet k und n A: sendet e = a^k mod n B: a := e^g mod n

3.2 Zahlentheorie & Erweiterter Euklid

jede Zahl lässt sich in endlich viele Primfaktoren zerlegen
ggT (a,b) = ggT(b, a-qb)=ggT(b, a mod b) $\forall$ (a,b) $\neq$ (0,0) $\exists$ α, β ggTa,b) = αa + βb (α und β können auch 0 annehmen für 1 inverses) $\rightarrow$ erweiterter euklidischer algorithmus

a	b	q	α_0 (init: 1)	α_1 (init: 0)	β_0 (init: 0)	β_1 (init: 1)	alt
b	a mod b	$\lfloor$a/b$\rfloor$	α_1	α_0 - $q_{neu}\alpha_1$	β_1	β_0 - $q_{neu}\beta_1$	neu (ohne $_{neu}$ sind die alten)

Ausgabe: a, α_0, β_0

4 Lineare Optimierung

4.1 Simplextabelle

		NB
	w	g^T
B	s	R

B:=Basisvariablen (Berechnung über Gauß)
NB:=Nichtbasisvariablen
R:= Die Matrix über NB
s:=Lösungsvektor
x_B:=Vektor von Basisvariablen:=s-Rx_{NB}
(in Zielfunktion einsetzen)
ZF:=w -$\mathbf{g}^T\mathbf{x}_{NB} -> max$

4.2 Simplex Algorithmus + Regel von Bland

Gegeben: Gefüllte Simplextabelle.
Iteration:

1. Finde ein l mit $g_l < 0$. Gibt es ein solches l nicht, so ist die optimale Lösung aus der aktuellen Simplextabelle ablesbar, STOP.
Das dazugehörige γ_l muss minimal sein.
2. Finde ein k mit $r_{k_l} > 0$ und $\frac{s_k}{r_{l_k}} = \min\{\frac{s_i}{r_{i_l}} : i \in [m], r_{i_l} > 0\}$.Gibt es ein solches k nicht, so ist die Zielfunktion unbeschränkt, STOP.
Das dazugehörige β_k muss minimal sein.
3. Führe den Austausch gemäß Satz 4.4.3 durch.

Satz 4.4.3

Tausche $\beta_k \leftrightarrow \gamma_l$.
Die restliche Tabelle ergibt sich wie folgt:

1. $w' = r'_{0_0}$
2. $\mathbf{g'^T} = \begin{pmatrix} r'_{0_1} & \dots & r'_{0_m} \end{pmatrix}$
3. $\mathbf{s'} = \begin{pmatrix} r'_{1_0} \\ \vdots \\ r'_{n_0} \end{pmatrix}$
4. $r'_{i_j} = \begin{cases} \frac{1}{r_{i_j}} & falls\ i = k, j = l \\ \frac{r_{i_j}}{r_{k_l}} & falls\ i = k, j = 0 \dots n \neq l \\ -\frac{r_{i_l}}{r_{k_l}} & falls\ i = 0 \dots m \neq k, j = l \\ r_{i_j} - \frac{r_{i_l} \cdot r_{k_j}}{r_{k_l}} & falls\ i = 0 \dots m \neq k, j = 0 \dots n \neq l \end{cases}$

$falls\ i = k, j = l$	1/Pivotelement
$falls\ i = k, j = 0 \dots n \neq l$	Spalte des Pivotelements durch Pivotelement
$falls\ i = 0 \dots m \neq k, j = l$	Negation der Zeile durch Pivotelement
$falls\ i = 0 \dots m \neq k, j = 0 \dots n \neq l$	Element Pivotzeile * Pivotspalte / Pivotelement

5 Grundefinitionen Stochastik

Ω Ereignismenge f(ω) ,$\omega \in \Omega$ Wahrscheinlichkeiten Diskreter W.raum: $\Omega \neq \emptyset$, f : $\Omega \to \mathbb{R}$ $\sum_{\Omega} f(\omega) = 1$ Potenzmenge: $\mathbb{B}$, $\mathbb{P} : \mathbb{B} \to \mathbb{R}$, Rechengesetze für Mengen

geordnete Stichproben	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!}$
ungeordnete Stichproben	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

Seien $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ Ereignismengen $\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in \mathbb{Y}} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$

6 Verteilungen

6.1 Bernoulli

Ω ={0,1} , f(1)=p, (0)=1-p

6.2 Binomialverteilung

$f(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
$\mathbb{E}(X) = np$
$\mathbb{E}(X)^2 = n^2p^2 + np(1-p)$ Approximation bei großem n und kleinem p durch Poisson

6.3 Hypergeometrisch

$f(k) := \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}}$
$\mathbb{E}(X) = \frac{nr}{r+s}$
Approximation für sehr großes n$\to \infty$:
$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = Binomial(n,p)(\{k\})$

6.4 Poisson

Erhöhung der Versuche auf unendlich(Erfolge bleiben gleich)
$\lim_{n \to \infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{k!} \lambda^k e^{-\lambda}$
$\mathbb{E}(X) = \delta$
$\mathbb{E}^{\not\models}(X^2) = \lambda^2 + \lambda$

6.5 Geometrisch

Wiederholung desselben Versuches bis Erfolg (k Stufen)
Ω\{0,1\} ^{k}
$f(k) := (1-p)^{k-1} p$
$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$
$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{p^2}$

6.6 Gleichverteilung

$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{(a,b)}(x)$, $\infty < a < b < \infty$

6.7 Exponentialverteilung

$$f(x) := \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{(0,\infty)(x)}, \lambda > 0$$
$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\frac{1}{\lambda}}$$
$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}$$

6.8 Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in (0,\infty)$$
$$\mathbb{E}(X) = \mu$$

6.9 stetiges Wahrscheinlichkeitsmaß

f(x), stetig W.dichte

$$\mathbb{P}(I) = \int_I f(x)dx = \mathbb{P}([a,b] = F(b) - F(a)) = \int\int f_{(X,Y)}(x,y)\ dy\ dx$$

7 Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Unabhängigkeit:$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P} \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

8 Allgemeiner Erwartungswert / Varianz

diskret: $\mathbb{E}X = \sum_{x\in\mathbb{X}} x\mathbb{P}(X = x), \mathbb{E}|X| = \sum_{x\in\mathbb{X}} |x|\mathbb{P}(X = x) < \infty$ stetig:

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$
$$\mathbb{E}X^n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx$$

Regeln: $\mathbb{E}(h \circ X) = \sum_{x\in\mathbb{X}}(h(y))x\mathbb{P}(X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)xf(x)dx$

8.1 Varianz und Kovarianz

Varianz: $\mathbb{V}ar(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)^2)$ Standartabweichung: $\sigma(X) := \sqrt{\mathbb{V}ar(X)}$

Kovarianz: $\mathbb{C}ov(X,Y) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)$

Korrelationskoeffizient: ρ(X,Y)=$\frac{\mathbb{C}ov(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}ar(X)\cdot\mathbb{V}ar(Y)}}$ Kovarianz postiv $\rightarrow$ postive Korrelation

""" negativ $\rightarrow$ negative Korrelation

""" 0 $\rightarrow$ keine Korrelation

Satz (Rechenregeln für Erwartungwerte).
Es seien X und Y Zufallsgrößen, so dass $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(Y)$ existieren, und $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(a) $\mathbb{E}(aX + bY)$ *existiert, und* $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$. *(Linearität)*

(b) Aus $X \leq Y$ *folgt* $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$. *(Monotonie)*

(c) $\mathbb{E}(c) = c$.

(d) Sind X, Y *unabhängig, so existiert* $\mathbb{E}(XY)$, *und es gilt* $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$. *(Multiplikationssatz)*

Satz 4.18 (Eigenschaften der Varianz). *Seien X und Y Zufallsgrößen mit $\mathbb{E}X^2 < \infty$ und $\mathbb{E}Y^2 < \infty$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) \geq 0$, *wobei* $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X = c) = 1$.

(b) $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$. *(Verschiebungssatz)*

(c) $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X + b) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$.

(d) $\mathbb{V}\mathrm{ar}(aX) = a^2\,\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$.

(e) $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X + Y) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y) + 2\mathbb{E}((X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y))$.

9 Gesetze der großen Zahlen

9.1 schwache

$$\mathrm{P}\left(|R_n - p| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$
$$\rightarrow \forall \epsilon > 0 \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(|R_n - p| \geq \varepsilon\right) = 0$$

9.2 starke

$$\mathrm{P}\left(\limsup_{n\to\infty} |\overline{X}_n| = 0\right) = 1$$

9.3 zentraler Grenzwert

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{d} Z$$

10 Approximation

Sei S_n die Summe einer n-stelligen Reihe mit unabhängigen Zufallsgrößen, μ Erwartungswert, σ^2 Varianz normal-aproximierbar mit (gut bei n über 30)

$$\int_{\frac{a-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}}^{\frac{b-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}}$$

Normalapproximation der Binomialverteilung:

$$P(a \leq S_n \leq b) \approx \int_{\frac{a-np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{b-np}{\sqrt{npq}}} \varphi(x)dx = \phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\right), q := 1 - p$$

11 Statistik

Produktdichte: $f_\varphi(x) := \prod_{i=1}^n \tilde{f}_\varphi(x_i)$

(a) $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,X) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$.

(b) $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. (*Verschiebungssatz*)

[12] Dieser Satz ist in der Vorlesung mit Ausnahme von Teil (b) übersprungen

80

(c) $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X+c, Y+d) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)$.

(d) $\mathbb{C}\mathrm{ov}(aX,Y) = a\,\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)$.
$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,bY) = b\,\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)$.

(e) $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X+Y,Z) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Z) + \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y,Z)$.
$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y+Z) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Z) + \mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)$.

(f) $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y,X)$. (*Symmetrie*)

Zähldichte:
$f_\varphi(x) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \to L_k(p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, k ist Beobachtungswert
Maximum-Likehood-Schätzer: Nimm die größte Likelihoodfunktion
Likelihood-Funktion:
$L_x(\mu)(\vartheta_{ML}(x)) = \max_{\vartheta \in \Theta} L_x(\vartheta)$:
$f_\mu(x) \to max$
Log-Likelihood: lx(μ)=$log L_x(\mu)$, hat dieseelben Maxima und Minima wie die Likehood-funktion