集合

目次

集合って何だ？

数学の世界にはいろいろな“モノ”がある． たとえば1や3のような数字はモノである．もっと難しい数字, たとえば-2や$\frac{5}{3}$, あるいは$\sqrt{6}$やπ（$= 3.1415...$）だってモノである．

数字でなくともよい． 文字aやζもモノとみなせる． あるいは関数$f(x) = x^2$や$h(x,y) = x/y$もモノと考えられる．

こういった“モノ”を集めたのが**集合**である． 集合はたとえば

$$X = \{1, 2, 3\} \tag{1}$$

とかける． この式では集合の枠$\{\quad\}$の中に，$1, 2, 3$という 3 つの数字が入っている． つまり，Xは 3 つの数字を集めた集合である． これを，**$1, 2, 3$を元（げん）にもつ集合**という．

集合Xは，1を元としてもつ． このことを,

$$1 \in X \quad \text{とか，} \quad 1 \ni X \tag{2}$$

とかく．[1] 一方，Xは6を元としてもたない． これは,

$$6 \notin X \quad \text{とか，} \quad 6 \not\ni X \tag{3}$$

とかく．[2]

元をひとつも含まない集合を**空集合**といい，$\emptyset$とかく．形式的にかくと，$\emptyset = \{\}$である．

---

[1]集合Xがクワ“$\in$”を使って1を取り込んでいるイメージである．
[2]等しくないというため，$=$に線を引いて$\neq$にしたのと同じ．

集合の書き方

前節では，集合がもつ元を

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \tag{4}$$

のように書き連ねてあらわした．　このように具体的に元を列挙するのではなく，

$$\mathbb{Z} = \{n \mid n \text{ は整数}\} \tag{5}$$

のように，元の満たすべき条件を書くことがある．

そもそも考える世界を$\mathbb{R}$（実数の集合）だけに限って，$\mathbb{R}$に含まれる元の中で，特定の条件を満たすもの

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{R} \,\middle|\, p: \text{整数}, q: \text{自然数} \right\} \tag{6}$$

とかくこともある（この場合の$\mathbb{Q}$は有理数である）．

例えば，$\mathbb{N}$を自然数の集合（$\{1, 2, 3, ...\}$）とすると，

$$A = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n < 5\} = \{1, 2, 3, 4\} \tag{7}$$

である．

ラッセルのパラドックス

本論には関係ないが，集合について面白いことがある．

実は, 集合Xが自分自身を元として含むことは, 特に禁止されていない．つまり，$X = \{X, a, b\}$ という無限ループのような集合も許される．

Xを,「集合をあつめた集合」（**集合族**）として，Xの部分集合

$$\mathcal{S} := \{A \in X \mid A \notin A\} \tag{8}$$

というのを考えてみよう．つまり, $\mathcal{S}$は「自分自身を元として含まない集合Aのあつまり」である．

定義より明らかに$\mathcal{S} \subset X$であるが, これに加えて$\mathcal{S}$がXの元(つまり$\mathcal{S} \in X$）と仮定しよう． すると

1. $\mathcal{S} \in \mathcal{S}$なら，$\mathcal{S}$の定義より$\mathcal{S} \notin \mathcal{S}$が成立する．明らかに矛盾．
2. $\mathcal{S} \notin \mathcal{S}$なら，$\mathcal{S}$の定義より$\mathcal{S} \in \mathcal{S}$である．やはり矛盾する．

したがって，$\mathcal{S}$はXの元ではない．

ここで，もし$\mathcal{S}$が

$$\mathcal{S} = \{\text{集合}A \mid A \notin A\} \tag{9}$$

と定義されたとする．先ほどのように「$\mathcal{S}$はXの元ではない」という言い訳が効かないので, 矛盾してしまう．このように, 実は$\{a \in X \mid ...\}$における$\in X$は，必要不可欠なのである．

集合の演算

1. **和集合**……集合AとBの両方に含まれる元をあつめた集合を$\underline{A \cap B}$とかく．つまり，$A \cap B \coloneqq \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$である．
2. **共通部分**……集合AとBの少なくとも一方に含まれる元をあつめた集合を$\underline{A \cup B}$とかく. つまり, $A \cup B \coloneqq \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$である.

具体例でみてみよう.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{1, 3, 5, 7, 9\} \tag{10}$$

とする.

$$A \cap B = \{1, 3, 5\} \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\} \tag{11}$$

また,「集合AからBを取り除いたもの」, きちんというと「集合Aの元のうち, 集合Bの元でないものをあつめた集合」を, $\underline{A \setminus B}$とかく. つまり, $A \setminus B \coloneqq \{x \in A \mid x \notin B\}$である.

上のA, Bを使うと,

$$A \setminus B = \{2, 4\} \quad B \setminus A = \{7, 9\} \tag{12}$$

集合の包含（ほうがん）関係

集合Aのすべての元が集合Bの元であるとき，**BはAを含む**，あるいは**AはBに含まれる**という．記号は$A \subset B$または$B \supset A$である．[3]

これも具体例でみてみよう．

$$A = \{1\}, \quad B = \{1, 2\} \quad C = \{1, 3\} \tag{13}$$

このとき，$A \subset B$かつ$A \subset C$である．$A \subset A$でもある．また，$B \not\subset A$である．なお，$B \subset C$ではないし，$C \subset B$でもない．

定義からわかるように，$A = B$のときも$A \subset B$（かつ$A \supset B$）である．これを強調するために，$A \subseteq B$とかくこともある．特に$A \neq B$であるとき，$A \subsetneq B$とかき，**BはAより真に大きい**という．

$\in$と$\subset$、区別できますか？

集合として

$$X := \{1,\ 2,\ \{1\},\ \{1, 2, 3\}\} \tag{14}$$

を考える．このとき，

$$1 \in X \quad 2 \in X \quad 3 \notin X \quad \{1\} \in X \quad \{1, 2\} \notin X \quad \{1, 2, 3\} \in X \tag{15}$$

である．また，

$$\{1\} \subset X \quad \{1, 2\} \subset X \quad \{1, 2, 3\} \not\subset X \quad \{2\} \subset X \quad \{2, 3\} \not\subset X \tag{16}$$

である．

[3] $\subset$と$\supset$は，$\leq$と$\geq$の関係だと思ってよい．ただし，$a \not\leq b$と$a \not\geq b$は両立しないのに対し，$A \not\subset B$かつ$A \not\subset B$はありうる．