ルベーグ積分

目次

積分の定義

積分をどのようにして定義したらよいだろうか？

リーマン積分

変数$\boldsymbol{x}$の領域を，ユークリッド平面$X=\mathbb{R}^2$とする．この面内にある適当な形の領域をEとしよう．

E上でほぼ連続[1]な関数$f(\boldsymbol{x})=f(x,y)$を考える．$f(\boldsymbol{x})$のE上での積分$\int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$は，**面$f(\boldsymbol{x})$と地面$E$で挟まれた領域の体積**として定義された[2].

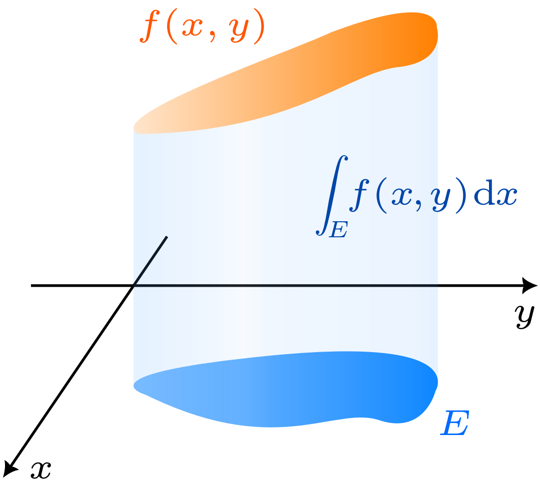

図 1: 積分のイメージ.

[1]正確には，有限個の点を除き連続.
[2]積分は微分の逆だと覚えている人は，認識を改めてください.

正確に言うと，以下のようになる．

1. 積分領域EをN個の長方形領域に分割する．
2. それぞれの領域E_iの面積$S(E_i)$を計算する．
3. それぞれの領域E_iについて，$f(\boldsymbol{x})$の最大値M_iと最小値m_iが定まる．
4. それぞれの領域の体積の上限（$M_i \cdot S(E_i)$）と下限（$m_i \cdot S(E_i)$）を計算する．
5. 分割Nを多くしていったとき，

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} M_i S(E_i) = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} m_i S(E_i) \tag{1}$$

であるとき，$\int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$を式 1 で定める．

リーマン積分では，不連続な関数，たとえば**ディリクレ関数**

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x \text{ が有理数，つまり } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \text{ が無理数，つまり } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \tag{2}$$

の積分$\int_0^1 f(x)dx$を定義できない． どれだけ区間E_iを細かくしても，E_iには有理数と無理数が両方含まれるので，$M_i = 1$，$m_i = 0$であり，式 1 の極限が一致しないからである．

それでは，E_iを長方形領域（1 次元だったら区間）とするのを諦めたらどうなるだろうか？

ルベーグ積分の定義

変数$\boldsymbol{x}$の領域を，ユークリッド平面$X = \mathbb{R}^2$とする．この面内にある適当な形の領域をEとしよう．

$f(\boldsymbol{x})$を，E上で定義された可測関数としよう．ただし，$f(\boldsymbol{x}) \geq 0$とする．つまり，$f(\boldsymbol{x})$は平面Eの上に浮いている面である．

リーマン積分$\int_E f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}$は，面$f(x)$がつくる領域の体積として定義することができた．同じように，**ルベーグ積分$\boldsymbol{\int_E f(x)d\mu(x)}$とは，$\boldsymbol{f(x)}$がつくる 3 次元領域の体積**と考えられる．

もし，$f(\boldsymbol{x})$が定数Mだったら（地面と平行な平面だったら），この積分は，**$\boldsymbol{E}$の面積かける**Mで求められる．Eの面積とは，ルベーグ測度$\mu(E)$のことであるから，

$$\int_E f(\boldsymbol{x})d\mu(\boldsymbol{x}) := M\mu(E) \tag{3}$$

と定義できる．

次に, 領域Eが$E=\bigsqcup_{i=1}^{n}E_i$のように$\boldsymbol{n}$**-分割**できたとしよう. 分けられた**それぞれの面**$\boldsymbol{E_i}$**上で**$\boldsymbol{f(x)}$**が定数**$\boldsymbol{f(x)\equiv\alpha_i}$だとする. 式で書くと,

$$f(\boldsymbol{x}) := \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}(\boldsymbol{x}) \tag{4}$$

全体はガタガタしているが, それぞれの段差は平らである関数である. このような関数の積分は, それぞれの段差の積分

$$\int_{E_i} f(\boldsymbol{x})d\mu(\boldsymbol{x}) = \alpha_i\mu(E_i) \tag{5}$$

をすべて足したもの

$$\int_{E} f(\boldsymbol{x})d\mu(\boldsymbol{x}) := \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(E_i) \tag{6}$$

と定義できる.

式 4 のような関数のことを, **単関数** (simple function) という.

たとえば，正方形

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -a < x, y < a\} \tag{7}$$

を次のように 4 分割する．

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y) \in E \mid x > 0, y > 0\} \\ E_2 &= \{(x, y) \in E \mid x > 0, y < 0\} \\ E_3 &= \{(x, y) \in E \mid x < 0, y > 0\} \\ E_4 &= \{(x, y) \in E \mid x < 0, y < 0\} \end{aligned} \tag{8}$$

もちろんそれぞれの面積は$\mu(E_1) = \mu(E_2) = \mu(E_3) = \mu(E_4) = a^2$である．

それぞれの領域（右上，右下，左上，左下）では$f(\boldsymbol{x})$は定数であるとする．たとえば,

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \boldsymbol{x} \in E_1 \\ 2 & \boldsymbol{x} \in E_2 \\ 3 & \boldsymbol{x} \in E_3 \\ 4 & \boldsymbol{x} \in E_4 \end{cases} \tag{9}$$

領域の境界には段差があるが, 領域内では水平である．このような場合, まず右上部分だけの体積$\int_{E_1} f(\boldsymbol{x}) d\mu(\boldsymbol{x}) = 1 \times a^2$を計算し, 同じように右下（$2a^2$），左上（$3a^2$），左下（$4a^2$）の体積を計算してから，これらをぜんぶ足せばよい．積分は

$$\int_E f(\boldsymbol{x}) d\mu(\boldsymbol{x}) = 10a^2 \tag{10}$$

単関数による近似

マイナスにならない関数f（つまり，$f(x) \geq 0$）は，単関数を使って下から近似できる．

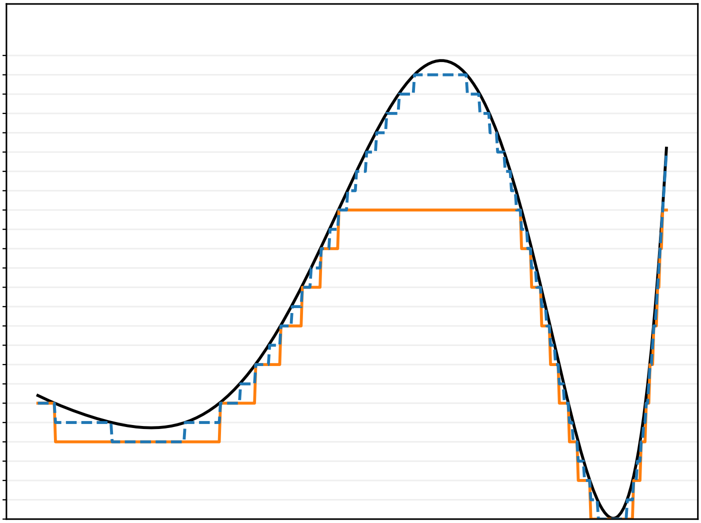

図 2: 単関数の作り方．2 回目（赤色の実線）と 3 回目（青色の破線）．

大雑把な作り方は以下の通り．

1. **1 回目**． $0 \leq f(x) \leq 1$の領域を2分割する．分割した線にあうように，$f(x)$を切り下げる．
2. **2 回目**. $0 \leq f(x) \leq 2$の領域を$2 \times 2^2 = 8$分割して, 同じように切り下げる．
3. **3 回目**． $0 \leq f(x) \leq 3$の領域を$3 \times 2^3 = 27$分割する．

単関数による積分の定義

前で見たように，マイナスにならない**単関数**

$$f(\boldsymbol{x}) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(\boldsymbol{x}) \tag{11}$$

（式 4 の再掲，$E = E_1 \sqcup \cdots \sqcup E_n$と分割する）に対して，積分は

$$\int_E f(\boldsymbol{x}) d\mu(\boldsymbol{x}) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i) \tag{12}$$

と定義できる．

次に, **マイナスにならない関数**fに対して, 単関数$f_1, f_2, ...$をうまくとって,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \tag{13}$$

（各$\boldsymbol{x}$に対して），しかも

$$f_1(\boldsymbol{x}) \leq f_2(\boldsymbol{x}) \leq f_3(\boldsymbol{x}) \leq \cdots \tag{14}$$

（単調増加）とすることができる．もちろん各nについて，f_nは単関数なので，式 12 による積分が定義できる．そこで,

$$\int_E f(\boldsymbol{x}) d\mu(\boldsymbol{x}) := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i) \tag{15}$$

ととる．実は, 単関数$f_1, f_2, ...$のとりかたによらず, 式 15 が定義できることが示される．これが**ルベーグ積分**の定義である．

実関数・複素関数の積分

マイナスになりうる関数の積分を定義するのも簡単である．実関数fに対して，

$$f^+(\boldsymbol{x}) := \max(f(\boldsymbol{x}), 0), \quad f^-(\boldsymbol{x}) := -\min(f(\boldsymbol{x}), 0) \tag{16}$$

ととる．f^+はfがプラスの区間，f^-はfがマイナスの区間でだけ値をとる関数である．これらは両方とも非負の関数である[3]から，

$$\int_E f d\mu := \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \tag{17}$$

が計算できる[4]．もちろんこれが$\infty - \infty$になってしまうと式 17 は定義できないが，そうでなければ式 17 を積分の定義とする．

式 17 が定義できるとき，**fはEで定積分を持つ**という．特に，式 17 が有限（$\neq \pm\infty$）の値をとるとき，**fはEで可積分**（または**積分可能**）**である**という．

複素関数の積分は，実部と虚部にわけてやればよい．つまり，

$$\int_E f d\mu := \int_E \Re(f) d\mu + i \int_E \Im(f) d\mu \tag{18}$$

[3] f^-については符号を変えて非負になるようにしてある．

[4] イメージとしては，$\int_E (f^+ - f^-) d\mu$.