デモ

2025 年 2 月 4 日

なぜ線形代数？

量子力学の基本方程式

量子力学の基本方程式といえば？

量子力学の基本方程式

量子力学の基本方程式といえば？

シュレーディンガー方程式

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+V(\boldsymbol{r})\right]\psi(\boldsymbol{r})=E\psi(\boldsymbol{r}) \qquad (*1)$$

量子力学の基本方程式

量子力学の基本方程式といえば？

シュレーディンガー方程式

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+V(\boldsymbol{r})\right]\psi(\boldsymbol{r})=E\psi(\boldsymbol{r}) \tag{*1}$$

(*1) の解を $\psi(\boldsymbol{r}), \varphi(\boldsymbol{r})$ とすると，任意の複素数 a, b に対して，

$$\xi(\boldsymbol{r}) := a\psi(\boldsymbol{r}) + b\varphi(\boldsymbol{r}) \quad (a, b \text{ は複素数})$$

は (*1) の解になっている．

量子力学の基本方程式

量子力学の基本方程式といえば？

シュレーディンガー方程式

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+V(\boldsymbol{r})\right]\psi(\boldsymbol{r})=E\psi(\boldsymbol{r}) \tag{*1}$$

(*1) の解を $\psi(\boldsymbol{r}), \varphi(\boldsymbol{r})$ とすると，任意の複素数 a, b に対して，

$$\xi(\boldsymbol{r}) \coloneqq a\psi(\boldsymbol{r})+b\varphi(\boldsymbol{r}) \quad (a, b \text{ は複素数})$$

は (*1) の解になっている．

$\Longrightarrow$ (*1) **は線型方程式**．

数学的には・・・

方程式 (*1) の解 $\psi(\boldsymbol{r})$ 全体は，**ベクトル空間**をなす．

ベクトル空間って？

ユークリッド空間の例

3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の縦ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (x_1, x_2, x_3 \text{ は複素数})$$

とする．

このとき，

$$a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ ax_2 + by_2 \\ ax_3 + by_3 \end{pmatrix}$$

もベクトル．

ユークリッド空間の例

3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の縦ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (x_1, x_2, x_3 \text{ は複素数})$$

とする．

このとき，

$$a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ ax_2 + by_2 \\ ax_3 + by_3 \end{pmatrix}$$

もベクトル．

$\boldsymbol{x}$ はある意味**シュレーディンガー方程式の解 ψ に似ている**．

ベクトル空間の定義

ふつうの縦ベクトルについて考えれば当たり前のこと：

ベクトル空間の公理

ψ, φ, ξ を**ベクトル**，a, b, c を**スカラー**（複素数）とする．

1. $(\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\varphi}) + \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\psi} + (\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\xi})$
2. $\boldsymbol{\psi} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}$
3. $\boldsymbol{\psi} + (-\boldsymbol{\psi}) = \mathbf{0}$
4. $\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\psi}$
5. $c(\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\varphi}) = c\boldsymbol{\psi} + c\boldsymbol{\varphi}$
6. $(a + b)\boldsymbol{\psi} = a\boldsymbol{\psi} + b\boldsymbol{\psi}$
7. $(ab)\boldsymbol{\psi} = a(b\boldsymbol{\psi})$
8. $1\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}$

ベクトル空間の定義

ふつうの縦ベクトルについて考えれば当たり前のこと：

ベクトル空間の公理

ψ, φ, ξ を**ベクトル**，a, b, c を**スカラー**（複素数）とする．

1. $(\psi + \varphi) + \xi = \psi + (\varphi + \xi)$
2. $\psi + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \psi = \psi$
3. $\psi + (-\psi) = \mathbf{0}$
4. $\psi + \varphi = \varphi + \psi$
5. $c(\psi + \varphi) = c\psi + c\varphi$
6. $(a + b)\psi = a\psi + b\psi$
7. $(ab)\psi = a(b\psi)$
8. $1\psi = \psi$

逆に，1–8 を満たすすものは，ぜんぶ「ベクトル」ということにする．

ベクトル全体がつくる集合を**ベクトル空間**という．

$\Longrightarrow$ 3 ページで考えた ψ もベクトル．

ベクトルの例

- N 次の縦ベクトル：$(a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_N)$
- N 次多項式：$p(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
- 線形方程式の解：$\varphi(x_1, \dots, x_N)$

ユークリッド内積

縦ベクトルがもっている重要な性質：**内積**の復習．

縦ベクトルの内積

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$：$N$ 次元ベクトル

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle := \sum_{i=1}^{N} x_i^* y_i \tag{*2}$$

を**内積**という．

ベクトルの**長さ**は，

$$\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} \tag{*3}$$

注意

(*3) の右辺の $\sqrt{}$ の中身 ≥ 0 になるように，(*2) の x_i を複素共役にしてある．

内積の定義

(*2) は次の性質を満たす．

内積の公理

ベクトル ψ, φ, ξ とスカラー（複素数）a, b について

1. $\langle \psi,\ a\varphi + b\xi \rangle = a\langle \psi, \xi \rangle + b\langle \psi, \varphi \rangle$（**線形性**）
2. $\langle \psi, \varphi \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle^*$
3. $\langle \psi, \psi \rangle \geq 0$ であり，$\langle \psi, \psi \rangle = 0 \iff \psi = \mathbf{0}$（**正定値性**）

上の条件を満たすものを改めて「**内積**」と呼ぶことにする．

注意

1 と 2 をあわせると，$\langle a\psi + b\varphi,\ \xi \rangle = a^*\langle \psi, \xi \rangle + b^*\langle \varphi, \xi \rangle$（**反線形性**）である．

関数の内積

では，関数 $\psi(\boldsymbol{r}), \varphi(\boldsymbol{r})$ の内積は？

関数の内積

では，関数 $\psi(\boldsymbol{r}), \varphi(\boldsymbol{r})$ の内積は？

$$\langle \psi, \varphi \rangle := \iiint \psi^*(\boldsymbol{r})\varphi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{*4}$$

とすれば，前のページの性質を満たす．

基底

すべての縦ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3)$ は，

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{*5}$$

を使って，$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$ と書ける．

さらに，$x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0} \iff x_1 = x_2 = x_3 = 0$（**一次独立**）．

基底

すべての縦ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3)$ は，

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{*5}$$

を使って，$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$ と書ける．

さらに，$x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0} \iff x_1 = x_2 = x_3 = 0$（**一次独立**）．

同じように，**すべてのベクトル** ψ は，**一次独立**なベクトル $\chi_1, \chi_2, \ldots$ を使って

$$\chi = \sum_i c_i \chi_i \quad (c_i \text{ は複素数}) \tag{*6}$$

と書ける．

基底

すべての縦ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3)$ は，

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{*5}$$

を使って，$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3$ と書ける．

さらに，$x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{0} \iff x_1 = x_2 = x_3 = 0$（**一次独立**）．

同じように，**すべてのベクトル ψ** は，**一次独立**なベクトル $\chi_1, \chi_2, \ldots$ を使って

$$\chi = \sum_i c_i \chi_i \quad (c_i \text{ は複素数}) \tag{*6}$$

と書ける．χ_i：**基底**という．

ベクトル空間の次元

(*6) を満たす一次独立なベクトルの組 χ_i は，いくつも存在している．

例えば，(*5) のかわりに

$$\boldsymbol{e}_1' = (1\ \ 1\ \ 0), \quad \boldsymbol{e}_2' = (1\ \ -1\ \ 0), \quad \boldsymbol{e}_3' = (0\ \ 0\ \ \sqrt{2})$$

としてもよい．

しかし，$\chi_1, \chi_2, \ldots$ の数は同じ（上の例だと，必ず 3 つ）．

ベクトル空間がもつ基底の数を**次元**という．

ベクトル空間って？

同型

同型とは

- ベクトルの**かず**が同じ
- **線形構造**（和とスカラー倍）が同じ

である 2 つのベクトル空間は，同じものと見なしてもよい．

同型の例

2 次多項式 $a_2x^2 + a_1x + a_0$ のベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_2$ は，3 次元縦ベクトルの空間 $\mathbb{R}^3$ と同型．

対応

$$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \leftrightarrow \text{縦ベクトル}\,(a_2\ \ a_1\ \ a_0) = \boldsymbol{a}$$
$$q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0 \leftrightarrow \text{縦ベクトル}\,(b_2\ \ b_1\ \ b_0) = \boldsymbol{b}$$

とすれば，

$$p + q \leftrightarrow \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \quad c \cdot p \leftrightarrow c\boldsymbol{a}\ (c\text{：複素数})$$

線形演算がまったく同じ．

同型の例（つづき）

実は，基底の対応

$$x^2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

を定めるだけで，対応 $a_2x^2 + a_1x + a_0 \leftrightarrow (a_2 \ a_1 \ a_0)$ が決まる．

N 次元ベクトル空間どうしは同型

定理

2 つの N 次元ベクトル空間は同型である．

2 つのベクトル空間の基底 $\{\chi_i\}, \{\chi'_i\}$ をそれぞれ

$$\chi_1 \leftrightarrow \chi'_1, \quad \cdots, \quad \chi_N \leftrightarrow \chi'_N$$

のように対応させれば簡単に証明できる．

N 次元ベクトル空間どうしは同型

定理

2 つの N 次元ベクトル空間は同型である．

2 つのベクトル空間の基底 $\{\chi_i\}, \{\chi'_i\}$ をそれぞれ

$$\chi_1 \leftrightarrow \chi'_1, \quad \cdots, \quad \chi_N \leftrightarrow \chi'_N$$

のように対応させれば簡単に証明できる．

結局，**N 次元ベクトル空間は実質 1 つだけ！**

$\Longrightarrow$ 一番簡単な $\mathbb{C}^N$ を考えればよい．

ベクトル空間って？

表現行列

表現行列

多項式関数 $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ を微分する：$\hat{D} \coloneqq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$．

表現行列

多項式関数 $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ を微分する：$\hat{D} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

もちろん，

$$(\hat{D} f)(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 2a_2 x + a_1$$

表現行列

多項式関数 $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ を微分する：$\hat{D} \coloneqq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$．

もちろん，

$$(\hat{D} f)(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 2a_2 x + a_1$$

ところで，対応 $f \leftrightarrow (a_2 \ a_1 \ a_0)$ を考えると，これは

$$(\hat{D} f) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathsf{D}} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \leftrightarrow f$$

と行列の計算としてかける．

表現行列

多項式関数 $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ を微分する：$\hat{D} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

もちろん，

$$(\hat{D}f)(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 2a_2 x + a_1$$

ところで，対応 $f \leftrightarrow (a_2 \ a_1 \ a_0)$ を考えると，これは

$$(\hat{D}f) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathsf{D}} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \leftrightarrow f$$

と行列の計算としてかける.

D を**表現行列**という.

スピン系

スピン

1 粒子のスピンは，$|\uparrow\rangle$：アップスピン，$|\downarrow\rangle$：ダウンスピンの 2 次元．

スピン

1 粒子のスピンは，$|\uparrow\rangle$：アップスピン，$|\downarrow\rangle$：ダウンスピンの 2 次元．

よって，$\mathbb{R}^2$ と同型，具体的には

$$|\uparrow\rangle \leftrightarrow (1\ \ 0), \quad |\downarrow\rangle \leftrightarrow (0\ \ 1)$$

と対応させられる．

スピン

1 粒子のスピンは，$|\uparrow\rangle$：アップスピン，$|\downarrow\rangle$：ダウンスピンの 2 次元．

よって，$\mathbb{R}^2$ と同型，具体的には

$$|\uparrow\rangle \leftrightarrow (1\ \ 0), \quad |\downarrow\rangle \leftrightarrow (0\ \ 1)$$

と対応させられる．

スピンの重ね合わせ：

$$a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

と簡潔に表現できる．

スピンに作用する演算子

スピンに作用する演算子：

- $\hat{S}_+ \cdots\cdots \hat{S}_+ |\uparrow\rangle = \mathbf{0}$，$\hat{S}_+ |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$
- $\hat{S}_- \cdots\cdots \hat{S}_- |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle$，$\hat{S}_+ |\downarrow\rangle = \mathbf{0}$
- $\hat{S}_z \cdots\cdots \hat{S}_z |\uparrow\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow\rangle$，$\hat{S}_z |\downarrow\rangle = \frac{1}{2} |\downarrow\rangle$

スピンに作用する演算子：

- $\hat{S}_+ \cdots\cdots \hat{S}_+|\uparrow\rangle = \mathbf{0}$，$\hat{S}_+|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$
- $\hat{S}_- \cdots\cdots \hat{S}_-|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle$，$\hat{S}_+|\downarrow\rangle = \mathbf{0}$
- $\hat{S}_z \cdots\cdots \hat{S}_z|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle$，$\hat{S}_z|\downarrow\rangle = \frac{1}{2}|\downarrow\rangle$

行列を使えば，

$$\hat{S}_+ : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_- : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_z : \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

多粒子系の扱い方：テンソル積

$|\psi\rangle = {}^{\mathrm{t}}(a \;\; b)$, $|\xi\rangle = {}^{\mathrm{t}}(c \;\; d)$ とする．

2 状態をあわせた $|\psi\rangle|\xi\rangle$ はどう表現する？

多粒子系の扱い方：テンソル積

$|\psi\rangle = {}^{\mathrm{t}}(a \ \ b)$, $|\xi\rangle = {}^{\mathrm{t}}(c \ \ d)$ とする．

2 状態をあわせた $|\psi\rangle|\xi\rangle$ はどう表現する？

答え：**テンソル積**

$$|\psi\rangle \otimes |\xi\rangle := \begin{pmatrix} a|\xi\rangle \\ b|\xi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{pmatrix} \tag{*7}$$

多粒子系の扱い方：テンソル積

$|\psi\rangle = {}^{\mathrm{t}}(a \;\; b)$, $|\xi\rangle = {}^{\mathrm{t}}(c \;\; d)$ とする．

2 状態をあわせた $|\psi\rangle|\xi\rangle$ はどう表現する？

答え：**テンソル積**

$$|\psi\rangle \otimes |\xi\rangle := \begin{pmatrix} a|\xi\rangle \\ b|\xi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{pmatrix} \qquad (*7)$$

3 つ以上のテンソル積も，$|\psi\rangle \otimes \left(|\xi\rangle \otimes |\xi\rangle\right)$ のようにして定義できる．

行列のテンソル積

行列のテンソル積も，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}}_{\mathsf{B}} = \begin{pmatrix} a\mathsf{B} & b\mathsf{B} \\ c\mathsf{B} & d\mathsf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & a\beta & b\alpha & b\beta \\ a\gamma & a\delta & b\gamma & b\delta \\ c\alpha & c\beta & d\alpha & d\beta \\ c\gamma & c\delta & d\gamma & d\delta \end{pmatrix}$$

さらに，2 スピン系 $|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$ に作用する演算子は，それぞれのスピンに作用する演算子 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ を使うと

$$(\hat{\mathcal{O}}_1 \otimes \hat{\mathcal{O}}_2)(|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle) = \hat{\mathcal{O}}_1|\psi\rangle \otimes \hat{\mathcal{O}}_2|\varphi\rangle$$

測定とは？

オブザーバブルと固有値分解

観測可能な物理量：**オブザーバブル**という．

オブザーバブルには，対応する**エルミート行列** A が存在．

オブザーバブルと固有値分解

観測可能な物理量：**オブザーバブル**という．

オブザーバブルには，対応する**エルミート行列** A が存在．

$\hat{A}$ の固有ベクトル $|\varphi_1\rangle, \ldots, |\varphi_N\rangle$（固有値 $a_1, \ldots, a_N$：重複あり）を使うと，

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^{N} a_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \tag{*8}$$

これを**固有値分解**という．

スペクトル分解

- **相異なる**固有値 $a_{(1)}, \ldots, a_{(n)}$
- 固有値 a_i に属する固有ベクトル $|\varphi_{a_{(i)},1}\rangle, \ldots, |\varphi_{a_{(i)},m_i}\rangle$

固有値 a_i に対応する固有空間への**射影**：

$$\hat{P}_{a_i} = \sum_{k=1}^{m_i} |\varphi_{a_{(i)},k}\rangle\langle\varphi_{a_{(i)},k}|$$

固有値分解を書き直す：

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^{m_i} a_{(i)} \hat{P}_{a_{(i)}} \tag{*9}$$

これを**スペクトル分解**という．

オブザーバブルの測定

- オブザーバブルに対応するエルミート行列 $\hat{A}$
- $\hat{A}$ の固有値 $a_{(1)}, \ldots, a_{(n)}$
- 固有値 a_i に対応する固有空間への射影

状態 $|\psi\rangle$ に対し，このオブザーバブルを測定したときの値は？

オブザーバブルの測定

- オブザーバブルに対応するエルミート行列 $\hat{A}$
- $\hat{A}$ の固有値 $a_{(1)}, \ldots, a_{(n)}$
- 固有値 a_i に対応する固有空間への射影

状態 $|\psi\rangle$ に対し，このオブザーバブルを測定したときの値は？

$|\psi\rangle$ の観測により得られる値

確率

$$\langle \psi \,|\, \hat{P}_{a_{(i)}} \psi \rangle \tag{*10}$$

で固有値 $a_{(i)}$ を観測する．

オブザーバブルの測定（つづき）

確率の規格化は？

(*10) で全確率は 1 になっている？

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \psi \,|\, \hat{P}_{a_{(i)}} \psi \rangle = 1$$

これは，固有ベクトル系 $|\varphi_i\rangle$ が完全であることから

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{P}_{a_{(i)}} = \hat{1}$$

であることを使うと成立．