# 目次

# 第 1 章　集合と空間

数学において最も基本的な概念が集合である．すべての数学は，究極的には集合の言葉で記述される．そこまでいかなくても，集合は数学を使うのに必要不可欠なツールであるし，集合のことばに慣れておくと，数学のみならず物理学でも非常に便利である．この章では「集合とは何か」といった公理には立ち入らず，素朴に集合を定義したうえで，集合にかかわる諸概念を導入し，性質を見ることにする．

集合に対して‘距離’を導入したものが「空間」である．距離を導入することで，「収束」や「開集合」「閉集合」といった重要な概念を定義できる．この意味で，空間とは線形代数や微分積分学など数学の諸分野の基礎となる，極めて重要な概念である．この章では抽象的な距離について定義するが，抽象的な定義を用いた証明よりも，具体的な空間（ユークリッド空間や関数空間）について成り立つ性質を理解するほうが（物理においては）有益である．

# §1　集合・写像

## 1.1　集合

「集合」をきちんと定義するのは難しいが，ここでは以下のように考える．

ある特定の性質をもつモノの集まりを**集合** (set) という．集合とは単なるモノの集まりではなく，何が集まっているかを定められる集まりである [5].

**例**　「正の実数の全体」「ひらがなの全体」「名大付属図書館の蔵書全体」には，それぞれ何が入っていて，何が入っていないのかを定められるので集合である[1]．一方で，「絶対値の小さな複素数の全体」「難しい漢字の全体」「偉大な物理学者の全体」には，何が入っていて何が入らないのかを客観的に定められないので，集合とは言わない[2].

$X$ をある集合とする．$X$ を構成するモノのことを，$X$ の**元**(げん) (element) あるいは**要素**(ようそ)という．$a$ が $X$ の元であるとき，「$a$ は $X$ に属する」あるいは「$a$ は $X$ に含まれる」といい，$a \in X$ とかく．$a$ が $X$ の元でなければ，$a \notin X$ とかく．$X$ と $a$ の位置を入れ替えて $X \ni a$ あるいは $a \not\ni X$ とかいてもよい [5].

**例**　$X$ を「愛知県にある市の全体」とすると，$X$ は集合である．このとき，名古屋市は $X$ に属する（含まれる）ので，名古屋市 $\in X$ とかく．一方，四日市(よっかいち)市は $X$ に属さない（含まれない）ので，四日市市 $\notin X$ とかく．ほかにも

$$\text{豊田市} \in X, \qquad \text{浜松市} \notin X, \qquad \text{飛島(とびしま)村} \notin X$$

といったふうに，それぞれ $X$ に含まれるか含まれないかを決定できる．

任意の集合 $A$ と任意の $x$ に対して，$x \in A$ と $x \notin A$ のいずれか一方が必ず成り立つ．

集合を表すのには，いくつかの方法がある．まずは $\{1, 2, 4\}$ のように波括弧(なみかっこ) (brace) の中に元を書き並べる方法である．しかし，この書き方だと無限個の元を含む集合，たとえ

---

1)　もちろん「ひらがなの全体」に変体仮名を含むのか，「名大付属図書館の蔵書全体」はいつの時点の蔵書を指すのかは決めておく必要がある．

2)　“偉大な物理学者” を「ノーベル物理学賞の受賞者」と定義すれば，「偉大な物理学者の全体」は集合になる．しかし，そうであればはじめから「ノーベル物理学賞の受賞者の全体」といえばよいし，そもそも偉大な物理学者≠ノーベル物理学賞受賞者であるのは物理学を学んだ人ならよく理解していることだろう．

ば「**自然数全体の集合** $\mathbb{N}$」を表すことができない．そこで，

$$\mathbb{N} = \{x \mid x \text{ は自然数}\}$$

のように縦棒 | を書き，その前に含むべき元，うしろに元が含まれる条件をかく．たとえば $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 2^{10}\}$ とかけば，これは $2^{10}$ より大きい自然数の集合を表す．

集合の表記になれるため，また今後のための準備もかねて，数の集合をいくつか挙げておこう．

$$\text{自然数全体の集合}\,\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\} \tag{1.1a}$$

$$\text{整数全体の集合}\,\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\} \tag{1.1b}$$

$$\text{有理数全体の集合}\,\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \right\} \tag{1.1c}$$

$$\text{実数全体の集合}\,\mathbb{R} \tag{1.1d}$$

$$\text{複素数全体の集合}\,\mathbb{C} = \{a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{R}\} \tag{1.1e}$$

**例**　**正の実数全体の集合**は，$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ とかける．

**定義 1.1** (集合の一致) 集合 $X$ と集合 $Y$ について，$X$ のすべての元と $Y$ のすべての元が一致するとき，$X$ と $Y$ は一致するといい，$X = Y$ とかく．／

**定義 1.2** (集合の包含) 集合 $X$ と集合 $Y$ について，$X$ のすべての元が $Y$ の元であるとき，$X$ は $Y$ に含まれる（あるいは $Y$ は $X$ を含む）といい，$X \subset Y$ とかく．

$X = Y$ のときも $X \subset Y$ が成り立つことに注意．／

集合 $X$ と $Y$ が一致することを直接示すのは難しいことが多い．$X \subset Y$ かつ $X \supset Y$ を示すことで，$X = Y$ といえる．

## 1.2　集合の演算

**定義 1.3** (和集合)　$X, Y$ を集合とする．2 つの集合の**和集合**（わしゅうごう） (**union**) を，

$$X \cup Y := \{x \mid x \in X \text{ または } x \in Y\} \tag{1.2}$$

で定義する．／

**定義 1.4** (共通部分)　$X, Y$ を集合とする．2 つの集合の**共通部分**（きょうつうぶぶん） (**intersection**) を

$$X \cap Y := \{x \mid x \in X \text{ かつ } x \in Y\} \tag{1.3}$$

で定義する．／

**定義 1.5** (非交和)　$X \cap Y = \emptyset$ であるとき，和集合 $X \cup Y$ を特に**非交和**(ひこうわ) (**disjoint union**) あるいは**直和**(ちょくわ) (**direct sum**) といい，$X \sqcup Y$ とかく．／

集合論ではある“普遍集合”の部分集合がよく登場する．部分集合を扱う上で便利であるのが冪集合である．

**定義 1.6**　$X$ を集合とする．$X$ の部分集合すべてを元として含む集合を，$X$ の**冪集合**(べきしゅうごう) (**power set**) といい[3]，$\mathcal{P}(X)$，$\mathfrak{P}(X)$，$2^X$ などとかく．／

**例**　$X = \{a, b\}$ とすると，$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a, b\}\}$ である．

**定義 1.7**　集合からなる集合を**集合族**(しゅうごうぞく) (**family of sets**) という．／

**例**　$\{\{\ \},\ \{1\},\ \{1, 2\},\ \{1, 2, 3\}\}$ は集合族である．

**例**　任意の集合 $X$ に対し，その冪集合 $\mathcal{P}(X)$ は（$X$ の部分集合を元にもつ）集合族である．

元が集合である集合に対して名前がついているのは，単にそのような集合をよく扱うからである．

## 1.3　写像

**定義 1.8** (写像)　$X, Y$ を集合とする．$x \in X$ に対して，ある $y \in Y$ を対応付ける規則のことを，$X$ から $Y$ への**写像**(しゃぞう) (**map**) という．

$f$ が $X$ から $Y$ への写像であることを，$f\colon X \to Y$ とあらわす．

$X$ を $f$ の**定義域**(ていぎいき) (**domain**)，$Y$ を $f$ の**終域**(しゅういき) (**codomain**) という．／

**例**　$X = \{1, 2, 3\}$，$Y = \{a, b, c\}$ とする．次のように定義された $f$ は $X$ から $Y$ への写像である．

$$f(1) = a, \qquad f(2) = b, \qquad f(3) = c.$$

3) “略字で巾(べき)集合”とかくことも多い．

また，次のような $g$ および $h$ も $X$ から $Y$ への写像である．

$$g(1) = c, \qquad g(2) = c, \qquad g(3) = a.$$
$$h(1) = a, \qquad h(2) = a, \qquad h(3) = a.$$

**例**　$X = \mathbb{N}$，$Y = \mathbb{N}$ とする．$x \in X$ に対して，$y \in Y$ を

$$y = f(x) = 3x$$

で定めたとき，$f$ は $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像である．簡単のために

$$X \ni x \longmapsto 3x \in Y$$

とかくこともある．

**例**　$X = \mathbb{R}$，$Y = \mathbb{R}$ とする．$x \in X$ に対して，$y \in Y$ を

$$y = f(x) = x^2$$

で定めたとき，$f$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像である．

　$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像や $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への写像を，特に**関数**（かんすう） (**function**) という．

**定義 1.9** (像)　$f\colon X \to Y$ を写像とする．集合

$$\operatorname{Im} f := \{f(x) \in Y \mid x \in X\} \tag{1.4}$$

を $f$ の**像**（ぞう） (**image**) という．／

　$f$ の像を**値域**（ちいき） (**range**) ということもある．$f$ の値域といった場合，$f$ の終域を指すことも像を指すこともあり，注意が必要である．

**定義 1.10** (部分集合の像)　$f\colon X \to Y$ を写像とする．部分集合 $A \subset X$ に対し，

$$f[A]\colon \{f(x) \in Y \mid x \in A\} \tag{1.5}$$

を，$A$ の $f$ による像という．／

**定義 1.11** (逆像)　$f\colon X \to Y$ を写像とする．部分集合 $A \subset Y$ に対して，

$$f^{-1}[B] := \{x \in X \mid f(x) \in A\} \tag{1.6}$$

で定められる集合を**逆像**（ぎゃくぞう） (**inverse image**) という．／

同じ記号 $f^{-1}$ を使う逆写像 (定義 1.18) と逆像を取り違えないこと[4]．任意の写像 $f$ に対し，逆写像が存在するとは限らないが，逆像は必ず存在する．

**例**　写像 $f$ を，$f\colon \mathbb{R} \ni x \longmapsto \lfloor x \rfloor \in \mathbb{R}$（$x$ を超えない最大の整数）で定義する．$f$ の像は $f[\mathbb{R}] = \mathbb{Z}$ である．部分集合の像はたとえば $f[\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 2\}] = \{-2, 1, 0, 1\}$ である．逆像はたとえば $f^{-1}[\{1, 2, 3\}] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 4\}$ である．また，$f^{-1}[\{0.5\}] = \emptyset$ である．

次に特殊な写像を定義する．

**定義 1.12** (恒等写像)　以下のような写像 $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ を**恒等写像** (**identity map**) という．

$$X \ni x \longmapsto x \in X$$

恒等写像とは，任意の $x \in X$ を $x$ 自身にうつす写像のことである．／

なお，集合 $X, Y$ について，$X = Y$ でなくとも $X \subset Y$ を満たせば写像 $\iota\colon X \ni x \mapsto x \in Y$ は定義できる．$X = Y$ のとき当然 $\iota$ は恒等写像であるが，$X \subsetneq Y$ なら $\iota$ は**包含写像** (**inclusion map**) であり恒等写像ではない．

**例**　$\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像 $f\colon x \mapsto x$ は恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ である．しかし，$\mathbb{N}$ から $\mathbb{Z}$ への写像 $g\colon x \mapsto x$ は包含写像であるが，恒等写像ではない．

**定義 1.13** (単射)　写像 $f\colon X \to Y$ は，任意の $x, x' \in X$ に対して，$f(x) = f(x')$ ならば $x = x'$ が成り立つとき，**単射** (**injection**) であるという．／

単射の定義は「$x \neq x'$ ならば $f(x) \neq f(x')$」と言い換えることもできる．

**定義 1.14** (全射)　写像 $f\colon X \to Y$ は，任意の $y \in Y$ に対して，$x \in X$ が存在して，$y = f(x)$ となるとき，**全射** (**surjection**) であるという．／

**定義 1.15** (全単射)　写像 $f\colon X \to Y$ が単射かつ全射のとき，**全単射** (**bijection**) という．／

集合 $X$ と $Y$ のあいだに全単射が存在する場合，この 2 つを同じ集合とみなすことができる（ことがある）．

単射を $X \rightarrowtail Y$，全射を $X \twoheadrightarrow Y$，全単射を $X \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow Y$ とかくこともある [1][2].

**例**　包含写像 $X \hookrightarrow Y$ は単射である．

---

4)　ここでは逆像を $f^{-1}[B]$ とかいたが，逆写像と全く同じように $f^{-1}(B)$ と書く場合も多い．

次に 2 つ以上の写像の関係についてみる．

**定義 1.16** (写像の一致) 写像 $f\colon X\to Y$ と $g\colon X\to Y$ が等しいとは，任意の $x\in X$ に対して，$f(x)=g(x)$ であることをいう．／

**定義 1.17** (写像の合成)　$X,Y,Z$ を集合，$f\colon X\to Y$，$g\colon Y\to Z$ を写像とする．$x\in X$ を $g(f(x))\in Z$ にうつす写像を $f$ と $g$ の**合成写像**といい，$g\circ f$ であらわす．／

**定義 1.18** (逆写像)　$X,Y$ を集合，$f\colon X\to Y$ を写像とする．写像 $g\colon Y\to X$ が

$$f\circ g=\mathrm{id}_Y \quad \text{かつ} \quad g\circ f=\mathrm{id}_X$$

をみたすとき，$g$ は $f$ の**逆写像**(ぎゃくしゃぞう)であるといい，$f^{-1}$ とかく[5]．／

**定理 1.1**　写像 $f\colon X\to Y$ に対して，逆写像 $f^{-1}\colon Y\to X$ が存在する必要十分条件は，$f$ が全単射であることである．

**証明**　略．　□

**命題 1.2**　$X,Y,Z,W$ を集合，$f\colon Z\to W$，$g\colon Y\to Z$，$h\colon X\to Y$ を写像とする．このとき $f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$ である．

**証明**　任意の元 $x\in X$ に対して，

$$[f\circ(g\circ h)](x)=f([g\circ h](x))=f(g(h(x)))$$
$$[(f\circ g)\circ h](x)=[f\circ g](h(x))=f(g(h(x)))$$

より $[f\circ(g\circ h)](x)=[(f\circ g)\circ h](x)$ であることから従う．　□

**定義 1.19** (写像の制限)　$X,Y$ を集合，$f\colon X\to Y$ を写像とする．部分集合 $U\subset X$ に対し，写像 $f|_U\colon U\to Y$ を

$$f|_U\colon U\ni x\longmapsto f(x)\in Y$$

で定める．$f|_U$ を $f$ の**制限**(せいげん) (**restriction**) という．／

5) $f\circ g=g\circ f=\mathrm{id}$ と覚えている人がいるかもしれないが，誤り．$f\circ g\colon Y\to Y$ と $g\circ f\colon X\to X$ は一般に異なる写像である．

## 1.4　集合の濃度

この節では “集合の大きさ” である「濃度」を定義する．

**定義 1.20**　集合 $X$ の “元のかず” を**濃度**（のうど） (cardinality) という．$X$ の濃度を $|X|$，$\#X$ などとあらわす．／

濃度とは，集合がもつ ‘元の数’ を一般化した概念である．$X$ が有限集合の場合，$X$ の濃度は元の数そのものである．しかし，$X$ が元を無限に持つときにも濃度 $\#X$ は定義できる．さらに，次の定義からは，無限大の濃度にも差があることがわかる．

**定義 1.21** (濃度の大小)　$X, Y$ を集合とする．それぞれの濃度の関係を，次のように定める．

(1) 集合 $X$ から $Y$ の間に全単射 $f\colon X \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow Y$ が存在するとき，$X$ と $Y$ の濃度は等しいと定め，$X \sim Y$ とかく．
(2) 集合 $X$ から $Y$ への単射 $f\colon X \rightarrowtail Y$ が存在するとき，$X$ の濃度は $Y$ よりも小さいと定める．

／

ある濃度をもつ集合には，特別な名前がついている．

**定義 1.22** (有限集合)　集合 $X$ の濃度が $0, 1, 2, \ldots$ のとき（すなわち元を有限個だけもつとき），$X$ を**有限集合** (finite set) という．有限集合でない集合を**無限集合** (infinite set) という．／

**定義 1.23** (可算（かさん）集合)　集合 $X$ の濃度が $\mathbb{N}$ の濃度と等しいとき，$X$ を**可算無限集合** (countably infinite set) あるいは**可算集合** (countable set) という．／

**定義 1.24** (高々（たかだか）可算集合)　可算無限集合と有限集合をあわせて**高々可算集合** (at most countable set) または**可算集合** (countable set) という．

高々可算でない集合を**非可算集合** (uncountable set) という．／

定義からわかるように，「可算集合」という言葉は紛らわしいので使わないことにする．「集合 $X$ は高々可算」「可算無限個の元」などの言い方もする．

§ 9 では「可算無限個の集合 $A_1, A_2, \ldots$」という表現があるが，これは $A_1$ や $A_2$ が可算無限集合といっているのではなく，$A_1, A_2, \ldots$ の数が可算無限個あるということである[6)]．

6）　形式的には集合族 $\{A_1, A_2, \ldots\}$ が可算無限集合であるということ．

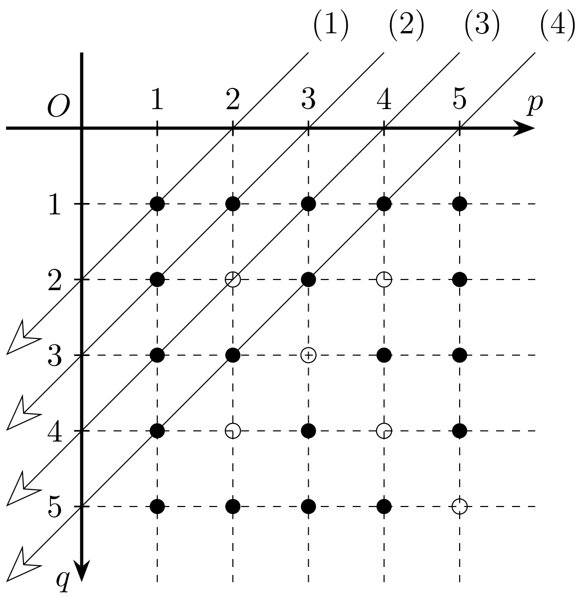



**図 1.1: 正の有理数に番号をつける方法．まず図のように格子をかき，正の有理数 $p/q$ に対応する点を黒く塗る．次に (1) のように線を引くと，有理数 $1/1 = 1$ があるので，これを 1 番目の有理数とする．続けて (2) の線を引くと，有理数 $2$ と $1/2$ があるので，それぞれ順に 2 番目と 3 番目の有理数とする．これを (3)，(4) と繰り返すと，正の有理数すべてに番号がつけられる．**

**命題 1.3** 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は可算無限集合である．

にわかには信じがたいが，自然数の ‘かず’ と有理数の ‘かず’ は同じだと主張している．

**証明** まず，正の自然数に図 1.1 の方法で番号をつけると，

$$1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ 3,\ \frac{1}{3},\ 4,\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{4},\ \ldots$$

となる．これを正負交互に並べる．すると

$$\overset{1}{0},\ \overset{2}{1},\ \overset{3}{-1},\ \overset{4}{2},\ \overset{5}{-2},\ \overset{6}{\frac{1}{2}},\ \overset{7}{-\frac{1}{2}},\ \overset{8}{3},\ \overset{9}{-3},\ \ldots$$

となる．このようにして有理数と番号（自然数）が 1 対 1 に結び付く． □

**定理 1.4** 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は非可算無限集合である [5, §7].

**証明** $(0,1] \subset \mathbb{R}$ が非可算であることを示せば十分である．まず $(0,1]$ は明らかに有限集合ではない．そこで，$(0,1]$ が可算無限集合であると仮定する．$(0,1]$ の元（つまり 0 より大

きく 1 以下の実数）が自然数で $x_1, x_2, \ldots$ とラベル付けされるので，それぞれ小数展開して

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.c_{11}c_{12}c_{13}c_{14}c_{15}\cdots \\ x_2 &= 0.c_{21}c_{22}c_{23}c_{24}c_{25}\cdots \\ x_3 &= 0.c_{31}c_{32}c_{33}c_{34}c_{35}\cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

のように並べる[7)]．ここで

$$y := 0.a_1a_2a_3a_4a_5\ldots\,; \quad a_i := \begin{cases} 1 & \text{if } c_{ii} = 0 \\ 0 & \text{if } c_{ii} \neq 0 \end{cases}$$

は明らかに $(0,1]$ の元であるが，どの $x_i$ とも（小数点以下 $i$ 桁目が）一致しない．したがって $(0,1]$ が可算であるという仮定が誤りである [5, §7]． □

**命題 1.5**　任意の無限集合は，可算無限である部分集合を持つ．

**証明**　無限集合 $X$ からある元 $x_1$ をとる．次に，$X \setminus \{x_1\}$ から元 $x_2$ を適当に選んでとる．さらに，$X \setminus \{x_1, x_2\}$ から元 $x_3$ をとる．$X$ は無限集合ゆえ，この操作を無限回繰り返すことができる[8)]．このように構成された集合 $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ は可算無限集合である． □

**系 1.6**　可算無限は，無限の中で最も小さい．

**証明**　命題 1.5 より，任意の無限集合が可算無限集合を含む，すなわち無限の大きさは可算無限以上であることから従う． □

**命題 1.7**　$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算無限である．より一般に，$\underbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}_{\text{有限個}}$ は可算集合である．

**証明**　$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ が可算であることは，図 1.1 とまったく同じ手順で示される． □

この節で最も重要なのは，無限の中にもレベルがあるということである．すなわち，

7）　このとき，有限小数 0.2 は 0.19999… のように無限小数になるように表記する．こうすることで，小数展開が一意になる [5, §7].

8）　ここで，無限集合から元をえらぶという操作を無限回行っている．この操作が可能であることは，実は選択公理によって保障される．選択公理は基底の存在定理の証明でも用いられる，数学で最も基本的な（そして最も議論をよんだ）公理のひとつである．

(1) 有限個
(2) 可算無限個（たとえば $\mathbb{N}$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$）
(3) 非可算無限個（たとえば $\mathbb{R}$）

可算であるか非可算であるかの区別は重要である．

## 1.5 同値類

有理数 1/3 と 2/6 は，見た目こそ違うが同じ数である．このようなものを「同じ」として扱う方法が同値類（どうちるい）である．

まず同値関係について見る．

**定義 1.25** (二項関係) $X$ を集合とする．規則 $\rho$ が $X$ 上の**二項関係** (**binary relation**) であるとは，任意の $x, y \in X$ に対し，$x \rho y$ が満たされるか満たされないかを判別できるときをいう．／

**例** 不等号 $<$ は $\mathbb{R}$ 上の二項関係である．実際，任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対し，$a < b$ が真であるか偽であるかを判別できる．

**定義 1.26** (同値関係) $X$ を集合とする．$X$ 上の二項関係 $\sim$ が**同値関係** (**equivalence relation**) であるとは，以下をすべて満たすことをいう．

(1)（**反射律** (**reflexivity**)）任意の $x, y \in X$ に対し，$x \sim x$ である．
(2)（**対称律** (**symmetry**)）任意の $x, y \in X$ に対し，$x \sim y$ ならば $y \sim x$ である．
(3)（**推移律** (**transitivity**)）任意の $x, y, z \in X$ に対し，$x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x \sim z$ である．

／

**例** 任意の集合 $X$ に対して，$=$ は $X$ 上の自明な同値関係である．

**例** $\mathbb{C}$ 上の二項関係 $\sim$ を

$$x \sim y \iff |x| = |y|$$

で定めると，$\sim$ は同値関係である．

この同値関係を使って，同値類というものを定義できる．

**定義 1.27** (同値類)　$X$ を集合，$\sim$ を $X$ 上の同値関係とする．$x \in X$ に対し，

$$[x] \coloneqq \{y \in X \mid x \sim y\} \subset X \tag{1.7}$$

を元 $x$ の **同値類** (**equivalence class**) という．また，$x$ のことを同値類 $[x]$ の **代表元** (**representative**) という．／

**定義 1.28** (商集合)　$X$ を集合，$\sim$ を $X$ 上の同値関係とする．同値類全体の集合

$$X/{\sim} \coloneqq \{[x] \subset X \mid x \in X\} \tag{1.8}$$

を **商集合** (**quotient set**) という，／

**例**　$\mathbb{Z}$ に対し，同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \iff x - y \text{ が } 3 \text{ で割りきれる}$$

で定める．つまり，$x$ を 3 で割ったときの余りと $y$ を 5 で割ったときの余りが同じであるとき，$x \sim y$ とする．たとえば，$0 \sim 3 \sim 6 \sim \cdots$ であり，$-1 \sim 2 \sim 5 \sim \cdots$ である．したがって同値類は，

$$[0] = \{\dots, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\} \qquad [1] = \{\dots, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\}$$
$$[2] = \{\dots, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$$

であり，商集合 $\mathbb{Z}/{\sim} = \{[0], [1], [2]\}$ である[9]．

また，$[0] = [3] = [6] = \cdots$．このことからわかるように，1 つの同値類に対する**代表元の取り方は一般に一意ではない**．

明らかに $\mathbb{Z} = [0] \sqcup [1] \sqcup [2]$ であり，同値類が互いに交わらずに $\mathbb{Z}$ を分割している．

例で見た「同値類が互いに交わらずに集合を分割する」ことは，一般の集合においても成り立つ．

**定理 1.8**　同値関係 $\sim$ が定義された集合 $X$ は，同値類によって互いに交わらない部分集合に分割される．すなわち適当な $x_1, x_2, \dots \in X$ を用いて

$$X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} [x_\lambda] \quad (\text{非交和}^{(\text{定義 } 1.5)})$$

9)　この場合の商集合を特に $\mathbb{Z}/3$ とかくこともある

**証明**　$X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}[x_\lambda]$ は明らかなので，非交和であることを示す．$[x]\cap[y] \neq \emptyset$ なら $[x]=[y]$ を示せばよい．

そこで $z\in[x]\cap[y]$ とする．$z\in[x]$ より $x\sim z$ であり，$z\in[y]$ なので $y\sim z$ である．$\sim$ の対称律と推移律を用いると，$x\sim y$ がいえる．したがって $[x]=[y]$ である．　$\square$

## 1.6　便利な記号

この節では，数式を扱ううえで便利な記号を導入する．

**定義 1.29** (クロネッカーのデルタ)　次で定義される $\delta_{i,j}$ を**クロネッカーのデルタ**という：

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j, \\ 0 & \text{if } i\neq j. \end{cases} \tag{1.9}$$

／

# §2　距離空間と位相空間

## 2.1　距離空間

**定義 2.1** (距離)　$X$ を集合とする．写像 $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ が以下を満たすとき，**距離** (**distance**) あるいは**計量** (**metric**) という．

- 任意の $x, y, z \in X$ に対し，
  (1) $d(x,y) \geq 0$ である．ただし，$d(x,y) = 0$ となるのは $x = y$ のときに限る．
  (2) $d(x,y) = d(y,x)$ である．
  (3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ である．

$(X,d)$ を**距離空間** (**metric space**) という．／

**例**　$X = \mathbb{R}^n$(実ユークリッド空間)とする．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$ と定めると，これは距離である．

特に，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は，距離 $d(x,y) := |x - y|$ に対して距離空間になる．

ベクトル空間 $V$ においてノルムが定義されているとする．以下に示すように，ノルムは距離の一種である．

**命題 2.1**　$V$ をノルム空間 (定義 6.4)，$\|\bullet\|$ を $V$ 上のノルムとする．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対し，$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ は，$V$ 上の距離である．すなわち，ノルム空間は距離空間である．

**証明**　ノルムの公理（定義 6.4）から距離の公理が導かれることを示せばよい．　□

距離空間を考える上では，距離が定義されている**普遍集合**を世界のすべてと考えるほうが都合がよい．このような考えのもとで，補集合という概念が定義される．

**定義 2.2** $(X,d)$ を距離空間，$A \subset X$ を部分集合とする．集合

$$\{x \in X \mid x \notin A\}$$

を $A$ の**補集合**(ほしゅうごう)という．／

## 2.2　内部と閉包，開集合と閉集合

**定義 2.3** $(X, d)$ を距離空間，$\varepsilon > 0$ をある実数とする．ある点 $a \in X$ に対し，$\varepsilon$-**近傍**を

$$N(a; \varepsilon) := \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon\} \tag{2.1}$$

で定める．／

$(X, d)$ を距離空間，$A \subset X$ を部分集合とする．

**定義 2.4** $a \in X$ が $A$ の内点であるとは，ある $\varepsilon > 0$ が存在して，$N(a; \varepsilon) \subset A$ となることをいう．

$A$ の内点全体の集合を，$A$ の**内部** (**interior**) といい，$\mathrm{int}(A)$，$A^i$ などとあらわす．／

**定義 2.5** $a \in X$ が $A$ の触点であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$N(a; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ となることをいう．

$A$ の触点全体の集合を，$A$ の**閉包** (**closure**) といい，$\bar{A}$，$\mathrm{cl}(A)$，$A^a$ などとあらわす．／

**定義 2.6** (開集合と閉集合)　$(X, d)$ を距離空間とする．

(1) $A \subset X$ の内部 $\mathrm{int}\, A$ が $A$ 自身と一致するとき，$A$ を**開集合** (**open set**)（あるいは開である）という．

(2) $A \subset X$ の閉包 $\supset A$ が $A$ 自身と一致するとき，$A$ を**閉集合** (**closed set**)（あるいは閉である） という．

／

開集合の補集合は閉集合である．逆に，閉集合の補集合は開集合である．

**例**　$(X, d)$ を距離空間とする．$X$ は開集合かつ閉集合である．また $\emptyset$ も開集合かつ閉集合である．

## 2.3　収束列とコーシー列

ヒルベルト空間を扱ううえで避けて通れないのが，「完備」という概念である．完備性を定義するための準備として，ある値に収束する数列について議論する．

これから $X$ の点列といった場合，自然数で順序付けられた $X$ の可算部分集合，つまり $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$ であり，$i \in \mathbb{N}$，$x_i \in X$ であるものをいうことにする．

集合 $X$ 上の点列を，自然数全体から $X$ への写像 $f\colon \mathbb{N} \to X$ ととらえることもできる．この立場からは，$X$ 上の点列全体の集合を $X^{\mathbb{N}}$ とかく．

**定義 2.7** (収束列)　$(X,d)$ を距離空間とする．$X$ の点列 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が $x \in X$ に**収束する** (**converge**) とは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n > N$ に対し，$d(x_n, x) < \varepsilon$ となることをいう．

このときの $x$ のことを**極限**(きょくげん) (**limit**) という [5]．収束先(しゅうそくさき)ということもある．

また，$X$ の点列 $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が**収束列** (**convergent sequence**) であるとは，この点列がある $x \in X$ に収束することをいう．／

記号 lim を用いると，点列 $(x_i)$ が $x$ に収束することを

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

とかける．

収束列の極限はただ一つに定まる．実際，$X$ の点列 $(x_i)$ の極限が $x$ と $x'$ の 2 つあったとすると，

$$\begin{aligned} d(x,x') &\leq d(x,x_n) + d(x_n,x) \qquad \text{(三角不等式)} \\ &= d(x_n,x) + d(x_n,x) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

であるので，距離の公理より $x = x'$ である．

**定義 2.8** (コーシー列)　$(X,d)$ を距離空間とする．$X$ の点列 $(x_1, x_2, \dots)$ が**コーシー列** (**Cauchy sequence**) であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n, m > N$ に対し，$d(x_n, x_m) < \varepsilon$ となることをいう [5]．／

記号 lim を用いると，コーシー列の定義は $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$ とかける．

収束列の定義とコーシー列の定義はよく似ているが，前者は収束先 $x \in X$ の存在を要請しているのに対し，後者はそうでない．収束列とコーシー列には，次のような関係がある．

**定理 2.2**　距離空間の収束列は常にコーシー列である．

**証明**　$(x_i)$ を収束列，その極限を $x \in X$ とする．定義より，任意の $\delta > 0$ に対し，ある $N > \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n > N$ に対し，$d(x_n, x) < \delta$ である．すると，任意の $m, n > N$

に対し，

$$
\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\le d(x_m, x) + d(x, x_n) \qquad \text{(三角不等式)} \\
&= d(x_m, x) + d(x_n, x) \\
&< 2\delta
\end{aligned}
$$

である．$\delta := \varepsilon/2$ とおけば，コーシー列の条件 (定義 2.8) が成立する． □

距離空間において，すべての収束列はコーシー列であるが，その逆は必ずしも成立しない．コーシー列が収束列でない例をいくつか挙げる．

**例**　$\mathbb{Q}$ の点列 $(1, 1.4, 1.41, 1.414, \dots)$ は明らかにコーシー列である．しかし，この点列の収束先は $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ であり，$\mathbb{Q}$ の収束列でない．

**例**　開区間 $(0,1) \subset \mathbb{R}$ の点列 $(0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, \dots)$ は明らかにコーシー列である．しかし，この点列の収束先は $0 \notin (0,1)$ であり，$(0,1)$ の収束列でない．

## 2.4　距離空間の完備性

**定義 2.9**　距離空間 $(X, d)$ において，任意のコーシー列が収束列であるとき，**完備**(かんび) (**complete**) であるという．このとき，$(X, d)$ のことを**完備距離空間** (**complete metric space**) という． ／

**命題 2.3（実数の完備性）**　実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は完備である．

**証明**　実数の連続性から従う．あるいは，実数を有理数列のうちコーシー列であるものの同値類として公理的に構成することでわかる [5, 付録]． □

**系 2.4**　複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ は完備である．

点列の収束を用いて閉包を定義することもできる．

**定義 2.10**　(点列による閉包の定義)　$(X, d)$ を距離空間，$\mathcal{D} \subset X$ を部分集合とする．$\mathcal{D}$ に属するすべての収束列の極限からなる集合を $\mathcal{D}$ の**閉包**(へいほう) (**closure**) といい，$\text{Ↄ}\,\mathcal{D}$ とかく．つまり

$$
\text{Ↄ}\,\mathcal{D} := \{x \in X \mid \exists (x_i) \subset \mathcal{D} \text{ s.t. } \lim_{n \to \infty} d(x_i, x) = 0\} \tag{2.2}
$$

／

定義 2.5 で与えた閉包の定義と一致する．$A$ の閉包というのは，$A$ に適当な元を加えて閉集合にしたもの，あるいは $A$ のコーシー列が収束するようにしたものと考えることができる．

$x \in \mathcal{D}$ であることと $x \in$ Ↄ $\mathcal{D}$ であることは，定義上は全く関係ない．

**系 2.5**　任意の $\mathcal{D} \subset X$ の閉包 Ↄ $\mathcal{D}$ について，$\mathcal{D} \subset$ Ↄ $\mathcal{D}$ である．

**証明**　$x \in \mathcal{D}$ とする．$\mathcal{D}$ の点列 $(x, x, x, \dots)$ は明らかに $x$ に収束するので $x \in$ Ↄ $\mathcal{D}$ である．

□

次に稠密を定義する．

**定義 2.11** (稠密)　$(X, d)$ を距離空間とする．$A \subset B$ をみたす $X$ の 2 つの部分集合について，$B \subset$ Ↄ $A$ であるとき，$A$ は $B$ において**稠密**（ちゅうみつ） (**dense**) であるという [10]．

特に Ↄ $A = X$ であるとき，$A$ は $X$ において稠密である．／

**命題 2.6**　距離空間の部分集合 $A$ が $B$ において稠密である必要十分条件は，任意の $x \in B$ の任意の近傍が $A$ と共通部分を持つことである [10]．

**証明**　**必要性**　$x \in B$ の近傍を $N$ とおく．$x$ は $N$ の内点であるから，$N(x; \varepsilon) \subset N$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する．一方，$A$ が $B$ において稠密という仮定から，任意の $x \in B$ は $A$ の閉包に含まれる．すなわち任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$N(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ である．したがって，$N \cap A \neq \emptyset$ がいえる．

**十分性**　任意の $x \in B$ に対して，その $\varepsilon$-近傍 $N(x; \varepsilon)$ を考えると，仮定より任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N(x; \varepsilon) \cap A \neq 0$ だから，$x \in$ Ↄ $A$．　□

**定義 2.12**　距離空間が稠密な高々可算集合をもつとき，**可分**（かぶん） (**separable**) であるという．／

## 2.5　位相空間

**定義 2.13**　距離空間 $(X, d)$ において，すべての開集合 $A \in \mathcal{P}(X)$ （つまり $A \subset_{\text{open}} X$）を集めた集合族を**位相**（いそう） (**topology**) といい，$\mathcal{O}_d$ であらわす．／

定義より $\mathcal{O}_d \subset \mathcal{P}(X)$ である．

**定義 2.14** 距離空間 $(X,d)$ において位相 $\mathcal{O}_d$ が定められているとき，$(X,\mathcal{O}_d)$ を**位相空間**(いそうくうかん)という．／

実は位相空間というのは，距離空間よりも広い概念である．しかし，ここでは距離空間の別の見方が位相空間であるとしておく．

位相空間では，$A$ の内部を「$A$ に含まれる開集合の中で最大のもの」，$A$ の閉包を「$A$ を含む閉集合の中で最小のもの」と定義する．

## 2.6 コンパクト集合

**定義 2.15** 距離空間 $(X,d)$ において，有界な閉集合 $A \subset X$ を**コンパクト集合** (**compact set**) という．／

# §3　抽象代数学の基礎

## 3.1　群

**定義 3.1** (群)　$G$ を集合，$*\colon G \times G \to G$ を二項演算とする．$G$ の元が，演算 $*$ に対して以下を満たすとき，$(G, *)$ は**群**(ぐん) (**group**) であるという．

(1) 任意の $a, b, c \in G$ に対し，$(a * b) * c = a * (b * c)$ である．
(2) ある $e \in G$ が存在して，任意の $a \in G$ に対し，$a * e = e * a = a$ である．
(3) 任意の $a \in G$ に対し，ある $a^{-1} \in G$ が存在して，$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ である．

さらに以下を満たすとき，$(G, *)$ を**アーベル群** (**Abelian group**) であるという．

(4) 任意の $a, b \in G$ に対し，$a * b = b * a$ である．

群 $(G, *)$ のことを単に $G$ とかくこともある．／

**例**

$$\mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) \coloneqq \{A\colon \text{実成分 } n\text{-次正方行列} \mid \det A = 1\}$$

とする．これは行列としての積に対して群をなす．

**例**　自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ は，通常の和 $+$ に対して群をなす．

**例**　実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は，通常の積 $\times$ に対して群をなさない．なぜなら，$0 \in \mathbb{R}$ に対して，$0 \times x = 1$ となるような $x \in \mathbb{R}$ が存在しないため．

## 3.2　環

**定義 3.2** (環)　$R$ を集合，$+$ と $*$ を $R$ 上の二項演算とする．以下がみたされるとき，$(R, +, *)$ は**環**(かん) (**ring**) であるという．

- 和について，$(R, +)$ はアーベル群である．すなわち
  (1) 任意の $a, b, c \in R$ に対し，$(a + b) + c = a + (b + c)$ である．
  (2) ある $0 \in R$ が存在して，任意の $a \in R$ に対し，$a + 0 = 0 + a = a$ である．

(3) 任意の $a \in R$ に対し，ある $-a \in R$ が存在して，$a+(-a)=(-a)+a=0$ である．

(4) 任意の $a, b \in R$ に対し，$a+b=b+a$ である．

- 積について，

(5) 任意の $a, b, c \in R$ に対し，$(a*b)*c=a*(b*c)$ である．

(6) ある $1 \in R$ が存在して，任意の $a \in R$ に対し，$a*1=1*a=a$ である．

- 和と積の関係について，

(7) 任意の $a, b, c \in R$ に対し，$(a+b)*c=a*c+b*c$ であり，$a*(b+c)=a*b+a*c$ である．

さらに積について以下がみたされるとき，$(R,+,*)$ は**可換環** (**commutative ring**) であるという．

(9) 任意の $a, b \in R$ に対し，$a*b=b*a$ である．

二項演算 $+$ のことを**和**あるいは**加法**，$*$ のことを**積**あるいは**乗法**という． ／

**例**　$n$-次正方行列全体の集合は，行列の和 $+$ と積 $*$ に関して環であるが，$n=1$ の場合をのぞき可換環でない．

## 3.3　体

これから実数・複素数のもつ性質を抽象化した「体（たい）」を定義する．量子力学において扱う体は基本的に複素数体であるので，わざわざ抽象化を行う動機が見えづらいかもしれない．しかし，例えば量子情報の分野においては体として有限体を扱うことがあるので，ここで一般の体についての性質を議論しておく．

**定義 3.3** (体)　$\mathbb{K}$ を集合，$+$ と $*$ を $\mathbb{K}$ 上の二項演算とする．以下がみたされるとき，$(\mathbb{K},+,*)$ は**体（たい）** (**field**) であるという．

- 和について，$(\mathbb{K},+)$ はアーベル群である．

(1) 任意の $a, b, c \in \mathbb{K}$ に対し，$(a+b)+c=a+(b+c)$ である．

(2) ある $0 \in \mathbb{K}$ が存在して，任意の $a \in \mathbb{K}$ に対し，$a+0=0+a=a$ である．

(3) 任意の $a \in \mathbb{K}$ に対し，ある $-a \in \mathbb{K}$ が存在して，$a+(-a)=(-a)+a=0$ である．

(4) 任意の $a, b \in \mathbb{K}$ に対し，$a+b=b+a$ である．

- 積について，$(\mathbb{K}\setminus\{0\},\ *)$ はアーベル群である．

(5) 任意の $a, b, c \in \mathbb{K}$ に対し，$(a*b)*c=a*(b*c)$ である．

(6) ある $1 \in \mathbb{K}$ が存在して，任意の $a \in \mathbb{K}$ に対し，$a * 1 = 1 * a = a$ である．

(7) 任意の $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ に対し，ある $a^{-1} \in \mathbb{K}$ が存在して，$a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$ である．

(8) 任意の $a, b \in \mathbb{K}$ に対し，$a * b = b * a$ である．

- 和と積の関係について，

(9) 任意の $a, b, c \in \mathbb{K}$ に対し，$(a+b)*c = (a*c)+(b*c)$ であり，$a*(b+c) = (a*b)+(a*c)$ である．

／

**例**　有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$，実数全体の集合 $\mathbb{R}$，複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ は，それぞれ通常の和と積に関して体になる．

体をひとことでいえば，「四則演算（和・差・積・商）ができる集合」である．実数や複素数は体の典型的なものである．本稿で「体 $\mathbb{K}$」と書いてある場合，実数 $\mathbb{R}$ もしくは複素数 $\mathbb{C}$ と読み替えて差支えない．

## 3.4　複素数

複素数は物理学を扱ううえで必須のツールである．この節では，まず複素数はどのようにして定義されるのかを見たのちに，複素数に関する用語を定義し，その性質を調べる．

複素数は次のように構成される[10]．集合 $\mathbb{C}$ を

$$\mathbb{C} := \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \tag{3.1}$$

で定める．もちろん $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ である．$\mathbb{C}$ の元である順序対 $(a, b) \in \mathbb{R}$ に対し，和と積を次のように定義する．

$$(a, b) \underset{\mathbb{C}}{+} (c, d) := (a + c,\ b + d) \tag{3.2}$$

$$(a, b) \underset{\mathbb{C}}{\times} (c, d) := (ac - bd,\ ad + bc) \tag{3.3}$$

すると，$(\mathbb{C}, \underset{\mathbb{C}}{+}, \underset{\mathbb{C}}{\times})$ は体になるので，これを**複素数体**と呼ぶ．$\mathbb{C}$ の元を**複素数**（ふくそすう）と呼び，記号 $\mathrm{i}$ を用いて $(a, b) =: a + b\mathrm{i}$ とかく．

---

10)　物理学を学ぶにあたっては，具体的な複素数の計算に習熟しているほうが重要であり，複素数の構成方法を理解する必要はない．とはいえ，複素数を実際に作れるようになっておけば，巷に溢れる“虚数は存在しない”論に反駁できるかもしれない．なお，複素数の構成自体は有理数を構成するのよりもはるかに簡単である．

**証明**　$\mathbb{C}$ の元を $x=(a,b)$，$y=(c,d)$，$z=(e,f)$ とする．積の記号 $\underset{\mathbb{C}}{\times}$ は一部省略する．

**和について**　和が可換かつ結合的であることは明らか．零元は $0_{\mathbb{C}} \coloneqq (0,0)=0+0\mathrm{i}$ であり，$x$ に対する和の逆元は $-x=(-a,-b)$ である．

**積について**　積が可換であることは明らか．単位元は $1_{\mathbb{C}} \coloneqq (1,0) = 1+0\mathrm{i}$ であり，$x \neq 0_{\mathbb{C}}$ に対する積の逆元は $(a/\sqrt{a^2+b^2},\ -b/\sqrt{a^2+b^2})$ である．積が結合的であることは

$$
\begin{aligned}
(xy)z &= (ac-bd,\ bc+ad) \underset{\mathbb{C}}{\times} (e,f) \\
&= \cdots \\
&= (a,b) \underset{\mathbb{C}}{\times} (ce-df,\ de+cf) \\
&= x(yz)
\end{aligned}
$$

**分配法則**

$$
\begin{aligned}
(x \underset{\mathbb{C}}{+} y) \underset{\mathbb{C}}{\times} z &= (a+c,\ b+d) \underset{\mathbb{C}}{\times} (e,f) \\
&= (ae+ce-bf-df,\ af+cf+be+de) \\
&= (ae-bf,\ af+be) \underset{\mathbb{C}}{+} (ce-df,\ cf+de) \\
&= (x \underset{\mathbb{C}}{\times} z) \underset{\mathbb{C}}{+} (y \underset{\mathbb{C}}{\times} z)
\end{aligned}
$$

$\square$

複素数の積は，$(a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d)=(ac-bd)+\mathrm{i}(bc+ad)$ と書くことができる．$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ と考えれば，形式的に $ac-\mathrm{i}^2bd+\mathrm{i}(bc+ad)$ と計算できる．

実数 $a \in \mathbb{R}$ は，複素数 $a=(a,0)$ とみなすことで，複素数に組み込むことができる ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)．部分集合 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ の元を**虚数**という[11]．

複素数 $z=a+b\mathrm{i}$（$a,b$ は実数）に対し，$\operatorname{Re} z = a$ を $z$ の**実部**，$\operatorname{Im} z = b$ を $z$ の**虚部**という．

複素数の**絶対値** (absolute value) を

$$
|z| = |a+b\mathrm{i}| \coloneqq \sqrt{a^2+b^2} \tag{3.4}
$$

で定める．$0 \leq |z| < \infty$ であり，$|z|=0$ となるのは $a=b=0$，つまり $z=0$ のときに限る．

---

11)　虚数とは $a+\mathrm{i}b$（$a,b \in \mathbb{R}$，$b \neq 0$）とあらわせる数のことである．したがって，$3\mathrm{i}$ のみならず $1+3\mathrm{i}$ も虚数である．$\mathrm{i}b$（$b \in \mathbb{R}$）とあらわされる数（たとえば $3\mathrm{i}, -2\mathrm{i}$）を指す用語は**純虚数**である．

### 複素共役

複素数 $a+ib$ に対する複素数 $a-ib$ のことを，**共役複素数**（きょうやくふくそすう）あるいは**複素共役**（ふくそきょうやく）という[12)]．複素数 $z$ の複素共役を，$\bar{z}$ や $z^*$ と書く．

複素共役を用いると，$z$ の絶対値は

$$|z|^2 = z \cdot z^* \tag{3.5}$$

とかける．実際の計算でもよく使う，非常に有用な関係式である．

### 複素数についての性質

**命題 3.1** $\frac{1}{\mathrm{i}} \equiv \mathrm{i}^{-1} = -\mathrm{i}$ である．

**証明** $\mathrm{i}^{-1}$ とは $\mathrm{i}$ の積に関する逆元であるから，$\mathrm{i}^{-1}\cdot\mathrm{i} = 1$ でなければならない．ここで，$(-\mathrm{i})\cdot\mathrm{i} = 1$ であること，および逆元の一意性（体の公理）から，$\mathrm{i}^{-1} = -\mathrm{i}$ である． □

**命題 3.2** 複素数 $z_1, z_2$ の絶対値について，以下が成り立つ．

(1) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(2) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ （**三角不等式**）

**証明** (1) $z_1 = a_1 + \mathrm{i}b_1$，$z_2 = a_2 + \mathrm{i}b_2$ とすると，

$$\begin{aligned}
|z_1 z_2|^2 &= |a_1 a_2 + \mathrm{i}a_1 b_2 + \mathrm{i}a_2 b_1 - a_2 b_2|^2 \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 \\
&= (a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) \quad = |z_1|^2 |z_2|^2
\end{aligned}$$

(2)

□

**命題 3.3** 複素数 $x, y$ について，以下の不等式が成り立つ．

$$|x+y|^2 \le (|x| + |y|)^2 \le 2\big(|x|^2 + |y|^2\big) \tag{3.6}$$

12） 共役（きょうえき）は誤読．もともとは軛（くびき）（牛車（ぎっしゃ）などを引く牛馬に取り付ける横向きの棒）という字を用いて共軛（きょうやく）とかいていたが，1946 年に定められた当用漢字，1981 年の常用漢字への書き換えに伴い共役（きょうやく）と書かれるようになった．同様の理由で，交叉（こうさ）は交差，函数（かんすう）（函は「箱」の意）は関数と書き換えられた．[4] のように古い書籍は「函数」表記を用いている．

常用漢字表に含まれる漢字は意外に少なく，楕円は表外字である．汎関数，勾配は 2010 年の改訂でくわえられた．常用漢字への書き換えについては，Wikipedia 日本語版の「同音の漢字による書きかえ」に詳しい．

**証明**　まず,

$$\begin{aligned}|x+y|^2 &= |x|^2 + 2\,\mathrm{Re}(xy) + |y|^2 \\ &\le |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\ &= (|x|+|y|)^2\end{aligned}$$

より左側の不等号が示される．右側の不等号は，相加相乗平均の関係 $2\sqrt{ab} \le a+b$（$a,b>0$）より明らかである． □

# 第 2 章　ベクトル空間の線形代数

量子力学においては状態を「ベクトル」としてあらわすことは，量子力学を学んだばかりの学生でも知っている．しかし，状態がふつうの数ベクトルであらわされるわけではない．それではここでいう「ベクトル」とは何のことなのだろうか．

数ベクトルのもつ性質を抽出し，抽象的な「ベクトル」を定義する．さらにベクトルの内積，行列をも抽象化し，「線形写像」というものを定義する．線形写像は量子状態から観測可能な物理量を取り出す線形演算子の基礎となる考え方であり，それゆえ線形写像を理解せずに量子力学を理解することはできない．線形代数学とはこのベクトルと線形写像を扱う数学の分野であるが，量子力学とは線形代数であるという人もいるくらいである．

# §4　行列

この章では行列の性質を述べる．

## 4.1　行列の定義

用語の定義にとどめる．

**定義 4.1** (行列) $\mathbb{K}$ を体 (定義 3.3) とする．$\mathbb{K}$ の元（すなわち数字）を縦横に $m \times n$ 個ならべたものを**行列**(ぎょうれつ) (**matrix**) という．

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad a_{ij} \in \mathbb{K} \tag{4.1}$$

縦が**列**(れつ)，横が**行**(ぎょう)である．

eq. (2.1) において，上から $i$ 番目，左から $j$ 番目にある数字 $a_{ij}$ のことを，$A$ の $ij$-成分という．これを $(A)_{ij}$ とかくこともある．／

eq. (2.1) の行列 $A$ を，$(a_{ij})_{1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n}$ とあらわすこともある．

**定義 4.2** $\mathbb{K}$-係数の $m \times n$-行列全体の集合を $M_{mn}(\mathbb{K})$ とあらわす．／

名前がついている特別な行列がいくつかある．

**定義 4.3** (正方行列) 行と列の数が同じ行列，すなわち $n \times n$-行列を**正方行列**(せいほうぎょうれつ)という．特に大きさを明示する場合，$n$-次(じ)正方行列という．／

**定義 4.4** 正方行列のなかで，$ii$-成分が 1，それ以外が 0 である行列

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

を**単位行列**(たんいぎょうれつ)という．／

**定義 4.5** $A$ を $n$-次正方行列とする．

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \tag{4.3}$$

となるような $n$-次正方行列 $A^{-1}$ が存在するとき，$A^{-1}$ を $A$ の**逆行列**という．／

**定義 4.6** 行列の和・倍・積を以下のように定義する．

(1) 2 つの $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$，$B = (b_{ij})$ の和は，それぞれの成分の和

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n} \tag{4.4}$$

(2) 行列 $A = (a_{ij})$ の $c$（$\in \mathbb{K}$）倍は，それぞれの成分の $c$ 倍

$$c \cdot A := (c \cdot a_{ij})_{1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n} \tag{4.5}$$

(3) $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$，$n \times l$ 行列 $B = (b_{jk})$ の積は

$$A \cdot B := \left( \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} \cdot b_{jk} \right)_{1 \leq i \leq m,\ 1 \leq k \leq l} \tag{4.6}$$

／

**命題 4.1** 行列の演算についての性質を挙げる．$p \times q$ 行列 $A$，$q \times r$ 行列 $B$，$r \times s$ 行列 $C$ とする．

- $M_{mn}(\mathbb{K})$ は和についてアーベル群 (定義 3.1) をなす．すなわち
  (1)（結合律）$(A + B) + C = A + (B + C)$ であり，
  (2)（単位元）$A + O = O + A = A$ であり，
  (3)（逆元）$A + (-A) = (-A) + A$ となる $-A$ が存在し，
  (4)（交換律）$A + B = B + A$ である．
- $M_{mn}(\mathbb{K})$ は積について結合的であり，また単位元をもつ．すなわち，
  (1)（結合律）$(AB)C = A(BC)$ であり，
  (2)（単位元）$AI = IA = A$ である．
- 

## 4.2 置換

**定義 4.7** 集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ から自身への写像 (定義 1.8) のうち全単射であるものを，$n$-文字の**置換**（ちかん）という．それぞれの元を $1 \mapsto \sigma(1)$，$2 \mapsto \sigma(2)$，… とうつすものを

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

とかく．$n$ 文字の置換 $\sigma$ 全体がなす集合を $\mathfrak{S}_n$ とかく．／

**定義 4.8**　置換 $\sigma$ のうち恒等写像であるものを**恒等置換**という．／

**定義 4.9**　置換 $\sigma$ の逆写像 $\sigma^{-1}$ を**逆置換**という．／

任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ は全単射であるから，逆置換 $\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n$ が必ず存在する．

**定義 4.10** (置換の積)　$\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ とする．2 つの置換の積 $\sigma\tau$ を，写像の合成 $\sigma \circ \tau$ として定める．／

なお，一般に $\sigma\tau \neq \tau\sigma$ である．

この記法を用いると，任意の置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ とその逆置換 $\sigma^{-1}$ について，$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma =$ 恒等置換 である．

**命題 4.2**　$n$-文字の置換全体の集合 $\mathfrak{S}_n$ は，定義 4.10 で定義される積に対して群をなす．

**証明**　結合律は写像の合成が結合的である (命題 1.2) ことよりいえる．単位元は恒等置換，逆元は逆置換である．□

**定義 4.11**　置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ のうち，$\sigma(i) \neq i$ となる $i$ が 2 つだけのもの，つまり 2 つの数字を入れ替えるだけの置換を**互換**(ごかん) (**transposition**) という．／

**命題 4.3**　任意の置換は互換の積としてあらわされる．

置換に対し，互換の積によるあらわしかたは一意ではない．

**命題 4.4**　任意の置換を互換に分解したとき，含まれる互換の数の偶奇は積のあらわしかたによらない．

証明は複雑なため省略するが，これによって次に示す sgn の定義を正当化される．

**定義 4.12**　置換 $\sigma$ を互換による積であらわしたとき，互換が奇数個なら $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$，偶数個なら $\operatorname{sgn}(\sigma) = +1$ となるように $\operatorname{sgn}\colon \mathfrak{S}_n \to \{+1, -1\}$ を定義する．これを置換の**符号**(ふごう) (**sign**) という．／

$\operatorname{sgn}(\sigma)$ のことを $(-1)^\sigma$ や $(-)^\sigma$ とかくこともある．

**系 4.5**　任意の置換 $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$ について，$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}\sigma \cdot \operatorname{sgn}\tau$ である．特に，$\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$ である．

**証明**　前半は $\sigma$，$\tau$ をそれぞれ互換の積であらわせば明らか．後半は $\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma\cdot\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\text{恒等置換}) = 1$ であることからわかる． □

## 4.3　行列式

**定義 4.13**　$n$-次の正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して，

$$\det A := \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)} \tag{4.7}$$

で定義される写像 $\det\colon M_{nn}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ を**行列式**（ぎょうれつしき） (**determinant**) という．／

**命題 4.6**　$A$ を $n$-次正方行列とする．行列式について，以下が成り立つ．

(1) $\det A = \det {}^{\mathrm{t}}A$

(2) $\det(cA) = c^n \det A$

**証明**　(1) ${}^{\mathrm{t}}A$ の行列式は

$$\det {}^{\mathrm{t}}A = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}$$

であるが，$\sigma(i)$ が連番になるように $a_{\sigma(i),i}$ の順番を入れ替えることで，

$$\det {}^{\mathrm{t}}A = \sum_{\sigma^{-1}\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})\, a_{1,\sigma^{-1}(1)}a_{2,\sigma^{-1}(2)}\cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$$

と書き換えられ，系 4.5 より $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})$ であることから従う．

(2) 行列式の定義より明らかである．

□

**定義 4.14**　正方行列 $A$ に対し，逆行列 $A^{-1}$ が存在するとき，$A$ を**正則行列**（せいそくぎょうれつ） (**invertible matrix**) という．／

**命題 4.7**　以下は同値．

(1) $A$ は正則行列．

(2) $A$ の行列式 $\det A = 0$.

(3) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は自明な解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみである．

# §5　ベクトル空間

量子力学において，系の状態は「ベクトル」を用いてであらわされる．しかし，通常の数(すう)ベクトルでは量子力学的状態をあらわせないことがわかる（ここでどこかを引用する)．そこで，数ベクトルの概念を一般化・抽象化する必要がある．この章ではベクトルの性質を抽象化し，ベクトル空間について定義する．

## 5.1　3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の性質

この節では，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ における数ベクトルの性質を確かめる．

$n$ 個の数字[1]を縦に並べたものを「$n$-次(じ)の列(れつ)ベクトル」と呼び，横に並べたものを「$n$-次の行(ぎょう)ベクトル」と呼ぶ [3]．列ベクトルのことを「縦(たて)ベクトル」，行ベクトルを「横(よこ)ベクトル」ということもある．

たとえば eq. (2.8) の $\boldsymbol{x}$ は 3 次の列ベクトル，$\boldsymbol{y}$ は 3 次の行ベクトルである．

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \qquad \text{where } a, b, c \in \mathbb{C} \tag{5.1}$$

ここで，$a, b, c$ はそれぞれある複素数である[2]．$a, b, c$ のことをそれぞれ，ベクトルの**成分(せいぶん)**という．

列ベクトルと行ベクトルは，「**転置(てんち)** (**transpose**)」という操作によって移り変わる．つまり，

$$^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}, \quad ^{\mathrm{t}}\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

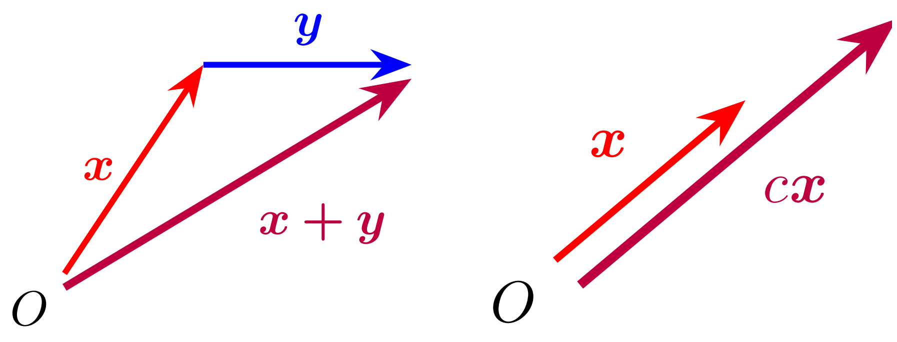
である．列ベクトルを，転置を用いて $^{\mathrm{t}}(a \quad b \quad c)$ と表記することもある．

ベクトル $^{\mathrm{t}}(a, b, c)$ は，ある点から $x$-軸方向へ $a$，$y$-軸方向へ $b$，$z$-軸方向へ $c$ だけ動いた点を結ぶ矢印として考えることができる．

---

1）　ここでは実数または複素数のこと．

2）　$\mathbb{C}$ は複素数全体の集合．eq. (1.1) を参照




(a) ベクトルの和　(b) ベクトルのスカラー倍

**図 2.1: ベクトルの演算**

### ベクトルの演算

ベクトル同士の「和」（足し算）を

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \\ c + c' \end{pmatrix}$$

のように，各成分の和として定義する．ベクトルの和は，2 つの矢印をつなげた見たときの矢印に相当する（図 2.1a）．

また，ベクトルの「スカラー倍」を，

$$\lambda \star \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix}$$

で定義する．ベクトルのスカラー倍は，向きを保ったまま長さを $\lambda$ 倍した矢印に対応する（図 2.1b）．

### ベクトルの内積

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{x}$ を列ベクトルとすると，それらの間の内積 (定義 6.1) は，以下のように定義できるのだった．

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{x}\| \cos\theta$$

ここで，$\|\boldsymbol{a}\|$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ の長さ (定義 6.4) であり，これは三平方の定理より

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

で与えられる．また，$\theta$ は $\|\boldsymbol{a}\|$ と $\|\boldsymbol{x}\|$ のなす角度である．

2 つのベクトルが直交 (定義 6.2) する場合（$\theta = \pi/2$），$\cos\theta = 0$ となるから，内積は 0 になる．

## 5.2　ベクトル空間の定義

**定義 5.1** (ベクトル空間) $V$を集合, $(\mathbb{K}, +, *)$ を体 (定義 3.3) とする．$V$上の**和** $+\colon V \times V \to V$, **スカラー倍** $\star\colon \mathbb{K} \times V \to V$が定義され，以下が満たされるとき，$(V, +, \star)$ を（$\mathbb{K}$ 上の）**ベクトル空間** (vector space) あるいは**線形空間**(せんけいくうかん) (linear space) という．このとき $V$の元を**ベクトル** (vector)，$\mathbb{K}$ の元を**スカラー** (scalar) という．

(1) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$に対して，$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ である．
(2) ある $\boldsymbol{0} \in V$がただひとつ存在し，任意の $\boldsymbol{v} \in V$に対して，$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ である．
(3) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$に対して，ある $-\boldsymbol{v}$ がただひとつ存在して，$\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = (-\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ である．
(4) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$に対して，$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ である．
(5) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$および任意の $c \in \mathbb{K}$ に対して，$c \star (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = (c \star \boldsymbol{u}) + (c \star \boldsymbol{v})$ である．
(6) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$および任意の $a, b$ に対して，$(a + b) \star \boldsymbol{v} = (a \star \boldsymbol{v}) + (b \star \boldsymbol{v})$ である．
(7) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$および任意の $a, b$ に対して，$(a * b) \star \boldsymbol{v} = a \star (b \star \boldsymbol{v})$ である．
(8) 任意の $\boldsymbol{v} \in V$に対して，$1 \star \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ である．

ベクトル空間 $(V, +, \star)$ のことを単に $V$と書くこともある．／

定義 5.1 は，ユークリッド空間における数ベクトルがもつ性質を抽出したものである．

**系 5.1**　ベクトル空間 $V$は以下を満たす．

- 任意の $\boldsymbol{v} \in V$に対し，
  (1) $0 \star \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ である．
  (2) $(-1) \star \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$ である．

**証明**　(1) $0 \star \boldsymbol{v} = (0 + 0) \star \boldsymbol{v} = 0 \star \boldsymbol{v} + 0 \star \boldsymbol{v}$ より従う．
(2) $\boldsymbol{v} + (-1) \star \boldsymbol{v} = 1 \star \boldsymbol{v} + (-1) \star \boldsymbol{v} = (1 + (-1)) \star \boldsymbol{v} = 0 \star \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ より従う．

□

$\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{u}) =: \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ とかくことが多い．

## 5.3　部分ベクトル空間

**定義 5.2** (部分ベクトル空間)　$V$ をベクトル空間，$W \subset V$ とする．$W$ が $V$ の和とスカラー倍に対してベクトル空間になるとき，$W$ は $U$ の**部分ベクトル空間** (vector subspace) あるいは単に**部分空間** (subspace) であるという．／

部分空間と部分集合を取り違えないように注意が必要である．部分集合のうちベクトル空間になるものが部分空間（部分ベクトル空間）である．

**例**　$V$ をベクトル空間とすると，$V$ 自身は部分ベクトル空間である．また，零ベクトルのみを含む空間 $\{\mathbf{0}\}$ も部分ベクトル空間である．

**定理 5.2**　$V$ をベクトル空間とする．$U \subset V$ が以下の条件を満たす場合，$U$ は $V$ の部分ベクトル空間になる．

(1) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$ に対し，$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$ である（$U$ は和で閉じている）．
(2) 任意の $\boldsymbol{v} \in U$ および任意の $c \in \mathbb{K}$ に対し，$c \star \boldsymbol{v} \in U$ である（$U$ はスカラー倍で閉じている）．
(3) $\mathbf{0} \in U$ である．

(3) は (2) で $c = 0$ とすれば自動的に満たされるように見える．この条件をわざわざ加えるのは，$U \neq \emptyset$ であることを保証するためである．

**命題 5.3**　$V$ をベクトル空間，$W_1, W_2 \subset V$ を部分ベクトル空間とする．このとき共通部分 (定義 1.4) $W_1 \cap W_2$ は $V$ の部分ベクトル空間である．

**証明**　定理 5.2 を確かめればよい．□

**定義 5.3** (和空間)　$V$ をベクトル空間，$W_1, W_2 \subset V$ を部分ベクトル空間とする．

$$W_1 + W_2 := \{\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \mid \boldsymbol{v}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{v}_2 \in W_2\} \tag{5.2}$$

は $V$ の部分ベクトル空間である．／

なお，和空間 $W_1 + W_2$ と和集合 (定義 1.3) $W_1 \cup W_2$ は異なる概念である．一般に $W_1 \cup W_2$ は部分ベクトル空間にならない．

**定義 5.4** (直和空間)　和空間 $W_1 + W_2$ で，特に $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ であるとき，**直和**（ちょくわ） (direct sum) といい，$W_1 \oplus W_2$ とかく．／

**命題 5.4**　ベクトル空間 $V$ が $V=W_1\oplus W_2$ と直和であらわせるとする．このとき，任意のベクトル $\boldsymbol{v}\in V$ は，$\boldsymbol{w}_1\in W_1$ と $\boldsymbol{w}_2\in W_2$ を用いて，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2$ とかける．しかも $\boldsymbol{w}_1$ と $\boldsymbol{w}_2$ は一意に定まる．

**証明**　$\boldsymbol{v}\in V$ が $W_1$ の元と $W_2$ の元との和であらわせるのは和空間の定義から明らかなので，一意性を示す．$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2=\boldsymbol{w}_1'+\boldsymbol{w}_2'$ と 2 とおりに分解できたとする．すると

$$\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w}_1'=\boldsymbol{w}_2-\boldsymbol{w}_2'$$

であるが，左辺は $W_1$，右辺は $W_2$ のベクトルである．ところが，$W_1$ と $W_2$ は直和なので，$W_1\cap W_2=\{\boldsymbol{0}\}$．よって $\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w}_1'=\boldsymbol{w}_2-\boldsymbol{w}_2'=\boldsymbol{0}$ より，$\boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{w}_1'$，$\boldsymbol{w}_2=\boldsymbol{w}_2'$ である．　□

## 5.4　ベクトルの一次独立・一次従属

ベクトルをスカラー倍したものや，ベクトル同士の和をとったものもベクトルである．この考え方を推し進めると，線形結合という概念にいきつく．

記号の煩雑さを防ぐため，この節からスカラー倍の記号 $\star$ を省略し，$c\star\boldsymbol{v}=:c\boldsymbol{v}$ とかく．

**定義 5.5** (ベクトルの線形結合)　$V$ を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間，$(\boldsymbol{v}_\lambda)_{\lambda\in\lambda}\in V$ をベクトル，$(c_\lambda)_{\lambda\in\lambda}\in\mathbb{K}$ を有限個を除いてゼロであるスカラーとする．このとき，ベクトル $\boldsymbol{v}=\sum_{\lambda\in\lambda}c_\lambda\boldsymbol{v}_\lambda$ のことを，ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots$ の**線形結合**(せんけいけつごう) (**linear combination**) あるいは**一次結合**(いちじけつごう)という．／

定義 5.5 において，$c_i$ が有限個を除きゼロである，つまり $c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\cdots$ が有限和であるという条件は重要である．一般に，無限和では $\sum_{\lambda\in\Lambda}c_\lambda\boldsymbol{v}_\lambda\in V$ とは限らない．たとえば，実関数 $e^x$ は多項式ベクトル空間の元 $1,x,x^2,x^3,\ldots\in\mathbb{R}[x]$ を使って

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots$$

と書けるが，明らかに $e^x\notin\mathbb{R}[x]$ である．

ベクトル空間は線形結合に対して閉じている．つまり，ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ がベクトル空間 $V$ に属するなら，それらの線形結合 $c_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n$ も $V$ に属する．そうすると，ベクトル空間 $V$ を作るのにすべてのベクトルを使う必要はなく，種(たね)となるベクトルをいくつか列挙すれば，残りのベクトルはそれらの線形結合で自動的に作られるのではないかという発想が生まれる．

**定義 5.6** (ベクトル空間の生成系)　$V$ を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間，$W\subset V$ を部分ベクトル空間とする．ベクトルの組 $(\boldsymbol{v}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ($\boldsymbol{v}_\lambda\in V$) が $W$ を**生成する** (generate) あるいは**張る**

(**span**) とは，$(\boldsymbol{v}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ から有限個のベクトル $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ を任意にとったときの線形結合の全体が $W$ に一致する，すなわち

$$W = \{\sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda \boldsymbol{v}_\lambda + \cdots \in V \mid c_\lambda \in \mathbb{K},\ c_\lambda \text{ は有限個を除きゼロ}\} \subset V$$

であることをいう．また，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots \in V$が生成する部分ベクトル空間を

$$W = \langle\!\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots \rangle\!\rangle \tag{5.3}$$

とかく．／

**定義 5.7** (一次独立と一次従属)　$V$を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．ベクトルの組 $(\boldsymbol{u}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ($\boldsymbol{u}_\lambda \in V$) が**一次独立**(いちじどくりつ) (**linearly independent**) あるいは**線形独立**であるとは，有限個を除き 0 である $(c_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$（$c_\lambda \in \mathbb{K}$）に対し，

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \boldsymbol{u}_\lambda = \boldsymbol{0} \iff \text{任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対し } c_\lambda = 0$$

であることをいう．ベクトルの組 $(\boldsymbol{u}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が一次独立でないとき，**一次従属**(いちじじゅうぞく) (**linearly dependent**) あるいは**線形従属**という．／

## 5.5　ベクトル空間の基底と次元

**定義 5.8** (基底)　$V$を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする．$V$に属するベクトルの組 $(\boldsymbol{v}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が以下を満たすとき，これを**基底**(きてい) (**basis**) という．

(1) $(\boldsymbol{u}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は一次独立である．
(2) $(\boldsymbol{u}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ は$V$を生成する．すなわち，任意の $\boldsymbol{v} \in V$に対して，有限個を除き 0 の，ある $(c_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$（$c_\lambda \in \mathbb{K}$）が存在し，$\boldsymbol{v} = \sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda \boldsymbol{u}_\lambda$ とかける．

／

**例**　$\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底である．また，$\{(1,1,0),\ (1,-1,0),\ (0,0,1)\}$ も $\mathbb{R}^3$ の基底である．

例でみたように，一般にベクトル空間$V$が与えられたとき，その基底の取り方は一意ではない．しかし，基底を構成するベクトルの数は，基底の取り方によらない．

**証明**　なんかかく　□

**定義 5.9** (次元)　$V$ をベクトル空間とする．$V$ の基底を構成するベクトルの数を **次元**(じげん) (**dimension**) といい，$\dim V$とかく．／

**例**　多項式ベクトル空間 $\mathbb{R}[x]$ について，$\{1, x, x^2, \ldots\}$ は一次独立であり，さらに基底をなす．このように，ベクトル空間 $V$ の基底を構成するベクトルの数は無限個であるとき，$V$ は**無限次元** (**infinite dimensional**) であるという．

**例**　複素数全体の集合 $\mathbb{C}$ は，$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間と考えると $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$（基底 1），$\mathbb{R}$ 上のベクトル空間と考えると $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$（基底 $1, \mathrm{i}$）である．

**系 5.5（基底によるベクトルの展開）**　$V$をベクトル空間とする．任意の $\boldsymbol{v} \in V$は，$V$の基底 $(\boldsymbol{u}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ のうち有限個を用いて $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{u}_n$ とかける．このとき，スカラーの組 $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ は一意に定まる．

**証明**　前半は基底の定義 (定義 5.8) より明らかなので，一意性を示す．$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + a_n\boldsymbol{u}_n = b_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + b_n\boldsymbol{u}_n$ と 2 通りにかけたとすると，

$$(a_1 - b_1)\boldsymbol{u}_1 + \ldots + (a_n - b_n)\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}$$

がいえるが，基底は一次独立なので $a_1 - b_1 = \cdots = a_n - b_1 = 0$ である．　□

**任意のベクトル空間に基底が存在する**

ここまでは，ベクトル空間に基底が存在すると仮定したうえで議論してきた．しかし，ベクトル空間に対して必ず基底をとれるのだろうか．それを保証するのが以下の定理である．

**定理 5.6**　任意のベクトル空間には基底が存在する．

証明は極めて抽象的であるので省略する．

# §6　内積空間とノルム空間

---

§ 5 では，数ベクトルを一般化した概念であるベクトル空間について扱った．そこではベクトルの和とスカラー倍が存在するのであった．しかし，ベクトルの「長さ」あるいは 2 つのベクトルの「角度」という概念は定義していなかった．

これからベクトル空間の上に「内積(ないせき)」および「ノルム」という演算を導入する．内積を用いることで，2 つのベクトルが「直交」するということを代数的に表現できる．また，ノルムを用いれば 2 点間の距離を定義することができる．

これまでは一般の体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間を考えてきたが，内積を考える上では，体を $\mathbb{R}$ もしくは $\mathbb{C}$ に限る必要がある．そこでこれからは $\mathbb{K}$ のかわりに $\mathbb{C}$ と書くことにする．以降の $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ に置き換えることも容易である．

## 6.1　内積空間

まず，2 つのベクトルから実数を得る演算である内積を定義する．

**定義 6.1** (内積)　$V$をベクトル空間 (定義 5.1) とする．写像 $\langle \bullet, \bullet \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}$ は以下を満たすとき，**内積(ないせき)** (inner product) であるという．

- 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$，$c \in \mathbb{C}$ に対し，
  (1) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle$ である．
  (2) $\langle \boldsymbol{u}, c\boldsymbol{v} \rangle = c\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ である．
  (3) $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle^*$ である．
  (4) $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \geq 0$ である．また，$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ であるのは $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ であるときに限る．

内積をもつベクトル空間を**内積空間** (inner product space) という．／

**系 6.1**　内積は以下を満たす．

- 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$，$a, b \in \mathbb{C}$ に対し，
  (1)（**線形性** (linearity)）$\langle \boldsymbol{u}, a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{w} \rangle = a\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + b\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle$
  (2)（**反線形性** (antilinearity) **反線形性** (linearity)）$\langle a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = a^*\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle + b^*\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$
  (3) $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{0}) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{v}) = 0$

  (1) と (2) をあわせて**半双線形** (sesqui-linear) であるという．

**例**　実ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において，

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle := \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

は内積である．また，複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$ において，

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle := \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i$$

は内積である．これらを特に**標準内積**という．

**定義 6.2**　$V$を内積空間とする．ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \in V \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ は，$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle = 0$ であるとき，**直交する** (orthogonal) といい，$\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{u}$ とかく．また，$c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を用いて $\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{u}$ とかけるとき，**平行である** (parallel) といい，$\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{u}$ とかく．／

**定義 6.3** (直交補空間)　$V$をベクトル空間，$W \subset V$を部分ベクトル空間とする．$W$のベクトルすべてと直交するようなベクトルの集合，つまり

$$W^{\perp} := \{\boldsymbol{v} \in V \mid \text{任意の } \boldsymbol{u} \in W \text{ に対して } \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{u}\} \tag{6.1}$$

を $W$ の**直交補空間** (orthogonal compliment) という．／

**系 6.2**　$V$をベクトル空間とする．$W \subset V$の直交補空間 $W^{\perp}$ は $V$の部分ベクトル空間である．

**証明**　部分ベクトル空間の公理 (定理 5.2) を確かめればよい．すなわち，任意の $\boldsymbol{v} \in W$ に対し，

(1) $\boldsymbol{0} \in W^{\perp}$ であることは，$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{0} \rangle = 0$ から，
(2) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W^{\perp}$ ならば $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W^{\perp}$ であることは，$\langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{v} \rangle$ から，
(3) $\boldsymbol{x} \in W^{\perp}$，$c \in \mathbb{K}$ ならば $c\boldsymbol{x} \in W^{\perp}$ であることは，$\langle c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v} \rangle = c^* \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v} \rangle$ からいえる．

□

**系 6.3**　部分ベクトル空間 $W \subset V$とその直交補空間 $W^{\perp} \subset W$について，

$$W \cap W^{\perp} = \{\boldsymbol{0}\}$$

**証明**　$\boldsymbol{x} \in W \cap W^{\perp}$ をとる．$\boldsymbol{x} \in W^{\perp}$ より，任意の $\boldsymbol{v} \in W$ に対し $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ である．ここで，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} \in W$ ととることができるので，$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$．したがって $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ である．□

任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$は，ある部分空間 $W$ に属するベクトル $\boldsymbol{x}$ とその直交補空間に属するベクトル $\boldsymbol{y}$ とを用いて，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ と一意にあらわせそうである．有限次元の場合はたしかに $V = W \oplus W^{\perp}$ と直和分解 (定義 5.4) できる．しかし，無限次元の場合これは正しくない．

無限次元ヒルベルト空間が直和分解できる条件については，定理 12.3 で議論する．

## 6.2　ノルム空間

ベクトルの長さ，あるいは点の距離に対応するのがノルムという概念である．

**定義 6.4** (ノルム)　$V$をベクトル空間とする．写像 $\|\bullet\|: V \to \mathbb{R}$ は以下を満たすとき，**ノルム** (norm) という．

- 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$および $c \in \mathbb{C}$ に対し，
  (1) $\|\boldsymbol{v}\| \geq 0$ である．また，$\|\boldsymbol{v}\| = 0$ となるのは $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ のときに限る．
  (2) $\|c\boldsymbol{v}\| = |c|\|\boldsymbol{v}\|$ である．
  (3)（**三角不等式** (triangle inequality)）$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$ である．また，等号が成立するのは $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ が一次従属のときに限る．

ノルムが定義されたベクトル空間のことを**ノルム空間** (normed space) という．／

**例**　実ユークリッド空間のベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$ において，以下はいずれもノルムである．

$$\|\boldsymbol{v}\|_1 := \sum_{i=1}^{N} |v_i|, \qquad \|\boldsymbol{v}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |v_i|^2}, \qquad \|\boldsymbol{v}\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq N} |v_i|. \tag{6.2}$$

ノルムは距離 (定義 2.1) とみなすことができる（命題 2.1）．したがって，ノルム空間は距離空間であり，§§ 2.1 で導いたことがらが成り立つ．

## 6.3　内積とノルムの関係

§§ 6.1 では内積を，§§ 6.2 ではノルムを導入した．これらはそれぞれ独立に定義される概念であるが，特殊なベクトル空間においてはこの 2 つを統一することが可能である．まずは内積からノルムを定義しよう．

**定義 6.5** (内積から導かれるノルム)　$V$を内積空間とする．写像 $\|\bullet\|: V \to \mathbb{R}$ を以下で定義すると，これはノルムである．

$$\|\boldsymbol{v}\| := \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle} \tag{6.3}$$

したがって，内積空間は eq. (2.13) で定義されたノルムに対してノルム空間になる．／

**証明**　eq. (2.13) が定義 6.4 を満たすことを示せばよい．(1) は内積の定義（定義 6.1）から明らかなので，(3) を示す．そのために，まず次の補題を示す．

**補題 6.4（コーシー – シュワルツの不等式 (Cauchy–Schwarz inequality)）**　$V$を内積空間，$\|\bullet\|$ を内積から導かれるノルムとする．このとき，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ について

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| \tag{6.4}$$

が成り立つ．

**補題 6.4 の証明**　$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ のときは，$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| = 0$ なので成り立つ．$\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ のときを考える．任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ について内積の正値性から $\|\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}\| \geq 0$ がいえる．そこで $\lambda = -\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle^*$，$\mu = \|\boldsymbol{x}\|^2$ とおくと，

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y},\ \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}\rangle \\
&= \lambda\lambda^*\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle + \lambda\mu^*\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \mu\lambda^*\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle + \mu\mu^*\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \\
&= |\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle|^2\|\boldsymbol{x}\|^2 - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle^*\|\boldsymbol{x}\|^2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle - \|\boldsymbol{x}\|^2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle + \|\boldsymbol{x}\|^4\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2\left[-|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle|^2 + \|\boldsymbol{x}\|^2\|\boldsymbol{y}\|^2\right]
\end{aligned}$$

である．$\boldsymbol{y} \neq 0$ なので，内積の正値性より $\|\boldsymbol{x}\| > 0$．そこで両辺を $\|\boldsymbol{x}\|^2$ で割れば eq. (2.14) が示される．□

補題 6.4 を用いると，

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 &= \langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\rangle \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle + \|\boldsymbol{y}\|^2 \\
&\leq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle| + \|\boldsymbol{y}\|^2 \\
&= \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2
\end{aligned}$$

と示される．□

一般のノルムについては成立しないが，内積から導かれるノルムについてのみ成立するのが，以下の中線定理である．

**定理 6.5（中線定理）**　$V$を内積空間，$\|\bullet\| = \langle \bullet, \bullet\rangle$ を内積から導かれるノルムとする．

$$\|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\|^2 = 2\left(\|\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{u}\|^2\right) \tag{6.5}$$

が成立する（**中線定理** (parallelogram law)）.

**証明**　ノルムを内積に直して計算すれば容易に示される．　□

次に，内積空間における内積から導かれるノルムについて成立する恒等式を見る．

**定理 6.6（偏極恒等式）**　$V$ を内積空間，$\|\bullet\|$ を内積から導かれるノルムとする．任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して，以下の**偏極恒等式** (polarization identity) が成立する．

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \frac{1}{4}(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 - \mathrm{i}\|\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\boldsymbol{y}\|^2 + \mathrm{i}\|\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\boldsymbol{y}\|^2) \tag{6.6}$$

**証明**　ノルムを内積に戻して，半双線形を用いて計算する．

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 &= \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \rangle &&= +[\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle] \\
-\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 &= -\langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} \rangle &&= -[\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle] \\
-\mathrm{i}\|\boldsymbol{x}+\mathrm{i}\boldsymbol{y}\|^2 &= -\mathrm{i}\langle \boldsymbol{x}+\mathrm{i}\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}+\mathrm{i}\boldsymbol{y} \rangle &&= -\mathrm{i}[\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle + \mathrm{i}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle - \mathrm{i}\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle] \\
+\mathrm{i}\|\boldsymbol{x}-\mathrm{i}\boldsymbol{y}\| &= +\mathrm{i}\langle \boldsymbol{x}-\mathrm{i}\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}-\mathrm{i}\boldsymbol{y} \rangle &&= +\mathrm{i}[\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle - \mathrm{i}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle + \mathrm{i}\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle]
\end{aligned}$$

□

一般の内積空間においては，定義 6.5 によるノルムが存在すること，そのノルムから内積を再構成できることが分かった．それでは，一般のノルム空間においても定理 6.6 によって内積が定義できるのであろうか．そのことを示すのが次の定理である．

**定理 6.7　ジョルダン－フォン・ノイマンの定理** (Jordan–von Neumann theorem)：$V$ をノルム空間とする．$V$ 上のノルムが中線定理を満たすならば，$V$ は内積空間である．

定義 6.5 により "内積"$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ を定義し，それが内積の公理を満たすことを示す．

## 6.4　内積空間の基底

一般のベクトル空間において基底 (定義 5.8) が存在するのであった．内積空間においては，よい性質をもつ基底をとることができる．

**定義 6.6** (正規直交基底) $V$ を有限次元の内積空間とする．$V$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\} \subset V$ が次の性質を満たすとき，**正規直交基底** (orthonormal basis) という．

$$\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \delta_{i,j} \quad \text{Kronecker delta}^{(\text{定義 } 1.29)} \tag{6.7}$$

／

無限次元の場合も同様に定義できる．

有限次元の内積空間では，正規直交基底を具体的に構成することができる．

**定理 6.8　グラム – シュミットの正規直交化** (Gram–Schmidt process)：$\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\} \subset V$ を有限次元の内積空間 $V$ の基底とする．このとき，$V$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\} \subset V$ をつくることができる．

**証明**　基底 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ から具体的に $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ を構成する．

まず $\boldsymbol{u}_1 \coloneqq \boldsymbol{v}_1 / \|\boldsymbol{v}_1\|$ とおく．このとき，$\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1 \rangle = 1$ が成り立つ．

次に，$\boldsymbol{u}'_2 \coloneqq \boldsymbol{v}_2 - \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \boldsymbol{u}_1$ とし，$\boldsymbol{u}_2 \coloneqq \boldsymbol{u}'_2 / \|\boldsymbol{u}'_2\|$ と定める．このとき $\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle = 0$ であり，$\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2 \rangle = 1$ である．

これを繰り返し，

$$\boldsymbol{u}'_m \coloneqq \boldsymbol{v}_m - \sum_{i=1}^{m-1} \langle \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_m \rangle \boldsymbol{u}_i, \qquad \boldsymbol{u}_m \coloneqq \boldsymbol{u}'_m$$

と定めれば，$\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ は eq. (2.17) を満たす．　□

グラム – シュミットの方法が使えるのは基底が有限個，つまり有限次元の場合だけであり，無限次元の場合は一般に成り立たない．無限次元ヒルベルト空間の場合は [**thm:basis-of-Hilbert-space**] で議論する．

# §7　線形写像

## 7.1　線形写像

ふたたびしばらく $\mathbb{K}$ を一般の体 (定義 3.3) とする.

**定義 7.1** (線形写像)　$V, W$ を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする[3]. 写像 $f\colon V \to W$ が以下を満たすとき, **線形写像** (linear map) あるいは**準同型写像** (homomorphism) という [7, §2.1].

(1) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し, $f(\boldsymbol{u} \boldsymbol{+} \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) \mathbin{+\!\!\!+} f(\boldsymbol{v})$ である.
(2) 任意の $c \in \mathbb{K}$ および任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し, $f(c \star \boldsymbol{v}) = c \ast f(\boldsymbol{v})$ である.

$V$ から $W$ への線形写像全体がなす集合を $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ とかく [7, §4.4].

特に, 線形写像 $f\colon V \to V$ を**自己準同型写像** (endomorphism) といい, $f$ 全体がなす集合を $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ とかく [7, §2.1, §4.4]. ／

**定義 7.2** (同型写像)　$V, W$ を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする. 線形写像 $f\colon V \to W$ が可逆である, つまり $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_W$ かつ $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_V$ (恒等写像 (定義 1.12)) となるような $f^{-1}\colon W \to V$ が存在するとき, $f$ を (𝕂 上の) **同型写像** (isomorphism) という.

とくに, 同型写像 $f\colon V \xrightarrow{\sim} V$ を**自己同型写像** (automorphism) という [7, §2.1]. ／

同型写像とは要するに, 全単射 (定義 1.15) である線形写像のことである.

ベクトル空間 $U, V$ の間に同型写像が存在するとき, $U$ と $V$ を同一のベクトル空間と見做すことができる.

**定義 7.3** (同型)　$V, W$ を体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とする. 同型写像 $f\colon V \xrightarrow{\sim} W$ が存在するとき, $V$ と $W$ は (𝕂 上に) **同型** (isomorphic) であるといい, $V \cong W$ とかく. ／

線形写像全体の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ は, 適切な和とスカラー倍の下でベクトル空間 (定義 5.1) をなす.

**命題 7.1**　$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ は, 以下で定義される和 $\dot{+}$ とスカラー倍 $\hat{\star}$ のもとで, 体 $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間になる [7, §4.4].

- $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, $c \in \mathbb{K}$ とする.

---

3) ここでは $V$ 上の和を $\boldsymbol{+}$, スカラー倍を $\star$ であらわし, $W$ 上の和を $\mathbin{+\!\!\!+}$, スカラー倍を $\ast$ であらわす. また, 体 $\mathbb{K}$ 上の和を $+$ であらわす.

(1) 和 $f \dotplus g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ は，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $(f \dotplus g)(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{v})$ である写像と定める．

(2) スカラー倍 $c \hat{\star} f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ は，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $(c \hat{\star} f)(\boldsymbol{v}) = c \ast f(\boldsymbol{v})$ である写像と定める．

**命題 7.2**　$\mathbb{K}$ 上の $n$-次元ベクトル空間と $\mathbb{K}^n$ は同型である [7].

**証明**　$\mathbb{K}$ 上の $n$-次元ベクトル空間 $V$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ をひとつとる．写像 $f\colon \mathbb{K}^n \xrightarrow{\sim} V$ を

$$f\colon \mathbb{K}^n \ni {}^{\mathrm{t}}(c_1 \ \cdots \ c_n) \longmapsto c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n \in V$$

と定めると，これは同型写像である．実際，$\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ は $V$ を生成する (定義 5.6) から $f$ は全射であり，基底による展開係数は一意であるから $f$ は単射である．$f$ が線形であることも明らかである． □

**系 7.3**　$\mathbb{K}$ 上の 2 つの $n$-次元ベクトル空間 $U, V$ は同型である．

**証明**　同型 $f\colon V \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}$ と同型 $g\colon \mathbb{K} \xrightarrow{\sim} U$ の合成 $g \circ f\colon V \xrightarrow{\sim} U$ が同型であることから従う． □

## 7.2　像と核

**定義 7.4** (像)　$f\colon V \to W$ を線形写像とする．$W$ の部分集合

$$\mathrm{Im}\, f := \{f(\boldsymbol{v}) \in W \mid \boldsymbol{v} \in V\} \tag{7.1}$$

を $f$ の**像**(ぞう) (**image**) という．

$\mathrm{Im}\, f$ の次元 $\mathrm{rank}\, f := \dim \mathrm{Im}\, f$ を，$f$ の**階数**(かいすう) (**rank**) という [3]. ／

**定義 7.5** (核)　$f\colon V \to W$ を線形写像とする．$V$ の部分集合

$$\mathrm{Ker}\, f := \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}_W\} \tag{7.2}$$

を $f$ の**核**(かく) (**kernel**) という．

$\mathrm{Ker}\, f$ の次元 $\mathrm{null}\, f := \dim \mathrm{Ker}\, f$ を，$f$ の**退化次数**(たいかじすう) (**nullity**) という [3]. ／

像 $\mathrm{Im}\, f$ は一般の写像についても定義できた (定義 1.9) が，核 $\mathrm{Ker}\, f$ は線形写像特有の概念である．

**命題 7.4**　$f\colon V \to W$ を線形写像とする．

(1) $f$ の像 $\operatorname{Im} f$ は，$W$ の部分ベクトル空間である．

(2) $f$ の核 $\operatorname{Ker} f$ は，$V$ の部分ベクトル空間である．

**証明**　$\operatorname{Im} f$ と $\operatorname{Ker} f$ がそれぞれ，部分ベクトル空間であることの必要十分条件（定理 5.2）を満たすことを確認すればいい．　□

**定理 7.5**　$V, W$ を有限次元のベクトル空間とする．線形写像 $f\colon V \to W$ の像と核について，$\operatorname{Im} f + \operatorname{null} f = \dim V$ が成り立つ [3, §5.1].

**証明**　$\operatorname{Ker} f$ の基底を $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ とし，$\boldsymbol{x}_{n+1}, \dots, \boldsymbol{x}_{n+m}$ を $f(\boldsymbol{x}_{n+1}) = \boldsymbol{y}_1, \dots, f(\boldsymbol{x}_{n+m}) = \boldsymbol{y}_m$（$\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_m$ は $\operatorname{Im} f$ の基底）となるようにとる．このとき $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n+m}$ が $V$ の基底になる．

まず，$\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n+m}$ は一次独立であることを示す．

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{x}_n + c_{n+1}\boldsymbol{x}_{n+1} + \cdots + c_{n+m}\boldsymbol{x}_{n+m} = \boldsymbol{0}$$

とおく．これに線形写像 $f$ を施すと，

$$c_{n+1}\boldsymbol{y}_1 + \cdots + c_{n+m}\boldsymbol{y}_m = \boldsymbol{0}$$

となり，$\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_m$ は一次独立であるから $c_{n+1} = \cdots = c_{n+m} = 0$ である．したがって

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}$$

であるから $c_1 = \cdots = c_n = 0$ である．よって $c_1 = \cdots = c_{n+m} = 0$ がいえた．

次に $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n+m}$ は $V$ を生成することを示す．任意の $\boldsymbol{x} \in V$ をとる．$f(\boldsymbol{x}) \in \operatorname{Im} f$ であるので，$\operatorname{Im} f$ の基底を用いて

$$f(\boldsymbol{x}) = c_{n+1}\boldsymbol{y}_1 + \cdots + c_{n+m}\boldsymbol{y}_m$$

とかける．$\boldsymbol{y}_i = f(\boldsymbol{x}_{n+i})$ を用いると

$$f(\boldsymbol{x} - c_{n+1}\boldsymbol{x}_{n+1} - \cdots - c_{n+m}\boldsymbol{x}_{n+m}) = \boldsymbol{0}$$

であるので，$\boldsymbol{x} - c_{n+1}\boldsymbol{x}_{n+1} - \cdots - c_{n+m}\boldsymbol{x}_{n+m} \in \operatorname{Ker} f$ である．よって

$$\boldsymbol{x} - c_{n+1}\boldsymbol{x}_{n+1} - \cdots - c_{n+m}\boldsymbol{x}_{n+m} = c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n$$

とかける．この式を変形すれば，$\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n+m}$ の線形結合であらわされた．　□

**命題 7.6**　線形写像 $f$ について，以下は同値.

(1) $f$ は単射.

(2) 核 $\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}\}$

**証明**　線形写像を $f\colon V \to W$ とする.

必要　任意の線形写像 $f$ に対して $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ である．$f$ は単射であるから，$f$ の核は $\mathbf{0}_V$ のみである.

十分　$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ に対し，$f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{w})$ であったする．$f$ は線形写像なので，$f(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = \mathbf{0}_W$．したがって $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} \in \mathrm{Ker}\, f$ であるが，$\mathrm{Ker}\, f = \{\mathbf{0}_V\}$ なので $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \mathbf{0}_V$.

□

## 7.3　表現行列

## 7.4　固有値と固有ベクトル

# §8　双対空間

## 8.1　双対空間

**定義 8.1** (線形汎関数) $V$を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 (定義 5.1) とする．線形写像 (定義 7.1) $f\colon V \to \mathbb{K}$ を**線形形式** (linear form) あるいは**線形汎関数**（せんけいはんかんすう） (linear functional) という．／

**例**　$V = \mathbb{R}^3$（3 次元ユークリッド空間）とする．$\mathbb{R}^3$ のベクトルをその第 1 成分にうつす写像 $f\colon \boldsymbol{v} \longmapsto v_1 \in \mathbb{R}$ は $V$の線形汎関数である．

**定義 8.2** (双対空間)　$V$上の線形汎関数全体の集合

$$V^* := \{f\colon V \to \mathbb{K} \mid f \text{ は線形汎関数}\} \tag{8.1}$$

を $V$の**双対空間**（そうついくうかん） (dual space) という [7, §4.1]．／

**命題 8.1**　ベクトル空間 $V$の双対空間 $V^*$ は，ベクトル空間をなす [7, §4.1].

**証明**　$V^*$ の元が，命題 7.1 で定義される和とスカラー倍について，定義 5.1 の公理を満たすことを示せばよい． □

**定義 8.3** (双対基底)　$V$を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間，$\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ を $V$の基底とすると，各 $i = 1, \dots, n$ に対し

$$f_i(\boldsymbol{x}_j) = \delta_{i,j} \quad \text{(定義 1.29)} \tag{8.2}$$

を満たす線形汎関数 $f_i\colon V \to \mathbb{K}$ がただひとつ存在する．このとき，$f_1, \dots, f_n$ は $V^*$ の基底になる．

eq. (2.21) で定義される $f_1, \dots, f_n$ を $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ の**双対基底**（そうついきてい） (dual basis) という．／

このような定義が可能であることについては証明を要するが，ここでは省略する．

**例**　$V = \mathbb{R}^n$ とし，ある $\boldsymbol{a} \in V$をとる．線形汎関数 $f_{\boldsymbol{a}}\colon V \to \mathbb{R}$ を

$$f_{\boldsymbol{a}}\colon V \ni \boldsymbol{v} \longmapsto {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}$$

で定める．$\mathbb{R}^n$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ に対する双対基底は，$f_{\boldsymbol{e}_1}, \dots, f_{\boldsymbol{e}_n}$ である．これは行ベクトル ${}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{e}_1, \dots, {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{e}_n$ とみることができる．.

## 8.2　零化空間

**定義 8.4** (零化空間) $V$をベクトル空間，$V^*$ をその双対空間とする．$V$の部分ベクトル空間 $W$ に対し，

$$W^{\perp} := \{f \in V^* \mid f(W) = \{0\}\} \tag{8.3}$$

を $W$ の**零化空間** (annihilator) という [7, §4.2]．／

**命題 8.2**　部分ベクトル空間 $W \subset V$の零化空間 $W^{\perp}$ は，$V^*$ の部分ベクトル空間である．

**証明**　写像 $i^*$ を，線形汎関数 $f\colon V \to \mathbb{K}$ を $W$ に制限する写像と定める：

$$i^*\colon V^* \ni f \longmapsto f|_W \in W^*$$

このとき，任意の $f, g \in V^*$ および $c \in \mathbb{K}$ について $i^*(f+g) = i^*(f) + i^*(g)$ かつ $i^*(cf) = c{\cdot}i^*(f)$ であるので, $i^*$ は線形写像である．すると $W^{\perp} = \mathrm{Ker}(i^*\colon V^* \to W^*)^{(定義\ 7.5)}$ とかけるので，$W^{\perp}$ は $V^*$ の部分ベクトル空間である． □

## 8.3　双対写像

双対空間から双対空間への写像を定義する．

**定義 8.5**　$V, W$ を $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間とし，$f\colon V \to W$ を線形写像とする．$W$ の双対空間の元 $g \in W^*$ を $V$の線形形式 $g \circ f\colon V \to \mathbb{K}$ にうつす写像 $f^*\colon W^* \to V^*$ を，$f$ の**双対写像**という [7, §4.3]．／

双対写像 $f^*$ は線形写像である [7, §4.3]．

**命題 8.3**　$U, V, W$ をベクトル空間，$c \in \mathbb{K}$ を体，線形写像 $f, g\colon U \to V$，$h\colon V \to W$ とする．双対写像について，以下が成り立つ [7, §4.3]．

(1) $V$ 上の恒等写像の双対は，$V^*$ 上の恒等写像である．すなわち $(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{V^*}$ が成り立つ．
(2) $(\bullet)^*$ は線形的である．すなわち $(f+g)^* = f^* + g^*$ であり，$(cf)^* = cf^*$ である．
(3) 合成写像の双対は，順序を逆にする．すなわち $(f \circ h)^* = h^* \circ f^*$ である．

**証明**　任意の $j \in V^*$ あるいは $k \in W^*$ をとって証明する．

(1) $(\mathrm{id}_V)^*(j) = j \circ \mathrm{id}_V = j$ である．

(2) $(f+g)^*(j) = j \circ (f+g) = j \circ f + j \circ g = f^*(j) + g^*(j)$ である．また，$(cf)^*(j) = j \circ (cf) = c \cdot (j \circ f) = cf^*$ である．

(3) $(f \circ g)^*(j) = j \circ (f \circ g) = (j \circ f) \circ g = f^* \circ g = h^*(f^*(j)) = (h^* \circ f^*)(j)$ である．

□

## 8.4 内積空間における線形汎関数

§§ 6.1 で扱った内積は，実は線形汎関数の一種である．

**命題 8.4** $\mathcal{V}$ を内積空間 (定義 6.1)，$\boldsymbol{u} \in V$ をあるベクトルとする．任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ に対して内積 $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ を与える写像

$$\langle \boldsymbol{u}, \bullet \rangle \colon V \ni \boldsymbol{v} \longmapsto \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \in \mathbb{R} \tag{8.4}$$

は線形汎関数である．

**証明** 内積の線形性より $\langle \boldsymbol{u}, \bullet \rangle$ が線形なのは明らかである． □

内積が線形汎関数であることはほぼ明らかである．真に驚くべきことは，すべての線形汎関数が内積の形でかけることである．

**定理 8.5（リースの表現定理 (Riesz representation theorem)）** $\mathcal{V}$ を内積空間とする．任意の線形汎関数 $F \colon V \to \mathbb{K}$ は，あるベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathcal{V}$ を用いて

$$F(\boldsymbol{v}) := \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \rangle \tag{8.5}$$

とかける．

# 第 3 章　解析学と関数解析

量子力学の根底をなす「ヒルベルト空間」は，chapter 2 で扱ったベクトル空間の一種である．しかし，ヒルベルト空間を構成する要素は単なる数ベクトルではなく関数，しかも無限次元である．それゆえ，有限次元では自明であるかのように思える定理のいくつかが破綻する．このような無限次元ベクトル空間を扱う数学の分野が関数解析である．

# §9　測度

実ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の適当な部分集合においては，“体積” が定義できる．この体積という概念を一般化したものが**測度**である．

この節の議論は伊藤『ルベーグ積分入門』による．同書において集合の和 $A+B$ とかかれているのは，直和 $A \sqcup B$ の意味である．測度について $m(A \overset{\text{直和}}{+} B) = m(A) + m(B)$ であることを考えれば合理的な表記ともいえるが，本稿ではベクトル空間の和空間 (定義 5.3) とまぎらわしいので用いない．

## 9.1　ユークリッド空間における体積

測度の定義をする前に，通常のユークリッド空間における「体積」とは何かについて考える．

$X = \mathbb{R}$ を実数の空間とする．$\mathbb{R}$ の部分集合であって，

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \qquad -\infty \leq a < b < \infty \tag{9.1}$$

とあらわされるものを**区間**という [4].

$X = \mathbb{R}^n$ を実ユークリッド空間とする．ユークリッド空間の “領域” を，直積

$$I := (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n], \qquad -\infty \leq a_i < b_i < \infty \tag{9.2}$$

で定める．$I$ は，$n$-次元の直方体（長方形）領域である．

さらに，有限個の区間 $I_i$（$i = 1, 2, \ldots, N$）の直和（非交和） (定義 1.5)

$$I_1 \sqcup I_2 \sqcup \cdots \sqcup I_N \tag{9.3}$$

を**区間塊**という．いくつかの直方体が組み合わさっている領域が区間塊である．直和であるから，直方体同士はくっついていても離れていてもよいが，重なってはいけない．

$N$-次元ユークリッド空間における区間全体の集合を $\mathfrak{I}_N$，区間塊全体の集合を $\mathfrak{F}_N$ とかく [4].

## 9.2　有限加法族

**定義 9.1**　空間 $X$ の部分集合の族 (定義 1.7)（つまり $X$ の部分集合からなる集合）$\mathfrak{F}$ が以下の 3 つを満たすとき，$\mathfrak{F}$ を**有限加法族**という．

(1)　$X, \emptyset \in \mathfrak{F}$ である．

(2) $A \in \mathfrak{F}$ なら $A^{\mathrm{C}} \in \mathfrak{F}$ （ただし補集合 $A^{\mathrm{C}} = X \setminus A$）.

(3) $A, B \in \mathfrak{F}$ ならば，$A \cup B \in \mathfrak{F}$，$A \cap B \in \mathfrak{F}$，$A \setminus B \in \mathfrak{F}$ が成り立つ．

／

実は，(1) は $X$ か空集合 $\emptyset$ どちらか片方だけで十分であるし，(3) の 3 条件はどれかひとつで十分である．

任意の空間 $X$ について，その部分集合全体の集合 (定義 1.6) $\mathfrak{F}_{\max} := \mathcal{P}(X)$ は最大の有限加法族である．また，$\mathfrak{F}_{\min} := \{X, \emptyset\}$ は最小の有限加法族である．

**例**　$n$-次元ユークリッド空間における区間塊全体の集合 $\mathfrak{F}_n$ は有限加法族である [4, §4].

**定義 9.2**　$X$ を空間，$\mathfrak{F}$ を有限加法族とする．$\mathfrak{F}$ の元（つまり $X$ の部分集合）$A$ を実数にうつす関数 $m$ が以下の条件を満たすとき，$m$ を**有限加法的測度**という．

(1) 任意の $A \in \mathfrak{F}$ に対し，$0 \leq m(A) \leq +\infty$ である．特に，$m(\emptyset) = 0$ である．

(2) （**有限加法性**）$A, B \in \mathfrak{F}$ かつ $A \cap B = \emptyset$（交わらない）なら，$m(A \sqcup B) = m(A) + m(B)$ である．

より一般に，$A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{F}$ が $A_i \cup A_j = \emptyset$（$i \neq j$），つまり互いに交わらないなら，

$$m\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

以下の性質は定義からただちに導かれるが，重要なので定義として加えておく．

(3) （**単調性**）$A \subset B$（$\in \mathfrak{F}$）なら $m(A) \leq m(B)$ である．

(4) $A \subset B$（$\in \mathfrak{F}$）なら $m(A \setminus B) = m(A) - m(B)$ である．

(5) （**有限劣加法性**）$A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{F}$ なら，

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

これらに加えて，さらに以下が成り立つとき（必ず成り立つとは限らない），$m$ は**完全加法的**であるという．

(6) 高々可算個 (定義 1.24) の集合 $A_1, A_2, \ldots$ が $A_i \cup A_j = \emptyset (i \neq j)$ を満たし，$A := \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}$ であるなら，

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

／

(2) より，2 つの領域 $A$，$B$ が全く重なっていなければ，2 つを合わせた領域 $A \cup B$ の体積は，$A$ の体積と $B$ の体積の和になるはずである．また，$A$ と $B$ が一部重なっている場合，$A \cup B$ の体積は単純な和よりもすこし小さくなるはずであるということを (5) は主張している．

(3) より，領域 $A$ が完全に $B$ に含まれているのなら，$A$ の体積が $B$ の体積を超えることはない．

**命題 9.1** $N$-次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ における区間塊 $E = I_1 + \cdots + I_n$ （$E \in \mathfrak{F}_N$, $I_i \in \mathfrak{I}$）に対し，

$$\begin{aligned} m^*(E) &:= \prod_{\nu} (b_\nu - a_\nu) \\ &= (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_N - a_N) \quad \text{ただし} \quad I_\nu = (a_\nu, b_\nu] \end{aligned} \tag{9.4}$$

は $\mathfrak{F}_N$ 上の有限加法的測度である（eq. (3.1) を参照）．さらに $m^*$ は完全加法的である．

## 9.3 外測度と可測集合

**定義 9.3** (外測度) $X$ を集合，$\Gamma$ を $X$ の部分集合から実数への関数とする．任意の部分集合 $A, B$ について，

(1)（非負性）$0 \leq \Gamma(A) \leq +\infty$ であり，さらに $\Gamma(\emptyset) = 0$ である．
(2)（単調性）$A \subset B$ なら $\Gamma(A) \leq \Gamma(B)$ である．
(3)（劣加法性）$\Gamma(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n)$

の 3 つが満たされるとき，$\Gamma$ を**カラテオドリの外測度** (**Carathéodory outer measure**)[6]，あるいは単に**外測度**（がいそくど） (**outer measure**) という [4][1)]． ／

§§ 9.2 で議論したように，ある空間 $X$ と有限加法族 $\mathfrak{F}$ が与えられたとき，集合 $A \in \mathfrak{F}$ に対して有限加法的測度 $m(A)$ が定義できたのであった．次の定理を用いると，$X$ の部分集合すべてに対して $m$ が定義できるように拡張することができる．

**定理 9.2** 空間 $X$ を考え，$\mathfrak{F}$ を有限加法族，$m$ を $\mathfrak{F}$ 上の有限加法的測度とする．$\mathfrak{F}$ に属する集合 $E$ の測度は $m(E)$ と定義できる．これを $X$ の任意の集合 $A$（$A \in \mathfrak{F}$ とは限らない）に対して拡張しよう．

1） Constantin Carathéodory (1873–1950)．ドイツの数学者．熱力学第二法則の定式化でも知られる．[9]

$A \subset X$ を集合とする．高々可算個の $\mathfrak{F}$ の集合の組 $\{E_n\}$ で $A$ を覆う[2)]．このような覆いかたは必ず存在し[3)]，またそれぞれの覆いかた $\{E_n\}$ について $\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$ を計算することができる．

このような $A$ の覆いかたすべてを考え，そのうえで

$$\Gamma(A) := \inf_{\{E_n\}} \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

と定めると，$\Gamma$ は外測度である．

**証明**　定義 9.3 の条件を確認すればよい．□

応用上重要なのは，次のルベーグ外測度である．

**定義 9.4**　命題 9.1 で定義した $m^*$ を定理 9.2 の方法によって拡張した $\mu^*$ を，**ルベーグ外測度** (**Lebesgue outer measure**) という．／

定義より，外測度 $\Gamma$ は空間 $X$ に含まれるすべての集合に対して定義できるが，すべての集合に対して $\Gamma$ が良い "体積" になるとは限らない．例えば $\mathfrak{F} := \{X, \emptyset\}$ として，$m(X) = 1$，$m(\emptyset) = 0$ となるように有限加法的測度 $m$ を定める[4)]．そうすれば外測度 $\Gamma$ は

$$\Gamma(A) = \begin{cases} 1 & \text{when } A \neq \emptyset \\ 0 & \text{when } A = \emptyset \end{cases}, \quad A \subset X$$

である．したがって，任意の $A, B \subset X$（$A, B \neq \emptyset$）に対して，$\Gamma(A) = \Gamma(B) = \Gamma(A \cup B) = 1$ であるが，これは直感的な体積の性質に反する．では，$\Gamma(E)$ が "良い" 体積になる，具体的には

(1) 任意の集合 $E \subset X$ に対し，$0 \leq \Gamma(E) \leq \infty$ であり，
(2) 高々可算個の集合 $E_1, E_2, \ldots$ に対し，$\Gamma(E_1 \sqcup E_2 \sqcup \cdots) = \Gamma(E_1) + \Gamma(E_2) + \cdots$ が成り立つ

ような集合 $E$ の条件とは何だろうか．

**定義 9.5**　$\Gamma$ を空間 $X$ で定義された外測度とする．集合 $E \subset X$ が **$\Gamma$-可測**，あるいは単に**可測**（かそく） (**measurable**) であるとは，任意の集合 $A \subset X$ に対し，

$$\Gamma(A) = \Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap E^{\complement}) \tag{9.5}$$

---

2)　つまり，$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ となるような集合の組 $\{E_n\}$（ただし $E_k \in \mathfrak{F}$）であり，$E_1, E_2, \ldots$ と数えると可算無限個（ないしは有限個）である．$E_k$ は可算集合でなくてもよい．

3)　たとえば 1 個の集合 $X$ で $A$ を覆うことができる．

4)　もちろんこの定義が well-defined であるのは $X \neq \emptyset$ のときのみである．

が成り立つことをいう．あるいは，任意の $B \subset E$，$C \subset E^{\mathrm{C}}$ に対し，

$$\Gamma(B \sqcup C) = \Gamma(B) + \Gamma(C) \tag{9.6}$$

が成り立つことをいう．／

eq. (3.5) と eq. (3.6) は，$B = A \cap E$，$C = A \cap E^{\mathrm{C}}$ と置きなおすことで移り変わる，同値な定義である．

次に，どのような集合が可測になるかを見る．まず定理を列挙し，証明はあとでまとめて行う．

**命題 9.3**　$\Gamma$-可測な集合 $E$ の補集合 $E^{\mathrm{C}}$ は $\Gamma$-可測である．

**命題 9.4**　$\Gamma(E) = 0$ なら $E$ は可測である．

**命題 9.5**　$\Gamma$-可測な集合系 $E_n$（$n = 1, 2, \ldots$）が互いに交わらない（つまり $i \neq j$ なら $E_i \cap E_j = \emptyset$ である）とき，$S = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$ は $\Gamma$-可測であり，さらに $\Gamma(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(E_n)$ である [4, 定理 5.3]．

**命題 9.6**　$E_i$（$i = 1, 2, \ldots$）が $\Gamma$-可測なら，$\bigcap_{i=1}^{n} E_i$，$\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ は可測である．

**系 9.7**　$E, F$ が $\Gamma$-可測なら，$E \setminus F$ は $\Gamma$-可測である．

**命題 9.3 の証明**　$\Gamma$-可測の定義（定義 9.5）より明らかである．　□

**命題 9.4 の証明**　任意の $A \subset X$ に対して，$\Gamma$ の単調性より $\Gamma(A \cap E) \leq \Gamma(E) = 0$ であることに注意すると，

$$\Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap E^{\mathrm{C}}) \leq \Gamma(A \cap E^{\mathrm{C}}) \leq \Gamma(A)$$

である．$\geq$ は $\Gamma$ の劣加法性から明らかであるので，$\Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap E^{\mathrm{C}}) = \Gamma(A)$．よって $E$ は可測である．　□

命題 9.5 の証明は技術的に面倒なので省略する．

命題 9.6 を示す前に，以下の補題を示す．

**補題 9.8**　集合 $E, F \subset X$ が $\Gamma$-可測なら，$E \cap F$ も $\Gamma$-可測である．

**補題 9.8 の証明**　$A \subset (E \cap F)$，$B \subset (E \cap F)^{\mathrm{C}} = E^{\mathrm{C}} \cup F^{\mathrm{C}}$ を任意にとる．$B = B_1 + B_2$，$B_1 = B \cap F$，$B_2 = B \cap F^{\mathrm{C}}$ と分割すると，$\Gamma$ の劣加法性より

$$\Gamma(A) + \Gamma(B) \leq \Gamma(A) + \Gamma(B_1) + \Gamma(B_2)$$

$E$ は可測で，$A \subset E$，$B_1 \subset E^{\mathrm{C}}$ であるから，

$$= \Gamma(A \sqcup B_1) + \Gamma(B_2)$$

$F$ は可測で，$A, B_1 \subset F$，$B_2 \subset F^{\mathrm{C}}$ だから，

$$= \Gamma(A \sqcup B_1 \sqcup B_2)$$
$$= \Gamma(A \sqcup B)$$

逆向きの不等号 $\geq$ は $\Gamma$ の劣加法性より明らかであるから，$\Gamma(A) + \Gamma(B) = \Gamma(A \sqcup B)$．　□

**命題 9.6 の証明**　$\bigcap$ については，補題 9.8 を繰り返し用いればよい．$\bigcup$ は，

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \left( \bigcap_{i=1}^{n} E_i^{\mathrm{C}} \right)^{\mathrm{C}}$$

および可測集合の補集合が可測である（命題 9.3）ことから従う．　□

**系 9.7 の証明**　$E \setminus F = E \cap F^{\mathrm{C}}$ と書けるので，命題 9.3 と補題 9.8 より示される．　□

## 9.4　測度

**定義 9.6**　$X$ を空間とする．集合族 $\mathfrak{B}$ が以下の条件を満たすとき，$\sigma$-**加法族**という[5]．

(1) $X, \emptyset \in \mathfrak{B}$ である．
(2) $A \in \mathfrak{B}$ なら $A^{\mathrm{C}} \in \mathfrak{B}$ である．
(3) $\mathfrak{B}$ に属する可算個の集合 $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{B}$ に対し，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{B}$．

より一般に，$\mathfrak{B}$ に属する集合の和・差・重なりを可算無限回とってできた集合は $\mathfrak{B}$ に属する．／

$\sigma$-加法族は有限加法族である．

**定義 9.7**　$\mathfrak{B}$ を $\sigma$-加法族とする．以下の条件を満たす $\mu$ を**測度**（そくど） (measure) という．

(1) 任意の $A \in \mathfrak{B}$ に対し，$0 \leq \mu(A) \leq \infty$ である．
(2) 高々可算個の集合[6] $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{B}$ が互いに交わらないとき（$i \neq j$ なら $A_i \cap A_j = \emptyset$），

$$\mu\left( \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \tag{9.7}$$

5）**完全加法族**という場合や，単に**加法族**ということもある．
6）$A_i$ が可算集合といっているのではない．

これらより，

(3)（**単調性**）$A, B \in \mathfrak{B}$ が $A \subset B$ であるなら $\mu(A) \leq \mu(B)$ である．

(4) $m(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$ である．

(5)（**劣加法性**）$A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{F}$（高々可算個）なら，

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

／

**命題 9.9**　空間 $X$ 上の外測度 $\Gamma$ に対して，

(1) $\Gamma$-可測である集合全体 $\mathfrak{M}_\Gamma$ は $\sigma$-加法族をなす．

(2) $\Gamma$ は $\mathfrak{M}_\Gamma$ 上の測度である．

**証明**　(1) まず，任意の $A \subset X$ に対して $\Gamma(A) = \Gamma(\emptyset) + \Gamma(A \cap X) = \Gamma(A \cap \emptyset) + \Gamma(A \cap \emptyset^{\mathrm{C}})$ であるから，$\emptyset$ は可測，つまり $\emptyset \in \mathfrak{M}_\Gamma$．次に，$E \subset X$ が可測なら $E^{\mathrm{C}}$ が可測であるのは eq. (3.5) より明らかである．最後に，$E_1, E_2, \ldots \subset X$ が可測であるとすると，$E := \bigcup_n E_n \in \mathfrak{M}_\Gamma$ というのは，命題 9.5 の主張そのもの[7)]．

(2) 外測度の公理および命題 9.5 よりいえる．

□

**定義 9.8**　ルベーグ外測度 $\mu^*$ の定義域を $\mathfrak{M}_{\mu^*}$ に制限したもの $\mu$ を，**ルベーグ測度 (Lebesgue measure)** という．／

ルベーグ測度がゼロである領域は考慮しなくてよい．

**定義 9.9**　$E \subset X$ で点 $\boldsymbol{x} \in E$ を実数（または複素数）にうつす関数 $f$ が**ほとんどいたるところ (almost everywhere)** ゼロであるとは，ルベーグ測度 0 の集合 $E_0$ を除いた各点でゼロになることをいう．すなわち

$$f(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \text{for } \boldsymbol{x} \in E \setminus E_0 \quad \text{where } \mu(E_0) = 0$$

このとき，

$$f(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{a.e. } \boldsymbol{x} \in E \qquad\qquad f(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \text{a.e.}$$

などと書く．／

7）より正確に言えば，$F_1 := E_1$，$F_2 := E_2 \setminus F_1$，$F_3 := E_3 \setminus (F_1 \sqcup F_2)$，……と $F_n$ を定義すると，$F_n$ は可測であり（なぜなら $A, B$ が可測なら $A \setminus B$），$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} F_n$ であるから，命題 9.5 より $E$ は可測

# §10　ルベーグ積分

## 10.1　可測関数

たとえば，以下のような関数だったらどうだろうか．

**定義 10.1**　$(X, \mathfrak{B}, \mu)$ を可測空間とする．$E \in \mathfrak{B}$ をとり，さらに $E = E_1 \sqcup \cdots \sqcup E_n$ と有限個の可測な直和 (定義 1.5) に分解できるとする．$E$ 上の点で定義された関数 $f$ が**単関数** (**simple function**) であるとは，

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(\boldsymbol{x}) \tag{10.1}$$

とかけることをいう．ここで，$\chi_A(\boldsymbol{x})$ は集合の指示関数，すなわち

$$\chi_A(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \boldsymbol{x} \in A \\ 0 & \boldsymbol{x} \notin A \end{cases}$$

である．／

$f$ は $E_1$ 上で $\alpha_1$，$E_2$ 上で $\alpha_2$ の値をとるという単純な関数である．

単関数 $f$ の積分は，以下のように考えることができる．話を分かりやすくするために，$E \subset \mathbb{R}^2$，$f(\boldsymbol{x}) \geq 0$ としよう．まず $E_1$ 上での体積は，底面積 $\mu(E_1) \times$ 高さ $\alpha_1$ である．$E_2$ における体積は，やはり底面積 $\mu(E_2) \times$ 高さ $\alpha_2$ である．結果，$E$ 全体での体積は，

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i) \tag{10.2}$$

とかけるはずである．

可測関数を定義するために，まず次の記法を導入する．$E$ 上で定義された関数 $f$ に対し，

$$E\{\!\!\{ f > a \}\!\!\} := \{\boldsymbol{x} \in E \mid f(\boldsymbol{x}) > a\} \tag{10.3}$$

と定義する．$E\{\!\!\{ f < a \}\!\!\}$，$E\{\!\!\{ f \leq a \}\!\!\}$ なども同様に定義する．

**定義 10.2**　$X$ を可測空間，$\mathfrak{B}$ を $\sigma$-加法族とする．$f$ が **$\mathfrak{B}$-可測**，あるいは単に**可測** (**measurable**) であるとは，任意の実数 $a$ に対して，

$$E\{\!\!\{ f > a \}\!\!\} \in \mathfrak{B} \tag{10.4a}$$

であることをいう．／

定義 10.2 と $\sigma$-加法族の性質から，まず

$$E\{\!\{f \le a\}\!\} = E \setminus E\{\!\{f > a\}\!\} \in \mathfrak{B} \tag{10.4b}$$

$$E\{\!\{f \ge a\}\!\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left\{\!\!\left\{f > a - \frac{1}{n}\right\}\!\!\right\} \in \mathfrak{B} \tag{10.4c}$$

がいえる．これらを用いると，

$$E\{\!\{f < a\}\!\} = E \setminus E\{\!\{f \ge a\}\!\} \in \mathfrak{B} \tag{10.4d}$$

$$E\{\!\{f = a\}\!\} = E\{\!\{f \le a\}\!\} \cap E\{\!\{f \ge a\}\!\} \in \mathfrak{B} \tag{10.4e}$$

がいえる．同様にして，

$$E\{\!\{f > -\infty\}\!\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\{\!\{f > -n\}\!\} \in \mathfrak{B} \tag{10.4f}$$

$$E\{\!\{f < +\infty\}\!\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\{\!\{f < +n\}\!\} \in \mathfrak{B} \tag{10.4g}$$

であり，ここから

$$E\{\!\{f = +\infty\}\!\} = E \setminus E\{\!\{f < +\infty\}\!\} \in \mathfrak{B} \tag{10.4h}$$

$$E\{\!\{f = -\infty\}\!\} = E \setminus E\{\!\{f > -\infty\}\!\} \in \mathfrak{B} \tag{10.4i}$$

もいえる．

なお，eqs. (3.11a)–(3.11d) のうち，どれを可測関数の定義としても，残りの 3 つはそこから導き出せる．

また，関数 $f$ が $\mathfrak{B}$-可測であることを示すとき，任意の実数 $a$ に対して $E\{\!\{f > a\}\!\}$ を示さなくても，任意の**有理数** $p$ に対して $E\{\!\{f > p\}\!\}$ であることを示せば十分である．実際，$a$ に収束する単調増加の有理数列 $(p_n)$ をとれば[8)]，

$$E\{\!\{f > a\}\!\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\{\!\{f > p_n\}\!\}$$

とかける．

eq. (3.8) のような単関数においては，$E_i = E\{\!\{f = \alpha_i\}\!\}$ とかける．eq. (3.11e) を使えば，すべての $i$ に対し $E_i \in \mathfrak{B}$ であるとき，またその時に限り，eq. (3.8) は可測である．

単関数の積分は，eq. (3.9) によって定義できそうである．一般の可測関数に対する積分も，単関数の形に帰着させることで定義することができる．そのための準備として，以下を示す．

8） 有理数は $\mathbb{R}$ において稠密 (定義 2.11) であるから，このような数列をとることができる．

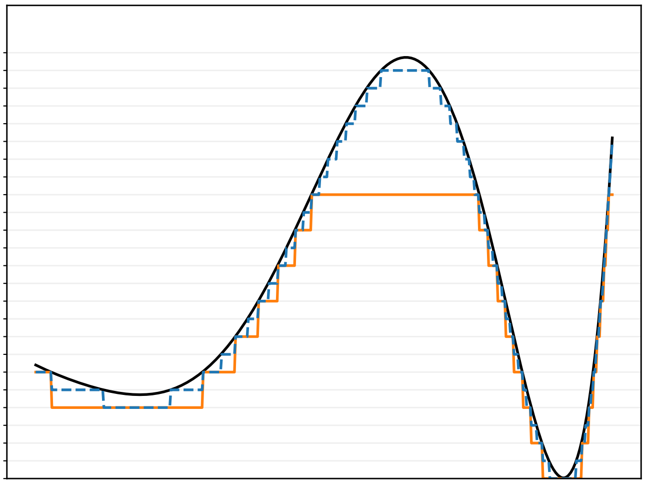


**図 3.1: 定理 10.1 における単調増加の単関数列の構成方法．赤色の実線が $f_2$ である．まず $0 \le f(x) \le 2$ の領域を $2^2 \times 2$ 等分する横線を引き，最も近い横線へと $f(x)$ を切り下げる．$f_3$（青色の破線）の場合，最初に $0 \le f(x) \le 3$ の領域を $2^3 \times 3$ 等分する．**

**定理 10.1** 測度空間を $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ とする．$E \subset X$ 上で $\mathfrak{B}$-可測な関数 $f$ が非負ならば，$E$ 上で $\mathfrak{B}$-可測であり $f$ に各点収束する単調増加の単関数列 $(f_n)$ が存在する [4, 定理 10.1].

**証明**

$$
f_n(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} \dfrac{k-1}{2^n} & \text{when } \dfrac{k-1}{2^n} \le f(\boldsymbol{x}) < \dfrac{k}{2^n}, \quad \text{where } k = 1, 2, 3, \ldots, 2^n n \\ n & \text{when } n \le f(\boldsymbol{x}) \end{cases}
$$

と定義すれば，これが求めるべき単関数列である（図 3.1）．構成よりこれが単調増加であることは明らかである．また，$f$ が可測であるから，$f_n$ も可測である[9]．最後に $f_n$ が $f$ に各点収束することを示す．まず $f(\boldsymbol{x}) = \infty$ となる点 $\boldsymbol{x}$ については，任意の自然数 $n$ に対して $f_n(\boldsymbol{x}) = n$ であるから，$\lim_{n\to\infty} f_n(\boldsymbol{x}) = \infty$．そうでなくて，$f(\boldsymbol{x}) < \infty$ であれば，十分大きな $n$ に対して $f(\boldsymbol{x}) < n$ となるので，そのような $n$ に対して $|f_n(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})| \le 1/2^n \to 0$ であることからいえる． □

## 10.2 ルベーグ積分の定義

**定義 10.3** $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ を可測空間，$E \in \mathfrak{B}$ を可測集合とする．

9) $f$ が可測だから，すべての $k$ に対し $E_k = E\{f = (k-1)/2^n\} \in \mathfrak{B}$（eq. (3.11e)）である．

(1) $E=\bigsqcup_{i=1}^{n} E_i$ で定義された単関数 $f=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}$ の積分を，

$$\int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) := \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(E_i) \tag{10.5}$$

で定義する．

(2) $E$ で定義された非負関数 $f$ の積分は，$f$ に収束するような単関数の単調増加列 $(f_n)$[10) の積分（eq. (3.12)）の極限

$$\int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) := \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \tag{10.6}$$

と定義する．

(3) $E$ で定義された実関数 $f$ の積分は，2 つの非負関数

$$f^+(\boldsymbol{x}) = \max\{f(\boldsymbol{x}),\ 0\},\quad f^-(\boldsymbol{x}) = \min\{-f(\boldsymbol{x}),\ 0\}$$

の eq. (3.14) による積分の差

$$\int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) := \int_E f^+(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) - \int_E f^-(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \tag{10.7}$$

が定義できるとき[11)，定積分をもつという．さらに eq. (3.14) の値が有限のとき，$f$ は $E$ 上で，測度 $\mu$ について**可積分**あるいは**積分可能**であるという．

(4) $E$ で定義された複素関数 $f$ の積分は，$f(\boldsymbol{x})$ の実部 $\mathrm{Re}\,f(\boldsymbol{x})$ と虚部 $\mathrm{Im}\,f(\boldsymbol{x})$ がともに $E$ 上で可積分であるとき

$$\int_E f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) := \int_E \mathrm{Re}\,f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) + \mathrm{i}\int_E \mathrm{Im}\,f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) \tag{10.8}$$

と定義する．

／

10） このような単関数列は，たとえば定理 10.1 によって構成できる．

11） $\int_E f^+(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) = \int_E f^-(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) = \infty$ のときを除き，eq. (3.14) は定義できる．

# §11　関数解析

この節では関数をベクトル空間の元（げん）として扱う．ベクトル空間の係数体 $\mathbb{K}$ は $\mathbb{R}$ もしくは $\mathbb{C}$ に限る．

## 11.1　関数空間

関数 $\psi(x_1, x_2, \dots)$ のようなものを考えよう．

**定義 11.1**　$\Omega \subset \mathbb{R}$ を $N$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ の開集合 (定義 2.6) とする．$\Omega$ における連続関数全体の集合を $C^0(\Omega)$ でかく．／

**命題 11.1**　$C^0(\Omega)$ は以下のように定義される和とスカラー倍に関して，ベクトル空間をなしている．

- $f, g \in C^0(\Omega)$，$c \in \mathbb{K}$ に対して，
  (1) 関数の和 $f \hat{+} g$ は，任意の $\boldsymbol{x} \in \Omega$ に対して $(f \hat{+} g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})$ である関数と定める．
  (2) 関数のスカラー倍 $c \hat{\star} f$ は，任意の $\boldsymbol{x} \in \Omega$ に対して $(c \hat{\star} g)(\boldsymbol{x}) = c \cdot f(\boldsymbol{x})$ である関数と定める．

**証明**　□

**定義 11.2**　ある関数 $u \in C(\Omega)$ に対し，$u(x) \neq 0$ であるような $x \in \Omega$ の集合の閉包 (定義 2.5)

$$\operatorname{supp} u := \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}} \tag{11.1}$$

を $u$ の**台**（だい） (**support**) という．／

関数 $u \in C(\Omega)$ の中で，$\operatorname{supp} u$ がコンパクト (定義 2.15) であるもの全体の集合を $C_0(\Omega)$ とかく．$C_0(\Omega)$ もベクトル空間になっている．

**定義 11.3**　複素関数 $f$ が $C^k$**-級関数** (**class $C^k$-function**) であるとは，$f(x)$ が $\mathbb{C}$ 上で $k$ 回微分可能かつ $k$ 次導関数が連続であることをいう．$f(x)$ が無限回微分可能であるとき $C^\infty$-級関数であるという．

$C^k$-級関数全体の集合を $C^k$ とかく．特に連続関数全体の集合は $C^0$ である．／

**例**　$e^x$, $\sin x$, $\cos x$ は $C^\infty$-級関数である．

**例**　$C^0 \subsetneq C^1 \subsetneq C^2 \subsetneq \cdots$ であり，$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k = C^\infty$ である．

## 11.2　関数空間のノルム

ここでは関数空間上にノルムが定義できる場合について考える．

関数空間においてもっとも一般的なノルムは “最大値ノルム” である．

しかし，量子力学において重要なのは，以下の 2 乗可積分関数空間である．

**定義 11.4**　$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ から $\mathbb{C}$ への **2 乗可積分関数空間** (square integrable function space)$L^2$ を

$$L^2(\Omega) := \left\{ f\colon \Omega \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_\Omega |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty \right\}$$

で定義する．ただし $\int_\Omega \mathrm{d}x$ はルベーグ積分である．／

**命題 11.2**　2 乗可積分関数空間 $L^2(\Omega)$ は，以下で定義されるノルムに対してノルム空間 (定義 6.4) になる．

$$\|f\|_{L^2} := \sqrt{\int_\Omega |f(\boldsymbol{x})|^2 \, \mathrm{d}x} \tag{11.2}$$

**証明**　定義 6.4 の条件を確かめればよい．(2) は，スカラー倍 $cf$ の定義（$(cf)(\boldsymbol{x}) = c \cdot f(\boldsymbol{x})$）より，$\int_\Omega |(cf)(\boldsymbol{x})|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = |c|^2 \int_\Omega |f(\boldsymbol{x})|^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$ だからいえる．三角不等式 (3) は，和 $f+g$ の定義（$(f+g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})$）より，

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |(f+g)(\boldsymbol{x})|^2 \, \mathrm{d}x &= \int_\Omega |f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})|^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega |f(\boldsymbol{x})|^2 + 2 \int_\Omega \mathrm{Re}(f^*(\boldsymbol{x}) g(\boldsymbol{x})) \, \mathrm{d}x + \int_\Omega |g(\boldsymbol{x})|^2 \, \mathrm{d}x \\
&\le \int_\Omega |f(\boldsymbol{x})|^2 \, \mathrm{d}x + 2 \sqrt{\int_\Omega |f(\boldsymbol{x})|^2 \, \mathrm{d}x \int_\Omega |g(\boldsymbol{x})|^2 \, \mathrm{d}x} + \int_\Omega |g(\boldsymbol{x})|^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \left( \sqrt{\int_\Omega |f(\boldsymbol{x})|^2 \, \mathrm{d}x} + \sqrt{\int_\Omega |g(\boldsymbol{x})|^2 \, \mathrm{d}x} \right)^2
\end{aligned}$$

だからいえる（途中コーシー・シュワルツの不等式より

$$\int |f^*(\boldsymbol{x}) g(\boldsymbol{x})| \, \mathrm{d}x \le \left| \int f^*(\boldsymbol{x}) g(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}x \right| \le \sqrt{\int_\Omega |f(\boldsymbol{x})|^2 \, \mathrm{d}x \int_\Omega |g(\boldsymbol{x})|^2 \, \mathrm{d}x}$$

を用いた）．(1) の $\|f\|_{L^2} \ge 0$ は定義より明らかである．しかし，$\|f\|_{L^2} = 0$ ならば $f = 0$ は，実はいえない．$f$ が $\Omega$ 上で恒等的にゼロでなくても，$\Omega$ のほとんどいたるところ (定義 9.9) ゼロであれば，$\int_\Omega f(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}x = 0$ となるからである．そこで，関数としての 0 を，

（ルベーグ測度ゼロの点を除いて）ほとんどいたるところゼロである関数と再定義する．これにより $\|\bullet\|_{L^2}$ はノルムの条件を満たす． $\square$

## 11.3　内積空間としての関数空間

関数空間に内積が定義できる場合．

**命題 11.3**　2 乗可積分関数空間 $L^2(\Omega)$ は，以下で定義される内積 $(\bullet, \bullet)$ に対して内積空間 (定義 6.1) になる．

$$\langle f, g\rangle_{L^2} := \int_\Omega f^*(x) g(x)\,\mathrm{d}x \tag{11.3}$$

この内積から導かれるノルムは eq. (3.17) である．

**証明**　eq. (3.18) が内積の公理を満たすのは明らかであるから，$\langle f, g\rangle_{L^2}$ が well-defined であることを示す．コーシー・シュワルツの不等式より

$$|\langle f, g\rangle|^2 \le \left|\int f^*(\boldsymbol{x}) g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x\right|^2 \le \int_\Omega |f(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}x \int_\Omega |g(\boldsymbol{x})|^2\,\mathrm{d}x \le \|f\|_{L^2}^2 \|g\|_{L^2}^2 < +\infty$$

$\square$

**同値類による $L^2$-空間**

「関数としての 0 を，（ルベーグ測度ゼロの点を除いて）ほとんどいたるところゼロである関数と再定義する」という行為は，同値類を用いて正当化される．

$L^2$ 上の同値関係 (定義 1.26) $\sim$ を

$$f \sim g \iff f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}) \quad (\text{a.e. } \boldsymbol{x} \in \Omega)$$

と定義する．$\sim$ が同値関係になるのは明らかである．商集合 (定義 1.28) $L^2/\sim$ 上の和とスカラー倍を，代表元を用いて

$$[f] + [g] := [f + g] \qquad\qquad c \cdot [f] := [c \cdot f] \tag{11.4}$$

と定める[12]と，$L^2/\sim$ はベクトル空間をなす．また，$L^2/\sim$ 上の内積を，代表元の内積

$$\langle [f], [g]\rangle_{L^2/\sim} := \int_\Omega f^*(\boldsymbol{x}) g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x \tag{11.5}$$

12）　$+$ と $\cdot$ は well-defined である（すなわち代表元のとりかたによらない）．なぜなら，$f \sim f'$（$\mu(\mathcal{F}) = 0$ である集合 $\mathcal{F}$ の点を除き一致），$g \sim g'$（$\mu(\mathcal{G}) = 0$ である集合 $\mathcal{G}$ の点を除き一致）に対し，$f + g \sim f' + g'$（ルベーグ測度 0 の集合 $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ を除き一致）だからである．

で定めれば[13]，$L^2/{\sim}$ は内積空間になる．

このように定義された内積空間 $L^2/{\sim}$ のことを，$L^2$ と書いているのである．

## 11.4　局所可積分

$u$ を $\Omega \subset_{\mathrm{open}} \mathbb{R}^n$ で定義された関数とする．$u$ が $\Omega$ で局所可積分であるとは，任意のコンパクト集合 (定義 2.15) $K \subset \Omega$ に対し

$$\int_K |u(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$$

であることをいう．連続関数 $C^0(\Omega)$ は局所可積分である．

13) $\langle \bullet, \bullet \rangle$ は well-defined である．なぜなら，ルベーグ測度 0 の集合 $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ の点における $f^*(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})$ の値は，積分 $\int_\Omega f^*(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}x$ に寄与しないからである．

# §12　ヒルベルト空間

## 12.1　ヒルベルト空間

ベクトル空間における完備性について考えてみよう．

$V$をノルム空間（定義 6.4）とする．$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$の距離（定義 2.1）は，$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ で定義できる（命題 2.1）．すると，$V$の収束列（定義 2.7）とコーシー列（定義 2.8）は，以下のように定義できる．

- $V$ の点列 $(\boldsymbol{v}_i)$ が収束列であるとは，$(\boldsymbol{v}_i)$ がある $\boldsymbol{v} \in V$ に収束する，つまり $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in V$となることをいう．
- $V$の点列 $(\boldsymbol{v}_i)$ がコーシー列であるとは，$\lim_{m,n\to\infty}\|\boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{v}_n\| = 0$ であることをいう．

これらを用いて，ノルム空間の完備性を定義することができる．

**定義 12.1**　ノルム空間 $V$ が完備であるとは，$V$ のコーシー列が収束列であることをいう．／

**定義 12.2**　（バナッハ空間）　完備なノルム空間を**バナッハ空間** (Banach space) という．／

内積空間（定義 6.1）では，内積から導かれるノルムが存在するのであった．このノルムを用いれば，完備な内積空間というものを定義することができる．

**定義 12.3**　（ヒルベルト空間）　完備な内積空間を**ヒルベルト空間** (Hilbert space) という．／

**命題 12.1**　実ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ および複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$ はヒルベルト空間である．

## 12.2　射影定理

距離（定義 2.1）$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\rangle}$ である．

**補題 12.2**　ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ とその閉部分ベクトル空間 $\mathcal{D}$ について，ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathcal{H}$ と

$\mathcal{D}$ の距離を

$$\mathscr{d}(\boldsymbol{v}, \mathcal{D}) \coloneqq \inf_{\boldsymbol{w} \in \mathcal{D}} d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \inf_{\boldsymbol{w} \in \mathcal{D}} \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}\|$$

で定める．このとき，$\mathscr{d}(\boldsymbol{v}, \mathcal{D}) = d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ となるような $\boldsymbol{w} \in \mathcal{D}$ がただひとつ存在する．

**証明**　$\mathscr{d}(\boldsymbol{v}, \mathcal{D})$ の定義より，$d(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_n) \xrightarrow{n \to \infty} \mathscr{d}(\boldsymbol{v}, \mathcal{D})$ となるような $\mathcal{D}$ の点列 $(\boldsymbol{w}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ がとれる．すると，

$$\begin{aligned}
d^2(\boldsymbol{w}_m, \boldsymbol{w}_n) &= \|(\boldsymbol{w}_m + \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_n)\|^2 \\
&= 2\big(\|\boldsymbol{w}_m + \boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}_n\|^2\big) - \|(\boldsymbol{w}_m - \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_n)\|^2 \qquad (\text{中線定理}^{(\text{定理 } 6.5)}) \\
&= 2\big(\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_m\|^2 + \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_n\|^2\big) - 4\left\|\frac{\boldsymbol{w}_m + \boldsymbol{w}_n}{2} - \boldsymbol{v}\right\|^2 \\
&\leq 2\big(\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_m\|^2 + \|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}_n\|^2\big) - 4\mathscr{d}(\boldsymbol{v}, \mathcal{D}) \\
&\xrightarrow{m,n \to \infty} 2\big(\mathscr{d}(\boldsymbol{v}, \mathcal{D}) + \mathscr{d}(\boldsymbol{v}, \mathcal{D})\big) - 4\mathscr{d}(\boldsymbol{v}, \mathcal{D}) = 0
\end{aligned}$$

最後の不等号では，$(\boldsymbol{w}_m + \boldsymbol{w}_n)/2 \in \mathcal{D}$ であること，および $\mathscr{d}(\boldsymbol{v}, \mathcal{D})$ の最小性を使った．

これにより，$(\boldsymbol{w}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ はコーシー列 (定義 2.8) であり，ヒルベルト空間の完備性からこれはある $\boldsymbol{w} \in \mathcal{D}$ に収束する．

一意性を示す．$\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in W$ がともに $\mathscr{d}(\boldsymbol{v}, \mathcal{D}) = d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}^{(\prime)})$ を満たすとして，$d^2(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}')$ を上の方法で計算すると，これは 0 になるので，$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}'$ である．□

**定理 12.3（射影定理）**　ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に対し，閉部分ベクトル空間 $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ とその直交補空間 (定義 6.3) $\mathcal{D}^\perp$ をとる．このとき，任意のベクトル $\boldsymbol{z}$ に対し，$\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$ と $\boldsymbol{y} \in \mathcal{D}^\perp$ がそれぞれただひとつ存在し，$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ とかける．すなわち $\mathcal{H} = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^\perp$ と直和分解 (定義 5.4) できる．

**証明**　$\boldsymbol{z} \in \mathcal{H}$ とする．補題 12.2 の方法で $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$ をとる．このとき $\boldsymbol{y} \coloneqq \boldsymbol{z} - \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}^\perp$ を示せばよい．任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ および $\boldsymbol{a} \in \mathcal{D}$ に対し，

$$\begin{aligned}
0 \leq \|\boldsymbol{y}\|^2 &= \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}\|^2 \\
&\leq \|\boldsymbol{z} - (\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{a})\|^2 \quad (\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{a} \in \mathcal{D},\ \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}\| \text{ の最小性}) \\
&= \|\boldsymbol{y} + \lambda\boldsymbol{a}\|^2 \\
&= \|\boldsymbol{y}\|^2 + 2\lambda \operatorname{Re}\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a} \rangle + \lambda^2 \|\boldsymbol{a}\|^2
\end{aligned}$$

したがって，$2\lambda \operatorname{Re}\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a} \rangle + \lambda^2\|\boldsymbol{a}\|^2 \geq 0$ であるが，$\lambda \in \mathbb{R}$ は任意なので，$\operatorname{Re}\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a} \rangle = 0$．また，$\lambda \to i\lambda$ として同様に考えると，$\operatorname{Im}\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a} \rangle = 0$．よって $\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a} \rangle = 0$ である．$\boldsymbol{a} \in \mathcal{D}$ は任意だったので，$\boldsymbol{y} \in \mathcal{D}$ が示された．□

## 12.3　ヒルベルト空間の基底

一般のベクトル空間には定理 5.6 より基底が存在する．また，有限次元の内積空間では，定理 6.8 によって正規直交基底を構成できる．

それでは，無限次元の内積空間に正規直交基底が存在するのか？

それを考えるためには，まずベクトルの無限級数というものを考えないといけない．

**定義 12.4**　ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に属する可算無限個のベクトルの列 $(\boldsymbol{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とスカラー列 $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ をとる．

$$\lim_{N\to\infty}\left\|\boldsymbol{v}-\sum_{n=1}^{N}c_n\boldsymbol{u}_n\right\|=0$$

となるような $\boldsymbol{v}\in\mathcal{H}$ が存在するとき，級数 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n\boldsymbol{u}_n$ は $\boldsymbol{v}$ に収束するといい，

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\boldsymbol{u}_n=\boldsymbol{v}$$

とかく [8, §1.5]．／

**定義 12.5**　$\mathcal{H}$ をヒルベルト空間とする．$\mathcal{H}$ に属する可算無限個 (定義 1.23) のベクトルの組 $(\boldsymbol{u}_n)_{n=1}^{\infty}$ が，任意のベクトル $\boldsymbol{v}\in\mathcal{H}$ を

$$\boldsymbol{v}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\boldsymbol{u}_n,\quad c_n:=\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}_n\rangle \tag{12.1}$$

とあらわせるとき，$(\boldsymbol{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を**完全正規直交系** (complete orthonormal system) という．／

$(\boldsymbol{u}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ がベクトル空間 $V$ の基底 (定義 5.8) であるとは，任意の $\boldsymbol{v}\in V$ が**有限個を除きゼロである**スカラーの組 $(c_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ($c_\lambda\in\mathbb{K}$) を用いて

$$\boldsymbol{v}=\sum_{\lambda\in\Lambda}c_\lambda\boldsymbol{u}_\lambda$$

と有限和でかけることだった．しかし，完全正規直交系の場合は無限和（高々可算個のベクトルの線形結合）も許される．

なお，$\mathcal{H}$ が有限次元であるときは，正規直交基底を指して完全正規直交系という．

**定理 12.4**　ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ が可分 (定義 2.12) であれば，$\mathcal{H}$ は正規直交基底をもつ．

# §13　演算子

## 13.1　演算子とは

§§ 1.3 で扱ったように，集合 $X$ の元を集合 $Y$ の元にうつす規則のことを写像というのであった．$f\colon X \to Y$ が写像であるとき，任意の $x \in X$ に対して $f(x) \in Y$ が存在しなければならない．この条件を少し弱めてみよう．

**定義 13.1** (演算子) $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ を $\mathbb{C}$ 上のヒルベルト空間とする．部分ベクトル空間 $\mathcal{A}$ から $\mathcal{H}'$ への写像 (定義 1.8)

$$\hat{A}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{K}$$

のことを，$\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への**演算子**（えんざんし） (operator) または**作用素**（さようそ）という．／

**定義 13.2** (演算子の定義域) $\mathcal{A}$ のことを $\hat{A}$ の**定義域**（ていぎいき） (domain) といい，$\mathrm{Dom}(\hat{A})$，$D(\hat{A})$ などとかく．／

$\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への写像 $f$ の定義域は $\mathcal{H}$ 全体である．それに対して，$\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への演算子 $\hat{A}$ は，任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して $\hat{A}(x)$ が定義されている必要はなく，部分ベクトル空間 $\mathrm{Dom}(\hat{A})$ の元に対して定義されていれば十分である．

**定義 13.3** (演算子の一致) $\hat{A}, \hat{B}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ を演算子とする．$\mathrm{Dom}(\hat{A}) = \mathrm{Dom}(\hat{B})$ かつ任意の $x \in \mathrm{Dom}(A)$ に対し $\hat{A}(x) = \hat{B}(x)$ であるとき，演算子 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ は一致するという．／

2 つの写像 $f, g$ において，定義域（もしくは終域）が一致しない場合，異なる写像とみなすのであった．同様に，2 つの演算子 $\hat{A}, \hat{B}$ の定義域 $\mathrm{Dom}(\hat{A}), \mathrm{Dom}(\hat{B})$ が一致しない場合，違う演算子とみなす．

集合 $X$ から $X$ 自身への写像においては，すべての元を自身へとうつす恒等写像 (定義 1.12) が存在した．それと同様に，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}$ をそれ自身にうつす演算子 $\hat{1}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ を**恒等演算子** (identity operator) という：$\hat{1}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.

逆写像 (定義 1.18) に対応する概念も定義できる．$\hat{A}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ を $\mathrm{Dom}(\hat{A})$ で定義された演算子とする．任意の $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Dom}(\hat{A})$ に対し，$\hat{A}^{-1}(\hat{A}(\boldsymbol{x})) = \hat{A}(\hat{A}^{-1}(\boldsymbol{x}))$ をみたす演算子 $\hat{A}^{-1}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ が存在するとき，これを $\hat{A}$ の**逆演算子** (inverse operator) という．

写像 $f\colon X \to Y$ の定義域を $A \subset X$ に制限 (定義 1.19) した写像 $f|_A\colon A \to Y$ を考えることができた．同様に，演算子 $\hat{A}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ の定義域を $\mathrm{Dom}(\hat{B}) \subset \mathrm{Dom}(\hat{A})$ に制限した演算子 $\hat{B}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ を考えることができる．写像のときと同様に，$\hat{B}$ を $\hat{A}$ の**制限** (restriction) という．

## 13.2　線形演算子

ベクトル空間上の写像として，線形写像というものを考えることができた．同じように，線形な演算子を考える．

**定義 13.4** (線形演算子) $\mathbb{C}$ 上のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}'$ への演算子 $\hat{A}$ は，次の性質を満たすとき，**線形演算子** (linear operator) という．

- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{H}$，任意の $a, b \in \mathbb{C}$ に対し，
  (1)（線形性）$\hat{A}(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}) = a\hat{A}(\boldsymbol{x}) + b\hat{A}(\boldsymbol{y})$ である．

量子力学において，演算子が線形であることは本質的である．

**例**　関数 $f$ に導関数 $f'$ を対応させる $C[a,b]$ 上の演算子 $\hat{T}$ を考える．$\hat{T}$ を $C[a,b]$ 全域で定義することはできないので，定義域 $\mathrm{Dom}(T) = C^1[a,b]$ に限ると，

$$\hat{T}(f) = f', \qquad \mathrm{Dom}(T) = C^1[a,b]$$

とでき，$\hat{T}$ は演算子になっている．また，定義域をさらに小さくして

$$\hat{T}(f) = f', \qquad \mathrm{Dom}(\hat{T}_0) = \{f \in C^1[a,b] \mid f(a) = f(b) = 0\}$$

ととってもよい [11, §2.1]．なお，$\hat{T}$ と $\hat{T}_0$ は別の演算子である．

線形写像における零写像と同じように，**零演算子** (zero operator) を定義できる．すなわち，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathcal{H}$ をゼロベクトル $\boldsymbol{0} \in \mathcal{K}$ にうつす演算子 $\hat{0}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ を零演算子という：$\hat{0}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$.

**定義 13.5**　$\hat{A}, \hat{B}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ を $\mathrm{Dom}(\hat{A})$ で定義された演算子，$c \in \mathbb{K}$ をスカラーとする．演算子の和・スカラー倍を，以下のように定義する．

(1) 演算子の和 $\hat{A} + \hat{B}$ を，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Dom}(\hat{A})$ に対し，$(\hat{A} + \hat{B})(\boldsymbol{x}) = \hat{A}(\boldsymbol{x}) + \hat{B}(\boldsymbol{x})$ であるような演算子と定める．
(2) 演算子のスカラー倍 $c\hat{A}$ を，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Dom}(\hat{A})$ に対し，$(c\hat{A})(\boldsymbol{x}) = c \cdot \hat{A}(\boldsymbol{x})$ であるような演算子と定める．

また，$\hat{E}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$，$\hat{F}\colon \mathcal{H}' \to \mathcal{H}''$ を演算子とすると，演算子の積は次のように定義する．

(3) 演算子の積 $\hat{E}\hat{F}$ を，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Dom}(\hat{E})$ に対し，$\hat{E}\hat{F}(\boldsymbol{x}) = \hat{E}(\hat{F}(\boldsymbol{x}))$ であるような演算子と定める．

この定義より，$\mathrm{Dom}(\hat{F}) \supset \mathrm{Ran}(\hat{F})$ でなければ演算子の積 $\hat{E}\hat{F}$ が定義できないことがわかる．／

## 13.3　エルミート演算子

## 13.4　ユニタリ演算子

**定義 13.6**　ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への演算子 $\hat{U}$ が以下を満たすとき，**ユニタリ演算子 (unitary operator)** という．

(1) $\hat{U}$ の定義域は $\mathcal{H}$ 全体である．すなわち $\mathrm{Dom}(\hat{U}) = \mathcal{H}$.
(2) $\hat{U}$ は全射である．すなわち $\mathrm{Ran}(\hat{U}) = \mathcal{K}$.
(3) $\hat{U}$ は内積を保つ．すなわち，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{H}$ に対し，

$$(\hat{U}\boldsymbol{x}, \hat{U}\boldsymbol{y})_{\mathcal{K}} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_{\mathcal{H}}$$

特に，ユニタリ演算子は**等長 (isometric)** である：

$$\|\hat{U}\boldsymbol{x}\|_{\mathcal{K}} = \|\boldsymbol{x}\|_{\mathcal{H}}$$

／

**定義 13.7** (ヒルベルト空間の同型)　ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ へのユニタリ演算子が存在するとき，$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ は**同型 (isomorphic)** であるという．／

2 つのベクトル空間のあいだに，線形構造を変えない全単射が存在するとき，これらは同型 (定義 7.3) であるといった．ヒルベルト空間においては，これに加えて内積（ノルム）構造を変えないことも要求する．

# 第 4 章　量子力学へ

# §14　ブラ・ケット記法

ブラ $\langle\psi|$，ケット $|\psi\rangle$，内積 $\langle\psi\,|\,\varphi\rangle$，期待値 $\langle\psi\,|\,\hat{A}\,|\,\psi\rangle$

# 参考文献

## 集合論

---


[5]内田伏一『集合と位相: SET THEORY & GENERAL TOPOLOGY』(増補新装版)〈数学シリーズ〉裳華房 (2020).


## 線形代数

---


[3]三宅敏恒『線形代数学: 初歩からジョルダン標準形へ』培風館 (2008).

[7]斎藤毅『線形代数の世界: 抽象数学の入り口』〈大学数学の入門・7〉東京大学出版会 (2007).


## 関数解析

---


[10]藤田宏, 黒田成俊, 伊藤清三『関数解析』〈岩波基礎数学選書〉岩波書店 (1991).

[11]黒田成俊『量子物理の数理』岩波書店 (2007).


## その他

---


[1]The Unicode Consortium『Arrows: Range: 2190–21FF』version 16.02024URL: https://www.unicode.org/charts/PDF/U2190.pdf.

[2]The Unicode Consortium『Supplemental Arrows-B: Range: 2900–297F』version 16.02024URL: https://www.unicode.org/charts/PDF/U2900.pdf.

[3]三宅敏恒『線形代数学: 初歩からジョルダン標準形へ』培風館 (2008).

[4]伊藤清三『ルベーグ積分入門』〈数学選書・4〉裳華房 (1963).

[6]小田稔, 上村洸, 野田春彦, 山口嘉夫(編)『理化学英和辞典』JapanKnowledge より研究社 (1998).

[7]斎藤毅『線形代数の世界: 抽象数学の入り口』〈大学数学の入門・7〉東京大学出版会 (2007).

[8]新井朝雄『ヒルベルト空間と量子力学』〈共立講座 21 世紀の数学・16〉共立出版株式会社 (1997).

[9]『日本大百科全書』JapanKnowledge より小学館 (1994).

# 索引

## わ