ルベーグ積分

目次

- 伊藤清三「ルベーグ積分」裳華房（1963）

ユークリッド空間$\mathbb{R}^N$にある立体の体積

ふつうの空間（ユークリッド空間）$\mathbb{R}^N$にある立体を考えてみる．

まず立体が

$$A := \{(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_N, b_N] \mid -\infty \leq a_\nu < b_\nu < +\infty\} \tag{1}$$

という直方体である場合を考える （ただし$(a_\nu, b_\nu]$は半開区間）． この立体の体積$m(A)$は，

$$\begin{aligned} m(A) &:= (b_1 - a_1) \cdot \cdots \cdot (b_N - a_N) \\ &= \prod_{\nu=1}^{N} (b_\nu - a_\nu) \end{aligned} \tag{2}$$

で与えられるはずである．

次に立体が，n個の直方体$A_1, ..., A_n$を組み合わせた形

$$B := A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n \tag{3}$$

をしていたとしよう． $\sqcup$は非交和． つまり直方体同士は離れていてもくっついていてもよいが，重なってはいけない． Bの体積は，$A_1, ..., A_n$の体積（式 2）の和

$$m(B) := \sum_{i=1}^{n} m(A_i) \tag{4}$$

で与えられるはずである．

有限加法的測度

N-次元ユークリッド空間内の立体$A, B \subset \mathbb{R}^N$について, “体積”$m$が満たすべき性質は，以下のとおりである.

1. **非負性**　すべての$A \subset \mathbb{R}^N$について,

$$0 \leq m(A) \leq \infty \tag{5}$$

　また，$m(\emptyset) = 0$.

2. **有限加法性**　$A_1, ..., A_n \subset \mathbb{R}^N$で，$A_i \cap A_j = \emptyset$（$i \neq j$）なら,

$$m\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i) \tag{6}$$

たったこれだけの条件を仮定すれば,

3. **単調性**　$A \subset B$なら，$m(A) \leq m(B)$
4. $A \subset B$なら，$m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$
5. **有限劣加法性**　$A_1, ..., A_n \subset \mathbb{R}^N$なら,

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} m(A_i) \tag{7}$$

という重要な性質が出てくる.

これらの条件を満たすmのことを，**有限加法的測度**（**finitely additive measure**）という[1].

[1]写像$m : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. ここで$\mathfrak{P}(\mathbb{R}^N)$はベキ集合であり, $\mathfrak{P}$はPのフラクトゥール.

有限加法的測度の公理を物理的（？）に解釈すると，

1. $0 \leq m(A) \leq \infty$，$m(\emptyset) = 0$
   体積が負の値になってはいけないという当然のこと． また，何もない部分$\emptyset$の体積はゼロのはず.
2. $m\left(\bigsqcup_i A_i\right) = \sum_i m(A_i)$
   いくつかの立体を重ならないように組み合わせた立体の体積は，それぞれの立体の体積$m(A_n)$の和になる．
3. $A \subset B \Longrightarrow m(A) \leq m(B)$
   立体Aが別の立体Bに含まれるなら，Aの体積はB以下である．
4. $A \subset B \Longrightarrow m(B \setminus A) = m(B) - m(A)$
   立体Bの一部Aを取り除いた立体$B \setminus A$の体積は，Bの体積マイナスAの体積.
5. $m\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i m(A_i)$
   $A_1, \ldots, A_n$の一部が重なっていれば，これらを合わせた立体の体積は，単純な和よりも重複分だけ小さくなる．

完全加法性

今までは有限個の立体を組み合わせた場合を考えていた． （互いに交わらない）加算無限個の立体$A_1, A_2, \ldots$を組み合わせた立体$A := \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$についても，

$$m(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) \tag{8}$$

が成り立つとき，mを**完全加法的**な測度という．

ルベーグ外測度

直方体や, それを組み合わせた立体については, 式 2 や式 4 によって体積$m(A)$が定義できる． それ以外の立体については，どうやって体積を定義すればよいだろうか？

手順は以下のとおり．まず立体Aを加算無限個の直方体$\{E_n\}$でおおってやる. つまり, $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$となるように$E_n$を適当に決める[2]. それぞれの直方体の体積$m(E_n)$は式 2 であるから,

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \tag{9}$$

が定義できる． このような$\{E_n\}$の取り方をいろいろと考えて，その中で式 9 が最も小さくなる[3]ようなとき，それをAの体積とする．つまり,

$$\Gamma(A) := \inf\left(\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)\right) \tag{10}$$

をAの体積と定める．これを**ルベーグ外測度** (Lebesgue outer measure)という.

[2]例えば，$A \subset \mathbb{R}^N$.

[3]厳密には下限inf.

ルベーグ外測度Γの性質

ルベーグ外測度Γ（式 10）は，次のような性質を満たす.

1.
$$0 \le \Gamma(A) \le \infty \quad \& \quad \Gamma(\emptyset) = 0 \tag{11}$$

2.
$$A \subset B \text{ ならば } \Gamma(A) \le \Gamma(B) \tag{12}$$

3.
$$\Gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n) \tag{13}$$

証明（特に重要ではない）

1. $\Gamma(A) := \inf\left(\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)\right)$および$0 \le m(E_n) \le \infty$であることから明らかである.
2. $A \subset B$とする．Bをおおう直方体の組$\{E_n\}$は，Aをもおおう．なぜなら，$A \subset B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$であるから. Γの定義がinfであることに注意すると，$\Gamma(A) \le \Gamma(B)$である.
3. $\varepsilon > 0$を任意にとる． すると，各A_nに対して

$$A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^k \quad \text{かつ} \quad \sum_{k=1}^{\infty} m\left(E_n^k\right) \le \Gamma(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{14}$$

であるようなE_n^kがとれる（infなので）．$\left\{E_n^k\right\}_{n,k}$は$A$のおおい方のひとつなので，

$$\Gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} m\left(E_n^k\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\Gamma(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right\} \le \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(A_n) + \varepsilon$$

ここで$\varepsilon > 0$は任意だから，示された.

ルベーグ測度

式 10 により，すべての部分集合$A \subset \mathbb{R}^N$に対してルベーグ外測度$\Gamma(A)$が定義できる．しかし，$\Gamma(A)$が必ずしも“**体積らしい**”とは限らない． そこで，$\Gamma(E)$が“**体積らしく**”なる立体$E \subset \mathbb{R}^N$の条件を考える．

天下り的に定義する．

$E \subset \mathbb{R}^N$が**可測**であるとは，

任意の部分集合$A \subset \mathbb{R}^N$に対して

$$\Gamma(A) = \Gamma(A \cap E) + \Gamma(A \cap E^{\mathrm{c}}) \tag{15}$$

が成り立つことをいう．

この条件を満たすような立体（部分集合）全体の集合を$\mathfrak{M}_\Gamma$とかくことにする[4]．

ルベーグ外測度Γ（式 10）の定義域を，$\mathfrak{M}_\Gamma$に属する集合に制限したものをμと書き，これを**ルベーグ測度**という[5]．

つまり，

$$\mu(E) := \Gamma(E) \quad \text{where } E \in \mathfrak{M}_\Gamma \tag{16}$$

[4]$\mathfrak{M}$はMのフラクトゥール．

[5]写像$\mu : \mathfrak{M} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$．これが写像$\Gamma : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$の，$\mathfrak{M}_\Gamma \subset \mathfrak{P}(\mathbb{R}^N)$における制限になっている．

ルベーグ可測な集合

たとえば空集合$\emptyset$は，任意の$A \subset \mathbb{R}^N$に対して

$$\Gamma(A \cap \emptyset) + \Gamma(A \cap \emptyset^{\mathrm{c}}) = \Gamma(\emptyset) + \Gamma(A) = \Gamma(A) \tag{17}$$

であるから可測，$\emptyset \in \mathfrak{M}_\Gamma$.

同様に，$\mathbb{R}^N$も可測.

直方体（式 1）や，それを組み合わせた立体（式 3）も可測である.

ルベーグ測度μの性質

ルベーグ測度μはルベーグ外測度Γを制限しただけのものだから，当然Γ（式 10）と同じ性質を持つ.

1. **非負性**

$$0 \leq \mu(E) \leq \infty \quad \& \quad \mu(\emptyset) = 0 \tag{18}$$

2. **単調性**

$$A \subset B \text{ ならば } \mu(A) \leq \mu(B) \tag{19}$$

3. **劣加法性**

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \tag{20}$$

ルベーグ測度の例

1点のルベーグ測度はゼロである．つまり, 点$\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$に対して，$\mu(\{\boldsymbol{x}\}) = 0$.

証明　任意の$\varepsilon > 0$に対して，1個の集合$E := (x_1 - \varepsilon, x_1] \times \cdots \times (x_N - \varepsilon, x_N]$によって，$\{\boldsymbol{x}\} \subset E$と覆うことができる． ゆえに

$$\Gamma(\{\boldsymbol{x}\}) \leq m(E) = \varepsilon^N \tag{21}$$

であるが，$\varepsilon \to 0$とすると，$\Gamma(\{\boldsymbol{x}\}) \to 0$である．よって$\mu(\{\boldsymbol{x}\}) = 0$がいえる． ■

信じられないことに，$\mathbb{R}^1$では，有理数全体$\mathbb{Q}$の測度はゼロである．

証明　有理数全体の集合$\mathbb{Q}$は可算[6]であるから，有理数を$x_1, x_2, ...$と並べることができる． すると，$\mathbb{Q} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$であり，$\Gamma$の劣加法性から

$$\Gamma(\mathbb{Q}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma(\{x_n\}) \tag{22}$$

一方，先ほど見たように，1点のルベーグ外測度はゼロなので，$\Gamma(\{x_n\}) = 0$. よって$\Gamma(\mathbb{Q}) = 0$. よって，$\mu(\mathbb{Q}) = 0$.

[6]可算の定義については，集合論のテキストを参照.