

目次

1	集合論・代数学の基礎	3
1.1	集合	3
1.2	集合の演算	4
1.3	写像	5
1.4	群・環・体	8
1.5	同値関係・同値類	10
1.5.1	同値関係	10
1.5.2	同値類	10
1.6	便利な記号	12
2	ベクトル空間	13
序	3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 の性質	13
2.1	ベクトル空間の定義	14
2.2	部分ベクトル空間	15
2.3	ベクトルの一次独立・一次従属	16
2.4	ベクトル空間の基底と次元	17
2.4.1	任意のベクトル空間に基底が存在する	18
3	内積空間とノルム空間	19
3.1	内積空間	19
3.2	ノルム空間	20
3.2.1	ノルムの一般論	20
3.3	内積とノルムの関係	21
3.4	内積空間の基底	23
4	ヒルベルト空間	24
4.1	距離空間	24
4.2	収束列とコーシー列	24
4.3	距離空間の完備性	26
4.4	ヒルベルト空間	27
5	関数空間	28
5.1	ベクトル空間としての関数空間	28
5.2	内積空間としての関数空間	28
6	線形写像	29

6.1	線形写像	29
6.2	像と核	30
7	双対空間	32
7.1	双対空間	32
7.2	零化空間	33
7.3	内積空間における線形汎関数	33
8	演算子	34
8.1	演算子とは	34
8.2	線形演算子	34
8.3	エルミート演算子	35

§1 集合論・代数学の基礎

1.1 集合

「集合」をきちんと定義するのは難しいが、ここでは以下のように考える。

ある特定の性質をもつモノの集まりを**集合** (set) という。集合とは単なるモノの集まりではなく、何が集まっているかを定められる集まりである [1]。

例 「正の実数の全体」「ひらがなの全体」「名大付属図書館の蔵書全体」には、それぞれ何が入っていて、何が入っていないのかを定められるので集合である¹⁾。一方で、「絶対値の小さな複素数の全体」「難しい漢字の全体」「偉大な物理学者の全体」には、何が入っていて何が入らないのかを客観的に定められないので、集合とは言わない²⁾。

X をある集合とする。 X を構成するモノのことを、 X の **元** (element) あるいは **要素** という。 a が X の元であるとき、「 a は X に属する」あるいは「 a は X に含まれる」といい、 $a \in X$ とかく。 a が X の元でなければ、 $a \notin X$ とかく。 X と a の位置を入れ替えて $X \ni a$ あるいは $a \ni X$ とかいてもよい [1]。

例 X を「愛知県にある市の全体」とすると、 X は集合である。このとき、名古屋市は X に属する（含まれる）ので、名古屋市 $\in X$ とかく。一方、四日市市は X に属さない（含まれない）ので、四日市市 $\notin X$ とかく。ほかにも

$$\text{豊田市} \in X, \quad \text{浜松市} \notin X, \quad \text{飛島村} \notin X$$

といったふうに、それぞれ X に含まれるか含まれないかを決定できる。

任意の集合 A と任意の x に対して、 $x \in A$ と $x \notin A$ のいずれか一方が必ず成り立つ。

集合を表すのには、いくつかの方法がある。まずは $\{1, 2, 4\}$ のように波括弧 (brace) の中に元を書き並べる方法である。しかし、この書き方だと無限個の元を含む集合、たとえ

1) もちろん「ひらがなの全体」に変体仮名を含むのか、「名大付属図書館の蔵書全体」はいつの時点の蔵書を指すのかは決めておく必要がある。

2) “偉大な物理学者”を「ノーベル物理学賞の受賞者」と定義すれば、「偉大な物理学者の全体」は集合になる。しかし、そうであればはじめて「ノーベル物理学賞の受賞者の全体」といえばよいし、そもそも偉大な物理学者 \neq ノーベル物理学賞受賞者であるのは物理学を学んだ人ならよく理解していることだろう。

ば「自然数全体の集合 \mathbb{N} 」を表すことができない。そこで、

$$\mathbb{N} = \{x \mid x \text{ は自然数}\}$$

のように縦棒 $|$ を書き、その前に含むべき元、うしろに元が含まれる条件をかく。たとえば $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 2^{10}\}$ とかけば、これは 2^{10} より大きい自然数の集合を表す。

集合の表記になれるため、また今後のための準備もかねて、数の集合をいくつか挙げておこう。

$$\text{自然数全体の集合 } \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \quad (1a)$$

$$\text{整数全体の集合 } \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \quad (1b)$$

$$\text{有理数全体の集合 } \mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\} \quad (1c)$$

$$\text{実数全体の集合 } \mathbb{R} \quad (1d)$$

$$\text{複素数全体の集合 } \mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\} \quad (1e)$$

例 正の実数全体の集合は、 $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ とかける。

定義 1.1 (集合の一致) 集合 X と集合 Y について、 X のすべての元と Y のすべての元が一致するとき、 X と Y は一致するといい、 $X = Y$ とかく。

定義 1.2 (集合の包含) 集合 X と集合 Y について、 X のすべての元が Y の元であるとき、 X は Y に含まれる（あるいは Y は X を含む）といい、 $X \subset Y$ とかく。

$X = Y$ のときも $X \subset Y$ が成り立つことに注意。

集合 X と Y が一致することを直接示すのは難しいことが多い。 $X \subset Y$ かつ $X \supset Y$ を示すことで、 $X = Y$ といえる。

1.2 集合の演算

定義 1.3 (和集合) X, Y を集合とする。2 つの集合の^{わしゅうごう}和集合 (union) を、

$$X \cup Y := \{x \mid x \in X \text{ または } x \in Y\} \quad (2)$$

で定義する。

定義 1.4 (共通部分) X, Y を集合とする。2 つの集合の^{きょうつうぶぶん}共通部分 (intersection) を

$$X \cap Y := \{x \mid x \in X \text{ かつ } x \in Y\} \quad (3)$$

で定義する。

定義 1.5 (非交和) $X \cap Y = \emptyset$ であるとき、和集合 $X \cup Y$ を特に^{ひこうわ}非交和 (disjoint union) あるいは^{ちよくわ}直和 (direct sum) といい、 $X \sqcup Y$ とかく。

1.3 写像

定義 1.6 (写像) X, Y を集合とする。 $x \in X$ に対して、ある $y \in Y$ を対応付ける規則のことを、 X から Y への^{しゃざう}写像 (map) という。

f が X から Y への写像であることを、 $f: X \rightarrow Y$ とあらわす。

X を f の^{ていぎいき}定義域 (domain), Y を f の^{しゅういき}終域 (codomain) という。

例 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$ とする。次のように定義された f は X から Y への写像である。

$$f(1) = a, \quad f(2) = b, \quad f(3) = c.$$

また、次のような g および h も X から Y への写像である。

$$\begin{aligned} g(1) &= c, & g(2) &= c, & g(3) &= a. \\ h(1) &= a, & h(2) &= a, & h(3) &= a. \end{aligned}$$

例 $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{N}$ とする。 $x \in X$ に対して、 $y \in Y$ を

$$y = f(x) = 3x$$

で定めたとき、 f は \mathbb{N} から \mathbb{N} への写像である。簡単のために

$$X \ni x \mapsto 3x \in Y$$

とかくこともある。

例 $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$ とする。 $x \in X$ に対して、 $y \in Y$ を

$$y = f(x) = x^2$$

で定めたとき、 f は \mathbb{R} から \mathbb{R} への写像である。

\mathbb{R} から \mathbb{R} への写像や \mathbb{C} から \mathbb{C} への写像を、特に^{かんすう}関数 (function) という。

定義 1.7 (像) $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. 集合

$$\text{Im } f := \{f(x) \in Y \mid x \in X\} \quad (4)$$

を f の^{ぞう}像 (image) という.

f の像を^{ちいき}値域 (range) ということもある. f の値域といった場合, f の終域を指すことも像を指すこともあり, 注意が必要である.

定義 1.8 (部分集合の像) $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. 部分集合 $A \subset X$ に対し,

$$f[A] := \{f(x) \in Y \mid x \in A\} \quad (5)$$

を, A の f による像という.

定義 1.9 (逆像) $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. 部分集合 $A \subset Y$ に対して,

$$f^{-1}[A] := \{x \in X \mid f(x) \in A\} \quad (6)$$

で定められる集合を^{ぎやくぞう}逆像 (inverse image) という.

同じ記号 f^{-1} を使う逆写像 (定義 1.16) と逆像を取り違えないこと³⁾. 任意の写像 f に対し, 逆写像が存在するとは限らないが, 逆像は必ず存在する.

例 写像 f を, $f: \mathbb{R} \ni x \mapsto [x] \in \mathbb{R}$ で定義する. f の像は $f[\mathbb{R}] = \mathbb{Z}$ である. 部分集合の像はたとえば $f[\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 2\}] = \{-2, -1, 0, 1\}$ である. 逆像はたとえば $f^{-1}[\{1, 2, 3\}] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 4\}$ である. また, $f^{-1}[\{0.5\}] = \emptyset$ である.

次に特殊な写像を定義する.

定義 1.10 (恒等写像) 以下のような写像 $\text{id}_X: X \rightarrow X$ を^{こうとうしゃぞう}恒等写像 (identity map) という.

$$X \ni x \mapsto x \in X$$

恒等写像とは, 任意の $x \in X$ を x 自身にうつす写像のことである.

3) ここでは英語版 Wikipedia にならって逆像を $f^{-1}[B]$ とかいたが, 逆写像と全く同じように $f^{-1}(B)$ と書く場合も多い.

なお、集合 X, Y について、 $X = Y$ でなくとも $X \subset Y$ を満たせば写像 $\iota: X \ni x \mapsto x \in Y$ は定義できる。 $X = Y$ のとき当然 ι は恒等写像であるが、 $X \subsetneq Y$ なら ι は **包含写像** (inclusion map) であり恒等写像ではない。

定義 1.11 (単射) 写像 $f: X \rightarrow Y$ は、任意の $x, x' \in X$ に対して、 $f(x) = f(x')$ ならば $x = x'$ が成り立つとき、**単射** (injection) であるという。

定義 1.12 (全射) 写像 $f: X \rightarrow Y$ は、任意の $y \in Y$ に対して、 $x \in X$ が存在して、 $y = f(x)$ となるとき、**全射** (surjection) であるという。

定義 1.13 (全単射) 写像 $f: X \rightarrow Y$ が単射かつ全射のとき、**全単射** (bijection) という。

集合 X と Y のあいだに全単射が存在する場合、この 2 つを同じ集合とみなすことができる (ことがある)。

例 包含写像 $X \hookrightarrow Y$ は単射である。

次に 2 つ以上の写像の関係についてみる。

定義 1.14 (写像の一致) 写像 $f: X \rightarrow Y$ と $g: X \rightarrow Y$ が等しいとは、任意の $x \in X$ に対して、 $f(x) = g(x)$ であることをいう。

定義 1.15 (写像の合成) X, Y, Z を集合、 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ を写像とする。 $x \in X$ を $g(f(x)) \in Z$ にうつす写像を f と g の**合成写像**といい、 $g \circ f$ であらわす。

定義 1.16 (逆写像) X, Y を集合、 $f: X \rightarrow Y$ を写像とする。写像 $g: Y \rightarrow X$ が

$$f \circ g = \text{id}_Y \quad \text{かつ} \quad g \circ f = \text{id}_X$$

をみたすとき、 g は f の**逆写像**であるといい、 f^{-1} とかく⁴⁾。

定理 1.1 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して、逆写像 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ が存在する必要十分条件は、 f が全単射であることである。

4) $f \circ g = g \circ f = \text{id}$ と覚えている人がいるかもしれないが、誤り。 $f \circ g: Y \rightarrow Y$ と $g \circ f: X \rightarrow X$ は一般に異なる写像である。

定義 1.17 (写像の制限) X, Y を集合, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. 部分集合 $U \subset X$ に対し, 写像 $f|_U: U \rightarrow Y$ を

$$f|_U: U \ni x \mapsto f(x) \in Y$$

で定める. $f|_U$ を f の制限 (restriction) という.

1.4 群・環・体

定義 1.18 (群) G を集合, $*: G \times G \rightarrow G$ を二項演算とする. G の元が, 演算 $*$ に対して以下を満たすとき, $(G, *)$ は群 (group) であるという.

- (1) 任意の $a, b, c \in G$ に対し, $(a * b) * c = a * (b * c)$ である.
- (2) ある $e \in G$ が存在して, 任意の $a \in G$ に対し, $a * e = e * a = a$ である.
- (3) 任意の $a \in G$ に対し, ある $a^{-1} \in G$ が存在して, $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ である.

群 $(G, *)$ のことを単に G とかくこともある.

例

$$\mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) := \{A: \text{実成分 } n\text{-次正方行列} \mid \det A = 1\}$$

とする. これは行列としての積に対して群をなす.

例 自然数全体の集合 \mathbb{N} は, 通常のと $+$ に対して群をなす.

例 実数全体の集合 \mathbb{R} は, 通常のと \times に対して群をなさない. なぜなら, $0 \in \mathbb{R}$ に対して, $0 \times x = 1$ となるような $x \in \mathbb{R}$ が存在しないため.

定義 1.19 (環) R を集合, $+$ と $*$ を R 上の二項演算とする. 以下がみたされるとき, $(R, +, *)$ は環 (ring) であるという.

- (1) 任意の $a, b, c \in R$ に対し, $(a + b) + c = a + (b + c)$ である.
- (2) ある $0 \in R$ が存在して, 任意の $a \in R$ に対し, $a + 0 = 0 + a = a$ である.
- (3) 任意の $a \in R$ に対し, ある $-a \in R$ が存在して, $a + (-a) = (-a) + a = 0$ である.
- (4) 任意の $a, b \in R$ に対し, $a + b = b + a$ である.
- (5) 任意の $a, b, c \in R$ に対し, $(a * b) * c = a * (b * c)$ である.
- (6) ある $1 \in R$ が存在して, 任意の $a \in R$ に対し, $a * 1 = 1 * a = a$ である.

(7) 任意の $a, b, c \in R$ に対し, $(a+b)*c = a*c + b*c$ であり, $a*(b+c) = a*b + a*c$ である.

さらに以下がみたされるとき, $(R, +, *)$ は**可換環** (commutative ring) であるという.

(8) 任意の $a, b \in R$ に対し, $a*b = b*a$ である.

二項演算 $+$ のことを**和**あるいは**加法**, $*$ のことを**積**あるいは**乗法**という.

定義 1.19 において, 条件-1 から条件-4 は, $(R, +)$ がアーベル群 (定義 1.18) であることを要請している.

例 n -次正方行列全体の集合は, 行列の和 $+$ と積 $*$ に関して環であるが, $n = 1$ の場合をのぞき可換環でない.

定義 1.20 (体) \mathbb{K} を集合, $+$ と $*$ を \mathbb{K} 上の二項演算とする. 以下がみたされるとき, $(\mathbb{K}, +, *)$ は**体** (field) であるという.

(1) 任意の $a, b, c \in \mathbb{K}$ に対し, $(a+b)+c = a+(b+c)$ である.

(2) ある $0 \in \mathbb{K}$ が存在して, 任意の $a \in \mathbb{K}$ に対し, $a+0 = 0+a = a$ である.

(3) 任意の $a \in \mathbb{K}$ に対し, ある $-a \in \mathbb{K}$ が存在して, $a+(-a) = (-a)+a = 0$ である.

(4) 任意の $a, b \in \mathbb{K}$ に対し, $a+b = b+a$ である.

(5) 任意の $a, b, c \in \mathbb{K}$ に対し, $(a*b)*c = a*(b*c)$ である.

(6) ある $1 \in \mathbb{K}$ が存在して, 任意の $a \in \mathbb{K}$ に対し, $a*1 = 1*a = a$ である.

(7) 任意の $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ に対し, ある $a^{-1} \in \mathbb{K}$ が存在して, $a*a^{-1} = a^{-1}*a = 1$ である.

(8) 任意の $a, b \in \mathbb{K}$ に対し, $a*b = b*a$ である.

(9) 任意の $a, b, c \in \mathbb{K}$ に対し, $(a+b)*c = a*c + b*c$ であり, $a*(b+c) = a*b + a*c$ である.

例 有理数全体の集合 \mathbb{Q} , 実数全体の集合 \mathbb{R} , 複素数全体の集合 \mathbb{C} は, それぞれ通常の和と積に関して体になる.

体をひとことでいえば, 「四則演算 (和・差・積・商) ができる集合」である. 実数や複素数は体の典型的なものである. 本稿で「体 \mathbb{K} 」と書いてある場合, 実数 \mathbb{R} もしくは複素数 \mathbb{C} と読み替えて差支えない.

1.5 同値関係・同値類

1.5.1 同値関係

定義 1.21 (二項関係) X を集合とする. 規則 ρ が X 上の**二項関係** (binary relation) であるとは, 任意の $x, y \in X$ に対し, $x \rho y$ が満たされるか満たされないかを判別できることをいう.

例 $<$ は \mathbb{R} 上の二項関係である. 実際, 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対し, $a < b$ が真であるか偽であるかを判別できる.

定義 1.22 (同値関係) X を集合とする. X 上の二項関係 \sim が**同値関係** (equivalence relation) であるとは, 以下をすべて満たすことをいう.

- (1) (**反射律** (reflexivity)) 任意の $x, y \in X$ に対し, $x \sim x$ である.
- (2) (**対称律** (symmetry)) 任意の $x, y \in X$ に対し, $x \sim y$ ならば $y \sim x$ である.
- (3) (**推移律** (transitivity)) 任意の $x, y, z \in X$ に対し, $x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x \sim z$ である.

例 任意の集合 X に対して, $=$ は X 上の自明な同値関係である.

例 \mathbb{C} 上の二項関係 \sim を

$$x \sim y \iff |x| = |y|$$

で定めると, \sim は同値関係である.

1.5.2 同値類

定義 1.23 (同値類) X を集合, \sim を X 上の同値関係とする. $x \in X$ に対し,

$$[x] := \{y \in X \mid x \sim y\} \subset X \tag{7}$$

を元 x の **同値類** (equivalence class) という. また, x のことを同値類 $[x]$ の **代表元** (representative) という.

定義 1.24 (商集合) X を集合, \sim を X 上の同値関係とする. 同値類全体の集合

$$X/\sim := \{[x] \subset X \mid x \in X\} \quad (8)$$

を しょうしゅうごう **商集合** (quotient set) という,

例 \mathbb{Z} に対し, 同値関係 \sim を

$$x \sim y \iff x - y \text{ が } 3 \text{ で割りきれ}$$

で定める. つまり, x を 3 で割ったときの余りと y を 3 で割ったときの余りが同じであるとき, $x \sim y$ とする. たとえば, $0 \sim 3 \sim 6 \sim \dots$ であり, $-1 \sim 2 \sim 5 \sim \dots$ である. したがって同値類は,

$$\begin{aligned} [0] &= \{\dots, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\} & [1] &= \{\dots, -2, 1, 4, 7, 10, \dots\} \\ [2] &= \{\dots, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\} \end{aligned}$$

であり, 商集合 $\mathbb{Z}/\sim = \{[0], [1], [2]\}$ である⁵⁾.

また, $[0] = [3] = [6] = \dots$. このことからわかるように, 1 つの同値類に対する**代表元**の取り方は一般に一意ではない.

明らかに $\mathbb{Z} = [0] \sqcup [1] \sqcup [2]$ であり, 同値類が互いに交わらずに \mathbb{Z} を分割している.

例で見た「同値類が互いに交わらずに集合を分割する」ことは, 一般の集合においても成り立つ.

定理 1.2 同値関係 \sim が定義された集合 X は, 同値類によって互いに交わらない部分集合に分割される. すなわち適当な $x_1, x_2, \dots \in X$ を用いて

$$X = [x_1] \sqcup [x_2] \sqcup \dots \quad (\text{非交和 (定義 1.5)})$$

証明 $X = [x_1] \cup [x_2] \cup \dots$ は明らかなので, 非交和であることを示す. $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ なら $[x] = [y]$ を示せばよい.

そこで $z \in [x] \cap [y]$ とする. $z \in [x]$ より $x \sim z$ であり, $z \in [y]$ なので $y \sim z$ である. \sim の対称律と推移律を用いると, $x \sim y$ がいえる. したがって $[x] = [y]$ である. \square

5) この場合の商集合を特に $\mathbb{Z}/3$ とかくこともある

1.6 便利な記号

この節では、数式を扱ううえで便利な記号を導入する.

定義 1.25 (クロネッカーのデルタ) 次で定義される $\delta_{i,j}$ をクロネッカーのデルタという:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{if } i \neq j. \end{cases} \quad (9)$$

§2 ベクトル空間

量子力学において、系の状態は「ベクトル」を用いてであらわされる。しかし、通常の数ベクトルでは量子力学の状態をあらわせないことがわかる（ここでどこかを引用する）。そこで、数ベクトルの概念を一般化・抽象化する必要がある。この章ではベクトルの性質を抽象化し、ベクトル空間について定義する。

序：3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 の性質

この節では、数ベクトルの性質を確かめる。

n 個の数字⁶⁾を縦に並べたものを「 n -次の列ベクトル」と呼び、横に並べたものを「 n -次の行ベクトル」と呼ぶ [2]。列ベクトルのことを「縦ベクトル」、行ベクトルを「横ベクトル」ということもある。

たとえば??の x は 3 次の列ベクトル、 y は 3 次の行ベクトルである。

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \quad \text{where } a, b, c \in \mathbb{C} \quad (10)$$

ここで、 a, b, c はそれぞれある複素数である⁷⁾。 a, b, c のことをそれぞれ、ベクトルの成分^{せいぶん}という。

列ベクトルと行ベクトルは、「転置^{てんち} (transpose)」という操作によって移り変わる。つまり、

$${}^t \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}, \quad {}^t \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

である。列ベクトルを、転置を用いて ${}^t(a \ b \ c)$ と表記することもある。

ベクトル ${}^t(a, b, c)$ は、ある点から x -軸方向へ a 、 y -軸方向へ b 、 z -軸方向へ c だけ動いた点を結ぶ矢印として考えることができる。

ベクトル同士の「和^わ」（足し算）を

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \\ c + c' \end{pmatrix}$$

6) ここでは実数または複素数のこと。

7) \mathbb{C} は複素数全体の集合。eq. (1) を参照

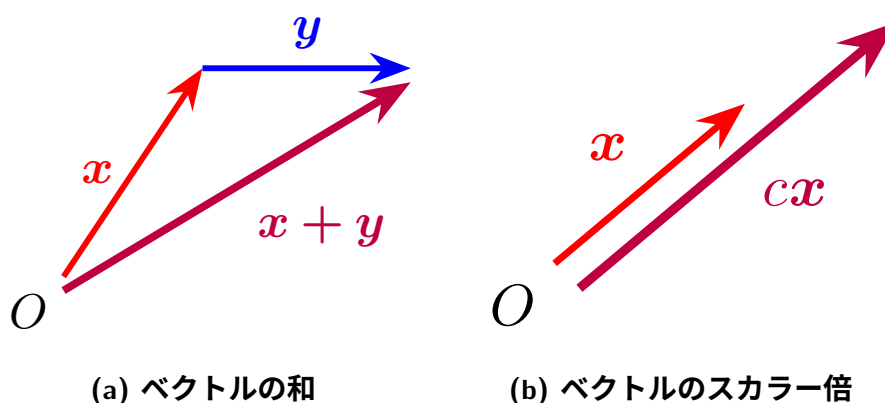


図 1: ベクトルの演算

のように、各成分の和として定義する。ベクトルの和は、2 つの矢印をつなげた見たときの矢印に相当する (図 1a)。

また、ベクトルの「**スカラー倍**」を、

$$\lambda \star \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix}$$

で定義する。ベクトルのスカラー倍は、向きを保ったまま長さを λ 倍した矢印に対応する (図 1b)。

このように定義されたベクトルの和とスカラー倍についての性質を抽出したのが定義 2.1 である。

2.1 ベクトル空間の定義

定義 2.1 (ベクトル空間) V を集合、 $(\mathbb{K}, +, *)$ を体 (定義 1.20) とする。 V 上の **和** $+: V \times V \rightarrow V$ 、 **スカラー倍** $\star: \mathbb{K} \times V \rightarrow V$ が定義され、以下が満たされるとき、 $(V, +, \star)$ を (\mathbb{K} 上の) **ベクトル空間** (vector space) あるいは **線形空間** (linear space) という。このとき V の元を **ベクトル** (vector)、 \mathbb{K} の元を **スカラー** (scalar) という。

- (1) 任意の $u, v, w \in V$ に対して、 $(u + v) + w = u + (v + w)$ である。
- (2) ある $0 \in V$ が存在し、任意の $v \in V$ に対して、 $v + 0 = 0 + v = v$ である。
- (3) 任意の $v \in V$ に対して、ある $-v$ が存在して、 $v + (-v) = (-v) + v = 0$ である。
- (4) 任意の $u, v \in V$ に対して、 $u + v = v + u$ である。
- (5) 任意の $u, v \in V$ および任意の $c \in \mathbb{K}$ に対して、 $c \star (u + v) = (c \star u) + (c \star v)$ である。
- (6) 任意の $v \in V$ および任意の a, b に対して、 $(a + b) \star v = (a \star v) + (b \star v)$ である。
- (7) 任意の $v \in V$ および任意の a, b に対して、 $(a * b) \star v = a \star (b \star v)$ である。

(8) 任意の $v \in V$ に対して, $1 \star v = v$ である.

ベクトル空間 $(V, +, \star)$ のことを単に V と書くこともある.

系 2.1 ベクトル空間 V は以下を満たす.

- 零ベクトルについて,
 - (1) $\mathbf{0}$ は一意に定まる.
- 任意の $v \in V$ に対し,
 - (2) $-v$ は一意に定まる.
 - (3) $0 \star v = \mathbf{0}$ である.
 - (4) $(-1) \star v = -v$ である.

証明 (1) 零ベクトル $\mathbf{0}, \mathbf{0}'$ をとると, $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}'$.

(2) v の逆元として u, u' をとると, $u = u + (v + u') = (u + v) + u' = u'$.

(3) $0 \star v = (0 + 0) \star v = 0 \star v + 0 \star v$ より従う.

(4) $v + (-1) \star v = 1 \star v + (-1) \star v = (1 + (-1)) \star v = 0 \star v = \mathbf{0}$ より従う.

□

$v + (-u) =: v - u$ とかくことが多い.

例 実ユークリッド空間 \mathbb{R}^n は, 適切な和とスカラー倍の下で \mathbb{R} 上のベクトル空間になる. また, 複素ユークリッド空間 \mathbb{C}^n は, \mathbb{R} 上のベクトル空間であり, また \mathbb{C} 上のベクトル空間でもある.

2.2 部分ベクトル空間

定義 2.2 (部分ベクトル空間) V をベクトル空間, $W \subset V$ とする. W が V の和とスカラー倍に対してベクトル空間になるとき, W は U の **部分ベクトル空間** (vector subspace) あるいは単に **部分空間** (subspace) であるという.

定理 2.2 V をベクトル空間とする. $U \subset V$ が以下の条件を満たす場合, U は V の部分ベクトル空間になる.

- (1) 任意の $u, v \in U$ に対し, $u + v \in U$ である (U は和で閉じている).
- (2) 任意の $v \in U$ および任意の $c \in \mathbb{R}$ に対し, $c \star v \in U$ である (U はスカラー倍で閉じて

いる).

(3) $0 \in U$ である.

(3) は (2) で $c = 0$ とすれば自動的に満たされるように見える. この条件をわざわざ加えるのは, $U \neq \emptyset$ であることを保証するためである.

例 何かないかな・・・

例 V をベクトル空間, $W_1, W_2 \subset V$ を部分ベクトル空間とする. このとき $W := W_1 \cap W_2 \subset V$ は V の部分ベクトル空間である.

定義 2.3 (和空間) V をベクトル空間, $W_1, W_2 \subset V$ を部分ベクトル空間とする.

$$W_1 + W_2 := \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in W_1, v_2 \in W_2\} \quad (11)$$

は V の部分ベクトル空間である.

なお、和空間 $W_1 + W_2$ と和集合 (定義 1.3) $W_1 \cup W_2$ は異なる概念である. 一般に $W_1 \cup W_2$ は部分ベクトル空間にならない.

定義 2.4 (直和空間) 和空間 $W_1 + W_2$ で、特に $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ であるとき、**直和** (direct sum) といい、 $W_1 \oplus W_2$ とかく。

2.3 ベクトルの一次独立・一次従属

定義 2.5 (ベクトルの線形結合) V を \mathbb{K} 上のベクトル空間, $v_1, v_2, \dots \in V$ をベクトル, $c_1, c_2, \dots \in \mathbb{K}$ を有限個を除いてゼロであるスカラーとする. このとき、ベクトル $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots$ のことを、ベクトル v_1, v_2, \dots の**線形結合** (linear combination) あるいは**一次結合** (いちじけつごう) という.

定義 2.5 において, c_i が有限個を除きゼロである, つまり $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots$ が有限和であるという条件は重要である. 一般に, 無限和では $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots \in V$ とは限らない. たとえば, 実関数 e^x は多項式ベクトル空間の元 $1, x, x^2, x^3, \dots \in \mathbb{R}[x]$ を使って

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

と書けるが, 明らかに $e^x \notin \mathbb{R}[x]$ である.

定義 2.6 (ベクトル空間の生成系) V を \mathbb{K} 上のベクトル空間, $W \subset V$ を部分ベクトル空間とする. ベクトルの組 $v_1, v_2, \dots \in V$ が W を **生成する** (generate) あるいは **張る** (span) とは, $v_1, v_2, \dots \in V$ から有限個のベクトル u_1, \dots, u_n を任意にとったときの線形結合の全体が W に一致する, すなわち

$$W = \{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots \in V \mid c_1, c_2, \dots \in \mathbb{K}, c_i \text{ は有限個を除きゼロ}\} \subset V$$

であることをいう. また, $v_1, v_2, \dots \in V$ が生成する部分ベクトル空間を

$$W = \langle v_1, v_2, \dots \rangle \quad (12)$$

とかく.

定義 2.7 (一次独立と一次従属) V を \mathbb{K} 上のベクトル空間とする. ベクトルの組 $v_1, v_2, \dots \in V$ が **一次独立** (linearly independent) あるいは **線形独立** であるとは, 有限個を除き 0 である $c_1, c_2, \dots \in \mathbb{K}$ に対し,

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots = \mathbf{0} \iff c_1 = c_2 = \dots = 0$$

であることをいう. ベクトルの組 $v_1, v_2, \dots \in V$ が一次独立でないとき, **一次従属** (linearly dependent) あるいは **線形従属** という.

2.4 ベクトル空間の基底と次元

定義 2.8 (基底) V を \mathbb{K} 上のベクトル空間とする. ベクトルの組 $\{v_1, v_2, \dots\} \subset V$ は, 以下を満たすとき, **基底** (basis) という.

- (1) v_1, v_2, \dots は一次独立である.
- (2) v_1, v_2, \dots は V を生成する. すなわち, 任意の $v \in V$ に対して, 有限個を除き 0 の, ある $c_1, c_2, \dots \in \mathbb{K}$ が存在し, $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots$ とかける.

例 $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ は \mathbb{R}^3 の基底である. また, $\{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$ も \mathbb{R}^3 の基底である.

例でみたように, 一般にベクトル空間 V が与えられたとき, その基底の取り方は一意ではない. しかし, 基底を構成するベクトルの数は, 基底の取り方によらない.

証明 なんかかく

□

定義 2.9 (次元) V をベクトル空間とする. V の基底を構成するベクトルの数を **次元** (dimension) といい, $\dim V$ とかく.

例 多項式ベクトル空間 $\mathbb{R}[x]$ について, $\{1, x, x^2, \dots\}$ は一次独立であり, さらに基底をなす. このように, ベクトル空間 V の基底を構成するベクトルの数は無限個であるとき, V は**無限次元** (infinite dimensional) であるという.

例 複素数全体の集合 \mathbb{C} は, \mathbb{C} 上のベクトル空間と考えると $\dim_{\mathbb{C}} = 1$ (基底 1)、 \mathbb{R} 上のベクトル空間と考えると $\dim_{\mathbb{R}} = 2$ (基底 $1, i$) である.

系 2.3 (基底によるベクトルの展開) V をベクトル空間とする. 任意の $v \in V$ は, V の基底 $\{u_i\}$ のうち有限個を用いて $v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ とかける. このとき, スカラーの組 $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ は一意に定まる.

証明 前半は基底の定義 (定義 2.8) より明らかなので, 一意性を示す. $v = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n = b_1 u_1 + \dots + b_n u_n$ と 2 通りにかけたとすると,

$$(a_1 - b_1)u_1 + \dots + (a_n - b_n)u_n = 0$$

がいえるが, 基底は一次独立なので $a_1 - b_1 = \dots = a_n - b_n = 0$ である. □

2.4.1 任意のベクトル空間に基底が存在する

ここまでは, ベクトル空間に基底が存在すると仮定したうえで議論してきた. 実は, 任意のベクトル空間について, 基底が存在することを示すことができる.

証明にはツォルンの補題を用いる.

§3 内積空間とノルム空間

これからベクトル空間の上に「^{ないせき}内積」および「ノルム」という演算を導入する。内積を用いることで、2つのベクトルが「直交」するということを代数的に表現できる。また、ノルムを用いれば2点間の距離を定義することができる。

これまでは一般の体 \mathbb{K} 上のベクトル空間を考えてきたが、内積を考える上では、体を \mathbb{R} もしくは \mathbb{C} に限る必要がある。そこでこれからは \mathbb{K} のかわりに \mathbb{C} と書くことにする。以降の \mathbb{C} を \mathbb{R} に置き換えることも容易である。

3.1 内積空間

まず、2つのベクトルから実数を得る演算である内積を定義する。

定義 3.1 (内積) V をベクトル空間 (定義 2.1) とする。写像 $(\bullet, \bullet): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ は以下を満たすとき、^{ないせき}内積 (inner product) であるという。

- 任意の $u, v, w \in V, c \in \mathbb{C}$ に対し,
 - (1) $(u, v + w) = (u, v) + (u, w)$ である。
 - (2) $(u, cv) = c(u, v)$ である。
 - (3) $(u, v) = (v, u)^*$ である。
 - (4) $(v, v) \geq 0$ である。また、 $(v, v) = 0$ であるのは $v = \mathbf{0}$ であるときに限る。

内積をもつベクトル空間を**内積空間** (inner product space) という。

系 3.1 内積は以下を満たす。

- 任意の $u, v, w \in V, a, b \in \mathbb{C}$ に対し,
 - (1) (**線形性** (linearity)) $(u, av + bw) = a(u, v) + b(u, w)$
 - (2) (**反線形性** (antilinearity)) $(au + bv, w) = a^*(u, w) + b^*(v, w)$
 - (3) $(v, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, v) = 0$
- (1) と (2) をあわせて**半双線形** (sesqui-linear) であるという。

例 実ユークリッド空間 \mathbb{R}^n において、

$$(a, b) := \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

は内積である。また、複素ユークリッド空間 \mathbb{C}^n において、

$$(a, b) := \sum_{i=1}^n a_i^* b_i$$

は内積である。これらを特に**標準内積**という。

定義 3.2 V を内積空間とする。ベクトル $v, u \in V \setminus \{0\}$ は、 $(v, u) = 0$ であるとき、**直交する** (orthogonal) といい、 $v \perp u$ とかく。また、 $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を用いて $v = cu$ とかけるとき、**平行である** (parallel) といい、 $v \parallel u$ とかく。

定義 3.3 (直交補空間) V をベクトル空間、 $W \subset V$ を部分ベクトル空間とする。 W のベクトルすべてと直交するようなベクトルの集合、つまり

$$W^\perp := \{v \in V \mid \text{任意の } u \in W \text{ に対して } v \perp u\} \quad (13)$$

を W の**直交補空間** (orthogonal compliment) という。

系 3.2 V をベクトル空間とする。 $W \subset V$ の直交補空間 W^\perp は V の部分ベクトル空間である。

3.2 ノルム空間

3.2.1 ノルムの一般論

定義 3.4 (ノルム) V をベクトル空間とする。写像 $\|\bullet\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ は以下を満たすとき、**ノルム** (norm) という。

- 任意の $u, v \in V$ および $c \in \mathbb{C}$ に対し、
 - (1) $\|v\| \geq 0$ である。また、 $\|v\| = 0$ となるのは $v = 0$ のときに限る。
 - (2) $\|cv\| = |c| \|v\|$ である。
 - (3) (**三角不等式** (triangle inequality)) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ である。また、等号が成立するのは u と v が一次従属 (定義 2.7) のときに限る。

ノルムが定義されたベクトル空間のことを**ノルム空間** (normed space) という。

例 実ユークリッド空間のベクトル $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ において、以下はいずれもノル

ムである.

$$\|v\|_1 := \sum_{i=1}^n |v_i|, \quad \|v\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}, \quad \|v\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|. \quad (14)$$

ノルムは距離とみなすことができる (命題 4.1).

3.3 内積とノルムの関係

section 3.1 では内積を, section 3.2 ではノルムを導入した. これらはそれぞれ独立に定義される概念であるが, 特殊なベクトル空間においてはこの 2 つを統一することが可能である. まずは内積からノルムを定義しよう.

定義 3.5 (内積から導かれるノルム) V を内積空間とする. 写像 $\|\bullet\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ を以下で定義すると, これはノルムである.

$$\|v\| := \sqrt{(v, v)} \quad (15)$$

したがって, 内積空間は eq. (15) で定義されたノルムに対してノルム空間になる.

証明 eq. (15) が定義 3.4 を満たすことを示せばよい. (1) は内積の定義 (定義 3.1) から明らかなので, (3) を示す. そのために, まず次の補題を示す.

補題 3.3 (コーシー – シュワルツの不等式) V を内積空間, $\|\bullet\|$ を内積から導かれるノルムとする. このとき, 任意の x, y について

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\| \quad (16)$$

が成り立つ (コーシー – シュワルツの不等式 (Cauchy–Schwarz inequality)).

補題 3.3 の証明 $y = 0$ のときは, $|(x, y)| = \|x\| \|y\| = 0$ なので成り立つ. $y \neq 0$ のときを考える. 任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ について内積の正值性から $\|\lambda x + \mu y\| \geq 0$ がいえる. そこで $\lambda = -(x, y)^*$, $\mu = \|x\|^2$ とおくと,

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y) \\ &= \lambda \lambda^* (x, x) + \lambda \mu^* (x, y) + \mu \lambda^* (y, x) + \mu \mu^* (y, y) \\ &= |(x, y)|^2 \|x\|^2 - (x, y)^* \|x\|^2 (x, y) - \|x\|^2 (x, y) (y, x) + \|x\|^4 (y, y) \\ &= \|x\|^2 \left[-|(x, y)|^2 + \|x\|^2 \|y\|^2 \right] \end{aligned}$$

である. $y \neq 0$ なので, 内積の正値性より $\|x\| > 0$. そこで両辺を $\|x\|^2$ で割れば eq. (16) が示される. \square

補題 3.3 を用いると,

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) \\ &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(x, y) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2\end{aligned}$$

と示される. \square

定理 3.4 (中線定理) V を内積空間, $\|\bullet\| = (\bullet, \bullet)$ を内積から導かれるノルムとする。

$$\|v + u\|^2 + \|v - u\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|u\|^2) \quad (17)$$

が成立する (ちゅうせんていり **中線定理** (parallelogram law))。

証明 ノルムを内積に直して計算すれば容易に示される. \square

一般の内積空間には, 定義 3.5 によるノルムが存在することが分かった. それでは逆に, 一般のノルム空間に内積は存在するのだろうか. それを考えるために, まず内積空間で成立する恒等式を見る.

定理 3.5 (偏極恒等式) V を内積空間, $\|\bullet\|$ を内積から導かれるノルムとする. 任意のベクトル $x, y \in V$ に対して, 以下の**偏極恒等式** (polarization identity) が成立する.

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 - i\|x + iy\|^2 + i\|x - iy\|^2) \quad (18)$$

証明 ノルムを内積に戻して, 半双線形を用いて計算する.

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = +[(x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y)] \\ -\|x - y\|^2 &= -(x - y, x - y) = -[(x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y)] \\ -i\|x + iy\|^2 &= -i(x + iy, x + iy) = -i[(x, x) + i(x, y) - i(y, x) + (y, y)] \\ +i\|x - iy\|^2 &= +i(x - iy, x - iy) = +i[(x, x) - i(x, y) + i(y, x) + (y, y)]\end{aligned}$$

\square

内積空間においてはノルムから内積を構成できることが分かった。しかし、一般のノルム空間で内積が構成できるとは限らない。そのことを示すのが次の定理である。

定理 3.6 (ジョルダン – フォン・ノイマンの定理) V をノルム空間とする。 V 上のノルムが中線定理 (定理 3.4) を満たすならば、 V は内積空間である (ジョルダン – フォン・ノイマンの定理 (Jordan–von Neumann theorem))。

3.4 内積空間の基底

一般のベクトル空間において基底 (定義 2.8) が存在するのであった。内積空間においては、よい性質をもつ基底をとることができる。

定義 3.6 (正規直交基底) V を有限次元の内積空間とする。 V の基底 $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ が次の性質を満たすとき、^{せいきちようこうきてい} **正規直交基底** (orthonormal basis) という。

$$(v_i, v_j) = \delta_{i,j} \quad \text{Kronecker delta (定義 1.25)}$$

有限次元の内積空間では、正規直交基底を具体的に構成することができる。

定理 3.7 (グラム – シュミットの正規直交化) $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ を有限次元の内積空間 V の基底とする。このとき、 V の正規直交基底 $\{u_1, \dots, u_n\} \subset V$ をつくることができる (グラム – シュミットの正規直交化 (Gram–Schmidt process))。

§4 ヒルベルト空間

4.1 距離空間

定義 4.1 (距離) X を集合とする. 写像 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ が以下を満たすとき, **距離 (distance)** あるいは**計量 (metric)** という.

- 任意の $x, y, z \in X$ に対し,
 - (1) $d(x, y) \geq 0$ である. ただし, $d(x, y) = 0$ となるのは $x = y$ のときに限る.
 - (2) $d(x, y) = d(y, x)$ である.
 - (3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ である.

(X, d) を**距離空間 (metric space)** という.

例 $X = \mathbb{R}^n$ (実ユークリッド空間) とする. $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して, $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$ と定めると, これは距離である.

特に, 実数全体の集合 \mathbb{R} は, 距離 $d(x, y) := |x - y|$ に対して距離空間になる.

命題 4.1 V をノルム空間 (定義 3.4), $\|\bullet\|$ を V 上のノルムとする. $x, y \in V$ に対し, $\|x - y\|$ は, V 上の距離である. すなわち, ノルム空間は距離空間である.

証明 ノルムの定義より従う. □

4.2 収束列とコーシー列

ヒルベルト空間を扱ううえで避けて通れないのが, 「完備^{かんび}」という概念である. 完備性を定義するための準備として, ある値に収束する数列について議論する.

これから X の点列といった場合, \mathbb{N} で順序付けられた X の加算部分集合, つまり $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$ であり, $i \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$ であるものをいうことにする.

定義 4.2 (収束列) (X, d) を距離空間とする. X の点列 (x_1, x_2, \dots) が $x \in X$ に**収束する (converge)** とは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n > N$ に対し, $d(x_n, x) < \varepsilon$ となることをいう.

このときの x のことを**極限^{きょくげん} (limit)** という. **収束先^{しゅうそくさき}**ということもある.

また、 X の点列 (x_1, x_2, \dots) が**収束列** (convergent sequence) であるとは、点列がある $x \in X$ に収束することをいう。

記号 \lim を用いると、点列 (x_i) が x に収束することを

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

とかける。

収束列の極限はただ一つに定まる。実際、 X の点列 (x_i) の極限が x と x' の2つあったとすると、

$$\begin{aligned} d(x, x') &\leq d(x, x_n) + d(x_n, x) \quad (\text{三角不等式}) \\ &= d(x_n, x) + d(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

であるので、 $x = x'$ である (定義 4.1)。

定義 4.3 (コーシー列) (X, d) を距離空間とする。 X の点列 (x_1, x_2, \dots) が**コーシー列** (Cauchy sequence) であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して、任意の $n, m > N$ に対し、 $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ となることをいう。

記号 \lim を用いると、コーシー列の定義は $\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$ とかける。

収束列の定義とコーシー列の定義はよく似ているが、前者は収束先 $x \in X$ の存在を要請しているのに対し、後者はそうでない。収束列とコーシー列には、次のような関係がある。

定理 4.2 距離空間の収束列は常にコーシー列である。

証明 (x_i) を収束列、その極限を $x \in X$ とする。定義より、任意の $\delta > 0$ に対し、ある $N > \mathbb{N}$ が存在して、任意の $n > N$ に対し、 $d(x_n, x) < \delta$ である。すると、任意の $m, n > N$ に対し、

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x) + d(x, x_n) \quad (\text{三角不等式}) \\ &= d(x_m, x) + d(x_n, x) \\ &< 2\delta \end{aligned}$$

である。 $\delta := \varepsilon/2$ とおけば、コーシー列の条件 (定義 4.3) が成立する。 □

距離空間において、すべての収束列はコーシー列であるが、その逆は必ずしも成立しない。コーシー列が収束列でない例をいくつか挙げる。

例 \mathbb{Q} の点列 $(1, 1.4, 1.41, 1.414, \dots)$ は明らかにコーシー列である。しかし、この点列の収束先は $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ であり、 \mathbb{Q} の収束列でない。

例 开区間 $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ の点列 $(0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, \dots)$ は明らかにコーシー列である。しかし、この点列の収束先は $0 \notin (0, 1)$ であり、 $(0, 1)$ の収束列でない。

4.3 距離空間の完備性

定義 4.4 距離空間 (X, d) において、任意のコーシー列が収束列であるとき、**完備** (complete) であるという。このとき、 (X, d) のことを**完備距離空間** (complete metric space) という。

命題 4.3 (実数の完備性) 実数全体の集合 \mathbb{R} は完備である。

証明 実数を、有理数列のうちコーシー列であるものの同値類 (定義 1.23) として公理的に構成することでわかる。 \square

定義 4.5 (閉包) (X, d) を距離空間、 $\mathcal{D} \subset X$ を部分集合とする。 \mathcal{D} に属するすべての収束列の極限からなる集合を \mathcal{D} の**閉包** (closure) ^{へいほう} といい、 $\text{Cl}(\mathcal{D})$ とかく。つまり

$$\text{Cl}(\mathcal{D}) := \{x \in X \mid \exists (x_i) \subset \mathcal{D} \text{ s.t. } \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_i, x) = 0\} \quad (19)$$

$x \in \mathcal{D}$ であることと $x \in \text{Cl}(\mathcal{D})$ であることは、定義上は全く関係ない。

系 4.4 任意の $\mathcal{D} \subset X$ の閉包 $\text{Cl}(\mathcal{D})$ について、 $\mathcal{D} \subset \text{Cl}(\mathcal{D})$ である。

証明 $x \in \mathcal{D}$ とする。 \mathcal{D} の点列 (x, x, x, \dots) は明らかに x に収束するので $x \in \text{Cl}(\mathcal{D})$ である。 \square

次に稠密を定義する。

定義 4.6 (稠密) (X, d) を距離空間とする。部分集合 $A \subset X$ の閉包 $\text{Cl}(A)$ が X に一致

するとき、 A は X の ^{ちゅうみつ}稠密 (dense) な部分集合であるという.

系 4.5 A が X の稠密な部分集合である必要十分条件は、 $x \in X$ の任意の近傍が A と共通部分を持つことである.

証明

□

4.4 ヒルベルト空間

ベクトル空間における完備性について考えてみよう.

V をノルム空間 (定義 3.4) とする. $x, y \in V$ の距離 (定義 4.1) は、 $d(x, y) := \|x - y\|$ で定義できる (命題 4.1). すると、 V の収束列 (定義 4.2) とコーシー列 (定義 4.3) は、以下のように定義できる.

- V の点列 (v_i) が収束列であるとは、 (v_i) がある $v \in V$ に収束する、つまり $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in V$ となることをいう.
- V の点列 (v_i) がコーシー列であるとは、 $\lim_{n, m \rightarrow \infty} = 0$ であることをいう.

これらを用いて、ノルム空間の完備性を定義することができる.

定義 4.7 ノルム空間 V が完備であるとは、 V のコーシー列が収束列であることをいう.

定義 4.8 (バナッハ空間) 完備なノルム空間を **バナッハ空間** (Banach space) とする.

内積空間 (定義 3.1) では、内積から導かれるノルムが存在するのであった. このノルムを用いれば、完備な内積空間というものを定義することができる.

定義 4.9 (ヒルベルト空間) 完備な内積空間を **ヒルベルト空間** (Hilbert space) という.

命題 4.6 実ユークリッド空間 \mathbb{R}^n および複素ユークリッド空間 \mathbb{C}^n はヒルベルト空間である.

§5 関数空間

関数とは、 \mathbb{R} or \mathbb{C} から \mathbb{R} or \mathbb{C} への写像をいうのであった。

これからの議論では \mathbb{C} から \mathbb{C} への関数を扱うが、どちらの \mathbb{C} を \mathbb{R} もしくは (良い) 部分集合 $X \subset \mathbb{C}$ に置き換えてもよい。

5.1 ベクトル空間としての関数空間

命題 5.1 \mathbb{C} から \mathbb{C} への関数全体の集合は、以下で定義される和 $\hat{+}$ とスカラー倍 $\hat{*}$ のもとで、体 \mathbb{K} 上のベクトル空間になる。

• f, g を, $c \in \mathbb{K}$ とする。

- (1) 関数の和 $f \hat{+} g$ は、任意の $x \in \mathbb{C}$ に対して $(f \hat{+} g)(x) = f(x) \hat{+} g(x)$ である関数と定める。
- (2) 関数のスカラー倍 $c \hat{*} f$ は、任意の $x \in \mathbb{C}$ に対して $(c \hat{*} f)(x) = c \hat{*} f(x)$ である関数と定める。

証明 (定義 2.1) の条件を満たすことを示せばよい。 □

5.2 内積空間としての関数空間

定義 5.1 $[a, b] \subset \mathbb{R}$ から \mathbb{C} への **2 乗可積分関数空間** (square integrable function space) L^2 を

$$L^2(a, b) := \left\{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

で定義する。

命題 5.2 2 乗可積分関数空間 $L^2(a, b)$ は、以下で定義される内積 (\bullet, \bullet) に対して内積空間 (定義 3.1) になる。

$$(f, g)_{L^2} := \int_a^b f^*(x)g(x) dx \tag{20}$$

当然ノルム (定義 3.4 と 3.5) も以下のように定義できる。

$$\|f\|_{L^2}^2 := (f, f)_{L^2} = \int_a^b |f(x)|^2 dx \tag{21}$$

§6 線形写像

6.1 線形写像

ふたたびしばらく \mathbb{K} を一般の体 (定義 1.20) とする.

定義 6.1 (線形写像) V, W を体 \mathbb{K} 上のベクトル空間 (定義 2.1) とする⁸⁾. 写像 $f: V \rightarrow W$ が以下を満たすとき, **線形写像** (linear map) あるいは **準同型写像** (homomorphism) という [3, §2.1].

- (1) 任意の $u, v \in V$ に対し, $f(u + v) = f(u) + f(v)$ である.
- (2) 任意の $c \in \mathbb{K}$ および任意の $v \in V$ に対し, $f(c \star v) = c \star f(v)$ である.

V から W への線形写像全体がなす集合を $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ とかく [3, §4.4].

特に, 線形写像 $f: V \rightarrow V$ を **自己準同型写像** (endomorphism) といい, f 全体がなす集合を $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ とかく [3, §2.1, §4.4].

定義 6.2 (同型写像) V, W を体 \mathbb{K} 上のベクトル空間とする. 線形写像 $f: V \rightarrow W$ が可逆である, つまり $f \circ f^{-1} = \text{id}_W$ かつ $f^{-1} \circ f = \text{id}_V$ (恒等写像 (定義 1.10)) となるような $f^{-1}: W \rightarrow V$ が存在するとき, f を (\mathbb{K} 上の) **同型写像** (isomorphism) という.

とくに, 同型写像 $f: V \rightarrow V$ を **自己同型写像** (automorphism) という [3, §2.1].

同型写像とは要するに, 全単射 (定義 1.13) である線形写像のことである.

ベクトル空間 U, V の間に同型写像が存在するとき, U と V を同一のベクトル空間と見做することができる.

定義 6.3 (同型) V, W を体 \mathbb{K} 上のベクトル空間とする. 同型写像 $f: V \rightarrow W$ が存在するとき, V と W は (\mathbb{K} 上に) **同型** (isomorphic) であるといい, $V \cong W$ とかく.

線形写像全体の集合 $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ は, 適切な和とスカラー倍の下でベクトル空間 (定義 2.1) をなす.

8) ここでは V 上の和を $+$, スカラー倍を \star であらわし, W 上の和を $\#$, スカラー倍を \ast であらわす. また, 体 \mathbb{K} 上の和を $+$ であらわす.

系 6.1 $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ は、以下で定義される和 $\hat{+}$ とスカラー倍 $\hat{*}$ のもとで、体 \mathbb{K} 上のベクトル空間になる [3, §4.4].

• $f, g \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, $c \in \mathbb{K}$ とする.

- (1) 和 $f \hat{+} g \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ は、任意の $v \in V$ に対して $(f \hat{+} g)(v) = f(v) \hat{+} g(v)$ である写像と定める.
- (2) スカラー倍 $c \hat{*} f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ は、任意の $v \in V$ に対して $(c \hat{*} f)(v) = c \hat{*} f(v)$ である写像と定める.

定理 6.2 \mathbb{K} 上の n -次元ベクトル空間と \mathbb{K}^n は同型である [3].

証明 \mathbb{K} 上の n -次元ベクトル空間 V の基底 $\{u_1, \dots, u_n\}$ をひとつとる. 写像 $f: \mathbb{K}^n \rightarrow V$ を

$$f: \mathbb{K}^n \ni {}^t(c_1 \ \cdots \ c_n) \mapsto c_1 u_1 + \cdots + c_n u_n \in V$$

と定めると、これは同型写像である. 実際、 $\{u_1, \dots, u_n\}$ は V を生成する (定義 2.6) から f は全射であり、基底による展開係数は一意であるから f は単射である. f が線形であることも明らかである. \square

6.2 像と核

定義 6.4 (像) $f: V \rightarrow W$ を線形写像とする. W の部分集合

$$\text{Im } f := \{f(v) \in W \mid v \in V\} \quad (22)$$

を f の^{ぞう}像 (image) という.

$\text{Im } f$ の次元 $\text{rank } f := \dim \text{Im } f$ を、 f の^{かいすう}階数 (rank) という [2].

定義 6.5 (核) $f: V \rightarrow W$ を線形写像とする. V の部分集合

$$\text{Ker } f := \{v \in V \mid f(v) = \mathbf{0}_W\} \quad (23)$$

を f の^{かく}核 (kernel) という.

$\text{Ker } f$ の次元 $\text{null } f := \dim \text{Ker } f$ を、 f の^{たい か じ すう}退化次数 (nullity) という [2].

像 $\text{Im } f$ は一般の写像についても定義できた (定義 1.7) が、核 $\text{Ker } f$ は線形写像特有の概念である.

命題 6.3 $f: V \rightarrow W$ を線形写像とする.

(1) f の像 $\text{Im } f$ は, W の部分ベクトル空間である.

(2) f の核 $\text{Ker } f$ は, V の部分ベクトル空間である.

証明 $\text{Im } f$ と $\text{Ker } f$ がそれぞれ, 部分ベクトル空間であることの必要十分条件 (定理 2.2) を満たすことを確認すればいい. □

定理 6.4 V, W を有限次元のベクトル空間とする. 線形写像 $f: V \rightarrow W$ の像と核について, $\text{Im } f + \text{null } f = \dim V$ が成り立つ [2, §5.1].

証明 $\text{Ker } f$ の基底を x_1, \dots, x_n とし, x_{n+1}, \dots, x_{n+m} を $f(x_{n+1}) = y_1, \dots, f(x_{n+m}) = y_m$ (y_1, \dots, y_m は $\text{Im } f$ の基底) となるようにとる. このとき x_1, \dots, x_{n+m} が V の基底になる.

まず, x_1, \dots, x_{n+m} は一次独立であることを示す.

$$c_1 x_1 + \dots + a_n x_n + c_{n+1} x_{n+1} + \dots + c_{n+m} x_{n+m} = \mathbf{0}$$

とおく. これに線形写像 f を施すと,

$$c_{n+1} y_1 + \dots + c_{n+m} y_m = \mathbf{0}$$

となり, y_1, \dots, y_m は一次独立であるから $c_{n+1} = \dots = c_{n+m} = 0$ である. したがって

$$c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = \mathbf{0}$$

であるから $c_1 = \dots = c_n = 0$ である. よって $c_1 = \dots = c_{n+m} = 0$ がいえた.

次に x_1, \dots, x_{n+m} は V を生成することを示す. 任意の $x \in V$ をとる. $f(x) \in \text{Im } f$ であるので, $\text{Im } f$ の基底を用いて

$$f(x) = c_{n+1} y_1 + \dots + c_{n+m} y_m$$

とかける. $y_i = f(x_{n+i})$ を用いると

$$f(x - c_{n+1} x_{n+1} - \dots - c_{n+m} x_{n+m}) = \mathbf{0}$$

であるので, $x - c_{n+1} x_{n+1} - \dots - c_{n+m} x_{n+m} \in \text{Ker } f$ である. よって

$$x - c_{n+1} x_{n+1} - \dots - c_{n+m} x_{n+m} = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$$

とかける. この式を変形すれば, x が x_1, \dots, x_{n+m} の線形結合であらわされた. □

§7 双対空間

7.1 双対空間

定義 7.1 (線形汎関数) V を \mathbb{K} 上のベクトル空間 (定義 2.1) とする。線形写像 (定義 6.1) $f: V \rightarrow \mathbb{K}$ を **線形形式** (linear form) あるいは **線形汎関数** (linear functional) という。

例 $V = \mathbb{R}^3$ (3次元ユークリッド空間) とする。 \mathbb{R}^3 のベクトルをその第1成分にうつす写像 $f: v \mapsto v_1 \in \mathbb{R}$ は V の線形汎関数である。

定義 7.2 (双対空間) V 上の線形汎関数全体の集合

$$V^* := \{f: V \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ は線形汎関数}\} \quad (24)$$

を V の **双対空間** (dual space) という [3, §4.1]。

命題 7.1 ベクトル空間 V の双対空間 V^* は、ベクトル空間をなす [3, §4.1]。

証明 V^* の元が、系 6.1 で定義される和とスカラー倍について、定義 2.1 の公理を満たすことを示せばよい。□

定義 7.3 (双対基底) V を \mathbb{K} 上の有限次元ベクトル空間、 x_1, \dots, x_n を V の基底とすると、各 $i = 1, \dots, n$ に対し

$$f_i(x_j) = \delta_{i,j} \quad (\text{定義 1.25}) \quad (25)$$

を満たす線形汎関数 $f_i: V \rightarrow \mathbb{K}$ がただひとつ存在する。このとき、 f_1, \dots, f_n は V^* の基底になる。

eq. (25) で定義される f_1, \dots, f_n を x_1, \dots, x_n の **双対基底** (dual basis) という。

このような定義が可能であることについては証明を要するが、ここでは省略する。

例 $V = \mathbb{R}^n$ とし、ある $a \in V$ をとる。線形汎関数 $f_a: V \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f_a: V \ni v \mapsto {}^t a \cdot v \in \mathbb{R}$$

で定める。 \mathbb{R}^n の標準基底 e_1, \dots, e_n に対する双対基底は、 f_{e_1}, \dots, f_{e_n} である。これは行ベクトル ${}^t e_1, \dots, {}^t e_n$ とみることができる。

7.2 零化空間

定義 7.4 (零化空間) V をベクトル空間、 V^* をその双対空間とする。 V の部分ベクトル空間 W に対し、

$$W^\perp := \{f \in V^* \mid f(W) = \{0\}\} \quad (26)$$

を W の^{れい か けう かん}零化空間 (annihilator) という [3, §4.2]。

命題 7.2 部分ベクトル空間 $W \subset V$ の零化空間 W^\perp は、 V^* の部分ベクトル空間である。

証明 写像 i^* を、線形汎関数 $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ を W に制限する写像と定める：

$$i^*: V^* \ni f \mapsto f|_W \in W^*$$

このとき、任意の $f, g \in V^*$ および $c \in \mathbb{R}$ について $i^*(f + g) = i^*(f) + i^*(g)$ かつ $i^*(cf) = c \cdot i^*(f)$ であるので、 i^* は線形写像である。すると $W^\perp = \text{Ker}(i^*: V^* \rightarrow W^*)$ (定義 6.5) とかけるので、 W^\perp は V^* の部分ベクトル空間である。 \square

7.3 内積空間における線形汎関数

内積は線形汎関数の一種である。

命題 7.3 V を内積空間 (定義 3.1)、 $u \in V$ をあるベクトルとする。任意のベクトル $v \in V$ に対して内積 (u, v) を与える写像

$$(u, \bullet): V \ni v \mapsto (u, v) \in \mathbb{R} \quad (27)$$

は線形汎関数である。

証明 内積の線形性より (u, \bullet) が線形なのは明らかである。 \square

§8 演算子

8.1 演算子とは

定義 8.1 (演算子) $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ を \mathbb{C} 上のヒルベルト空間 (定義 4.9) とする. 部分ベクトル空間 (定義 2.2) \mathcal{A} から \mathcal{H}' への写像 (定義 1.6)

$$\hat{A}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}'$$

のことを, \mathcal{H} から \mathcal{H}' への **演算子** (operator) または **作用素** という.

定義 8.2 (演算子の定義域) \mathcal{A} のことを \hat{A} の **定義域** (domain) といい, $D(\hat{A})$ などとかく.

f を \mathcal{H} から \mathcal{H}' への写像としたとき, 任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して $f(x)$ が定義されていなければいけなかった. 言い換えれば, 定義域が \mathcal{H} 全体である. それに対して, \mathcal{H} から \mathcal{H}' への演算子 \hat{A} は, 任意の $x \in \mathcal{H}$ に対して $\hat{A}(x)$ が定義されている必要はなく, 部分ベクトル空間 $D(\hat{A})$ の元に対して定義されていれば十分である.

定義 8.3 (演算子の一致) $\hat{A}, \hat{B}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ を演算子とする. $D(\hat{A}) = D(\hat{B})$ かつ任意の $x \in D(\hat{A})$ に対し $\hat{A}(x) = \hat{B}(x)$ であるとき, 演算子 \hat{A} と \hat{B} は一致するという.

2つの写像 f, g において, 定義域 (もしくは終域) が一致しない場合, 異なる写像とみなすのであった. 同様に, 2つの演算子 \hat{A}, \hat{B} の定義域 $D(\hat{A}), D(\hat{B})$ が一致しない場合, 違う演算子とみなす.

8.2 線形演算子

ベクトル空間上の写像として, 線形写像 (定義 6.1) というものを考えることができた. 同じように, 線形な演算子を考える.

定義 8.4 (線形演算子) \mathbb{C} 上のヒルベルト空間 \mathcal{H} から \mathcal{H}' への演算子 \hat{A} は, 次の性質を満たすとき, **線形演算子** (linear operator) という.

- 任意の $x, y \in \mathcal{H}$, 任意の $a, b \in \mathbb{C}$ に対し,
- (1) (線形性) $\hat{A}(ax + by) = a\hat{A}(x) + b\hat{A}(y)$ である.

量子力学において、演算子が線形であることは本質的である。

8.3 エルミート演算子

References

集合論

- [1]内田 伏一. 集合と位相 = SET THEORY & GENERAL TOPOLOGY. 増補新装版. 数学シリーズ. 裳華房, 2020. URL: <https://ndlsearch.ndl.go.jp/books/R100000002-I030289647>.

線形代数

- [2]三宅 敏恒. 線形代数学：初歩からジョルダン標準形へ. 培風館, 2008. URL: <https://ndlsearch.ndl.go.jp/books/R100000002-I000009981838>.
- [3]斎藤 毅. 線形代数の世界：抽象数学の入り口. 大学数学の入門; 7. 東京大学出版会, 2007. URL: <https://ndlsearch.ndl.go.jp/books/R100000002-I000009154043>.

□□

索引

ア行

演算子, 34

カ行

階数, 30

核, 30

逆像, 6

共通部分, 4

距離空間, 24

恒等写像, 6

サ行

作用素, 34

自己準同型写像, 29

自己同型写像, 29

制限, 8

線形演算子, 34

線形形式, 32

準同型写像, 29

線形写像, 29

線形汎関数, 32

全射, 7

全単射, 7

像, 30

双対基底, 32

双対空間, 32

タ行

退化次数, 30

単射, 7

中線定理, 22

稠密, 27

直和, 5, 16

直交補空間, 20

定義域, 34

同型, 29

同型写像, 29

ナ行

内積, 19

内積空間, 19

ハ行

半双線形, 19

非交和, 5

標準内積, 20

包含写像, 7

ラ行

零化空間, 33

ワ行

和集合, 4