ベクトル空間

内積

数ベクトルの内積

実ベクトルの場合　実ベクトル$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$と$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$の内積は,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := ax + by + cz \tag{1}$$

で与えられる．内積を使うと，$\boldsymbol{x}$の“長さ”は

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} \tag{2}$$

とかける．式 2 を，ベクトル$\boldsymbol{x}$の **ノルム** という．

複素ベクトルの場合　次に，複素ベクトル$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$と$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$の内積について考えてみよう．たとえば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := ax + by + cz \tag{3}$$

と定義する．すると，$\boldsymbol{x}$の“長さ”は

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{4}$$

である．ところが, $x^2 + y^2 + z^2$は複素数である．ふつう複素数の$\sqrt{\quad}$はとれないので，これでは困る．

そこで，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$が実数，しかもプラス（またはゼロ）になるような内積を考えよう．たとえば

$$x^*x+y^*y+z^*z=|x|^2+|y|^2+|z|^2 \tag{5}$$

は実数，しかもマイナスにならない．

$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$が 式 5 のようになる内積は,

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}:=a^*x+b^*y+c^*z \tag{6}$$

である．そこで，複素ベクトルについては 式 6 を内積の定義として考えよう．

一般のベクトルの内積

前節で扱った内積（とくに複素数ベクトルについてのもの）を一般化する．

以下の条件を満たすものを **内積** (*inner product*)という．

1. $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})^*$．つまり，順番を逆にすると複素共役になる．
2. $(\boldsymbol{x},a\boldsymbol{y}+b\boldsymbol{z})=a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+b(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$．
3. $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geq 0$．特に，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$であるのは$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$に限る．

注意　内積の左側はふつうの分配法則だが，右側は

$$(a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=a^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+b^*(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \tag{7}$$

である．特に，左側のベクトルに係数をかけるときは,

$$c(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(c^*\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \tag{8}$$

である．

内積の具体例

3 次元複素ユークリッド空間$\mathbb{C}^3$を考える． ベクトル$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$の内積を，前に扱ったように

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{3} (x_i)^* y_i \tag{9}$$

としよう． これが内積の定義をみたすことはすぐわかる．

たとえば，$\boldsymbol{x} = (5i, 3, 1-i)$，$\boldsymbol{y} = (2, i, 3+i)$とすると，内積は

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= (5i)^* \cdot 2 + 3i + (1-i)^*(3+i) \\ &= (-5i) \cdot 2 + 3i + (1+i)(3+i) \\ &= -10i + 3i + (3+4i) \\ &= 2 - 3i\end{aligned} \tag{10}$$

である． 一方，内積の順番を逆にすると，

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 3 + 3i \tag{11}$$

であるから，注意しなくてはならない．

また，ベクトル$\boldsymbol{x}$のノルムは

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}\| &= \sqrt{|5i|^2 + |3|^2 + |1-i|^2} \\ &= \sqrt{25 + 9 + 2} = \sqrt{36} = 6\end{aligned} \tag{12}$$

と計算できる．[1] ノルムというのはベクトルの長さであるから，もちろん正の実数（or 0）になる．

---

[1]てきとうに数字をきめたらうまくいった

次に，ベクトル$\boldsymbol{x}$をi倍したものの内積を考えてみよう． $i \cdot \boldsymbol{x} = (-5, 3i, 1+i)$であるから，

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= (-5)^* \cdot 2 + (3i)^* \cdot i + (1+i)^*(3+i) \\
&= -10 + (-3i)i + (1-i)(3+i) \\
&= -10 + 3 + (4-2i) \\
&= -3 - 2i
\end{aligned} \tag{13}$$

ところが，式 10 と 式 13 を見くらべると

$$(i\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{14}$$

になっている．つまり，

$$(c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = c^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{15}$$

なのである． 左からスカラーが出てくると，複素共役になる．

その一方で，

$$(\boldsymbol{x}, i\boldsymbol{y}) = i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{16}$$

であることもわかる（式 11 と見比べる）． つまり，右からスカラーが出てきても複素共役にはならない．

内積では，右と左とでスカラー倍の性質が変わってしまうのである．ベクトルのノルム＝長さを実数にするために, 定義の段階で対称性を捨てたのでしかたがない．