ベクトル空間

内積

数ベクトルの内積

実ベクトルの場合　実ベクトル$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$と$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$の内積は,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := ax + by + cz \tag{1}$$

で与えられる．内積を使うと，$\boldsymbol{x}$の“長さ”は

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} \tag{2}$$

とかける．式 2 を，ベクトル$\boldsymbol{x}$の **ノルム** という．

複素ベクトルの場合　次に，複素ベクトル$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$と$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$の内積について考えてみよう．たとえば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := ax + by + cz \tag{3}$$

と定義する．すると，$\boldsymbol{x}$の“長さ”は

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{4}$$

である．ところが, $x^2 + y^2 + z^2$は複素数である．ふつう複素数の$\sqrt{\quad}$はとれないので，これでは困る．

そこで，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}$が実数，しかもプラス（またはゼロ）になるような内積を考えよう．たとえば

$$x^* x + y^* y + z^* z = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 \tag{5}$$

は実数，しかもマイナスにならない．

$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}$が 式 5 のようになる内積は，

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} := a^* x + b^* y + c^* z \tag{6}$$

である．そこで，複素ベクトルについては 式 6 を内積の定義として考えよう．

一般のベクトルの内積

前節で扱った内積（とくに複素数ベクトルについてのもの）を一般化する．

以下の条件を満たすものを **内積** (*inner product*)という．

1. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})^*$．　つまり，順番を逆にすると複素共役になる．
2. $(\boldsymbol{x}, a\boldsymbol{y} + b\boldsymbol{z}) = a(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + b(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$.
3. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$．　特に，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$であるのは$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$に限る．

注意　内積の左側はふつうの分配法則だが，　右側は

$$(a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = a^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + b^*(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \tag{7}$$

である．特に，左側のベクトルに係数をかけるときは，

$$c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (c^* \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \tag{8}$$

である．