

ベクトル空間

内積

数ベクトルの内積

実ベクトルの場合 実ベクトル $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と $a = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ の内積は,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := ax + by + cz \quad (1)$$

で与えられる. 内積を使うと, x の“長さ”は

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} \quad (2)$$

とかける. 式 2 を, ベクトル x の ノルム という.

複素ベクトルの場合 次に, 複素ベクトル $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と $a = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ の内積について考えてみよう. たとえば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := ax + by + cz \quad (3)$$

と定義する. すると, x の“長さ”は

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4)$$

である. ところが, $x^2 + y^2 + z^2$ は複素数である. ふつう複素数の $\sqrt{\quad}$ はとれないので, これでは困る.

そこで、 $x \cdot x$ が実数、しかもプラス（またはゼロ）になるような内積を考えよう。たとえば

$$x^*x + y^*y + z^*z = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 \quad (5)$$

は実数、しかもマイナスにならない。

$x \cdot x$ が式 5 のようになる内積は、

$$a \cdot x := a^*x + b^*y + c^*z \quad (6)$$

である。そこで、複素ベクトルについては式 6 を内積の定義として考えよう。

一般のベクトルの内積

前節で扱った内積（とくに複素数ベクトルについてのもの）を一般化する。

以下の条件を満たすものを **内積** (*inner product*) という。

1. $(x, y) = (y, x)^*$. つまり、順番を逆にすると複素共役になる。
2. $(x, ay + bz) = a(x, y) + b(x, z)$.
3. $(x, x) \geq 0$. 特に、 $(x, x) = 0$ であるのは $x = \mathbf{0}$ に限る。

注意 内積の左側はふつうの分配法則だが、右側は

$$(ax + by, z) = a^*(x, z) + b^*(y, z) \quad (7)$$

である。特に、左側のベクトルに係数をかけるときは、

$$c(x, y) = (c^*x, y) \quad (8)$$

である。