6.1. 自反！

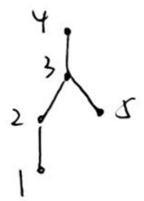
5. $\{(a,b),(b,c),(a,c)\}$, $\{(a,b),(c,a),(c,b)\}$, $\{(a,b),(a,c),(c,b)\}$

6. 等价：满足自反、对称、传递；偏序：满足自反、反对称、传递

$\therefore \forall (x,y)\in R$, 有 $(y,x)\in R$, 且此时必有 $x=y$,

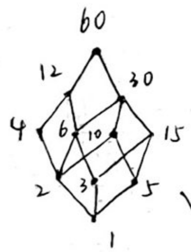
$\therefore R=\{(x,x)\mid x\in A\}$.

14.



24. 偏序关系：$\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,10),(1,12),(1,15),(1,30),$
$(1,60),(2,4),(2,6),(2,10),(2,12),(2,30),(2,60),(3,6),(3,12),(3,15),$
$(3,30),(3,60),(4,12),(4,60),(5,10),(5,15),(5,30),(5,60),(6,12),(6,30),$
$(6,60),(10,30),(10,60),(12,60),(15,30),(15,60),(30,60)\}\cup\{(x,x)\mid x\in A\}$.

哈斯图：



不是线性序、例如 $3,4\in R$，但 $3\nmid 4$，且 $4\nmid 3$.

6.2

16. 无最大元、最小元 2.

26.
(a) 5 ; (b) 1, 2, 3 ; (c) 5 ; (d) 3.

33.

6.3

14. 任意 $x,y\in[a,b]$，均有 $x\wedge y\le x,y\le x\vee y$，且 $a\le x\le b$，$a\le y\le b$，

∴ 由上、下确界定义，$a\le x\wedge y\le x,y\le x\vee y\le b$，即 $x\wedge y, x\vee y\in[a,b]$，

∵ $\forall x\in[a,b]$，有 $x\in L$，∴ $[a,b]$ 是 L 的子集，

综上，$[a,b]$ 满足子格的定义，是 L 的子格.

18. 设两个不同元素 a,b，满足 $a<b$.

由定义，$0\le \min(a,b)<\max(a,b)\le I$，其中 $\min(a,b)=a$，$\max(a,b)=b$，

∴ $0<I$，即 $0\ne I$.

24. $a\vee(a'\wedge b)=(a\vee a')\wedge(a\vee b)=I\wedge(a\vee b)=a\vee b$.

$a\wedge(a'\vee b)=(a\wedge a')\vee(a\wedge b)=0\vee(a\wedge b)=a\wedge b$.

27. $D_{42}=\{1,2,3,6,7,\cancel{42}\ 14,21,42\}$

$1'=42$，$2'=21$，$3'=14$，$6'=7$，$7'=6$，$14'=3$，$21'=2$，$42'=1$.

33. 任取 L 中两个元素 a,b，不妨设 $a<b$，则有 $0\le a<b\le I$.

若 $a=a'$，则 $\cancel{a\wedge a'=}$ $a\vee a'=a\vee a=a<b$，不满足 $a\vee a'=I\ge b$ 的前提；

若 $b=b'$，则 $b\wedge b'=b\wedge b=b>a$，不满足 $\cancel{a}\ b\wedge b'=0\le a$ 的前提.

∴ 对于至少有2个元素的有界格 L，任何元素都不是它自身的补.

6.4.

18. $b\wedge(a\vee(a'\wedge(b\vee b'))) = b\wedge(a\vee(a'\wedge I)) = b\wedge(a\vee a') = b.$

20. $((a\vee c)\wedge(b'\vee c))' = (a\vee c)'\vee(b'\vee c)' = (a'\wedge c')\vee(b\wedge c')$

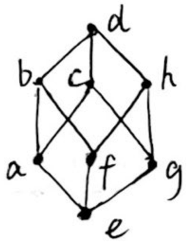
$$= (a'\vee b)\wedge(a'\vee c')\wedge(c'\vee b)\wedge c'$$

由吸收律: $(a'\vee c')\wedge(c'\vee b)\wedge c' = c'$,

$\therefore ((a\vee c)\wedge(b'\vee c))' = (a'\vee b)\wedge c'$.

24. 最小元: e ; 最大元: d.

25. 偏序集(A,R)哈斯图如下:



其中任意两元素均有上确界和下确界,因此(A,R)是格;
(A,R)有最小元e,最大元d,是有界格,且每个元素都有补元.
$a'=h$, $f'=c$, $g'=b$, $b'=g$, $c'=f$, $h'=a$, $e'=d$, $d'=e$.

26. 令$S=\{x,y,z\}$, 则 $(P(S),\subseteq)$为布尔代数.

下证(A,R)与$(P(S),\subseteq)$同构:

定义双射φ,使$\varphi(e)=\phi$, $\varphi(a)=\{x\}$, $\varphi(f)=\{y\}$, $\varphi(g)=\{z\}$,
$\varphi(b)=\{x,y\}$, $\varphi(c)=\{x,z\}$, $\varphi(h)=\{y,z\}$, $\varphi(d)=\{x,y,z\}$,

从而(A,R)与$(P(S),\subseteq)$同构, (A,R)为布尔代数.

6.5.

4.

x	y	z	$p(x,y,z)=(x\wedge y)\vee(x'\wedge(y\wedge z'))$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

8. $[(x\wedge z)\vee(y'\vee z)']\vee[(y\wedge z)\vee(x\wedge z')]$

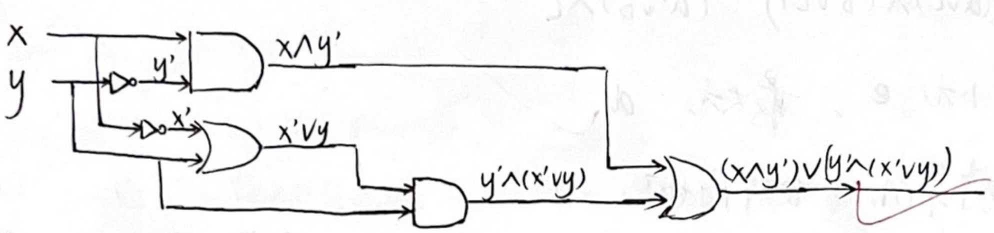
$=[(x\wedge z)\vee(y\wedge z')]\vee(y\wedge z)\vee(x\wedge z') = [(y\wedge z')\vee(y\wedge z)]\vee[(x\wedge z')\vee(x\wedge z)]$

$=[y\wedge(y\vee z)\wedge(z'\vee y)]\vee[x\wedge(x\vee z)\wedge(x\vee z')] = x\vee y.$

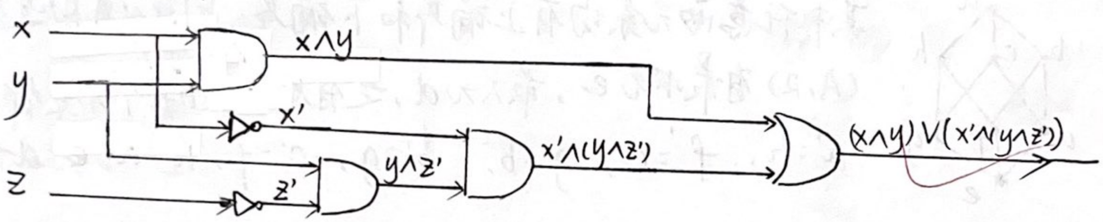
14. 原式 $=((x'\wedge y'\wedge z')\wedge w)\vee((x'\wedge y'\wedge z')\wedge w')\vee((x'\wedge y\wedge z')\wedge w')\vee((x'\wedge y\wedge z')\wedge w)$

$=(x'\wedge y'\wedge z')\vee(x'\wedge y\wedge z') = x'\wedge z'.$

16. (a)



(b)



18. $(x\vee(y\wedge z))'\vee z'$

6.6.

2.

	y'	y
x'	1	0
x	1	0

4.

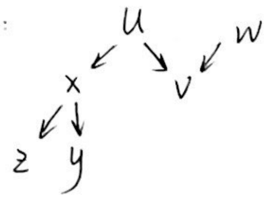
	y'	y'	y	y
x'	0	1	1	1
x	0	0	1	0
	z'	z	z	z'

10. $x'\vee y'$.

$x'\vee(x\wedge y')$

7.1.

8. 关系图:



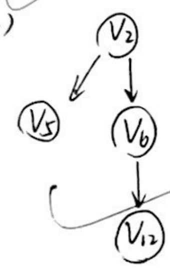
从中可见，u到w没有路径，w、v、x、z、y到u没有路径，从而不存在一个节点，到其他所有节点都有且只有一条路. 关系R不是树.

9. (a) $v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}$.

(b) $v_{10}, v_{11}, v_5, v_{12}, v_7, v_{15}, v_{14}, v_9$.

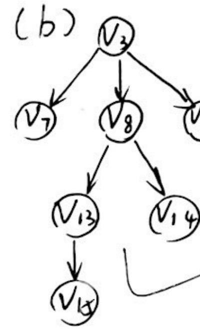
10. (a) v_7, v_9. (b) v_{13}, v_{14}, v_{15}.

11. (a)



$T(v_2)=\{(v_2,v_5),(v_2,v_6),(v_6,v_{12})\}$.

(b)



$T(v_3)=\{(v_3,v_5),(v_3,v_8),(v_8,v_{13}),(v_{13},v_{15}),(v_8,v_{14}),(v_3,v_9)\}$.

12. (a). 4 (b) 3.

20. n层二叉树的最大节点数为满二叉树的节点数. 第n层有2^n个节点.

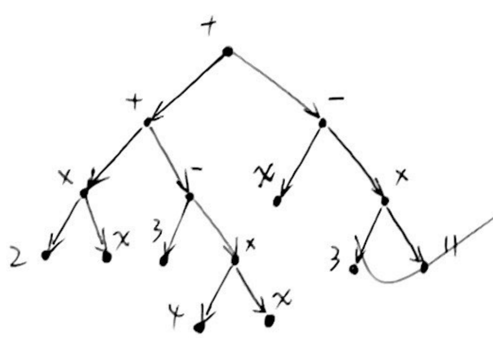
$1+2+\cdots+2^n = \frac{1\times(1-2^{n+1})}{1-2} = 2^{n+1}-1$.

22. 三层完全n-树: v_0节点必有n个子女, 因此第0层节点数为1, 第1层节点数为n, 第一层的每个节点有n个子女或没有子女(叶节点), 设有子女的节点数为m, $(1\le m\le n)$ 因此第二层节点数为$m\cdot n$, 总节点数 $1+n+m\cdot n = 1+(m+1)n$,

令$k=m+1$, 则T的总节点数为$1+kn$ $(2\le k\le n+1)$

7.2

9.

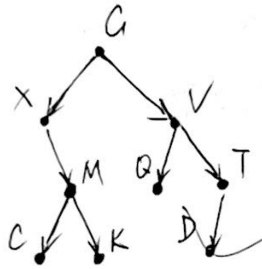


14. 第1层最多2个节点，第2层最多4个节点.

第1层未满 $\quad$ 第1层满

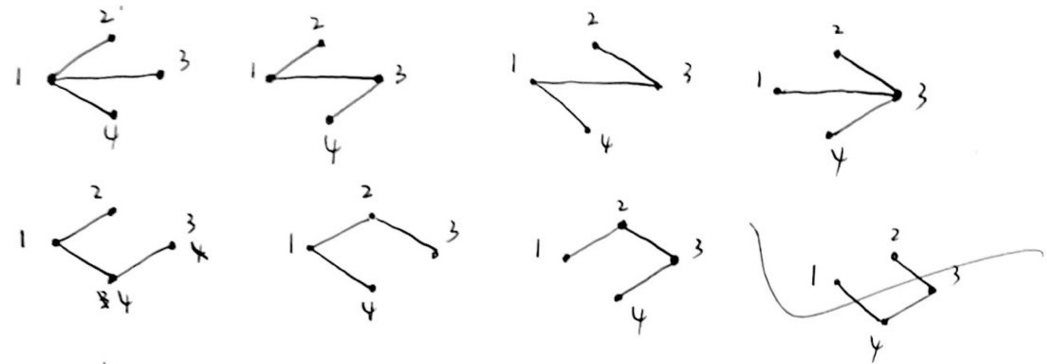
$(2\times(2^2-1))+(2^4-1)=21$. 有21个不同的二叉定位树.

18.

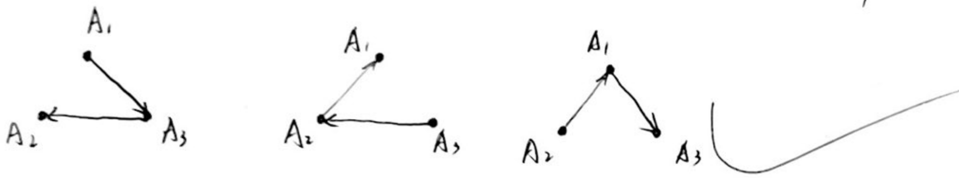


7.4

14.



18.



7.5.

4. 令 H=(U, T), 为从E出发的最小生成树. 初始状态 U={E}, T={ }.

① (E,C) = 2, U={E,C}, T={(E,C)};

② (C,A) = 2, U={E,C,A}, T={(E,C), (C,A)};

③ (C, D) ~~=(A,B)~~ = 3, U={E, C, A, ~~B~~, D}, T={(E,C), (C,A), (C,D)~~, (A,B)~~};

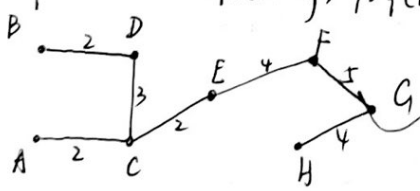
④ (D, B) = 2, U={E, C, A, D, B}, T={(E,C), (C,A), (C,D), (D,B)};

⑤ (E, F) = 4, U={E, C, A, D, B, F}, T={(E,C), (C,A), (C,D), (D,B), (E,F)},

⑥ (F, G) = 5, U={E, C, A, D, B, F, G}, T={(E,C), (C,A), (C,D), (D,B), (E,F), (F,G)};

⑦ (G, H) = 4, U={E, C, A, D, B, F, G, H}, T={(E,C), (C,A), (C,D), (D,B), (E,F), (F,G), (G,H)}.

最小生成树:



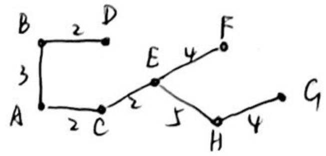
11. ① (A,C)=(C,E)=(B,D)=2, U={A, C, B, D, E}, E={(A,C), (B,D), (C,E)},

② (A,B)=(C,D)=3, U={A, C, B, D, E}, E={(A,C), (B,D), (A,B), (C,E)}.

③ (B,C)=(E,F)=(H,G)=4, U={A, C, B, D, E, F, H, G}, E={(A,C), (B,D), (A,B), (C,E), (E,F), (H,G)}.

④ (F, G) = (E, H) = 5, U={A, C, B, D, E, F, H, G}, E={(A,C), (B,D), (A,B), (C,E), (E,F), (H,G), (E,H)},

最小生成树:

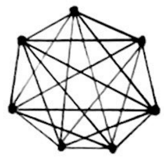


8.1.

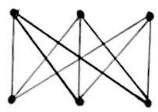
10. a度数为4, b度数为4, c度数为4, d度数为4.

12. ① 5, 4, 7, 5; ② 5, 4, 6, 7, 5; ③ 5, 4, 2, 1, 3, 4, 6, 7, 5.

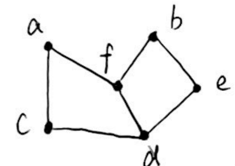
13.



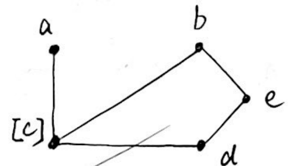
18.



22. (a) G_{e_1}



(b) G_{e_1}:



8.2.

1. 既无欧拉回路也无欧拉路径. a. b. c. d 四个顶点均有奇数度.

2. 既无欧拉回路也无欧拉路径. a, b, d, e 4个顶点均有奇数度.

3. 有欧拉回路. 该图连通且每个节点都有偶数度.

4. 有欧拉路径但无欧拉回路. 节点4, 7有奇数度, 其他节点为偶数度, 且连通.

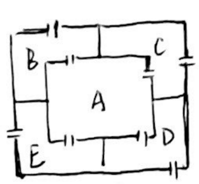
5. 有欧拉路径但无欧拉回路. 奇度节点有2个, 其他均为偶度节点, 且连通.

6. 有欧拉路径但无欧拉回路. 有2个奇度节点, 且为连通图.

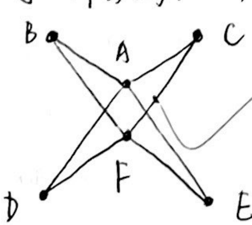
7. 两者均无. 非连通图.

8. 有欧拉回路. 所有节点均有偶数度, 且为连通图.

14.



将该平面图转化为无向图, 若房间连通则两节点有边相连.



图中每个节点均有偶数度, 为欧拉图, 可以经过每条边仅一次地遍历每个节点, 即经过每扇门一次而遍历所有房间.

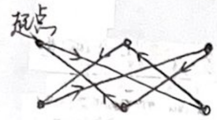
8.3

1. 都没有.

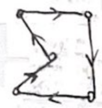
2. 有Hamilton回路: abcda.

3. 都没有. 有路径

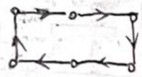
4. 有Hamilton回路.



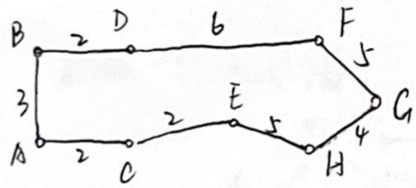
5. 有Hamilton回路.



6. 有Hamilton回路.

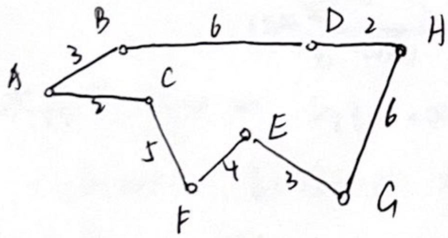


16.



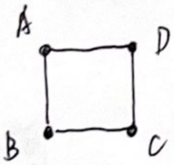
DBFACEHGFD.

17.



FEGHDBACF

20.

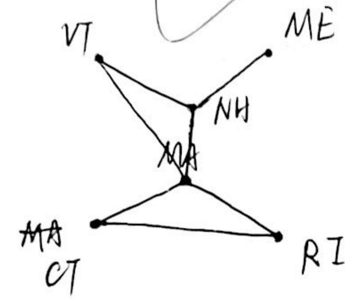


ABCDA既是欧拉回路又是Hamilton回路.

8. 6.

14. $P_G = x(x-1)(x-2)(x-3)$, $\chi(G) = 4$.

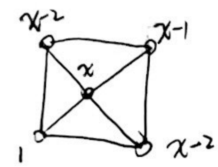
18. 与该地图对应的图:



$P_G = x(x-1)^3 \cdot (x-2)^2$, $\chi(G) = 3$

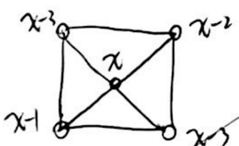
20. 分2种情况:

① 对角节点同色,



有 $x(x-1)(x-2)^2$ 种.

② 对角节点异色.



有 $x(x-1)(x-2)(x-3)^2$ 种.

$P_G = x(x-1)(x-2)^2 + x(x-1)(x-2)(x-3)^2 = x(x-1)(x-2)(x^2-5x+7)$.

$\chi(G) = 3$.

22. 首先, G不含自环或重边, 为简单图. 否则最长回路长度不为奇数.

把G中除去最长回路的顶点分为2个集合: A和B.

A包含所有与C中顶点距离为奇数的顶点, B包含所有与C中顶点距离为偶数的节点. 易得A中任意两顶点不存在边, 可染成同色. 同理, B中所有节点可上同一颜色.

考虑C的上色. C有n个顶点, 所以至少n种颜色才能保证C中所有可能相邻的两顶点颜色一定不同. 由于A, B各有一种颜色, ∴需要再加一种颜色以完成~~染~~染色.

综上, $\chi(G) \le n+1$.

这段证明是让ChatGPT帮我写的，说实话，我自己都没懂这是怎么证出来的，建议谨慎对待

9.1

16. $a*b=ab+2b$, $b*a=ab+2a$. 不满足交换律

$(a*b)*c=(ab+2b)c+2c$, $a*(b*c)=a(bc+2c)+2(bc+2c)$

$=abc+2ac+2bc+4c$,

$(a*b)*c\neq a*(b*c)$, 不满足结合律.

22.

*	a	b	c
a	b	c	a
b	c	b	a
c	a	a	c

24. (a) $b*a=a$, $a*b=c$, 不满足交换律.

(b) $a*(b*c)=a*c=b$.

$(a*b)*c=c*c=b$.

(c) 不是结合运算.

$(a*b)*b=c*b=a$,

$a*(b*b)=a*b=c$, 二者不相等.

25. (a) $c*d=a$, $d*c=a$.

(b) $b*d=c$, $d*b=b$.

(c) $a*(b*c)=a*b=c$, $(a*b)*c=c*c=a$.

(d) 由(b), $*$不满足交换律; 由(c), $*$不满足结合律.

既非交换运算也非结合运算.

26.

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a.

$d*a=(c*b)*a=c*(b*a)=d$.

$d*b=(c*b)*b=c*(b*b)=c$

$d*c=(c*b)*c=c*(b*c)=b$

$d*d=(c*b)*d=c*(b*d)=a$.

9.2

13. $(a*b)*c=(a+b-ab)+c-(a+b-ab)c=a+b+c-ab-bc-ac+abc$

$a*(b*c)=a+(b+c-bc)-a(b+c-bc)=a+b+c-ab-bc-ac+abc$.

在Z上满足结合律;

$a*e=e*a=a+e-ae=a$, $e=0$. 有单位元$e=0$. 是幺半群, 满足交换律.

16. 对于 $\{x \mid x=3k+1, k\in Z^+\}$，乘法满足结合律，是半群.

$x\times e=e\times x=x$，$e=1$，不在集合中，不是幺半群.

乘法满足交换律，该半群是交换的.

18. $(a*a)*b=a*b=c$；　$a*(a*b)=a*c=b$. 不满足结合律，不是半群.

19.

*	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

$c*a=(a*a)*a=a*(a*a)=a*c=b$.

$c*b=(a*a)*b=a*(a*b)=a*\overset{a}{\cancel{b}}=c$.

23. (a) $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=abaccbababc$.

(b) $\gamma\cdot(\alpha\cdot\alpha)=babcabacabac$.

(c) $(\gamma\cdot\beta)\cdot\alpha=babccbaabac$

26. 设 $(S,*)$ 的两个子半群为 $(T,*)$ 和 $(U,*)$，由定义，$T\subseteq S$，$U\subseteq S$，

且对于 $\forall a,b\in T$，有 $a*b\in T$；$\forall c,d\in U$，有 $c*d\in U$.

在集合 $T\cap U$ 中，$\forall m,n\in T\cap U$，有 $m*n\in T$ 且 $m*n\in U$，则 $m*n\in T\cap U$.

$\therefore T\cap U$ 对运算 $*$ 封闭，且有 $T\cap U\subseteq S$. 从而 $(T\cap U,*)$ 是 S 的子半群.

28. 设 $a,b\in T$. 则 a,b 均为含有奇数个 1 的序列.

此时 $a\cdot b$ 中含有偶数个 1，即 $a\cdot b\notin T$，T 对 $\cdot$ 不封闭.

$\therefore (T,\cdot)$ 不是 $(A^*,\cdot)$ 的子半群.

31. 由定义，$\forall a,b\in S_1$，有 $f(a*b)=f(a)*'f(b)$；其中 f 在 $S_1\to S_2$ 处处有定义；

$\forall m,n\in S_2$，有 $g(m*'n)=\underset{f(x*y)}{g(m)}*''f(n)$；其中 g 在 $S_2\to S_3$ 处处有定义；

$\therefore$ 对于任意 $x,y\in S_1$，有 $f(x),f(y)\in S_2$，且 $f(x*y)=f(x)*'f(y)$；

$g(f(x*y))=g(f(x)*'f(y))=g(f(x))*''g(f(y))$，

即 $g\circ f(x*y)=g\circ f(x)*''g\circ f(y)$. 且 $g\circ f$ 在 $S_1\to S_3$ 处处有定义.

从而 $g\cdot f$ 是 S_1 到 S_3 的同态映射.