



**UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA**

**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

# **Análisis de un método de elementos finitos mixtos para el problema de Stokes con densidad variable en formulación pseudoesfuerzo-velocidad**

*Tesis presentada al Programa de Magíster en Matemática, Mención Matemática Aplicada, o Mención Estadística como parte de los requisitos para la obtención del grado de Magíster en Matemática con Mención en Matemática Aplicada de la Universidad del Bío-Bío.*

**Sergio Andrés Caucao Paillán**

Concepción, 2014.

**Análisis de un método de elementos finitos mixtos para el problema de  
Stokes con densidad variable en formulación pseudoesfuerzo-velocidad**

por

**Sergio Andrés Caucao Paillán**

Comisión examinadora:

---

**Dr. Ricardo Oyarzúa**

**Orientador**

**Universidad del Bío-Bío, Chile**

---

**Dr. David Mora Herrera**

**Co-orientador**

**Universidad del Bío-Bío, Chile**

---

**Dr. Gabriel N. Gatica**

**Profesor Informante**

**Universidad de Concepción, Chile**

---

**Dra. Amélie Rambaud**

**Profesor Informante**

**Universidad del Bío-Bío, Chile**

# Análisis de un método de elementos finitos mixtos para el problema de Stokes con densidad variable en formulación pseudoesfuerzo-velocidad.

Sergio Andrés Caucao Paillán

Universidad del Bío-Bío.

Marzo, 2014.

# Agradecimientos

En primer lugar, y en paralelo, quiero agradecer a mi familia, la cual pese a encontrarse en Osorno, periódicamente visitaba y me alentaban a seguir adelante. A mi pareja, Marcela Valdés, quién siempre estuvo a mi lado e hizo de cable a tierra en los momentos difíciles.

A mis dos grandes mentores en el mundo del análisis numérico, Ricardo Oyarzúa y David Mora, por su incansable labor como docentes y asesores, ya que pese a solo tener una formación como profesor en matemática, consiguieron sentar en mí los cimientos de la matemática formal, la computación y herramientas tan indispensables como el idioma Inglés.

Agraceder al proyecto Anillo ACT 1118, el cual fue gestionado por mis profesores guías. Puesto que, gracias a este apoyo pude dedicarme de manera exclusiva al trabajo de mi tesis.

A los profesores informantes, Dra. Amélie Rambaud del Departamento de Matemática de la Universidad del Bío-Bío, y al Dr. Gabriel N. Gatica del Departamento de Ingeniería Matemática de la Universidad de Concepción, por dedicar parte de su tiempo a la revisión de mi tesis.

---

A todos y cada uno de mi amigos del Magister en Matemática Aplicada de la Universidad del Bío-Bío, en particular a mis compañeros de oficina: Jaime Andrade, Felipe Cisterna y Sergio Rifo, con los cuales pasamos horas y días estudiando, compartiendo y debatiendo ideas.

A todos los docentes de la Universidad del Bío-Bío, en particular a los profesores: Juan Bobenrieth, Dante Carrasco, Fernando Miranda y Claudio Vidal. Sinceramente agradezco el conocimiento que compartieron conmigo y mis compañeros.

Este logro, es gracias a todos uds.

# Resumen

En este trabajo, desarrollamos el análisis de error a priori y a posteriori de un método de elementos finitos mixtos para una formulación pseudoefuerzo-velocidad del problema de Stokes con densidad variable  $\rho$  en  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{2, 3\}$ . Dado que la formulación variacional resultante no tiene la estructura dual-mixta estándar, reformulamos el problema continuo como un problema de punto fijo equivalente. De esta forma, aplicamos la teoría de Babuška-Brezzi clásica para probar que el operador asociado  $\mathbb{T}$  está bien definido, y asumiendo que  $\|\frac{\nabla \rho}{\rho}\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)}$  es suficientemente pequeño, mostramos que  $\mathbb{T}$  es una contracción, lo cual implica que la formulación variacional está bien puesta. Bajo hipótesis similares sobre  $\rho$ , probamos estabilidad del problema continuo. Luego, adaptando los argumentos del análisis continuo al caso discreto, establecemos hipótesis adecuadas sobre subespacios de elementos finitos genéricos para asegurar existencia y unicidad del esquema de Galerkin asociado. Una elección particular de espacios de elementos finitos que satisfacen dichas hipótesis es dada por los elementos de Raviart-Thomas de orden  $k \geq 0$  para el pseudoefuerzo y polinomios de grado  $k$  para la velocidad. A su vez, proponemos un estimador de error residual, confiable y eficiente, para nuestro método. La demostración de confiabilidad hace uso de la condición inf-sup global, descomposición de Helmholtz, y propiedades de aproximación local de los operadores de interpolación de Clément y Raviart-Thomas. Por otro lado, desigualdades inversa, técnicas de localización basadas en funciones sobre triángulos y lados, propiedades de aproximación del proyector

---

ortogonal sobre funciones polinomiales a trozos, y resultados de trabajos previos, son las herramientas principales para probar la eficiencia del estimador. Para finalizar, proporcionamos resultados numéricos que ilustran el buen desempeño del método de elementos finitos mixto propuesto, confirmando las propiedades teóricas del estimador a posteriori, y mostrando el comportamiento del algoritmo adaptativo asociado.

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estado del arte . . . . .	1
1.2. Definiciones y notaciones . . . . .	4
<b>2. Análisis a priori de un MEF-mixto para el problema de Stokes con     densidad variable en formulación pseudoesfuerzo-velocidad</b>	<b>7</b>
2.1. Problema continuo . . . . .	7
2.1.1. Problema Modelo . . . . .	8
2.1.2. Formulación Variacional Dual-Mixta . . . . .	9
2.2. Análisis del problema continuo . . . . .	11
2.2.1. Formulación Variacional . . . . .	11
2.2.2. Estabilidad . . . . .	12
2.2.3. Existencia y unicidad de solución . . . . .	15
2.3. El esquema de elementos finitos mixtos . . . . .	18
2.3.1. Preliminares . . . . .	18
2.3.2. Existencia, unicidad y estabilidad del problema discreto . .	20
2.4. Estimación a priori del error . . . . .	22
	V



2.4.1. Aproximación de la presión y el pseudoefuerzo original . . . . .	26
2.5. Elección particular de espacios discretos . . . . .	28
2.5.1. Elementos de Raviart-Thomas . . . . .	29
2.5.2. Elementos de Brezzi-Douglas-Marini . . . . .	31
2.6. Resultados numéricos del análisis a priori . . . . .	33
<b>3. Estimador de error a posteriori residual . . . . .</b>	<b>39</b>
3.1. Preliminares . . . . .	39
3.2. Confiabilidad del estimador de error a posteriori . . . . .	41
3.3. Eficiencia del estimador del error a posteriori . . . . .	49
3.4. Resultados numéricos del análisis a posteriori . . . . .	56
<b>4. Conclusiones y trabajo futuro . . . . .</b>	<b>63</b>
4.1. Conclusiones . . . . .	63
4.2. Resultados de la Tesis . . . . .	64
4.3. Trabajo futuro . . . . .	64

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Estado del arte

La simulación numérica de problemas de flujo de fluidos incompresibles, modelado por las ecuaciones de Stokes, ha sido ampliamente estudiado durante las últimas décadas. Distintas formulaciones (velocidad-presión, vorticidad-velocidad-presión y pseudoefuerzo-velocidad) y diferentes métodos numéricos (métodos conformes y no conformes) han sido introducidos y analizados, todos ellos con diferentes ventajas y desventajas. En particular, el estudio de métodos numéricos para formulaciones basadas en el tensor de esfuerzo y el pseudoefuerzo, para el problema de Stokes, se ha convertido en un área de investigación muy activa durante las últimas décadas (ver por ejemplo [7], [9], [8], [15], [16], [22], [25], [19], [24]), lo anterior se debe a que de esta forma es posible aproximar el tensor de esfuerzo o pseudoefuerzo de manera directa (además de la aproximación de la velocidad y/o presión). Este tipo de formulaciones han sido también extendidas al caso de flujos cuasi-Newtonianos y problemas multifísicos tales como el problema acoplado de Stokes-Darcy (ver por ejemplo [17], [23] y [20]).

Ahora, concerniente al problema de flujo de fluidos estudiado en esta tesis, el

primer trabajo en estudiar métodos de elementos finitos conformes para el problema de Stokes con densidad variable es [5], donde los autores proponen y analizan dos formulaciones variacionales para resolver el problema de flujo de fluidos. La primera es una formulación velocidad-presión la cual produce una formulación tipo punto silla no simétrico, mientras que la segunda es una formulación momento-presión, la cual genera una formulación estándar de punto-silla. Para analizar si la formulación velocidad-presión está bien-puesta, utilizan una generalización de la teoría de Babuška-Brezzi introducida en [28] (ver también [4]) mientras que la teoría clásica de Babuška-Brezzi es aplicada para probar que la formulación momento-presión está bien puesta. Es importante observar que, en ambos casos, la existencia y unicidad de solución de los problemas continuo y discreto son obtenidas asumiendo que  $\frac{\nabla \rho}{\rho}$  no es muy grande.

En esta tesis, desarrollamos los análisis a priori y a posteriori de una formulación tipo pseudoesfuerzo-velocidad para el problema de Stokes con densidad variable estudiado en [5]. Debido a que la formulación resultante no tiene la estructura dual-mixta estándar, reformulamos el problema continuo como un problema equivalente de punto fijo. Entonces, aplicamos la teoría clásica de Babuška-Brezzi para probar que el operador asociado  $\mathbb{T}$  está bien definido, y asumiendo que  $\|\frac{\nabla \rho}{\rho}\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)}$  es suficientemente pequeño, mostramos que  $\mathbb{T}$  es una contracción, lo cual implica que la formulación variacional está bien puesta. Observamos que este supuesto es consistente con lo propuesto en [5]. Luego, adaptamos la teoría desarrollada para el problema continuo al caso discreto, y derivamos condiciones suficientes sobre los subespacios de elementos finitos, los cuales aseguran que el esquema de Galerkin asociado está bien puesto.

Por otro lado, se sabe que para garantizar una convergencia óptima de las soluciones de elementos finitos, especialmente en casos en los que hay singularidades, por lo general se necesita aplicar un algoritmo adaptativo basado en un estimador

de error a posteriori. Dicho estimador es denotado por el término global  $\Theta$ , el cual es expresados en términos del indicador local  $\Theta_T$  definido en cada triángulo  $T$  de una triangulación  $\mathcal{T}_h$ . El estimador  $\Theta$  se dice eficiente (resp. confiable) si existe  $C_{\text{eff}} > 0$  (resp.  $C_{\text{rel}} > 0$ ), independiente de  $h$ , tal que

$$C_{\text{eff}}\Theta + \text{h.o.t.} \leq \|\text{error}\| \leq C_{\text{rel}}\Theta + \text{h.o.t.},$$

donde h.o.t. es una expresión genérica que denota uno o varios términos de alto orden.

En particular en este trabajo introducimos un estimador de error a posteriori confiable y eficiente, de tipo residual, para nuestro esquema mixto, utilizando un espacio de elementos finitos particular.

De aquí en adelante, esta tesis se organiza acorde a la siguiente estructura:

En la Sección 1.2 del Capítulo 1, introducimos las definiciones y notaciones utilizadas a lo largo de esta tesis.

En el Capítulo 2 introducimos y analizamos un método de elementos finitos mixto para el problema de Stokes con densidad variable. En la Sección 2.1 introducimos el problema modelo y derivamos la formulación variacional mixta. En la Sección 2.2 analizamos existencia, unicidad y estabilidad de solución del problema continuo. Para la existencia y unicidad de solución introducimos un problema de punto fijo equivalente y probamos que éste tiene una única solución, asumiendo que  $\|\frac{\nabla \rho}{\rho}\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)}$  es suficientemente pequeño. Bajo supuestos similares probamos que la solución es estable. Luego, en la Sección 2.3 definimos el esquema de Galerkin y derivamos hipótesis generales sobre los espacios de elementos finitos, para asegurar que, por un lado, el esquema discreto está bien puesto, y por otro lado, satisface una estimación de Cea. La elección de subespacios de elementos finitos específicos que satisfacen estos supuestos son introducidos en la Sección 2.5. Finalmente, en la Sección 2.6

proporcionamos un ejemplo numérico, el cual ilustra el buen desempeño del método.

En el Capítulo 3, introducimos y analizamos un estimador de error a posteriori residual para nuestro esquema. En la Sección 3.1 fijamos notaciones y algunos resultados previos. En la Sección 3.2 empleamos la condición inf-sup global, descomposición de Helmholtz, las propiedades de aproximación local de los operadores de Clément y Raviart-Thomas, y asumimos que  $\|\frac{\nabla p}{\rho}\|_{0,\Omega}$  es suficientemente pequeño, para derivar un estimador de error a posteriori confiable. Por otro lado, en la Sección 3.3 aplicamos desigualdades inversas, técnicas de localización basadas en funciones sobre triángulos y lados, y propiedades de aproximación del proyector ortogonal sobre funciones polinomiales a trozos, para probar la eficiencia del estimador. Finalmente, algunos resultados numéricos que ilustran el desempeño del método de elementos finitos mixtos, que confirman la confiabilidad y eficiencia del estimador a posteriori, y que muestran el buen comportamiento del algoritmo adaptativo asociado, son proporcionados en la Sección 3.4.

Finalmente, en el Capítulo 4 se presentan las conclusiones de esta tesis y posibles trabajos a futuro.

## 1.2. Definiciones y notaciones

Dado un campo vectorial  $\mathbf{v} := (v_1, \dots, v_d)^t$ , y un campo tensorial  $\boldsymbol{\tau} := (\tau_{ij})_{i,j=1,\dots,d}$ , con  $d = 2, 3$ , definimos los operadores:

$$\nabla \mathbf{v} = \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right), \text{ y } \mathbf{div} \boldsymbol{\tau} = (\operatorname{div}(\tau_{i1}, \dots, \tau_{id})),$$

donde  $\operatorname{div}$  es el operador divergencia usual actuando sobre un campo vectorial.

Ahora, sea  $\mathcal{O}$  un dominio en  $\mathbb{R}^d$ , con frontera Lipschitz  $\Gamma$ . Para  $r \geq 0$  y  $p \in [1, \infty]$ , denotamos por  $L^p(\mathcal{O})$  y  $W^{r,p}(\mathcal{O})$  los espacios de Lebesgue y Sobolev usuales, dotados

con las normas  $\|\cdot\|_{L^p(\mathcal{O})}$  y  $\|\cdot\|_{W^{r,p}(\mathcal{O})}$ , respectivamente.

Notar que  $W^{0,p}(\mathcal{O}) = L^p(\mathcal{O})$ . Si  $p = 2$ , escribimos  $H^r(\mathcal{O})$  en lugar de  $W^{r,2}(\mathcal{O})$ , y denotamos las respectivas normas por  $\|\cdot\|_{0,\mathcal{O}}$  y  $\|\cdot\|_{r,\mathcal{O}}$ . Definimos además

$$\mathbf{H}^r(\mathcal{O}) := [H^r(\mathcal{O})]^d \quad \text{y} \quad \mathbb{H}^r(\mathcal{O}) := [H^r(\mathcal{O})]^{d \times d}.$$

También, haremos uso del espacio de Hilbert

$$\mathbf{H}(\text{div}; \mathcal{O}) := \{\mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{O}) : \text{div } \mathbf{w} \in L^2(\mathcal{O})\},$$

el cual es estándar en el campo de los problemas mixtos (ver por ejemplo [6] o [26]).

Dotamos este espacio con la norma

$$\|\mathbf{w}\|_{\text{div},\mathcal{O}}^2 = \|\mathbf{w}\|_{0,\mathcal{O}}^2 + \|\text{div } \mathbf{w}\|_{0,\mathcal{O}}^2.$$

El espacio de las funciones matriciales, cuyas filas pertenecen a  $\mathbf{H}(\text{div}; \mathcal{O})$ , será denotado por  $\mathbb{H}(\mathbf{div}; \mathcal{O})$ , y dotado con la norma  $\|\cdot\|_{\mathbf{div},\mathcal{O}}$ , el cuál puede ser caracterizado como

$$\mathbb{H}(\mathbf{div}; \mathcal{O}) := \{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{L}^2(\mathcal{O}) : \mathbf{c}^t \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}(\text{div}; \mathcal{O}), \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^d\}.$$

Observar que si  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}; \mathcal{O})$ , entonces  $\mathbf{div } \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{O})$ .

Luego, por simplicidad, también utilizaremos las notaciones:

$$(u, v)_{\Omega} := \int_{\Omega} u v, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega} := \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\Omega} := \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau},$$

donde  $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau} = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^t \boldsymbol{\tau}) = \sum_{i,j=1}^d \sigma_{ij} \tau_{ij}$ , con  $\boldsymbol{\tau}^t = (\tau_{ji})$  y  $\text{tr } \boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^d \tau_{ii}$ , para algún

tensor  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$  y  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij})$ . Además, denotaremos por

$$\boldsymbol{\tau}^D := \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{d} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{I}$$

al desviador del tensor  $\boldsymbol{\tau}$ , donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad en  $\mathbb{R}^{d \times d}$ . No es difícil ver que

$$\|\boldsymbol{\tau}^D\|_{0,\Omega}^2 = \|\boldsymbol{\tau}\|_{0,\Omega}^2 - \frac{1}{d} \|\text{tr} \boldsymbol{\tau}\|_{0,\Omega}^2, \quad \text{y} \quad \|\text{tr} \boldsymbol{\tau}\|_{0,\Omega} \leq \sqrt{d} \|\boldsymbol{\tau}\|_{0,\Omega}. \quad (1.2.1)$$

Además, dado un entero no negativo  $k$ , denotamos por  $\mathbb{P}_k(\mathcal{O})$  el espacio de polinomios definidos en  $\mathcal{O}$ , de grado  $\leq k$

Además, es claro que:

$$\mathbb{H}(\mathbf{div}; \mathcal{O}) = \mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \mathcal{O}) \oplus \mathbb{P}_0(\mathcal{O}) \mathbf{I}, \quad (1.2.2)$$

donde

$$\mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \mathcal{O}) := \left\{ \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}; \mathcal{O}) : \int_{\mathcal{O}} \text{tr} \boldsymbol{\tau} = 0 \right\}. \quad (1.2.3)$$

Más precisamente, cada  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}; \mathcal{O})$  puede ser descompuesto únicamente como:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_0 + c \mathbf{I}, \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\tau}_0 \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \mathcal{O}) \quad \text{y} \quad c := \frac{1}{d|\mathcal{O}|} \int_{\mathcal{O}} \text{tr} \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}. \quad (1.2.4)$$

Esta descomposición será utilizada más adelante, para analizar la formulación débil de nuestro problema.

Concluimos esta sección mencionando que, a lo largo de esta tesis, frecuentemente utilizaremos la notación  $C$  y  $c$ , con o sin subíndices, barras, tildes o sombreros, para denotar constantes positivas genéricas, independientes del parámetro de discretización.

## Capítulo 2

# Análisis a priori de un MEF-mixto para el problema de Stokes con densidad variable en formulación pseudoesfuerzo-velocidad

### 2.1. Problema continuo

En esta sección introducimos y analizamos una formulación débil dual-mixta para el problema de Stokes con densidad variable analizada en [5]. En particular, discutimos existencia, unicidad y estabilidad de solución. Comenzamos introduciendo el problema modelo.



### 2.1.1. Problema Modelo

En esta tesis consideraremos un fluido viscoso que ocupa un dominio poligonal o poliedral  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , con frontera  $\Gamma = \partial\Omega$ , gobernado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \nu(\rho \nabla \mathbf{u}) - p\mathbf{I} \quad \text{en } \Omega, & -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega \\ \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0 \quad \text{en } \Omega, & \mathbf{u} &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma, & (p, 1)_\Omega &= 0. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Las incógnitas del sistema son el tensor de pseudoefuerzo  $\boldsymbol{\sigma}$ , la velocidad del fluido  $\mathbf{u}$  y la presión  $p$ . A su vez, los datos corresponden a fuerzas externas por unidad de masa dadas por  $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , la viscosidad del fluido  $\nu > 0$ , la cual se asume que es constante, y la función de densidad  $\rho \in H^1(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ , que satisface:

$$\frac{\nabla \rho}{\rho} \in \mathbf{L}^\infty(\Omega) \quad \text{y} \quad 0 < \rho_0 < \rho(x) < \rho_1, \quad \text{c.t.p. en } \Omega, \tag{2.1.2}$$

donde  $\rho_0$  y  $\rho_1$  son constantes positivas.

El modelo en (2.1.1), el cuál es derivado de las ecuaciones de Navier-Stokes completamente estable para fluidos viscosos, están bien justificadas si asumimos los siguientes supuestos (justificaciones sobre el modelo pueden ser encontradas en [12]):

- i) Se considera solo el caso laminar y el término difusivo de segundo orden en el tensor de tensiones viscoso no es considerado.
- ii) El número de Mach es suficientemente pequeño, lo cual implica que el acoplamiento entre la presión y la temperatura puede ser no considerada.

En particular, ii) implica que la ley de estado puede ser elegida como una simple ecuación que vincula la densidad y la temperatura, donde la temperatura es aproximada por una de referencia.

Por otro lado, para reescribir las ecuaciones (2.1.1), como una formulación tipo

pseudoesfuerzo-velocidad, primero observamos que la identidad  $\operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$  en  $\Omega$  implica

$$\rho \operatorname{div} \mathbf{u} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \rho \quad \text{en } \Omega. \quad (2.1.3)$$

Entonces, observando que  $\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} = \nu \rho \operatorname{div} \mathbf{u} - dp$ , la ecuación (2.1.3) implica que la presión puede ser escrita en términos del pseudoesfuerzo y la velocidad, esto es:

$$p = -\frac{1}{d} (\nu \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}) \quad \text{en } \Omega. \quad (2.1.4)$$

De este modo, eliminamos la presión de (2.1.1) y obtenemos el siguiente sistema equivalente de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\nu^{-1}}{\rho} \boldsymbol{\sigma}^D &= \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{d} \left( \mathbf{u} \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \mathbf{I} \quad \text{en } \Omega, & -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{f} \quad \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0 \quad \text{sobre } \Gamma, & (\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}, 1)_\Omega &= -\nu (\mathbf{u} \cdot \nabla \rho, 1)_\Omega. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

### 2.1.2. Formulación Variacional Dual-Mixta

A continuación, introducimos la formulación variacional del problema modelo (2.1.5). Para ello, multiplicamos las ecuaciones (2.1.5) por funciones test adecuadas, integramos por partes y utilizamos la condición de frontera Dirichlet homogénea para obtener el problema variacional:

Hallar  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \in \mathbb{H}(\operatorname{div}; \Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$  tal que  $(\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} + \nu \mathbf{u} \cdot \nabla \rho, 1)_\Omega = 0$ , y

$$\begin{aligned} \nu^{-1} \left( \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma}^D, \boldsymbol{\tau}^D \right)_\Omega + (\operatorname{div} \boldsymbol{\tau}, \mathbf{u})_\Omega - \frac{1}{d} \left( \mathbf{u} \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho}, \operatorname{tr} \boldsymbol{\tau} \right)_\Omega &= 0, \\ (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v})_\Omega &= -(\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega, \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

para todo  $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \mathbb{H}(\operatorname{div}; \Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$ .

Definamos ahora el tensor

$$\boldsymbol{\sigma}_0 := \boldsymbol{\sigma} + \frac{\nu}{d|\Omega|}(\mathbf{u} \cdot \nabla \rho, 1)_\Omega \mathbf{I}. \quad (2.1.7)$$

Es claro que

$$\boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \Omega) \text{ si y sólo si } (\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} + \nu \mathbf{u} \cdot \nabla \rho, 1)_\Omega = 0. \quad (2.1.8)$$

De este modo, gracias a (1.2.4) y (2.1.7), el problema (2.1.6) puede ser reformulado equivalentemente como: Hallar  $(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$  tal que

$$\begin{aligned} \nu^{-1} \left( \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma}_0^D, \boldsymbol{\tau}^D \right)_\Omega + (\mathbf{div} \boldsymbol{\tau}, \mathbf{u})_\Omega - \frac{1}{d} \left( \mathbf{u} \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho}, \operatorname{tr} \boldsymbol{\tau} \right)_\Omega &= 0, \\ (\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{v})_\Omega &= -(\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega, \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

para todo  $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$ .

El siguiente lema establece la equivalencia de los problemas (2.1.6) y (2.1.9).

**Lema 2.1.1.** *Si  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$  es solución de (2.1.6), entonces  $(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}) := (\boldsymbol{\sigma} + \frac{\nu}{d|\Omega|}(\mathbf{u} \cdot \nabla \rho, 1)_\Omega \mathbf{I}, \mathbf{u})$  es solución de (2.1.9). Inversamente, si  $(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u})$  es solución de (2.1.9), entonces  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) := (\boldsymbol{\sigma}_0 - \frac{\nu}{d|\Omega|}(\mathbf{u} \cdot \nabla \rho, 1)_\Omega \mathbf{I}, \mathbf{u})$  es solución de (2.1.6).*

*Demostración.* La primera afirmación es evidente. Por otro lado, multiplicando la primera ecuación de (2.1.9) por  $\boldsymbol{\tau} := (\rho - \frac{(\rho, 1)_\Omega}{|\Omega|}) \mathbf{I} \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \Omega)$ , se sigue que  $(\mathbf{u} \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho}, 1)_\Omega = 0$ , lo cual implica la segunda afirmación.  $\square$

De acuerdo al resultado anterior, en lo que sigue nos centramos en analizar el problema (2.1.9).

## 2.2. Análisis del problema continuo

En esta sección analizamos existencia, unicidad, y estabilidad del problema (2.1.9). Para ello, comenzamos escribiendo nuestro problema en la configuración variacional clásica y establecemos las propiedades principales de las formas bilineales involucradas.

### 2.2.1. Formulación Variacional

En primer lugar, definamos los espacios  $\mathbb{H} := \mathbb{H}(\mathbf{div}; \Omega)$ ,  $\mathbb{H}_0 := \mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \Omega)$ ,  $\mathbf{Q} := \mathbf{L}^2(\Omega)$  y la norma producto

$$\|(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})\|_{\mathbb{H} \times \mathbf{Q}} := (\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{div}, \Omega}^2 + \|\mathbf{v}\|_{0, \Omega}^2)^{1/2}.$$

Entonces, definiendo las formas bilineales  $a(\cdot, \cdot) : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b(\cdot, \cdot) : \mathbb{H} \times \mathbf{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $c(\cdot, \cdot) : \mathbb{H} \times \mathbf{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ , como

$$a(\boldsymbol{\sigma}_0, \boldsymbol{\tau}) := \nu^{-1} \left( \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma}_0^D, \boldsymbol{\tau}^D \right)_\Omega, \quad b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) := (\mathbf{div} \boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})_\Omega, \quad c(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) := \frac{1}{d} \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho}, \text{tr } \boldsymbol{\tau} \right)_\Omega, \quad (2.2.1)$$

la formulación variacional (2.1.9) se lee: Hallar  $(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$  tal que

$$a(\boldsymbol{\sigma}_0, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) - c(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) = 0, \quad (2.2.2)$$

$$b(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{v}) = -(\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega,$$

para todo  $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$ .

Es claro que el supuesto (2.1.2), la desigualdad de Hölder y (1.2.1) implican la

continuidad de estas formas bilineales:

$$\begin{aligned}
 |a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})| &\leq \frac{1}{\nu \rho_0} \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{div}, \Omega} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{div}, \Omega}, & \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}, \\
 |b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})| &\leq \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{div}, \Omega} \|\mathbf{v}\|_{0, \Omega}, & \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}, \mathbf{v} \in \mathbf{Q}, \\
 |c(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})| &\leq \frac{1}{\sqrt{d}} \left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{div}, \Omega} \|\mathbf{v}\|_{0, \Omega}, & \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}, \mathbf{v} \in \mathbf{Q}.
 \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Además, es bien sabido que la forma bilineal  $b$  satisface la condición inf-sup (ver, por ejemplo [6]):

$$\sup_{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}_0 \setminus \mathbf{0}} \frac{b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{div}, \Omega}} \geq \beta \|\mathbf{v}\|_{0, \Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Q}. \tag{2.2.4}$$

Finalmente, se tiene la siguiente desigualdad (ver por ejemplo, Lema 3.1 en [3] o Capítulo IV en [6]):

$$C_a \|\boldsymbol{\tau}\|_{0, \Omega}^2 \leq \|\boldsymbol{\tau}^D\|_{0, \Omega}^2 + \|\mathbf{div} \boldsymbol{\tau}\|_{0, \Omega}^2 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}_0, \tag{2.2.5}$$

con  $C_a$  una constante positiva que depende solo de  $\Omega$ . Esta desigualdad, y el supuesto (2.1.2) implican la elipticidad de  $a$  sobre el subespacio

$$\mathbb{K}_0 := \{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}_0 : \mathbf{div} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \text{ en } \Omega\},$$

esto es

$$a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) \geq \frac{C_a}{\nu \rho_1} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{div}, \Omega}^2, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{K}_0. \tag{2.2.6}$$

### 2.2.2. Estabilidad

A continuación, establecemos la estabilidad de (2.2.2).

**Lema 2.2.1.** *Sea  $(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$  una solución para (2.2.2). Asuma que*

$$C_{dep} \left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{2}, \quad (2.2.7)$$

con

$$C_{dep} := \frac{1}{\beta \sqrt{d}} \left( 1 + 2 \frac{\rho_1}{C_a \rho_0} \right).$$

Entonces, existen constantes positivas  $C_{\boldsymbol{\sigma}_0}$  y  $C_{\mathbf{u}}$ , que dependen solo de las constantes de estabilidad en (2.2.3), (2.2.4), (2.2.5), tal que

$$\|\boldsymbol{\sigma}_0\|_{\text{div}, \Omega} \leq C_{\boldsymbol{\sigma}_0} \|\mathbf{f}\|_{0, \Omega} \quad y \quad \|\mathbf{u}\|_{0, \Omega} \leq C_{\mathbf{u}} \|\mathbf{f}\|_{0, \Omega}. \quad (2.2.8)$$

(Expresiones explícitas para  $C_{\boldsymbol{\sigma}_0}$  y  $C_{\mathbf{u}}$  pueden ser encontradas en (2.2.13) y (2.2.14)).

*Demostración.* Sea  $(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$  una solución de (2.2.2). En primer lugar, observamos que de la segunda ecuación de (2.2.2), es fácil concluir que  $\text{div} \boldsymbol{\sigma}_0 = -\mathbf{f}$ , lo cual implica

$$\|\text{div} \boldsymbol{\sigma}_0\|_{0, \Omega} = \|\mathbf{f}\|_{0, \Omega}. \quad (2.2.9)$$

Ahora, de la condición inf-sup en (2.2.4), la primera ecuación de (2.2.2), desigualdad de Hölder, la desigualdad en (1.2.1), y la continuidad de la forma bilineal  $a$  y  $c$  en (2.2.3), observamos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{0, \Omega} &\leq \frac{1}{\beta} \sup_{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}_0 \setminus \mathbf{0}} \frac{b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u})}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{\text{div}, \Omega}} = \frac{1}{\beta} \sup_{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}_0 \setminus \mathbf{0}} \frac{-a(\boldsymbol{\sigma}_0, \boldsymbol{\tau}) + c(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u})}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{\text{div}, \Omega}}, \\ &\leq \frac{1}{\nu \rho_0 \beta} \|\boldsymbol{\sigma}_0\|_{\text{div}, \Omega} + \frac{1}{\beta \sqrt{d}} \left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{0, \Omega}. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Entonces, gracias al supuesto (2.2.7), obtenemos

$$\|\mathbf{u}\|_{0, \Omega} \leq \frac{2}{\nu \rho_0 \beta} \|\boldsymbol{\sigma}_0\|_{\text{div}, \Omega}. \quad (2.2.11)$$

Por otro lado, de la primera ecuación de (2.2.2) con  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}_0$ , se tiene

$$a(\boldsymbol{\sigma}_0, \boldsymbol{\sigma}_0) = -b(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}) + c(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}) = (\mathbf{f}, \mathbf{u})_\Omega + c(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}),$$

lo cual junto al supuesto (2.1.2), la continuidad de  $c$  en (2.2.3), y la desigualdad de Hölder, implican

$$\|\boldsymbol{\sigma}_0^D\|_{0,\Omega}^2 \leq \nu\rho_1 \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \frac{\nu\rho_1}{\sqrt{d}} \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega} \left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \|\boldsymbol{\sigma}_0\|_{\text{div},\Omega}. \quad (2.2.12)$$

Por lo tanto, añadiendo  $(1 + C_a)\|\text{div}\boldsymbol{\sigma}_0\|_{0,\Omega}^2$  en ambos lados de (2.2.12), y usando (2.2.5), (2.2.9) y (2.2.11), obtenemos

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma}_0\|_{\text{div},\Omega}^2 &\leq \frac{\nu\rho_1}{C_a} \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega} \left( \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \frac{1}{\sqrt{d}} \left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \|\boldsymbol{\sigma}_0\|_{\text{div},\Omega} \right) \\ &\quad + \frac{(1 + C_a)}{C_a} \|\boldsymbol{\sigma}_0\|_{\text{div},\Omega} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}, \\ &\leq \left( \frac{2\rho_1}{C_a\rho_0\beta} + \frac{1 + C_a}{C_a} \right) \|\boldsymbol{\sigma}_0\|_{\text{div},\Omega} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \frac{2\rho_1}{C_a\rho_0\beta\sqrt{d}} \left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \|\boldsymbol{\sigma}_0\|_{\text{div},\Omega}^2. \end{aligned}$$

De este modo, del supuesto (2.2.7) se sigue que

$$\|\boldsymbol{\sigma}_0\|_{\text{div},\Omega} \leq 2 \left( \frac{2\rho_1}{C_a\rho_0\beta} + \frac{1 + C_a}{C_a} \right) \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}, \quad (2.2.13)$$

lo cual junto a (2.2.11) implican

$$\|\mathbf{u}\|_{0,\Omega} \leq \frac{4}{\nu\rho_0\beta} \left( \frac{2\rho_1}{C_a\rho_0\beta} + \frac{1 + C_a}{C_a} \right) \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}, \quad (2.2.14)$$

lo que completa la demostración.  $\square$

### 2.2.3. Existencia y unicidad de solución

Como se mencionó anteriormente, para probar existencia y unicidad de solución, utilizaremos un argumento de punto fijo. Para esto introducimos el operador lineal:

$$\mathbb{T} : (\boldsymbol{\xi}, \mathbf{z}) \in \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q} \rightarrow (\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q},$$

donde  $(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u})$  es la solución del siguiente problema: Hallar  $(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$  tal que

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}_0, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) &= c(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{z}), \\ b(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{v}) &= -(\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega, \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

para todo  $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$ . De las propiedades de estabilidad de las formas bilineales  $a$  y  $b$  (Ver Sección 2.2.1), no es difícil ver que el problema (2.2.15) es únicamente soluble, y por lo tanto el operador  $\mathbb{T}$  está bien definido (ver Teorema 2.1 en [24]).

El siguiente lema establece que  $\mathbb{T}$  es una contracción y por lo tanto, de acuerdo al Teorema clásico del punto fijo de Banach, tiene un único punto fijo en  $\mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$ .

**Lema 2.2.2.** *Asuma que*

$$C_{\mathbb{T}} \left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} < 1, \tag{2.2.16}$$

con

$$C_{\mathbb{T}} := \frac{1}{\beta \sqrt{d}} \left( 1 + \frac{\rho_1}{C_a \rho_0} \right) + \frac{\rho_1 \nu}{C_a \sqrt{d}}. \tag{2.2.17}$$

Entonces,  $\mathbb{T}$  es una contracción en  $\mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$ .

*Demostración.* Sean  $(\boldsymbol{\sigma}_1, \mathbf{u}_1)$ ,  $(\boldsymbol{\sigma}_2, \mathbf{u}_2)$ ,  $(\boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{z}_1)$ ,  $(\boldsymbol{\xi}_2, \mathbf{z}_2)$  en  $\mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$ , tal que

$$\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{z}_1) = (\boldsymbol{\sigma}_1, \mathbf{u}_1) \quad \text{y} \quad \mathbb{T}(\boldsymbol{\xi}_2, \mathbf{z}_2) = (\boldsymbol{\sigma}_2, \mathbf{u}_2).$$



De la definición de  $\mathbb{T}$  en (2.2.15), se sigue que

$$\begin{aligned} a(\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) &= c(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2), \\ b(\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2, \mathbf{v}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

para todo  $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})$  en  $\mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$ , lo cual implica

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) = 0, \quad (2.2.19)$$

y

$$a(\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) = c(\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2, \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2). \quad (2.2.20)$$

Entonces, de (2.2.19), (2.2.20), la elipticidad de  $a$  sobre  $\mathbb{K}_0$  en (2.2.6), y la continuidad de  $c$  en (2.2.3), se tiene

$$\|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2\|_{\operatorname{div}, \Omega} \leq \frac{\rho_1 \nu}{C_a \sqrt{d}} \left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_{0, \Omega}. \quad (2.2.21)$$

Ahora, de (2.2.3), (2.2.4), y la primera ecuación de (2.2.18), obtenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{0, \Omega} &\leq \frac{1}{\beta} \sup_{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}_0 \setminus \mathbf{0}} \frac{|b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)|}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{\operatorname{div}, \Omega}}, \\ &= \frac{1}{\beta} \sup_{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}_0 \setminus \mathbf{0}} \frac{|c(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2) - a(\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\tau})|}{\|\boldsymbol{\tau}\|_{\operatorname{div}, \Omega}}, \\ &\leq \frac{1}{\beta \sqrt{d}} \left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_{0, \Omega} + \frac{1}{\nu \rho_0 \beta} \|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2\|_{\operatorname{div}, \Omega}, \end{aligned}$$

lo cual junto a (2.2.21) implican

$$\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{0, \Omega} \leq \frac{1}{\beta \sqrt{d}} \left( 1 + \frac{\rho_1}{C_a \rho_0} \right) \left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_{0, \Omega}. \quad (2.2.22)$$

## 2.2. Análisis del problema continuo

---

De esta forma, de (2.2.21) y (2.2.22), se tiene

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{T}(\boldsymbol{\xi}_1, \mathbf{z}_1) - \mathbb{T}(\boldsymbol{\xi}_2, \mathbf{z}_2)\|_{\mathbb{H} \times \mathbf{Q}} &\leq \|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2\|_{\text{div}, \Omega} + \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{0, \Omega}, \\
&\leq C_{\mathbb{T}} \left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|_{0, \Omega}, \\
&\leq C_{\mathbb{T}} \left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \|(\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2, \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2)\|_{\mathbb{H} \times \mathbf{Q}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, conforme al supuesto (2.2.16), obtenemos que  $\mathbb{T}$  es una contracción, lo cual concluye la demostración.  $\square$

Ahora establecemos el resultado principal de esta sección.

**Teorema 2.2.1.** *Asuma que*

$$C_{WP} \left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{2}, \quad (2.2.23)$$

con

$$C_{WP} := \frac{1}{\beta \sqrt{d}} \left( 1 + 2 \frac{\rho_1}{C_a \rho_0} \right) + \frac{\rho_1 \nu}{C_a \sqrt{d}}. \quad (2.2.24)$$

Entonces, existe un único  $(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$  solución de (2.2.2). Además, la solución es estable esto es, satisface las desigualdades (2.2.8).

*Demostración.* Es claro que  $(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$  es la única solución del problema (2.2.2) si y sólo si, es el único punto fijo del operador  $\mathbb{T}$ . Entonces, notando que  $C_{\mathbb{T}} \leq C_{WP}$ , del Lema 2.2.2 y el teorema clásico del punto fijo de Banach, se sigue que  $\mathbb{T}$  tiene un único punto fijo en  $\mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$ , lo cual implica la primera afirmación.

Por otro lado, dado que  $C_{dep} \leq C_{WP}$ , la estabilidad de  $(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u})$  sigue del Lema 2.2.1.  $\square$

## 2.3. El esquema de elementos finitos mixtos

En esta sección introducimos el esquema de Galerkin para el problema (2.2.2) y bajo supuestos adecuados sobre los espacios discretos, analizamos existencia, unicidad y estabilidad de su solución. Posteriormente, en Sección 2.5 mostramos ejemplos específicos de subespacios que satisfacen las hipótesis requeridas.

### 2.3.1. Preliminares

Comenzamos seleccionando los siguientes espacios discretos arbitrarios:

$$\mathbf{H}_h \subseteq \mathbf{H}(\mathbf{div}; \Omega), \quad Q_h \subseteq L^2(\Omega). \quad (2.3.1)$$

Entonces, definimos los subespacios

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_h &:= \{ \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}; \Omega) : \mathbf{c}^t \boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}_h \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^d \}, \\ \mathbb{H}_{h,0} &:= \mathbb{H}_h \cap \mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \Omega), \\ \mathbf{Q}_h &:= Q_h^d. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

De esta forma, el esquema de Galerkin para (2.2.2) se reduce a: Hallar  $(\boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \mathbf{u}_h) \in \mathbb{H}_{h,0} \times \mathbf{Q}_h$  tal que

$$a(\boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \boldsymbol{\tau}_h) + b(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{u}_h) - c(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{u}_h) = 0, \quad (2.3.3)$$

$$b(\boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \mathbf{v}_h) = -(\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_\Omega,$$

para todo  $(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{v}_h) \in \mathbb{H}_{h,0} \times \mathbf{Q}_h$ .

En lo que sigue, establecemos hipótesis generales sobre los subespacios de ele-

mentos finitos (2.3.2), necesarias para probar a continuación que el problema (2.3.3) está bien puesto. Comenzamos observando que para dar sentido al espacio discreto  $\mathbb{H}_{h,0}$ , necesitamos ser capaces de eliminar de  $\mathbb{H}_h$ , múltiplos de la matriz identidad. Esto se satisface si asumimos que:

$$(H.0) \quad [\mathbb{P}_0(\Omega)]^{d \times d} \subseteq \mathbb{H}_h.$$

Entonces,  $I \in \mathbb{H}_h$ , para todo  $h$ , y por lo tanto se tiene la descomposición:

$$\mathbb{H}_h = \mathbb{H}_{h,0} \oplus \mathbb{P}_0(\Omega)I.$$

Ahora, nos centramos en el kernel discreto de  $b$ , el cual es definido por:

$$\mathbb{K}_{h,0} := \{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{H}_{h,0} : b(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{Q}_h\}.$$

Con el fin de tener una definición más explícita de  $\mathbb{K}_{h,0}$  introducimos el siguiente supuesto:

$$(H.1) \quad \operatorname{div} \mathbf{H}_h \subseteq Q_h.$$

Entonces, se sigue de la definición de  $b$  que

$$\mathbb{K}_{h,0} := \{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{H}_{h,0} : \mathbf{div} \boldsymbol{\tau}_h = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega\} \subseteq \mathbb{K}_0.$$

A su vez, asumimos la versión discreta de la condición inf-sup (2.2.4), esto es:

(H.2) Existe  $\hat{\beta} > 0$ , independiente de  $h$ , tal que

$$\sup_{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{H}_{h,0} \setminus \mathbf{0}} \frac{b(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{v}_h)}{\|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbf{div}, \Omega}} \geq \hat{\beta} \|\mathbf{v}_h\|_{0, \Omega} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{Q}_h. \quad (2.3.4)$$

### 2.3.2. Existencia, unicidad y estabilidad del problema discreto

En esta sección, adaptamos el análisis de la Sección 2.2 al caso discreto para probar existencia, unicidad y estabilidad de (2.3.3). Primero observamos que, como estamos considerando subespacios de elementos finitos conformes, la continuidad de las formas bilineales  $a$ ,  $b$ , y  $c$  (cf. (2.2.3)) son heredadas del caso continuo, con exactamente las mismas constantes.

Además, dado que  $\mathbb{K}_{h,0} \subseteq \mathbb{K}_0$ , deducimos la elipticidad de  $a$  sobre  $\mathbb{K}_{h,0}$ :

$$a(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\tau}_h) \geq \frac{C_a}{\nu \rho_1} \|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbf{div}, \Omega}^2 \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{K}_{h,0}. \quad (2.3.5)$$

De este modo, acorde a (2.2.3), (2.3.4), (2.3.5), y la teoría clásica de Babuška-Brezzi, y de forma similar al análisis del problema continuo, introducimos el operador lineal

$$\hat{\mathbb{T}} : (\boldsymbol{\xi}_h, \mathbf{z}_h) \in \mathbb{H}_{h,0} \times \mathbf{Q}_h \rightarrow (\boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \mathbf{u}_h) \in \mathbb{H}_{h,0} \times \mathbf{Q}_h$$

donde  $(\boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \mathbf{u}_h)$  es la solución del problema: Hallar  $(\boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \mathbf{u}_h) \in \mathbb{H}_{h,0} \times \mathbf{Q}_h$  tal que

$$a(\boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \boldsymbol{\tau}_h) + b(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{u}_h) = c(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{z}_h), \quad (2.3.6)$$

$$b(\boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \mathbf{v}_h) = -(\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_\Omega,$$

para todo  $(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{v}_h) \in \mathbb{H}_{h,0} \times \mathbf{Q}_h$ .

**Observación 2.3.1.** *Es fácil ver que  $(\boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \mathbf{u}_h)$  es solución de (2.3.3), si y sólo si,  $\hat{\mathbb{T}}(\boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \mathbf{u}_h) = (\boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \mathbf{u}_h)$ . De este modo, para probar que (2.3.3) está bien puesto, procedemos análogamente a la Sección 2.2.3, y probamos que  $\hat{\mathbb{T}}$  tiene un único punto fijo en  $\mathbb{H}_{h,0} \times \mathbf{Q}_h$ .*

**Teorema 2.3.1.** *Asuma las hipótesis (H.0), (H.1) y (H.2). Además, asuma que*

$$\hat{C}_{WP} \left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{2}, \quad (2.3.7)$$

con

$$\hat{C}_{WP} := \frac{1}{\hat{\beta}\sqrt{d}} \left( 1 + 2 \frac{\rho_1}{C_a \rho_0} \right) + \frac{\rho_1 \nu}{C_a \sqrt{d}}. \quad (2.3.8)$$

Entonces, existe un único  $(\boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \mathbf{u}_h) \in \mathbb{H}_{h,0} \times \mathbf{Q}_h$  solución de (2.3.3). Además, existen constantes positivas  $\hat{C}_{\boldsymbol{\sigma}_0}$  y  $\hat{C}_{\mathbf{u}}$ , que solo dependen de las constantes de estabilidad en (2.2.3), (2.3.4) y (2.3.5), tal que

$$\|\boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{\text{div},\Omega} \leq \hat{C}_{\boldsymbol{\sigma}_0} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} \quad y \quad \|\mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq \hat{C}_{\mathbf{u}} \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}. \quad (2.3.9)$$

(Expresiones explícitas para  $\hat{C}_{\boldsymbol{\sigma}_0}$  y  $\hat{C}_{\mathbf{u}}$  pueden ser encontradas en (2.3.10) y (2.3.11)).

*Demostración.* Sea

$$\hat{C}_{\hat{\mathbb{T}}} := \frac{1}{\hat{\beta}\sqrt{d}} \left( 1 + \frac{\rho_1}{C_a \rho_0} \right) + \frac{\rho_1 \nu}{C_a \sqrt{d}}.$$

Es claro que  $\hat{C}_{\hat{\mathbb{T}}} \leq \hat{C}_{WP}$ . Entonces, procedemos de forma análoga a la demostración del Lema 2.2.2, para probar que el operador  $\hat{\mathbb{T}}$  tiene un único punto fijo  $(\boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \mathbf{u}_h) \in \mathbb{H}_{h,0} \times \mathbf{Q}_h$  el cual, acorde a la Observación 2.3.1, también es la única solución de (2.3.3).

Por otro lado, sea

$$\hat{C}_{dep} := \frac{1}{\hat{\beta}\sqrt{d}} \left( 1 + 2 \frac{\rho_1}{C_a \rho_0} \right),$$

y observemos que  $\hat{C}_{dep} \leq \hat{C}_{WP}$ . Entonces, notando que de la segunda ecuación de (2.3.3) se tiene

$$\|\text{div} \boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{0,\Omega} \leq \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega},$$

procedemos como en la demostración del Lema 2.2.1 para obtener que

$$\|\boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{\text{div},\Omega} \leq 2 \left( \frac{2\rho_1}{C_a\rho_0\hat{\beta}} + \frac{1+C_a}{C_a} \right) \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}, \quad (2.3.10)$$

y

$$\|\mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq \frac{4}{\nu\rho_0\hat{\beta}} \left( \frac{2\rho_1}{C_a\rho_0\hat{\beta}} + \frac{1+C_a}{C_a} \right) \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}, \quad (2.3.11)$$

lo cual concluye la demostración.  $\square$

## 2.4. Estimación a priori del error

A continuación, establecemos la estimación de Cea correspondiente. Para este fin, primero introducimos algunas notaciones y establecemos algunos resultados previos. Comenzamos definiendo el conjunto:

$$\mathbb{H}_{h,0}^{\mathbf{f}} := \{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{H}_{h,0} : b(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{v}_h) = -(\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_{\Omega}, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{Q}_h\},$$

el cual gracias a la condición inf-sup (2.3.4) es claramente no vacío. También, no es difícil ver que, debido a (2.3.4), se tiene la siguiente desigualdad (ver por ejemplo [6]):

$$\inf_{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{H}_{h,0}^{\mathbf{f}}} \|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\tau}_h\|_{\text{div},\Omega} \leq \left(1 + \frac{1}{\hat{\beta}}\right) \inf_{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{H}_{h,0}} \|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\tau}_h\|_{\text{div},\Omega}. \quad (2.4.1)$$

Por otro lado, para simplificar el análisis subsiguiente, escribimos  $\mathbf{e}_{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  y  $\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}_0} = \boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}$ . Como es usual, descompondremos estos errores en

$$\mathbf{e}_{\boldsymbol{\sigma}_0} = \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}_0} + \boldsymbol{\chi}_{\boldsymbol{\sigma}_0} = (\boldsymbol{\sigma}_0 - \hat{\boldsymbol{\tau}}_h) + (\hat{\boldsymbol{\tau}}_h - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}), \quad (2.4.2)$$

$$\mathbf{e}_{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\chi}_{\mathbf{u}} = (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{v}}_h) + (\hat{\mathbf{v}}_h - \mathbf{u}_h), \quad (2.4.3)$$

para  $(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h, \hat{\mathbf{v}}_h) \in \mathbb{H}_{h,0}^{\mathbf{f}} \times \mathbf{Q}_h$  dadas.

Finalmente, observamos que se tiene la ortogonalidad de Galerkin:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{e}_{\sigma_0}, \boldsymbol{\tau}_h) + b(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{e}_{\mathbf{u}}) - c(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{e}_{\mathbf{u}}) &= 0, \\ b(\mathbf{e}_{\sigma_0}, \mathbf{v}_h) &= 0, \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

para todo  $(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{v}_h) \in \mathbb{H}_{h,0} \times \mathbf{Q}_h$ .

Ahora establecemos el resultado principal de esta sección.

**Teorema 2.4.1.** *Asuma las hipótesis (H.0), (H.1) y (H.2). Además, asuma que*

$$\max\{C_{WP}, \hat{C}_{WP}\} \left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{2}, \tag{2.4.5}$$

con  $C_{WP}$  y  $\hat{C}_{WP}$  definidos en (2.2.24) y (2.3.8), respectivamente. Sean  $(\sigma_0, \mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$  y  $(\sigma_{h,0}, \mathbf{u}_h) \in \mathbb{H}_{h,0} \times \mathbf{Q}_h$  las únicas soluciones de los problemas continuo y discreto (2.2.2) y (2.3.3), respectivamente. Entonces, existe  $C_{cea} > 0$ , independiente de  $h$ , tal que

$$\|\sigma_0 - \sigma_{h,0}\|_{\text{div},\Omega} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq C_{cea} \left\{ \inf_{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{H}_{h,0}} \|\sigma_0 - \boldsymbol{\tau}_h\|_{\text{div},\Omega} + \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{Q}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} \right\}. \tag{2.4.6}$$

*Demostración.* Dada  $(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h, \hat{\mathbf{v}}_h) \in \mathbb{H}_{h,0}^f \times \mathbf{Q}_h$ , y sean  $\boldsymbol{\xi}_{\sigma_0}$ ,  $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{u}}$ ,  $\boldsymbol{\chi}_{\sigma_0}$  y  $\boldsymbol{\chi}_{\mathbf{u}}$ , como en (2.4.2) y (2.4.3). Es fácil ver que la primera ecuación de (2.4.4) puede ser reescrita como

$$a(\boldsymbol{\chi}_{\sigma_0}, \boldsymbol{\tau}_h) + b(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\chi}_{\mathbf{u}}) - c(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\chi}_{\mathbf{u}}) = -a(\boldsymbol{\xi}_{\sigma_0}, \boldsymbol{\tau}_h) - b(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{u}}) + c(\boldsymbol{\tau}_h, \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{u}}) \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{H}_{h,0}. \tag{2.4.7}$$

Entonces, de la condición inf-sup (2.3.4), la continuidad de  $a$ ,  $b$  y  $c$  en (2.2.3) y



(2.4.7), se sigue que

$$\begin{aligned}
 \|\chi_{\mathbf{u}}\|_{0,\Omega} &\leq \frac{1}{\hat{\beta}} \sup_{\tau_h \in \mathbb{H}_{h,0}} \frac{b(\tau_h, \chi_{\mathbf{u}})}{\|\tau_h\|_{\text{div},\Omega}} \\
 &= \frac{1}{\hat{\beta}} \sup_{\tau_h \in \mathbb{H}_{h,0}} \frac{-a(\chi_{\sigma_0}, \tau_h) - a(\xi_{\sigma_0}, \tau_h) - b(\tau_h, \xi_{\mathbf{u}}) + c(\tau_h, \chi_{\mathbf{u}}) + c(\tau_h, \xi_{\mathbf{u}})}{\|\tau_h\|_{\text{div},\Omega}}, \\
 &\leq \frac{1}{\nu\rho_0\hat{\beta}} (\|\xi_{\sigma_0}\|_{\text{div},\Omega} + \|\chi_{\sigma_0}\|_{\text{div},\Omega}) + \frac{1}{\hat{\beta}} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{d}} \left\| \frac{\nabla\rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \right) \|\xi_{\mathbf{u}}\|_{0,\Omega} \\
 &\quad + \frac{1}{\hat{\beta}\sqrt{d}} \left\| \frac{\nabla\rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \|\chi_{\mathbf{u}}\|_{0,\Omega},
 \end{aligned}$$

lo cual, junto al supuesto (2.4.5), implican

$$\|\chi_{\mathbf{u}}\|_{0,\Omega} \leq \frac{2}{\nu\rho_0\hat{\beta}} (\|\xi_{\sigma_0}\|_{\text{div},\Omega} + \|\chi_{\sigma_0}\|_{\text{div},\Omega}) + \frac{2}{\hat{\beta}} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{d}} \left\| \frac{\nabla\rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \right) \|\xi_{\mathbf{u}}\|_{0,\Omega}. \quad (2.4.8)$$

Por otro lado, dado que  $\hat{\tau}_h \in \mathbb{H}_{h,0}^f$ , observamos que  $\chi_{\sigma_0} \in \mathbb{K}_{h,0}$ , y entonces, de (2.4.7) con  $\tau_h = \chi_{\sigma_0}$ , obtenemos

$$a(\chi_{\sigma_0}, \chi_{\sigma_0}) = -a(\xi_{\sigma_0}, \chi_{\sigma_0}) + c(\chi_{\sigma_0}, \xi_{\mathbf{u}}) + c(\chi_{\sigma_0}, \chi_{\mathbf{u}}),$$

y utilizando la continuidad de  $a$  y  $c$  en (2.2.3), y la elipticidad de  $a$  en (2.3.5), obtenemos

$$\begin{aligned}
 \|\chi_{\sigma_0}\|_{\text{div},\Omega} &\leq \frac{\rho_1}{C_a\rho_0} \|\xi_{\sigma_0}\|_{\text{div},\Omega} + \frac{\nu\rho_1}{C_a\sqrt{d}} \left\| \frac{\nabla\rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \|\xi_{\mathbf{u}}\|_{0,\Omega} \\
 &\quad + \frac{\nu\rho_1}{C_a\sqrt{d}} \left\| \frac{\nabla\rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \|\chi_{\mathbf{u}}\|_{0,\Omega}.
 \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

De este modo, combinando (2.4.8) y (2.4.9) se sigue que

$$\|\chi_{\sigma_0}\|_{\text{div},\Omega} \leq \frac{k_1}{2} \|\xi_{\sigma_0}\|_{\text{div},\Omega} + \frac{k_2}{2} \|\xi_{\mathbf{u}}\|_{0,\Omega} + \frac{2\rho_1}{\rho_0 C_a \hat{\beta} \sqrt{d}} \left\| \frac{\nabla\rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \|\chi_{\sigma_0}\|_{\text{div},\Omega},$$

que junto al supuesto (2.4.5), implican

$$\|\chi_{\sigma_0}\|_{\text{div},\Omega} \leq k_1 \|\xi_{\sigma_0}\|_{\text{div},\Omega} + k_2 \|\xi_{\mathbf{u}}\|_{0,\Omega}, \quad (2.4.10)$$

con

$$k_1 := \frac{\rho_1}{C_a \rho_0} \left( 1 + \frac{2}{\hat{\beta} \sqrt{d}} \left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \right),$$

$$k_2 := \frac{\nu \rho_1}{C_a \sqrt{d}} \left( 1 + \frac{2}{\hat{\beta}} + \frac{2}{\hat{\beta} \sqrt{d}} \left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \right) \left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)}.$$

Como consecuencia, combinando (2.4.8) y (2.4.10), obtenemos

$$\|\chi_{\mathbf{u}}\|_{0,\Omega} \leq k_3 \|\xi_{\sigma_0}\|_{\text{div},\Omega} + k_4 \|\xi_{\mathbf{u}}\|_{0,\Omega}, \quad (2.4.11)$$

con

$$k_3 := \frac{2}{\nu \rho_0 \hat{\beta}} (1 + k_1),$$

$$k_4 := \frac{2}{\hat{\beta}} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{d}} \left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} + \frac{k_2}{\nu \rho_0} \right).$$

Por lo tanto, de acuerdo a la desigualdad triangular, (2.4.10) y (2.4.11), obtenemos

$$\|\mathbf{e}_{\sigma_0}\|_{\text{div},\Omega} + \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}}\|_{0,\Omega} \leq (1 + k_1 + k_3) \|\xi_{\sigma_0}\|_{\text{div},\Omega} + (1 + k_2 + k_4) \|\xi_{\mathbf{u}}\|_{0,\Omega},$$

y dado que  $(\hat{\boldsymbol{\tau}}_h, \hat{\mathbf{v}}_h) \in \mathbb{H}_{h,0}^{\mathbf{f}} \times \mathbf{Q}_h$  es arbitrario, obtenemos

$$\|\mathbf{e}_{\sigma_0}\|_{\text{div},\Omega} + \|\mathbf{e}_{\mathbf{u}}\|_{0,\Omega} \leq (1 + k_1 + k_3) \inf_{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{H}_{h,0}^{\mathbf{f}}} \|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\tau}_h\|_{\text{div},\Omega} + (1 + k_2 + k_4) \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{Q}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega},$$

lo cual junto a (2.4.1), concluye la demostración.  $\square$

### 2.4.1. Aproximación de la presión y el pseudoefuerzo original

En primer lugar, se propone un procedimiento de post-procesamiento para aproximar la presión. Para esto, observamos que si  $(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$  es la única solución de (2.2.2), entonces, acorde a (2.1.4) y (2.1.7), es posible recuperar la presión  $p \in L_0^2(\Omega) := \{q \in L^2(\Omega) : (q, 1)_\Omega = 0\}$ , de la identidad

$$p := -\frac{\nu}{d} \left( \mathbf{u} \cdot \nabla \rho - \frac{1}{|\Omega|} (\mathbf{u}, \nabla \rho)_\Omega \right) - \frac{1}{d} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}_0. \quad (2.4.12)$$

De este modo, si  $(\boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \mathbf{u}_h) \in \mathbb{H}_{h,0} \times \mathbf{Q}_h$  es la única solución de (2.3.3), es razonable pensar que la función

$$p_h := -\frac{\nu}{d} \left( \mathbf{u}_h \cdot \nabla \rho - \frac{1}{|\Omega|} (\mathbf{u}_h, \nabla \rho)_\Omega \right) - \frac{1}{d} \text{tr } \boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \quad (2.4.13)$$

es una buena aproximación de la presión. El siguiente Corolario establece precisamente este resultado.

**Corolario 2.4.1.** *Asuma las hipótesis del Teorema 2.4.1. Sean  $(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$  y  $(\boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \mathbf{u}_h) \in \mathbb{H}_{h,0} \times \mathbf{Q}_h$  las únicas soluciones del problema continuo y discreto (2.2.2) y (2.3.3), respectivamente. Entonces, existe  $C > 0$ , independiente de  $h$ , tal que*

$$\|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq C \left\{ \inf_{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{H}_{h,0}} \|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\tau}_h\|_{\text{div},\Omega} + \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{Q}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} \right\}.$$

*Demostración.* De (1.2.1), (2.4.12) y (2.4.13), desigualdad de Hölder y desigualdad

triangular, se sigue que

$$\begin{aligned}
 \|p - p_h\|_{0,\Omega} &\leq \frac{\nu}{d} \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \cdot \nabla \rho\|_{0,\Omega} + \frac{\nu}{d|\Omega|^{1/2}} |(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \nabla \rho)_\Omega| \\
 &\quad + \frac{1}{d} \|\operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0})\|_{0,\Omega} \\
 &\leq \frac{\nu}{d} \|\rho\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} + \frac{\nu}{d|\Omega|^{1/2}} \|\rho\|_{1,\Omega} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{d}} \|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{0,\Omega}.
 \end{aligned}$$

Entonces, el resultado se sigue del Teorema 2.4.1.  $\square$

Para aproximar el pseudoefuerzo original en (2.1.7), recordemos que en el Lema 2.1.1 de la Sección 2.1, hemos probado que las formulaciones (2.1.6) y (2.1.9) son equivalentes, esto es, hemos probado que  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \in \mathbb{H} \times \mathbf{Q}$  es la única solución de (2.1.6) si y sólo si  $(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$  es la única solución de (2.1.9), donde  $\boldsymbol{\sigma}_0$  y  $\boldsymbol{\sigma}$  están relacionados por

$$\boldsymbol{\sigma} := \boldsymbol{\sigma}_0 - \frac{\nu}{d|\Omega|} (\mathbf{u}, \nabla \rho)_\Omega \mathbf{I}. \quad (2.4.14)$$

Además, en esta sección hemos propuesto un método de Galerkin para aproximar la solución de (2.1.9) (o equivalentemente (2.2.2)).

En consecuencia, si  $(\boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \mathbf{u}_h) \in \mathbb{H}_{h,0} \times \mathbf{Q}_h$  es la única solución de (2.3.3), es fácil ver que el tensor

$$\boldsymbol{\sigma}_h := \boldsymbol{\sigma}_{h,0} - \frac{\nu}{d|\Omega|} (\mathbf{u}_h, \nabla \rho)_\Omega \mathbf{I}, \quad (2.4.15)$$

aproxima a  $\boldsymbol{\sigma} := \boldsymbol{\sigma}_0 - \frac{\nu}{d|\Omega|} (\mathbf{u}, \nabla \rho)_\Omega \mathbf{I} \in \mathbb{H}$ . Este resultado es establecido en el siguiente corolario.

**Corolario 2.4.2.** *Asuma las hipótesis del Teorema 2.4.1. Sean  $(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$  y  $(\boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \mathbf{u}_h) \in \mathbb{H}_{h,0} \times \mathbf{Q}_h$  las únicas soluciones de los problemas continuo y discreto (2.2.2) y (2.3.3), respectivamente. Sean  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{H}$  y  $\boldsymbol{\sigma}_h \in \mathbb{H}_h$  los tensores definidos por (2.4.14) y (2.4.15), respectivamente. Entonces, existe  $C > 0$ , independiente de  $h$ , tal que*

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\text{div},\Omega} \leq C \left\{ \inf_{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{H}_{h,0}} \|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\tau}_h\|_{\text{div},\Omega} + \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{Q}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{0,\Omega} \right\}. \quad (2.4.16)$$

*Demostración.* De (2.4.14), (2.4.15) y la desigualdad triangular, es fácil ver que

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\text{div},\Omega} &= \|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0} - \frac{\nu}{d|\Omega|}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \nabla \rho)_\Omega \mathbf{I}\|_{\text{div},\Omega} \\ &\leq \|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{\text{div},\Omega} + \frac{\nu}{d^{1/2}|\Omega|^{1/2}} |(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \nabla \rho)_\Omega| \\ &\leq \|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{\text{div},\Omega} + \frac{\nu \|\nabla \rho\|_{0,\Omega}}{d^{1/2}|\Omega|^{1/2}} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Entonces, el resultado es una aplicación directa del Teorema 2.4.1. □

## 2.5. Elección particular de espacios discretos

En esta sección especificamos ejemplos de subespacios de elementos finitos que satisfacen las hipótesis (H.0), (H.1) y (H.2). Para este fin, sea  $\mathcal{T}_h$  una familia regular de triangulaciones de la región poligonal  $\bar{\Omega}$ , por triángulos  $T$  de diámetro  $h_T$ , tal que  $\bar{\Omega} = \cup\{T : T \in \mathcal{T}_h\}$  y definamos  $h := \max\{h_T : T \in \mathcal{T}_h\}$ . Ahora, dado un entero  $l \geq 0$  y un subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^d$ , denotamos por  $\mathbb{P}_l(S)$  el espacio de los polinomios de grado total a lo más  $l$ , definido sobre  $S$ .

### 2.5.1. Elementos de Raviart-Thomas

Para cada entero  $k \geq 0$  y para cada  $T \in \mathcal{T}_h$ , definimos el espacio de Raviart-Thomas local de orden  $k$  (ver, por ejemplo [6]):

$$\mathbf{RT}_k(T) := [\mathbb{P}_k(T)]^d \oplus \mathbb{P}_k(T)\mathbf{x},$$

donde  $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_d)^t$  es un vector genérico de  $\mathbb{R}^d$ . Entonces, especificamos los espacios discretos en (2.3.2), definiendo:

$$\mathbf{H}_h := \{ \tau \in \mathbf{H}(\text{div}; \Omega) : \tau|_T \in \mathbf{RT}_k(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \}, \quad (2.5.1)$$

$$Q_h := \{ v \in L^2(\Omega) : v|_T \in \mathbb{P}_k(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \}.$$

Se sabe que estos supespacios satisfacen las siguientes propiedades de aproximación (ver, por ejemplo Teorema 3.16 en [27]):

Para cada  $s \in (0, k+1]$  y para cada  $\tau \in \mathbf{H}^s(\Omega)$ , con  $\text{div } \tau \in H^s(\Omega)$ , existe  $\tau_h \in \mathbf{H}_h$ , tal que

$$\|\tau - \tau_h\|_{\text{div}, \Omega} \leq Ch^s \{ \|\tau\|_{s, \Omega} + \|\text{div } \tau\|_{s, \Omega} \}. \quad (2.5.2)$$

Para cada  $s \in [0, k+1]$  y para cada  $v \in H^s(\Omega)$  existe  $v_h \in Q_h$  tal que

$$\|v - v_h\|_{0, \Omega} \leq Ch^s \|v\|_{s, \Omega}. \quad (2.5.3)$$

Por otra parte, es fácil ver que los espacios discretos  $\mathbf{H}_h$  y  $Q_h$  satisfacen los supuestos **(H.0)**, **(H.1)** y **(H.2)**. En particular, la demostración de la condición inf-sup (2.3.4) puede ser encontrada en [24, Lema 2.4].

Acorde a esto, y al Teorema 2.4.1, estamos en condiciones de establecer existencia y unicidad de solución, y convergencia del esquema de Galerkin (2.3.3) para esta elección particular de espacios.

**Teorema 2.5.1.** *Asuma que*

$$\max\{C_{WP}, \hat{C}_{WP}\} \left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{2}, \quad (2.5.4)$$

con  $C_{WP}$  y  $\hat{C}_{WP}$  definido en (2.2.24) y (2.3.8), respectivamente. Además, sean  $\mathbb{H}_h$ , y  $\mathbf{Q}_h$ , los subespacios de elementos finitos definidos por (2.3.2), en términos de los espacios discretos específicos dados por (2.5.1). Entonces, el esquema de Galerkin (2.3.3) tiene una única solución  $(\boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \mathbf{u}_h) \in \mathbb{H}_{h,0} \times \mathbf{Q}_h$  y existe  $C_1 > 0$ , independiente de  $h$ , tal que

$$\|(\boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \mathbf{u}_h)\|_{\mathbb{H} \times \mathbf{Q}} \leq C_1 \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}.$$

Por otra parte, sea  $(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$  la única solución del problema continuo (2.2.2) y asuma que  $\boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathbb{H}^s(\Omega)$ ,  $\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathbf{H}^s(\Omega)$ , y  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(\Omega)$ , para algún  $s \in (0, k+1]$ . Entonces, existe  $C_2 > 0$ , independiente de  $h$ , tal que

$$\|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{\mathbf{div},\Omega} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq C_2 h^s \{ \|\boldsymbol{\sigma}_0\|_{s,\Omega} + \|\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_0\|_{s,\Omega} + \|\mathbf{u}\|_{s,\Omega} \}.$$

*Demostración.* Dado que los subespacios de elementos finitos  $\mathbb{H}_{h,0}$  y  $\mathbf{Q}_h$  satisfacen las hipótesis (H.0), (H.1) y (H.2), la demostración se sigue aplicando los Teoremas 2.3.1, Teorema 2.4.1, y propiedades (2.5.2), (2.5.3).  $\square$

Finalmente, del Corolario 2.4.1 y del Teorema 2.5.1 obtenemos la convergencia de la presión obtenida a partir del post-proceso introducido en (2.4.13).

**Corolario 2.5.1.** *Sea  $(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$  la única solución del problema continuo (2.2.2), y  $p \in L_0^2(\Omega)$  dado por (2.4.12). Además sea  $p_h$  la presión discreta calculada por la fórmula de post-proceso (2.4.13). Asuma las hipótesis del Teorema 2.5.1. Entonces, existe  $C > 0$ , independiente de  $h$ , tal que*

$$\|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^s \{ \|\boldsymbol{\sigma}_0\|_{s,\Omega} + \|\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_0\|_{s,\Omega} + \|\mathbf{u}\|_{s,\Omega} \}.$$

### 2.5.2. Elementos de Brezzi-Douglas-Marini

Ahora, para cada entero  $k \geq 0$ , introducimos los siguientes espacios discretos:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_h &:= \{ \tau \in \mathbf{H}(\mathbf{div}; \Omega) : \tau|_T \in \mathbb{P}_{k+1}(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \}, \\ Q_h &:= \{ v \in L^2(\Omega) : v|_T \in \mathbb{P}_k(T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \}. \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

Observamos que el espacio producto  $\mathbf{H}_h \times Q_h$  constituye el elemento de aproximación finita para problemas mixtos introducidos por Brezzi, Douglas y Marini (BDM) (ver, por ejemplo [6]).

Similarmente al caso anterior, se sabe que estos subespacios satisfacen las siguientes propiedades de aproximación (ver, por ejemplo Teorema 3.16 en [27]):

Para cada  $s \in (0, k+1]$  y para cada  $\tau \in \mathbf{H}^s(\Omega)$ , con  $\mathbf{div} \tau \in H^s(\Omega)$ , existe  $\tau_h \in \mathbf{H}_h$ , tal que

$$\|\tau - \tau_h\|_{\mathbf{div}, \Omega} \leq Ch^s \{ \|\tau\|_{s,\Omega} + \|\mathbf{div} \tau\|_{s,\Omega} \}. \tag{2.5.6}$$

Para cada  $s \in [0, k+1]$  y para cada  $v \in H^s(\Omega)$  existe  $v_h \in Q_h$  tal que

$$\|v - v_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^s \|v\|_{s,\Omega}. \tag{2.5.7}$$



Por otra parte, los espacios discretos  $\mathbb{H}_h$  y  $\mathbf{Q}_h$  satisfacen las hipótesis **(H.0)**, **(H.1)** y **(H.2)**. Para la demostración de la condición inf-sup (2.3.4) en **(H.2)**, solo comentamos que se sigue análogamente al caso de los elementos de Raviart-Thomas (ver, otra vez [24, Lema 2.4]), recordando que también es posible construir un operador de Fortin utilizando la proyección-BDM.

Ahora, establecemos la existencia y unicidad, y convergencia del esquema de Galerkin (2.3.3) para esta elección particular de espacios.

**Teorema 2.5.2.** *Asuma que*

$$\max\{C_{WP}, \hat{C}_{WP}\} \left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{2}, \quad (2.5.8)$$

con  $C_{WP}$  y  $\hat{C}_{WP}$  definido en (2.2.24) y (2.3.8), respectivamente. Además, sean  $\mathbb{H}_{h,0}$  y  $\mathbf{Q}_h$  los subespacios de elementos finitos definidos por (2.3.2) en términos de los espacios discretos específicos dados por (2.5.5). Entonces, el esquema de Galerkin (2.3.3) tiene una única solución  $(\boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \mathbf{u}_h) \in \mathbb{H}_{h,0} \times \mathbf{Q}_h$  y existe  $C_1 > 0$ , independiente de  $h$ , tal que

$$\|(\boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \mathbf{u}_h)\|_{\mathbb{H} \times \mathbf{Q}} \leq C_1 \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}.$$

Por otra parte, sea  $(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$ , la única solución del problema continuo (2.2.2), y asuma que  $\boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathbb{H}^s(\Omega)$ ,  $\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathbf{H}^s(\Omega)$ , y  $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(\Omega)$ , para algún  $s \in (0, k+1]$ . Entonces, existe  $C_2 > 0$ , independiente de  $h$ , tal que

$$\|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{\mathbf{div},\Omega} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq C_2 h^s \{ \|\boldsymbol{\sigma}_0\|_{s,\Omega} + \|\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_0\|_{s,\Omega} + \|\mathbf{u}\|_{s,\Omega} \}.$$

*Demostración.* Dado que los subespacios de elementos finitos  $\mathbb{H}_{h,0}$  y  $\mathbf{Q}_h$  satisfacen las hipótesis **(H.0)**, **(H.1)** y **(H.2)**, la demostración es una aplicación directa de los Teoremas 2.3.1, Teorema 2.4.1, y propiedades (2.5.6), (2.5.7).  $\square$

Concluimos esta sección estableciendo la convergencia para la presión post-procesada, dada por la fórmula (2.4.13). Su demostración se sigue del Corolario 2.4.1 y del Teorema 2.5.2.

**Corolario 2.5.2.** *Sea  $(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$  la única solución del problema continuo (2.2.2), y  $p \in L_0^2(\Omega)$  dado por (2.4.12). Además sea  $p_h$  la presión discreta calculada por la fórmula de post-proceso (2.4.13). Asuma las hipótesis del Teorema 2.5.2. Entonces, existe  $C > 0$ , independiente de  $h$ , tal que*

$$\|p - p_h\|_{0,\Omega} \leq Ch^s \{ \|\boldsymbol{\sigma}_0\|_{s,\Omega} + \|\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_0\|_{s,\Omega} + \|\mathbf{u}\|_{s,\Omega} \}.$$

## 2.6. Resultados numéricos del análisis a priori

En esta sección presentamos un ejemplo numérico en  $\mathbb{R}^2$  del análisis a priori con la finalidad de ilustrar el buen funcionamiento del esquema de elementos finitos mixto (2.3.3). Aquí consideramos los subespacios de elementos finitos específicos  $\mathbb{H}_{h,0}$  y  $\mathbf{Q}_h$  definidos en términos de los espacios (2.5.1), con  $k = 0$ . La condición de integral de media nula para tensores en el espacio  $\mathbb{H}_{h,0}$  se impone via un multiplicador de Lagrange. En lo que sigue,  $N$  es el número total de grados de libertad de  $\mathbb{H}_{h,0} \times \mathbf{Q}_h$ . Denotando por  $(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$  y  $(\boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \mathbf{u}_h) \in \mathbb{H}_{h,0} \times \mathbf{Q}_h$ , las soluciones de (2.2.2) y (2.3.3), respectivamente, los errores individuales se definen por

$$e(\boldsymbol{\sigma}_0) := \|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{\mathbf{div},\Omega}, \quad e(\mathbf{u}) := \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega}, \quad e(p) := \|p - p_h\|_{0,\Omega},$$

donde la presión aproximada  $p_h$  es calculada por la fórmula de post-proceso (2.4.13). Además, definimos la tasa experimental de convergencia

$$r(\boldsymbol{\sigma}_0) := \frac{\log(e(\boldsymbol{\sigma}_0)/e'(\boldsymbol{\sigma}_0))}{\log(h/h')}, \quad r(\mathbf{u}) := \frac{\log(e(\mathbf{u})/e'(\mathbf{u}))}{\log(h/h')}, \quad r(p) := \frac{\log(e(p)/e'(p))}{\log(h/h')},$$

donde  $h$  y  $h'$  son dos tamaños de mallas con errores consecutivos  $e$  y  $e'$ , respectivamente.

En lo que sigue, consideramos la región  $\Omega := (-1, 1) \times (-1, 1)$  y definimos la función de densidad

$$\rho(x_1, x_2) := \exp(\mu(x_1 + x_2)) \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega,$$

donde  $\mu$  es un parámetro en  $\mathbb{R}$ . Observamos que

$$\left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} = |\mu|, \quad (2.6.1)$$

y así, como veremos en la Figura 2.4, y como se predijo en (2.4.5), el buen desempeño de nuestro método en este ejemplo particular, depende fuértemente de la elección del parámetro  $\mu$ .

A continuación, elegimos el dato  $\mathbf{f}$  tal que la solución exacta está dada por las funciones suaves

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x_1, x_2) &= \frac{\text{curl}(\sin^2(\pi x_1) \sin^2(\pi x_2))}{\rho(x_1, x_2)} \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega, \\ p(x_1, x_2) &= x_1 \sin(x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega, \end{aligned}$$

donde  $\text{curl } \varphi := \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)$ , para alguna función suficientemente suave  $\varphi$ .

Los resultados numéricos que se muestran a continuación fueron obtenidos usando un código MATLAB. En la Tabla 2.1 resumimos la convergencia de nuestro esquema de elementos finitos mixto (2.3.3), con  $\mu = 2$  y para una sucesión de triangulaciones regulares del dominio computacional  $\Omega$ . Observamos que, la tasa experimental de convergencia  $O(h)$ , predicho por el Teorema 2.5.1, con  $s = 1$  es alcanzado en todas las incógnitas. Para ilustrar el buen comportamiento de nuestro esquema, mostramos

en las Figuras 2.1 y 2.2 algunas componentes de la solución aproximada (izquierda) y la exacta (derecha) de nuestro ejemplo para  $N = 82177$ . También mostramos en la Figura 2.3 la presión aproximada (izquierda) y la exacta (derecha). Vemos de estas figuras que nuestro método de elementos finitos empleado provee buenas aproximaciones de las incógnitas. Sin embargo, observamos que la presión discreta  $p_h$ , calculada vía la fórmula de post-proceso (2.4.13), presenta algunas oscilaciones, quizás debido a que  $\nabla \rho$  no es una función polinomial en cada elemento. A pesar de este problema, la Tabla 2.1 confirma el hecho que  $p_h$  converge a  $p$  con tasa de convergencia optimal.

Finalmente, teniendo en mente las hipótesis (2.4.5), en la Figura 2.4 mostramos la relación entre  $\mu$  (cf. (2.6.1)) y el número de condición de la matriz global dada por el lado izquierdo de (2.3.3), calculado con el comando *condest* de MATLAB, para una malla fija de tamaño  $h = 1/4$ . Observamos aquí que el número de condición es estable para  $|\mu| \leq 6$ , y explota para  $|\mu| > 6$ . Este fenómeno muestra que el supuesto (2.4.5), más allá de ser sólo una hipótesis teórica, en la práctica, asegura la estabilidad del método numérico para valores pequeños de  $\|\frac{\nabla \rho}{\rho}\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)}$ .

## 2.6. Resultados numéricos del análisis a priori

---

Tabla 2.1: Grados de libertad, tamaños de mallas, errores, y tasas de convergencia.

$N$	$h$	$e(\boldsymbol{\sigma}_0)$	$r(\boldsymbol{\sigma}_0)$	$e(\mathbf{u})$	$r(\mathbf{u})$	$e(p)$	$r(p)$
89	1	1.423e+02	–	3.068e+01	–	1.180e+01	–
337	1/2	3.869e+01	1.956	1.777e+01	0.820	1.051e+01	0.174
1313	1/4	1.351e+01	1.548	1.058e+01	0.763	5.642e+00	0.915
5185	1/8	5.882e+00	1.211	5.477e+00	0.959	2.833e+00	1.003
20609	1/16	2.812e+00	1.070	2.757e+00	0.995	1.410e+00	1.011
82177	1/32	1.389e+00	1.020	1.380e+00	1.000	7.037e-01	1.005
328193	1/64	6.924e-01	1.006	6.904e-01	1.001	3.517e-01	1.002

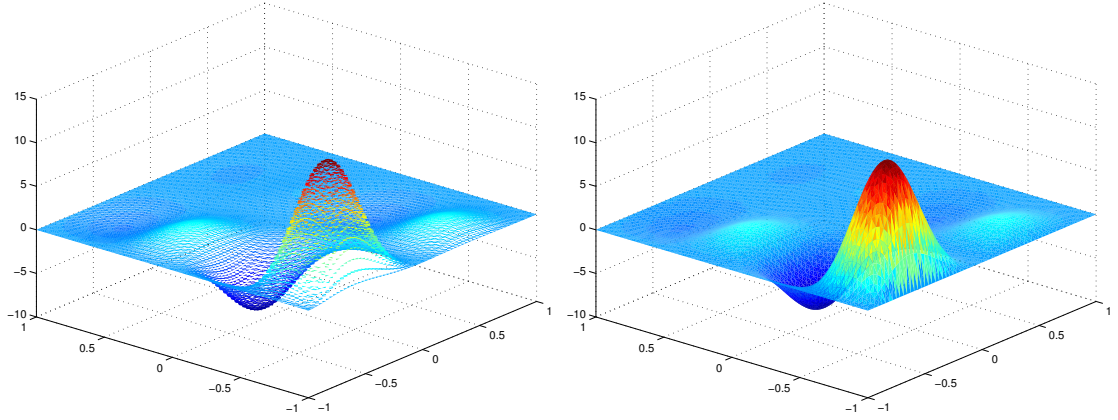


Figura 2.1: Primera componente de  $\mathbf{u}_h$  y  $\mathbf{u}$  para  $N = 82177$ .

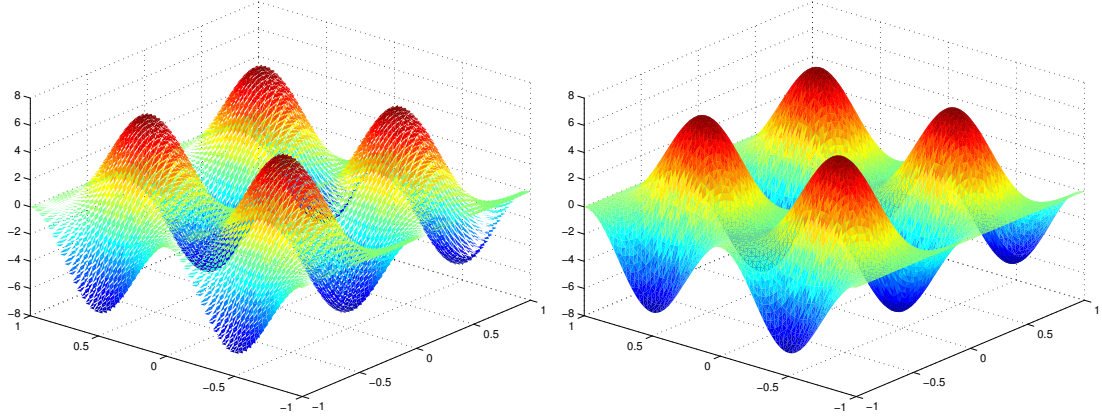


Figura 2.2:  $\sigma_{21,h}$  y  $\sigma_{21}$  para  $N = 82177$ .

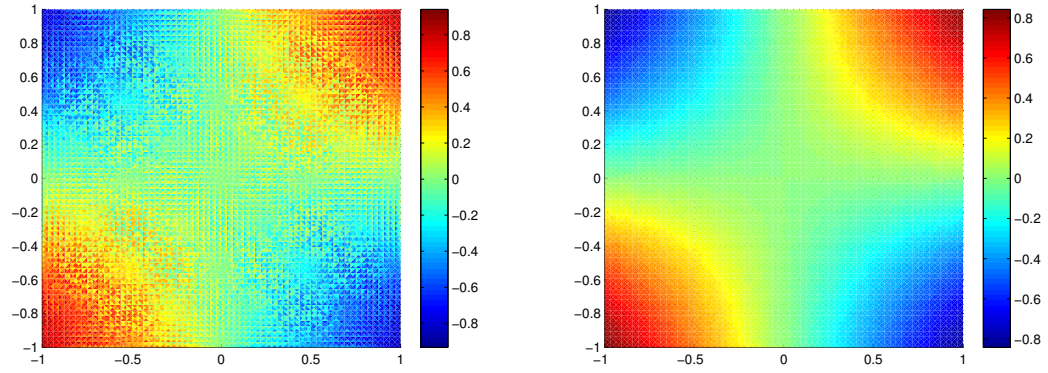


Figura 2.3:  $p_h$  y  $p$  para  $N = 82177$ .

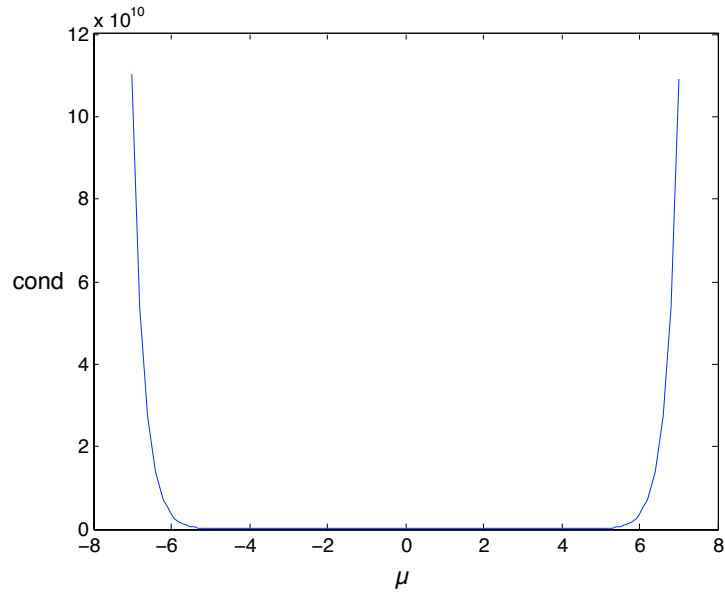


Figura 2.4:  $\mu$  v/s número de condición para  $h = 1/4$ .

## Capítulo 3

# Estimador de error a posteriori residual

En este capítulo introducimos y analizamos un estimador de error a posteriori residual confiable y eficiente, para el problema (2.2.2). Los espacios discretos que utilizamos para el análisis del estimador de error a posteriori residual son los elementos de Raviart-Thomas local de orden  $k$  y polinomios de grado  $k$  para el pseudoefuerzo y la velocidad, respectivamente, los cuales son descritos en la Sección 2.5.1.

En lo que sigue, por simplicidad, nos restringiremos al caso bidimensional. Para comenzar, fijamos notaciones y resultados previos.

### 3.1. Preliminares

En primer lugar, en el siguiente teorema establecemos que la única solución de (2.1.6), resuelve el problema original descrito en la Sección 2.1.1. Observamos que no necesitamos hipótesis de regularidad adicionales en los datos, solo se requiere  $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ .



**Teorema 3.1.1.** *Sea  $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \in \mathbb{H} \times \mathbf{Q}$  la única solución de la formulación variacional (2.1.6), tal que  $(\text{tr } \boldsymbol{\sigma} + \nu \mathbf{u} \cdot \nabla \rho, 1)_\Omega = 0$ . Entonces  $\frac{\nu^{-1}}{\rho} \boldsymbol{\sigma}^D = \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \left( \mathbf{u} \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \mathbf{I}$  en  $\Omega$ ,  $-\text{div } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}$  en  $\Omega$ ,  $\mathbf{u} = 0$  sobre  $\Gamma$ , y  $(\text{tr } \boldsymbol{\sigma}, 1)_\Omega = -\nu(\mathbf{u} \cdot \nabla \rho, 1)_\Omega$*

*Demostración.* Básicamente se sigue aplicando integración por partes hacia atrás en (2.1.6) y utilizando funciones test adecuadas. Omitimos más detalles.  $\square$

**Observación 3.1.1.** *Es fácil ver del Teorema 3.1.1 y la ecuación (2.1.7) que  $\boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathbb{H}_0$  satisface  $\frac{\nu^{-1}}{\rho} \boldsymbol{\sigma}_0^D = \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \left( \mathbf{u} \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \mathbf{I}$  en  $\Omega$  y  $-\text{div } \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{f}$  en  $\Omega$ . Este resultado y el Teorema 3.1.1 serán utilizados posteriormente en la Sección 3.3 para probar la eficiencia de nuestro estimador de error a posteriori.*

Ahora, fijamos algunas notaciones. Para cada  $T \in \mathcal{T}_h$ , sea  $\mathcal{E}(T)$  el conjunto de los lados de  $T$ , y denotemos por  $\mathcal{E}_h$  el conjunto de todos los lado de  $\mathcal{T}_h$ , subdividido como:

$$\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h(\Gamma) \cup \mathcal{E}_h(\Omega),$$

donde  $\mathcal{E}_h(\Gamma) := \{e \in \mathcal{E}_h : e \subseteq \Gamma\}$  y  $\mathcal{E}_h(\Omega) := \{e \in \mathcal{E}_h : e \subseteq \Omega\}$ . En lo que sigue,  $h_e$  representará el diámetro del lado  $e$ . También, para cada lado  $e \in \mathcal{E}_h$ , fijamos un vector normal unitario  $\mathbf{n}_e := (n_1, n_2)^t$  al lado  $e$  (su orientación particular no es relevante) y el correspondiente vector tangencial unitario  $\mathbf{t}_e := (-n_2, n_1)^t$  a lo largo de  $e$ . Entonces, dado  $\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$  y  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{L}^2(\Omega)$  tal que  $\mathbf{v}|_T \in [C(T)]^2$  y  $\boldsymbol{\tau}|_T \in [C(T)]^{2 \times 2}$ , respectivamente, para cada  $T \in \mathcal{T}_h$ , sean  $[\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_e]$  y  $[\boldsymbol{\tau} \mathbf{t}_e]$  el salto tangencial de  $\mathbf{v}$  y  $\boldsymbol{\tau}$ , a través de  $e$ , esto es  $[\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_e] := \{(\mathbf{v}|_{T'})|_e - (\mathbf{v}|_{T''})|_e\} \cdot \mathbf{t}_e$  y  $[\boldsymbol{\tau} \mathbf{t}_e] := \{(\boldsymbol{\tau}|_{T'})|_e - (\boldsymbol{\tau}|_{T''})|_e\} \mathbf{t}_e$ , respectivamente. De ahora en adelante, cuando no haya ambigüedad, simplemente escribiremos  $\mathbf{t}$  y  $\mathbf{n}$  en lugar de  $\mathbf{t}_e$  y  $\mathbf{n}_e$ , respectivamente.

Por otro lado, para campos escalares, vectoriales y tensoriales suficientemente

suaves  $q$ ,  $\mathbf{v} := (v_1, v_2)^t$  y  $\boldsymbol{\tau} := (\tau_{ij})_{2 \times 2}$ , respectivamente, sea

$$\mathbf{curl} \mathbf{v} := \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & -\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & -\frac{\partial v_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}, \quad \text{curl } q := \left( \frac{\partial q}{\partial x_2}, -\frac{\partial q}{\partial x_1} \right)^t,$$

$$\text{rot } \mathbf{v} := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \quad \text{y} \quad \mathbf{rot } \boldsymbol{\tau} := \left( \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_2}, \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} \right)^t.$$

Finalmente, sean  $(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$  y  $(\boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \mathbf{u}_h) \in \mathbb{H}_{h,0} \times \mathbf{Q}_h$  las únicas soluciones de las formulaciones continuas y discretas (2.2.2) y (2.3.3), respectivamente. Entonces, el estimador de error a posteriori global se define por:

$$\Theta := \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \Theta_T^2 \right\}^{1/2}, \quad (3.1.1)$$

donde, para cada  $T \in \mathcal{T}_h$ :

$$\begin{aligned} \Theta_T^2 &:= \|\mathbf{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{0,T}^2 + h_T^2 \left\| \mathbf{rot} \left( \frac{\nu^{-1}}{\rho} \boldsymbol{\sigma}_{h,0}^D - \frac{1}{2} \left( \mathbf{u}_h \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \mathbf{I} \right) \right\|_{0,T}^2 \\ &+ h_T^2 \left\| \nabla \mathbf{u}_h - \left( \frac{\nu^{-1}}{\rho} \boldsymbol{\sigma}_{h,0}^D - \frac{1}{2} \left( \mathbf{u}_h \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \mathbf{I} \right) \right\|_{0,T}^2 \\ &+ \sum_{e \in \mathcal{E}(T)} h_e \left\| \left[ \left( \frac{\nu^{-1}}{\rho} \boldsymbol{\sigma}_{h,0}^D - \frac{1}{2} \left( \mathbf{u}_h \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \mathbf{I} \right) \cdot \mathbf{t} \right] \right\|_{0,e}^2. \end{aligned}$$

## 3.2. Confiabilidad del estimador de error a posteriori

El resultado principal de esta sección es establecido en el siguiente teorema.

**Teorema 3.2.1.** *Asuma que*

$$C_{\text{rel}_{\mathbf{u}}} \left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{0,\Omega} \leq \frac{1}{2}, \quad (3.2.1)$$

con

$$C_{\text{rel}_{\mathbf{u}}} := \frac{C_{\text{hel}} \max\{C_I, C_{\Pi}\}}{\sqrt{2}|\Omega|}.$$

Entonces, existe  $C_{\text{rel}} > 0$ , independiente de  $h$ , tal que

$$\|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{\text{div},\Omega} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} \leq C_{\text{rel}} \Theta. \quad (3.2.2)$$

Para derivar el estimador de error a posteriori (3.2.2) recordamos primero que el resultado de dependencia continua dada por (2.2.8) es equivalente a la condición inf-sup global para la formulación continua (2.2.2). Entonces, aplicando esta estimación de error a  $(\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \in \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$ , obtenemos

$$\|(\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{\mathbb{H} \times \mathbf{Q}} \leq C \sup_{(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}} \frac{|\mathcal{R}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})|}{\|(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})\|_{\mathbb{H} \times \mathbf{Q}}}, \quad (3.2.3)$$

donde  $\mathcal{R} : \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  es el funcional residual dado por

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) := a(\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \boldsymbol{\tau}) + b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) + b(\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \mathbf{v}) \quad \forall (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}.$$

Más precisamente, acorde a (2.2.2) y la definición de las formas bilineales  $a$  y  $b$ , encontramos que para cualquier  $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$  se tiene

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) := \mathcal{R}_1(\boldsymbol{\tau}) + \mathcal{R}_2(\mathbf{v}),$$

donde

$$\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\tau}) = - \int_{\Omega} \mathbf{u}_h \cdot \text{div} \boldsymbol{\tau} - \int_{\Omega} \left( \frac{\nu^{-1}}{\rho} \boldsymbol{\sigma}_{h,0}^D - \frac{1}{2} \left( \mathbf{u}_h \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \mathbf{I} \right) : \boldsymbol{\tau}$$

y

$$\mathcal{R}_2(\mathbf{v}) = - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_{h,0})$$

Por lo tanto, el supremo en (3.2.3) puede ser acotado en términos de  $\mathcal{R}_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , lo cual implica

$$\|(\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{\mathbb{H} \times \mathbf{Q}} \leq C \left\{ \|\mathcal{R}_1\|_{\mathbb{H}_0(\mathbf{div}, \Omega)'} + \|\mathcal{R}_2\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)'} \right\}. \quad (3.2.4)$$

De este modo, hemos transformado (3.2.3) en una estimación que involucra la condición inf-sup global sobre cada uno de los espacios que conforman el espacio producto  $\mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$ .

A lo largo de esta sección, proporcionamos cotas superiores adecuadas para cada uno de los términos en el lado derecho de (3.2.4). En primer lugar, establecemos el siguiente lema, cuya demostración se deduce de la aplicación directa de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

**Lema 3.2.1.** *Se tiene que*

$$\|\mathcal{R}_2\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)'} = \|\mathbf{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{0,\Omega} = \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{0,T}^2 \right\}^{1/2} \quad (3.2.5)$$

En lo que sigue, nuestra finalidad es acotar el término  $\|\mathcal{R}_1\|_{\mathbb{H}_0(\mathbf{div}, \Omega)'}$ , para lo cual necesitamos algunos resultados previos. Comenzamos con el siguiente lema que proporciona la existencia de una descomposición de Helmholtz estable para  $\mathbb{H}(\mathbf{div}; \Omega)$ .

**Lema 3.2.2.** *Existe  $C_{\text{hel}} > 0$  tal que cada  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}; \Omega)$  puede ser descompuesto como  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\eta} + \mathbf{curl} \boldsymbol{\chi}$ , donde  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ ,  $\boldsymbol{\chi} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  y*

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{\chi}\|_{1,\Omega} \leq C_{\text{hel}} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{div}, \Omega}$$

*Demostración.* Ver Lema 3.3 en [21]. □

A continuación, recordamos tres conocidos operadores de aproximación: el proyector ortogonal de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  en  $Q_h$  (ver por ejemplo [13]), el interpolante de Raviart-Thomas (ver por ejemplo [6, 26]) y el operador de Clément sobre el espacio de funciones continuas y lineales a trozos (ver [10]).

El proyector ortogonal  $\mathcal{P}_h^k : L^2(\Omega) \rightarrow Q_h$  se caracteriza por la siguiente identidad

$$\int_{\Omega} \mathcal{P}_h^k(v) z_h = \int_{\Omega} v z_h \quad \forall z_h \in Q_h. \quad (3.2.6)$$

Además, se sabe que para cada  $v \in H^{s-m}(\Omega)$ , con  $s \in \{0, \dots, k+1\}$ , se tiene

$$|v - \mathcal{P}_h^k(v)|_{m,T} \leq Ch_T^{s-m} |v|_{s,T} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \forall m \in \{0, \dots, s\}. \quad (3.2.7)$$

El operador de interpolación de Raviart-Thomas  $\Pi_h^k : \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_h$  (recordar el espacio discreto en (2.5.1)), se caracteriza por las siguientes identidades:

$$\int_e (\Pi_h^k \tau \cdot \mathbf{n}) r = \int_e (\tau \cdot \mathbf{n}) r \quad \forall \text{ lado } e \text{ de } \mathcal{T}_h, \forall r \in P_k(e), \text{ cuando } k \geq 0, \quad (3.2.8)$$

y

$$\int_T \Pi_h^k \tau \cdot \mathbf{r} = \int_T \tau \cdot \mathbf{r} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \forall \mathbf{r} \in [P_{k-1}(T)]^2, \text{ cuando } k \geq 1. \quad (3.2.9)$$

Para  $\tau \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ . Como consecuencia de (3.2.8) y (3.2.9), se tiene que

$$\operatorname{div}(\Pi_h^k \tau) = \mathcal{P}_h^k(\operatorname{div} \tau). \quad (3.2.10)$$

Además, el operador  $\Pi_h^k$  satisface las siguientes propiedades de aproximación (ver por ejemplo [6, 30]):

$$\|\tau - \Pi_h^k(\tau)\|_{0,T} \leq c_1 h_T^m |\tau|_{m,T} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad (3.2.11)$$

para cada  $\tau \in \mathbf{H}^m(\Omega)$ , con  $m \in \{1, \dots, k+1\}$ ,

$$\|\operatorname{div}(\tau - \Pi_h^k(\tau))\|_{0,T} \leq c_2 h_T^m |\operatorname{div}(\tau)|_{m,T} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad (3.2.12)$$

para cada  $\tau \in \mathbf{H}^m(\Omega)$  tal que  $\operatorname{div} \tau \in H^m(\Omega)$ , con  $m \in \{0, \dots, k+1\}$ , y

$$\|\tau \cdot \mathbf{n} - \Pi_h^k(\tau) \cdot \mathbf{n}\|_{0,e} \leq c_3 h_e^{1/2} \|\tau\|_{1,T_e} \quad \forall \text{ lado } e \in \mathcal{T}_h, \quad (3.2.13)$$

para cada  $\tau \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ , donde  $T_e \in \mathcal{T}_h$  contiene a  $e$  en su frontera.

El operador de Clément  $\mathbf{I}_h : \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow X_h$  aproxima funciones de  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  por funciones continuas y lineales a trozos, donde

$$X_h := \{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_T \in P_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

A su vez, el operador  $\mathbf{I}_h$  satisface las siguientes propiedades de aproximación (ver [14]):

$$\begin{aligned} \|v - \mathbf{I}_h v\|_{k,T} &\leq c_3 h_T^{1-k} \|v\|_{1,\Delta T} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, k = 0, 1, \\ \|v - \mathbf{I}_h v\|_{0,e} &\leq c_4 h_e^{1/2} \|v\|_{1,\Delta e} \quad \forall e \in \mathcal{E}_h, \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

para todo  $v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ , donde  $\Delta T$  y  $\Delta e$  son la unión de todos los elementos intersectados con  $T$  y  $e$ , respectivamente.

Recordemos que cada operador definido anteriormente es uniformemente acotado, esto es, existen constantes positivos  $C_{\mathcal{P}}$ ,  $C_{\Pi}$ , y  $C_I$ , independientes de  $h$ , tal que

$$\|\mathcal{P}_h^k(v)\|_{0,\Omega} \leq C_{\mathcal{P}} \|v\|_{0,\Omega}, \quad \|\Pi_h^k(\tau)\|_{\operatorname{div},\Omega} \leq C_{\Pi} \|\tau\|_{1,\Omega}, \quad \|\mathbf{I}_h^k(z)\|_{1,\Omega} \leq C_I \|z\|_{1,\Omega}, \quad (3.2.15)$$

para todo  $v \in L^2(\Omega)$ ,  $\tau \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  y  $z \in H^1(\Omega)$ .

En lo que sigue, haremos uso de una versión vectorial de  $\mathbf{I}_h$ , es decir,  $\mathbf{I}_h : \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{X}_h := X_h \times X_h$ , definido componente a componente por  $\mathbf{I}_h$ . Además, haremos uso de

la versión tensorial de  $\Pi_h^k$ , denotada por  $\mathbf{\Pi}_h^k : \mathbb{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{H}_h$ , definida por  $\Pi_h^k$  por filas, y la versión tensorial de  $\mathcal{P}_h^k$ , denotada por  $\mathbf{P}_h^k$ , definida componente a componente por  $\mathcal{P}_h^k$ . Es claro que  $\mathbf{P}_h^k$ ,  $\mathbf{I}_h$ , y  $\mathbf{\Pi}_h^k$  heredan las mismas propiedades de aproximación establecidas anteriormente.

El siguiente lema establece un resultado técnico, el cual es requerido para estimar  $\|\mathcal{R}_1\|_{\mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega)'}.$

**Lema 3.2.3.** *Sea  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{H}^1(\Omega)$  y  $\boldsymbol{\chi} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ , y  $c = \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega} \text{tr} (\mathbf{\Pi}_h^k \boldsymbol{\eta} + \mathbf{curl} (\mathbf{I}_h \boldsymbol{\chi}))$ . Entonces se tiene*

$$|\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{\Pi}_h^k \boldsymbol{\eta})| \leq c_1 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \left\| \nabla \mathbf{u}_h - \left( \frac{\nu^{-1}}{\rho} \boldsymbol{\sigma}_{h,0}^D - \frac{1}{2} \left( \mathbf{u}_h \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \mathbf{I} \right) \right\|_{0,T} \|\boldsymbol{\eta}\|_{1,T}, \quad (3.2.16)$$

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_1(\mathbf{curl} (\boldsymbol{\chi} - \mathbf{I}_h \boldsymbol{\chi}))| &\leq c_2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \left\| \mathbf{rot} \left( \frac{\nu^{-1}}{\rho} \boldsymbol{\sigma}_{h,0}^D - \frac{1}{2} \left( \mathbf{u}_h \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \mathbf{I} \right) \right\|_{0,T} \|\boldsymbol{\chi}\|_{1,\Delta T} \\ &\quad + c_3 \sum_{e \in \mathcal{E}_h(\Omega)} h_e^{1/2} \left\| \left[ \left( \frac{\nu^{-1}}{\rho} \boldsymbol{\sigma}_{h,0}^D - \frac{1}{2} \left( \mathbf{u}_h \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \mathbf{I} \right) \mathbf{t} \right] \right\|_{0,e} \|\boldsymbol{\chi}\|_{1,\Delta e} \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

y

$$|\mathcal{R}_1(c\mathbf{I})| \leq \frac{\max\{C_I, C_{\Pi}\}}{\sqrt{2}|\Omega|} \left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{0,\Omega} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} (\|\boldsymbol{\eta}\|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{\chi}\|_{1,\Omega}). \quad (3.2.18)$$

*Demostración.* En lo que sigue, procederemos de manera similar a la demostración de [20, Lemma 3.6]. Para esto, y por simplicidad, introduciremos primero la siguiente notación

$$\boldsymbol{\zeta}_T := \left( \frac{\nu^{-1}}{\rho} \boldsymbol{\sigma}_{h,0}^D - \frac{1}{2} \left( \mathbf{u}_h \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \right) \Big|_T, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$$

Dado que  $\nabla \mathbf{u}_h|_T \in [P_{k-1}(T)]^{2 \times 2} \forall T \in \mathcal{T}_h$ , de (3.2.9) obtenemos

$$\int_T \nabla \mathbf{u}_h : (\boldsymbol{\eta} - \mathbf{\Pi}_h^k \boldsymbol{\eta}) = 0 \quad \forall T \in \mathcal{T}_h,$$

y acorde a (3.2.10), deducimos de la definición de  $\mathcal{R}_1$  que

$$\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\Pi}_h^k \boldsymbol{\eta}) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\nabla \mathbf{u}_h - \boldsymbol{\zeta}_T) : (\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\Pi}_h^k \boldsymbol{\eta}),$$

lo cual junto a (3.2.11) implica (3.2.16).

Por otro lado, usando que  $\operatorname{div}(\operatorname{curl}(\boldsymbol{\chi} - \mathbf{I}_h \boldsymbol{\chi})) = 0$ , e integrando por partes sobre cada  $T \in \mathcal{T}_h$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1(\operatorname{curl}(\boldsymbol{\chi} - \mathbf{I}_h \boldsymbol{\chi})) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} - \int_T \boldsymbol{\zeta}_T : \operatorname{curl}(\boldsymbol{\chi} - \mathbf{I}_h \boldsymbol{\chi}) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ - \int_T (\boldsymbol{\chi} - \mathbf{I}_h \boldsymbol{\chi}) \cdot \operatorname{rot}(\boldsymbol{\zeta}_T) + \int_{\partial T} (\boldsymbol{\zeta}_T \mathbf{t}) \cdot (\boldsymbol{\chi} - \mathbf{I}_h \boldsymbol{\chi}) \right\} \\ &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\boldsymbol{\chi} - \mathbf{I}_h \boldsymbol{\chi}) \cdot \operatorname{rot}(\boldsymbol{\zeta}_T) + \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \int_e [\boldsymbol{\zeta}_T \mathbf{t}] \cdot (\boldsymbol{\chi} - \mathbf{I}_h \boldsymbol{\chi}), \end{aligned}$$

y entonces, de las propiedades de aproximación de  $\mathbf{I}_h^k$  en (3.2.14), y aplicando la desigualdad de Hölder y la desigualdad triangular, obtenemos (3.2.17).

Finalmente, recordando que  $\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} = 0$  (ver Lema 2.1 en la Sección 2.1.2), y usando la continuidad de  $\boldsymbol{\Pi}_h^k$  y  $\mathbf{I}_h$ , es fácil obtener

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_1(c\mathbf{I})| &= \left| \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\Pi}_h^k \boldsymbol{\eta} + \operatorname{curl}(\mathbf{I}_h \boldsymbol{\chi})) \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right|, \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2|\Omega|}} \left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{0,\Omega} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} (\|\boldsymbol{\Pi}_h^k \boldsymbol{\eta}\|_{0,\Omega} + \|\operatorname{curl}(\mathbf{I}_h \boldsymbol{\chi})\|_{0,\Omega}), \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2|\Omega|}} \left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{0,\Omega} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} (C_{\Pi} \|\boldsymbol{\eta}\|_{1,\Omega} + C_I \|\boldsymbol{\chi}\|_{1,\Omega}), \end{aligned}$$

lo cual implica (3.2.18) y concluye la demostración.  $\square$



El siguiente Lema establece la estimación para  $\mathcal{R}_1$ .

**Lema 3.2.4.** *Existe  $C > 0$ , independiente de  $h$ , tal que*

$$\|\mathcal{R}_1\|_{\mathbb{H}_0(\mathbf{div}, \Omega)'} \leq C \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \widehat{\Theta}_T^2 \right\}^{1/2} + \frac{C_{\text{hel}} \max\{C_I, C_{\Pi}\}}{\sqrt{2|\Omega|}} \left\| \frac{\nabla \rho}{\rho} \right\|_{0, \Omega} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0, \Omega},$$

donde, para cada  $T \in \mathcal{T}_h$ :

$$\begin{aligned} \widehat{\Theta}_T^2 := & h_T^2 \left\| \mathbf{rot} \left( \frac{\nu^{-1}}{\rho} \boldsymbol{\sigma}_{h,0}^D - \frac{1}{2} \left( \mathbf{u}_h \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \mathbf{I} \right) \right\|_{0,T}^2 \\ & + h_T^2 \left\| \nabla \mathbf{u}_h - \left( \frac{\nu^{-1}}{\rho} \boldsymbol{\sigma}_{h,0}^D - \frac{1}{2} \left( \mathbf{u}_h \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \mathbf{I} \right) \right\|_{0,T}^2 \\ & + \sum_{e \in \mathcal{E}(T)} h_e \left\| \left[ \left( \frac{\nu^{-1}}{\rho} \boldsymbol{\sigma}_{h,0}^D - \frac{1}{2} \left( \mathbf{u}_h \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \mathbf{I} \right) \mathbf{t} \right] \right\|_{0,e}^2 \end{aligned}$$

*Demostración.* Sea  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}, \Omega)$ . Se sigue del Lema 3.2.2 que existe  $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{H}^1(\Omega)$  y  $\boldsymbol{\chi} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$  tal que  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\eta} + \mathbf{curl} \boldsymbol{\chi}$  en  $\Omega$  y

$$\|\boldsymbol{\eta}\|_{1, \Omega} + \|\boldsymbol{\chi}\|_{1, \Omega} \leq C_{\text{hel}} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{div}, \Omega}. \quad (3.2.19)$$

Por otro lado, dado que  $\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\tau}_h) = 0 \ \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{H}_{h,0}(\Omega)$ , lo cual es una consecuencia directa de la primera ecuación del esquema de Galerkin (2.3.3), obtenemos

$$\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\tau}) = \mathcal{R}_1(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_h) \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{H}_{h,0}(\Omega).$$

En particular, para  $\boldsymbol{\tau}_h := \boldsymbol{\Pi}_h^k \boldsymbol{\eta} + \mathbf{curl}(\mathbf{I}_h \boldsymbol{\chi}) - c \mathbf{I}$ , con  $c = \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega} \text{tr}(\boldsymbol{\Pi}_h^k \boldsymbol{\eta} + \mathbf{curl}(\mathbf{I}_h \boldsymbol{\chi}))$ ,

obtenemos

$$\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\tau}) = \mathcal{R}_1(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\Pi}_h^k \boldsymbol{\eta}) + \mathcal{R}_1(\mathbf{curl}(\boldsymbol{\chi} - \mathbf{I}_h \boldsymbol{\chi})) + \mathcal{R}_1(c\mathbf{I}).$$

Por lo tanto, la demostración se sigue del Lema 3.2.3, estimación (3.2.19), y el hecho de que el número de triángulos en  $\#\Delta T$  y  $\#\Delta e$  son acotados.  $\square$

Terminamos esta sección observando que la estimación de la confiabilidad (3.2.2) es una consecuencia directa del Lema 3.2.4, y el supuesto (3.2.1).

### 3.3. Eficiencia del estimador del error a posteriori

El resultado principal de esta sección es establecido en el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.1.** *Existe  $C_{\text{eff}} > 0$ , independiente de  $h$ , tal que*

$$C_{\text{eff}}\Theta \leq \|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{\mathbf{div},\Omega} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,\Omega} + \text{h.o.t.}, \quad (3.3.1)$$

donde h.o.t. representa, eventualmente, uno o varios términos de alto orden.

Destacamos de antemano que la demostración de (3.3.1) hace uso frecuente de las identidades dadas en el Teorema 3.1.1 y Observación 3.1.1. Comenzamos con la estimación para el término de orden cero de  $\Theta_T$

**Lema 3.3.1.** *Se tiene que*

$$\|\mathbf{f} + \mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{0,T} \leq \|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{\mathbf{div},T} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$$

*Demostración.* Es suficiente recordar, como se estableció en la observación 3.1.1, que  $\mathbf{f} = -\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma}_0$  en  $\Omega$ .  $\square$

Para obtener las cotas superiores de los términos restantes que definen al estimador del error a posteriori global  $\Theta$  (cf. (3.1.1)), usamos resultados de [10], desigualdades inversas, y técnicas de localización basadas en funciones sobre triángulos y lados. Para finalizar, introducimos notaciones y resultados preliminares. Dado  $T \in \mathcal{T}_h$  y  $e \in \mathcal{E}(T)$ , sean  $\phi_T$  y  $\phi_e$  las funciones usuales definidas sobre triángulos y lados, respectivamente (ver (1.5) y (1.6) en [32]). En particular,  $\phi_T$  satisface  $\phi_T \in \mathbb{P}_3(T)$ ,  $\text{supp}\phi_T \subseteq T$ ,  $\phi_T = 0$  sobre  $\partial T$ , y  $0 \leq \phi_T \leq 1$  en  $T$ . Del mismo modo,  $\phi_e|_T \in \mathbb{P}_2(T)$ ,  $\text{supp}\phi_e \subseteq w_e := \cup\{T' \in \mathcal{T} : e \in \mathcal{E}(T')\}$ ,  $\phi_e = 0$  sobre  $\partial T \setminus e$ , y  $0 \leq \phi_e \leq 1$  en  $w_e$ . También recordamos de [31] que, dado  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , existe un operador extensión  $L : C(e) \rightarrow C(T_e)$  que satisface  $L(p) \in \mathbb{P}_k(T)$  y  $L(p)|_e = p \ \forall p \in \mathbb{P}_k(e)$ . Denotamos por  $\mathbf{L}$  a la versión vectorial de  $L$ , la cual se define componente a componente por  $L$ .

El siguiente lema proporciona algunas propiedades adicionales, de  $\phi_T$ ,  $\phi_e$  y  $L$ .

**Lema 3.3.2.** *Dado  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , existen constantes positivas  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  y  $c_4$ , independientes de  $h$ , tales que para cada triángulo  $T$  y  $e \in \mathcal{E}(T)$ , se tiene*

$$\|\phi_T q\|_{0,T}^2 \leq \|q\|_{0,T}^2 \leq c_1 \|\phi_T^{1/2} q\|_{0,T}^2 \quad \forall q \in \mathbb{P}_k(T), \quad (3.3.2)$$

$$\|\phi_e L(p)\|_{0,e}^2 \leq \|p\|_{0,e}^2 \leq c_2 \|\phi_e^{1/2} p\|_{0,e}^2 \quad \forall p \in \mathbb{P}_k(e), \quad (3.3.3)$$

y

$$c_3 h_e^{1/2} \|p\|_{0,e} \leq \|\phi_e^{1/2} L(p)\|_{0,T} \leq c_4 h_e^{1/2} \|p\|_{0,e} \quad \forall p \in \mathbb{P}_k(e). \quad (3.3.4)$$

*Demostración.* Ver Lema 1.3 en [31]. □

La siguiente estimación inversa también será utilizada.

**Lema 3.3.3.** *Sean  $k, l, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  tal que  $l \leq m$ . Entonces, existe  $c > 0$ , independiente de  $h$ , tal que para cada triángulo  $T$  se tiene*

$$|q|_{m,T} \leq c h_T^{l-m} |q|_{l,T} \quad \forall q \in \mathbb{P}_k(T). \quad (3.3.5)$$

*Demostración.* Ver Teorema 3.2.6 en [13] □

Además, haremos uso de la siguiente estimación para funciones suaves (ver, por ejemplo [29]):

$$\|v\|_{0,e}^2 \leq C(h_e^{-1}\|v\|_{0,T}^2 + h_e|v|_{1,T}^2) \quad \forall v \in H^1(T), \quad (3.3.6)$$

donde  $T$  es un triángulo genérico que tiene a  $e$  como un lado, y  $C$  es una constante que depende solo del ángulo mínimo de  $T$ .

Finalmente, para simplificar la notación, definimos

$$\zeta := \frac{\nu^{-1}}{\rho} \boldsymbol{\sigma}_{h,0}^D - \frac{1}{2} \left( \mathbf{u}_h \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \mathbf{I}, \quad (3.3.7)$$

y

$$\mathcal{M} := \frac{\nu^{-1}}{\rho} (\boldsymbol{\sigma}_{h,0}^D - \boldsymbol{\sigma}_0^D) - \frac{1}{2} \left( (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}) \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \mathbf{I}. \quad (3.3.8)$$

Observemos que

$$\|\mathcal{M}\|_{0,T} \leq c\{\|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{\text{div},T} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,T}\}, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \quad (3.3.9)$$

En lo que sigue, acotamos los términos restantes que definen al estimador de error a posteriori  $\Theta_T$ , cada uno por separado. Estos resultados son presentados en los siguientes tres lemas.

**Lema 3.3.4.** *Existe  $C > 0$ , independiente de  $h$ , tal que*

$$\begin{aligned} h_T \left\| \text{rot} \left( \frac{\nu^{-1}}{\rho} \boldsymbol{\sigma}_{h,0}^D - \frac{1}{2} \left( \mathbf{u}_h \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \mathbf{I} \right) \right\|_{0,T} &\leq C\{\|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{\text{div},T} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,T} \\ &\quad + \text{h.o.t.}\}, \end{aligned}$$

para todo  $T \in \mathcal{T}_h$ .

*Demostración.* En primer lugar, sumando y restando  $\mathbf{P}_h^r(\boldsymbol{\zeta})$ , con  $r \geq k$ , y usando la desigualdad triangular, obtenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{rot}(\boldsymbol{\zeta})\|_{0,T} &\leq \|\mathbf{rot}(\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta})\|_{0,T} + \|\mathbf{rot}(\mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta})\|_{0,T}, \\ &\leq \|\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta}\|_{1,T} + \|\mathbf{rot}(\mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta})\|_{0,T}. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Entonces, en lo que sigue procedemos de forma similar a la de demostración de [10, Lemma 6.1] para estimar  $\|\mathbf{rot}(\mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta})\|_{0,T}$ . En efecto, dado que  $\nabla \mathbf{u} = -\boldsymbol{\zeta} + \mathcal{M} = \frac{\nu^{-1}}{\rho} \boldsymbol{\sigma}_0^D - \frac{1}{2} \left( \mathbf{u} \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \mathbf{I}$  en  $\Omega$ , de (3.3.2), e integrando por partes, obtenemos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{rot}(\mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta})\|_{0,T}^2 &\leq c_1 \|\phi_T^{1/2} \mathbf{rot}(\mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta})\|_{0,T}^2, \\ &= c_1 \int_T \phi_T \mathbf{rot}(\mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta}) \mathbf{rot}(\mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta} + \mathcal{M}), \\ &= c_1 \int_T (\mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta} + \mathcal{M}) : \mathbf{curl}(\phi_T \mathbf{rot}(\mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta})). \end{aligned}$$

Por lo tanto, de (3.3.2), (3.3.5), (3.3.9), obtenemos

$$\|\mathbf{rot}(\mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta})\|_{0,T} \leq Ch_T^{-1} \{ \|\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta}\|_{0,T} + \|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{\mathbf{div},T} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,T} \}, \quad (3.3.11)$$

lo cual junto a (3.2.7) y (3.3.10), implica

$$\begin{aligned} h_T \|\mathbf{rot}(\boldsymbol{\zeta})\|_{0,T} &\leq C \{ h_T \|\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta}\|_{1,T} + \|\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta}\|_{0,T} + \|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{\mathbf{div},T} \\ &\quad + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,T} \}, \\ &\leq C \{ \|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{\mathbf{div},T} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,T} + h_T^{r+1} \|\boldsymbol{\zeta}\|_{r+1,T} \}, \end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración. □

**Lema 3.3.5.** *Existe  $C > 0$ , independiente de  $h$ , tal que*

$$h_T \|\nabla \mathbf{u}_h - \boldsymbol{\zeta}\|_{0,T} \leq C \{h_T \|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{\text{div},T} + (h_T + 1) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,T} + \text{h.o.t.}\},$$

para todo  $T \in \mathcal{T}_h$ .

*Demostración.* Dado  $r \geq k + 1$ , sumamos y restamos  $\mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta}$ , y usamos la desigualdad triangular, para obtener

$$\|\nabla \mathbf{u}_h - \boldsymbol{\zeta}\|_{0,T} \leq \|\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta}\|_{0,T} + \|\nabla \mathbf{u}_h - \mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta}\|_{0,T}. \quad (3.3.12)$$

Entonces, procediendo de manera similar a la demostración de [10, Lemma 6.3], notando que  $\boldsymbol{\zeta} - \mathcal{M} - \nabla \mathbf{u} = 0$  en  $\Omega$ , integrando por partes, y usando (3.3.2), obtenemos que

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{u}_h - \mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta}\|_{0,T}^2 &\leq c_1 \|\phi_T^{1/2} (\nabla \mathbf{u}_h - \mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta})\|_{0,T}^2, \\ &= c_1 \int_T \phi_T (\nabla \mathbf{u}_h - \mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta}) (\boldsymbol{\zeta} - \mathcal{M} + \nabla (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}) - \mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta}), \\ &= c_1 \left\{ \int_T (\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta} - \mathcal{M}) \phi_T (\nabla \mathbf{u}_h - \mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta}) \right. \\ &\quad \left. - \int_T (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}) \cdot \text{div} (\phi_T (\nabla \mathbf{u}_h - \mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta})) \right\}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, aplicando desigualdad de Cauchy-Schwarz y desigualdad triangular, de (3.3.2), (3.3.5), y (3.3.9), obtenemos

$$\|\nabla \mathbf{u}_h - \mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta}\|_{0,T} \leq C \{ \|\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{P}_h^r \boldsymbol{\zeta}\|_{0,T} + \|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{\text{div},T} + (1 + h_T^{-1}) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,T} \},$$

lo cual junto a (3.2.7) y (3.3.12), implican

$$\begin{aligned} h_T \|\nabla \mathbf{u}_h - \boldsymbol{\zeta}\|_{0,T} &\leq C \{h_T \|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{\text{div},T} + (h_T + 1) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,T} \\ &\quad + (h_T + 1) h_T^{r+1} |\boldsymbol{\zeta}|_{r+1,T}\}, \end{aligned}$$

lo cual concluye la demostración.  $\square$

**Lema 3.3.6.** *Existe  $C > 0$ , independiente de  $h$ , tal que*

$$\begin{aligned} h_e^{1/2} \left\| \left[ \left( \frac{\nu^{-1}}{\rho} \boldsymbol{\sigma}_{h,0}^D - \frac{1}{2} \left( \mathbf{u}_h \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \mathbf{I} \right) \mathbf{t} \right] \right\|_{0,e} &\leq C \sum_{T \subseteq w_e} (\|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{\text{div},T} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,T}) \\ &\quad + \text{h.o.t.}, \quad \forall e \in \mathcal{E}_h. \end{aligned}$$

*Demostración.* Dado  $e \in \mathcal{E}_h$  y  $l \geq k$ , sumamos y restamos  $\mathbf{P}_h^l \boldsymbol{\zeta}$ , y utilizamos la desigualdad triangular, para obtener

$$\|[\boldsymbol{\zeta} \mathbf{t}]\|_{0,e} \leq \|[(\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{P}_h^l \boldsymbol{\zeta}) \mathbf{t}]\|_{0,e} + \|[\mathbf{P}_h^l \boldsymbol{\zeta} \mathbf{t}]\|_{0,e}. \quad (3.3.13)$$

Observemos que, de acuerdo a la desigualdad (3.3.6), y el hecho que  $h_e \leq h_T$  para  $T \subseteq w_e$ , se tiene la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} h_e^{1/2} \|[(\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{P}_h^l \boldsymbol{\zeta}) \mathbf{t}]\|_{0,e} &\leq C h_e^{1/2} \left\{ (h_e^{-1/2} \sum_{T \subseteq w_e} \|\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{P}_h^l \boldsymbol{\zeta}\|_{0,T} + h_e^{1/2} \sum_{T \subseteq w_e} |\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{P}_h^l \boldsymbol{\zeta}|_{1,T}) \right\}, \\ &\leq C \sum_{T \subseteq w_e} h_T^{l+1} |\boldsymbol{\zeta}|_{l+1,T}. \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

De este modo, en lo que sigue, procedemos análogamente a la demostración de [10, Lemma 6.2] para acotar  $\|[\mathbf{P}_h^l \boldsymbol{\zeta} \mathbf{t}]\|_{0,e}$ .

Primero, para simplificar la notación, definamos  $\boldsymbol{\kappa} := [\mathbf{P}_h^l \boldsymbol{\zeta} \mathbf{t}]$ . Entonces, usamos

(3.3.3) para obtener

$$\|\boldsymbol{\kappa}\|_{0,e}^2 \leq c_2 \|\phi_e^{1/2} \boldsymbol{\kappa}\|_{0,e}^2 = c_2 \int_e (\phi_e \mathbf{L}(\boldsymbol{\kappa})) \boldsymbol{\kappa}, \quad (3.3.15)$$

donde  $\mathbf{L} : [C(e)]^2 \rightarrow [C(w_e)]^2$  es el operador de extensión definido anteriormente.

Ahora, integrando por partes sobre cada  $T \in w_e$ , y usando que  $-\boldsymbol{\zeta} + \mathcal{M} = \nabla \mathbf{u} = \frac{\nu^{-1}}{\rho} \boldsymbol{\sigma}_0^D - \frac{1}{2} \left( \mathbf{u} \cdot \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \mathbf{I}$  en  $\Omega$ , obtenemos que

$$\int_e (\phi_e \mathbf{L}(\boldsymbol{\kappa})) \boldsymbol{\kappa} = \sum_{T \subseteq w_e} \left\{ \int_T (\mathbf{P}_h^l \boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta} + \mathcal{M}) : \mathbf{curl} (\phi_e \mathbf{L}(\boldsymbol{\kappa})) + \int_T (\phi_e \mathbf{L}(\boldsymbol{\kappa})) \mathbf{rot} (\mathbf{P}_h^l \boldsymbol{\zeta}) \right\}. \quad (3.3.16)$$

Por otro lado, usando las estimaciones (3.3.4), (3.3.5), y el hecho que  $0 \leq \phi_e \leq 1$ , obtenemos

$$\|\phi_e \mathbf{L}(\boldsymbol{\kappa})\|_{0,T} \leq \|\phi_e^{1/2} \mathbf{L}(\boldsymbol{\kappa})\|_{0,T} \leq c h_e^{1/2} \|\boldsymbol{\kappa}\|_{0,e}. \quad (3.3.17)$$

De esta forma, de (3.3.5), (3.3.15) y (3.3.16), deducimos que

$$\|\boldsymbol{\kappa}\|_{0,e}^2 \leq C \sum_{T \subseteq w_e} \left\{ h_T^{-1} (\|\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{P}_h^l \boldsymbol{\zeta}\|_{0,T} + \|\mathcal{M}\|_{0,T}) + \|\mathbf{rot} (\mathbf{P}_h^l \boldsymbol{\zeta})\|_{0,T} \right\} \|\phi_e \mathbf{L}(\boldsymbol{\kappa})\|_{0,T},$$

lo cual junto a (3.3.9), (3.3.11), (3.3.17), implica

$$\|\boldsymbol{\kappa}\|_{0,e} \leq C h_e^{1/2} \sum_{T \subseteq w_e} h_T^{-1} \left\{ \|\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{P}_h^l \boldsymbol{\zeta}\|_{0,T} + \|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{\mathbf{div},T} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,T} \right\}. \quad (3.3.18)$$

Por lo tanto, de (3.3.13), (3.3.18), y el hecho que  $h_e \leq h_T$  para  $T \subseteq w_e$ , obtenemos

$$h_e^{1/2} \|[\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{t}]\|_{0,e} \leq C \left\{ \sum_{T \subseteq w_e} \|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{\mathbf{div},T} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,T} + h_T^{l+1} |\boldsymbol{\zeta}|_{l+1,T} \right\},$$

lo cual concluye la demostración. □



Terminamos esta sección observando que la estimación de la eficiencia (3.3.1) sigue directamente de los Lemas 3.3.4, 3.3.5 y 3.3.6.

### 3.4. Resultados numéricos del análisis a posteriori

En la Sección 2.6 presentamos resultados numéricos que ilustran el rendimiento del esquema de Galerkin (2.3.3) con los subespacios  $\mathbb{H}_{h,0}$  y  $\mathbf{Q}_h$  definidos en la Sección 2.5.1. Ahora proporcionamos dos ejemplos que confirman la confiabilidad y eficiencia del estimador del error a posteriori  $\Theta$  derivado en la Sección 3.1, y mostramos el buen comportamiento asociado al algoritmo adaptativo.

A lo largo de esta sección,  $N$  representa el número total de grados de libertad que definen  $\mathbb{H}_{h,0} \times \mathbf{Q}_h$ . Denotando por  $(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0 \times \mathbf{Q}$  y  $(\boldsymbol{\sigma}_{h,0}, \mathbf{u}_h) \in \mathbb{H}_{h,0} \times \mathbf{Q}_h$ , las soluciones de (2.2.2) y (2.3.3), respectivamente. Los errores individual y total son definidos por

$$e(\boldsymbol{\sigma}_0) := \|\boldsymbol{\sigma}_0 - \boldsymbol{\sigma}_{h,0}\|_{\text{div}, \Omega}, \quad e(\mathbf{u}) := \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0, \Omega} \quad \text{y} \quad e(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}) := \left\{ (e(\boldsymbol{\sigma}_0))^2 + (e(\mathbf{u}))^2 \right\}^{1/2}.$$

El índice de efectividad con respecto a  $\Theta$  está dado por

$$\text{eff}(\Theta) := e(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}) / \Theta.$$

Además, definimos las tasas experimentales de convergencia

$$r(\boldsymbol{\sigma}_0) := \frac{\log(e(\boldsymbol{\sigma}_0)/e'(\boldsymbol{\sigma}_0))}{\log(h/h')}, \quad r(\mathbf{u}) := \frac{\log(e(\mathbf{u})/e'(\mathbf{u}))}{\log(h/h')}$$

y

$$r(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}) := \frac{\log(e(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u})/e'(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u}))}{\log(h/h')},$$

donde  $h$  y  $h'$  son dos tamaños de mallas consecutivas con errores  $e$  y  $e'$ . Sin embargo, cuando el algoritmo adaptativo es aplicado (ver detalles abajo), la expresión  $\log(h/h')$  que aparece en los cálculos de las tasas anteriores se sustituye por  $-\frac{1}{2} \log(N/N')$ , donde  $N$  y  $N'$  denotan los correspondientes grados de libertad de cada triangulación.

Los ejemplos que se considerarán en esta sección son descritos a continuación. Para los dos ejemplos escogemos  $\nu = 1$ . El Ejemplo 1 es utilizado para corroborar la confiabilidad y eficiencia del estimador del error a posteriori  $\Theta$ . El Ejemplo 2 es utilizado para ilustrar el buen comportamiento del algoritmo adaptativo asociado, el cual aplica el siguiente procedimiento de [32]:

- 1) Comenzar con una malla gruesa  $\mathcal{T}_h$ .
- 2) Resolver el problema discreto (2.3.3) para la malla actual  $\mathcal{T}_h$ .
- 3) Calcular  $\Theta_T := \Theta$  para cada triángulo  $T \in \mathcal{T}_h$ .
- 4) Comprobar el criterio de detención y decidir si hay que terminar o ir al paso siguiente.
- 5) Usar refinamiento *blue-green* sobre los  $T' \in \mathcal{T}_h$  cuyo indicador  $\Theta_{T'}$  satisface

$$\Theta_{T'} \geq \frac{1}{2} \max_{T \in \mathcal{T}_h} \{\Theta_T : T \in \mathcal{T}_h\}.$$

- 6) Definir la malla resultante como la malla actual  $\mathcal{T}_h$ , e ir al paso 2.

En el Ejemplo 1 consideramos la región  $\Omega := (-1, 1)^2$ , y escogemos la densidad

$$\rho(x_1, x_2) = \exp(2(x_1 + x_2)) \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega,$$

y el dato  $\mathbf{f}$  de manera que la solución exacta está dada por las funciones suaves

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(x_1, x_2) &= \frac{1}{\rho(x_1, x_2)} \text{curl} \left( \sin^2(\pi x_1) \sin^2(\pi x_2) \right) \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega, \\ p(x_1, x_2) &= x_1 \sin(x_2) \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega.\end{aligned}$$

En el Ejemplo 2 consideramos el dominio en  $L$  dado por  $\Omega := (-1, 1)^2 \setminus [0, 1]^2$ . Entonces escogemos la densidad

$$\rho(x_1, x_2) = (x_1 - 0.01)^2 + (x_2 - 0.01)^2 \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega,$$

y el dato  $\mathbf{f}$  de manera que la solución exacta está dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(x_1, x_2) &= \frac{1}{\rho(x_1, x_2)} \text{curl} \left( x_1^2 x_2^2 (x_1^2 - 1)^2 (x_2^2 - 1)^2 \right) \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega, \\ p(x_1, x_2) &= \frac{x_1 - 0.01}{(x_1 - 0.01)^2 + (x_2 - 0.01)^2} + p_0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \Omega, \quad p_0 = 0.4153036413.\end{aligned}$$

Observar que la velocidad del fluido  $\mathbf{u}$  y la presión del fluido tiene gradientes altos alrededor del origen.

Los resultados numéricos que se muestran a continuación fueron obtenidos usando un código MATLAB. En la Tabla 3.2 resumimos la historia de convergencia del método de elementos finitos mixtos (2.3.3), aplicado al Ejemplo 1, para una sucesión de triangulaciones uniforme del dominio. Observamos allí, mirando las correspondientes tasas experimentales de convergencia, que el  $O(h)$  predicho por el Teorema 2.5.1 (con  $s = 1$ ) se alcanza en todas las incógnitas. Además, observamos que el índice de efectividad  $\text{eff}(\Theta)$  permanece siempre en una vecindad de 0.1, lo cual ilustra la confiabilidad y eficiencia de  $\Theta$  en el caso de la solución periódica.

Luego, en la Tablas 3.2 - 3.3 proporcionamos la historia de convergencia de los esquemas uniforme y adaptativo, aplicado al Ejemplo 2. Observamos que los errores

del procedimiento adaptativo disminuyen más rápidamente que los obtenidos por el uniforme, lo que es confirmado por las tasas experimentales globales de convergencia proporcionadas allí. Este hecho es también ilustrado en la Figura 3.1 donde mostramos los errores totales  $e(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u})$  vs. el número de grados de libertad  $N$  para ambos refinamientos. Como se muestra para los valores de  $r(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u})$ , el método adaptativo es capaz de mantener la tasa de convergencia quasi-optimal  $\mathcal{O}(h)$  para el error total. Además, el índice de efectividad queda acotado superior e inferiormente, lo cual confirma la confiabilidad y eficiencia de  $\Theta$  en este caso. Finalmente, en la Figura 3.2 se muestran algunas mallas intermedias obtenidas con el refinamiento adaptativo. Observar que el método es capaz de reconocer la región de altos gradientes de el Ejemplos 2.

### 3.4. Resultados numéricos del análisis a posteriori

---

Tabla 3.1: EJEMPLO 1, esquema uniforme

N	h	$e(\boldsymbol{\sigma}_0)$	$r(\boldsymbol{\sigma}_0)$	$e(\mathbf{u})$	$r(\mathbf{u})$	$e(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u})$	$r(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u})$
337	1/2	3.869e+01	—	1.777e+01	—	4.258e+01	—
1313	1/4	1.351e+01	1.548	1.058e+01	0.763	1.716e+01	1.337
5185	1/8	5.882e+00	1.211	5.477e+00	0.959	8.037e+00	1.104
20609	1/16	2.812e+00	1.070	2.757e+00	0.995	3.938e+00	1.034
82177	1/32	1.389e+00	1.020	1.380e+00	1.000	1.958e+00	1.010
328193	1/64	6.924e-01	1.006	6.904e-01	1.001	9.778e-01	1.003

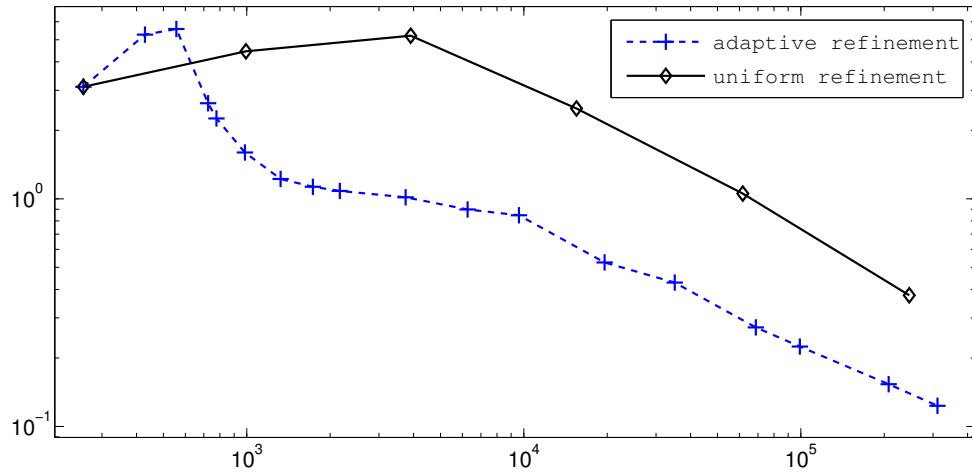
N	h	$\Theta$	$\text{eff}(\Theta)$
337	1/2	3.500e+02	0.122
1313	1/4	1.682e+02	0.102
5185	1/8	8.206e+01	0.098
20609	1/16	3.971e+01	0.099
82177	1/32	1.939e+01	0.101
328193	1/64	9.567e+00	0.102

Tabla 3.2: EJEMPLO 2, esquema uniforme

N	$e(\boldsymbol{\sigma}_0)$	$e(\mathbf{u})$	$e(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u})$	$r(\boldsymbol{\sigma}_0, \mathbf{u})$	$\Theta$	$\text{eff}(\Theta)$
257	2.417e+00	1.955e+00	3.109e+00	—	9.418e+01	0.033
993	3.217e+00	3.074e+00	4.450e+00	-0.530	2.480e+02	0.018
3905	3.369e+00	3.974e+00	5.210e+00	-0.230	5.600e+02	0.009
15489	1.336e+00	2.108e+00	2.496e+00	1.068	3.739e+02	0.007
61697	7.222e-01	7.696e-01	1.055e+00	1.246	1.880e+02	0.006
246273	2.752e-01	2.576e-01	3.769e-01	1.488	8.918e+01	0.004

Tabla 3.3: EJEMPLO 2, esquema adaptativo

N	$e(\sigma_0)$	$e(\mathbf{u})$	$e(\sigma_0, \mathbf{u})$	$r(\sigma_0, \mathbf{u})$	$\Theta$	$\text{eff}(\Theta)$
257	2.417e+00	1.955e+00	3.109e+00	—	9.418e+01	0.033
429	4.304e+00	3.037e+00	5.268e+00	-2.058	2.486e+02	0.021
557	3.876e+00	4.012e+00	5.578e+00	-0.439	5.836e+02	0.010
725	1.691e+00	2.018e+00	2.633e+00	5.697	3.734e+02	0.007
777	1.611e+00	1.580e+00	2.257e+00	4.448	2.385e+02	0.009
985	1.322e+00	8.983e-01	1.599e+00	2.908	1.667e+02	0.010
1325	1.113e+00	5.064e-01	1.223e+00	1.808	1.017e+02	0.012
1733	1.051e+00	4.166e-01	1.130e+00	0.585	6.965e+01	0.016
2167	1.018e+00	3.713e-01	1.084e+00	0.379	5.378e+01	0.020
3745	9.669e-01	3.107e-01	1.016e+00	0.237	3.706e+01	0.027
6269	8.605e-01	2.596e-01	8.988e-01	0.474	2.687e+01	0.033
9603	8.190e-01	2.181e-01	8.475e-01	0.276	2.089e+01	0.041
19569	5.081e-01	1.354e-01	5.258e-01	1.341	1.467e+01	0.036
35055	4.158e-01	1.039e-01	4.286e-01	0.701	1.059e+01	0.040
68769	2.662e-01	5.823e-02	2.725e-01	1.344	7.537e+00	0.036
99177	2.191e-01	4.864e-02	2.244e-01	1.062	6.150e+00	0.036
207481	1.502e-01	3.037e-02	1.533e-01	1.033	4.289e+00	0.036
311277	1.209e-01	2.371e-02	1.233e-01	1.075	3.445e+00	0.036

Figura 3.1: EJEMPLO 2,  $e(\sigma_0, \mathbf{u})$  vs.  $N$  para esquemas uniforme/adaptativo

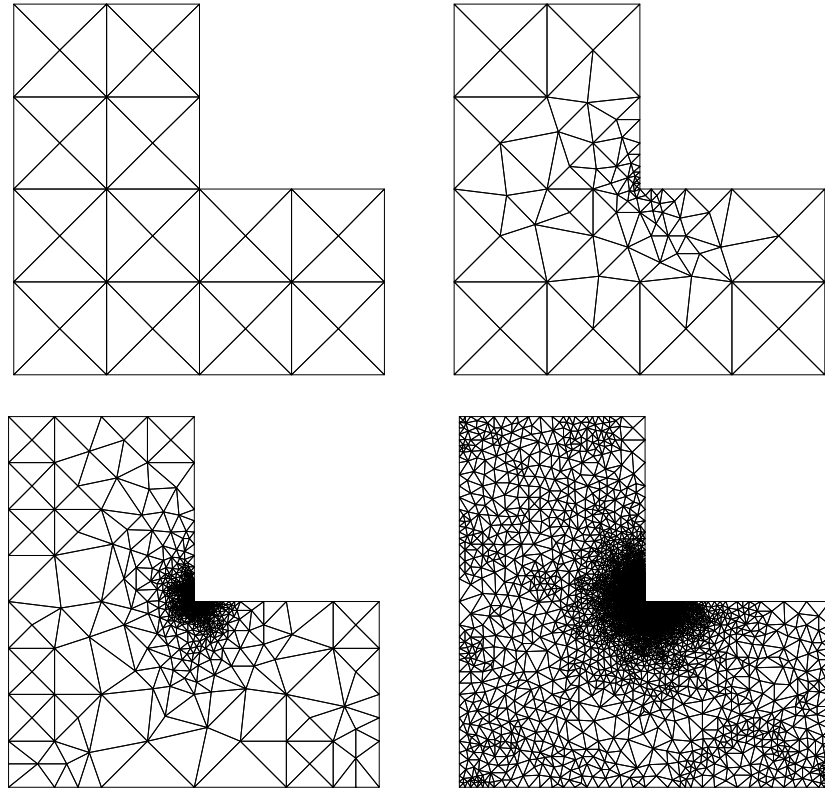


Figura 3.2: Ejemplo 2, mallas adaptadas con 257, 777, 19569 y 311277 grados de libertad

# Capítulo 4

## Conclusiones y trabajo futuro

A continuación se presenta un resumen de los principales aportes de esta Tesis y una descripción del trabajo futuro a desarrollar.

### 4.1. Conclusiones

El objetivo principal de esta tesis ha sido desarrollar un método de elementos finitos mixtos conformes para el problema de Stokes con densidad variable. Para ello, se introdujo un método, que por un lado, permite aproximar el pseudoefuerzo y la velocidad, y por otro, permite recuperar el esfuerzo y la presión, via técnicas de post-proceso. Además, con el fin de verificar el correcto funcionamiento de nuestro método, se han desarrollado códigos computacionales y se han presentado ejemplos numéricos que corroboran los resultados teóricos obtenidos.

Así, al dar término a esta tesis las conclusiones principales, en orden de desarrollo, son:

1. Se propuso un método de elementos finitos mixtos para el problema de Stokes con densidad variable en formulación pseudoefuerzo-velocidad.



2. Se analizó existencia, unicidad y estabilidad del problema continuo.
3. Se analizó existencia, unicidad y estabilidad del problema discreto para espacios genéricos y la respectiva estimación de Cea.
4. Se probó convergencia del esquema discreto para elementos finitos particulares (Raviart-Thomas y BDM).
5. Se propuso un estimador del error residual confiable y eficiente, para el caso 2D con elementos de Raviart-Thomas.
6. Se desarrolló un código en MATLAB para validar los resultados teóricos.

## 4.2. Resultados de la Tesis

1. S. CAUCAO, D. MORA, AND R. OYARZÚA, *Analysis of a mixed-FEM for the pseudostress-velocity formulation of the Stokes problem with varying density*, Preprint 2013-20, Centro de Investigacion en Ingenieria Matematica (CI2MA), UDEC, (2013).
2. S. CAUCAO, D. MORA, AND R. OYARZÚA, *A residual-based a posteriori error estimator for a mixed formulation of the stokes problem with varying density*, In preparation.

## 4.3. Trabajo futuro

1. Extender los resultados obtenidos en esta tesis al problema de Navier-Stokes con densidad variable.
2. Analizar una formulación tipo pseudoefuerzo-velocidad-presión.

### 4.3. Trabajo futuro

---

3. Extender este trabajo al problema original donde la densidad es incógnita. Para ello analizar los problemas de Stokes y Navier-Stokes.
4. Analizar que ocurre con nuestra formulación a nivel discreto considerando espacios no conformes.
5. Estudiar el problema de Stokes con densidad variable en su versión dependiente del tiempo.

# Bibliografía

- [1] S. AGMON, *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems*. Van Nostrand and Princeton and New Jersey, (1965).
- [2] D.N. ARNOLD, *An interior penalty finite element method with discontinuous elements*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 19, pp. 742-760, (1982).
- [3] D.N. ARNOLD AND J. DOUGLAS AND CH.P. GUPTA, *A family of higher order mixed finite element methods for plane elasticity*. Numerische Mathematik, vol. 45, pp. 1-22, (1984).
- [4] C. BERNARDI AND C. CANUTO AND Y. MADAY, *Generalized inf-sup conditions for Chebyshev spectral approximation of the Stokes problem*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 25, pp. 1237-1271, (1988).
- [5] C. BERNARDI AND F. LAVAL AND B. MÉTIVET AND B. PERNAUD-THOMAS, *Finite element approximation of viscous flows with varying density*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 29, pp. 1203-1243, (1992).
- [6] F. BREZZI AND M. FORTIN, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag, (1991).
- [7] Z. CAI AND B. LEE AND P. WANG, *Least-squares methods for incompressible Newtonian fluid flow: Linear stationary problems*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 42, pp. 843-859, (2004).

- [8] Z. CAI AND Y. WANG, *A multigrid method for the pseudostress formulation of Stokes problems*. SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 29, pp. 2078-2095, (2007).
- [9] Z. CAI AND CH. TONG AND P.S. VASSILEVSKI AND CH. WANG, *Mixed finite element methods for incompressible flow: stationary Stokes equations*. Numerical Methods Partial Differential Equations, vol. 26, pp. 957-978, (2009).
- [10] C. CARSTENSEN, *A posteriori error estimate for the mixed finite element method*. Mathematics of Computation, vol. 66, pp. 465-476, (1997).
- [11] C. CARSTENSEN AND G. DOLZMANN, *A posteriori error estimates for mixed FEM in elasticity*. Numerische Mathematik, vol. 81, pp. 187-209, (1998).
- [12] A. CARUSO AND C. GUYON AND B. MÉTIVET, *Navier-Stokes equations with varying density: finite element implementation algorithms*. Stuttgart, (1990).
- [13] P.G. CIARLET, *The finite Element Method for Elliptic Problems*. North-Holland and Amsterdam and New York and Oxford, (1978).
- [14] P. CLÉMENT, *Approximation by finite element functions using local regularisation*. RAIRO Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, vol. 9, pp. 77-84, (1975).
- [15] L. FIGUEROA AND G.N. GATICA AND N. HEUER, *A priori and a posteriori error analysis of an augmented mixed finite element method for incompressible fluid flows*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 198, pp. 280-291, (2008).
- [16] L. FIGUEROA AND G.N. GATICA AND A. MÁRQUEZ, *Augmented mixed finite element methods for the stationary Stokes Equations*. SIAM Journal on Scientific Computing, vol 31. pp. 1082-1119, (2008).

- [17] G.N. GATICA AND M. GONZÁLEZ AND S. MEDDAHI, *A low-order mixed finite element method for a class of quasi-Newtonian Stokes flows. I: A priori error analysis*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 193, pp. 811-892, (2004).
- [18] G.N. GATICA, *Analysis of a new augmented mixed finite element method for linear elasticity allowing  $\mathbb{RT}_0 - \mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_0$  approximations*. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, vol. 40, pp. 1-28, (2006).
- [19] G.N. GATICA AND A. MÁRQUEZ AND M.A. SÁNCHEZ, *Analysis of a velocity-pressure-pseudostress formulation for incompressible flow*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 199, pp. 1064-1079, (2010).
- [20] G.N. GATICA AND R. OYARZÚA AND F.J. SAYAS, *Analysis of fully-mixed finite element methods for the Stokes-Darcy coupled problem*. Mathematics of Computation, vol. 80, pp. 1911-1948, (2011).
- [21] G. N. GATICA AND R. OYARZÚA AND F.J. SAYAS, *A residual-based a posteriori error estimator for a fully-mixed formulation of the Stokes-Darcy coupled problem*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 200, pp. 1877-1891, (2011).
- [22] G.N. GATICA AND L.F. GATICA AND A. MÁRQUEZ, *Augmented mixed finite element methods for a vorticity-based velocity-pressure-stress formulation of the Stokes problem in 2D*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 67, pp. 450-477, (2011).
- [23] G.N. GATICA AND A. MÁRQUEZ AND M A. SÁNCHEZ, *A priori and a posteriori error analyses of a velocity-pseudostress formulation for a class of quasi-Newtonian Stokes flows*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 200, pp. 1619-1636, (2011).

- [24] G.N. GATICA AND A. MÁRQUEZ AND M. A. SÁNCHEZ, *Pseudostress-based mixed finite element methods for the Stokes problem in  $\mathbb{R}^n$  with Dirichlet boundary conditions. I: A priori error analysis*. Communications in Computational Physics, vol. 12, pp. 109-134, (2012).
- [25] G.N. GATICA AND L.F. GATICA AND A. MÁRQUEZ, *Analysis of a pseudostress-based mixed finite element method for the Brinkman model of porous media flow*. Numerische Mathematik, vol. 126, pp. 635-677, (2014).
- [26] V. GIRAULT AND P.A. RAVIART, *Finite Element Methods of Navier–Stokes Equations. Theory and Algorithms*. Springer-Verlag, (1986).
- [27] R. HIPTMAIR, *Finite elements in computational electromagnetism*. Acta Numerica, vol. 11, pp. 237-339, (2002).
- [28] R.A. NICOLAIDES, *Existence and uniqueness and approximation for generalized saddle point problems*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 19, pp. 349-357, (1984).
- [29] D. A. DI PIETRO AND A. ERN, *Mathematical Aspects of Discontinuous Galerkin Methods*. Springer-Verlag, (2012).
- [30] J.E. ROBERTS AND J.M. THOMAS, *Mixed and Hybrid Methods*. P.G. Ciarlet and J.L. Lions (Eds.) and Handbook of Numerical Analysis and Finite Element Methods (Part 1) and vol. II and North-Holland and Amsterdam, (1991)
- [31] R. VERFÜRTH, *A posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 50, pp. 67-83, (1994).
- [32] R. VERFÜRTH, *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*. Wiley Teubner and Chichester, (1996).