

Universidad de Los Lagos
Departamento de Ciencias Exactas



Sistemas Dinámicos Discretos: Aplicación a Fenómenos de Evolución

Por:

Sergio Andrés Caucao Paillán
Tamara Cecilia González Ancar

Seminario Para Optar al Título de Profesor
de Educación Media con Mención en
Matemática y Computación y al Grado
Académico de Licenciado en Educación.

Profesor Guía: Rigoberto Medina Leyton

Octubre, 2010

Osorno, Chile

Índice general

1. Ecuaciones de Recurrencia	5
2. Estabilidad de Sistemas No Lineales en \mathbb{R}^n	16
3. Estabilidad de Sistemas Lineales	22
4. Funciones de Lyapunov	30
5. Aplicaciones a Problemas de Evolución Biológica	38
5.1. Máxima Captura Sustentable	38
5.2. Ecuación Logística Discreta	41
5.3. Propagación Anual de las Plantas	47
6. Aplicaciones a Problemas en Otras Áreas	50
6.1. Renta Nacional	50
6.2. Transmisión de la Información	54
6.3. Fractales	57
6.4. Modelos en Clases de Edades	66
Bibliografía	72

Introducción

La modelación matemática de fenómenos que varían con el tiempo y cuyo estado evoluciona, brinda un campo extremadamente rico para comprender la riqueza y profundidad de la matemática. La naturaleza de los efectos temporales es tan fuerte en nuestras vidas y su experiencia tan profunda, que todos tenemos una gran sensibilidad por todo lo que signifique su modelación.

Los sistemas dinámicos discretos, o ecuaciones en diferencias, aparecen como descripciones naturales de fenómenos de evolución pues muchos modelos del tiempo son discretos y como tales, esas ecuaciones son por derecho propio modelos matemáticos importantes. Los sistemas dinámicos discretos aparecen también en los métodos de discretización de ecuaciones diferenciales.

La teoría de sistemas dinámicos discretos es más rica que la correspondiente teoría de ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, un simple sistema dinámico discreto que resulta de la discretización de una ecuación diferencial (Esquema de Euler) puede tener un comportamiento dinámico muy complicado, como la existencia de órbitas caóticas, las cuales aparecen solamente en ecuaciones diferenciales de orden superior.

Si tratamos de precisar el concepto de sistema dinámico, podríamos decir burdamente que se trata del estudio de sistemas deterministas, es decir, de cómo ciertas cantidades cambian en función de otra, también variable, que frecuentemente suponemos es el tiempo, y que varían de acuerdo a leyes establecidas. Matemáticamente el estudio de la dinámica de sistemas se puede definir como el estudio de iteraciones de funciones $f : S \rightarrow S$, donde S es un conjunto. Si consideramos que esas cantidades cambian a pequeños saltos, entonces tenemos un sistema dinámico. Con más precisión, consideremos

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Un sistema que tiene por soluciones $x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots$ las que deben satisfacer $x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), \dots, x_k = f^k(x_0), \dots$

Nuestro problema consiste en encontrar dichas soluciones y analizar el comportamiento de $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x)$, lo cual no es una tarea fácil, por ello nuestro estudio se sustentará en propiedades que nos permitirá analizar de forma cualitativa el comportamiento de dicho sistema. ([1], [3], [6], [7])

El objetivo principal de este Seminario de Titulación es estudiar propiedades cualita-

tivas de los sistemas dinámicos discretos y su aplicación a la modelización de fenómenos de evolución. En particular estudiar el modelo logístico discreto.

El primer capítulo nos entrega las herramientas necesarias para conocer las soluciones, si es que existen, de las ecuaciones de recurrencia, las cuales veremos pueden ser consideradas como técnicas de conteo. Se definirán punto de equilibrio, función de Lipschitz, estabilidad; y se mostrarán algunos resultados de suma importancia para el desarrollo de la teoría.

A partir del segundo capítulo comenzaremos a generalizar los sistemas dinámicos. En el capítulo anterior, éstos se han presentado para casos escalares. Aquí se presentan como sistemas puesto que los modelos matemáticos consideran varias variables.

La estabilidad es una propiedad cualitativa de los sistemas dinámicos a la que cabe considerar como la más importante de todas. Ello es debido a que, en la práctica, todo sistema debe ser estable. Si un sistema no es estable, normalmente carece de todo interés y utilidad. El estudio de la estabilidad de los sistemas dinámicos ocupa un lugar primordial en el análisis y en el desarrollo de este Seminario.

En el segundo y tercer capítulo se abordará la estabilidad para sistemas no lineales y lineales respectivamente, de modo que se pueda conocer cuál es el comportamiento de las soluciones de este tipo de sistemas.

En el capítulo cuatro se aborda el concepto de Funciones de Lyapunov, método muy poderoso para establecer estabilidad y estabilidad asintótica para sistemas no lineales.

Modelar un fenómeno real mediante un sistema dinámico supone, en primer lugar, expresar el problema mediante una relación matemática, asumiendo ciertas condiciones o aproximaciones. En segundo lugar, resolver o analizar la relación matemática planteada (el sistema dinámico). En tercer lugar, trasladar esta solución a la situación real. A esto nos dedicaremos en los capítulos cinco y seis.

En el capítulo cinco, se analizan tres fenómenos de evolución del área biológica. Primero, “Máxima Captura Sustentable”, aplicación que buscará la cantidad máxima de extracción de un recurso renovable (especie forestal, vegetal, marina, etc) sin alterar la permanencia de este en el ecosistema. En segundo lugar, estudiaremos la “Ecuación Logística Discreta”, uno de los ejemplos más estudiados para el crecimiento de poblaciones que no se modelan bien por un modelo exponencial de crecimiento natural. Finalmente, analizaremos la “Propagación Anual de Plantas”, modelo que tendrá como objetivo describir el número de plantas en alguna generación dada.

En el sexto y último capítulo se abordarán cuatro aplicaciones a problemas de evolución en otras áreas. En primer lugar, la “Renta Nacional”, aplicación a la economía que buscará modelar la renta y su variación respecto al tiempo. Luego, “Transmisión de la Información”, aplicación a través de la cual se modelará el envío de mensajes en un sistema de señalización que únicamente conste de dos señales S_1 y S_2 . En tercer lugar, como aplicación matemática, “Fractales”. Se modelarán el área y perímetro del Triángulo de Sierpinski y los Copos de Nieve de Koch; además la longitud de un espiral generado a partir de las

infinitas iteraciones realizadas a un cuadrado unitario. Finalmente, “Modelos en Clases de Edades” aplicación en que se estudiará una clase de modelos que es posible formar en varias variables y que estarán motivados por el estudio de la evolución de una población donde se hace distinción en las edades de los individuos.

Capítulo 1

Ecuaciones de Recurrencia

Los modelos a tiempo discreto dan origen a ecuaciones de recurrencia, las cuales estudiaremos a continuación.

Supongamos que la transición entre un periodo k -ésimo y el periodo $(k + 1)$ -ésimo ya han sido establecidas a través de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dando origen a la siguiente expresión

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

Esta se denomina ecuación de recurrencia, donde x_0 es un estado inicial del fenómeno en estudio.

Una solución de la ecuación de recurrencia (1.1) es una sucesión

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1} \dots,$$

la cual debe satisfacer

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)) \\ x_3 &= f(x_2) = f(f(f(x_0))) \\ &\vdots \\ x_k &= f(x_{k-1}) = f(f(x_{k-2})) = \dots = f(f(f \dots f(x_0))) \end{aligned}$$

Denotemos por

$$\begin{aligned} f^2(x_0) &= (f \circ f)(x_0) \\ f^3(x_0) &= (f \circ f \circ f)(x_0) \\ f^4(x_0) &= (f \circ f \circ f \circ f)(x_0) \\ &\vdots \\ f^k(x_0) &= \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{k \text{ veces}}(x_0) \end{aligned}$$

$f(x_0)$ se llamará el primer iterado de x_0 bajo f , $f^2(x_0)$ se llamará el segundo iterado de x_0 bajo f , y en general, $f^k(x_0)$ es el k -ésimo iterado de x_0 bajo f .

El conjunto de todos los iterados positivos $\{f^k(x_0) : k \geq 0\}$ se llama órbita de x_0 , y se denotará por $O^+(x_0)$. Este proceso iterativo es un ejemplo de un sistema dinámico discreto.

Si escribimos f^k la composición iterada de f una cantidad k veces, es decir,

$$f^k(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{k \text{ veces}}(x),$$

con $f^0(x) = x$, la solución de la ecuación de recurrencia será

$$x_k = f^k(x_0).$$

En efecto, haciendo $x_k = f^k(x_0)$, tenemos

$$x_{k+1} = f^{k+1}(x_0) = f(f^k(x_0)) = f(x_k).$$

Observaciones:

1) Nos gustaría responder la pregunta: Dado un número real x , ¿Existe $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x)$?, ¿Qué propiedades tiene la sucesión $x, f(x), f^2(x), \dots$?

2) Ecuaciones en diferencia y sistemas dinámicos discretos son dos lados de la misma moneda. Cuando los matemáticos hablan de ecuaciones en diferencia, en general se refieren a la teoría analítica y, cuando hablan de sistemas dinámicos discretos se refieren a los aspectos geométricos y topológicos.

Para estudiar el comportamiento a largo plazo de soluciones, introduciremos el concepto de equilibrio de un sistema a tiempo discreto, el cual es un punto de equilibrio de la función f que define el modelo y una solución de nuestro sistema.

La noción de puntos de equilibrio (estados) es central en el estudio de la dinámica de sistemas físicos. En muchas aplicaciones en biología, economía, física, ingeniería, etc., es deseable que todos los estados (soluciones) de un sistema dado tiendan a su estado de equilibrio (punto). Este es el tema de estudio de la teoría de estabilidad, un tópico de gran importancia para científicos e ingenieros.

Ahora damos la definición formal de punto de equilibrio:

Definición 1.1. Un elemento $x^* \in \text{Dom}(f)$ se denomina **punto de equilibrio** de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si

$$f(x^*) = x^*.$$

Al considerar el modelo a tiempo discreto siguiente

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

un punto de equilibrio de la función f se denomina también un estado de equilibrio de la ecuación de recurrencia (1.2).

Notemos que si la condición inicial x_0 es un punto de equilibrio de la función f , entonces la solución del sistema anterior será $x_k = x_0, \forall k$. Además, si para algún periodo k_0 llegamos a un punto de equilibrio x^* , es decir, $x_{k_0} = x^*$, para algún k_0 , con $f(x^*) = x^*$, entonces la trayectoria de la ecuación a partir de ese instante será constante.

Gráficamente, la existencia de un punto de equilibrio de f (o equilibrio de (1.2)) puede verse como la intersección de la curva que describe la función f con la de la función identidad $I(x) = x$ como se muestra en las Figuras 1.1 y 1.2. Por su parte, la Figura 1.3 muestra una función que no tiene puntos de equilibrio.

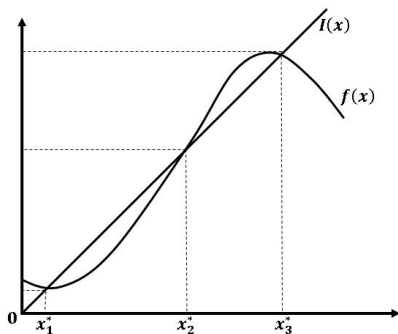


Figura 1.1: Puntos de equilibrio de la función $f(x)$.

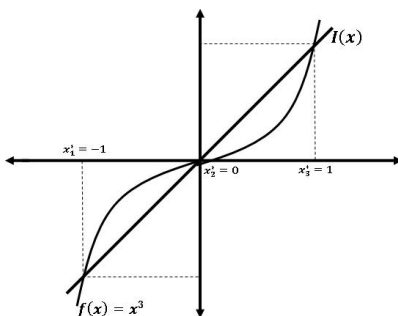


Figura 1.2: Puntos de equilibrio de la función $f(x) = x^3$.

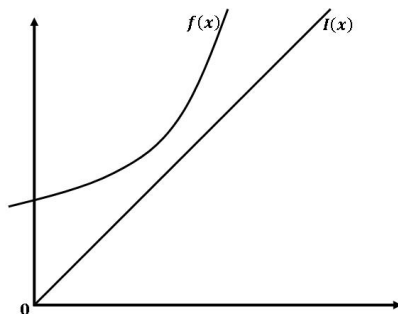


Figura 1.3: Gráfica de una función sin puntos de equilibrio.

Dada una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, determinar si existen y calcular explícitamente puntos de equilibrio puede llegar a ser un problema difícil de resolver ya que esto involucran la resolución de una ecuación ($x^* = f(x^*)$) eventualmente no lineal.

En otras palabras, x^* es una solución constante de (1.2) ya que si $x(0) = x^*$ es un punto inicial, entonces $x_1 = f(x_0) = f(x^*) = x^*, x_2 = f(x_1) = f(x^*) = x^*, \dots$

A continuación, veremos dos resultados que nos aseguran la existencia de puntos de equilibrio para cierta clase de funciones.

Para el primer resultado, introduciremos una clase de funciones que fueron definidas por el matemático alemán Rudolf Lipschitz, constituyéndose en una importante propiedad en el análisis matemático, y cuya relevancia se verá reflejada a lo largo de nuestro trabajo.

Definición 1.2. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice *Lipschitz* si existe una constante $L \geq 0$, tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Si la constante $L < 1$ se dice que la función es **contractiva** o es una **contracción**.

Ejemplo 1.1. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right), x \in \mathbb{R},$$

es contractiva en todo \mathbb{R} .

En efecto,

para $x, y \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left| \operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} \right) - \operatorname{sen} \left(\frac{y}{2} \right) \right| \\
&= \left| 2 \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right) \right] \cos \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2} \right) \right] \right| \\
&\leq 2 \left| \operatorname{sen} \left(\frac{x-y}{4} \right) \right| \left| \cos \left(\frac{x+y}{4} \right) \right| \\
&\leq 2 \left| \operatorname{sen} \left(\frac{x-y}{4} \right) \right| \\
&\leq 2 \left| \frac{x-y}{4} \right| \\
&= \frac{1}{2} |x-y|
\end{aligned}$$

Por lo tanto, f es contractiva en \mathbb{R} con constante $L = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 1.2. Sea $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ una función derivable en $[a, b]$, tal que

$$|g'(x)| \leq k < 1, \quad \text{para algún } k \in \mathbb{R}.$$

Entonces g es contractiva en el intervalo $[a, b]$.

En efecto,

por el Teorema del Valor Medio tenemos, que para $x, y \in [a, b]$, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$g(x) - g(y) = g'(c)(x - y),$$

entonces

$$|g(x) - g(y)| = |g'(c)| |x - y| \leq k |x - y|.$$

Por lo tanto, g es contractiva en $[a, b]$, para $L = k$.

Nota: La constante L descrita anteriormente, se llama constante de Lipschitz de f .

Proposición 1.1. Si una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es Lipschitz, entonces es continua.

Con el siguiente teorema garantizaremos, por lo menos para funciones contractivas, la existencia de puntos de equilibrio.

Teorema 1.1 ([1], [3], [5]). Si una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es contractiva, entonces existe un único elemento x^* , tal que

$$f(x^*) = x^*.$$

Demostración. Dado que la función es contractiva, existe una constante positiva $L < 1$, tal que

$$|f(x) - f(y)| < L|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Para $x \in \mathbb{R}$, generemos la siguiente sucesión

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x) \\ x_2 &= f(x_1) = f(f(x)) := f^2(x) \\ x_3 &= f(x_2) = f(f^2(x)) := f^3(x) \\ &\vdots \\ x_k &= f^k(x) \end{aligned}$$

Mostraremos que esta sucesión converge a un punto de equilibrio de la función f . Dado que f es Lipschitz, obtenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &= |f(x) - f(x_1)| \leq L|x - x_1| \\ |x_2 - x_3| &= |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \leq L^2|x - x_1| \\ |x_3 - x_4| &= |f(x_2) - f(x_3)| \leq L|x_2 - x_3| \leq L^3|x - x_1| \\ &\vdots \\ |x_{k-1} - x_k| &= |f(x_{k-2}) - f(x_{k-1})| \leq L|x_{k-2} - x_{k-1}| \leq L^{k-1}|x - x_1| \\ |x_k - x_{k+1}| &= |f(x_{k-1}) - f(x_k)| \leq L|x_{k-1} - x_k| \leq L^k|x - x_1| \end{aligned}$$

Así, por desigualdad triangular

$$\begin{aligned} |x_k - x_{k+p}| &= |x_k - x_{k+1}| + |x_{k+1} - x_{k+2}| + |x_{k+2} - x_{k+3}| + \dots + |x_{k+p-1} - x_{k+p}| \\ &\leq (L^k + L^{k+1} + L^{k+2} + \dots + L^{k+p-1})|x - x_1|, \quad k > p \end{aligned}$$

Pero

$$\sum_{j=0}^{p-1} L^{k+j} = \frac{L^k(1 - L^p)}{(1 - L)} < \frac{L^k}{(1 - L)}$$

y por tanto

$$|x_k - x_{k+p}| \leq \frac{L^k}{(1 - L)}|x - x_1|.$$

Dado que $L < 1$

$$\frac{L^k}{(1 - L)}|x - x_1| \rightarrow 0, \quad \text{cuando} \quad k \rightarrow \infty,$$

y se tiene que los términos de la sucesión que hemos construido están cada vez más cerca entre ellos, puesto que la diferencia entre dos elementos de la sucesión x_{k+p} y x_k tiende a cero

$$|x_k - x_{k+p}| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Luego, la sucesión es de Cauchy, y por tanto convergente a un punto x^* . Como la función f es continua se tiene que $f(x_k)$ converge a $f(x^*)$. Por otro lado, como x_{k+1} converge a x^* se obtiene, de la relación $x_{k+1} = f(x_k)$, que $f(x^*) = x^*$. Ahora nos falta probar que este punto de equilibrio es único.

Supongamos, por el contrario que x_1^* y x_2^* son dos puntos de equilibrio tales que $x_1^* \neq x_2^*$, y

$$|x_1^* - x_2^*| = |f(x_1^*) - f(x_2^*)| \leq L|x_1^* - x_2^*| \quad (1.3)$$

Dado que $x_1^* \neq x_2^*$, $|x_1^* - x_2^*| > 0$, y por lo tanto de (1.3) se tiene, para $L < 1$,

$$|x_1^* - x_2^*| < |x_2^* - x_1^*|,$$

lo cual es una contradicción. ■

Ejemplo 1.3. $x^* = 0$ es un punto de equilibrio de la función $f(x) = \sin(\frac{x}{2})$, $x \in \mathbb{R}$. Dado que la función f es contractiva, en virtud del Teorema 1.1, este punto es único.

El resultado anterior se conoce como el Teorema del Punto Fijo de Banach. El proceso iterativo utilizado en la demostración, se conoce como iteraciones de Picard.

El Teorema 1.1 nos dice que a partir de cualquier punto inicial x se tiene que la sucesión construida, siguiendo el esquema

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x) \\ x_2 &= f(x_1) = f(f(x)) := f^2(x) \\ x_3 &= f(x_2) = f(f^2(x)) := f^3(x) \\ &\vdots \\ x_k &= f^k(x), \end{aligned}$$

converge al único punto de equilibrio. Así, si consideramos el sistema a tiempo discreto

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función contractiva, entonces la única solución, que estará dada por $x_k = f^k(x_0)$, para $k = 0, 1, 2, \dots$ convergerá al único punto de equilibrio de la función f , es decir, si el sistema que estamos estudiando viene dado por una contracción, entonces podemos asegurar que a largo plazo (cuando k tiende a ∞) la solución estará cerca del único punto de equilibrio de la función.

Con el siguiente resultado, determinaremos la existencia de un punto de equilibrio para funciones continuas (no necesariamente Lipschitz) en intervalos de la forma $[a, b]$.

Teorema 1.2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si para un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ se tiene

$$f(x) \in [a, b], \forall x \in [a, b], \quad (1.4)$$

entonces, existe un elemento x^* en $[a, b]$, tal que

$$f(x^*) = x^*.$$

Demostración. Caso 1: Si $f(a) = a$ o $f(b) = b$, entonces a ó b son puntos de equilibrio de f y el resultado queda demostrado.

Caso 2: Supongamos que $f(a) \neq a$ y $f(b) \neq b$.

Como $f(a) \neq a$ y $f(a) \in [a, b]$, entonces $f(a) > a$. De la misma forma $f(b) < b$. Luego, podemos definir la función g , tal que

$$g(a) = f(a) - a > 0$$

y

$$g(b) = f(b) - b < 0.$$

Como g es continua, el Teorema del Valor Intermedio implica que existe $c \in [a, b]$, tal que $g(c) = 0$. Pero $g(c) = f(c) - c$. Así, $f(c) = c$ y esto demuestra el teorema. ■

La Figura 1.4 ilustra esta demostración

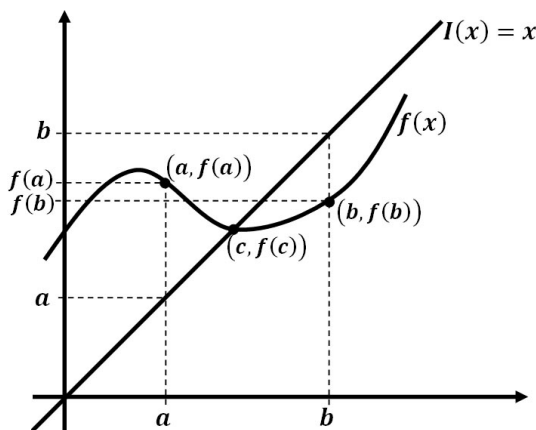


Figura 1.4: Función continua con un punto de equilibrio que ilustra la demostración del Teorema 1.2.

Ejemplo 1.4. La función $f(x) = 1 - x^2$ tiene un punto de equilibrio en el intervalo $[0, 1]$. En efecto, f es continua y el rango de f sobre $[0, 1]$ está contenido en $[0, 1]$. Luego, por Teorema 1.2, f tiene un punto de equilibrio.

El resultado anterior es una herramienta muy útil a la hora de determinar la existencia de un punto de equilibrio. A diferencia del primer resultado que vimos, este último no nos asegura la unicidad del punto de equilibrio como lo muestra la Figura 1.5.

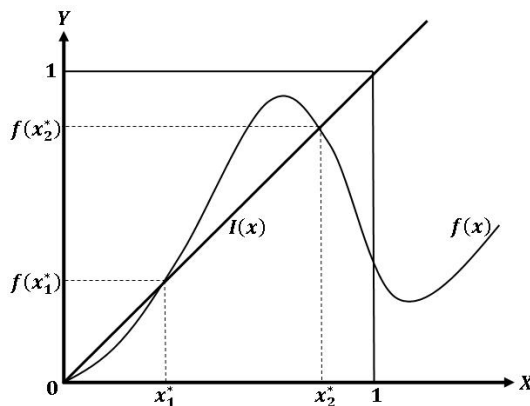


Figura 1.5: Gráfica de una función continua que satisface Teorema 1.2 con $[a, b] = [0, 1]$, la cual tiene más de un punto de equilibrio.

Un equilibrio de un modelo a tiempo discreto (o punto de equilibrio de la función que lo define) puede clasificarse en **localmente estable** o **globalmente estable**. Sin embargo, puede que un equilibrio no sea lo uno ni lo otro.

Definición 1.3. Dado un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, un equilibrio $x^* \in [a, b]$ de la ecuación de recurrencia

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

se dice *localmente estable* en $[a, b]$ si para toda condición inicial x_0 en $[a, b]$, suficientemente cerca de x^* , se tiene $x_k \rightarrow x^*$. El equilibrio x^* es *globalmente estable* si para toda condición x_0 en $[a, b]$, la solución x_k converge a x^* .

Por Teorema 1.2 se obtiene que si la función f que define el sistema es contractiva, entonces el único punto de equilibrio de la función es un equilibrio globalmente estable.

Ejemplo 1.5. Consideremos el sistema dinámico lineal

$$x_{k+1} = \rho x_k; \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad \rho \in \mathbb{R}.$$

Analicemos la estabilidad de sus puntos de equilibrio.

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |\rho x - \rho y| \\ &= |\rho(x - y)| \\ &\leq |\rho||x - y| \end{aligned}$$

Por lo tanto f es Lipschitz, con constante $k = |\rho|$.

Si $|\rho| = 1$, entonces la única solución del modelo lineal es $x^* = 0$ que es globalmente estable. Si $|\rho| \neq 1$, entonces la única solución es $x^* = 0$.

Teorema 1.3. Considere el sistema dinámico discreto siguiente

$$x_{k+1} = f(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable y su derivada es una función continua. Si x^* es un punto de equilibrio de f y $|f'(x^*)| < 1$, entonces x^* es un equilibrio localmente estable.

Demostración. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 . Dado que f es derivable, f es continua, y por el Teorema 1.2, existe $x^* \in \text{Dom}(f)$, tal que

$$f(x^*) = x^*.$$

Por otro lado, dado que la derivada de f es continua, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f'(x)| < 1$, para todo $x \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$. Luego

$$\text{existe } L \in [0, 1) \text{ / } |f'(x)| < L, \quad \forall x \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon).$$

El Teorema del Valor Medio nos dice que para todo $a, b \in \mathbb{R}$ ($a \neq b$), existe $c \in (a, b)$, tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Sea x_0 la condición inicial tal que $x_0 \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$, y supongamos que $x_0 \in (x^* - \varepsilon, x^*)$. Aplicando el Teorema del Valor Medio al intervalo $[x_0, x^*]$, existe $c_1 \in (x_0, x^*)$, tal que

$$f'(c_1) = \frac{f(x^*) - f(x_0)}{x^* - x_0},$$

de donde obtenemos que

$$f'(c_1) = \frac{x^* - x_1}{x^* - x_0},$$

lo cual implica

$$|f'(c_1)| |x^* - x_0| = |x^* - x_1| \leq L |x^* - x_0| \leq \varepsilon,$$

es decir, $x_1 \in (x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon)$. Aplicando nuevamente el Teorema del Valor Medio al intervalo $[x_1, x^*]$, existe $c_2 \in (x_1, x^*)$ tal que

$$f'(c_2) = \frac{f(x^*) - f(x_1)}{x^* - x_1} = \frac{x^* - x_2}{x^* - x_1}$$

lo cual implica

$$|f'(c_2)||x^* - x_1| = |x^* - x_2| \leq L|x^* - x_1| \leq L^2|x^* - x_0| \leq \varepsilon.$$

Así, iterando el proceso anterior obtenemos que

$$|x^* - x_k| \leq L^k|x^* - x_0| \leq \varepsilon$$

de donde $|x^* - x_k| \rightarrow 0$, es decir $x_k \rightarrow x^*$. ■

Ejemplo 1.6. Sea $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$. Resolviendo

$$\frac{x}{2} + \frac{3}{2} = x,$$

encontramos que $x = 3$ es el único punto de equilibrio de f , como se puede ver en la Figura 1.6.

Notemos también que $f'(x) = \frac{1}{2} < 1$ para todo x . Entonces, por Teorema 1.3, $x = 3$ es efectivamente el único punto de equilibrio localmente estable de f .

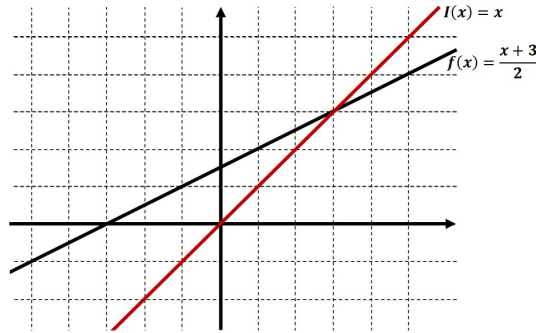


Figura 1.6: Punto de equilibrio de la función $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$.

Capítulo 2

Estabilidad de Sistemas No Lineales en \mathbb{R}^n

En esta sección estudiaremos la teoría de estabilidad para sistemas autónomos generales

$$u_{k+1} = f(u_k); k = 0, 1, \dots \quad (2.1)$$

donde $u \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función dada.

Nota: El dominio de f no necesita ser todo \mathbb{R}^n , pero f debería aplicar su dominio en si mismo, tal que la ecuación (2.1) tenga sentido para todos los puntos iniciales en el dominio y todo k .

Definición 2.1. Un vector $u \in \mathbb{R}^n$ es un **punto fijo** de f si $f(u) = u$. Un vector $v \in \mathbb{R}^n$ es un **punto periódico** de f si existe un entero positivo k , tal que $f^k(v) = v$, y k es un periodo para v .

Nota:

- 1) Los puntos fijos de f representan soluciones constantes de la ecuación (2.1), y los puntos periódicos implican soluciones periódicas.
- 2) Recordemos que $f^k(v) = \underbrace{f(\dots(f(f(v)))\dots)}_{k \text{ veces}}$, donde k es un periodo de v . Notemos que si k es un periodo de f para v , entonces nk también lo es, $\forall n \in \mathbb{N}$. Además para cada punto periódico se tiene al menos un periodo.

Ejemplo 2.1.

a) Analicemos los puntos periódicos de la siguiente función

$$f\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u_2 \\ \frac{u_2}{u_1} \end{pmatrix}$$

con dominio $\left\{\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} : u_1 \neq 0, u_2 \neq 0\right\}$.

Cada vector en el dominio de f es un punto periódico con periodo 6. Además, existen tres puntos tienen al menos periodo 3, dichos puntos son

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Por último, ningún punto tiene periodo menor o igual que 2. En efecto, supongamos por el contrario, que

$$f^2\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \text{para algún } \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} \frac{u_2}{u_1} \\ \frac{1}{u_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

de donde

$$u_2 = u_1^2 \quad \text{y} \quad u_1 u_2 = 1$$

Luego $u_2 = u_1 = 1$.

Lo que es una contradicción.

b) Consideremos ahora la función definida por

$$f\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{pmatrix}.$$

Esta función tiene como único punto de equilibrio al vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, y cualquier otro punto tiene periodo 4. En efecto, Si

$$f\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{pmatrix},$$

de la definición podemos deducir que

$$f^2 \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix},$$

$$f^3 \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix},$$

$$f^4 \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Definición 2.2. a) Sea $u \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. La **bola abierta** centrada en u y radio r es el conjunto $B(u, r) = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v - u\| < r\}$.

b) Sea v un punto de equilibrio de f . v se dice **estable** si dado cualquier bola $B(v, \varepsilon)$, existe una bola $B(v, \delta)$ tal que si $u \in B(v, \delta)$, entonces $f^k(u) \in B(v, \varepsilon)$ para todo $k \geq 0$.

Nota: Si v no es estable, entonces v se llama **inestable**.

c) v se dice **asintóticamente estable** si es estable, y existe una bola $B(v, \gamma)$ con $\gamma < \delta$, tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(u) = v.$$

d) Sea w un punto periódico de f con periodo k . Luego, w es estable (asintóticamente estable) si $w, f(w), f^2(w), \dots, f^{k-1}(w)$ son estables (asintóticamente estables).

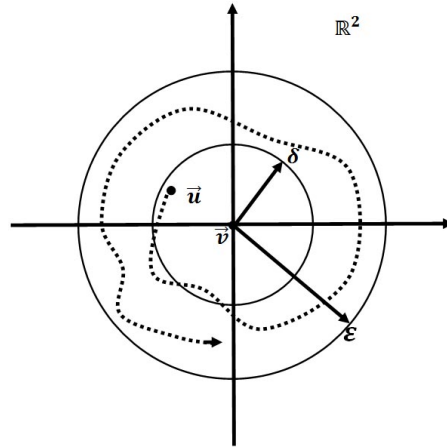
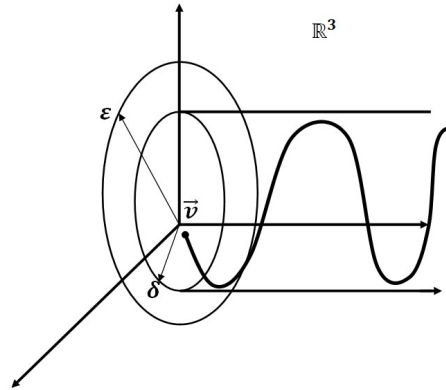


Figura 2.1: Estabilidad en \mathbb{R}^2 .

Figura 2.2: Estabilidad en \mathbb{R}^3 .

Intuitivamente, un punto fijo v es estable si los puntos cercanos a v no se encuentran lejos de él bajo todas las iteraciones de f . La estabilidad asintótica de v requiere como condición adicional que todas las soluciones de la ecuación

$$u_{k+1} = f(u_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

cercanas a v converjan a él.

Así, una vez elegido que tan cerca de v deseamos permanecer en el futuro (elección de ε), podemos encontrar que tan cerca de v debemos partir al comienzo (existencia de δ).

Nota: Determinar la estabilidad de un punto fijo usando las definiciones anteriores puede resultar bastante difícil o imposible en muchos casos. Esto se debe al hecho que no siempre podemos encontrar la solución de la ecuación. En esta sección estudiaremos algunas de las herramientas más simples y poderosas que nos ayudarán a estudiar el comportamiento de las soluciones de la ecuación (2.1), en la vecindad del punto fijo, a saber, las técnicas gráficas:

Consideremos la ecuación

$$u_{k+1} = 2u_k(1 - u_k) = 2u_k - 2u_k^2, \quad u_k \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

La ecuación anterior representa una parábola con vértice $V(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y foco $F(\frac{1}{2}, \frac{3}{8})$; y que se abre hacia abajo pues $p = -\frac{1}{8} < 0$.

Grafiquemos la función $f(u) = 2u - 2u^2$. Al intersectar su gráfica con la recta $f(u) = u$ tenemos que los puntos de equilibrio son 0 y $\frac{1}{2}$.

Escojamos algún valor inicial $u_0 \in (0, \frac{1}{2})$ moviéndonos verticalmente al punto

$$(u_0, f(u_0)) = (u_0, u_1)$$

sobre la gráfica de la ecuación (2.2). Ahora nos movemos horizontalmente hasta el punto (u_1, u_1) en $f(u) = u$. Llamando $u_2 = f(u_1)$, otro movimiento vertical nos lleva al punto (u_1, u_2) .

Iterando el proceso anterior con movimientos verticales alternados al gráfico de la función $f(u) = 2u - 2u^2$ con movimientos horizontales a $f(u) = u$ generamos la sucesión de soluciones u_k tal y como lo muestra la Figura 2.3.

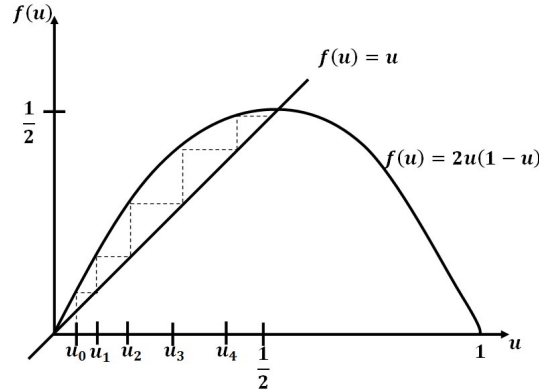


Figura 2.3: Método de la escalera para la función $f(u) = 2u(1 - u)$.

Podemos observar entonces que la sucesión obtenida u_k converge a $u = \frac{1}{2}$ cuando $k \rightarrow \infty$. Por otro lado, si consideramos nuestro valor inicial en el intervalo $(\frac{1}{2}, 1)$, entonces la solución también converge a $u = \frac{1}{2}$, cuando $k \rightarrow \infty$, es decir, el equilibrio $\frac{1}{2}$ es asintóticamente estable.

El siguiente teorema es un método analítico para chequear la estabilidad asintótica en el caso escalar.

Teorema 2.1 ([3], [5], [6]). *Supongamos que f es derivable y su primera derivada es continua en algún intervalo abierto que contiene al punto de equilibrio v .*

(a) *Si $|f'(v)| < 1$, entonces v es asintóticamente estable.*

(b) *Si $|f'(v)| > 1$, entonces v es inestable.*

Demostración. (a) Sea f una función de clase C^1 tal que $|f'(v)| < 1$. Como f' es continua, existe α tal que $|f'(u)| \leq \alpha < 1$ sobre algún intervalo

$$I = (v - \delta, v + \delta), \delta > 0.$$

El Teorema del Valor Medio implica que

$$\begin{aligned} |f(u) - f(w)| &\leq |f'(c)||u - w| \\ &\leq \alpha|u - w|, \quad \text{para } u, w \in I. \end{aligned}$$

Así

$$|f(u) - v| \leq \alpha|u - v| < \delta, \quad \text{para cada } u \in I$$

y luego $f(u) \in I$.

Además,

$$|f^{k+1}(u) - v| \leq \alpha|f^k(u) - v|, \quad \text{para cada } k \geq 0, \text{ y } u \in I.$$

Luego, por inducción tenemos

$$|f^k(u) - v| \leq \alpha^k|u - v|, \quad \text{cada } k \geq 0, \forall u \in I.$$

Finalmente, dado que $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^k = 0$ (pues $|\alpha| < 1$), cada solución del sistema

$$u_{k+1} = f(u_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

que empieza en I converge a v cuando $k \rightarrow \infty$, y por tanto v es asintóticamente estable.

- (b) Supongamos que $|f'(v)| > 1$. Elijamos $\lambda > 1$ e $I = (v - \varepsilon, v + \varepsilon)$, para algún $\varepsilon > 0$ tales que

$$\begin{aligned} |f(u) - f(w)| &= |f'(c)||u - w| \\ &\geq \lambda|u - w|, \end{aligned}$$

para todo $u, w \in I$. Luego, por inducción,

$$|f^k(u) - v| \geq \lambda^k|u - v|$$

siempre que $f^k(u) \in I$. Puesto que $\lambda > 1$, se deduce que todas las soluciones del sistema

$$u_{k+1} = f(u_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

que se originan en I , a excepción de la solución constante $u_k = v$, deben salir de I para k suficientemente grande. Entonces, v es inestable. ■

Capítulo 3

Estabilidad de Sistemas Lineales

El estudio de la estabilidad de las soluciones de sistemas lineales autónomos es fundamental para comprender el comportamiento de las soluciones de un sistema no lineal de la forma

$$u_{k+1} = Au_k + g(u_k),$$

donde A es la matriz Jacobiana de f y g satisface

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\|g(u)\|}{\|u\|} = 0,$$

es decir, para sistemas con f suficientemente regulares en el origen.

Definición 3.1. *El espectro de A , denotado por $\sigma(A)$, es el conjunto de valores propios de A , y el radio espectral de A es*

$$r(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Teorema 3.1 ([6]). *Sea A una matriz constante $n \times n$ tal que $r(A) < 1$. Entonces, toda solución u_k de la ecuación*

$$u_{k+1} = Au_k \tag{3.1}$$

satisface

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0.$$

Además, si $r(A) < \delta < 1$, entonces existe una constante $C > 0$, tal que

$$\|u_k\| \leq C\delta^k \|u_0\|, \quad \text{para } k \geq 0,$$

y toda solución u_k de la ecuación (3.1).

Demostración. Fijemos δ tal que $r(A) < \delta < 1$. Por Teorema 4.2 ([6]), la solución de la ecuación (3.1), con $u(0) = u_0$ está dada por

$$u_k = \sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1}(k) M_i u_0.$$

De la ecuación

$$\begin{pmatrix} c_1(k+1) \\ c_2(k+1) \\ \vdots \\ c_n(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(k) \\ c_2(k) \\ \vdots \\ c_n(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 c_1(k) \\ c_1(k) + \lambda_2 c_2(k) \\ c_2(k) + \lambda_3 c_3(k) \\ \vdots \\ c_{n-1}(k) + \lambda_n c_n(k) \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} c_1(k+1) = \lambda_1 c_1(k) &\Rightarrow |c_1(k+1)| = |\lambda_1| |c_1(k)| \\ &\Rightarrow |c_1(k+1)| \leq r(A) |c_1(k)|. \end{aligned}$$

Además, para $c_1(0) = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} k=0 &\Rightarrow |c_1(1)| \leq r(A) |c_1(0)| = r(A) \\ k=1 &\Rightarrow |c_1(2)| \leq r(A) |c_1(1)| \leq r(A) r(A) = (r(A))^2 \\ k=2 &\Rightarrow |c_1(3)| \leq r(A) |c_1(2)| \leq r(A) (r(A))^2 = (r(A))^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

y en general,

$$|c_1(k)| \leq (r(A))^k \leq \delta^k, \quad (k \geq 0) \quad (3.3)$$

Nuevamente de la ecuación (3.2) y la desigualdad (3.3) tenemos

$$\begin{aligned} |c_2(k+1)| &= |c_1(k) + \lambda_2 c_2(k)| \\ &\leq |c_1(k)| + r(A) |c_2(k)| \\ &\leq (r(A))^k + r(A) |c_2(k)| \end{aligned}$$

Para $c_2(0) = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} k=0 &\Rightarrow |c_2(1)| \leq (r(A))^0 + r(A) |c_2(0)| = 1 \\ k=1 &\Rightarrow |c_2(2)| \leq r(A) + r(A) |c_2(1)| \leq r(A) + r(A) = 2r(A) \\ k=2 &\Rightarrow |c_2(3)| \leq (r(A))^2 + r(A) |c_2(2)| \leq (r(A))^2 + r(A) 2r(A) = 3(r(A))^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Y en general,

$$|c_2(k)| \leq k(r(A))^{k-1} \leq k \left(\frac{r(A)}{\delta} \right)^{k-1} \delta^{k-1}, \quad (k \geq 0) \quad (3.4)$$

La Regla de L'Hôpital implica

$$k \left(\frac{r(A)}{\delta} \right)^{k-1} \rightarrow 0, \quad \text{cuando} \quad k \rightarrow \infty.$$

Luego, existe una constante B_1 , tal que

$$|c_2(k)| \leq B_1 \delta^k, \quad (k \geq 0).$$

Similarmente se demuestra que

$$|c_3(k)| \leq \frac{k(k-1)}{2} (r(A))^{k-2}, \quad (k \geq 0),$$

y existe B_2 , tal que

$$|c_3(k)| \leq B_2 \delta^k.$$

Continuando este proceso, por inducción, obtenemos una constante $B^* > 0$ tal que

$$|c_i(k)| \leq B^* \delta^k, \quad k \geq 0, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, n.$$

Además, para cualquier matriz M , existe una constante $D > 0$, tal que

$$\|Mv\| \leq D\|v\|, \quad \text{para todo } v \in \mathbb{R}^n.$$

Finalmente, la solución u_k de la ecuación (3.1), con vector inicial $u(0) = u_0$ satisface

$$\begin{aligned} \|u_k\| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |c_{i+1}(k)| \|M_i u(0)\| \\ &\leq B^* \delta^k \|u_0\| \sum_{i=0}^{n-1} D_i \\ &\leq C \delta^k \|u_0\|, \end{aligned}$$

donde $C = B^* \sum_{i=0}^{n-1} D_i$.

Finalmente, como $0 < \delta < 1$, entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0.$$

Luego, la solución trivial es asintóticamente estable. ■

El siguiente resultado establece que $r(A) < 1$ es una condición necesaria para la estabilidad asintótica.

Teorema 3.2 ([6], [7]). *Si $r(A) \geq 1$, entonces existe alguna solución de la ecuación (3.1) que no tiende al origen, cuando k tiende al infinito.*

Demostración. Supongamos que $r(A) \geq 1$. Luego, $|\lambda| \geq 1$, para algún $\lambda \in \sigma(A)$. Sea v el vector propio correspondiente a λ . Así, $u_k = \lambda^k v$ es solución de la ecuación (3.1), y $|u_k| = |\lambda^k| |v|$. Pero, $|\lambda| \not\rightarrow 1$. Luego, $|\lambda^k| |v| \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$. ■

Ejemplo 3.1. *Consideremos la ecuación*

$$u_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} u_k,$$

y analicemos la estabilidad de las soluciones.

La ecuación característica para $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix}$ es $\lambda^2 + \frac{1}{4} = 0$.

Luego, $\sigma(A) = \{\frac{i}{2}, -\frac{i}{2}\}$ y $r(A) = \frac{1}{2} < 1$; es decir todas las soluciones del sistema convergen al origen, cuando k tiende a infinito. La Figura 3.1 nos muestra como la solución parte en espiral desde el vector $\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ hasta el origen.

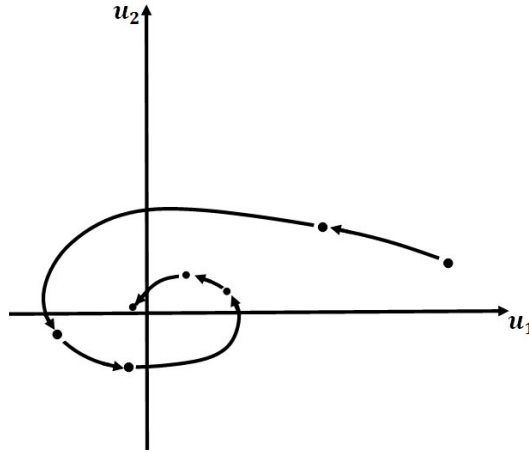


Figura 3.1: Solución en espiral.

El siguiente resultado nos muestra que si la matriz A tiene radio espectral $r(A) \leq 1$, entonces bajo ciertas condiciones el sistema tiene un tipo de estabilidad más débil.

Teorema 3.3. *Supongamos que $r(A) \leq 1$, y que cada valor propio λ de A con $|\lambda| = 1$ es simple. Entonces existe una constante $C > 0$, tal que*

$$\|u_k\| \leq C|u_0|, \text{ para } k \geq 0 \quad (3.5)$$

y toda solución u_k de la ecuación (3.1).

Demostración. Denotemos los valores propios de A por $|\lambda_i| = 1$ para $i = 1, \dots, K-1$ y $|\lambda_i| < 1$ para $i = K, \dots, n$. De las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} c_1(k+1) \\ \vdots \\ c_n(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(k) \\ \vdots \\ c_n(k) \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} c_1(0) \\ c_2(0) \\ \vdots \\ c_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

tenemos

$$c_1(k) = \lambda_1^k.$$

Luego

$$c_2(k+1) = \lambda_2 c_2(k) + \lambda_1^k.$$

Así, como en el método de los aniquiladores

$$(E - \lambda_1)(E - \lambda_2)c_2(k) = 0,$$

donde E es el operador traslación.

Dado que $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$c_2(k) = B_{12}\lambda_1^k + B_{22}\lambda_2^k,$$

para algunas constantes B_{12}, B_{22} . Continuando este proceso, de la misma manera tenemos

$$c_i(k) = B_{1i}\lambda_1^k + \dots + B_{ii}\lambda_i^k, \quad i = 1, \dots, K-1.$$

Así, existe una constante $D > 0$, tal que

$$|c_i(k)| \leq D, \quad i = 1, \dots, K-1 \text{ y } k \geq 0.$$

De la ecuación (3.2)

$$c_i(k+1) = \lambda_k c_i(k) + c_{i-1}(k),$$

$$|c_i(k+1)| \leq |\lambda_i| |c_i(k)| + D.$$

Sea $\delta = \max\{|\lambda_K|, \dots, |\lambda_n|\} < 1$. Luego

$$|c_i(k+1)| \leq \delta |c_i(k)| + D.$$

Iterando el proceso y considerando la condición inicial $c_k(0) = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} |c_i(k)| &\leq D \sum_{j=0}^{k-1} \delta^j \\ &\leq \frac{D}{1-\delta}, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

De manera similar, tenemos que existe una constante D^* , tal que

$$|c_i(k)| \leq D^*, \quad i = 1, \dots, n \quad \text{y} \quad k \geq 0.$$

Por Teorema 4.4 ([6]), la solución de la ecuación (3.1), con $u(0) = u_0$ está dada por

$$u_k = \sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1}(k) M_i u_0,$$

y

$$\begin{aligned} |u_k| &\leq D^* \sum_{i=0}^{n-1} |M_i u_0| \\ &\leq C |u_0|, \end{aligned}$$

para $k \geq 0$ y algún $C > 0$. ■

Ejemplo 3.2. Consideremos el sistema

$$u_{k+1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sen(\theta) \\ -\sen(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} u_k$$

donde θ es un ángulo fijo.

La matriz $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sen(\theta) \\ -\sen(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ es la matriz de rotación, que cuando está multiplicada por un vector u , el vector resultante tiene la misma longitud que u .

Así, cada solución u de nuestro sistema toma todos sus valores en un círculo centrado en el origen y radio $|u(0)|$. En la Figura 3.2 se ilustra la situación para el caso en que $\theta = \frac{\pi}{2}$.

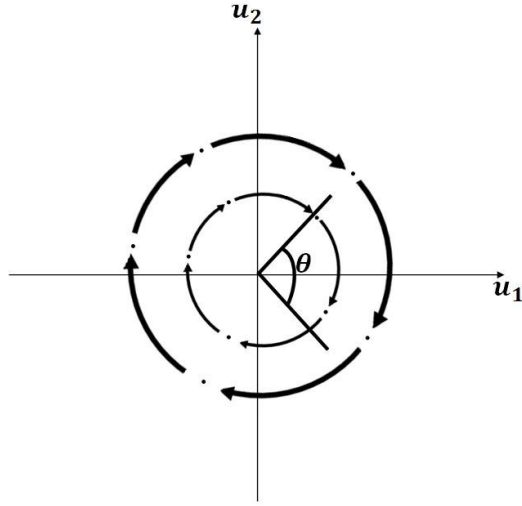


Figura 3.2: Rotación en sentido de las agujas del reloj para $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Los valores propios de la matriz de rotación son de la forma $\lambda = \cos(\theta) \pm i \sin(\theta)$, es decir, el sistema satisface las hipótesis del Teorema 3.1. Luego, basta considerar $C = 1$ y tenemos que $|u_k| \leq C|u_0|$.

Ejemplo 3.3. Sea $f(u) = 2u(1 - u)$. Estudiemos su estabilidad de los puntos de equilibrio.

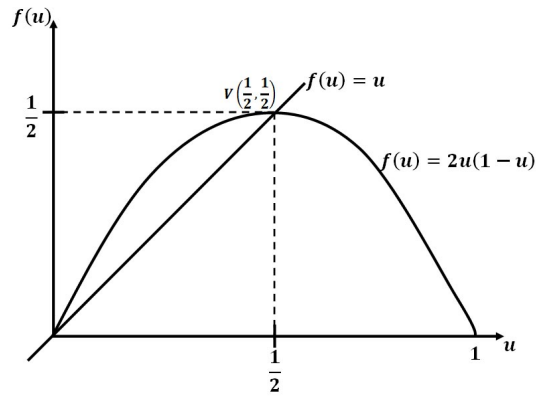


Figura 3.3: Estabilidad de los puntos de equilibrio de la función $f(u) = 2u(1 - u)$.

Intersectando la función $f(u) = 2u(1 - u)$ con la recta $f(u) = u$, tenemos que los puntos de equilibrio son 0 y $\frac{1}{2}$.

Además, $f'(u) = 2 - 4u$. Luego

$$f'(0) = 2 > 1 \quad \text{y} \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 < 1.$$

Por Teorema 4.1, concluimos a que 0 es inestable, mientras que $\frac{1}{2}$ es asintóticamente estable.

Capítulo 4

Funciones de Lyapunov

En su famosa memoria publicada en 1892, el matemático ruso A. M. Lyapunov introdujo un nuevo método para investigar la estabilidad de las ecuaciones diferenciales no lineales. Este método, conocido como el método directo de Lyapunov, permite investigar la naturaleza cualitativa de las soluciones. Por lo tanto, se le mira como una de las mayores herramientas en la teoría de estabilidad. El método consiste en encontrar ciertas funciones real-valoradas. El mayor problema reside en determinar la función de Lyapunov para una ecuación dada.

Definición 4.1. Sea v un punto de equilibrio de f . Una función continua real-valuada V , en alguna bola B centrada en v es llamada una función Lyapunov para f en v cuando $V(v) = 0$, $V(u) > 0$ para $u \neq v$ en B , y

$$\Delta_k V(u) \equiv V(f(u)) - V(u) \leq 0, \forall u \in B \quad (4.1)$$

Si la desigualdad es estricta para $u \neq v$, entonces V es una función Lyapunov estricta.

Sea u_k una solución de la ecuación $u_{k+1} = f(u_k)$ con u_0 en B . Entonces la ecuación (4.1) requiere que $V(u_k)$ sea no creciente como función de k , mientras u_k está en B . Cuando f es continua, la existencia de una función Lyapunov en v implica que v es estable.

Teorema 4.1 ([6], [7], [9]). Sea v un punto de equilibrio de f , y supongamos que f es continua en alguna bola centrada en v . Si existe una función Lyapunov para f en v , entonces v es estable. Si existe una función Lyapunov estricta para f en v , entonces v es asintóticamente estable.

Demostración. Sea V una función Lyapunov para v en una bola B centrada en v . Supongamos que $B(v, \varepsilon)$ está contenida en B y f es continua en $B(v, \varepsilon)$. Luego,

$$m \equiv \min\{V(u) : \|u - v\| = \varepsilon\}.$$

es positivo, ya que V es positiva y continua en $\{u : \|u - v\| = \varepsilon\}$, el cual es un conjunto compacto.

Escogiendo $\delta > 0$ suficientemente pequeño, tal que $B(v, \delta)$ esté contenida en el conjunto abierto $U \equiv \{u \in B : V(u) < \frac{m}{2}\}$. Para cada u en $B(v, \delta)$, por (4.1) se tiene

$$V(f(u)) \leq V(u) < \frac{m}{2}.$$

Sea W el subconjunto abierto conexo maximal de U que contiene a v . Notemos que $W \subseteq B(v, \varepsilon)$.

Sea u perteneciente a $B(v, \delta)$. Dado que f es continua y $B(v, \delta)$ es conexa, $f(B(v, \delta))$ es conexa. Luego $f(B(v, \delta)) \subseteq W$, así $f(u)$ está en $B(v, \varepsilon)$. De manera similar, podemos mostrar que $f^k(u)$ pertenece a $B(v, \varepsilon)$ para $k \geq 2$, por lo tanto v es estable.

Ahora supongamos que V es una función Lyapunov estricta. Supongamos además que v no es asintóticamente estable y lleguemos a una contradicción. Existe un w en $B(v, \delta)$ tal que $f^k(w)$ no converge a v cuando $k \rightarrow \infty$. Sin embargo, cada $f^k(w)$ está en $B(v, \varepsilon)$, así existe una subsucesión $f^{k_n}(w)$ que converge a algún $v' \neq v$ en $B(v, \varepsilon)$ cuando $n \rightarrow \infty$. Para cada k , algún $k_n > k$, así

$$V(f^k(w)) > V(f^{k_n}(w)) > V(v') \quad (4.2)$$

por ecuación (4.1) (con desigualdad estricta) y la continuidad de V . Nuevamente por ecuación (4.1), $V(f(v')) < V(v')$. Puesto que $V \circ f$ es continua, existe un $\delta > 0$ tal que

$$V(f(u)) < V(v')$$

para u en $B(v', \delta)$. Eligiendo n lo suficientemente grande tal que $f^{k_n}(w)$ pertenezca a $B(v', \delta)$, se tiene

$$V(f^{k_n+1}(w)) < V(v'),$$

lo cual contradice la ecuación (4.2). Luego concluimos que v es asintóticamente estable. ■

En la práctica, la dificultad en hacer uso del Teorema 4.1, es encontrar una función Lyapunov. Sin embargo, si uno la encuentra, entonces se podrá obtener estabilidad, y más información sobre la solución de la ecuación $u_{k+1} = f(u_k)$. Por ejemplo, el siguiente corolario nos permite encontrar la solución que converge al punto de equilibrio.

Corolario 4.1. *Supongamos que existe una función Lyapunov estricta para f en v sobre B y f es continua en B . Luego, cada solución de la ecuación $u_{k+1} = f(u_k)$ que pertenece a B para $k \geq k_0$ deben converger a v .*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que las soluciones de la ecuación

$$u_{k+1} = f(u_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

no convergen a v , para $k \geq k_0$. Luego v no es asintóticamente estable.

Por otro lado, como existe una función Lyapunov estricta para f en v , tenemos que v es asintóticamente estable lo cual es una contradicción. ■

Ejemplo 4.1. Utilicemos el Teorema 4.1 para mostrar que el origen es estable para la ecuación

$$u_{k+1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sen(\theta) \\ \sen(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} u_k.$$

Sea $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$V \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right) = u_1^2 + u_2^2.$$

Luego, $V \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$, $V(u) > 0$ y

$$\begin{aligned} \Delta_k V(u) &= V \left(\begin{pmatrix} u_1 \cos(\theta) + u_2 \sen(\theta) \\ -u_1 \sen(\theta) + u_2 \cos(\theta) \end{pmatrix} \right) - V \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= (u_1 \cos(\theta) + u_2 \sen(\theta))^2 + (-u_1 \sen(\theta) + u_2 \cos(\theta))^2 - (u_1^2 + u_2^2) \\ &= u_1^2(\cos^2(\theta) + \sen^2(\theta)) + u_2^2(\cos^2(\theta) + \sen^2(\theta)) - (u_1^2 + u_2^2) \\ &= u_1^2 + u_2^2 - u_1^2 - u_2^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

es decir, V es una función Lyapunov, y por tanto el origen es estable.

Como $V(u)$ es el cuadrado de la longitud de u , la ecuación $\Delta_k V(u) = 0$ nos dice que cada solución del sistema permanece en un círculo fijo con centro en el origen.

Ejemplo 4.2. Analicemos ahora la estabilidad del origen para la ecuación:

$$u_{k+1} = \begin{bmatrix} u_2(k) - u_2(k)(u_1^2(k) + u_2^2(k)) \\ u_1(k) - u_1(k)(u_1^2(k) + u_2^2(k)) \end{bmatrix}.$$

Consideremos la función $V : B(0, \sqrt{2}) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$V \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \right) = u_1^2 + u_2^2.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\Delta_k V(u) &= [u_2(k) - u_2(k)(u_1^2(k) + u_2^2(k))]^2 + [u_1(k) - u_1(k)(u_1^2(k) + u_2^2(k))]^2 \\
&\quad - (u_1^2(k) + u_2^2(k)) \\
&= [u_2(k)(1 - (u_1^2(k) + u_2^2(k)))]^2 + [u_1(k)(1 - (u_1^2(k) + u_2^2(k)))]^2 \\
&\quad - (u_1^2(k) + u_2^2(k)) \\
&= u_2^2(k)(1 - (u_1^2(k) + u_2^2(k)))^2 + u_1^2(k)(1 - (u_1^2(k) + u_2^2(k)))^2 - (u_1^2(k) + u_2^2(k)) \\
&= (u_2^2(k) + u_1^2(k))(1 - (u_1^2(k) + u_2^2(k)))^2 - (u_1^2(k) + u_2^2(k)) \\
&= (u_2^2(k) + u_1^2(k))(1 - 2(u_1^2(k) + u_2^2(k)) + (u_1^2(k) + u_2^2(k))^2 - 1) \\
&= (u_2^2(k) + u_1^2(k))^2(-2 + (u_1^2(k) + u_2^2(k))) \\
&< 0
\end{aligned}$$

Así, dado que $u \in B(0, \sqrt{2})$ y $u \neq 0$, tenemos que V es una función Lyapunov estricta, y por tanto el origen es asintóticamente estable. Además, dado que $\Delta_k V(u) < 0$ es equivalente a $\|f(u)\| < \|u\|$, toda solución originada en $B(0, \sqrt{2})$ pertenece a dicha bola. Luego, por Corolario 4.1 cada solución converge al origen.

Ejemplo 4.3. Para el sistema

$$\left. \begin{aligned} u_1(k+1) &= \frac{c_1 u_2(k)}{(1+u_1^2(k))} \\ u_2(k+1) &= \frac{c_2 u_1(k)}{(1+u_2^2(k))} \end{aligned} \right\},$$

donde c_1 y c_2 son constantes. Consideremos la función definida positiva

$$V(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2 \text{ en } \mathbb{R}^2.$$

Entonces

$$\Delta V(u_1(k), u_2(k)) = \left(\frac{c_2^2}{(1+u_2^2(k))^2} - 1 \right) u_1^2(k) + \left(\frac{c_1^2}{(1+u_1^2(k))^2} - 1 \right) u_2^2(k).$$

Si $c_1^2 < 1$ y $c_2^2 < 1$, entonces, dado que,

$$\Delta V(u_1(k), u_2(k)) \leq (c_2^2 - 1)u_1^2(k) + (c_1^2 - 1)u_2^2(k),$$

la solución trivial del sistema es asintóticamente estable. Si $c_1^2 > 1$ y $c_2^2 > 1$, entonces se tiene que $(u_1(k), u_2(k)) \in B(0, r) \subset \mathbb{R}^2$, donde r es tan pequeño que

$$\Delta V(u_1(k), u_2(k)) \geq \left(\frac{c_2^2}{(1+r^2)} - 1 \right) u_1^2(k) + \left(\frac{c_1^2}{(1+r^2)} - 1 \right) u_2^2(k).$$

Por lo tanto, la solución trivial de nuestro sistema es inestable.

En algunos casos, el que un punto estable de una cierta función sea asintóticamente estable puede ser establecida mostrando que la parte lineal de la función satisface la condición asintóticamente estable de un sistema lineal. Supongamos que f tiene la forma

$$f(u) = Au + g(u) \quad (4.3)$$

Dado que A es una matriz $n \times n$ y g satisface

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\|g(u)\|}{\|u\|} = 0. \quad (4.4)$$

La ecuación (4.3) implica que $g(0) = 0$ y que g no contiene términos lineales no triviales. Las condiciones (4.3) y (4.4) implican la diferenciabilidad de f en $u = 0$. La matriz A es la matriz jacobiana de f en 0 dada por:

$$f'(0) = A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(0) & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n}(0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(0) & \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n}(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1}(0) & \frac{\partial f_n}{\partial u_2}(0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n}(0) \end{pmatrix},$$

donde f_1, f_2, \dots, f_n , y todas las derivadas parciales están evaluadas en el origen.

Teorema 4.2 ([5]). *Si f está definida por la ecuación (4.3) con $r(A) < 1$, y g satisface la condición (4.4), entonces el origen es asintóticamente estable.*

Demostración. Por Teorema 3.1, sabemos que existe una constante $c > 0$, tal que

$$\|A^k u\| \leq c\delta^k \|u\|,$$

para $k \geq 0$, $u \in \mathbb{R}^n$, si $r(A) < \delta < 1$. Dado que

$$\det(A - \lambda I) = \det((A - \lambda I)^T) = \det(A^T - \lambda I),$$

A y A^T tienen los mismos valores propios. Entonces existe una constante $D > 0$, tal que

$$\|(A^T)^k u\| \leq D\delta^k \|u\|, \text{ para } k \geq 0, u \in \mathbb{R}^n.$$

Luego

$$\begin{aligned} \|(A^T)^t A^t u\| &\leq D\delta^t \|A^t u\| \\ &\leq Dc\delta^{2t} \|u\|, \text{ para todo } t \text{ y } u. \end{aligned}$$

La serie geométrica $\sum_{t=0}^{\infty} (\delta^2)^t$ converge. Así, por Teorema de Comparación

$$Bu \equiv \sum_{t=0}^{\infty} (A^T)^t A^t u$$

converge para cada u . Dado que B es lineal, podemos representarla por una matriz $n \times n$. Sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$V(u) = u^T Bu = \sum_{t=0}^{\infty} \|A^t u\|^2.$$

Además, podemos probar que $V(0) = 0$ y $V(u) > 0, u \neq 0$. Finalmente, consideremos

$$\begin{aligned} \Delta_k V(u) &= V(Au + g(u)) - V(u) \\ &= (Au + g(u))^T B(Au + g(u)) - u^T Bu. \end{aligned}$$

Como B es simétrica,

$$(x + y)^T B(x + y) = x^T Bx + 2u^T By + y^T By.$$

Usando esta fórmula, tenemos

$$\Delta_k V(u) = u^T (A^T BA)u + 2u^T A^T Bg(u) + g(u)^T A^T Bg(u) - u^T Bu.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} A^T BAu &= \sum_{t=0}^{\infty} A^T (A^T)^t A^t Au \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} (A^T)^{t+1} A^{t+1} u \end{aligned}$$

Sea $r = t + 1$. Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{\infty} (A^T)^{t+1} A^{t+1} u &= \sum_{r=1}^{\infty} (A^T)^r A^r u \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} (A^T)^r A^r u - (A^T)Au \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} (A^T)^r A^r u - u \\ &= Bu - u, \end{aligned}$$

donde hemos usado un cambio de índices. Así

$$\begin{aligned}\Delta_k V(u) &= u^T B u - u^T u + 2u^T A^T B g(u) + g(u)^T B g(u) - u^T B u \\ &= \|u\|^2 \left[-1 + 2 \frac{u^T}{\|u\|} A^T B \frac{g(u)}{\|u\|} + \frac{g(u)^T}{\|u\|} B \frac{g(u)}{\|u\|} \right].\end{aligned}$$

Usando la ecuación (4.4), $\Delta_t V(u) < 0$ para $\|u\|$ suficientemente pequeño y $u \neq 0$, y luego por el Teorema 4.1, el origen es localmente asintóticamente estable. ■

En el caso $r(A) > 1$ y g satisface la ecuación (4.4), se puede mostrar que el origen es inestable para f dada por la ecuación (4.3).

Si $r(A) = 1$, entonces la linealidad nos da información, y otro método debe ser usado para estudiar estabilidad. Por ejemplo, la función f en el ejemplo (4.2) es

$$f\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - (u_1^2 + u_2^2) \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}.$$

Aquí la matriz A tiene un radio espectral uno y g satisface la ecuación (4.4) ya que

$$\frac{\|g(u)\|}{\|u\|} = \frac{(u_1^2 + u_2^2)\|u\|}{\|u\|} = u_1^2 + u_2^2 \rightarrow 0, \text{ cuando } \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \rightarrow 0.$$

Aun cuando falle la linealidad, hemos sido capaces de establecer la estabilidad asintótica por el uso de una función de Lyapunov.

Ejemplo 4.4. *Considere el sistema*

$$\left. \begin{aligned} u_1(k+1) &= \frac{1}{2}u_1(k) + \alpha u_1(k)u_2(k), \\ u_2(k+1) &= -\frac{7}{10}u_2(k) + \beta u_1(k)u_2(k) \end{aligned} \right\}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

La matriz Jacobiana evaluada en el origen de este sistema es

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{7}{10} \end{pmatrix}.$$

Note que $r(A) = \frac{7}{10} < 1$. Ya que la función $f(u)$ para este sistema tiene su primera derivada parcial continua con respecto a u_1 y u_2 , el Teorema 4.2 implica que el origen es asintóticamente estable.

Ahora supongamos que f tiene punto fijo $v \neq 0$. Sea $w = u - v$ la ecuación $u_{k+1} = f(u_k)$ es transformada en

$$w_{k+1} = f(w_k + v) - v \equiv h(w_k).$$

Luego el origen es un punto fijo para h , y el Jacobiano de h en 0 es la misma matriz jacobiana de f en v . Consecuentemente, podemos probar estabilidad asintótica para v calculando los valores propios de la matriz jacobiana de f en v .

Hasta el momento nos hemos concentrado en preguntas de estabilidad para puntos fijos, el mismo método puede ser usado para chequear puntos periódicos ya que, por Definición 2.2, los puntos periódicos tienen propiedades de estabilidad de sus iterados como puntos fijos de f^k .

Resultados más sofisticados de estabilidad de soluciones de ecuaciones en diferencias se pueden encontrar en Agarwal [1], Elaydi [3], Kelley et al. [6], y Kocic et al. [7]. Enfoques más geométricos o topológicos se encuentran desarrollados, por ejemplo, en Easton et al. [2], Holmgren [4], Martelli [8] y Medina [9].

Capítulo 5

Aplicaciones a Problemas de Evolución Biológica

5.1. Máxima Captura Sustentable

El objetivo del análisis que realizaremos a continuación es poder determinar una política óptima de extracción de un recurso renovable (Especie forestal, vegetal, marina) en el sentido de obtener la mayor cantidad del recurso sin afectar la permanencia de este en el ecosistema. ([2], [8], [10])

La variable de estado indicará la cantidad del recurso, representado por un número real positivo, en virtud de la mitad de medida considerada. Denotemos por x_k la cantidad de recurso en el periodo k , medido en años, meses o días. Lo primero que se debe imponer es que x_k sea siempre positivo puesto que está representando una cantidad.

Supondremos que el recurso natural a ser analizado se reproduce a una tasa $\rho(x)$, es decir, si en un instante dado, la cantidad que hay del recurso es x , entonces en el instante siguiente (año siguiente, temporada siguiente o mes siguiente) la cantidad del recurso será la cantidad del periodo precedente más $\rho(x)x$. A medida que la población de individuos (nivel del recurso) aumenta, la tasa de reproducción debiera ser más baja gracias a un proceso de regulación al interior de la especie. Esto se puede deber a que la cantidad de alimentos para ellos es limitada y por lo tanto no pueden crecer indefinidamente en número. La tasa de crecimiento decreciente en x que se propone es

$$\rho(x) = \rho \left(1 - \frac{x}{K} \right),$$

donde ρ y K son constantes propias a la especie y al entorno donde ella evoluciona. Una buena labor del trabajo estadístico que se realiza en economía de recursos naturales es la determinación de las constantes ρ y K .

Este modelo se conoce como modelo logístico el cual fue introducido en la primera mitad del siglo XIX por Pierre Verhulst para dinámicas a tiempo continuo, el cual no forma

parte del objetivo central de este Seminario. Sí abordaremos el modelo logístico a tiempo discreto, el cual fue introducido por el biólogo australiano Robert May en el año 1976, el cual estudiaremos con un poco más de detalle en la próxima sección.

De esta forma, el modelo a tiempo discreto estará dado por

$$x_{k+1} = f(x_k) = x_k + \rho x_k \left(1 - \frac{x_k}{K}\right). \quad (5.1)$$

Para que el modelo sea realista, la función f debe ser tal que x_k sea siempre positivo. Si

$$x > K \left(\frac{1+\rho}{\rho} \right)$$

se observa que $f(x)$ es negativo, por lo tanto el nivel del recurso nunca debe sobrepasar $K(\frac{1+\rho}{\rho})$. Como el máximo de la función f se alcanza en $\bar{x} = K(\frac{1+\rho}{2\rho})$, tomando el valor

$$f(\bar{x}) = K \frac{(1+\rho)^2}{4\rho},$$

para que siempre se obtengan valores positivos, se debe tener

$$K \frac{(1+\rho)^2}{4\rho} \leq K \left(\frac{1+\rho}{\rho} \right) \Rightarrow \rho \leq 3. \quad (5.2)$$

Por lo tanto, si x está en el intervalo $\left[0, K \frac{(1+\rho)^2}{4\rho}\right]$ se tendrá que $f(x)$ permanecerá en el mismo intervalo pues

$$0 \leq f(x) \leq f(\bar{x}) = K \frac{(1+\rho)^2}{4\rho} \leq K \left(\frac{1+\rho}{\rho} \right).$$

Entonces, si $\rho \leq 3$, la función f (que es continua) satisface

$$f(x) \in \left[0, K \left(\frac{1+\rho}{\rho} \right)\right], \forall x \in \left[0, K \left(\frac{1+\rho}{\rho} \right)\right], \quad (5.3)$$

y el Teorema 1.2 nos asegura la existencia de al menos un punto de equilibrio de f en $[0, K(\frac{1+\rho}{\rho})]$. La verdad es que en este caso resulta fácil determinar que existen dos puntos de equilibrio, los cuales serán $x^* = 0$ y el equilibrio positivo $x^* = K$.

Dependiendo de los valores de ρ y K , el cero y el equilibrio positivo puede que sean estables o no.

Gracias a la propiedad (5.3), si la condición inicial x_0 está en el intervalo $[0, K(\frac{1+\rho}{\rho})]$, podremos asegurar que las trayectorias x_k del sistema (5.1) permanecen por siempre en el mismo intervalo.

Agreguemos ahora un término de extracción. Si en el periodo k hay una cantidad x_k

del recurso, este evoluciona siguiendo la relación (5.1). Explotando, al final de cada periodo, una porción $h < 1$ de este, es decir, se extrae $h(x_k + \rho x_k(1 - \frac{x_k}{K}))$, el sistema estará dado por

$$x_{k+1} = (1 - h) \left(x_k + \rho x_k \left(1 - \frac{x_k}{K} \right) \right).$$

Para cada $h < 1$, un equilibrio no nulo del modelo con extracción será un nivel $x_h^* \neq 0$, tal que

$$x_h^* = (1 - h) \left(x_h^* + \rho x_h^* \left(1 - \frac{x_h^*}{K} \right) \right),$$

donde el subíndice h en x_h^* lo hemos colocado para indicar la dependencia del equilibrio con respecto a la porción de explotación h . El nivel x_h^* será positivo si $h < \frac{\rho}{1+\rho}$ y en tal caso estará dado por

$$x_h^* = K \left(1 - \frac{h}{\rho(1 - h)} \right) < K. \quad (5.4)$$

Si definimos la función

$$g(x) = x + \rho x \left(1 - \frac{x}{K} \right),$$

el modelo con extracción se escribe

$$x_{k+1} = (1 - h)g(x_k),$$

siendo el equilibrio x_h^* un elemento que satisface

$$x_h^* = (1 - h)g(x_h^*). \quad (5.5)$$

Dada una porción h , en el equilibrio se extraerá una cantidad $\xi(h) := hg(x_h^*)$ del recurso la que, de (5.5), se deduce igual a $\xi(h) = g(x_h^*) - x_h^*$, obteniéndose

$$\xi(h) = \rho x_h^* \left(1 - \frac{x_h^*}{K} \right).$$

Si la fracción de explotación h es tal que el equilibrio x_h^* coincida con el máximo de la función

$$x \mapsto \rho x \left(1 - \frac{x}{K} \right), \quad (5.6)$$

se tendrá que para dicha tasa de explotación, la captura dada por $\xi(h)$ se maximiza. Busquemos la fracción h con la cual se tiene lo anterior. Dado que el máximo de la función (5.6) se obtiene en $\bar{x} = \frac{K}{2}$, lo cual se deduce al derivar e igualar a cero pues la función es una parábola positiva, debemos buscar h tal que

$$x_h^* = \frac{K}{2},$$

concluyendo de (5.4)

$$K \left(1 - \frac{h}{\rho(1-h)} \right) = \frac{K}{2},$$

lo que implica

$$h = \frac{\rho}{2 + \rho}. \quad (5.7)$$

Al decretar que la tasa de explotación sea la dada por (5.7), estaremos imponiendo que el sistema se estabilice (si el equilibrio resulta ser estable) en un nivel donde se obtiene la máxima extracción posible sin que el recurso se extinga, es decir, se maximiza la extracción y esta actividad se ejerce de manera sustentable. Si se extrae una porción h mayor, puede que se tengan mayores ganancias económicas en un instante dado pero después el recurso disminuirá, pudiendo incluso extinguirse, y por lo tanto, también tendrá repercusiones de tipo económico para quien lo extrae.

La captura máxima obtenida, dada por $\xi(h)$ con h definido por (5.7), se conoce como el *máximo rendimiento sustentable* denotado MSY por sus siglas en inglés (maximal sustainable yield). En la planificación para extracción de recursos naturales, buscar el MSY es una metodología actualmente utilizada para extraer de manera sustentable la mayor cantidad posible de un recurso.

5.2. Ecuación Logística Discreta

Continuando con el estudio de sistemas dinámicos discretos, ahondaremos en una ecuación de recurrencia no lineal dada por

$$x_{k+1} = x_k + \rho x_k \left(1 - \frac{x_k}{K} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \rho \neq 0. \quad (5.8)$$

La ecuación dada en (5.8) es conocida como ecuación logística discreta, y un equilibrio para este sistema es un punto x^* tal que

$$x^* = x^* + \rho x^* \left(1 - \frac{x^*}{K} \right) \quad (5.9)$$

Desarrollando la ecuación (5.9) para x^* se tiene

$$\begin{aligned} x^* = x^* + \rho x^* \left(1 - \frac{x^*}{K} \right) &\Leftrightarrow \rho x^* \left(1 - \frac{x^*}{K} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \rho x^* = 0 \quad \text{o} \quad 1 - \frac{x^*}{K} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^* = 0 \quad \text{o} \quad x^* = K, \end{aligned}$$

es decir, $x^* = 0$ y $x^* = K$ son los únicos equilibrios posibles del sistema (5.8).

Consideremos ahora la función definida por

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \rho x \left(1 - \frac{x}{K}\right) \\ &= x + \rho x - \frac{\rho x^2}{K} \\ &= (1 + \rho)x - \frac{\rho x^2}{K} \end{aligned}$$

Esta función es derivable, y por lo tanto continua. Además

$$f'(x) = 1 + \rho - \frac{2\rho x}{K}.$$

Es claro que f' , por ser combinación de funciones continuas, es también continua. Evaluando la derivada en los puntos de equilibrio de f se tiene

$$f'(0) = 1 + \rho$$

$$f'(K) = 1 + \rho - 2\rho = 1 - \rho$$

Para $\rho > 0$ se tiene

$$|f'(0)| = |1 + \rho| > 1,$$

es decir, $x^* = 0$ no es estable.

Por otro lado

$$|f'(K)| = |1 - \rho| < 1,$$

lo cual implica $0 < \rho < 2$.

Luego, por Teorema 1.3, el equilibrio $x^* = K$ es localmente estable para $\rho \in]0, 2[$.

Además, en el intervalo $[0, \frac{(1+\rho)}{\rho}K]$ ($\rho > 0$), tenemos las siguientes propiedades de monotonía

$$\begin{cases} x < K \Rightarrow x < f(x) \\ x > K \Rightarrow x > f(x) \end{cases}$$

A continuación, analizaremos qué tipo de comportamiento tiene la función f entorno al equilibrio $x^* = K$. Consideremos la ecuación

$$K - f(x) = \frac{\rho x^2}{K} - (1 + \rho)x + K = 0 \quad (5.10)$$

cuyas raíces son $x = K \left(\frac{1+\rho+|1-\rho|}{2\rho} \right)$ y $x = K \left(\frac{1+\rho-|1-\rho|}{2\rho} \right)$.

Ya hemos visto que si $\rho \in]0, 2[$, el equilibrio $x^* = K$ es localmente estable, y dado que el valor de $|1 - \rho|$ depende de ρ , analicemos qué sucede cuando $\rho \in]0, 1[$. En tal caso tendremos

$$x = K \left(\frac{1 + \rho + |1 - \rho|}{2\rho} \right) = \frac{K}{\rho} \quad \text{o} \quad x = K \left(\frac{1 + \rho - |1 - \rho|}{2\rho} \right) = K,$$

de donde

$$\begin{cases} K - f(x) > 0, & \forall x < x_1 = K \\ K - f(x) < 0, & \forall x \in (x_1, x_2) = \left(K, \frac{K}{\rho}\right) \end{cases} \quad (5.11)$$

De esta forma, considerando las ecuaciones (5.10) y (5.11), se tendrá

$$\begin{cases} x < K \Rightarrow x < f(x) < K \\ x > K \Rightarrow K < f(x) < x. \end{cases}$$

De lo anterior podemos concluir que si $\rho \in]0, 1[$, entonces para cualquier condición inicial x_0 en el intervalo $]0, \frac{K}{\rho}[$ tendremos convergencia al equilibrio $x^* = K$ de manera creciente ($x_{k+1} > x_k$) si $x_0 < K$, o de manera decreciente ($x_{k+1} < x_k$) si $x_0 > K$. Si $x_0 \in]\frac{K}{\rho}, (\frac{1+\rho}{\rho})K[$, entonces tendremos convergencia a K pero no será de manera decreciente.

Por otro lado, si el parámetro $\rho \in]1, 2[$, el equilibrio $x^* = K$ sigue siendo localmente estable pero la convergencia no resulta ser creciente o decreciente. Así obtenemos oscilaciones entorno a $x^* = K$ convergiendo al equilibrio (Ver Figura 5.1).

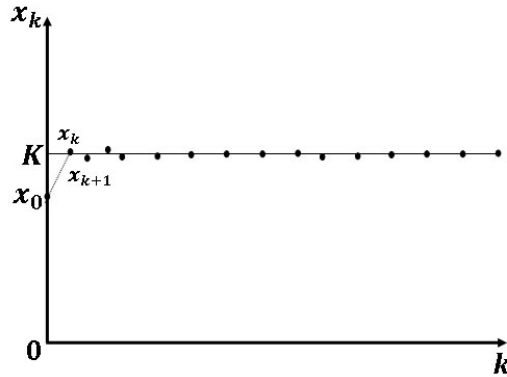


Figura 5.1: Trayectoria x_k para $\rho \in]1, 2[$.

Veamos qué sucede cuando $\rho > 2$. En este caso se tiene que $f'(K) = 1 - \rho < -1$ y por lo tanto el equilibrio $x^* = K$ es inestable. Se puede observar que para valores de ρ mayores

a 2 pero cercanos, se converge a un ciclo de periodo dos entorno al equilibrio K , esto es, que para k grande se tendrá

$$x_k = x_{k+2},$$

con $x_k < K$ y $x_{k+1} > K$ como se observa en la Figura 5.2

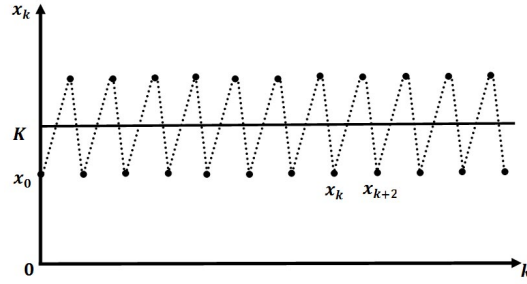


Figura 5.2: Trayectoria x_k con un ciclo de periodo 2.

A medida que se hace crecer ρ se tendrá que se sigue manteniendo un ciclo de tamaño dos pero la amplitud, es decir, el valor $x_{k+1} - x_k$ irá en aumento. Esto sucederá hasta que se alcance el valor de $\rho = \sqrt{6}$ que es a partir de cuando las trayectorias x_k tenderán a un ciclo de periodo cuatro entorno a K , es decir, que para valores de k grandes, se tendrá

$$x_k = x_{k+4},$$

como se muestra en la Figura 5.3.

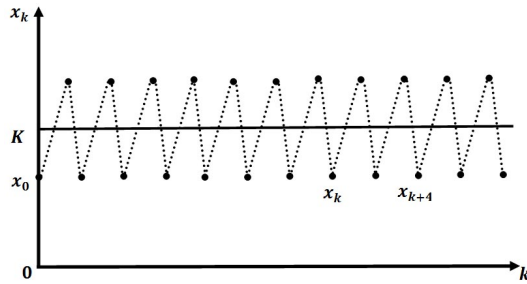


Figura 5.3: Trayectoria x_k con un ciclo de periodo 4.

A medida que se sigue aumentando el parámetro ρ se observa que el ciclo de periodo cuatro aumenta su amplitud hasta llegar a obtener (aumentando el valor de ρ) un ciclo de periodo ocho entorno a K como se gráfica en la Figura 5.4.

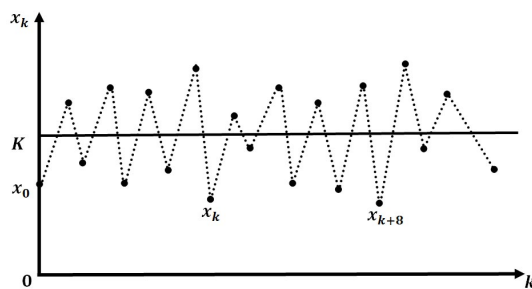
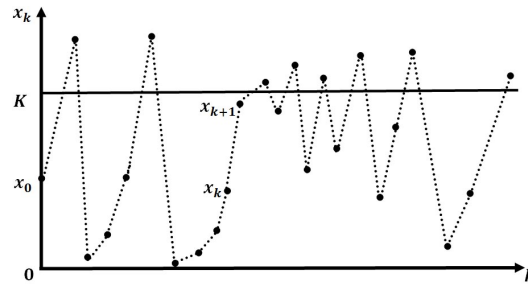
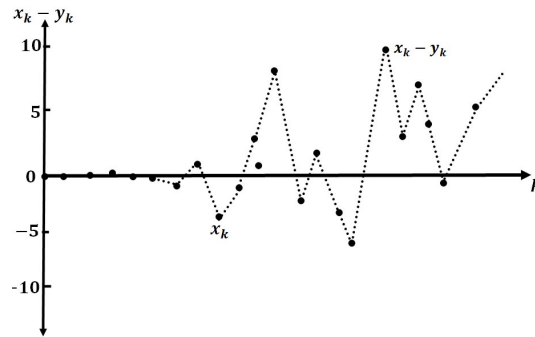


Figura 5.4: Trayectoria x_k con un ciclo de periodo 8.

Lo anterior se puede seguir realizando aumentando el parámetro ρ obteniendo ciclos de periodo 2^n . Una vez que se tiene un ciclo de tamaño 2^n , este comportamiento cualitativo se preservará hasta que el parámetro ρ llegue a un nivel ρ_n y cada vez que se aumenta, la amplitud de los ciclos asociados irá en aumento. Así, cuando ρ era mayor pero cercano a dos se tenía que se tendía a un ciclo de periodo dos hasta llegar a $\rho_1 = \sqrt{6} > 2$. a partir de ese valor, se tiene un ciclo de periodo cuatro hasta un valor de $\rho_2 > \rho_1$. Luego, en las figuras observamos que se tiene un ciclo de periodo ocho y esto sucederá hasta un valor $\rho_3 > \rho_2$. Sucesivamente lo anterior se va a tener para todo $n = 1, 2, 3, 4, \dots$, pero los ciclos a partir de un instante tendrán un periodo de una potencia de base distinta a dos. Por otro lado, es posible observar que la diferencia entre los parámetros $\rho_{n+1} - \rho_n > 0$ decae rápidamente teniendo una convergencia de ρ_n hacia $\rho_\infty = 2,5699456\dots$. Si el parámetro ρ de nuestro sistema a tiempo discreto es mayor a ρ_∞ se pueden encontrar trayectorias que son llamadas *órbitas caóticas*. El término caótico se les asocia por dos razones. La primera es que no son trayectorias periódicas, es decir, no vuelven a tomar un valor alcanzado anteriormente. Además, muestran una muy sensible dependencia con respecto a las condiciones iniciales. Esto implica que con dos condiciones iniciales muy cerca una de otra, las trayectorias generadas a partir de las dos serán completamente diferentes. Lo anterior puede ser muy dramático en la práctica ya que si se comete un error, por pequeño que sea, en la medición de la condición inicial, la trayectoria obtenida puede diferir bastante de aquella asociada a la verdadera condición inicial. En tales modelos, no será posible hacer proyecciones de largo plazo.

La Figura 5.5 muestra el comportamiento de una trayectoria para el valor de $\rho = 3$. La Figura 5.6 muestra la diferencia entre dos trayectorias con condiciones iniciales cercanas para el mismo valor de $\rho = 3$.

Figura 5.5: Trayectoria x_k para $\rho = 3$.Figura 5.6: Diferencia $x_k - y_k$ entre dos trayectorias con condiciones iniciales cercanas, para $\rho = 3$.**Observación:**

Los comportamientos cíclicos y caóticos descritos no tienen ninguna relación con lo que sucede en tiempo continuo para el modelo logístico. En ese contexto, para cualquier condición inicial positiva, la solución de la ecuación diferencial ordinaria asociada a la función logística converge a K . Este es un claro ejemplo donde no hay concordancia entre un modelo a tiempo continuo y tiempo discreto, aunque las dinámicas estén definidas por la misma función.

Ya que el comportamiento caótico presente en el modelo logístico a tiempo discreto presentan gran sensibilidad con respecto a las condiciones iniciales ¿Cuáles son las implicancias biológicas de este tipo de resultado matemático? ¿Es razonable que una población pueda ser modelada por un sistema tan sensible? ¿No será mejor incluir aspectos aleatorios en el modelamiento?. La predicción a largo plazo parece ser imposible en este tipo de modelos, siendo precisamente esta una de las motivaciones del trabajo científico. Para quien tiene la tarea de modelar, analizar estos aspectos (sensibilidad del sistema con respecto a

las condiciones iniciales, parámetros del modelo, incluir aleatoriedad) revierten una gran importancia.

Viendo lo que sucedía con el sistema a tiempo discreto dado por la función logístico, se planteó la necesidad de validar experimentalmente (a través del seguimiento de una población biológica) el tipo de comportamientos señalados en esta sección. Esto fue logrado por Constantino, Desharnais, Cushing y Dennis el año 1997 estudiando la dinámica de *Tribolium*. Ellos analizaron un modelo un poco más sofisticado que el logístico pero que representa la misma transición entre un estado de equilibrio, ciclos y luego comportamientos caóticos haciendo variar los parámetros del modelo.

5.3. Propagación Anual de las Plantas

Nuestro objetivo ahora es desarrollar un modelo matemático que describa el número de plantas en alguna generación (en el hemisferio norte). Sabemos que las plantas producen semillas al terminar su estación de crecimiento (por agosto), después ellas mueren. Además, solo una fracción de estas semillas sobrevive al invierno y las que sobreviven germinan a principios de la temporada (por mayo) dando lugar a la nueva generación de plantas ([10]).

- γ = Número de semillas producidas por planta en agosto,
- α = Fracción de semillas de un año que germinan en mayo,
- β = Fracción de semillas de dos años que germinan en mayo,
- σ = Fracción de semillas que sobreviven al invierno.

Si $p(n)$ denota el número de plantas en una generación n , entonces

$$\begin{aligned} p(n) &= (\text{Plantas de semillas de un año}) + (\text{Plantas de semillas de dos años}) \\ &= \alpha s_1(n) + \beta s_2(n) \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde $s_1(n)$ y $s_2(n)$ son el número de semillas de un año y dos años respectivamente en abril (antes de la germinación). Observe que las semillas que quedan después de la germinación pueden ser descritas como

$$\text{Semillas restantes} = (\text{Fracción no germinada}) \times (\text{Número original de semillas en abril})$$

Esto da lugar a dos ecuaciones

$$\tilde{s}_1(n) = (1 - \alpha)s_1(n), \quad (5.13)$$

$$\tilde{s}_2(n) = (1 - \beta)s_2(n), \quad (5.14)$$

donde $\tilde{s}_1(n)$ y $\tilde{s}_2(n)$ son el número de semillas restantes en uno y dos años respectivamente en el mes de mayo, después de haber germinado. Las nuevas semillas $s_0(n)$ (en 0 años) son producidas en agosto (Ver Figura 5.7) a razón de γ por planta,

$$s_0(n) = \gamma p(n) \quad (5.15)$$

después de invierno, las semillas $s_0(n)$ que eran nuevas en la generación n , serán un año mayor en la próxima generación $n + 1$ y una fracción $\sigma s_0(n)$ de ellas sobrevivirán. Por lo tanto

$$s_1(n + 1) = \sigma s_0(n)$$

o usando la fórmula (5.15) tenemos

$$s_1(n + 1) = \sigma \gamma p(n) \quad (5.16)$$

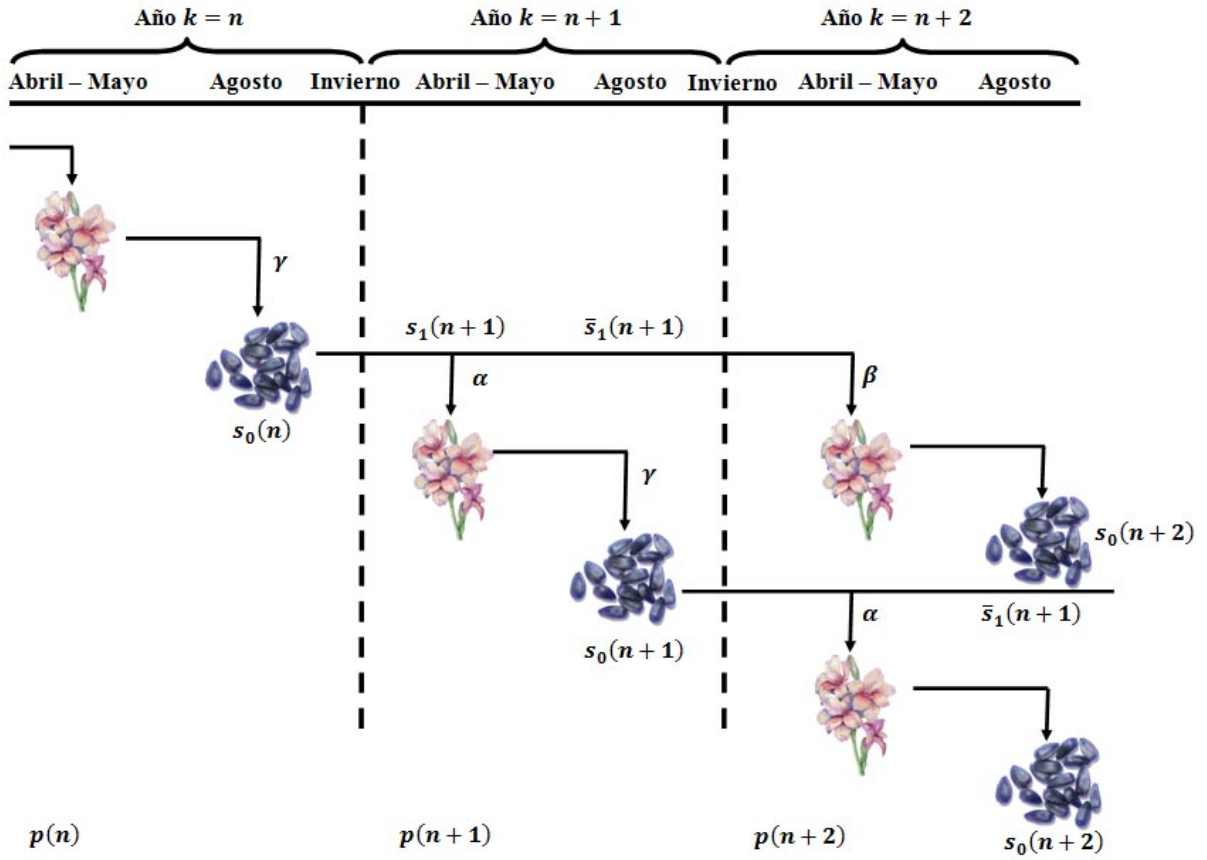


Figura 5.7: Propagación Anual de Plantas.

y similarmente,

$$s_2(n + 1) = \sigma \tilde{s}_1(n)$$

lo cual por (5.13) implica

$$\begin{aligned}
s_2(n+1) &= \sigma(1-\alpha)s_1(n), \\
&= \sigma^2\gamma(1-\alpha)p(n-1)
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Sustituyendo $s_1(n+1)$, $s_2(n+1)$ de las expresiones (5.16) y (5.17) en la fórmula (5.12) resulta

$$p(n+1) = \alpha\gamma\sigma p(n) + \beta\gamma\sigma^2(1-\alpha)p(n-1)$$

o

$$p(n+2) = \alpha\gamma\sigma p(n+1) + \beta\gamma\sigma^2(1-\alpha)p(n) \tag{5.18}$$

La ecuación característica de la ecuación está dada por

$$\lambda^2 - \alpha\gamma\sigma\lambda - \beta\gamma\sigma^2(1-\alpha) = 0,$$

con raíces características

$$\lambda_1 = \frac{\alpha\gamma\sigma}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\gamma\alpha^2}} \right] \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{\alpha\gamma\sigma}{2} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\gamma\alpha^2}} \right].$$

Observemos que λ_1 y λ_2 son raíces ya que $1-\alpha > 0$. Además, $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$. Para asegurar la propagación (es decir, $p(n)$ crece infinitamente cuando $n \rightarrow \infty$) necesitamos tener $\lambda_1 > 1$. No vamos a hacer lo mismo con λ_2 ya que es negativo y conduce a oscilaciones no deseadas en el tamaño de la población de plantas. Por lo tanto,

$$\frac{\alpha\gamma\sigma}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)} \right] > 1 \quad \text{o} \quad \frac{\alpha\gamma\sigma}{2} [1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\gamma\alpha^2}(1-\alpha)}] > 1 - \frac{\alpha\gamma\sigma}{2}.$$

Elevando al cuadrado a ambos lados y simplificando tenemos

$$\gamma > \frac{1}{\alpha\sigma + \beta\sigma^2(1-\alpha)}. \tag{5.19}$$

Si $\beta = 0$, esto es, si no hay semillas germinadas de 2 años en mayo, entonces la condición (5.19) está dada por

$$\gamma > \frac{1}{\alpha\sigma}. \tag{5.20}$$

La condición (5.20) dice que la propagación de plantas ocurre si el producto del número de semillas producidas por planta en agosto, la fracción de semillas de un año que germinan en mayo, y la fracción de semillas que sobreviven al invierno, exceden en 1.

Capítulo 6

Aplicaciones a Problemas en Otras Áreas

6.1. Renta Nacional

En esta aplicación de tipo económico, nos referiremos al estudio de la renta nacional y a su variación respecto al tiempo. La renta nacional, en un periodo dado, se compone de:

- (1) Gastos de consumo (compras de bienes de consumo);
- (2) Inversiones privadas inducidas (compras de equipo capital. Por ejemplo: Maquinaria utilizada para incrementar la producción); y
- (3) Gastos públicos.

Si denotamos por $R(k)$ a la renta nacional, $C(k)$ a los gastos de consumo, $I(k)$ a la inversión privada y $G(k)$ a los gastos públicos, donde k es el periodo al que dichas variables están referidas, que supondremos es anual, tendremos:

$$R(k) = C(k) + I(k) + G(k) \quad (6.1)$$

Supondremos las siguientes relaciones ampliamente aceptadas por economistas (Ver Samuelson¹):

- (a) El consumo de cualquier periodo es proporcional a la renta nacional del periodo anterior. La constante de proporcionalidad aquí establecida es denominada *propensión marginal al consumo*. Si la denotamos por α , la relación está dada por

$$C(k) = \alpha R(k - 1), \quad (6.2)$$

¹P.A. Samuelson, “Ensayos sobre el ciclo económico”, Fondo de Cultura Económica, México, 1946

ecuación en la que hay que destacar el hecho de que las variables están referidas a periodos de tiempo consecutivos.

- (b) La inversión privada inducida en un periodo cualquiera es proporcional al incremento de consumo que ha tenido lugar en dicho periodo con relación al periodo precedente. La constante de proporcionalidad establecida se denomina *coeficiente de aceleración o relación*, y la denotamos por β . Luego, la relación descrita puede escribirse por la ecuación

$$I(k) = \beta[C(k) - C(k-1)]. \quad (6.3)$$

Notemos que si el consumo decrece, la diferencia $C(k) - C(k-1)$ será negativo y luego $I(k) < 0$. Esto puede interpretarse por el hecho de no dedicar a la inversión cantidades que normalmente se hubieran dedicado a la formación de bienes capital, como sería, por ejemplo, el no reemplazar la maquinaria depreciada.

- (c) El gasto público es constante a lo largo de los años. Aquí podemos escoger nuestra unidad como

$$G(k) = 1. \quad (6.4)$$

Para obtener una ecuación expresada sólo en términos de la renta nacional, sustituimos (6.2), (6.3) y (6.4) en la ecuación (6.1), obteniendo así

$$\begin{aligned} R(k) &= \alpha R(k-1) + \beta[C(k) - C(k-1)] + 1 \\ &= \alpha R(k-1) + \beta[\alpha R(k-1) - \alpha R(k-2)] + 1 \end{aligned}$$

Simplificando, obtenemos la ecuación en diferencia de la renta nacional

$$R(k) = \alpha(1 - \beta)R(k-1) - \alpha\beta R(k-2) + 1, \quad k = 2, 3, 4, \dots$$

Sustituyendo k por $k+2$ obtenemos

$$R(k+2) = \alpha(1 + \beta)R(k+1) - \alpha\beta R(k) + 1$$

de donde

$$R(k+2) - \alpha(1 + \beta)R(k+1) + \alpha\beta R(k) = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.5)$$

Así, la renta R se determina como una solución de esta ecuación en diferencias no homogénea de segundo orden con coeficientes constantes. Cuando los valores iniciales $R(0)$ y $R(1)$ son dados, podrá determinarse la renta correspondiente a todos los periodos posteriores haciendo uso de la ecuación (6.5).

Supongamos que los valores iniciales de la renta son $R(0) = 2$ y $R(1) = 3$; y que $\alpha = 0,5$ y $\beta = 1$. Luego, la ecuación (6.5) se reduce a

$$R(k+2) - R(k+1) + \frac{1}{2}R(k) = 1 \quad (6.6)$$

Para resolver esta ecuación hallaremos en primer lugar la solución general de la ecuación homogénea correspondiente y le sumaremos una solución particular de la ecuación (6.6). La ecuación homogénea tiene como ecuación característica

$$x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$$

cuyas raíces son

$$x_1 = \frac{1+i}{2} \quad y \quad x_2 = \frac{1-i}{2}$$

Utilizando herramientas del álgebra reduciremos estas raíces a su forma trigonométrica:

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad y \quad \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

de donde $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Luego, la forma trigonométrica de las raíces es

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \pm \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right).$$

Aplicando el Teorema 3.7 (Goldberg [4]) tenemos que la solución de la ecuación homogénea es

$$R(k) = a \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^k \cos\left(\frac{k\pi}{4} + b\right). \quad (6.7)$$

Hallar una solución particular de la ecuación completa (6.6) es un problema sencillo de resolver. Para ello probaremos como solución una de la forma $y^*(k) = c$, con c constante. Dicha expresión satisface a la ecuación (6.6) siempre que $c = 2$, por lo que la solución general de (6.6) está dada por

$$R(k) = a \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^k \cos\left(\frac{k\pi}{4} + b\right) + 2 \quad (6.8)$$

Haciendo $k = 0$ y $k = 1$, obtenemos (utilizando las condiciones iniciales $R(0) = 2$ y $R(1) = 3$) que

$$\left. \begin{aligned} a \cos(b) &= 0 \\ a \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

de donde $a = -2$ y $b = \frac{\pi}{2}$.

Así, la solución particular de la ecuación (6.6) que satisface las condiciones iniciales $R(0) = 2$ y $R(1) = 3$ es

$$\begin{aligned} R(k) &= -2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^k \cos\left(\frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + 2 \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^k \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) + 2 \end{aligned} \quad (6.9)$$

La presencia del factor seno hace que la renta nacional sea oscilante en el tiempo, y dado que $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, las oscilaciones son amortiguadas y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k$ tiende a cero cuando k aumenta, por lo que la sucesión $\{R(k)\}$ tiende a 2 de forma oscilatoria.

Si R^* es una solución constante de la ecuación (6.5), entonces

$$R^* - \alpha(1 + \beta)R^* - \alpha\beta R^* = 1$$

de donde obtenemos como valor de equilibrio de la renta nacional

$$R^* = \frac{1}{1 - \alpha}, \alpha \neq 1 \quad (6.10)$$

Dada la forma del equilibrio obtenido en (6.10), tenemos que las condiciones para que dicho valor sea estable son

$$1 - \alpha(1 + \beta) + \alpha\beta > 0; \quad 1 + \alpha(1 + \beta) + \alpha\beta > 0; \quad \text{y} \quad 1 - \alpha\beta > 0$$

la segunda de las cuales se satisface automáticamente, puesto que α y β son ambas positivas. Por otro lado, la primera y tercera condición pueden escribirse de la forma

$$\alpha < 1 \quad \text{y} \quad \alpha\beta < 1.$$

Así, obtenemos las condiciones necesarias y suficientes para que la renta R^* sea un equilibrio estable: Tanto la propensión marginal al consumo, como el producto de esta por la relación de aceleración son menores que 1. Si estas condiciones se cumplen, la sucesión de los valores de la renta tenderá a R^* independientemente de los valores iniciales dados.

Esta convergencia al valor de equilibrio R^* será oscilante (en cuyo caso decimos que la renta nacional $R(k)$ fluctúa alrededor del equilibrio R^*) cuando las raíces sean números complejos, lo que ocurrirá cuando el discriminante, que en este caso es

$$\alpha^2(1 + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

sea menor que cero, de donde

$$\alpha < \frac{4\beta}{(1 + \beta)^2}.$$

Regresemos a nuestro ejemplo en que $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = 1$. Aquí, $R^* = 2$, es decir el equilibrio de la renta nacional es dos veces el gasto público. En la Figura 6.1 podemos ver la solución de $R(k + 2) - R(k + 1) + R(k) = 1$, con $R(0) = 1$ y $R(1) = 2$.

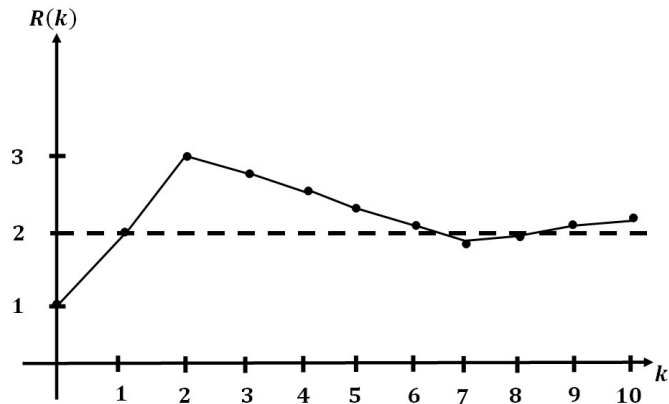


Figura 6.1: Solución de $R(k+2) - R(k+1) + R(k) = 1$, con $R(0) = 1$ y $R(1) = 2$.

Finalmente, la Figura 6.2 muestra el diagrama del parámetro $(\beta - \alpha)$, el cual muestra las regiones de estabilidad e inestabilidad.

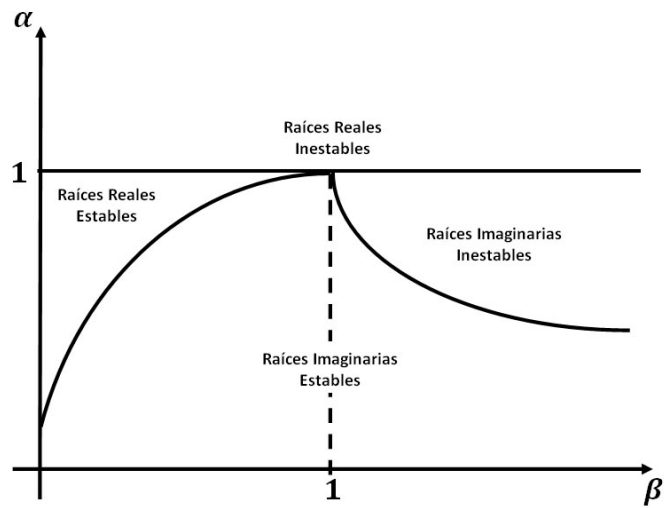


Figura 6.2: Diagrama del parámetro $(\beta - \alpha)$.

6.2. Transmisión de la Información

Supongamos que un sistema de señalización consta únicamente de dos señales S_1 y S_2 (tal como el punto y la raya del sistema telegráfico). Los mensajes se transmiten a través de cierto canal una vez se ha formado con ambas señales una sucesión o secuencia que depende del código con que se rija el sistema. Supongamos además que S_1 y S_2 requieren,

respectivamente, k_1 y k_2 unidades de tiempo para ser transmitidas, y denotemos por $N(k)$ el número total de mensajes posibles que dan lugar a secuencias de duración k . Una señal de k tiempo de duración, bien termina con una señal S_1 o una señal S_2 .

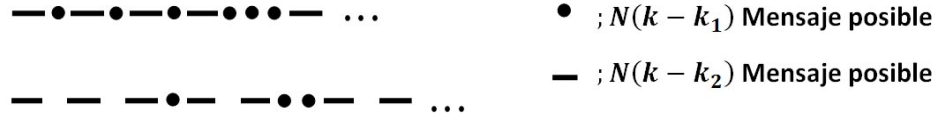


Figura 6.3: Dos señales, una termina con S_1 y la otra con S_2 .

Consideremos en primer lugar aquellos mensajes de duración k que terminan con S_1 . Dado que S_1 precisa k_1 unidades de tiempo para su transmisión, esta última señal debe comenzar a emitirse en el momento $k - k_1$. Pero el número de posibles mensajes que pueden transmitirse en un intervalo de tiempo $k - k_1$ es $N(k - k_1)$, mensajes a los que puede agregarse la última señal S_1 .

De aquí que el número total de mensajes de duración k que acaban con una señal S_1 es precisamente $N(k - k_1)$. Análogamente, el número total de mensajes de duración k que terminan con una señal S_2 viene dado por $N(k - k_2)$. Dado que un mensaje de duración k debe necesariamente terminar en S_1 o en S_2 , el número total de mensajes de duración k puede ser dado por

$$N(k) = N(k - k_1) + N(k - k_2).$$

Si $k_1 \geq k_2$, entonces la ecuación anterior puede ser escrita en la forma familiar de una ecuación de orden k_1

$$N(k + k_1) - N(k + k_1 - k_2) - N(k) = 0. \quad (6.11)$$

Por otro lado, si $k_1 \leq k_2$, entonces obtenemos la ecuación de orden k_2

$$N(k + k_2) - N(k + k_2 - k_1) - N(k) = 0. \quad (6.12)$$

Un caso interesante es cuando $k_1 = 1$ y $k_2 = 2$, es decir, que una señal requiere una duración de tiempo doble que la otra en ser transmitida a través del canal. En este caso tenemos

$$N(k) = N(k - 1) - N(k - 2) \quad (6.13)$$

que puede escribirse de la forma más usual

$$N(k + 2) - N(k + 1) - N(k) = 0, \text{ con } k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.14)$$

Esta es una ecuación en diferencias lineal y homogénea de segundo orden con coeficientes constantes, y que no es sino la conocida sucesión de Fibonacci $\{0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots\}$.

La ecuación característica es $m^2 - m - 1 = 0$ de raíces $\frac{(1 \pm \sqrt{5})}{2}$, que por ser reales y distintas dan lugar a que la solución general de la ecuación (6.14) venga dada por

$$N(k) = a_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k + a_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.15)$$

Para encontrar a_1 y a_2 necesitamos especificar las condiciones iniciales $N(0)$ y $N(1)$. Dada la significación que tiene $N(k)$, una hipótesis razonable es hacer $N(0) = 0$ y $N(1) = 1$, con lo que obtenemos una solución particular en la que las ecuaciones que aparecen en la ecuación (6.15) serán $a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ y $a_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$. Luego, la solución de nuestro problema se convierte en

$$N(k) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k. \quad (6.16)$$

Otro de los conceptos desarrollados por los autores de la teoría de la información es el de capacidad del canal. Shannon define la *capacidad* C del canal de la siguiente forma:

$$C = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log_2 N(k)}{k}, \quad (6.17)$$

donde \log_2 denota al logaritmo en base 2. (La base 2 se utiliza en la teoría de la información en vez de otras bases más comunes, como son la base 10 o la base e . Ello se debe a lo siguiente: Supongamos que debe efectuarse una única elección entre un número igualmente probable de alternativas. A partir de ello definimos la unidad de información (1 bit) como aquella información que al ser transmitida reduce a la mitad el número de alternativas igualmente probables. Así, por ejemplo, para reducir el número de alternativas de 32 a 16, de 16 a 8 o de 8 a 4, etcétera, basta con transmitir un “bit” de información. Y dado que $\log_2 2^k = k$, resulta que $\log_2 32 = 5$, $\log_2 16 = 4$, $\log_2 8 = 3$, $\log_2 4 = 2$, esto es, que el logaritmo en base 2 del número de alternativas tiene una variación igual a la cantidad de información transmitida.)

Para calcular la capacidad C , observamos que la sucesión $\{N(k)\}$ ofrece el mismo comportamiento que la sucesión $\{C_1[\frac{(1+\sqrt{5})}{2^t}]\}$, lo que se deduce teniendo en cuenta que la raíz $m_1 = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$ ($= 1,6$, aproximadamente) es mayor en valor absoluto que la raíz $m_2 = \frac{(1-\sqrt{5})}{2}$ ($= -0,6$, aproximadamente), por lo que el primer término del segundo miembro de la ecuación (6.16) predominará, mientras que el segundo se aproximará a cero cuando t aumente. De aquí que

$$C = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log_2 C_1 m_1^k}{k}. \quad (6.18)$$

Pero

$$\log_2 C_1 m_1^k = \log_2 C_1 + k \log_2 m_1$$

por lo que

$$C = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\log_2 C_1}{k} + \log_2 m_1 \right) = \log_2 m_1$$

resultando C , en este caso aproximadamente 0,7.

6.3. Fractales

En esta sección estudiaremos situaciones geométricas de dos dimensiones definidas de forma recursiva. A partir de la construcción realizada, utilizaremos la naturaleza recursiva de la forma en que se definieron para encontrar su perímetro y área.

A continuación, damos lugar a la construcción de nuestro primer objeto de estudio, conocido como **Triángulo de Sierpinski** ([8], [10]).

Consideremos un triángulo equilátero de lado uno, tal como lo indica la Figura 6.4 a). Para obtener la primera iteración, tracemos los segmentos que unen los puntos medios de los lados del triángulo, y quitemos el triángulo central como en la Figura 6.4 b). Para obtener la segunda iteración tracemos los segmentos que unen los puntos medios de los triángulos sombreados, y quitemos los triángulos centrales respectivos (Ver Figura 6.4 c)).

Sea $t(0)$ el triángulo original. Denotemos la porción sombreada de la Figura 6.4 b) por $t(1)$. Así, la porción sombreada de la Figura 6.4 c) es $t(2)$. Continuando el proceso de forma iterativa obtenemos $t(3), t(4), t(5), \dots$

Sea $a(k)$ el área de la k -ésima iteración $t(k)$. El área de un triángulo equilátero está dada por $a(k) = \frac{\sqrt{3}s^2}{4}$, donde s es la longitud del lado. Por lo tanto, si $t(0)$ es unitario, entonces $a(0) = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Dado que los cuatro triángulos formados en la Figura 6.4 b) son congruentes, y el triángulo central se descarta,

$$a(1) = a(0) - \frac{1}{4}a(0) = \frac{3}{4}a(0).$$

En la Figura 6.4 c), una cuarta parte de cada uno de los triángulos restantes se descarta, por lo que $a(2) = \frac{3}{4}a(1)$.

Continuando el proceso por iteración, tenemos que el área satisface el sistema dinámico

$$a(k+1) = \frac{3}{4}a(k),$$

y luego la k -ésima iteración es

$$a(k) = \left(\frac{3}{4} \right)^k a(0) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^k.$$

Sea $p(k)$ el perímetro total de la k -ésima iteración, es decir, el perímetro total de todos los triángulos sombreados en $t(k)$. Calculemos el perímetro de $t(0)$.

Dado que cada lado de $t(0)$ es igual a uno, $p(0) = 3$. Para obtener $p(1)$, debemos añadir a $p(0)$ el perímetro del triángulo sin sombrear de la Figura 6.4 b), cuyos lados miden $\frac{1}{2}$. Así, tenemos $p(1) = p(0) + \frac{3}{2}$. Para obtener $p(2)$, añadimos a $p(1)$ el perímetro de los tres triángulos sin sombrear que se generan en $t(2)$ correspondiente a la Figura 6.4 c), cada uno de los cuales tiene perímetro $\frac{3}{4}$, es decir, $p(2) = p(1) + \frac{9}{4}$.

Para calcular $p(k+1)$, añadimos a $p(k)$ el perímetro de los triángulos no sombreados que se generan. Calculemos el número de triángulos sin sombrero obtenidos y el perímetro de cada uno de ellos. Sea $s(n)$ la longitud de un lado de los nuevos triángulos no sombreados de la n -ésima iteración. Como vemos en la Figura 6.4 b), $s(1) = \frac{1}{2}$. También debemos notar que cada uno de los nuevos triángulos no sombreados tiene lados cuya medida es un medio de longitud del lado de los triángulos no sombreados de la iteración anterior, es decir,

$$s(k+1) = \frac{1}{2}s(k).$$

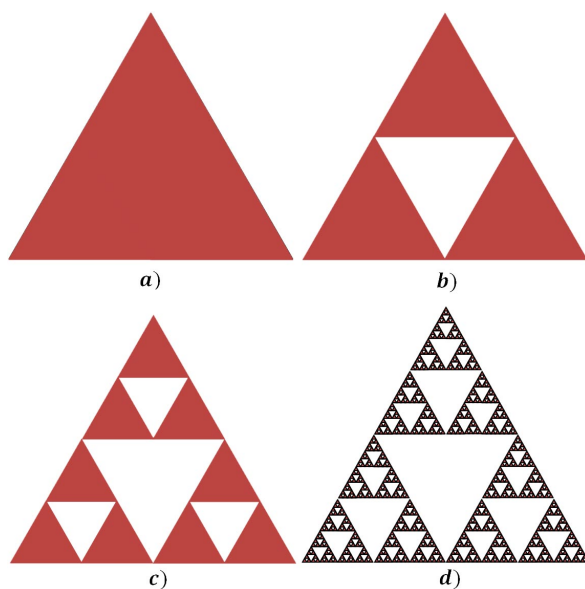


Figura 6.4: La Figura a) es el triángulo original, la Figura b) es la primera iteración, y la Figura c) es la segunda iteración. La Figura d) es el límite de las iteraciones, el Triángulo de Sierpinski.

La solución del sistema dinámico es

$$s(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k c.$$

Dado que $s(1) = (\frac{1}{2})^1 c = \frac{1}{2}$ tenemos que $c = 1$ y $s(k) = (\frac{1}{2})^k$. Así, el perímetro de cada nuevo triángulo no sombreado añadido en la k -ésima iteración es $3s(k) = 3(\frac{1}{2})^k$. El número de triángulos no sombreados añadidos en cada iteración es tres veces el número de los añadidos en la iteración previa. Luego, si $N(k)$ es el número de nuevos triángulos no sombreados en la k -ésima iteración, tenemos que $N(k+1) = 3N(k)$ tal que $N(k) = 3^k c$. De la iteración $t(1)$ de la Figura 6.4 b), tenemos $N(1) = 3^1 c$, de donde $c = \frac{1}{3}$ y $N(k) = \frac{3^k}{3} = 3^{k-1}$. Luego, el perímetro de la $(k+1)$ -ésima iteración está dado por

$$\begin{aligned} p(k+1) &= p(k) + N(k+1)3s(k+1) \\ &= p(k) + 3^k 3 \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \\ &= p(k) + \left(\frac{3}{2}\right)^k \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Por Teorema 4.9 (Sandefur), la solución general del sistema dinámico es

$$p(k) = 1^k c + \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2})^k}{\frac{3}{2} - 1} = c + \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2})^k}{\frac{1}{2}} = c + 3 \left(\frac{3}{2}\right)^k.$$

Dado que $p(0) = c + 3 = 3$, tenemos que $c = 0$, y luego nuestro sistema está dado por

$$p(k) = 3 \left(\frac{3}{2}\right)^k.$$

Notemos que el perímetro de la k -ésima iteración tiende a infinito mientras que el área tiende a cero, a medida que k tiende a infinito. Así, por ejemplo, si construimos la iteración número 50, tenemos

$$\begin{aligned} p(50) &= 3 \left(\frac{3}{2}\right)^{50} \\ &= 3 \cdot 637621500,2 \\ &= 1912864500,6, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} a(50) &= \left(\frac{3}{4}\right)^{50} \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= 0,000000245, \end{aligned}$$

es decir, la parte sombreada tiene un área inferior a un millonésimo, mientras que el perímetro es casi dos millones.

El triángulo de Sierpinski de la Figura 6.4 d) es un ejemplo de fractal. Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas. En el triángulo de Sierpinski, cualquier parte de forma triangular es una réplica de la figura entera, pero en menor escala.

Otro ejemplo de fractal es el llamado **Copo de Nieve de Koch**, el cual fue creado en 1904 por el matemático sueco Helge Von Koch, cuya construcción, al igual que el Triángulo de Sierpinski, es recursiva.

Para su construcción, se comienza con un triángulo equilátero cuyos lados tengan longitud 1. En el tercio central de cada lado debemos añadir un triángulo equilátero de lado $\frac{1}{3}$, quitando el lado común del nuevo triángulo con el original, tal como se muestra en la Figura 6.5 b). Para obtener la segunda iteración construimos, en el tercio central de cada lado, un triángulo equilátero y quitamos el lado común correspondiente como en la Figura 6.5 c).

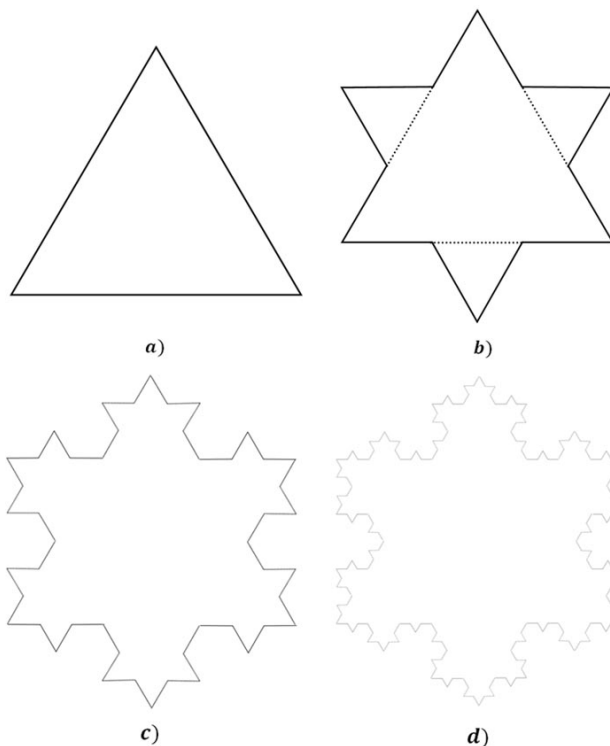


Figura 6.5: La Figura a) es el triángulo original, la Figura b) es la primera iteración, y la Figura c) es la segunda iteración. La Figura d) es el límite de las iteraciones, El Copo de Nieve de Koch.

Analicemos la situación que ocurre en cada lado. En la primera iteración de la cons-

trucción partimos de un segmento de longitud 1, lo seccionamos en tres partes iguales y sobre la parte central construimos un triángulo equilátero eliminando el tercio de la base, obteniendo así cuatro segmentos de longitud $\frac{1}{3}$ del original, es decir con longitud $\frac{4}{3}$. En la segunda iteración repetimos el proceso con cada uno de los 4 segmentos resultantes de la primera, y así en sucesivas iteraciones. Su construcción la podemos ver en la Figura 6.6.

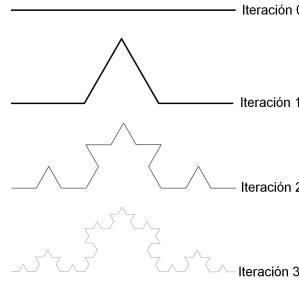


Figura 6.6: Iteraciones ocurridas en cada lado del triángulo.

A continuación, calcularemos el perímetro y el área del Copo de Nieve de Koch. Para encontrar el perímetro de este fractal, debemos observar detenidamente las primeras transformaciones. En cada iteración, cada lado se divide en tres partes iguales, y por cada tercio que quitamos se añaden dos segmentos con igual longitud del que hemos quitado, situación que podemos observar en la Figura 6.5 b) donde las líneas están punteadas. Luego, cada segmento original es reemplazado por cuatro segmentos de longitud $\frac{1}{3}$. Así, el perímetro satisface el sistema dinámico

$$p(k+1) = p(k) + \frac{1}{3}p(k) = \frac{4}{3}p(k),$$

donde $p(k)$ es el perímetro de la k -ésima iteración. Dado que $p(0) = 3$, la solución particular es

$$p(k) = 3 \left(\frac{4}{3} \right)^k.$$

Así, por ejemplo en la iteración 20, el perímetro es $p(20) = 3 \left(\frac{4}{3} \right)^{20} = 946,0105\dots$. Dado que $\frac{4}{3} > 1$, es claro que si se eleva sucesivamente a una potencia entera $k > 1$, el resultado irá tendiendo a infinito, es decir, el perímetro tiende a infinito cuando $k \rightarrow \infty$.

Ahora debemos calcular el área, proceso un poco más complejo, pues deberá ser realizado en varias etapas. Sea $A(k)$ el área total de la k -ésima iteración. Es claro que el área de la iteración $(k+1)$ -ésima es igual al área de la k -ésima iteración más el área de los triángulos añadidos en la $(k+1)$ -ésima iteración. Luego, si $N(k)$ es el número de triángulos equiláteros y $a(k)$ el área de uno de los triángulos añadidos en la k -ésima iteración, entonces

$$A(k+1) = A(k) + N(k+1)a(k+1). \quad (6.19)$$

El área del triángulo original es $a(0) = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Dado que la longitud del lado de cada nuevo triángulo construido en la $(k+1)$ -ésima iteración es $\frac{1}{3}$ de la longitud del lado construido en la k -ésima iteración, tenemos que las áreas de los triángulos construidos en la $(k+1)$ -ésima iteración, es decir

$$a(k+1) = \frac{1}{9}a(k).$$

Por el Teorema 4.9 (Sandefur), para $r = \frac{1}{9}$ y $s = 0$, tenemos que $a(k) = c(\frac{1}{9})^k$. Dado que $\frac{\sqrt{3}}{4} = a(0) = c$,

$$a(k) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{9}\right)^k \quad (6.20)$$

Sabemos que en cada iteración, se construye un triángulo en el tercio central de cada lado de la iteración anterior, y que cada lado es reemplazado por cuatro segmentos de un tercio de longitud del lado extraído. Además, en cada iteración se obtienen cuatro segmentos por cada lado de la iteración anterior. Luego, en cada iteración habrá cuatro veces la cantidad de triángulos construidos en la iteración anterior.

Por lo tanto, $N(k+1) = 4N(k)$ cuya solución (en virtud del Teorema 4.9 (Sandefur)) es $N(k) = 4^k c$. En la primera iteración se construyen tres triángulos, es decir $N(1) = 3$. Usando esta condición inicial, tenemos que $N(1) = 4c = 3$, de donde $c = \frac{3}{4}$ y por tanto

$$N(k) = \frac{3}{4}4^k = 3 \cdot 4^{k-1}. \quad (6.21)$$

Sustituyendo las soluciones obtenidas en (6.20) y (6.21), en nuestro sistema dinámico (6.19), tenemos

$$\begin{aligned} A(k+1) &= 3 \cdot 4^k \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{9}\right)^{k+1} + A(k) \\ &= 3 \cdot 4^k \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1}{9^{k+1}} + A(k) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^k + A(k) \end{aligned} \quad (6.22)$$

Luego, por el Teorema 4.9 (Sandefur) tenemos que

$$A(k) = r^k c + \frac{bs^k}{s-r}.$$

Así, para $r = 1$, $s = \frac{4}{9}$ y $b = \frac{\sqrt{3}}{12}$,

$$\begin{aligned}
A(k) &= 1^k c + \frac{\frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^k}{\frac{4}{9} - 1} \\
&= c + \frac{\frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^k}{-\frac{5}{9}} \\
&= c - \frac{3\sqrt{3}}{20} \left(\frac{4}{9}\right)^k.
\end{aligned}$$

Usando como condición inicial el hecho que $\frac{\sqrt{3}}{4} = A(0) = c - \frac{3\sqrt{3}}{20}$ se tiene

$$c = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} = \frac{8\sqrt{3}}{20} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

y la solución del sistema dinámico dado en (6.22) es

$$A(k) = \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \left(\frac{4}{9}\right)^k. \quad (6.23)$$

Dado que $\frac{4}{9} < 1$, es claro que si k tiende a infinito, entonces $\left(\frac{4}{9}\right)^k$ tiende a cero y

$$A(k) \rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Así, el Copo de Nieve de Koch es ejemplo de un fractal con área finita, pero con perímetro infinito.

Para nuestra última construcción, comenzaremos con un cuadrado de lado uno como el de la Figura 6.7 a). Para obtener la primera iteración, tracemos los segmentos que unen los puntos medios de los lados del cuadrado, generando así un cuadrado inscrito, tal como lo muestra la Figura 6.7 b).

Luego, cada iteración se obtiene uniendo los puntos medios de los lados del cuadrado formado en la iteración anterior. En la Figura 6.7 c) podemos ver la segunda iteración.

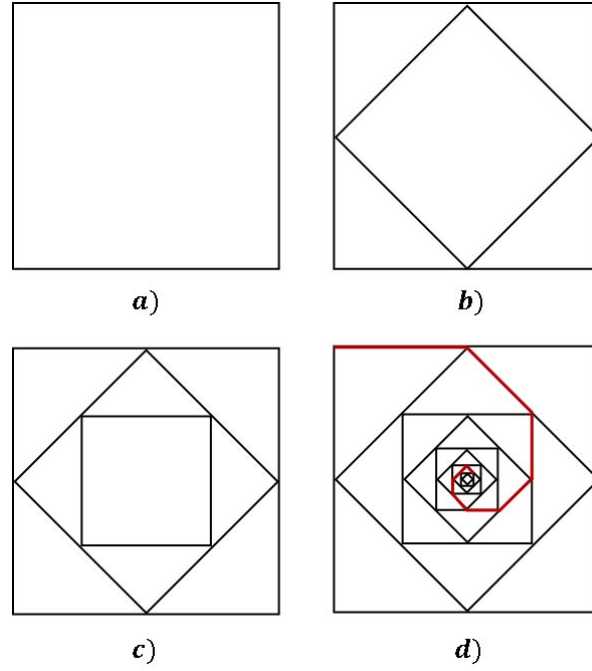


Figura 6.7: La Figura *a*) es el cuadrado original, la Figura *b*) es la primera iteración. Figura *c*) es la segunda iteración. La Figura *d*) es el límite de las iteraciones con el espiral destacado.

Sea $s(k)$ la longitud del lado del k -ésimo cuadrado inscrito, donde $s(0) = 1$. Notemos que el lado del $(k + 1)$ -ésimo cuadrado inscrito es también la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son la mitad de los dos lados del k -ésimo cuadrado inscrito, es decir, cda cateto tiene longitud $\frac{s(k)}{2}$. Por el Teorema de Pitágoras

$$s(k + 1) = \sqrt{\left(\frac{s(k)}{2}\right)^2 + \left(\frac{s(k)}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}s(k).$$

Luego, por el Teorema 4.9 (Sandefur [10]), $s(k) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k c$. Dado que $s(0) = 1 = c$, tenemos que

$$s(k) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k.$$

Los triángulos rectángulos son formados por las esquinas de cada cuadrado. Consideremos la espiral destacada en la Figura 6.7 *d*) (escogido en sentido horario) formada por un cateto de cada triángulo rectángulo de cada nivel. A continuación, calcularemos la longitud de dicha espiral.

Sea $l(k)$ la longitud de los primeros k segmentos de la espiral. Luego, $l(1) = \frac{1}{2}$, ya que el primer cateto considerado tiene la mitad de longitud de un lado del cuadrado original. Es evidente entonces que

$$l(k+1) = l(k) + (\text{la longitud del } (k+1)\text{-ésimo cateto}).$$

Pero, la longitud del $(k+1)$ -ésimo cateto mide la mitad del lado del k -ésimo cuadrado inscrito. Luego

$$l(k+1) = l(k) + \frac{s(k)}{2} = l(k) + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^k. \quad (6.24)$$

Por el Teorema 4.9 (Sandefur), para $r = 1$, $b = \frac{1}{2}$ y $s = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tenemos que la solución general del sistema dinámico dado en (6.24) es

$$\begin{aligned} l(k) &= c \cdot 1 + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^k}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 1} \\ &= c + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^k}{\frac{\sqrt{2}-2}{2}} \\ &= c + \frac{1}{\sqrt{2}-2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^k. \end{aligned}$$

Pero, $l(1) = \frac{1}{2}$. Luego

$$\frac{1}{2} = c + \frac{1}{\sqrt{2}-2} \frac{\sqrt{2}}{2} = c + \frac{\sqrt{2}+2}{-2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = c - \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

de donde, $c = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Así

$$\begin{aligned} l(k) &= \frac{2+\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}+2}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^k \\ &= \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2} \right) \left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^k \right]. \end{aligned}$$

Finalmente, dado que $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k$ tiende a cero cuando k tiende a infinito, tenemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} l(k) = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}, \quad (6.25)$$

valor que coincide con el perímetro de uno de los triángulos rectángulos más grandes resultantes de la primera iteración.

6.4. Modelos en Clases de Edades

En esta sección estudiaremos una clase de modelos que es posible formar en varias variables. Estos estarán motivados por el estudio de la evolución de una población donde se hace distinción en las edades de los individuos. El estado del sistema al instante k será un vector x_k de dimensión $A \geq 2$ donde A representa la cantidad de años a la cual llega la población en estudio. De esta forma,

$$x_k = \begin{pmatrix} N_1(k) \\ N_2(k) \\ \vdots \\ N_A(k) \end{pmatrix},$$

donde $N_1(k)$ representa la cantidad de individuos en el año k que tienen entre 0 y un año. En general, $N_a(k)$ representa la cantidad de individuos en el año k entre $a - 1$ y a años. Notemos que hasta ahora se está suponiendo implícitamente que no hay individuos mayor a una edad A . Esto es posible de corregir al decir que $N_A(k)$ representa el número de individuos en el año k de una edad mayor a $A - 1$.

Intentemos establecer una relación que nos indique cómo evoluciona el *vector de edades* x_k . En general se supone que los individuos en el año anterior (en k) tenían un año menos, es decir, una proporción de $N_{a-1}(k)$.

El por qué no se dice simplemente $N_a(k+1) = N_{a-1}(k)$ es debido a que dependiendo de la edad, la especie puede morir por causas naturales propios a su naturaleza o al entorno en el que se encuentra. Por ejemplo, si estamos pensando en peces, a edades pequeñas es más probable que los individuos sean comidos por otros peces y a edades grandes es más probable que mueran por causa natural. De esta forma, para las edades $a = 2, 3, 4, \dots, A-1$ diremos que la cantidad de individuos al instante $k+1$ será una porción α_a de los individuos que el año anterior tenía un año menos. Por lo tanto,

$$N_a(k+1) = \alpha_a N_{a-1}(k), \quad a = 2, 3, \dots, A-1.$$

Si suponemos que la especie no vive más allá de A años, entonces se tendrá

$$N_A(k+1) = \alpha N_{A-1}(k).$$

Sin embargo, si consideramos $N_A(k)$ la cantidad de individuos que tienen edad mayor a $A - 1$ se tiene

$$N_A(k+1) = \alpha_A N_{A-1}(k) + \gamma N_A(k),$$

puesto que debemos agregar una porción de aquellos que el año anterior ya tenía edad mayor a $A - 1$ y por lo tanto en el año $k + 1$ tendrán más de A años, siendo $\gamma \geq 0$ la fracción de individuos de edad mayor a $A - 1$ que sobrevive de un año a otro. en lo que sigue supondremos que la especie no vive más allá de A años para simplificar el estudio ($\gamma = 0$).

Falta ver cuántos serán los individuos entre 0 y 1 año en el año $k+1$. Esta es considerada la parte más delicada en biología. De hecho, en el caso de algunas especies marinas, no existe un conocimiento (estimación) de, dado un vector de edades, cuántos serán los individuos nacidos durante el año. Claramente este factor es de vital importancia para el análisis puesto que la evolución del sistema estará dada por la capacidad de reproducción que tenga la especie.

A modo de simplificación consideraremos sólo dos casos, que incluso a pesar de su simplicidad es posible encontrar en modelos actualmente utilizados. El primero es suponer que siempre existe una cantidad constante de individuos de edad entre 0 y 1, es decir, $N_1(k) = R > 0$ en cada año k . El otro caso, es suponer que cada individuo de edad a aporta una cantidad β_a de huevos fértiles (en el caso de peces), crías (en el caso de mamíferos) o semillas (si se trata de una especie vegetal), que darán origen a un nacimiento (suponiendo que nadie se los come antes de que nazcan). De esta forma,

$$N_1(k+1) = \beta_1 N_1(k) + \beta_2 N_2(k) + \dots + \beta_A N_A(k).$$

Los factores β_a dependen de cada especie en particular. En el caso del ser humano, sabemos que en los primeros años no se es fértil, es decir $\beta_a = 0$ para a pequeño ocurriendo también esto, para los últimos años de vida. En la naturaleza es posible encontrar especies en que $\beta_1 > 0$ lo que significa que individuos de entre 0 y 1 año aportan una cantidad de nuevos individuos al año siguiente.

Escribamos la evolución del vector de edades para los casos en que la cantidad de nacimientos es constante y para aquella en que esta es una proporción de todos los individuos. En el caso de nacimientos (también llamada *reclutamiento*) constante igual a R se tiene

que

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} = \begin{pmatrix} N_1(k+1) \\ N_2(k+1) \\ N_3(k+1) \\ \vdots \\ N_A(k+1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R \\ \alpha_2 N_1(k) \\ \alpha_3 N_2(k) \\ \vdots \\ \alpha_A N_{A-1}(k) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1(k) \\ N_2(k) \\ N_3(k) \\ \vdots \\ N_A(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Si definimos la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_A & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$b = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

el sistema se escribe como

$$x_{k+1} = Bx_k + b. \tag{6.26}$$

Veamos el caso en que la cantidad de nacimientos no es constante, y viene dada por

$$N_1(k+1) = \beta_1 N_1(k) + \beta_2 N_2(k) + \dots + \beta_A N_A(k).$$

En esta situación la evolución del vector de edades estará dado por

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} N_1(k+1) \\ N_2(k+1) \\ N_3(k+1) \\ \vdots \\ N_A(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 N_1(k) + \beta_2 N_2(k) + \dots + \beta_A N_A(k) \\ \alpha_2 N_1(k) \\ \alpha_3 N_2(k) \\ \vdots \\ \alpha_A N_{A-1}(k) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_{A-1} & \beta_A \\ \alpha_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1(k) \\ N_2(k) \\ N_3(k) \\ \vdots \\ N_A(k) \end{pmatrix}.$$

Si definimos

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_{A-1} & \beta_A \\ \alpha_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 0 & \dots & \alpha_A & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_A & 0 \end{pmatrix},$$

se tiene que el sistema es lineal y se escribe

$$x_{k+1} = \overline{B}x_k.$$

La matriz escrita anteriormente es conocida como *matriz de Leslie* (o modelo de Leslie) en honor al investigador P.H. Leslie (1900-1974) quien en 1945 publicara sobre las aplicaciones de matrices en el estudio de poblaciones.

Notemos que dada una distribución de edades inicial x_0 , al igual que en una dimensión es posible probar (utilizando inducción) que la estructura de edades en el periodo k estará dado por $x_k = \overline{B}^k x_0$, donde las potencias de la matriz \overline{B} pueden ser calculadas utilizando la descomposición de Jordan.

Veamos ahora un ejemplo en que una especie no vive más allá de tres años.² Si la porción de ejemplares que sobrevive de un año a otro es la mitad y para el nacimiento de individuos sólo aportan aquellos que tienen entre uno y dos años, siendo el aporte de estos la mitad, es decir, entre dos individuos se da origen a un nacimiento. Traduciendo lo anterior para escribir el modelo se tiene que $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_3 = \frac{1}{2}$, $\beta_1 = \beta_3 = 0$ y $\beta_2 = \frac{1}{2}$. El modelo se escribe entonces como

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} N_1(k+1) \\ N_2(k+1) \\ N_3(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}N_2(k) \\ \frac{1}{2}N_1(k) \\ \frac{1}{2}N_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1(k) \\ N_2(k) \\ N_3(k) \end{pmatrix}.$$

²Para cierta clase de Anchoveta esta es la edad que se considera

Es posible mostrar que los valores propios de la matriz

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ y $\lambda_3 = \frac{1}{2}$. Todos estos tienen valor absoluto menor que uno y por lo tanto, gracias al Teorema 3.1, para una condición inicial x_0 , la trayectoria que estará dada por $x_k = \overline{B}^k x_0$ convergerá a $x^* = (0, 0, 0)$, es decir, si las condiciones mencionadas anteriormente (las referidas a natalidad y sobrevivencia) son las que rigen la evolución de la especie, esta se extinguirá.

Finalmente, veamos un resultado referente a la estabilización en un modelo de clases de edades. Para ello, debemos introducir una propiedad, que involucra los valores propios de una matriz.

Proposición 6.1. *Si los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de una matriz cuadrada \overline{B} (de $n \times n$) satisfacen*

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$$

y λ_1 es real, entonces para todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ existe un vector (propio asociado a λ_1) \overline{x} tal que

$$\overline{B}\overline{x} \text{ y } \frac{1}{\lambda_1^k} \overline{B}^k x \rightarrow \overline{x}.$$

Introduzcamos un ejemplo donde al modelo (matriz) resultante se le pueda aplicar e interpretar el resultado anterior.

Consideremos una población que no vive más de tres años en la cual, los individuos que sobreviven luego del primer año es la mitad y los que sobreviven, luego del segundo año, es un cuarto. Los efectivos fértiles de esta población serán aquellas de dos y tres años aportando cuatro y tres individuos cada uno respectivamente. La matriz de Leslie asociada a la población descrita corresponde a

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.27)$$

El valor propio de mayor módulo de esta matriz es $\lambda = \frac{3}{2}$, con un vector propio

$$\frac{1}{25} \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,72 \\ 0,24 \\ 0,04 \end{pmatrix}. \quad (6.28)$$

Aplicando la Proposición 6.1 encontramos que este modelo predice que la población tenderá a distribuirse por edades en las proporciones dadas por (6.28), y que el número total

de individuos fértiles crecerá en una forma muy aproximada a una progresión geométrica con razón $\frac{3}{2}$.

Así, para una matriz de Leslie con un valor propio dominante (que satisface las propiedades de la Proposición 6.1) el modelo de población propuesto por Leslie predice que

- La distribución por edades tiende a estabilizarse.
- Asintóticamente, la población crece o decrece en proporción geométrica, con una tasa igual al valor propio dominante.

Comentario Final:

El primer objetivo del modelamiento matemático es descubrir fenómenos importantes y evidentes del problema en estudio. El modelo deberá ser simple, arriesgando en ocasiones la pérdida de realismo. Lo importante es que aporte en alguna medida una visión cualitativa y/o cuantitativa del fenómeno que se desea representar. Esta es la simplicidad que nosotros abordamos con nuestros ejemplos, dejando de lado una representación más precisa y detallada de la realidad.

Bibliografía

- [1] Agarwal, R.P. *Difference Equations and Inequalities Theory, Methods and Applications*, Marcel Dekker, INC., 1992.
- [2] Easton, R. W. *Geometric Methods for Discrete Dynamical Systems*. New York: Oxford University Press, 1998.
- [3] Elaydi, S. *An Introduction to Difference Equations*. New York: Springer-Verlag, 1996.
- [4] Goldberg, S. *Introducción a las Ecuaciones en Diferencias Finitas*. Barcelona: Marcombo S. A., 1964.
- [5] Holmgren R. A. *A first Course in Discrete Dynamical Systems*. New York: Springer-Verlag, 1994.
- [6] Kelley, W.G. & Peterson, A.C. *Difference Equations With Applications*. Academic Press, INC., 1991.
- [7] Kocic, V.L. & Ladas, G. *Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order With Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [8] Martelli M. *Introduction to Discrete Dynamical Systems and Chaos*. John Wiley & Sons, 1999.
- [9] Medina, R. *Stability analysis of nonautonomous difference systems with delaying arguments*. J. Mathematical Analysis and Applications, 335 (2007), 615 - 625.
- [10] Sandefur, J.T. *Discrete Dynamical Modeling*. New York: Oxford University Press, 1993.