

《数学奥赛辅导丛书》之二

组 合 恒 等 式

史济怀 编著

中国科学技术大学出版社

2009 • 合肥

图书在版编目 (CIP) 数据

组合恒等式/史济怀编著. —3 版. —合肥:中国科学技术大学出版社,2009.4

(数学奥赛辅导丛书)

ISBN 978-7-312-02484-9

I. 组… II. 史… III. 组合恒等式—高中—教学参考资料
IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 049170 号

中国科学技术大学出版社出版发行

地址:安徽省合肥市金寨路 96 号, 230026

网址: <http://press.ustc.edu.cn>

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

*

开本:880×1230/32 印张:5.125 字数:108 千

1989 年 3 月第 1 版 2009 年 4 月第 3 版

2009 年 4 月第 3 次印刷

定价:11.00 元

序

目前,有关中学生复习资料、课外辅导读物已经出版得很多了,甚至使一些中学生感到不堪负担,所以再要出版这类读物一定要注重质量,否则“天下文章一大抄”,又无创新之见,未免有误人子弟之嫌.写这类读物如何才能确保质量呢?我想华罗庚老师的两句名言:“居高才能临下,深入才能浅出”,应该成为写这类读物的指导思想,他本人生前所写的一系列科普读物,包括为中学生写的一些书,也堪称是这方面的范本.

中国科学技术大学数学系的老师们,在从事繁重的教学与科研工作的同时,一向对中学数学的活动十分关注,无论对数学竞赛,还是为中学生及中学教师开设讲座,出版中学读物都十分热心,这也许是受华罗庚老师的亲炙,耳濡目染的缘故,所以至今这仍然是中国科学技术大学数学系的一个传统和特色.

我看了几本他们编写的“数学奥赛辅导丛书”原稿,感到他们是按照华罗庚老师的教诲认真写作的,所以乐之为序.

龚 昇

前 言

1986 年暑假,中国科学技术大学数学系在安徽屯溪,为全国中学数学教师举办了一次暑假讲习班,笔者在讲习班上以“组合恒等式”为题作了一次讲演.当时选择这个题目的目的,是希望中学数学教师在中学教材的基础上,对组合数的性质有进一步的了解,同时希望通过对一些组合恒等式的证明,以加深对数学中常用的一些证明技巧,例如归纳、递推、变换等方法的认识.鉴于在一些国际数学竞赛中,有时也出现证明组合恒等式或与组合数性质有关的题目,希望教师在对学生进行辅导时,增加一些这方面的题材,这是讲演的另一个目的.这本小册子便是在那次讲演的基础上写成的.

所谓组合恒等式,是指组合数 C_n^k 满足的一些关系式,例如大家熟知的

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

便是两个最简单的组合恒等式.由于组合数本身的含义以及它同时又是二项式定理中展开式的系数这一事实,使得在数学的许多领域中出现越来越多的组合恒等式.现在“组合恒等式”已成为组合数学中的一个研究方向,已经出版了若干本专著.特别是七十年代以来,单复变数函数和多复变数函数的残数理论被用来研究组合恒等式,使得很多组合恒等式的证明得到了统一

的处理和简化. 1977 年苏联学者叶格里切夫把这方面的成果写成了一本专著《积分表示和组合和的计算》, 美国数学学会于 1984 年把这本专著翻译成英文出版, 可见组合恒等式的研究正在引起人们的重视.

这本小册子介绍了证明组合恒等式的几种常用的方法. 我们只假定读者具有高中的数学水平, 即掌握了一般的排列、组合、二项式定理、复数等项知识的读者就能阅读本书. 由于规定了这样一个起点, 有关用微积分证明组合恒等式的方法都没有涉及, 当然更不可能介绍前面曾经提到的, 用复变函数中残数理论和围道积分证明组合恒等式的方法了.

每节之后附的习题是本书的重要组成部分, 通过这些习题, 读者可以检查自己对书中介绍的方法掌握的程度.

这是一本入门性的小册子, 除了前面提到的, 希望对中学数学教师和高中生有用外, 还希望能引起具有高中或高中以上文化程度的读者对研究组合恒等式的兴趣!

本书是在 1988 年版本的基础上修订而成, 除了改正若干印刷错误外, 还增加了“阿倍尔恒等式和由它导出的互逆公式”一节. 此外, 还把书中出现过的 160 个组合恒等式分类列在书后作为附录 2, 以便读者查找.

史济怀

1 几个基本的组合恒等式

牛顿二项式公式

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$$

的系数恰好是组合数 $C_n^0, C_n^1, \cdots, C_n^n$, 所以组合数有时也称为二项式系数. 组合数有许多有趣的关系式, 例如在上式中分别取 $x=1$ 和 $x=-1$, 就得到两个恒等式

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

$$C_n^0 - C_n^1 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0$$

这是大家熟知的. 组合数, 作为牛顿二项式公式的系数以及它本身在组合学中的含义, 使得在数学的很多领域中出现越来越多的各种不同的组合恒等式. 1972 年美国出版了一本组合恒等式的表, 其中收集了 500 多个组合恒等式, 当然这远不是人们知道的全部组合恒等式!

一些复杂的组合恒等式往往是通过几个基本的组合恒等式, 经过归纳、递推等方法得到的. 这些基本的组合恒等式是

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (1.1)$$

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \quad (1.2)$$

$$C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1} \quad (1.3)$$

$$C_n^k C_k^m = C_n^m C_{n-m}^{k-m} = C_n^{k-m} C_{n-k+m}^m, \quad m \leq k \leq n \quad (1.4)$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n \quad (1.5)$$

$$C_n^0 - C_n^1 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0 \quad (1.6)$$

这六个基本恒等式中,前两个是大家熟知的,第三个是第四个的特例:只要在(1.4)的第一个等式中取 $m=1$,就得 $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$,这就是等式(1.3).

现在来证明等式(1.4).事实上,按照计算组合数的公式

$$C_n^k = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

可以写出

$$\begin{aligned} C_n^k C_k^m &= \frac{n!}{k! (n-k)!} \frac{k!}{m! (k-m)!} \\ &= \frac{n!}{m! (n-k)! (k-m)!} \\ C_n^m C_{n-m}^{k-m} &= \frac{n!}{m! (n-m)!} \frac{(n-m)!}{(k-m)! (n-k)!} \\ &= \frac{n!}{m! (n-k)! (k-m)!} \\ C_n^{k-m} C_{n-k+m}^m &= \frac{n!}{(k-m)! (n-k+m)!} \frac{(n-k+m)!}{m! (n-k)!} \\ &= \frac{n!}{m! (n-k)! (k-m)!} \end{aligned}$$

这三个乘积是相等的,这就是等式(1.4).

等式(1.5)和(1.6)就是本章开头提到的两个恒等式,只要在二项式定理中分别取 $x=1$ 和 -1 就能得到.

下面我们将看到,这些基本恒等式虽然简单,但用它们

可以证明或推导出一大批组合恒等式.

在给出具体的例子前,先介绍一下求和的记号,我们把和式 $C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ 简记为 $\sum_{i=1}^n C_i$, 这里 C_i 表示一般项, \sum (读作“西格马”) 上下的数字表示 i 从 1 加到 n , i 是求和指标, 只起辅助作用, 也可以换成别的记号. 例如

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^n i = \sum_{j=1}^n j$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{r=1}^n r^2 = \sum_{i=1}^n i^2$$

$$\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos mx = \sum_{j=1}^m \cos jx$$

利用这种记号, 多项式 $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 可以简记为

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k, \text{ 二项式定理可简写为 } (1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k. \text{ 公式(1.}$$

5) 和(1.6) 可分别写为

$$\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$$

在下面的讨论中,有时需要更换求和指标, 必须注意同时更换求和的上下限. 例如

$$\sum_{n=0}^s a_n x^n = \sum_{n=2}^{s+2} a_{n-2} x^{n-2} = \sum_{k=1}^{s+1} a_{k-1} x^{k-1}$$

下面是一系列利用六个基本恒等式来推导组合恒等式的例子. 其中,我们约定, $C_n^0 = 1$, 当 $k > n$ 或 k 是负整数时, $C_n^k = 0$.

【例 1】 计算 $S_{n,m} = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_n^k, \quad m \leq n.$

解 从等式(1.6)知道,当 $m=n$ 时, $S_{n,n}=0$. 现设 $m < n$,利用基本恒等式(1.2), $S_{n,m}$ 可以写成

$$\begin{aligned} S_{n,m} &= 1 + \sum_{k=1}^m (-1)^k (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) \\ &= 1 - (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^0) + (C_{n-1}^2 + C_{n-1}^1) \\ &\quad + (-1)^m (C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}) \\ &= (-1)^m C_{n-1}^m \end{aligned}$$

这样,就得到等式

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k C_n^k = \begin{cases} 0, & m = n. \\ (-1)^m C_{n-1}^m, & m < n. \end{cases}$$

【例2】 证明

$$\sum_{k=0}^n C_{2n}^k = 2^{2n-1} + \frac{1}{2} C_{2n}^n$$

证 记 $a_n = \sum_{k=0}^n C_{2n}^k$, $b_n = \sum_{k=n+1}^{2n} C_{2n}^k$, 则由等式(1.5)得

$$a_n + b_n = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k = 2^{2n} \quad (1.7)$$

另一方面,对 b_n 的求和指标作变换: $k = 2n - l$,得

$$b_n = \sum_{l=0}^{n-1} C_{2n}^{2n-1-l} = \sum_{l=0}^{n-1} C_{2n}^l = \sum_{l=0}^n C_{2n}^l - C_{2n}^n = a_n - C_{2n}^n$$

代入(1.7),即得

$$a_n = 2^{2n-1} + \frac{1}{2} C_{2n}^n$$

这就是要证明的恒等式.

【例3】 计算 $p_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k$, $q_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k+1} C_n^k$.

解 计算这两个和式的主要困难是在每个组合数 C_n^k 前有一个因子 $\frac{1}{k+1}$, 若能通过变换把这个因子去掉, 那么利用基本恒等式(1.5) 和(1.6), 就能得到所要求的和. 事实上, 把基本恒等式(1.3) 改写为

$$\frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$$

并代入 p_n 和 q_n , 即得

$$p_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1)$$

$$q_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k+1}C_n^k = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{n+1}$$

这里我们已经应用了公式(1.5) 和(1.6).

【例 4】 计算 $\sum_{k=1}^n k^2 C_n^k$.

解 先利用基本恒等式(1.3), 可得

$$\sum_{k=1}^n k^2 C_n^k = n \sum_{k=1}^n k C_{n-1}^{k-1}$$

对右端的和式作指标变换 $k-1=l$, 得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k C_{n-1}^{k-1} &= \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) C_{n-1}^l = \sum_{l=0}^{n-1} l C_{n-1}^l + \sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1}^l \\ &= \sum_{l=1}^{n-1} l C_{n-1}^l + 2^{n-1} \end{aligned}$$

$$(\text{应用公式(1.3)}) = (n-1) \sum_{l=1}^{n-1} C_{n-2}^{l-1} + 2^{n-1}$$

$$(\text{作指标变换 } l-1=s) = (n-1) \sum_{s=0}^{n-2} C_{n-2}^s + 2^{n-1}$$

$$(\text{应用公式(1.6)}) = (n-1)2^{n-2} + 2^{n-1}$$

故最后得

$$\sum_{k=1}^n k^2 C_n^k = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$$

应用完全相同的方法,读者可以算出

$$\sum_{k=1}^n k^3 C_n^k, \sum_{k=1}^n k^4 C_n^k, \dots$$

的值.

【例 5】 设 $m \leq n$, 证明

$$S_{mn} = \sum_{k=m}^n (-1)^k C_n^k C_k^m = (-1)^m \delta_{mn}$$

这里

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } m=n, \\ 0, & \text{如果 } m \neq n. \end{cases}$$

δ_{mn} 称为克朗耐克尔 δ , 以后要多次用到它.

证 当 $m=n$ 时, 上面的和式只有一项

$$S_{mn} = (-1)^m C_n^m C_m^m = (-1)^m$$

故等式成立. 现设 $m < n$, 利用基本恒等式(1.4)得

$$S_{mn} = \sum_{k=m}^n (-1)^k C_n^m C_{n-m}^{k-m} = C_n^m \sum_{k=m}^n (-1)^k C_{n-m}^{k-m}$$

$$(\text{作指标变换 } k-m=l) = C_n^m \sum_{l=0}^{n-m} (-1)^{m+l} C_{n-m}^l$$

$$= (-1)^m C_n^m \sum_{l=0}^{n-m} (-1)^l C_{n-m}^l$$

$$= 0$$

最后一步利用了等式(1.6). 证明完毕.

证明这个恒等式的关键是基本恒等式(1.4), 它把两个

因子都和变动指标 k 有关的乘积 $C_n^k C_k^m$ 变成了只有一个因子与 k 有关的乘积 $C_n^m C_{n-m}^{k-m}$, 这样, C_n^m 就可作为公因子提出来, 和式就化简了. 这里利用(1.4)的目的和例3中利用(1.3)的目的是一样的, 都是为了把和式化简. 这个等式在下面的讨论中还要用到.

【例6】 设 $m \leq n$ 证明 $\sum_{k=m}^n C_n^k C_k^m = 2^{n-m} C_n^m$.

证 和证明例5的方法一样, 利用基本恒等式(1.4)得

$$\sum_{k=m}^n C_n^k C_k^m = C_n^m \sum_{k=m}^n C_{n-m}^{k-m} = C_n^m \sum_{l=0}^{n-m} C_{n-m}^l = 2^{n-m} C_n^m$$

最后一步利用了基本恒等式(1.5)

【例7】 证明 $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{m}{m+k} = (C_{m+n}^n)^{-1}$.

证 显然, 当 $m=1$ 时, 这就是例3中 q_n 的结果, 但现在例3中的方法已不能用. 记上式左端为 b_n , 利用基本恒等式(1.2)和(1.3)可得

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{m}{m+k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) \frac{m}{m+k} + (-1)^n \frac{m}{m+n} \\ &= b_{n-1} + \sum_{k=1}^n (-1)^k C_{n-1}^{k-1} \frac{m}{m+k} \\ &= b_{n-1} + \frac{m}{n} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{k}{m+k} \\ &= b_{n-1} + \frac{m}{n} \left\{ \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k - \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{m}{m+k} \right\} \end{aligned}$$

$$= b_{n-1} - \frac{m}{n} b_n$$

这里我们已经应用了等式(1.6). 由此即得

$$b_n = \frac{n}{m+n} b_{n-1}$$

从这个递推公式立刻可得所要证明的等式:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{n}{m+n} b_{n-1} = \frac{n}{(m+n)} \frac{n-1}{m+n-1} b_{n-2} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)} b_{n-3} = \cdots \\ &= \frac{n!m!}{(m+n)!} b_0 = (C_{m+n}^n)^{-1} \end{aligned}$$

这里我们一下子得不到要证明的等式, 但得到了 b_m 和 b_{m-1} 之间的递推关系. 这种利用递推关系证明恒等式的方法下面将要多次用到.

【例 8】 证明

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k} C_n^k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \quad (1.8)$$

证 看上去(1.8)左端的和式与例3的 q_n 差不多, 但现在不能直接用公式(1.3). 不过容易想到通过等式(1.2)来使用公式(1.3). 事实上, 先用公式(1.2), 再用公式(1.3)可得

$$\frac{1}{k} C_n^k = \frac{1}{k} (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) = \frac{1}{k} C_{n-1}^k + \frac{1}{n} C_n^k$$

于是若记 $f_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k} C_n^k$, 则

$$f_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} C_n^k + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} C_{n-1}^k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} C_n^k + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \\
&= f_{n-1} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} C_n^k = f_{n-1} + \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

这里最后的等式用了基本恒等式(1.6). 从这个递推关系可得

$$f_{n-1} = f_{n-2} + \frac{1}{n-1}, \dots, f_2 = f_1 + \frac{1}{2}, f_1 = 1$$

所以

$$f_n = f_{n-1} + \frac{1}{n} = f_{n-2} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = \dots = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

这就是要证明的等式(1.8).

【例 9】 证明恒等式

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k 2^{2n-2k} C_{2n-k+1}^k = n+1 \quad (1.9)$$

证 记(1.9)左端的和式为 a_n , 利用基本恒等式(1.2), a_n 可写为

$$\begin{aligned}
a_n &= 2^{2n} + \sum_{k=1}^n (-1)^k 2^{2n-2k} (C_{2n-k}^k + C_{2n-k}^{k-1}) \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k 2^{2n-2k} C_{2n-k}^k + \sum_{k=1}^n (-1)^k 2^{2n-2k} C_{2n-k}^{k-1} \quad (1.10)
\end{aligned}$$

对上式第二个和式作指标变换 $k=l+1$ 得

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n (-1)^k 2^{2n-2k} C_{2n-k}^{k-1} \\
&= \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{l+1} 2^{2(n-1)-2l} C_{2(n-1)-l+1}^l = -a_{n-1}
\end{aligned}$$

如果把(1.10)右端的第一个和式记为 b_n , 即