

Probability
Sheet 0 — SP21
自查作业

1. 试通过观察牛顿二项式公式:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \cdots + C_n^n x^n$$

来证明下列几个组合恒等式:

(a) $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n, C_n^0 - C_n^1 + \cdots + (-1)^n C_n^n = 0.$

(b) $C_n^k = C_n^{n-k}, C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$

(c) $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}.$

(d) $C_n^k C_k^m = C_n^m C_{n-m}^{k-m} = C_n^{k-m} C_{n-k+m}^m, m \leq k \leq n.$

2. n 双相异的鞋共 $2n$ 只, 随机地分成 n 堆, 每堆 2 只. 问“各堆都自成一双鞋”这个事件 E 的概率是多少?

3. 一批产品共 N 个, 其中废品有 M 个, 现从中随机 (或者说随意) 取出 n 个, 问“其中恰好有 m 个废品”这个事件 E 的概率是多少?

4. n 个男孩, m 个女孩 ($m \leq n+1$) 随机地排成一列. 问“任意两个女孩都不相邻”这个事件 E 的概率是多少?

5. 考虑分段函数

$$f(x) = \begin{cases} 4Cx, & x \in (0, 2); \\ 0, & x \notin (0, 2) \end{cases}$$

试解决以下几个问题:

(a) 已知 $\int_0^1 f(x)dx = 1$, 求解常数 C .

(b) 求定积分

$$\int_1^2 f(x)dx.$$

(c) 计算函数 $F(x)$ 的表达式, $F(x)$ 的定义为

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

6. 考虑二元函数

$$F(x, y) = 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y-\lambda xy},$$

其中 $\lambda > 0$, 试求 $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y), \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y).$

7. 计算二重积分

$$I = \iint_D (x^2 + 2y) dD,$$

其中 D 由 $y = x^2, y = 0, x = 1$ 所围.