# 第三章 导数及其应用

## 课时1 导数的概念及运算

## 一、课标要求

1. 了解导数概念的实际背景，知道导数是关于瞬时变化率的数学表达，体会导数的内涵与思想；体会极限思想；通过函数图象直观理解导数的几何意义.

2. 能根据导数定义求函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\frac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$ 的导数.

3. 能利用给出的基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则，求简单函数的导数；能求简单的复合函数（限于形如 $f(ax+b)$）的导数.

## 二、知识梳理

### 1．导数的概念

| 概念 | 含义 |
|---|---|
| 平均变化率 | 函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上的平均变化率为 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，若 $\Delta x=x_2-x_1$，$\Delta y=y_2-y_1$，则平均变化率可表示为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$． |
| 瞬时变化率 | 当 $\Delta x$ 无限地趋近于 0 时，$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 无限地趋近于点 $P(x,f(x))$ 处的切线的___斜率___． |

| | |
|---|---|
| 导数的概念 | 函数 $f(x)$ 在区间$(a,b)$上有定义，$x_0\in(a,b)$，若 $\Delta x$ 无限地趋近于 0 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 无限地趋近于一个常数 $A$,则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处___可导___，并称 $A$ 为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的___导数___，记作___$f'(x_0)$___ |
| 几何意义 | 函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是在曲线 $f(x)$ 上点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率．相应地，切线方程为___$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ $f'(x_0)$___. |

2．基本初等函数的导数公式

| 函数 | 导数 |
| --- | --- |
| $f(x)=C$ | $f'(x)=0$ |
| $f(x)=\sqrt{x}$ | $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $f(x)=\frac{1}{x}$ | $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ |
| $f(x)=x^{\alpha}$ | $f'(x)=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$（$\alpha$ 为常数） |

| | |
|---|---|
| $f(x)=a^x$ | $f'(x)=a^x\ln a$ （$a>0$, 且$a\neq 1$） |
| $f(x)=\log_a x$ | $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a \mathrm{e}=\frac{1}{x\ln a}$ （$a>0$，且$a\neq 1$） |
| $f(x)=\mathrm{e}^x$ | $f'(x)=\mathrm{e}^x$ |
| $f(x)=\ln x$ | $f'(x)=\frac{1}{x}$ |
| $f(x)=\sin x$ | $f'(x)=\cos x$ |
| $f(x)=\cos x$ | $f'(x)=-\sin x$ |

3．导数的运算法则

（1）$\left(f\left(x\right)\pm g\left(x\right)\right)'=f'\left(x\right)\pm g'\left(x\right)$.

（2）$\left(f\left(x\right)g\left(x\right)\right)'=$ $\underline{f'\left(x\right)g\left(x\right)+f\left(x\right)g'\left(x\right)}$.

（3）$\left(\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right)'=$ $\underline{\dfrac{f'\left(x\right)g\left(x\right)-f\left(x\right)g'\left(x\right)}{(g(x))^2}}$ $\left(g\left(x\right)\neq 0\right)$.

（4）简单的复合函数的导数

若 $y=f\left(u\right)$，$u=ax+b$，则 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$，即 $y'_x=$ $\underline{y'_u\cdot a}$ .

【拓展知识】

1. $f'(x)$表示函数$f(x)$的导数，$f'(x_0)$表示曲线$f(x)$在$x=x_0$处的切线的斜率，$f'(x_0)$是一个常数，$\left(f'(x_0)\right)'=0$.

2．曲线$y=f(x)$在点$P(x_0,y_0)$处的切线是指以$P$为切点、斜率为$k=f'(x_0)$的切线，是唯一的一条切线，“过点$A$的切线”，则点$A$不一定是切点；“在点$A$处的切线”，点$A$一定是切点.

## 三、基础回顾

1．判断正误.（正确的打“√”，错误的打“×”）

(1) 函数 $f(x)=\sin 2x$ 的导数 $f'(x)=\cos 2x$.　　　( × )

(2) $f'(x_0)$是函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 附近的平均变化率.　　( × )

(3) 函数图象的切线与函数图象的公共点只有一个. ( × )

(4) 函数 $y=f(x)$的导数 $f'(x)$反映了函数 $f(x)$的瞬时变化趋势，其符号反映了变化的方向，其大小$|f'(x)|$反映了变化的快慢，$|f'(x)|$越大，曲线在这点处的切线越“陡”．（ √ ）

2、一个质点做直线运动，其位移 $s$(单位：米)与时间 $t$(单位：秒)满足关系式：$s=t^5+(t-2)^2-4$，则当 $t=1$ 时，该质点的瞬时速度为(　　)

A．$-2$ 米/秒　　B．3 米/秒

C．4 米/秒　　D．5 米/秒

B【解析】$s'=5t^4+2t-4$，当 $t=1$ 时，$s'=3$，故当 $t=1$ 时，该质点的瞬时速度为 3 米/秒. 故选 B.

3. 函数 $f\left(x\right)=x^{2}+\sin x$ 的导数 $f'\left(x\right)=$（　　）

A. $x+\cos x$　　B. $2x+\cos x$　　C. $2x-\cos x$　　D. $2x-\sin x$

B【解析】由题意，可知 $f'\left(x\right)=2x+\cos x$ .故选 B.

4. 若直线 $y=kx-3$ 与曲线 $y=2\ln x$ 相切，则实数 $k=$ ______.

$2\sqrt{e}$ 【解析】由 $y=2\ln x$，得 $y'=\dfrac{2}{x}$.设 $y=kx-3$ 与曲线 $y=2\ln x$ 相切于点 $(x_0,y_0)$ $(x_0>0)$，

则有 $\begin{cases} k=\dfrac{2}{x_0}, \\ y_0=kx_0-3, \\ y_0=2\ln x_0, \end{cases}$ 所以 $x_0=e^{-\frac{1}{2}}$，$k=\dfrac{2}{x_0}=2\sqrt{e}$.

## 四、考点扫描

### 考点一　导数的运算

例 1 （1）已知函数$f(x)$满足$f(x)=2f'(1)\ln x+\frac{x}{e}$($f'(x)$为$f(x)$的导函数)，则$f(e)=$(　　)

A．$e-1$　　B．$\frac{2}{e}+1$

C．1　　D．$-\frac{2}{e}+1$

D 【解析】$f'(x)=\frac{2f'(1)}{x}+\frac{1}{e}$，当 $x=1$ 时，$f'(1)=2f'(1)+\frac{1}{e}$，解得 $f'(1)=-\frac{1}{e}$，故 $f(x)=-\frac{2\ln x}{e}+\frac{x}{e}$，所以 $f(e)=-\frac{2\ln e}{e}+\frac{e}{e}=-\frac{2}{e}+1$.故选 D.

（2）(多选题) 下列求导运算正确的有(　　)

A. $\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)'=-\dfrac{1}{x\ln^2 x}$

B. $(x^2e^x)'=2x+e^x$

C. $(x\cos x)'=-\sin x$

D. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)'=1+\dfrac{1}{x^2}$

AD 【解析】 对于 A，$\left(\dfrac{1}{ln\,x}\right)'=-\dfrac{1}{\ln^2 x}\cdot(\ln x)'=-\dfrac{1}{x\ln^2 x}$；对于 B，$(x^2e^x)'=(x^2+2x)e^x$，对于 C，$(x\cos x)'=\cos x-x\sin x$，对于 D，$\left(x-\dfrac{1}{x}\right)'=1+\dfrac{1}{x^2}$.故选 AD.

对点训练　(多选题)下列求导正确的有(　　)

A．$[(3x+5)^3]'=9(3x+5)^2$

B．$(x^3\ln x)'=3x^2\ln x+x^2$

C.$\left(\dfrac{2\sin x}{x^2}\right)'=\dfrac{2x\cos x+4\sin x}{x^3}$

D．$(\ln 2x)'=\dfrac{1}{2x}$

AB 【解析】 对于 A，$[(3x+5)^3]'=3(3x+5)^2(3x+5)'=9(3x+5)^2$，故 A 正确；

对于 B，$(x^3\ln x)'=(x^3)'\ln x+x^3(\ln x)'=3x^2\ln x+x^2$，故 B 正确；

对于 C，$\left(\dfrac{2\sin x}{x^2}\right)'=\dfrac{(2\sin x)'x^2-2\sin x(x^2)'}{x^4}=\dfrac{2x\cos x-4\sin x}{x^3}$，故 C 错误；

对于 D，$(\ln 2x)'=2\cdot\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{x}$，故 D 错误．故选 AB.

规律方法:

考点二　导数的几何意义

考向 1 求切线方程

例 2　（1）(2023·全国甲卷)曲线 $y=\frac{e^x}{x+1}$在点$\left(1,\ \frac{e}{2}\right)$处的切线方程为(　　)

A．$y=\frac{e}{4}x$　　B．$y=\frac{e}{2}x$

C．$y=\frac{e}{4}x+\frac{e}{4}$　　D．$y=\frac{e}{2}x+\frac{3e}{4}$

C 【解析】 因为 $y=\frac{e^x}{x+1}$，所以 $y'=\frac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2}=\frac{xe^x}{(x+1)^2}$，所以 $k=\frac{e}{4}$，

所以曲线 $y=\frac{e^x}{x+1}$在点$\left(1,\frac{e}{2}\right)$处的切线方程为 $y-\frac{e}{2}=\frac{e}{4}(x-1)$，即 $y=\frac{e}{4}x+\frac{e}{4}$.故选 C.

（2）已知曲线 $y=\ln x+x+1$ 的一条切线的斜率为 2，则该切线方程为____________.

$2x-y=0$ 【解析】 设切点坐标为$(x_0, y_0)$.因为 $y=\ln x+x+1$，所以 $y'=\frac{1}{x}+1$，所以切线的斜率为$\frac{1}{x_0}+1=2$，解得 $x_0=1$.所以 $y_0=\ln 1+1+1=2$，即切点坐标为$(1, 2)$，所以切线方程为 $y-2=2(x-1)$，即 $2x-y=0$.

对点训练 (2023·广东深圳市质检)已知$f(x)$为偶函数，且当$x<0$时，$f(x)=x^3-x$，则曲线$y=f(x)$在点(1,0)处的切线方程是(　　)

A．$2x-y-2=0$　　B．$4x-y-4=0$

C．$2x+y-2=0$　　D．$4x+y-4=0$

C 【解析】 当$x<0$时，$f(x)=x^3-x$，则$f'(x)=3x^2-1$，所以$f'(-1)=2$，由$f(x)$为偶函数，得$f'(1)=-f'(-1)=-2$，则曲线$y=f(x)$在点(1,0)处的切线方程是$y=-2(x-1)$，即$2x+y-2=0$.故选C.

考向 2　与切线有关的参数问题

例 3　（1）(2024·四川泸州市模拟)若直线 $y=kx+1$ 为曲线 $y=\ln x$ 的一条切线，则实数 $k$ 的值是(　　)

A．e　B．$e^2$　C.$\frac{1}{e}$　D.$\frac{1}{e^2}$

D 解析　设直线 $y=kx+1$ 在曲线 $y=\ln x$ 上的切点为 $P(x_0，y_0)$，

因为 $y=\ln x$，所以 $y'=\frac{1}{x}$，所以切线斜率 $k=\frac{1}{x_0}$，

所以曲线 $y=\ln x$ 在点 $P(x_0，y_0)$处的切线方程为 $y-y_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$，

又 $y_0=\ln x_0$，所以切线方程为 $y=\frac{1}{x_0}\cdot x-1+\ln x_0$.

又切线方程为 $y=kx+1$，所以$\begin{cases}k=\frac{1}{x_0}, \\ 1=-1+\ln x_0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x_0=e^2, \\ k=\frac{1}{e^2}.\end{cases}$ 故选 D.

（2）（2024·重庆市模拟）若函数 $f(x)=x-\frac{1}{x}+a\ln x$ 存在与 $x$ 轴平行的切线，则实数 $a$ 的取值范围是________.

$(-\infty，-2]$

【解析】 $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x}(x>0)$. 依题意，得 $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}+\frac{a}{x}=0$ 有解，即 $-a=x+\frac{1}{x}$ 有解.

因为 $x>0$，所以 $x+\frac{1}{x}\geq 2$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，所以 $-a\geq 2$，即 $a\leq -2$.

对点训练（1）若曲线 $y=(x+a)\mathrm{e}^{x}$ 有两条过坐标原点的切线，则实数 $a$ 的取值范围是

________________.

$\{a|a<-4或a>0\}$【解析】因为 $y=(x+a)e^x$，所以 $y'=(x+1+a)e^x$.

设切点为 $(x_0,y_0)$,则 $y_0=(x_0+a)e^{x_0}$,切线斜率 $k=(x_0+1+a)e^{x_0}$,

切线方程为 $y-(x_0+a)e^{x_0}=(x_0+1+a)e^{x_0}(x-x_0)$.

因为切线过原点，所以 $-(x_0+a)e^{x_0}=(x_0+1+a)e^{x_0}(-x_0)$,

整理得：$x_0^2+ax_0-a=0$.

因为切线有两条，所以 $\Delta=a^2+4a>0$,解得 $a<-4$ 或 $a>0$.

（2）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-ax+b(a,b\in\mathbf{R}),g(x)=x^{2}+x$ .若这两个函数的图象在公共点 $A(1,2)$ 处有相同的切线，则 $a-b=$_________.

$e-2$【解析】因为$f(x)=e^x-ax+b(a,b\in\mathbf{R}),g(x)=x^2+x$，

所以$f'(x)=e^x-a$， $g'(x)=2x+1$.

因为$f(x),g(x)$在公共点$A(1,2)$处有相同的切线，

所以$\begin{cases}g'(1)=f'(1)\\f(1)=2\end{cases}$即$\begin{cases}3=e-a\\e-a+b=2\end{cases}$，

所以$a-b=e-2$.

考点三　两曲线的公切线

例 4　（1）(2024·山东青岛市模拟)已知定义在区间$(0，+\infty)$上的函数$f(x)=-2x^2+m$，$g(x)=-3\ln x-x$.若函数的图象有公共点，且在公共点处切线相同，则实数$m$的值为(　　)

A．2　B．5　C．1　D．0

C 【解析】 根据题意，设两曲线 $y=f(x)$与 $y=g(x)$的公共点为$(a，b)$，其中 $a>0$，由 $f(x)=-2x^2+m$，可得 $f'(x)=-4x$，则切线的斜率 $k=f'(a)=-4a$，由 $g(x)=-3\ln x-x$，可得 $g'(x)=-\frac{3}{x}-1$，则切线的斜率 $k=g'(a)=-\frac{3}{a}-1$，因为两函数的图象有公共点，且在公共点处切线相同，所以$-4a=-\frac{3}{a}-1$，解得 $a=1$ 或 $a=-\frac{3}{4}$(舍去)，又由 $g(1)=-1$，即公共点的坐标为$(1，-1)$，将点$(1，-1)$代入 $f(x)=-2x^2+m$，可得 $m=1$.故选 C.

（2）（2024·新高考Ⅰ卷）若曲线 $y=\mathrm{e}^{x}+x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线也是曲线 $y=\ln(x+1)+a$ 的切线，则 $a=$__________.

$\ln 2$ 【解析】 由 $y=\mathrm{e}^{x}+x$ 得 $y'=\mathrm{e}^{x}+1$， $y'|_{x=0}=\mathrm{e}^{0}+1=2$，故曲线 $y=\mathrm{e}^{x}+x$ 在 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=2x+1$；由 $y=\ln(x+1)+a$ 得 $y'=\dfrac{1}{x+1}$，设切线与曲线 $y=\ln(x+1)+a$ 相切的切点为 $(x_0,\ln(x_0+1)+a)$.由两曲线有公切线得 $y'=\dfrac{1}{x_0+1}=2$，解得 $x_0=-\dfrac{1}{2}$，则切点为 $\left(-\dfrac{1}{2},a+\ln\dfrac{1}{2}\right)$，切线方程为 $y=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+a+\ln\dfrac{1}{2}=2x+1+a-\ln 2$. 根据两切线重合,所以 $a-\ln 2=0$，解得 $a=\ln 2$.

规律方法：

对点训练（1）已知曲线 $f(x)=e^x-1$，$g(x)=\ln x+1$，则 $f(x)$与 $g(x)$的公切线有(　　)

A．0 条　　B．1 条　　C．2 条　　D．3 条

C 【解析】 根据题意，设直线 $l$ 与 $f(x)=\mathrm{e}^x-1$ 相切于点$(m，\mathrm{e}^m-1)$，与 $g(x)$相切于点$(n，\ln n+1)$，对于 $f(x)=\mathrm{e}^x-1$，有 $f'(x)=\mathrm{e}^x$，则直线 $l$ 的斜率 $k=\mathrm{e}^m$，则直线 $l$ 的方程为 $y+1-\mathrm{e}^m=\mathrm{e}^m(x-m)$，即 $y=\mathrm{e}^m x+(1-m)\mathrm{e}^m-1$，对于 $g(x)=\ln x+1$，有 $g'(x)=\dfrac{1}{x}$，则直线 $l$ 的斜率 $k=\dfrac{1}{n}$，则直线 $l$ 的方程为 $y-(\ln n+1)=\dfrac{1}{n}(x-n)$，即 $y=\dfrac{1}{n}x+\ln n$，则

$$\begin{cases} e^m=\dfrac{1}{n}, \\ (1-m)e^m=\ln n+1, \end{cases}$$

可得$(1-m)(\mathrm{e}^m-1)=0$，即 $m=0$ 或 $m=1$，则切线方程为 $y=\mathrm{e}x-1$ 或 $y=x$，故曲线 $f(x)$与 $g(x)$的公切线有 2 条．故选 C.

（2）若曲线 $C_1$：$f(x)=x^2+a$ 和曲线 $C_2$：$g(x)=4\ln x-2x$ 存在有公共切点的公切线，则 $a$ =________.

$-3$ 【解析】 $f(x)=x^2+a$，$g(x)=4\ln x-2x$，则有 $f'(x)=2x$，$g'(x)=\frac{4}{x}-2$.设公共切点的坐标为 $(x_0，y_0)$，则 $f'(x_0)=2x_0$，$g'(x_0)=\frac{4}{x_0}-2$，$f(x_0)=x_0^2+a$，$g(x_0)=4\ln x_0-2x_0$.根据题意，有

$$\begin{cases} 2x_0=\dfrac{4}{x_0}-2, \\ x_0^2+a=4\ln x_0-2x_0, \\ x_0>0, \end{cases}$$ 解得 $$\begin{cases} x_0=1, \\ a=-3. \end{cases}$$

# THANKS