第二章 基本初等函数

课时11 函数模型及其应用

一、课标要求

1． 结合情境中具体问题，比较对数函数、一元一次函数、指数函数增长速度的差异，理解“对数增长”“直线上升”“指数爆炸”等术语的现实含义.

2． 收集、阅读一些现实生活、生产实际或者经济领域中的数学模型，体会如何借助函数刻画实际问题，感悟数学模型中参数的现实意义、了解函数模型.

二、知识梳理

1．几类函数模型

函数模型	函数解析式
一次函数模型	$f(x)=ax+b$(a，b 为常数，$a\neq0$)
二次函数模型	$f(x)=ax^2+bx+c$(a，b，c 为常数，$a\neq0$)
与指数函数相关的模型	$f(x)=b\cdot a^x+c$(a，b，c 为常数，$b\neq0$，$a>0$，且 $a\neq1$)
与对数函数相关的模型	$f(x)=b\log_a x+c$(a，b，c 为常数，$b\neq0$，$a>0$，且 $a\neq1$)
与幂函数相关的模型	$f(x)=ax^n+b$ (a，b，n 为常数，$a\neq0$)

2．三种函数模型的性质

	$y=a^x(a>1)$	$y=\log_a x(a>1)$	$y=x^n(n>0)$
在$(0,+\infty)$上的增减性	单调<u>递增</u>	单调<u>递增</u>	单调<u>递增</u>
增长速度	越来越快	越来越慢	相对平稳
图象的变化	随x的增大，逐渐表现为与<u>y轴</u>平行	随x的增大，逐渐表现为与<u>x轴</u>平行	随n值变化而各有不同
值的比较	存在一个x_0，当$x>x_0$时，有$\log_a x<x^n<a^x$		

三、基础回顾

1．判断正误.（正确的打“√”，错误的打“×”）

（1）函数 $y=2^x$ 的函数值比函数 $y=x^2$ 的函数值大.（　　）

× 【解析】 当 $x=2$ 时，$2^x=x^2=4$，不正确.

（2）不存在实数 $a(a>0,且a\neq 1)$ 和实数 x_0 ，使得 $a^{x_0}<x_0{}^a<\log_a x_0$.（　　）

× 【解析】 如 $a=x_0=\frac{1}{2}$，不等式成立，因此错误.

（3）在$(0,+\infty)$上，随着x的增大，$y=a^{x}\,(a>1)$的增长速度会超过并远远大于$y=x^{\alpha}\,(\alpha>0)$的增长速度.（ √ ）

（4）某种商品进价为每件 100 元，按进价增加 10% 出售，后因库存积压降价，若按九折出售，则每件还能获利.（　　）

× 【解析】 9 折出售的售价为 $100(1+10\%)\times\frac{9}{10}=99$(元)，每件赔 1 元，故错误.

2．在某个物理实验中，测得变量 x 和变量 y 的几组数据，如下表：

x	0.50	0.99	2.01	3.98
y	-0.99	-0.01	0.98	2.00

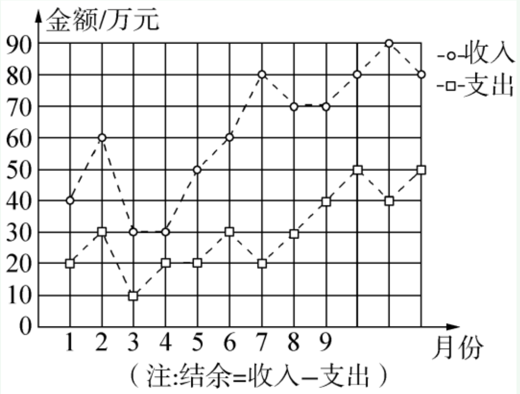
则对 x，y 最适合的拟合函数是(　　)

A．$y=2x$　　B．$y=x^2-1$

C．$y=2x-2$　　D．$y=\log_2 x$

D 【解析】 根据 $x=0.50$，$y=-0.99$，代入计算，可以排除 A；根据 $x=2.01$，$y=0.98$，代入计算，可以排除 B，C；将各数据代入函数 $y=\log_2 x$，可知满足题意．故选 D.

3.（多选题）某工厂一年中各月的收入、支出情况的统计图如图所示，则下列说法正确的有(　　)



A. 月收入最高值与月收入最低值的比是 3∶1

B. 结余最高的月份是 7 月

C. 1 至 2 月份的收入的变化量与 4 至 5 月份的收入的变化量相同

D. 前 6 个月的平均收入为 40 万元

ABC 【解析】 由题图可知，收入最高值为 90 万元，收入最低值为 30 万元，其比是 $3:1$，A 正确；

由题图可知，7 月份的结余最高，为 $80-20=60$(万元)，B 正确；

由题图可知，1 至 2 月份的收入的变化量与 4 至 5 月份的收入的变化量相同，C 正确；

由题图可知，前 6 个月的平均收入为$\frac{1}{6}\times(40+60+30+30+50+60)=45$(万元)，D 错误.故选 ABC.

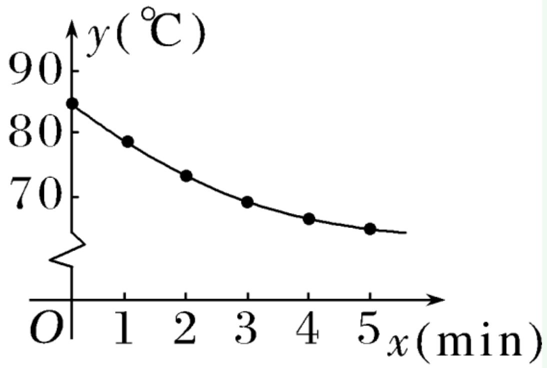
4．某市生产总值连续两年持续增加，第一年的增长率为p，第二年的增长率为q，则该市这两年生产总值的年平均增长率为________.

$\sqrt{(1+p)(1+q)}-1$　【解析】 设该市这两年生产总值的年平均增长率为x，由题意，得$(1+x)^2=(1+p)(1+q)$，解得$x=\sqrt{(1+p)(1+q)}-1$.

四、考点扫描

考点一 利用函数图象刻画实际问题

例 1 (2024·江苏泰州市调研)中国茶文化博大精深，茶水的口感与茶叶类型和水的温度有关.经验表明，某种绿茶用 85 ℃的水泡制，再等到茶水温度降至 60 ℃时饮用，可以产生最佳口感.为分析泡制一杯最佳口感茶水所需时间，某研究人员每隔 1 min 测量一次茶水的温度，根据所得数据做出如图所示的散点图.观察散点图的分布情况，下列函数模型可以近似地刻画茶水温度 y 随时间 x 变化的规律的是(　　)



A. $y=mx^2+n(x>0)$

B. $y=ma^x+n(m>0，0<a<1)$

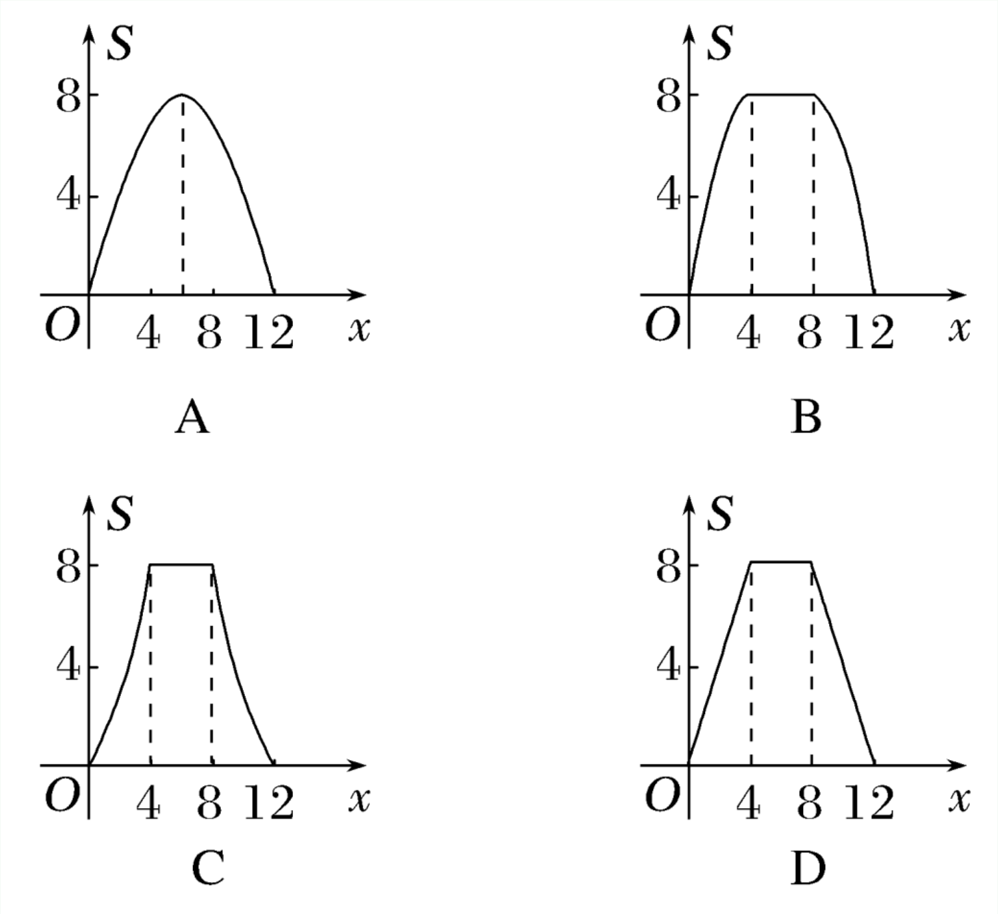
C. $y=ma^x+n(m>0，a>1)$

D. $y=m\log_a x+n(m>0，a>0，且 a\neq1)$

B 【解析】 由函数图象可知符合条件的只有指数函数模型，且 $m>0$，$0<a<1$.故选 B.

规律方法：

对点训练 已知正方形 $ABCD$ 的边长为4，动点 P 从点 B 开始沿折线 B-C-D-A 向点 A 运动. 设点 P 运动的路程为 x，$\triangle ABP$ 的面积为 S，则函数 $S=f(x)$的图象是(　　)



D 【解析】 依题意知，当 $0\leq x\leq 4$ 时，$f(x)=2x$；当 $4<x\leq 8$ 时，$f(x)=8$；当 $8<x\leq 12$ 时，$f(x)=24-2x$，观察四个选项知 D 项符合要求.故选 D.

考点二　已知函数模型求解实际问题

例 2（1）某化工企业为了响应并落实国家污水减排政策，加装了污水过滤排放设备，在过滤过程中，污染物含量 M(单位：mg/L)与时间 t(单位：h)之间的关系为 $M=M_0e^{-kt}$(其中 M_0，k 是正常数)．已知经过 1 h，设备可以过滤掉 20%的污染物，则过滤掉 60%的污染物所需的时间约为(参考数据：lg 2≈0.301)(　　)

A．3 h　B．4 h　C．5 h　D．6 h

B 【解析】 由题意可知$(1-20\%)M_0=M_0e^{-k}$，所以 $e^{-k}=0.8$，由$(1-60\%)M_0=M_0e^{-kt}$，得 $0.4=e^{-kt}=(e^{-k})^t=0.8^t$，所以 $t=\log_{0.8}0.4=\dfrac{\lg 0.4}{\lg 0.8}=\dfrac{\lg\dfrac{2}{5}}{\lg\dfrac{4}{5}}=\dfrac{\lg 2-\lg 5}{2\lg 2-\lg 5}$

$=\dfrac{\lg 2-(1-\lg 2)}{2\lg 2-(1-\lg 2)}=\dfrac{2\lg 2-1}{3\lg 2-1}\approx\dfrac{2\times 0.301-1}{3\times 0.301-1}=\dfrac{-0.398}{-0.097}\approx 4.103$，比较接近 4.故选 B.

（2） (2024·贵州铜仁市模拟)香农－威纳指数(H)是生态学中衡量群落中生物多样性的一个指数，其计算公式是 $H=-\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\cdot\log_2 p_i$，其中 n 是该群落中生物的种数，p_i 为第 i 个物种在群落中的比例.下表为某个只有甲、乙、丙三个种群的群落中各种群个体数量统计表，根据表中数据，该群落的香农－威纳指数值为(　　)

物种	甲	乙	丙	合计
个体数量	300	150	150	600

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $-\frac{3}{2}$　　D. $-\frac{3}{4}$

A 【解析】 由题意知 $H=-\left(\frac{300}{600}\times\log_2\frac{300}{600}+\frac{150}{600}\times\log_2\frac{150}{600}+\frac{150}{600}\times\log_2\frac{150}{600}\right)$ $=-\left(\frac{1}{2}\times\log_2\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\log_2\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\log_2\frac{1}{4}\right)=-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$.故选 A.

规律方法：

对点训练 （1）(2024·北京市房山区模拟)血氧饱和度是呼吸循环的重要生理参数.人体的血氧饱和度正常范围是 95%～100%，当血氧饱和度低于 90%时，需要吸氧治疗，在环境模拟实验室的某段时间内，可以用指数模型 $S(t)=S_0e^{Kt}$ 描述血氧饱和度 $S(t)$随着给氧时间 t(单位：小时)的变化而变化的规律，其中 S_0 为初始血氧饱和度，K 为参数.已知 $S_0=60\%$，给氧 1 小时后，血氧饱和度为 80%.若使得血氧饱和度达到 90%，则至少还需要的给氧时间为(精确到 0.1，参考数据：$\ln 2\approx0.69$，$\ln 3\approx1.10$)(　　)

A.0.3 小时　　B.0.5 小时

C.0.7 小时　　D.0.9 小时

B 【解析】 设使得血氧饱和度达到正常值，给氧时间至少需要（$t-1$）小时，由题意可得 $60e^{K}=80$，$60e^{Kt}=90$，两边同时取自然对数并整理，得 $K=\ln\frac{80}{60}=\ln\frac{4}{3}=\ln 4-\ln 3=2\ln 2-\ln 3$，$Kt=\ln\frac{90}{60}=\ln\frac{3}{2}=\ln 3-\ln 2$，则 $t=\frac{\ln 3-\ln 2}{2\ln 2-\ln 3}\approx\frac{1.10-0.69}{2\times 0.69-1.10}\approx 1.5$，则给氧时间至少还需要 $t-1=0.5$(小时)，故选 B.

（2）(2024·湖南部分学校联考)甲醛是一种无色、有着刺激性气味的气体，对人体健康有着极大的危害.新房入住时，空气中甲醛浓度不能超过 0.08 mg/m³，否则，该新房达不到安全入住的标准.若某套住房自装修完成后，通风 x($x=1$，2，3，…，50)周与室内甲醛浓度 y(单位：mg/m³)之间近似满足函数关系式 $y=0.48-0.1f(x)(x\in\mathbf{N}^*)$，其中 $f(x)=\log_a[k(x^2+2x+1)](k>0$，$x=1$，2，3，…，50)，且 $f(2)=2$，$f(8)=3$，则该住房自装修完成后要达到安全入住的标准，至少需要通风(　　)

A.17 周　　B.24 周

C.28 周　　D.26 周

D 【解析】 由题意，$f(x)=\log_a[k(x+1)^2]=\log_a k+2\log_a(x+1)$，由 $f(2)=2$，$f(8)=3$，得 $\log_a k+2\log_a(2+1)=2$，$\log_a k+2\log_a(8+1)=3$，两式相减得 $\log_a 9=1$，则 $a=9$，所以 $\log_a k+2=3$，得 $k=9$.该住房自装修完成后要达到安全入住的标准，则需 $0.48-0.1f(x)\leq 0.08$，即 $f(x)\geq 4$，即 $1+2\log_9(x+1)\geq 4$，解得 $x\geq 26$，故至少需要通风 26 周.故选 D.

考点三 构建函数模型解决实际问题

例 3 （1）“打水漂”是一种游戏，通过一定方式投掷石片，使石片在水面上实现多次弹跳，弹跳次数越多越好．小赵同学在玩“打水漂”游戏时，将一石片按一定方式投掷出去，石片第一次接触水面时的速度为 20 m/s，然后石片在水面上继续进行多次弹跳．不考虑其他因素，假设石片每一次接触水面时的速度均为上一次的 85%，若石片接触水面时的速度低于 6 m/s，石片就不再弹跳，沉入水底，则小赵同学这次“打水漂”石片的弹跳次数为(参考数据：$\lg 2\approx 0.3$，$\lg 3\approx 0.48$，$\lg 17\approx 1.23$)(　　)

A．6　B．7　C．8　D．9

C 【解析】 设石片第 n 次接触水面时的速度为 v_n，则 $v_n=20\times0.85^{n-1}$，由题意得 $20\times0.85^{n-1}\geq6$，即 $0.85^{n-1}\geq0.3$，得 $n-1\leq\log_{0.85}0.3$，又 $\log_{0.85}0.3=\frac{\lg 0.3}{\lg 0.85}=\frac{\lg 3-1}{\lg 85-2}=\frac{\lg 3-1}{\lg 17+\lg 5-2}=\frac{\lg 3-1}{\lg 17-\lg 2-1}\approx7.4$，所以 $n\leq8.4$，故这次“打水漂”石片的弹跳次数为 8.故选 C.

（2）李冶(1192—1279)，真定栾城(今属河北石家庄市)人，金元时期的数学家、诗人，数学著作多部，其中《益古演段》主要研究平面图形问题：如求圆的直径、正方形的边长等.其中一问：现有正方形方田一块，内部有一个圆形水池，其中水池的边缘与方田四边之间的面积为 y 亩，若方田的四边到水池的最近距离均为 20 步，则 y 关于水池半径 r(步)的函数关系式为 $y=$________；当水池的边缘与方田之间的面积与水池半径比值最小时，$r=$________(注：240 平方步为 1 亩，圆周率按 3 近似计算).

$\frac{1}{240}r^2+\frac{2}{3}r+\frac{20}{3}$；40 【解析】 已知水池的半径为 r 步，则方田的边长为$(2r+40)$步.

由题意，得，$(2r+40)^2-\pi r^2=y\times 240$，得 $y=\frac{1}{240}r^2+\frac{2}{3}r+\frac{20}{3}$，$\frac{y}{r}=\frac{r}{240}+\frac{20}{3r}+\frac{2}{3}\geq 1$，当且仅当 $r=40$ 取等号.

规律方法：

对点训练　某群体的人均通勤时间，是指单日内该群体中成员从居住地到工作地的平均用时. 某地上班族 S 中的成员仅以自驾或公交方式通勤，分析显示：当 S 中 $x\%$ $(0<x<100)$ 的成员自驾时，自驾群体的人均通勤时间（单位：分钟）为 $f(x)=\begin{cases}30,(0<x\le 30)\\ 2x+\dfrac{1800}{x}-90,30<x<100\end{cases}$，而公交群体的人均通勤时间不受 x 影响，恒为 40 分钟. 试根据上述分析结构，回答问题：

（1）当 x 在什么范围内时，公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间？

（2）求该地上班族 S 的人均通勤时间 $g(x)$的解析式；试讨论 $g(x)$ 的单调性，并说明何时通勤效率最高.

【解】（1）当$0<x\leqslant 30$时，$f(x)=30<40$恒成立，所以公交群体的人均通勤时间不可能少于自驾群体的人均通勤时间；当$30<x<100$时，若$40<f(x)$，即$2x+\frac{1800}{x}-90>40$，解得$x<20$（舍）或$x>45$；所以，当$45<x<100$时，公交群体的人均通勤时间少于自驾群体的人均通勤时间.

（2）设该地上班族总人数为n，则自驾人数为$n\cdot x\%$，乘公交人数为$n\cdot(1-x\%)$.

因此人均通勤时间$\begin{cases}\dfrac{30\cdot n\cdot x\%+40\cdot n\cdot(1-x\%)}{n}, & 0<x\leqslant 30,\\ \dfrac{(2x+\dfrac{1800}{x}-90)\cdot n\cdot x\%+40\cdot n\cdot(1-x\%)}{n}, & 30<x<100,\end{cases}$

整理得$g(x)=\begin{cases}40-\dfrac{x}{10}, & 0<x\leqslant 30,\\ \dfrac{1}{50}(x-32.5)^2+36.875, & 30<x<100.\end{cases}$

当$x\in(0,30]\cup(30,32.5]$，即$x\in(0,32.5]$时，$g(x)$单调递减；

当$x\in(32.5,100)$时，$g(x)$单调递增．所以$x=32.5$时，函数$g(x)$取得最小值，即$x=32.5$时，上班族整体的人均通勤时间最短.

THANKS