第三章　导数及其应用

课时2　导数与函数的单调性

一、课标要求

1. 结合实例，借助几何直观了解函数的单调性与导数的关系.
2. 能利用导数研究函数的单调性.
3. 对于多项式函数，能求不超过三次的多项式函数的单调区间.

二、知识梳理

1．函数的单调性与导数的关系

函数 $y=f\left(x\right)$ 在某个区间 $\left(a,b\right)$ 内可导.

（1）若在区间 $\left(a,b\right)$ 上 $f'(x)>0$ 恒成立，则 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(a,b\right)$ 内__单调递增__；

（2）若在区间 $\left(a,b\right)$ 上 $f'(x)<0$ 恒成立，则 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(a,b\right)$ 内__单调递减__.

2．单调性的应用

（1）在某个区间内，$f'(x)>0$ $\left(f'(x)<0\right)$ 是函数 $f(x)$ 在此区间内单调递增（减）的充分条件，而不是必要条件.如函数 $f(x)=x^2$ 在 R 上单调递增，但 $f'(x)=3x^2\geq 0$.

（2）函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调递增(减)的充要条件是 $f'(x)\geq 0\left(f'(x)\leq 0\right)$ 在区间 (a,b) 内恒成立，且在其任意的子区间内，$f'(x)=0$ 不能恒成立，即在个别点处导函数等于零，不影响函数的单调性.

3．利用导数求函数 $y=f\left(x\right)$ 的单调区间的步骤如下：

（1）求函数 $y=f\left(x\right)$ 的定义域；

（2）求导数 $f'\left(x\right)$；

（3）解 $f'\left(x\right)<0$ 或 $f'\left(x\right)>0$；

（4）写出结论.

【拓展知识】

1．若所求函数的单调区间不止一个，这些区间之间不能用并集“∪”及“或”连接，只能用“，”“和”字隔开.

2． $f'(x)>0(<0)$是$f(x)$在区间$(a，b)$内单调递增(减)的充分不必要条件.

3． $f'(x)\geq 0(\leq 0)$是$f(x)$在区间$(a，b)$内单调递增(减)的必要不充分条件.

4．由$f(x)$在区间$(a，b)$内单调递增(减)可得$f'(x)\geq 0(\leq 0)$在该区间内恒成立，而不是$f'(x)>0(<0)$恒成立，“$=$”不能少，必要时还需对“$=$”进行检验.

三、基础回顾

1．判断正误.（正确的打“√”，错误的打“×”）

(1) 若函数 $f(x)$在$(a，b)$内单调递增，则一定有 $f'(x)>0$.(×)

(2) 若函数 $f(x)$在某个区间内恒有 $f'(x)=0$，则 $f(x)$在此区间内没有单调性．(√)

(3) 在 (a,b) 内 $f'(x) \leqslant 0$，且 $f'(x)=0$ 的根有有限个，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调递减.（ √ ）

(4) 若函数 $f(x)$在定义域上恒有 $f'(x)>0$，则 $f(x)$在定义域上一定单调递增. (×)

2．函数 $y=\frac{1}{2}x^2-\ln x$ 的单调递减区间为(　　)

A. $(-1,\ 1]$　　B. $(0,\ 1]$

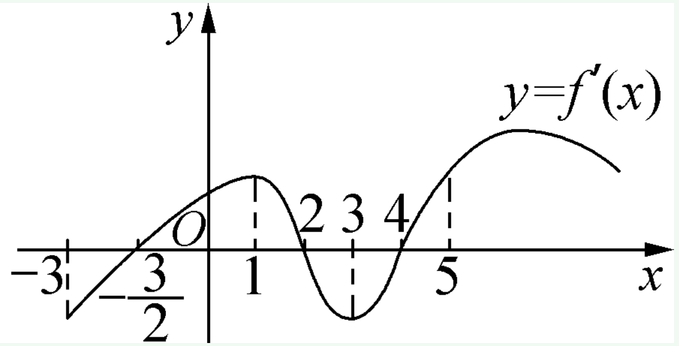
C. $[1,\ +\infty)$　　D. $(0,\ +\infty)$

B 【解析】 函数 $y=\frac{1}{2}x^2-\ln x$ 的定义域为$(0,\ +\infty)$，$y'=x-\frac{1}{x}$.令 $y'<0$，得 $0<x<1$，故函数的单调递减区间为$(0,\ 1]$.故选 B.

3．(多选题)如图所示为函数 $y=f(x)$的导数 $y=f'(x)$ 的图象，则下列判断正确的有(　　)

A．$f(x)$在区间$(-2，1)$上是增函数

B．$f(x)$在区间$(2，3)$上是减函数



C．$f(x)$在区间$(4，5)$上是增函数

D．$f(x)$在区间$(3，5)$上是增函数

BC　【解析】 在$(4，5)$上 $f'(x)>0$ 恒成立，所以 $f(x)$是增函数．在$(2，3)$上 $f'(x)<0$ 恒成立，所以 $f(x)$是减函数．故选 BC.

4．已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-x$ 在区间 $(-\infty,a)$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围是________.

$(-\infty,0]$【解析】由函数单调递减，可得 $f'(x)=e^{x}-1<0$，解得 $x<0$，函数在区间 $(-\infty,a)$ 上单调递减，可得 $a\le 0$.

四、考点扫描

考点一　利用导数研究函数的单调性

考向 1 不含参数的函数

例 1 （1）(2024·北京市模拟)函数 $f(x)=x-\ln x$ 的单调递减区间为(　　)

A．(0，1)　　　　B．(1，＋∞)

C．(0，＋∞)　　D．(0，1)，(1，＋∞)

A【解析】因为$f(x)=x-\ln x$，所以函数$f(x)$的定义域为$(0, +\infty)$，所以$f'(x)=1-\frac{1}{x}$，由$f'(x)=1-\frac{1}{x}<0$有$x<1$，所以函数$f(x)=x-\ln x$的单调递减区间为$(0, 1)$，故选A.

（2）（多选题）（2024·江苏南通市高三联考）下列函数在区间$(0，+\infty)$上单调递增的有(　　)

A．$y=x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$　　B．$y=x+\sin x$

C．$y=3-x$　　D．$y=x^2+2x+1$

ABD【解析】对于 A，因为 $y=x$ 与 $y=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$，都是增函数，所以 $y=x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 在区间 $(0，+\infty)$ 上单调递增，符合题意；对于 B，$y=x+\sin x$，其导数 $y'=1+\cos x$，由 $y'\geq 0$ 在 R 上恒成立，则这个函数在区间 $(0，+\infty)$ 上单调递增，符合题意；对于 C，$y=3-x$，是一次函数，在 R 上是减函数，不符合题意；对于 D，$y=x^2+2x+1=(x+1)^2$，是二次函数，其图象开口向上，对称轴为直线 $x=-1$，则这个函数在区间 $(0，+\infty)$ 上单调递增，符合题意．故选 ABD.

规律方法：

对点训练（1）　（2024·重庆市第十一中学校校考）已知函数 $f(x)=x\sin x+\cos x$，$x\in[0,2\pi]$，则 $f(x)$的单调递减区间为(　　)

A. $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$　　B. $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$

C.（π，2π)　　D. $\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$

B 【解析】 由题意，$f(x)=x\sin x+\cos x$，$x\in[0,2\pi]$，则 $f'(x)=x\cos x$，当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$的单调递减区间为 $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$.故选 B.

（2）函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$ 的单调递减区间为____________，单调递增区间为____________.

（0，1）；$(1,+\infty)$ 【解析】函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，函数的导数 $f'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$，

由 $f'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}<0$，解得 $x<1$，即函数 $f(x)$ 的单调减区间为（0，1）；

同理，函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(1,+\infty)$.

考向 2 含参数的函数

例 2 已知函数 $f(x)=2x-\frac{a}{x}-(a+2)\ln x(a\in \mathrm{R})$，试讨论 $f(x)$的单调性.

【解】 因为$f(x)=2x-\frac{a}{x}-(a+2)\ln x$，$x>0$，则$f'(x)=2+\frac{a}{x^2}-\frac{a+2}{x}=\frac{2x^2-(a+2)x+a}{x^2}=\frac{(2x-a)(x-1)}{x^2}$.

① 当$\frac{a}{2}\leq 0$，即$a\leq 0$时，由$f'(x)<0$，得$0<x<1$，由$f'(x)>0$，得$x>1$，此时函数$f(x)$的单调递减区间为$(0，1)$，单调递增区间为$(1，+\infty)$；

② 当$\frac{a}{2}=1$时，$a=2$时，对任意的$x>0$，$f'(x)\geq 0$，此时函数$f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增；

③ 当$0<\frac{a}{2}<1$时，即$0<a<2$时，由$f'(x)>0$，得$0<x<\frac{a}{2}$或$x>1$，由$f'(x)<0$，得$\frac{a}{2}<x<1$，此时，函数$f(x)$的单调递增区间为$\left(0,\frac{a}{2}\right)$，$(1，+\infty)$，单调递减区间为$\left(\frac{a}{2},1\right)$；

④ 当$\frac{a}{2}>1$，即 $a>2$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $0<x<1$ 或 $x>\frac{a}{2}$，由 $f'(x)<0$，得 $1<x<\frac{a}{2}$，此时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为(0，1)，$\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$，单调递减区间为$\left(1,\frac{a}{2}\right)$.

综上所述，当 $a\leq0$ 时，函数 $f(x)$的单调递减区间为(0，1)，单调递增区间为(1，+∞)；

当 $0<a<2$ 时，函数 $f(x)$的单调递增区间为$\left(0,\frac{a}{2}\right)$，(1，+∞)，单调递减区间为$\left(\frac{a}{2},1\right)$；

当 $a=2$ 时，函数 $f(x)$的单调递增区间为(0，+∞)；当 $a>2$ 时，函数 $f(x)$的单调递增区间为(0，1)，$\left(\frac{a}{2},+\infty\right)$，单调递减区间为$\left(1,\frac{a}{2}\right)$.

规律方法：

对点训练 已知函数 $g(x)=(x-a-1)e^x-(x-a)^2$，试讨论函数 $g(x)$的单调性.

【解】 $g(x)$的定义域为 R，$g'(x)=(x-a)e^x-2(x-a)=(x-a)(e^x-2)$，

令 $g'(x)=0$，得 $x=a$ 或 $x=\ln 2$.

①若 $a>\ln 2$，

则当 $x\in(-\infty，\ln 2)\cup(a，+\infty)$时，$g'(x)>0$，当 $x\in(\ln 2，a)$时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x)$在$(-\infty，\ln 2)$，$(a，+\infty)$上单调递增，在$(\ln 2，a)$上单调递减；

②若 $a=\ln 2$，则 $g'(x)\geq 0$ 恒成立，所以 $g(x)$在 R 上单调递增；

③若 $a<\ln 2$，则当 $x\in(-\infty，a)\cup(\ln 2，+\infty)$时，$g'(x)>0$，当 $x\in(a，\ln 2)$时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x)$在$(-\infty，a)$，$(\ln 2，+\infty)$上单调递增，在$(a，\ln 2)$上单调递减.

综上，当 $a>\ln 2$ 时，$g(x)$在$(-\infty，\ln 2)$，$(a，+\infty)$上单调递增，在$(\ln 2，a)$上单调递减；

当 $a=\ln 2$ 时，$g(x)$在 R 上单调递增；

当 $a<\ln 2$ 时，$g(x)$在$(-\infty，a)$，$(\ln 2，+\infty)$上单调递增，在$(a，\ln 2)$上单调递减.

考点二　函数单调性的应用

考向 1 由单调性求参数

例 3 （1）(2024·浙江名校联考)若函数 $f(x)=(x^2-mx+2)e^x$ 在 $\left[-\frac{1}{2},\ 1\right]$ 上存在单调递减区间，则实数 m 的取值范围是________.

$(2,+\infty)$【解析】因为 $f(x)=(x^2-mx+2)e^x$，所以 $f'(x)=(2x-m)e^x+(x^2-mx+2)e^x=[x^2+(2-m)x+2-m]e^x$，则原问题等价于 $f'(x)<0$ 在 $\left[-\frac{1}{2},1\right]$ 上有解，即 $x^2+(2-m)x+2-m<0$ 在 $\left[-\frac{1}{2},1\right]$ 上有解，即 $m>\frac{x^2+2x+2}{x+1}$ 在 $\left[-\frac{1}{2},1\right]$ 上有解.则 $m>\left(\frac{x^2+2x+2}{x+1}\right)$，$\frac{x^2+2x+2}{x+1}=x+1+\frac{1}{x+1}\geq 2$，当且仅当 $x+1=1$，即 $x=0$ 时取等号，所以 $m>2$.

(2)(2023·全国乙卷)设 $a\in(0，1)$.若函数 $f(x)=a^x+(1+a)^x$ 在 $(0，+\infty)$ 上单调递增，则 a 的取值范围是________.

$\left[\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$ 【解析】 由题意，得当 $x>0$ 时，$f'(x)=a^x\ln a+(1+a)^x\ln(1+a)=a^x\left[\ln a+\left(\dfrac{1}{a}+1\right)^x\ln(1+a)\right]\geq 0$. 设 $g(x)=\ln a+\left(\dfrac{1}{a}+1\right)^x\ln(1+a)$，因为 $a^x>0$，所以 $g(x)\geq 0$. 因为 $a\in(0,1)$，所以 $\ln(1+a)>0$，$\dfrac{1}{a}+1>1$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故只需满足 $g(0)\geq 0$，即 $\ln a+\ln(1+a)=\ln(a+a^2)\geq 0$，所以 $a+a^2\geq 1$，解得 $a\leq -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 或 $a\geq\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. 又 $0<a<1$，所以 a 的取值范围是 $\left[\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$.

（3）若函数$f\left(x\right)=cx^4+\left(c^2-3\right)x^2+1$在区间$\left(-\infty,-1\right)$上单调递减，在区间$\left(-1,0\right)$上单调递增，则实数$c$的值为__________.

1【解析】由题意，得 $f'(x)=4cx^3+2(c^2-3)x$.

由 $f'(-1)=0$，得 $-4c-2(c^2-3)=0$，解得 $c=-3$ 或 $c=1$.

当 $c=-3$ 时，$f'(x)=-12x(x-1)(x+1)$.

当 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，不满足条件，舍去；

当 $c=1$ 时，$f'(x)=4x(x-1)(x+1)$.

当 $x<-1$ 时，$f'(x)<0$，当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)>0$，满足 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，

在区间 $(-1,0)$ 上单调递增，故 $c=1$.

规律方法：

对点训练　已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2-2x(a\neq 0)$.

(1) 若函数 $f(x)$存在单调递减区间，则实数 a 的取值范围是________；

$(-1,0)\cup(0, +\infty)$ 【解析】 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2-2x$，$x\in(0, +\infty)$，所以$f'(x)=\frac{1}{x}-ax-2$.由于$f(x)$在$(0, +\infty)$上存在单调递减区间，所以当$x\in(0, +\infty)$时，$\frac{1}{x}-ax-2<0$有解．即$a>\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}$有解，设$G(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}$，所以只要$a>G(x)_{\min}$即可．而$G(x)=\left(\frac{1}{x}-1\right)^2-1$，所以$G(x)_{\min}=-1$．所以$a>-1$且$a\neq 0$.即$a$的取值范围是$(-1,0)\cup(0, +\infty)$.

(2) 若函数 $f(x)$在[1，4]上单调递减，则实数 a 的取值范围是________.

$\left[-\frac{7}{16},0\right)\cup(0,+\infty)$ 【解析】 由 $f(x)$在[1，4]上单调递减得，得当 $x\in[1，4]$时，$f'(x)=\frac{1}{x}-ax-2\leq0$ 恒成立，即 $a\geq\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}$恒成立．设 $G(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}$，所以 $a\geq G(x)_{\max}$，而 $G(x)=\left(\frac{1}{x}-1\right)^2-1$.因为 $x\in[1，4]$，所以$\frac{1}{x}\in\left[\frac{1}{4},1\right]$，所以 $G(x)_{\max}=-\frac{7}{16}$(此时 $x=4$)，所以 $a\geq-\frac{7}{16}$且 $a\neq0$，即 a 的取值范围是$\left[-\frac{7}{16},0\right)\cup(0,+\infty)$.

考向 2 比较大小

例 4 (2024·浙江金华市调考)已知函数 $f(x)=3x+2\cos x$.若 $a=f(3^{\sqrt{2}})$，$b=f(2)$，$c=f(\log_2 7)$，则 a，b，c 的大小关系是(　　)

A.$a<b<c$　　B.$c<b<a$

C.$b<a<c$　　D.$b<c<a$

D 【解析】 由题意，得 $f'(x)=3-2\sin x$.因为 $-1\leq\sin x\leq1$，所以 $f'(x)>0$ 恒成立，所以 $f(x)$是增函数.因为$\sqrt{2}>1$，所以 $3^{\sqrt{2}}>3$.又 $\log_2 4<\log_2 7<\log_2 8$，即 $2<\log_2 7<3$，所以 $2<\log_2 7<3^{\sqrt{2}}$，所以 $f(2)<f(\log_2 7)<f(3^{\sqrt{2}})$，即 $b<c<a$.故选 D.

对点训练　已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e^x}$.设 $a=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$，$b=f(2)$，$c=f\left(\dfrac{7}{3}\right)$，则(　　)

A.$a>b>c$　　　　B.$b>a>c$

C.$c>b>a$　　　　D.$c>a>b$

C 【解析】 易知 $f'(x)=\dfrac{e^x+x^2-x}{xe^x}=\dfrac{e^x+\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}}{xe^x}$，又 $x\in(0,+\infty)$时，$e^x>1$，$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\geq-\dfrac{1}{4}$，所以 $f'(x)>0$，即 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，故 $f\left(\dfrac{7}{3}\right)>f(2)>f\left(\dfrac{3}{2}\right)$，即 $c>b>a$.故选 C.

考向 3 解不等式

例 5 （2024·江苏扬州市模拟）已知函数 $f(x)=2\ln x+\frac{1}{x}-x$，则不等式 $f(2x-1)<f(1-x)$ 的解集为(　　)

A. $\left(0,\ \frac{2}{3}\right)$

B. $\left(\frac{2}{3},\ 1\right)$

C. $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$

D. $\left(\frac{1}{2},\ \frac{2}{3}\right)$

B 【解析】 由题意，可知 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.因为 $f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-1=-\left(\frac{1}{x}-1\right)^2\leq 0$ 恒成立，所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.由 $f(2x-1)<f(1-x)$，可得$\begin{cases}2x-1>0,\\1-x>0,\\2x-1>1-x,\end{cases}$ 解得$\frac{2}{3}<x<1$，即原不等式的解集为$\left(\frac{2}{3},1\right)$.故选 B.

规律方法：

对点训练　已知函数 $f(x)=\frac{1}{e^x}-e^x+2x-\frac{1}{3}x^3$.若 $f(3a^2)+f(2a-1)\geqslant 0$，则实数 a 的取值范围是________.

$\left[-1,\frac{1}{3}\right]$ 【解析】 由题意，得 $f'(x)=-\frac{1}{e^x}-e^x+2-x^2=-\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)+2-x^2$，

因为 $e^x+\frac{1}{e^x}\geq 2\sqrt{e^x\cdot\frac{1}{e^x}}=2$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立，所以 $f'(x)\leq 0$，所以 $f(x)$ 在 R 上单调递减，又 $f(x)=-f(-x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(3a^2)+f(2a-1)\geq 0\Rightarrow f(3a^2)\geq -f(2a-1)=f(1-2a)$，即 $3a^2\leq 1-2a$ ，解得 $-1\leq a\leq\frac{1}{3}$.

THANKS