第二章 基本初等函数

课时10 函数与方程的综合应用

一、考情分析

函数与方程的综合应用是历年高考的一个热点内容，经常以客观题出现，通过分析函数的性质，结合函数图象研究函数的零点或方程的根的分布、个数等，题目难度较大，一般出现在压轴题位置.

二、考点扫描

考点一 函数零点分布

例 1 （1）已知定义在 R 上的奇函数满足 $f(2-x)+f(x)=0$，当 $x\in(0,1]$时，$f(x)=-\log_2 x$.若函数 $F(x)=f(x)-\sin \pi x$ 在区间$[-1，m]$上有 10 个零点，则实数 m 的取值范围是(　　)

A．[3.5,4)　　　　B．(3.5,4]

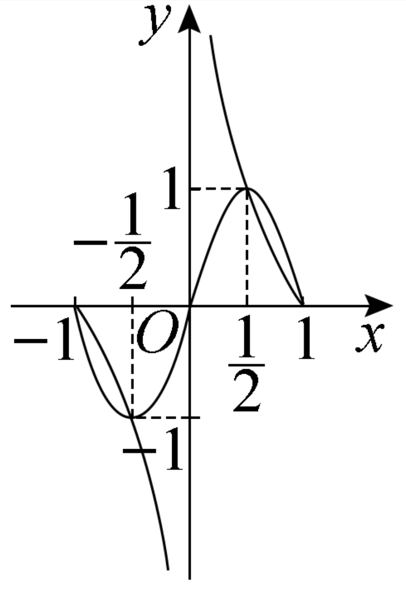
C．(5,5.5]　　　　D．[5,5.5)

A 【解析】由 $f(2-x)+f(x)=0 \Rightarrow f(x)=-f(2-x)=f(x-2)$，得 $f(x)$是一个周期为 2 的奇函数，

当 $x\in(0,1]$时，$f(x)=-\log_2 x$，

因此 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\log_2\frac{1}{2}=1$，$f(1)=0$，所以 $f(0)=0$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$，$f(-1)=0$，

且 $g(x)=\sin \pi x$ 的周期为 $T=\frac{2\pi}{\pi}=2$，且 $g(-1)=0$，$g\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$，$g(0)=0$，$g\left(\frac{1}{2}\right)=1$，$g(1)=0$，求 $F(x)=f(x)-\sin \pi x$ 的零点个数，即求 $f(x)$与 $g(x)$图象的交点个数，



如图为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间[－1,1]的图象，因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为周期为 2 的周期函数，因此交点也呈周期出现，若在区间[－1，m]上有 10 个零点，则第 10 个零点坐标为(3.5，－1)，第 11 个零点坐标为(4,0)，因此 $3.5\leq m<4$.故选 A.

（2）(2024·湖北部分重点高中联考)已知函数$f(x)=\begin{cases}2^x+x，x<2，\\x^2+2a，x\geq 2，\end{cases}$则“$a\leq -2$”是“$f(x)$有2个零点”的(　　)

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分又不必要条件

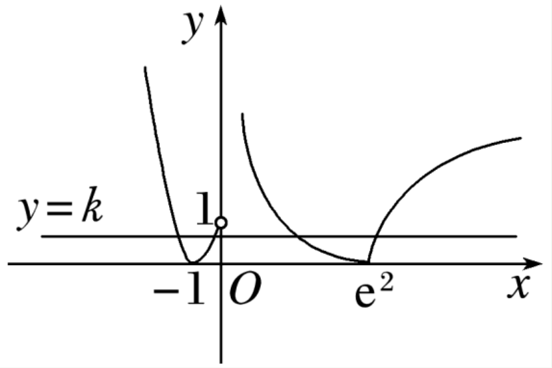
C 【解析】 当 $x<2$ 时，$f(x)=2^x+x$ 单调递增，且 $f(x)$的图象是连续不断的曲线. $f(-1)=2^{-1}-1<0$，$f(0)=2^0+0>0$，由函数零点存在定理可知，$f(x)=2^x+x$ 在$(-\infty，2)$上有唯一零点，且该零点为负数；当 $x\geq 2$ 时，令 $x^2+2a=0$，解得 $x=\sqrt{-2a}$或 $x=-\sqrt{-2a}$(舍去)，若 $f(x)$在$[2，+\infty)$上有零点，则$\sqrt{-2a}\geq 2$，即 $a\leq -2$，此时 $f(x)$在$[2，+\infty)$上只有唯一零点，且该零点为正数.综上所述，当 $a\leq -2$ 时，$f(x)$有 2 个零点；当 $f(x)$有 2 个零点时，$a\leq -2$，所以“$a\leq -2$”是“$f(x)$有 2 个零点”的充要条件.故选 C.

对点训练　（1）(多选题)已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2+2x+1，x<0，\\|\ln x-2|，x>0，\end{cases}$若方程$f(x)=k(k\in\mathrm{R})$有四个不同的实数解，它们从小到大依次记为$x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$，则(　　)

A．$0<k<1$　　B．$x_1+x_2=-1$

C．$e<x_3<e^2$　　D．$0<x_1x_2x_3x_4<e^4$

ACD【解析】画出函数 $f(x)$ 与函数 $y=k$ 的图象如图所示，



$f(x)$ 在 $(-\infty，-1]$ 上单调递减，值域为 $[0，+\infty)$；在 $[-1,0)$ 上单调递增，值域为 $[0,1)$；在 $(0,e^2]$ 上单调递减，值域为 $[0，+\infty)$；在 $[e^2，+\infty)$ 上单调递增，值域为 $[0，+\infty)$．

则有 $x_1+x_2=-2$，$\ln x_3-2+\ln x_4-2=0$，即 $x_3x_4=e^4$，故 B 错误；

方程 $f(x)=k(k\in\mathbf{R})$ 有四个不同的实数解，则有 $0<k<1$，故 A 正确；

由 $f(x)$ 在 $(0，e^2]$ 上单调递减，值域为 $[0，+\infty)$，$f(e)=|\ln e-2|=1$，$f(e^2)=|\ln e^2-2|=0$，可知 $e<x_3<e^2$，故 C 正确；

由 $x_1<x_2<0<x_3<x_4$，可知 $x_1x_2x_3x_4>0$，又 $x_1x_2x_3x_4=e^4x_1x_2=e^4(-x_1)$

$(-x_2)<e^4\left[\dfrac{(-x_1)+(-x_2)}{2}\right]^2=e^4$.则有 $0<x_1x_2x_3x_4<e^4$，故 D 正确．故选 ACD.

(2) (2024·江苏苏州市质检)函数 $f(x)$满足以下条件：

① $f(x)$的定义域为 R，其图象是一条连续不断的曲线；

② $\forall x \in \mathrm{R}$，$f(x)=f(-x)$；

③ 当 x_1，$x_2 \in (0，+\infty)$，且 $x_1 \neq x_2$ 时，$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$；

④ $f(x)$恰有两个零点.

请写出函数 $f(x)$的一个解析式：________________.

$f(x)=x^2-1$(不唯一)【解析】因为$\forall x\in \mathrm{R}$, $f(x)=f(-x)$, 所以$f(x)$是偶函数, 因为当x_1, $x_2\in(0$, $+\infty)$且$x_1\neq x_2$时，$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$，所以$f(x)$在$(0, +\infty)$上单调递增，因为$f(x)$恰有两个零点，所以$f(x)$图象与$x$轴只有2个交点，所以函数$f(x)$的一个解析式可以为$f(x)=x^2-1$(不唯一).

考点二　抽象函数的零点问题

例 2　（1）(2024·浙江杭州市调研)已知在 R 上的函数 $f(x)$满足对于任意实数 x 都有 $f(2+x)=f(2-x)$，$f(7+x)=f(7-x)$，且在区间[0，7]上只有 $x=1$ 和 $x=3$ 两个零点，则 $f(x)=0$ 在区间[0，2 024]上根的个数为(　　)

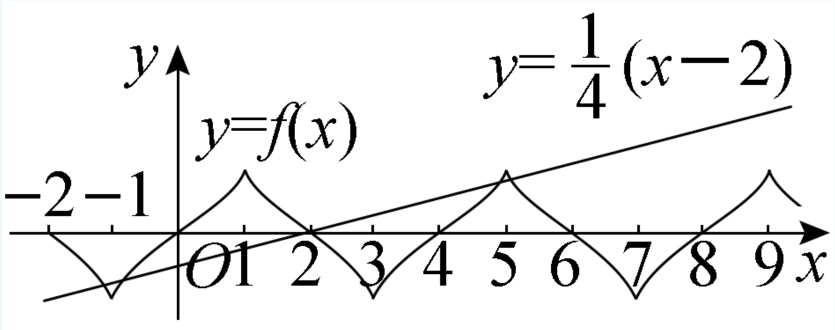
A.404　　B.405　　C.406　　D.203

C【解析】因为 $f(2+x)=f(2-x)$，$f(x)$的图象关于直线 $x=2$ 对称，且 $f(5+x)=f(-x-1)$；因为 $f(7+x)=f(7-x)$，故可得 $f(5+x)=f(-x+9)$；故可得 $f(-x-1)=f(-x+9)$，则 $f(x)=f(x+10)$，故 $f(x)$是以 10 为周期的函数.又 $f(x)$在区间$[0，7]$上只有 $x=1$ 和 $x=3$ 两个零点，根据函数对称性可知，$f(x)$在一个周期$[0，10]$内也只有两个零点，又区间$[0，2\,024]$内包含 202 个周期，故 $f(x)$在$[0，2\,020]$上的零点个数为 $202×2=404$，又 $f(x)$在$(2\,020，2\,024]$上的零点个数与在$(0，4]$上的零点个数相同，有 2 个.故 $f(x)$在$[0，2\,024]$上有 406 个零点，即 $f(x)=0$ 在区间$[0，2\,024]$上有 406 个根.故选 C.

（2）(2024·浙江杭州市段测)定义在 R 上的函数 $f(x)$满足 $f(-x)+f(x)=0$，$f(-x)=f(x+2)$，且当 $x\in[0，1]$时，$f(x)=x^3-x^2+x$，则方程 $4f(x)-x+2=0$ 所有的根之和为(　　)

A.6　　B.12　　C.14　　D.10

D 【解析】 因为$f(-x)+f(x)=0$，$x\in\mathrm{R}$，所以$f(x)$为奇函数.又因为$f(-x)=f(x+2)$，所以$f(x)$的图象关于直线$x=1$对称.所以$f(x+2)=f(-x)=-f(x)$，得$f(x+4)=-f(x+2)=-(-f(x))=f(x)$，所以$f(x)$的一个周期为4.又因为$x\in[0,1]$时，$f'(x)=3x^2-2x+1=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$，所以$f(x)$在$[0,1]$上单调递增，且$f(0)=0$，$f(1)=1$.由题意如图所示：



可得直线 $y=\frac{1}{4}(x-2)$与 $y=f(x)$图象的交点的横坐标为方程 $4f(x)-x+2=0$ 的根，可得在$(-2,2)$与$(2,6)$上均有两个交点，且关于$(2,0)$对称，加上$(2,0)$点，共 5 个点，所以这 5 个交点的横坐标之和为 $2\times2\times2+2=10$. 故选 D.

对点训练 (2024·安徽名校联考)已知定义域为 R 的偶函数 $f(x)$的图象是连续不断的曲线，且 $f(x+2)+f(x)=f(1)$，$f(x)$在$[0，2]$上单调递增，则 $f(x)$在区间$[-100，100]$上的零点个数为(　　)

A.100　　B.102　　C.200　　D.202

A 【解析】 令 $x=-1$，得 $f(1)+f(-1)=f(1)$，即 $f(-1)=0$，因为 $f(x)$为偶函数，所以 $f(1)=0$，则 $f(x+2)+f(x)=f(1)=0$，则 $f(x+2)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x)$是以 4 为周期的函数.因为 $f(x)$在$[0，2]$上单调递增，则 $f(x)$在$[-2，0]$上单调递减，所以 $f(x)$在一个周期内有两个零点，故 $f(x)$在区间$[-100，100]$上的零点个数为 $50\times2=100$.故选 A.

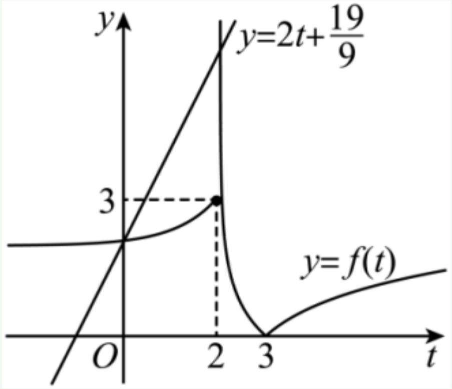
考点三 复合函数的零点问题

考向 1 复合函数的零点个数判定

例 3（1）已知函数 $f(x)=\begin{cases}3^{x-2}+2, x\le 2,\\ \left|\log_3(x-2)\right|, x>2,\end{cases}$ 则函数 $F(x)=f\left(f\left(x\right)\right)-2f(x)-\dfrac{19}{9}$ 的零点个数是（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

C 【解析】 设 $f(x)=t$，则 $F(x)=f(f(x))-2f(x)-\dfrac{19}{9}=f(t)-2t-\dfrac{19}{9}$.令 $F(x)=0$，即 $f(t)-2t-\dfrac{19}{9}=0$.转化为 $y=f(t)$ 与 $y=2t+\dfrac{19}{9}$ 的交点，画出图象如图所示.



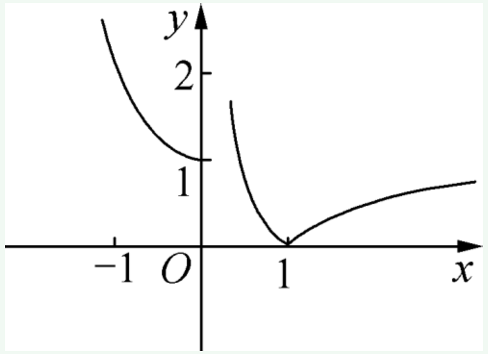
由图象知，$t_1=0, t_2\in(2,3)$，所以函数 $f(x)=t_1=0$ 有一个解，$f(x)=t_2\in(2,3)$ 有三个解，故 $F(x)=f(\ f(x)\ )-2f(x)-\dfrac{19}{9}$ 的零点个数是 4 个.故选 C.

（2）已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg x|, & x>0, \\ 2^{|x|}, & x\le 0,\end{cases}$ 则函数 $y=2(f(x))^2-3f(x)+1$ 的零点个数是________.

5【解析】由 $2f^2(x)-3f(x)+1=0$，得 $f(x)=\frac{1}{2}$ 或 $f(x)=1$，作出函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示.

由图象知 $y=\frac{1}{2}$ 与 $y=f(x)$ 的图象有 2 个交点，$y=1$ 与 $y=f(x)$ 的图象有 3 个交点，所以函数

$y=2(f(x))^2-3f(x)+1$ 的零点有 5 个.



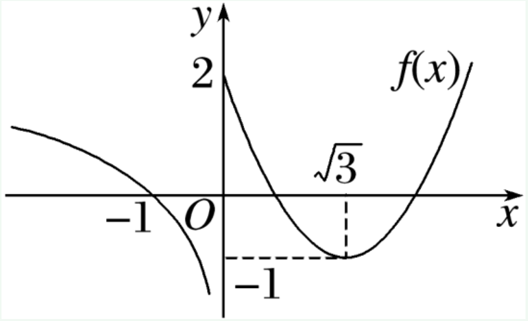
考向 2 根据复合函数零点求参数

例 4 (2024·河南驻马店市模拟)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2\sqrt{3}x+2, & x\geq 0,\\ \ln(-x), & x<0,\end{cases}$ 若函数 $g(x)=[f(x)]^2-af(x)+1$ 有 6 个零点，则实数 a 的取值范围是(　　)

A．$(2,4]$　　　　B．$(2,+\infty)$

C．$\left(2,\dfrac{5}{2}\right]$　　　　D．$\left[\dfrac{5}{2},4\right]$

C 【解析】 设 $t=f(x)$，则由 $g(x)=(f(x))^2-af(x)+1$，可设 $y=h(t)=t^2-at+1$，作出 $f(x)$ 的图象，如图，



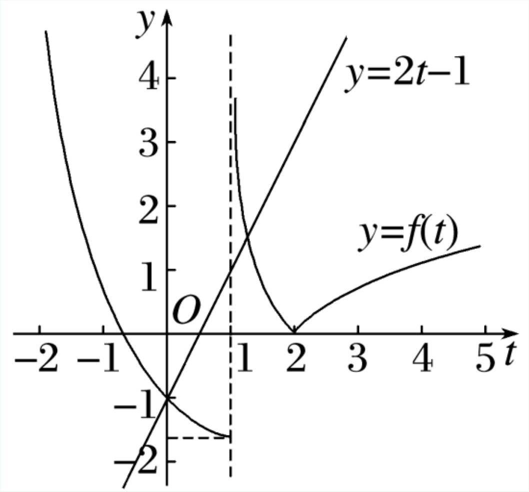
由图可知，当 $t<-1$ 时，$t=f(x)$有且仅有一个解；当 $t=-1$ 或 $t>2$ 时，$t=f(x)$有两个不同的解；当 $-1<t\leq 2$ 时，$t=f(x)$有三个不同的解，令 $h(t)=0$，即 $t^2-at+1=0$，因为函数 $g(x)$有 6 个零点，故需 $t^2-at+1=0$ 在$(-1,2]$内有两个不同的根，所以 $\begin{cases}\Delta=a^2-4>0,\\ h(-1)=1+a+1>0,\\ h(2)=4-2a+1\geq 0,\\ -1<\dfrac{a}{2}<2,\end{cases}$ 解得 $2<a\leq\dfrac{5}{2}$，即 a 的取值范围是$\left(2,\dfrac{5}{2}\right]$.故选 C.

规律方法：

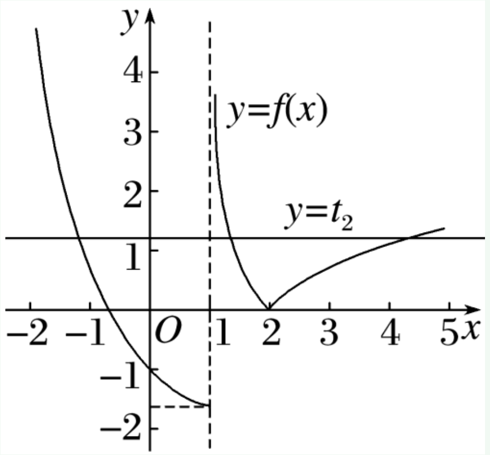
对点训练（1） 已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}-2，x\leqslant 1，\\ |\ln(x-1)|，x>1，\end{cases}$ 则函数 $g(x)=f(f(x))-2f(x)+1$ 的零点个数是(　　)

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

B 【解析】 令 $t=f(x)$，$g(x)=0$，则 $f(t)-2t+1=0$，即 $f(t)=2t-1$，分别作出函数 $y=f(t)$和直线 $y=2t-1$ 的图象，如图所示，



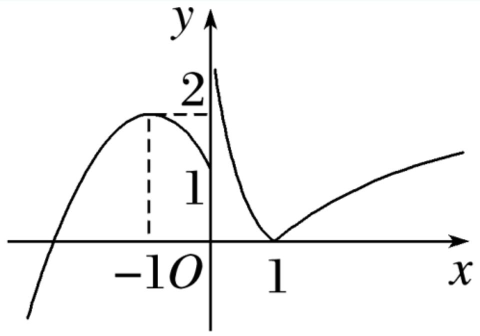
由图象可得有两个交点，横坐标设为 t_1，t_2，则 $t_1=0,1<t_2<2$，对于 $t=f(x)$，分别作出函数 $y=f(x)$的图象和直线 $y=t_2$ 的图象，如图所示，



由图象可得，当 $f(x)=t_1=0$ 时，函数 $y=f(x)$与 x 轴有两个交点，即方程 $f(x)=0$ 有两个不相等的根，当 $t_2=f(x)$时，函数 $y=f(x)$和直线 $y=t_2$ 有三个交点，即方程 $t_2=f(x)$有三个不相等的根，综上可得 $g(x)=0$ 的实根个数为 5，即函数 $g(x)=f(f(x))-2f(x)+1$ 的零点个数是 5.故选 B.

（2）已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg x|, & x>0, \\ -x^2-2x+1, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 且关于 x 的方程 $[f(x)]^2-(2m+1)f(x)+m^2+m=0$ 有 7 个不同的实数解，则实数 m 的取值范围是______.

(0,1] 【解析】 由题意，$f(x)$的图象如图所示，



因为$(f(x))^2-(2m+1)f(x)+m^2+m=0$有 7 个实数解，设 $f(x)=t$，则方程 $t^2-(2m+1)t+m^2+m=0$ 有 2 个不相等的实根 $t_1=m$，$t_2=m+1$ 且 $0<t_1<1\leq t_2<2$ 或 $1\leq t_1<2$，$t_2=2$. 当 $1\leq t_1<2$，$t_2=2$ 时，$m=1$，满足题意；当 $0<t_1<1\leq t_2<2$ 时，$0<m<1\leq m+1<2$，解得 $m\in(0,1)$. 综上，$m\in(0,1]$.

THANKS